DEVOIR2, H2022

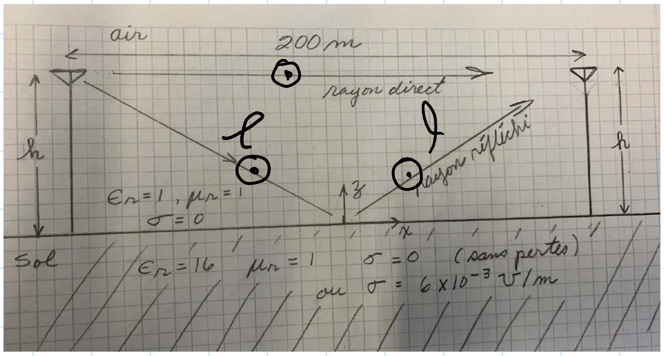
Wednesday, March 16, 2022 1:55 PM

Question 1.

A) Polarisation horizontale
Cette polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence.
Supposons que EA est le champ reçu par le rayon direct, et EB est le champ reçu par le signal réfléchi.
Pour EA nous avons:

$$EA = 1 V/m \, e^{-j\beta 200m}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 10^8}{3\times 10^8} = \frac{2\pi}{3}$$



Le calcul donne:

$$EA = e^{-j400\pi/3} = \underbrace{e^{-j\,399\frac{\pi}{3}}}_{=-1} \; e^{-j\pi/3} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$EA = -\left(1/2 - \sqrt{3}/2\, j\right) \quad V/m$$

Pour le champ EB la distance parcourue par les deux segments du parcours du rayon réfléchi est:

$$2\ell = 2\sqrt{(17.5)^2 + 100^2} = 2 \times 101.519 \, m$$

Le coefficient de réflexion au sol est donné par:

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2 \cos\theta_1 - \eta_1 \cos\theta_2}{\eta_2 \cos\theta_1 + \eta_1 \cos\theta_2}$$

$$\eta_1 = 377\Omega \text{ (air)} \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{16\epsilon_0}} = \frac{377\Omega}{4} = 94.25\,\Omega$$

$$\theta_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{100}{17.5}\right) = 80.07° \; ; \quad \text{Snell: } \theta_2 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_1}{N_{sol}}\right) = 14.25°$$

$$N_{sol} = \sqrt{16\times 1} = 4$$

Le calcul donne:

$$\Gamma_\perp = -0.9149$$

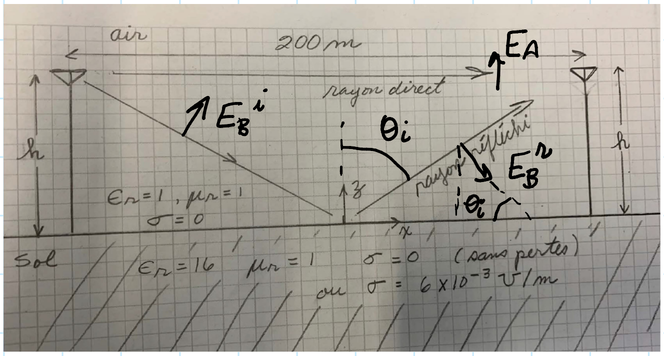
$$\rightarrow E_B = 1 V/m \times (-0.9149)\, e^{-2j\beta\ell} = 0.3906 - j0.8273 \; V/m$$

Au total:

$$E_y = E_A + E_B = -0.1094 + j0.0387$$

$$\rightarrow \boxed{|E_y| = 0.1161 \; V/m}$$

B) Pour la composante z on utilise la même démarche mais avec E parallèle au plan d'incidence. Il faut faire attention au sens de référence du champ parallèle réfléchi, et projeter ce champ sur la direction +z avant d'additionner EA et EB.



$$E_{B_z}^r = -E_B^r \sin\theta_i$$

Pour EA, on a la même démarche qu'en (A), donc: $$E_A = \frac{-1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = E_{A_z}$$

Pour EB nous avons:

$$E_B^r = 1\,V/m\ \Gamma_{/\!/}\ e^{-2j\beta l} \rightarrow E_{B_z}^r = -\sin\theta_1\ \Gamma_{/\!/}\ e^{-2j\beta l}$$

$$\Gamma_{/\!/} = \frac{\eta_2\cos\theta_2 - \eta_1\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_2 + \eta_1\cos\theta_1} = 0.1686$$

