

ELE3500 Chapitre 5: Antennes

Avril 2021

©Jean-Jacques Laurin

Introduction

- Sert de transition entre:
 - Onde en propagation guidée et onde en propagation libre, i.e. antenne en mode TRANSMISSION
 - Onde en propagation libre et onde en propagation guidée, i.e. antenne en mode RÉCEPTION

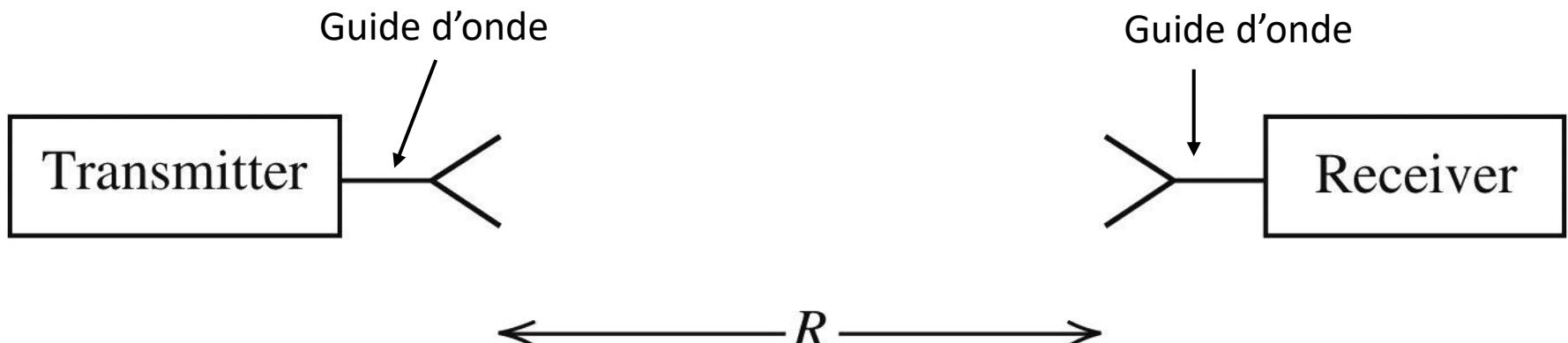


Figure 4-4

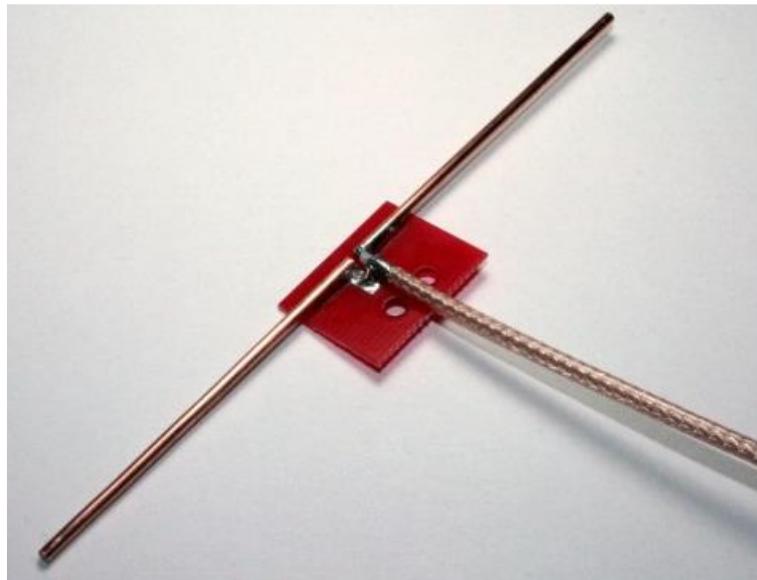
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Introduction

- Composant essentiel dans un multitude d'applications:
 - Télécommunications
 - Télédétection (i.e. radars)
 - Imagerie médicale
 - Transport de puissance sans fils
 - Géolocalisation (GPS)...

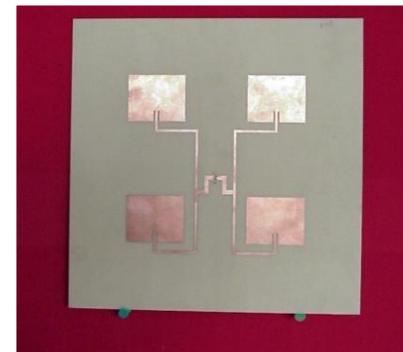
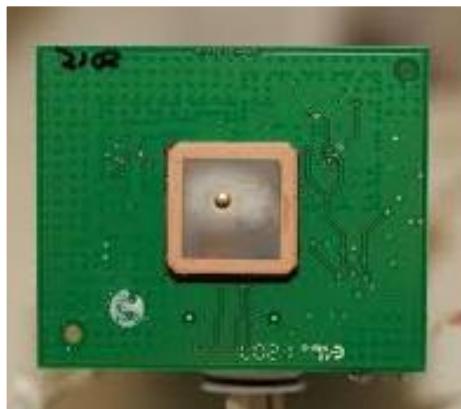
Introduction (suite)

- Antennes filaires



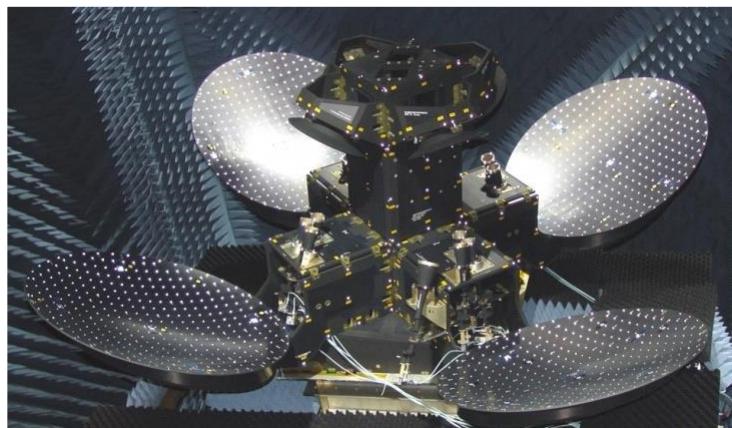
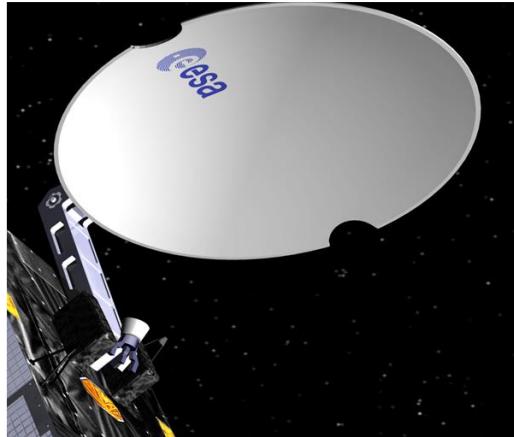
Introduction (suite)

- Antennes imprimées (ou microruban)