Après calculs on trouve: $$E_{B_z}^r = 0.0709 - j\,0.1502$$

$$E_{A_z} + E_{B_z}^r = -0.4291 + j0.7158$$

$$\boxed{|E_z| = 0.8346}$$

C) La composante verticale se transmet mieux que la polarisation horizontale (0.83 versus 0.11). Pour la polarisation horizontale la faible valeur trouvée vient du fait que EA et EB sont quasiment en interférence destructive. Ceci arrive parce qu'il y a une forte réflexion au sol, avec un coefficient de réflexion négatif, et la différence de parcours entre 200m et 2*l est environ 3 mètres, donc près de une longueur d'onde.
Pour la composante verticale, la réflexion est beaucoup plus faible, donc l'interférence entre les deux signaux est moins destructive. Cette faible réflexion vient du fait que l'angle d'incidence de 80 degrés est proche de l'angle de Brewster (atan(Nsol/Nair)=75.96 degrés).

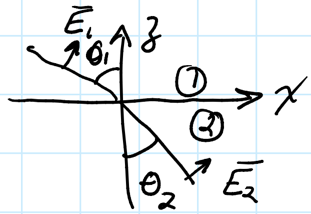
D) Puisque le sol a des pertes, essayons de voir si on peut approximer le sol comme un matériau sans pertes, ou comme un matériau bon conducteur. Pour ce faire on calcule la constante p:

pertes, ou comme un matériau bon conducteur. Pour ce faire on calcule la constante p:

$$p = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} = \frac{6 \times 10^{-3}}{2\pi \times 10^{8} \times 16 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 0.06$$

$$0.01 < p < 100 \rightarrow \text{semiconducteur} \rightarrow \underline{\epsilon}_2 = 16\epsilon_0 - j\frac{\sigma}{\omega}$$

On obtiendra les champs transmis dans le sol à l'aide du coefficient de transmission. Celui-ci nécessite de calculer cos(theta2) dans le cas d'un matériau avec pertes. Pour ce faire, on doit d'abord obtenir la constante de propagation complexe dans le sol:



$$\underline{\gamma} = \sqrt{-\omega^2 \mu_2 \underline{\epsilon}_2} \quad \text{avec } \mu_2 = \mu_0$$

$$= 0.2825 + j\, 8.3862$$

$$\text{et} \quad \bar{\underline{\gamma}} = \underline{\gamma}\left(\sin\theta_2\, \hat{x} - \cos\theta_2\, \hat{z}\right)$$

$$\bar{E}_2 \propto e^{-\underline{\gamma}\sin\theta_2 x}\, e^{+\underline{\gamma}\cos\theta_2 z} \quad +$$

$$\underline{\gamma}_x \equiv \underline{\gamma}\sin\theta_2 \qquad \underline{\gamma}_z = \underline{\gamma}\cos\theta_2$$

$$\bar{E}_1 \propto e^{-j\beta_1 \sin\theta_1 x}\, e^{+j\beta_1 \cos\theta_1 z} \quad +$$

$+$ car propagation vers $-\hat{z}$

Selon la loi de Snell, la variation selon x le long de la frontière doit être la même dans les deux régions, donc:

$$\underline{\gamma}\sin\theta_2 = j\beta_1 \sin\theta_1 \rightarrow \sin\theta_2 = \frac{j\beta_1 \sin\theta_1}{\underline{\gamma}} = 0.2457 + j0.0083$$

$$\text{et} \quad \cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} = \pm\,(0.9694 - j\,0.002)$$

Quel signe faut-il choisir? Selon la figure, on doit s'assurer que E2 diminue en intensité si z devient de plus en plus négatif. (NB: il est aussi possible de renverser le sens de l'axe z, et s'arranger pour que le champ diminue si z devient alors plus positif).

$$E_2 \propto e^{+\underline{\gamma}\cos\theta_2 z} \qquad z < 0$$

$$\underline{\gamma}\cos\theta_2 = \pm(0.2914 + j\, 8.1288)$$

$$= \alpha_z + j\beta_z$$

Puisque z<0, il faut choisir le signe + pour que alpha_z * z sonne un nombre négatif, d'où:

$$\cos\theta_2 = +\,0.9694 - j0.002$$

Pour calculer le coefficient de transmission il nous faut l'impédance dans le sol:

$$\underline{\eta}_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\underline{\epsilon}_2}} = 94.0447 + j\,3.1675$$

$$\rightarrow \quad T_{//} = \frac{2\,\underline{\eta}_2 \cos\theta_1}{\underline{\eta}_2 \cos\theta_2 + \eta_1 \cos\theta_1} = 0.2077 + j0.0032$$

$$|T_{//}| = 0.2077$$

À z=0- on a: $\boxed{|E_{//}^t| = 1 \times 0.2077 = 0.2077 \text{ V/m}}$

À z=-10 m on a

$$\boxed{\begin{aligned} |E^t(z=-10\,m)| &= 1 \times |T_\perp|\, e^{\alpha_3(-10m)} \\ &= 0.0113 \text{ V/m} \end{aligned}}$$

On note une atténation de $20 \log_{10}\left(\frac{0.2077}{0.0113}\right) = 25.3 \text{ dB}$

sur 10 mètres i.e 2.53 dB/mètre

$$\rightarrow \quad T_{//} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_1}{\eta_2 \cos\theta_2 + \eta_1 \cos\theta_1} = 0.2077 + j0.0032$$

$$|T_{//}| = 0.2677$$

À z=0- on a:

$$\boxed{|E_{//}^t| = 1 \times 0.2077 = 0.2077 \text{ V/m}}$$

À z=-10 m on a

$$\boxed{\begin{aligned} |E^t(z=-10\,m)| &= 1 \times |T_\perp|\, e^{\alpha_3(-10m)} \\ &= 0.0113 \text{ V/m} \end{aligned}}$$

On note une atténation de

$$20 \log_{10}\left(\frac{0.2077}{0.0113}\right) = 25.3\,dB$$

sur 10 mètres i.e 2.53 dB/mètre

Question 2

A) f=1.2 x fc = 28 GHz (1) Puisque a >2*b, le 2e mode à se propager sera TE20. Sa fréquence de coupure sera

A) f=1.2 x fc = 28 GHz (1)
Pour TE10, fc= u_TEM / (2a) (2)
u_TEM= c/sqrt(epsilon_r) (3) c=3E8 m/s
Pour RO3003, epsilon_r=3.00

Combinant (1) et (2):
1.2 u_TEM/(2a) = 28 GHz
Puis avec (3):
a=1.2 u_TEM/(2*28 GHz)=1.2 c/(sqrt(3)*2*28e9)= $\boxed{3.711 \text{ mm}}$

Puisque a >2*b, le 2e mode à se propager sera TE20. Sa fréquence de coupure sera u_TEM/a, ou 2* fc de TE10, i.e. 2*28 GHz/1.2= 46.66 GHz

$\boxed{\text{Le mode TE10 sera donc le seul à se propager entre 23.33 GHz et 46.66 GHz.}}$

B) On calcule la constante de propagation kz avec:

$$k_z = \sqrt{\beta^2 - (k_t)^2}$$

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \underline{\epsilon} \qquad k_t = \pi/a \text{ pour } TE_{10}$$

$$\underline{\epsilon} = 3\epsilon_0 - j\epsilon'' \qquad \epsilon'' = \epsilon' \times \tan\delta$$

$$= \epsilon_0 (3 - j0.003) \qquad = 3\epsilon_0 \times 0.001$$

$$= 0.003\epsilon_0$$

$$\rightarrow k_z = \pm (562.3 - j0.918)$$

Puisque $E \propto e^{-jk_z z}$ pour propagation en direction $+z$, on veut signe $\oplus$

$$e^{-j562.3z} \underbrace{e^{-j(-j0.918)z}}_{= e^{-\alpha_z z}}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha_z = 0.918 \text{ neper/m}}$$

C) La distance entre deux minimums est de lambdag/2. Dans la partie B) on a obtenu kz. La partie réelle de kz correspond à la constante beta_guidé, i.e.:

$$Re\{k_z\} = 562.3 = \beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \rightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{562.3} = 1.117 \text{ cm}$$

$$\boxed{\Delta d_{min} = \lambda_g/2 = 5.587 \text{ mm}}$$

Autre approche: puisque les pertes sont très faibles on peut ignorer ϵ''

faibles on peut ignorer ϵ''

$$\rightarrow \quad \lambda_g = \frac{\lambda_{TEM}}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \qquad \lambda_{TEM} = \frac{u_{TEM}}{28\,GHz} = 6.185\,mm$$

$$\lambda_g = \frac{6.185\,mm}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1.2}\right)^2}} = 1.119\,cm$$

$\boxed{\Delta d_{min} = 5.595\,mm}$, très proche du résultat précédent

D) $TE_{10} \rightarrow E_x = 0$, $E_z = 0$ $\quad E_y = \left(\frac{-j\omega\mu}{\pi/a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_z z}$

et $P_z = 1\,watt = \frac{1}{4} |H_0|^2 \eta\, a\, b \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \sqrt{1-(f_c/f)^2}$