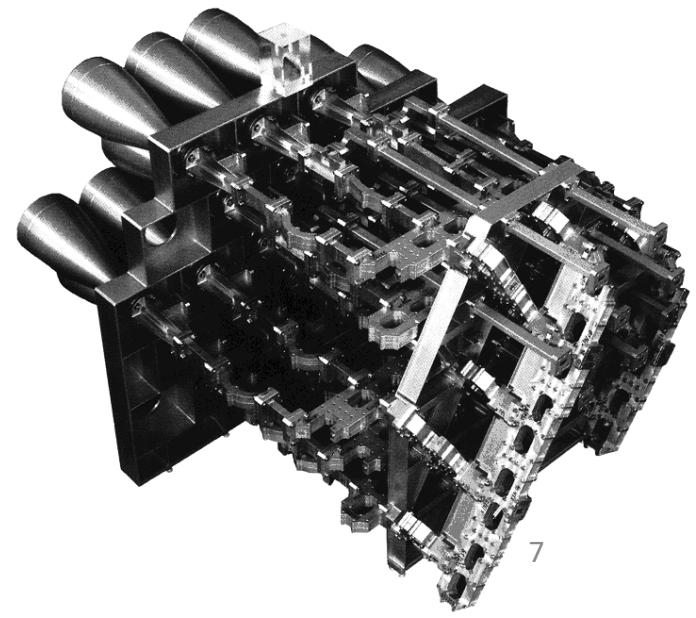
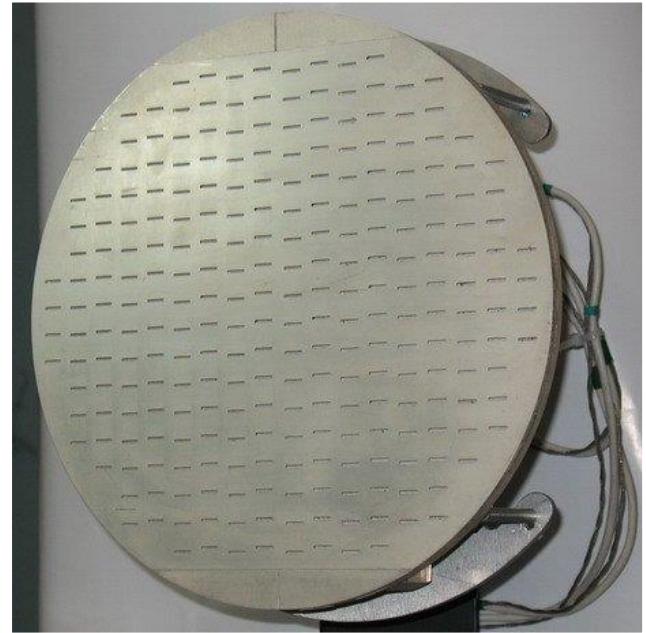
Introduction (suite)

- Antennes à ouverture



Introduction (suite)

- Réseaux d'antennes



Notations utilisées dans ce document

- Vecteurs en caractères gras, non italique, par exemple: \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{P} , \mathbf{r} , \mathbf{r}' , $d\mathbf{A}$, $d\mathbf{E}$,...
- Vecteurs unitaires en caractères gras, non italique et avec accent circonflexe, par exemple:
 $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$, $\hat{\mathbf{z}}$...
- Scalaires en caractères non gras, italique, par exemple:
 r , R , θ , φ , E_θ , H_φ , P_r ...

5.1 Système de coordonnées

- L'analyse des antennes fait appel aux coordonnées sphériques

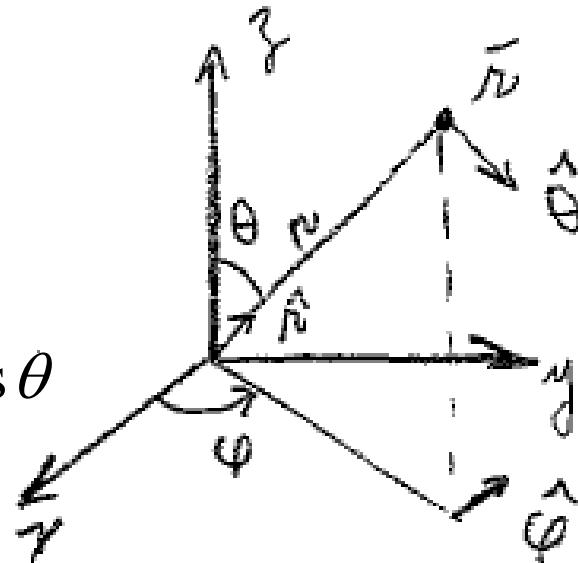
- Coordonnées d'un point:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta$$

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} r$$

- Vecteurs unitaires:

$$\hat{\mathbf{r}}(\theta, \varphi), \hat{\mathbf{\theta}}(\theta, \varphi), \hat{\mathbf{\phi}}(\theta, \varphi)$$



5.1 Système de coordonnées (suite)

- Coordonnées d'un point d'observation:

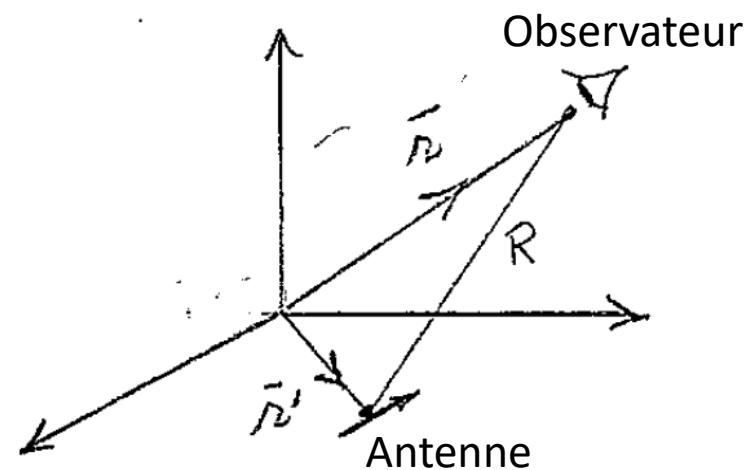
\mathbf{r}

- Coordonnées d'un point situé sur l'antenne

\mathbf{r}'

- Quantité importante: Distance entre un point sur l'antenne et le point d'observation:

$$R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$$



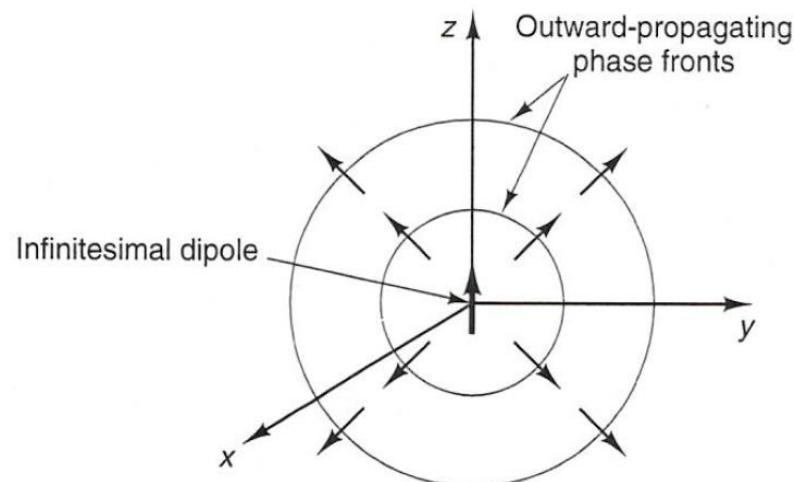
5.2 Antenne de type « dipôle élémentaire »

- Élément de courant de longueur dz situé à l'origine
- Courant alternatif en direction $+z$ uniforme le long de dz
- Phaseur courant I :

$$I_{complexe} = I e^{j\omega t}$$

- On a que:

$$\mathbf{r}' = 0, \text{ donc } R = \|\mathbf{r}\| = r$$



5.2 Antenne de type « dipôle élémentaire »

- Pour cette source, on peut obtenir une solution analytique pour le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} :

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi r} e^{-j\beta r} \hat{\mathbf{z}}$$

- Le vecteur \mathbf{A} permet de calculer l'intensité du champ magnétique avec:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

- Le vecteur \mathbf{H} permet de calculer le champ électrique avec:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}$$

5.2 Antenne de type « dipôle élémentaire »

- Champs électriques et magnétiques du dipôle valides pour toute distance r entre le dipôle et l'observateur:

$$d\bar{H} = \hat{\phi} - \frac{I dz}{4\pi} \beta^2 \left[\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right] \sin\theta e^{-j\beta r}$$

$$d\bar{E} = -h \frac{I dz \beta^2}{4\pi} \times \left\{ \hat{r} \cos\theta \left[\frac{2}{(j\beta r)^2} + \frac{2}{(j\beta r)^3} \right] \right.$$

$$\left. + \hat{\theta} \sin\theta \left[\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right] \right\} e^{-j\beta r}$$

- Si le dipôle n'est pas situé à l'origine on remplace r par R ($= \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$)

5.2.1 Champs lointains

- Si on est loin de l'antenne r est très grand, alors $1/r \gg 1/r^2 \gg 1/r^3$, donc:

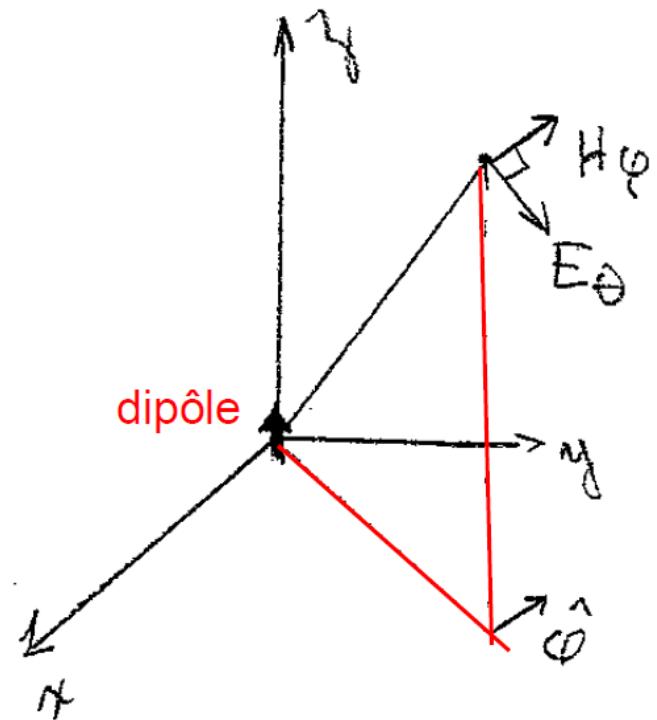
$$d\mathbf{E} \approx \hat{\theta} j\eta\beta Idz \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}$$

$$d\mathbf{H} \approx \hat{\phi} j\beta Idz \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}$$

- On appelle les termes en $1/r$ « le champ lointain »
- Concept applicable à toutes les antennes

5.2.1 Champs lointains

- Facteur $\frac{e^{-j\beta r}}{r}$ implique:
 - Surfaces de phase constante sont des sphères (numérateur)
 - Surfaces d'amplitude constante sont des sphères (facteur $1/r$)
 - → **Onde sphérique en directions \hat{r}**
- **E** perpendiculaire à **H**; **E** et **H** perpendiculaires à \hat{r} → Onde TEM en direction \hat{r}
- On a que $\frac{E_\theta}{H_\varphi} = \eta$, impédance des ondes planes



5.2.1 Champs lointains

- Densité de puissance moyenne calculée avec le vecteur de Poynting:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right\} = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_\theta H_\phi^* \right\} = \hat{\mathbf{r}} P_r \text{ watts/m}^2$$

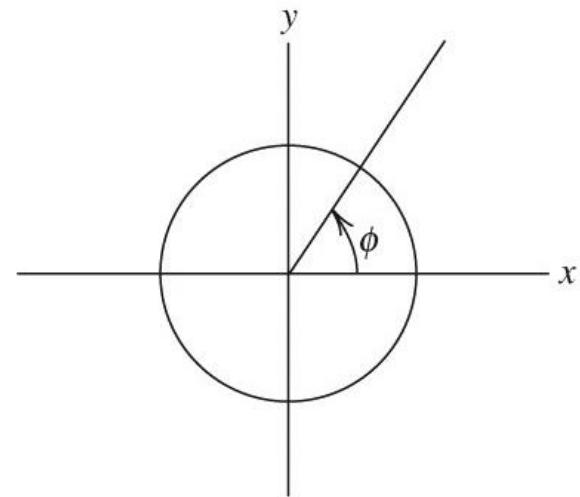
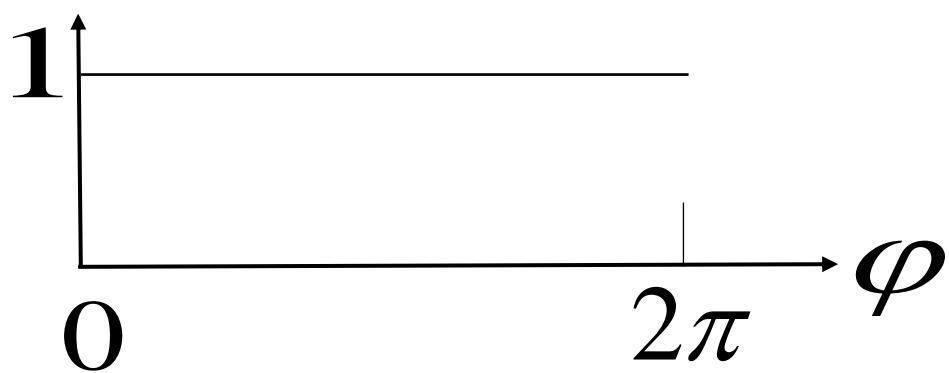
- Puissance rayonnée en direction radiale
- La densité de puissance s'atténue avec la distance selon le facteur $1/r^2$
- La densité de puissance dépend de la direction selon le facteur $\sin^2 \theta$: rayonnement non isotrope!

5.2.2 Diagramme de rayonnement

- Pour le dipôle élémentaire nous avons vu que:
 - $E \propto \sin\theta$
 - $H \propto \sin\theta$
 - $P_r \propto \sin^2\theta$
- Pour les antennes en général, E , H et P_r dépendent de θ et de φ
- Le diagramme de rayonnement est une représentation graphique de cette dépendance en fonction de θ ou de φ
- Représentation polaire ou cartésienne
- Échelle linéaire ou logarithmique (i.e. en dB)
- Généralement normalisé par rapport à la valeur maximale de $|E|$, $|H|$ ou P_r

5.2.2 Diagramme de rayonnement – dipôle élémentaire, plan H

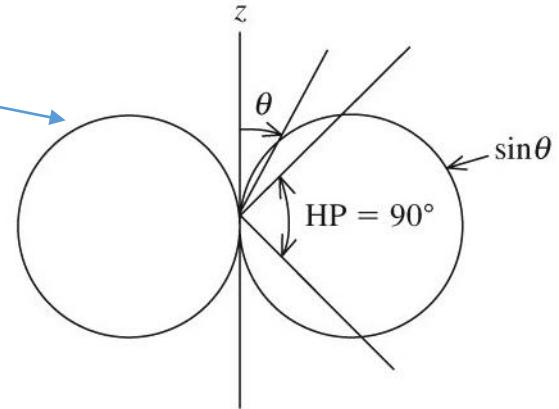
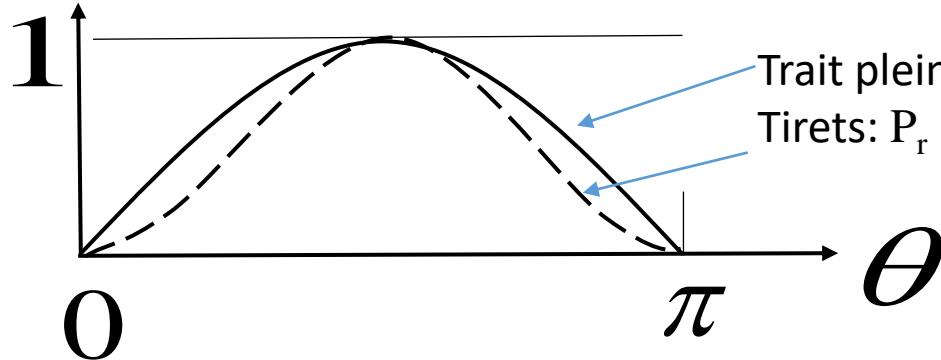
- Pour le dipôle élémentaire:
 - E , H et P_r ne dépendent pas de φ



- Format polaire:
 - La distance entre l'origine et la courbe représente $|E|$, $|H|$ ou P_r normalisés par rapport à leurs maximums respectifs

5.2.2 Diagramme de rayonnement – dipôle élémentaire, plan E

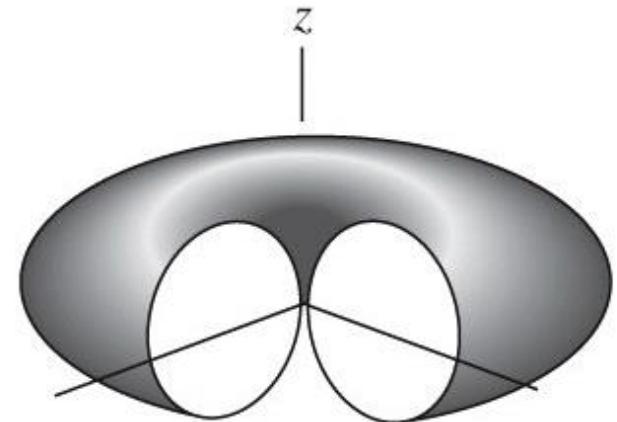
- Pour le dipôle élémentaire:
 - $E \propto \sin\theta, H \propto \sin\theta, P_r \propto \sin^2\theta$