Avec $\frac{f}{f_c} = 1.2$, $\eta = \frac{377\Omega}{\sqrt{3.0}}$, $a = 3.711\,mm$, $b = 1.52\,mm$

on trouve $|H_0| = 63.97$ Amp/m

Le max de $|E_y|$ est dans le plan $x = a/2$,

car $\sin \frac{\pi x}{a} = \sin \pi/2 = 1$

$$\rightarrow \boxed{\max(|E_y|) = \frac{\omega\mu}{\pi/a} |H_0| = 16\,709\ V/m}$$

NB: pour ceux qui auraient tenu compte du Gamma=0.25 donné à la question c), il faut AUGMENTER le résultat ci-haut par (1 +abs(Gamma)) soit par 1.25, car il faut alors superposer l'onde incidente de 1 watt et l'onde réfléchie. Le champ maximum est toujours dans le plan x=a/2, mais à des valeurs particulières de z correspondant au maximum, et séparés de lambda_g/2. La valeur max de l'amplitude de E est alors 20886 V/m.
Si par contre on considère que le 1 watt spécifié est la puissance nette fournie (i.e. Pin), alors la puissance incidente Pinc est 1/(1-|Gamma|^2)= 1.0666 Watt. Dans ce cas le champ maximum observé devrait être multiplié par sqrt(1.0666 watt/1 watt) car le champ est proportionnel à la racine carré de la puissance. On aurait alors 20886*sqrt(1.06666)=21570 V/m. Donc il y a 3 réponses possibles: 16709 (gamma=0), 20866 (gamma=0.25 et Pincident=1watt) et 21570 (gamma=0.25 et Pin=1 watt). Les 3 réponses sont acceptées.

E) Pour la vitesse de groupe nous avons vu que $$u_g = u_{TEM}\sqrt{1-(f_c/f)^2}$$

Ici le guide contient de l'air donc on peut supposer que uTEM=c=3e8 m/s. Le mode qui aura la plus grande vitesse de groupe sera celui avec le plus petit fc. Puisque le guide est carré, le plus petit fc est le même pour les modes TE10 et TE01, et fc = uTEM/(2a)= 3e8/(2*15cm)=1 GHz. Pour le signal de 28 GHz on trouvera une vitesse de groupe: ug=3e8 * sqrt(1-(1/28)^2)= 2.998e8m/s.

Pour trouver le mode le plus lent, il faut identifier le mode qui aura la fréquence de coupure la plus élevée, mais qui sera toutefois inférieure à 28 GHz, car on doit avoir f>fc pour avoir la propagation, i.e.

$$f_c^{mn} = \frac{u_{TEM}}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2} \qquad a=b=15\,cm$$

$$\frac{u_{TEM}}{2a}\sqrt{m^2+n^2} < 28\,GHz$$

$$m^2+n^2 < \left(\frac{2a\ 28GHz}{u_{TEM}}\right)^2 = \left(\frac{0.3\times 28GHz}{3\times10^8}\right)^2 = 28^2 = 784$$

Il faut donc trouver les m et n les dont la somme des carrés s'approchera le plus possible de 784, tout en y étant inférieur. Après calculs sur matlab on trouve que les indices qui satisfont ce critère sont:
m=27 et n=7, ainsi que n=7 et m=27. En effet:

7^2 +27^2=778 778
Les modes les plus lents dans le guide sont donc TE_27,7, TE_7,27, TM_27,7 et TM_7,27, avec une fréquence de coupure de :

$$f_c = \frac{u_{TEM}}{2}\sqrt{\frac{27^2+7^2}{(15\,cm)^2}} = \frac{u_{TEM}}{30\,cm}\sqrt{778}$$
$$= 27.89\,GHz$$

La plus lente vitesse de groupe sera donc $$\min(u_g) = u_{TEM}\sqrt{1-\left(\frac{27.89}{28}\right)^2}$$
$$= 2.62\times10^7\ m/s$$

Utiliser ce guide d'onde causera une dispersion de l'information car il y a un très grand écart de vitesse de groupe (2.62e7 à 2.998e8) entre les modes les plus rapides et les plus lents. Ce n'est donc pas une bonne solution en pratique.

QUESTION 3

A) On calcule la constante d'atténuation du mode TE10 dans un guide rectangulaire avec l'expression suivante:

$$\boxed{\alpha_{cu} = R_s \frac{1 + \frac{2b}{a}(f_c/f)^2}{b\eta\sqrt{1-(f_c/f)^2}}}$$

$$a = 3.711 \text{ mm} \quad b = 1.52 \text{ mm} \quad f = 28 \text{ GHz}$$

$$f_c = \frac{u_{TEM}}{2a} = \frac{(3\times10^8/\sqrt{3.0})}{2\times 3.711 \text{ mm}} = 23.33 \text{ GHz}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{3\epsilon_0}} = 217.66\,\Omega$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi\times28\times10^9 \times 4\pi\times10^{-7}}{2\times5.8\times10^7}} = 0.0436\,\Omega$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{cu} = 0.3738 \text{ neper/m}}$$

Longueur de guide pour une perte de 3 dB? On sait que 3 dB représente une perte de puissance de 50%, donc:

$$P(z) = P(0)\, e^{-2\alpha z} \rightarrow \frac{P(z)}{P(0)} = \frac{1}{2} = e^{-2\alpha z}$$

$$2 = e^{2\alpha z}$$

$$z = \frac{\ln(2)}{2\alpha} = 0.927 \text{ m}$$

On aura donc plus de 3 dB de pertes si la longueur du guide excède 0.927 mètre.

B) L'impédance caractéristique Z0 d'une ligne coaxiale (mode TEM) est donnée par:

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln b/a = 50\,\Omega$$

$$\eta_{Teflon} = \sqrt{\frac{\mu_0}{2.1\epsilon_0}} = 260.15\,\Omega$$

$$2b = 0.1175 \text{ pouce} \quad (= 2.9845 \text{ mm})$$

$$\frac{2\pi Z_0}{\eta} = \ln\left(\frac{2b}{2a}\right) \longrightarrow \boxed{2a = \frac{2b}{e^{2\pi 50/\eta}} = 0.0351 \text{ pouce} = 0.892 \text{ mm}}$$

C) La constante d'atténuation due aux pertes dans le cuivre se calcule avec l'expression développée dans l'exercice 3.9, fait lors de la séance de TP du 1er avril, i.e.:

$$\boxed{\alpha_{Cu} = \frac{1}{4\pi Z_0} R_s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

$$Z_0 = 50\,\Omega \qquad R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 20\times10^9 \times 4\pi\times10^{-7}}{2\times 5.8\times10^7}} = 0.0369\,\Omega$$

$$a = 0.892\text{ mm}/2 \qquad b = 2.9845\text{ mm}/2$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = 0.171 \text{ neper}/\text{m}}$$

Pour comparer avec la fiche technique du fabriquant il faut convertir alpha en dB par mètre, puis en dB par 100 pieds

$$\alpha_{dB} = -20 \log_{10} e^{-\alpha \times 1\text{m}} = 1.48 \text{ dB/m}$$

Avec 1 pied $\approx$ 0.3 mètre $\rightarrow$ 100 pi = 30 m

$$\alpha_{dB} = 1.48 \frac{\text{dB}}{\text{m}} \times \frac{30\text{ m}}{100\text{ pi}} = \boxed{44.5 \text{ dB}/100 \text{ pieds}}$$

Le fabriquant spécifie des pertes de 70 dB par 100 pieds, donc bien au delà des pertes dues au cuivre. Notre calcul de 44.5 dB/100 pieds ne tien pas compte des pertes dans le Teflon. Donc la donnée fournie par le fabricant est plausible, ou du moins conservatrice du point de vue de l'utilisateur.

NB: Il est possible que la rugosité de surface sur les conducteurs internes et externes augmentent les pertes dues au cuivre. Cet effet n'est pas pris en compte dans notre calcul.

VOIR 3.10 pour solution

D) Considérons la solution générale des modes TM dans un guide d'onde à géométrie cylindrique. Pour le mode TM on cherche la solution pour Ez, et on en déduit ensuite toutes les autres composantes.

$$E_z = \left[A\, J_m(k_t\rho) + B\, Y_m(k_t\rho)\right]\left[C \cos m\varphi + D \sin m\varphi\right] e^{-jk_z z}$$

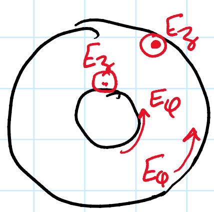
$$E_z = [A\, J_m(k_t\rho) + B\, Y_m(k_t\rho)][C \cos m\varphi + D \sin m\varphi]\, e^{-jk_z z}$$

$$k_t^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

On cherche les modes à symétrie azimutale, i.e. Une solution qui ne dépend pas de phi. On doit donc mettre m=0 dans l'équation précédente, i.e.

$$E_z = [A\, J_0(k_t\rho) + B\, Y_0(k_t\rho)]\, e^{-jk_z z}$$

Comme pour le guide circulaire, on doit appliquer les conditions frontières, soit Etan=0, sur les parois métalliques à rho=a et à rho=b. Il y a deux composantes de champ E qui sont tangentielles à ces surfaces: Ephi et Ez