- Format polaire:
 - La distance entre l'origine et la courbe représente $|E|$, $|H|$ ou P_r normalisés par rapport à leurs maximums respectifs

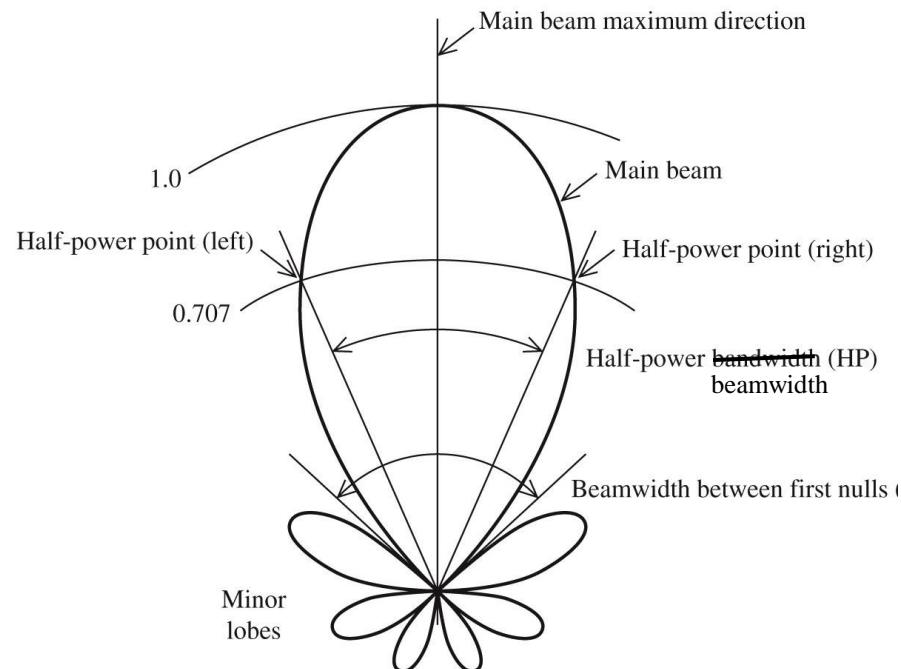
5.2.2 Diagramme de rayonnement – dipôle élémentaire, en 3D

- Plan xy:
 - Plan parallèle à H, i.e. plan H $\theta = \pi / 2$
 - φ varie de 0 à 2π
- Plans tangentiels à l'axe z:
 - Plans parallèles à E, i.e. plans E
 - φ est arbitraire
 - θ varie de 0 à π



5.2.2 Diagramme de rayonnement

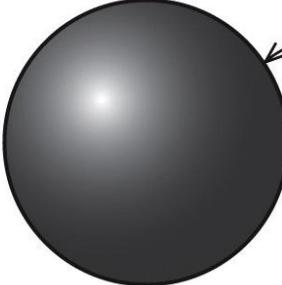
- En général le diagramme est plus complexe et contient un lobe principal et plusieurs lobes secondaires



(a) Polar plot in relative field intensity.

5.3 Directivité

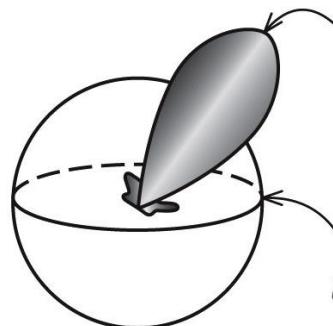
- Supposons une source **isotrope** rayonnant P_{ray} watts
- La densité de puissance moyenne est la même dans toutes les directions, et le diagramme de rayonnement est une sphère:


$$P_r^{iso} = \frac{P_{ray}}{4\pi r^2}$$

- NB: Il s'agit d'un concept mathématique très utile mais qui n'existe pas vraiment physiquement

5.3 Directivité

- Supposons une antenne non-isotrope rayonnant le même P_{ray} watts
- La densité de puissance moyenne varie en fonction de la direction (i.e. diagramme n'est pas une sphère):



$$P_r^{ant} = \frac{P_{ray}}{4\pi r^2} D(\theta, \varphi)$$

$$P_r^{iso} = \frac{P_{ray}}{4\pi r^2}$$

$$D(\theta, \varphi) \equiv \frac{P_r^{ant}(\theta, \varphi)}{P_r^{iso}}$$

- $D(\theta, \varphi)$ représente la **directivité**, ou le gain directionnel

5.3 Directivité

- Si un seul nombre est spécifié il s'agit alors de la valeur maximum de D
- La valeur max de D est toujours supérieure à 1
- La valeur max de D est un indicateur de la capacité de l'antenne à former un faisceau étroit:
 - Plus $\text{max}(D)$ augmente, plus le faisceau de l'antenne est étroit
 - Valeurs typiques:
 - Source isotrope: $\text{max}(D) = D = 1$, i.e. 0 dBi
 - Dipôle élémentaire $\text{max}(D)=1.5$, ou 1.76 dBi
 - Réflecteur parabolique $\text{max}(D)$ typique de 25 à 50 dBi
 - dBi: decibels par rapport à une source isotrope

5.3 Directivité

- Exemple de calcul de D
- Soit une antenne qui a un champ rayonné spécifié par:

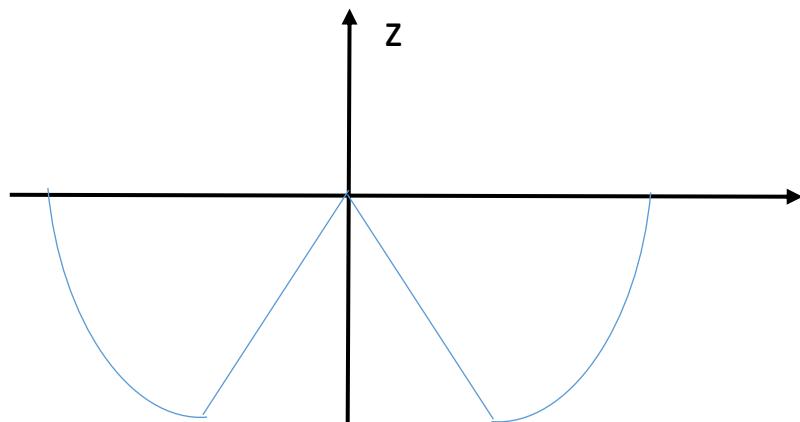
$$\|\mathbf{E}\| = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ \frac{K}{r} & \pi/2 \leq \theta \leq 0.8\pi \\ 0 & 0.8\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$

- On calcule D avec:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P_r^{ant}(\theta, \varphi)}{P_r^{iso}}$$

où:

$$P_r^{ant}(\theta, \varphi) = \frac{\|\mathbf{E}(\theta, \varphi)\|^2}{2\eta} = \frac{|K|^2}{2\eta r^2}$$



5.3 Directivité – suite de l'exemple

- La densité de puissance qui serait rayonnée isotropiquement s'obtient avec:

$$P_r^{iso} = \frac{P_{ray}}{4\pi r^2}$$

- La puissance rayonnée s'obtient en intégrant la densité de puissance sur une surface fermée S qui contient l'antenne:

$$P_{ray} = \iint_S P_r \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S}$$

- Il est pratique de choisir une surface sphérique pour intégrer, donc:

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

5.3 Directivité – suite de l'exemple

- Donc:

$$P_{ray} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_r^{ant}(\theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

- Dans l'exemple:

- Pas de dépendance en φ

- Rayonnement seulement pour $\pi/2 < \theta \leq 0.8\pi$

- Où $P_r^{ant} = |K|^2 / (2\eta r^2)$

- Donc:

$$P_{ray} = 2\pi \int_{\pi/2}^{0.8\pi} \frac{|K|^2}{2\eta} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{\eta} |K|^2 (-\cos(0.8\pi))$$

$$P_r^{iso} = \frac{P_{ray}}{4\pi r^2} = \frac{|K|^2 (-\cos(0.8\pi))}{4\eta r^2}$$

5.3 Directivité – suite de l'exemple

- Finalement la directivité est obtenue:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P_r^{ant}}{P_r^{iso}} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta < \pi / 2 \\ \frac{2}{-\cos(0.8\pi)} & \pi / 2 \leq \theta < 0.8\pi \\ 0 & 0.8\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- La valeur maximale est de:

$$\frac{2}{-\cos(0.8\pi)} = 2.47 \quad \text{ou} \quad 10\log_{10}(2.47) = 3.93 \text{ } dB_i$$