$E_z = 0$ à $\rho = a$ et $\rho = b$

$E_\varphi = 0$ à $\rho = a$ et $\rho = b$

Il nous faut l'expression de Ephi pour appliquer ces conditions. Nous avons vu que:

$$E_\varphi = -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{car } m = 0$$

Il nous suffit donc d'appliquer les conditions sur Ez

$\rho = a$ $\qquad A\, J_0(k_t a) + B\, Y_0(k_t a) = 0 \qquad (1)$

$\rho = b$ $\qquad A\, J_0(k_t b) + B\, Y_0(k_t b) = 0 \qquad (2)$

$(1) \qquad A = -B\, Y_0(k_t a) / J_0(k_t a)$

$(2) \qquad -B \dfrac{Y_0(k_t a)}{J_0(k_t a)} J_0(k_t b) + B\, Y_0(k_t b) = 0$

$$\rightarrow \quad f(k_t) = Y_0(k_t a)\, J_0(k_t b) - J_0(k_t a)\, Y_0(k_t b) = 0$$

Une fois qu'on a trouvé les valeurs de kt qui satisfont cette équation (numériquement), on peut calculer la fréquence de coupure, sachant que kz est nul à la coupure:

$$k_t^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$k_z = 0$ @ $\omega = \omega_c \quad \rightarrow \quad k_t = \omega_c \sqrt{\mu \epsilon}$

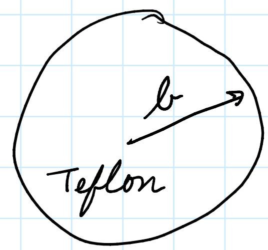
$$k_z = 0 \ @ \ \omega = \omega_c \rightarrow k_t = \omega_c \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\rightarrow \boxed{f_c = \frac{k_t}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{k_t}{2\pi} u_{TEM}}$$

E) Dans un guide circulaire, les deux premiers modes à se propager sont TE11 et TM01

$$TE_{11}: \quad k_t b = 1.8412 \qquad b = \frac{2.9845 \text{ mm}}{2} = 1.4922 \text{ mm}$$

$$TM_{01}: \quad k_t b = 2.4049$$



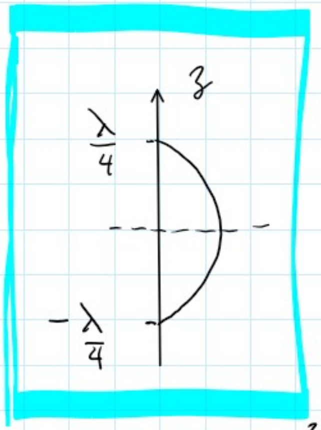
$$k_t = \frac{\omega_c}{u_{TEM}} \rightarrow f_c = \frac{k_t}{2\pi} u_{TEM}$$

$$u_{TEM} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{2.1}} = 2.07 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} TE_{11}: & f_c = \frac{2.07 \times 10^8}{2\pi} \frac{1.8412}{1.4922 \times 10^{-3}} = 40.65 \text{ GHz} \\ TM_{01} & f_c = \frac{2.07 \times 10^8}{2\pi} \frac{2.4049}{1.4922 \times 10^{-3}} = 53.09 \text{ GHz} \end{array}}$$

QUESTION 4

A) Utilisant l'expression du courant donnée on peut tracer la courbe suivante:



B) Selon les notes de cours sur les sources distribuées (p. 52):

$$E_\theta = \frac{j \eta \beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin\theta \int_{z_1}^{z_2} I(\bar{r}') e^{j\beta \bar{r}' \cdot \hat{r}} \, dz'$$

$\bar{r}' = z' \hat{z}$

$\hat{r}' \cdot \hat{r} = z' \cos\theta$

L'intégrale devient : $\displaystyle\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} I_0 \cos\beta z' \, e^{j\beta z' \cos\theta} \, dz'$

$$= \frac{I_0}{2} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \left(e^{j\beta z'} + e^{-j\beta z'}\right) e^{j\beta z' \cos\theta} \, dz'$$

$$= \frac{I_0}{2} \left(\frac{e^{j\beta(1+\cos\theta) z'}}{j\beta(1+\cos\theta)} + \frac{e^{j\beta(\cos\theta - 1) z'}}{j\beta(\cos\theta - 1)} \right) \Bigg|_{-\lambda/4}^{\lambda/4}, \quad \beta\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{I_0}{2} \left[\frac{e^{j(1+\cos\theta)\pi/2} - e^{-j(1+\cos\theta)\pi/2}}{j\beta(1+\cos\theta)} + \frac{e^{j(\cos\theta-1)\pi/2} - e^{-j(\cos\theta-1)\pi/2}}{j\beta(\cos\theta - 1)} \right]$$

$$= \frac{2jI_0}{2j\beta} \left[\frac{\sin[\pi/2(1+\cos\theta)]}{1+\cos\theta} - \frac{\sin[(\cos\theta - 1)\pi/2]}{1-\cos\theta} \right]$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = \cos(\pi/2 \cos\theta)$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\pi/2 \cos\theta)$$

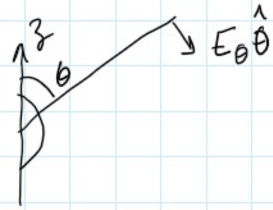
$$= \frac{I_0}{\beta} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \left[\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta} \right]$$

$$= \frac{I_0}{\beta} \cos(\pi/2 \cos\theta) \left[\frac{1-\cos\theta + 1 + \cos\theta}{1-\cos^2\theta} \right] = \frac{2I_0}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Remettant le résultat dans E_θ :

Remettant le résultat dans E_θ :

$$\boxed{E_\theta = \frac{j I_0 \eta}{2\pi r} e^{-j\beta r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}}$$

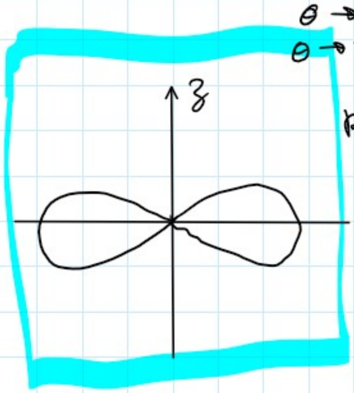


C)
PlanE: plan parallèle à E qui passe par l'antenne, comme par exemple le plan xz ou le plan yz, ou tout autre plan tangent à l'axe z. Dans un tel plan phi est fixe et theta varie de 0 à pi.

$$E_\theta \propto \frac{\cos(\pi/2 \cos\theta)}{\sin\theta}$$

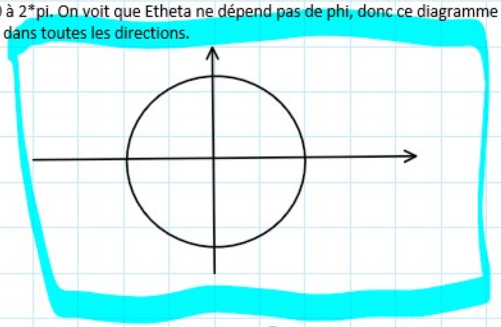
θ	$\lvert \cos(\pi/2 \cos\theta) / \sin\theta \rvert$
0	0*
$\pi/4$	0.628
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	0.628
π	0*

$$* \lim_{\substack{\theta\to 0\\ \theta\to\pi}} \frac{\cos(\pi/2 \cos\theta)}{\sin\theta} = \lim_{\substack{\theta\to 0\\ \theta\to\pi}} \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)\sin(\pi/2\cos\theta)}{\cos\theta} = 0$$



plan E

Plan H: Plan qui passe par l'antenne et qui est parallèle au champ H: c'est le plan horizontal (plan xy) où theta=pi/2 et phi varie de 0 à 2*pi. On voit que Etheta ne dépend pas de phi, donc ce diagramme de rayonnement est uniforme dans toutes les directions.



D) On utilise la formule de Friis

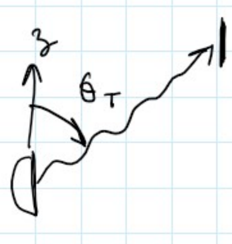
$$P_R = P_T\, G_T\, G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{3\times10^8\ m/s}{2.45\times10^9\ Hz} = 0.122\ m$$

$$r = \sqrt{100^2 + 60^2} = 116.62\ m$$

$$P_T = 100\ mW$$

$$G_T(\theta_T)\ ?$$



$$\theta_T = \arctan\frac{100}{60} = 59°$$

$$G_T = \varepsilon\,(1-|\Gamma|^2)\,D(\theta_T)$$

$$\Gamma = \frac{75-50}{75+50} = 0.2 \quad , \quad \varepsilon = 0.9 \text{ (efficacité de rayonnement}$$

$$D \propto P_r^{ant} \propto |E_\theta|^2 \propto \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta}$$

$$\text{Donc} \quad D = \text{constante} \times \left(\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{\sin\theta}\right)^2$$