5.4 Résistance de rayonnement

- L'antenne est alimentée par un courant I et rayonne une puissance P_{ray} . On en déduit que:

$$P_{ray} = \frac{1}{2} R_{ray} |I|^2$$

- R_{ray} est la résistance de rayonnement
- Exemple: calcul de la résistance de rayonnement d'un dipôle élémentaire:
- D'abord il faut calculer P_{ray}

$$P_{ray} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right\} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \pi \int_0^\pi E_\theta H_\phi^* r^2 \sin \theta d\theta$$

5.4 Résistance de rayonnement--suite

- Substituant l'expression des champs E et H:

$$P_{ray} = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{j\beta\eta Idz \sin \theta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \right) \left(\frac{j\beta Idz \sin \theta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \right)^* r^2 \sin \theta d\theta = 40 \left(\frac{\pi |I| dz}{\lambda} \right)^2$$
$$= \frac{1}{2} R_{ray} |I|^2$$

- On en déduit que: $R_{ray} = 80 \left(\frac{\pi dz}{\lambda} \right)^2$ ohms
 - Augmente avec le carré de la longueur de l'antenne
 - Augmente avec le carré de la fréquence

5.5 Gain d'une antenne

- Gain par rapport à une antenne isotrope idéale, pour une puissance incidente P_T donnée
- Antenne isotrope idéale:
 - L'impédance de l'antenne est adaptée à l'impédance de la source, donc: aucune puissance réfléchie ($\Gamma = 0$)
 - Et l'antenne ne dissipe aucune puissance, donc:

$$P_{ray} = P_T$$

- Isotrope veut dire que $D=1$, ou $P_r = P_{ray} / (4\pi r^2)$
- Donc:

$$P_r^{ideale} = \frac{P_T}{4\pi r^2}$$

5.5 Gain d'une antenne

- Dans une antenne réelle:
 - La puissance nette fournie à l'antenne, P_{ant} , est réduite car on n'a pas exactement $\Gamma = 0$, i.e.:

$$P_{ant} = (1 - |\Gamma|^2) P_T$$

- Une partie de la puissance fournie à l'antenne est dissipée car les matériaux formant l'antenne ont des pertes; le reste est rayonné; donc:

$$P_{ray} = \varepsilon_{ray} P_{ant} = \varepsilon_{ray} (1 - |\Gamma|^2) P_T$$

ε_{ray} : efficacité de rayonnement

5.5 Gain d'une antenne

- Définition de l'efficacité de rayonnement:
 - La puissance nette qui est fournie à l'antenne est P_{ant}
 - Une partie de cette puissance est rayonnée, soit P_{ray}
 - Une partie de cette puissance est dissipée en chaleur dans les matériaux qui forment l'antenne: P_{diss}
 - Donc:

$$P_{ant} = P_{ray} + P_{diss}$$

$$\mathcal{E}_{ray} \equiv \frac{P_{ray}}{P_{ant}}$$

\mathcal{E}_{ray} : efficacité de rayonnement

5.5 Gain d'une antenne

- Rappel: pour l'antenne réelle nous avons $D \neq 1$, donc

$$P_r^{ant} = \frac{P_{ray}}{4\pi r^2} D$$

- On obtient alors:

$$P_r^{ant} = \frac{\epsilon_{ray}(1 - |\Gamma|^2) P_T}{4\pi r^2} D$$

- Le gain réalisé de l'antenne réelle est défini comme:

$$G_{réalisé} \equiv P_r^{ant} / P_r^{idéale}$$

$$\dots G_{réalisé} = \epsilon_{ray} (1 - |\Gamma|^2) D$$

5.5 Gain d'une antenne

- L'IEEE définit le gain en supposant que l'antenne est parfaitement adaptée au générateur ou à la ligne de transmission, i.e. on suppose $P_{ant} = P_T$, d'où:

$$G_{IEEE} = \epsilon_{ray} D$$

- Le gain réalisé est celui qu'on mesure au laboratoire, donc il est plus utile que le gain IEEE
- Pour le reste du chapitre on utilisera le gain réalisé

5.5 Gain d'une antenne

- En résumé:

$$P_r^{ant} = \frac{P_T G}{4\pi r^2}$$

- P_r^{ant} : Densité de puissance à une distance r de l'antenne (watt/m²)
- P_T : Puissance incidente sur l'antenne venant du transmetteur (watt)
- G : Gain de l'antenne, dépend de θ et de φ (sans unité)
- Le produit $P_T G$ est appelé « Puissance Isotropiquement Rayonnée Équivalente » (PIRÉ ou EIRP en anglais); Utilisé pour l'attribution des licences de radiodiffusion par le CRTC (Canada) et la FCC (USA) (watt)

5.5 Gain d'une antenne -- exemple

- Exemple: Un transmetteur de radiodiffusion FM installé au centre-ville de Montréal a obtenu une licence du CRTC pour un EIRP de 100 kilowatts. Le transmetteur opère à une fréquence de 97 MHz. À quelle distance faut-il être de l'antenne pour ne pas dépasser les seuils d'exposition recommandés pour le public?

b. Limits for General Population/Uncontrolled Exposure [50]

Frequency Range (MHz)	Electric Field Strength (E) (V/m)	Magnetic Field Strength (H) (A/m)	Power Density (S) (mW/cm^2)	Averaging Time $ E ^2, H ^2$ or S (minutes)
0.3–1.34	614	1.63	$(100)^{*3}$	30
1.34–30	$824/f$	$2.19/f$	$(180/f^2)^{*4}$	30
30–300	27.5	0.073	0.2	30
300–1500	—	—	$f/1500$	30
1500–100,000	—	—	1.0	30

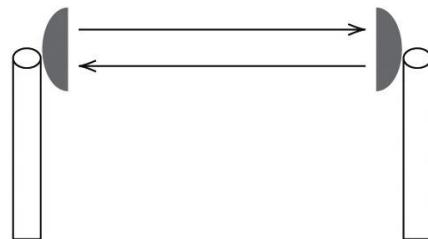
f = frequency in MHz

*Plane-wave equivalent power density

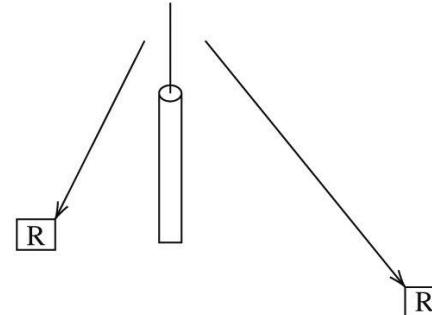
5.5 Gain d'une antenne -- exemple

- Selon le tableau (colonne 4), à 97 MHz l'exposition est sécuritaire si la densité de puissance est inférieure à 0.2 milliwatt /cm², soit 2 watts/m²; Ceci correspond bien à la limite donnée pour le champ E de 27.5 V/m rms (colonne 2) car on a bien $2 = 27.5^2/\eta$
- On veut donc: $\frac{EIRP}{4\pi r^2} < 2$, i.e. $r > \sqrt{\frac{EIRP}{8\pi}}$, avec EIRP=10⁵
- Finalement le seuil d'exposition humaine est respecté si $r > 63m$. Ces antennes de radiodiffusion étant généralement à plusieurs dizaines de mètres de hauteur, le seuil au sol est largement respecté.

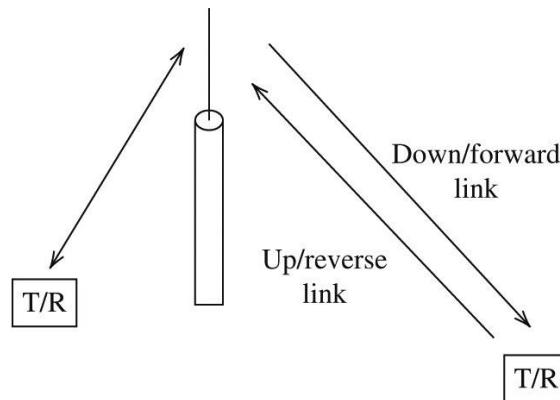
5.6 Transmission entre deux antennes



(a) Point-to-point.



(b) Broadcast.



(c) Point-to-multipoint.

Figure 12-1
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

5.6 Transmission entre deux antennes

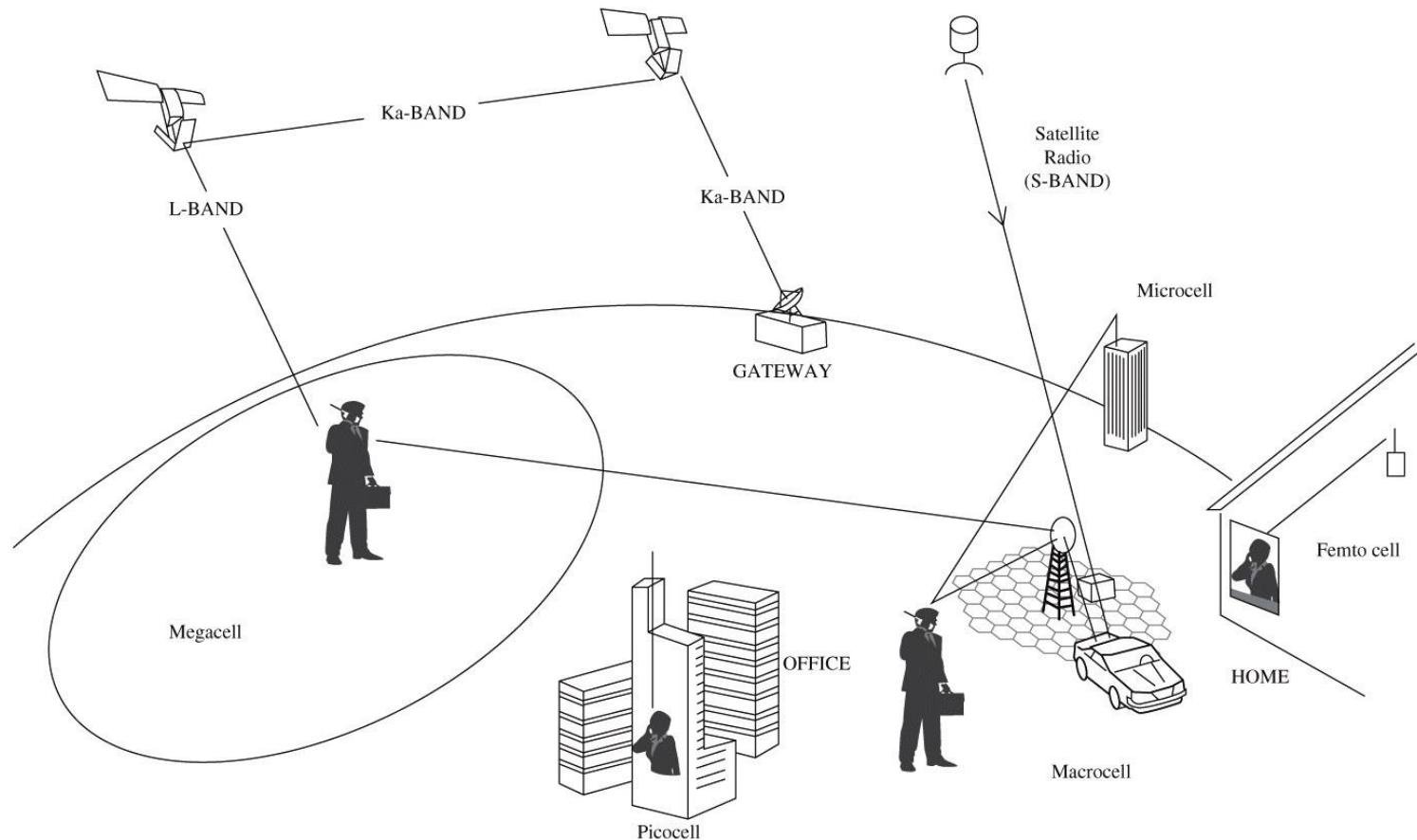
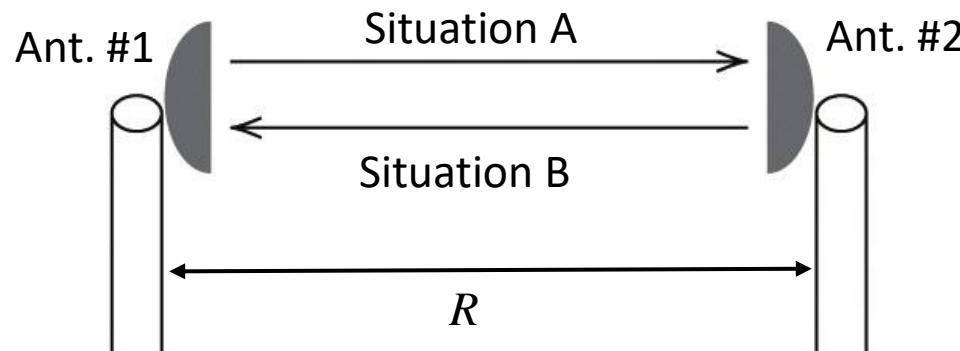


Figure 4-7
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

5.6 Transmission entre deux antennes

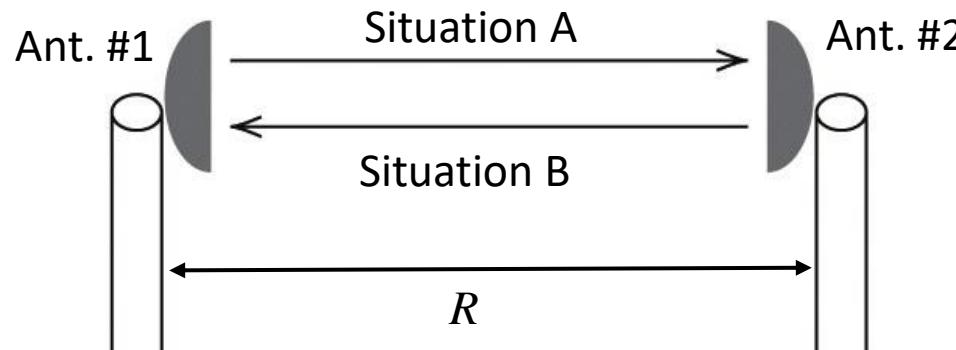
- Supposons un lien entre l'antenne #1 et l'antenne #2 séparées d'une distance R
- Situation A: l'antenne #1 transmet la puissance P_{TA} et l'antenne #2 reçoit la puissance P_{RA}
- Il est clair que le rapport P_{RA} / P_{TA} est proportionnel à G_1 dans la situation A



5.6 Transmission entre deux antennes

- Situation B: l'antenne #2 transmet la puissance P_{TB} et l'antenne #1 reçoit la puissance P_{RB}
- Il est clair que le rapport P_{RB}/P_{TB} est proportionnel à G_2 dans la situation B
- Avec le théorème de réciprocité:

$$\frac{P_{RA}}{P_{TA}} = \frac{P_{RB}}{P_{TB}}$$



5.6 Transmission entre deux antennes

$$\frac{P_{RA}}{P_{TA}} = \frac{P_{RB}}{P_{TB}}$$

- On sait que le premier terme est proportionnel à G_1 , et que le second est proportionnel à G_2
- Comme G_1 et G_2 sont arbitraires et indépendants, alors chaque terme doit être proportionnel au produit $G_1 G_2$
- Donc: **le diagramme de rayonnement est le même en transmission et en réception**
- La « formule de transmission de Friis » peut être démontrée:

$$P_R = P_T G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2$$

$P_T G_T$: EIRP du système transmetteur (watt)

G_R : gain de l'antenne de réception

P_R : puissance au récepteur (watt)

R : distance entre les antennes (mètre)

λ : longueur d'onde (mètre)

5.6 Transmission entre 2 antennes

-- exemple

- On considère le transmetteur radio FM de l'exemple précédent : EIRP = 100 kW, fréquence de 97 MHz
- On écoute la radio avec une antenne monopôle qui a un gain maximal de 2 dBi
- Le bruit dans le récepteur radio est à une niveau de puissance de -90 dBm
- À quelle distance maximale du transmetteur peut-on écouter la radio si on veut un Rapport Signal/Bruit (RSB) d'au moins 10 dB?