On sait que $D_{max} = 1.64$ et que le max de E_θ est à $\theta = \pi/2$ (voir C). Donc :

$$1.64 = \text{constante} \times \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\right)^2\Bigg|_{\theta=\pi/2} = \text{constante}$$

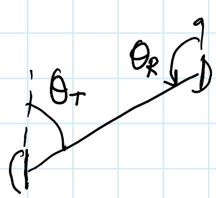
La valeur de la constante est donc 1.64.

$$\rightarrow D(\theta) = 1.64\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\right)^2 . \quad \text{à } \theta = \theta_T = 59°, \; D(\theta) = 1.06$$

$$\rightarrow G_T(\theta_T) = 0.9 \times (1-(0.2)^2) \times 1.06 = 0.919$$

G_R ? Les antennes de transmission et de réception sont identiques, donc elles ont les mêmes gains, i.e.;

$$G_R(\theta_R) = 0.9 \times (1-(0.2)^2) \times 1.64\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta_R)}{\sin\theta_R}\right)^2$$

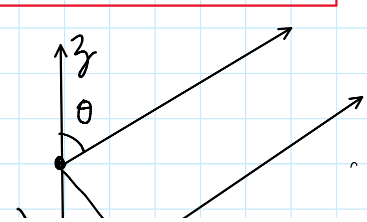


On voit que $\theta_R = \pi - \theta_T$.
$G(\theta)$ étant symétrique par rapport à $\theta = \pi/2$ on en déduit que $G(\theta) = G(\pi-\theta)$

$$\rightarrow G_R(\theta_R) = 0.919$$

En substituant toutes les valeurs trouvées dans la formule de Friis on trouve:

$$\boxed{P_R = 5.85 \times 10^{-7}\ \text{mW}}$$

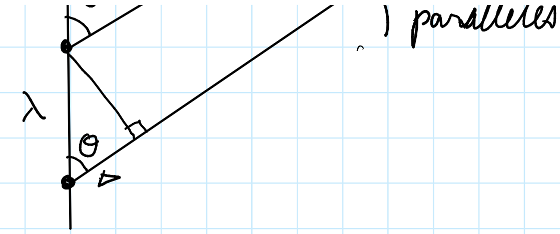


rayons parallèles

E) Pour trouver les directions de rayonnement maximal on doit d'abord considérer un réseau de deux antennes isotropes. Dans le champ lointain on considère que les rayons partant des deux antennes sont parallèles. La différence de parcours entre les deux rayons est

$$\Delta = \lambda\cos\theta$$

antennes isotropes. Dans le champ lointain on considère que les rayons partant des deux antennes sont parallèles. La différence de parcours entre les deux rayons est



$$\Delta = \lambda \cos\theta$$

Les maximums se produisent lorsque la différence de parcours est un multiple de lambda, soit:

$$\Delta = \lambda \cos\theta = n\lambda \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\rightarrow \cos\theta = n$$

$n=0 \rightarrow \theta = \pi/2$
$n=-1 \rightarrow \theta = \pi$
$n=+1 \rightarrow \theta = 0$
$n = \pm 2 \quad \theta$ non réel

maximums pour $\theta = 0, \pi/2, \pi$

Il faut aussi considérer le facteur d'élément, soit le patron de rayonnement du dipôle demi-onde. On a vu en C que cet élément a un maximum à theta=pi/2, et des nuls à theta=0 et theta=pi. Donc, il n'y aura qu'un seul maximum situé à theta=pi/2.

Pour trouver les directions des nuls de rayonnement, on cherche les valeurs de theta pour lesquelles la différence de parcours est un multiple impair de lambda/2, afin que les deux rayons soient complètement hors phase, i.e.:

$$\Delta = \lambda \cos\theta = \pm(2n+1)\lambda/2 \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$\rightarrow \cos\theta = \pm\frac{(2n+1)}{2}$$

$n=0 \rightarrow \cos\theta = \pm 1/2 \rightarrow \theta = 60^\circ$ et $\theta = 120^\circ$

$n=1 \rightarrow \cos\theta = \pm 3/2 \quad \theta$ non réel

Donc on a des nuls à $\theta = 60^\circ$ et $\theta = 120^\circ$,

en plus des nuls causés par le facteur d'élément

à $\theta = 0$ et $\theta = 180^\circ$

$$\boxed{\Rightarrow \text{Nuls à } \theta = 0, 60^\circ, 120^\circ \text{ et } 180^\circ}$$

Supplément d'information (pas demandé)