5.6 Transmission entre 2 antennes

-- exemple

- Pour satisfaire la contrainte sur le RSB, on doit recevoir une puissance d'au moins $(-90 + 10)\text{dBm}$, donc il faut que: $P_R > 10^{-80/10}\text{mW} = 10^{-8}\text{mW} = 10^{-11}\text{watt}$
- La longueur d'onde (c/f) à la fréquence de 97 MHz est de 3.09m
- **Dans la formule de Friis les gains ne doivent pas être en dB.** Le gain de l'antenne réceptrice est de 2 dBi, donc $G_R = 10^{2/10} = 1.58$
- Selon la fromule de Friis:
- On en déduit:

$$P_R = P_T G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 > 10^{-11} \text{ watt}$$

$$R < \sqrt{\frac{P_T G_T G_R}{10^{-11}}} \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right) = 30.9 \text{ km}$$

5.7 Sources distribuées

Les antennes peuvent être en 1D ou 2D, et peuvent avoir des tailles de plusieurs longueurs d'onde dans le but de:

- Augmenter la directivité
- Augmenter la largeur de bande
- Contrôler la forme du diagramme de rayonnement (e.g. réduire le niveau des lobes secondaires)
- Etc.

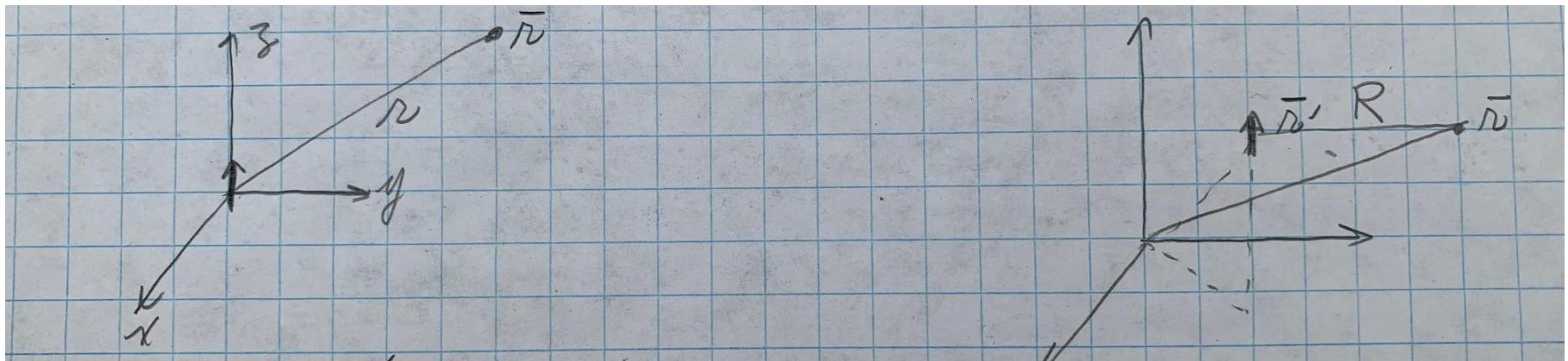
Types d'antenne utilisées couramment:

- Antennes filaires: dipôles $\lambda/2$, monopôles $\lambda/4$, Yagis, réseaux log-périodiques...
- Antennes imprimées
- Antennes à ouvertures: cornets, réflecteurs paraboliques



5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée

- i. Les solutions des équations de Maxwell sont indépendantes de la position de l'antenne: déplacer l'antenne fait déplacer la distribution des champs rayonnés



Dipôle élémentaire à l'origine

Dipôle élémentaire déplacé au point \mathbf{r}'

5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée



$$dE_\theta = j\beta\eta Idz \sin \theta e^{-j\beta r} / 4\pi r \quad dE_\theta^{\text{translate}} = j\beta\eta Idz' \sin \theta e^{-j\beta R} / 4\pi R$$

$$r = \|\mathbf{r}\|$$

$$R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$$

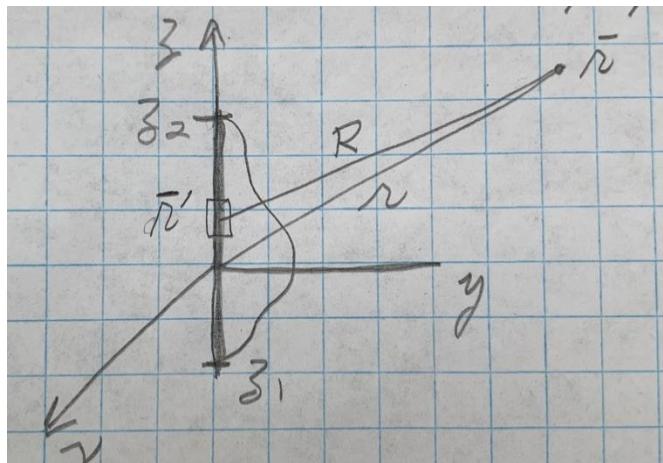
La translation peut s'exprimer avec une opération de convolution:

$$dE_\theta^{\text{translate}} = dE_\theta * \delta(\mathbf{r}')$$

5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée

ii. Les équations de Maxwell sont linéaires: on peut superposer les champs de plusieurs antennes présentes en même temps

Exemple: source linéaire distribuée sur l'axe z entre les points z_1 et z_2 . On superpose les champs de chaque petit élément dz



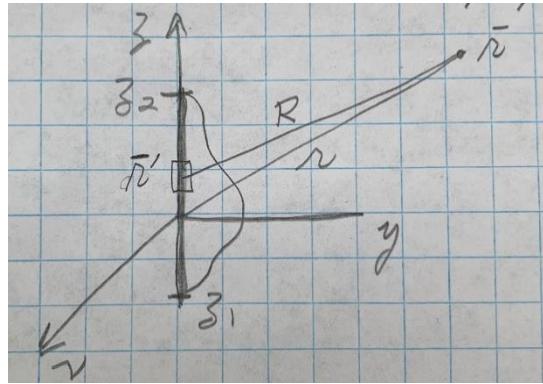
$$dE_\theta = j\beta\eta Idz' \sin \theta e^{-j\beta R} / 4\pi R$$

$$E_\theta = \int_{z_1}^{z_2} j\beta\eta I(\mathbf{r}') \sin \theta \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz'$$

$$\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{z}} z'$$

5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée

Dans le champ lointain nous pouvons supposer que:



$$r \gg |z_2 - z_1|$$

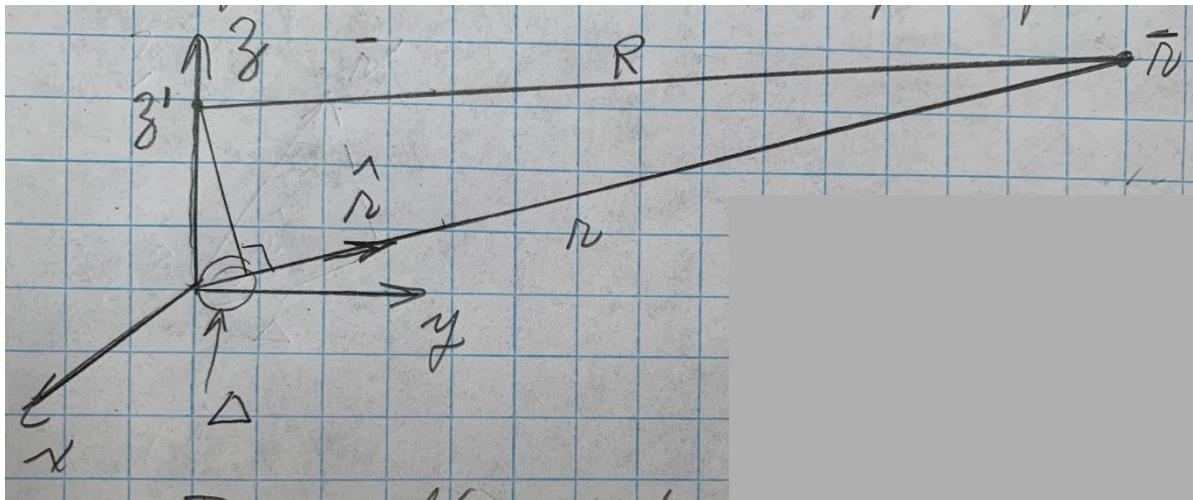
$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r}$$

Alors:

$$E_\theta = \frac{j\beta\eta}{4\pi r} \int_{z_1}^{z_2} I(\mathbf{r}') \sin \theta e^{-j\beta R} dz' \quad \mathbf{r}' = \hat{\mathbf{z}} z'$$

5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée

Approximation des rayons parallèles



$$\Delta \approx r - R$$

$$\Delta = z' \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$R \approx r - z' \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$\theta \approx \text{constant}$$

Cas général pour \mathbf{r}' arbitraire: $R = r - \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}$

$$E_\theta = \frac{j\beta\eta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin \theta \int_{z_1}^{z_2} I(\mathbf{r}') e^{j\beta \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} dz'$$

5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée

Approximation des rayons parallèles, suite

$$E_\theta = \frac{j\beta\eta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin \theta \int_{z_1}^{z_2} I(\mathbf{r}') e^{j\beta \mathbf{r}' \bullet \hat{\mathbf{r}}} dz'$$

Facteur d'élément (dipôle élémentaire)

Facteur de source distribuée

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta$$

Approximation valide si $r \succ 2D^2/\lambda$

D : taille de l'antenne

5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée

Pour une source filaire sur l'axe z, l'intégrale précédente peut s'écrire:

$$\int_{z_1}^{z_2} I(z') e^{j2\pi z' \frac{\cos\theta}{\lambda}} dz'$$

On peut effectuer quelques substitutions symboliques:

$$z' \rightarrow t \quad \frac{\cos\theta}{\lambda} \rightarrow f \quad z_1 \rightarrow t_1 \quad z_2 \rightarrow t_2$$

L'intégrale devient alors:

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t) e^{j2\pi t f} dt$$

Il s'agit de la transformée de Fourier d'une distribution de courant à support borné.

5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée - exemple

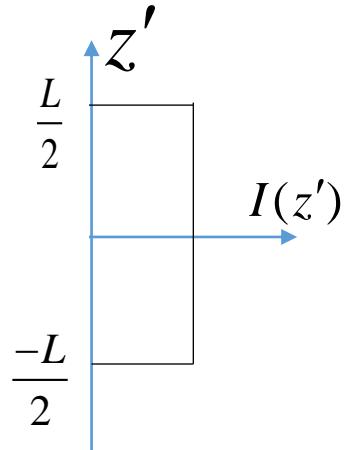
- Soit une distribution de courant $I(z') = I_0 \Pi\left(\frac{z'}{L}\right)$

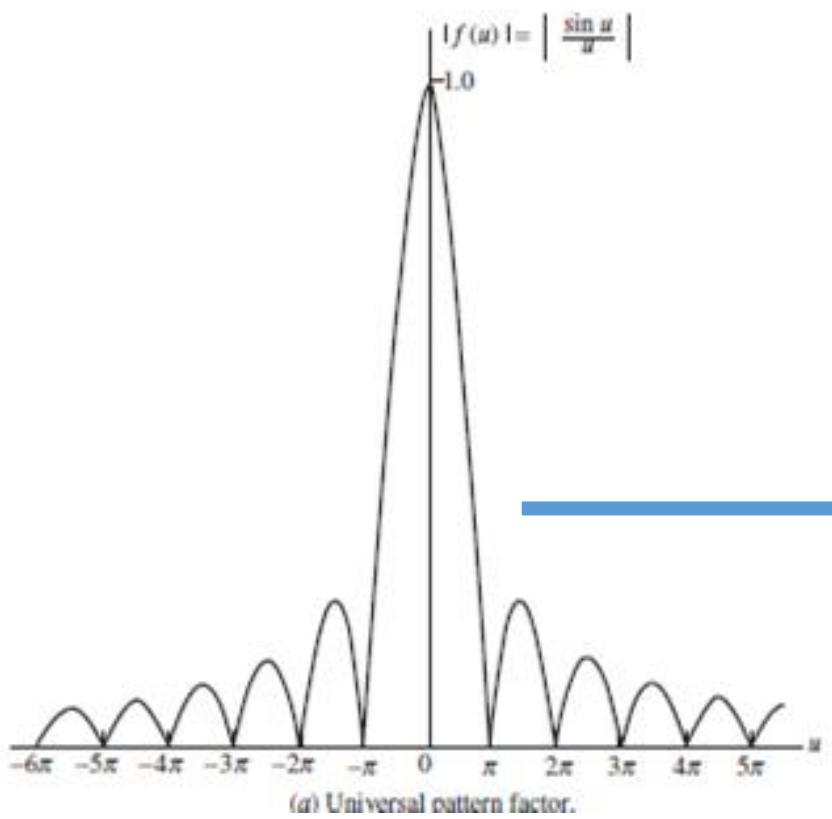
$$E_\theta = \frac{j\beta\eta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} I_0 e^{j\beta z' \cos \theta} dz'$$

$$E_\theta = \frac{j\beta\eta e^{-j\beta r} I_0}{4\pi r} \sin \theta \left(\frac{e^{j\beta \frac{L}{2} \cos \theta} - e^{-j\beta \frac{L}{2} \cos \theta}}{j\beta \cos \theta} \right)$$

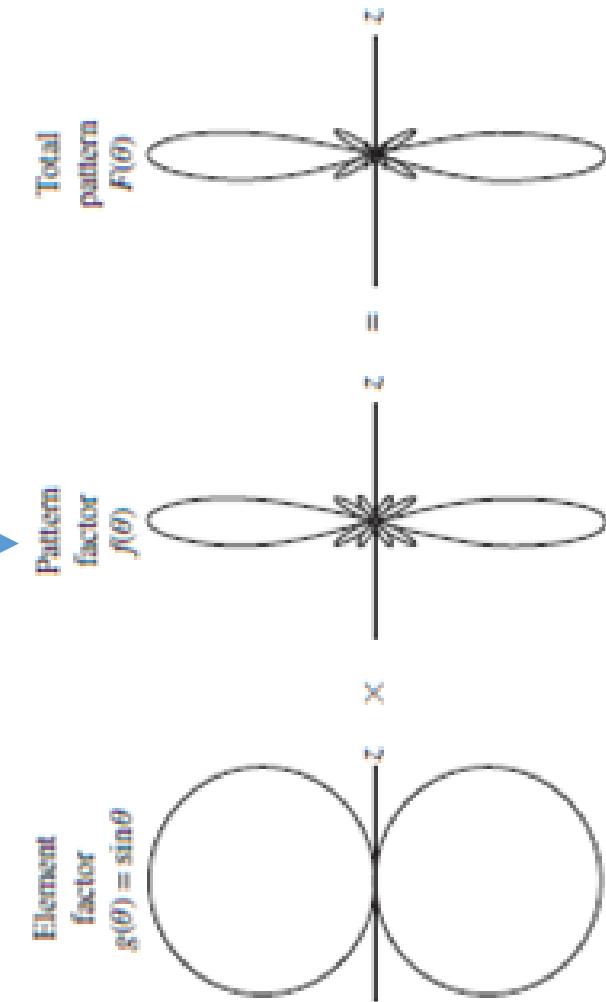
$$E_\theta = \frac{j\beta\eta e^{-j\beta r} I_0}{4\pi r} \frac{L}{2j} \sin \theta \left(\frac{e^{j\beta \frac{L}{2} \cos \theta} - e^{-j\beta \frac{L}{2} \cos \theta}}{\beta \frac{L}{2} \cos \theta} \right)$$

$$E_\theta = \frac{j\beta\eta e^{-j\beta r} I_0 L}{4\pi r} \sin \theta \frac{\sin u}{u} \quad u \equiv \frac{\beta L \cos \theta}{2}$$





Maximum à $u=0$, ou $\cos\theta = 0$, i.e.
 $\theta=90$ degrés



5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée - exemple

- On a que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$
- Donc $-\beta L/2 \leq u \leq \beta L/2$
- Plus l'antenne est longue plus on a de lobes secondaires visibles
- Faisceau principal délimité par $-\pi \leq u \leq \pi$
- Équivalent à : $\frac{-\lambda}{L} \leq \cos \theta \leq \frac{\lambda}{L}$
- Largeur du faisceau principal (en radians):
 $\arccos(-\lambda/L) - \arccos(\lambda/L)$
- Donc, plus l'antenne est longue plus le faisceau principal est étroit

5.7.1 Champs rayonnés par une source distribuée - exemple

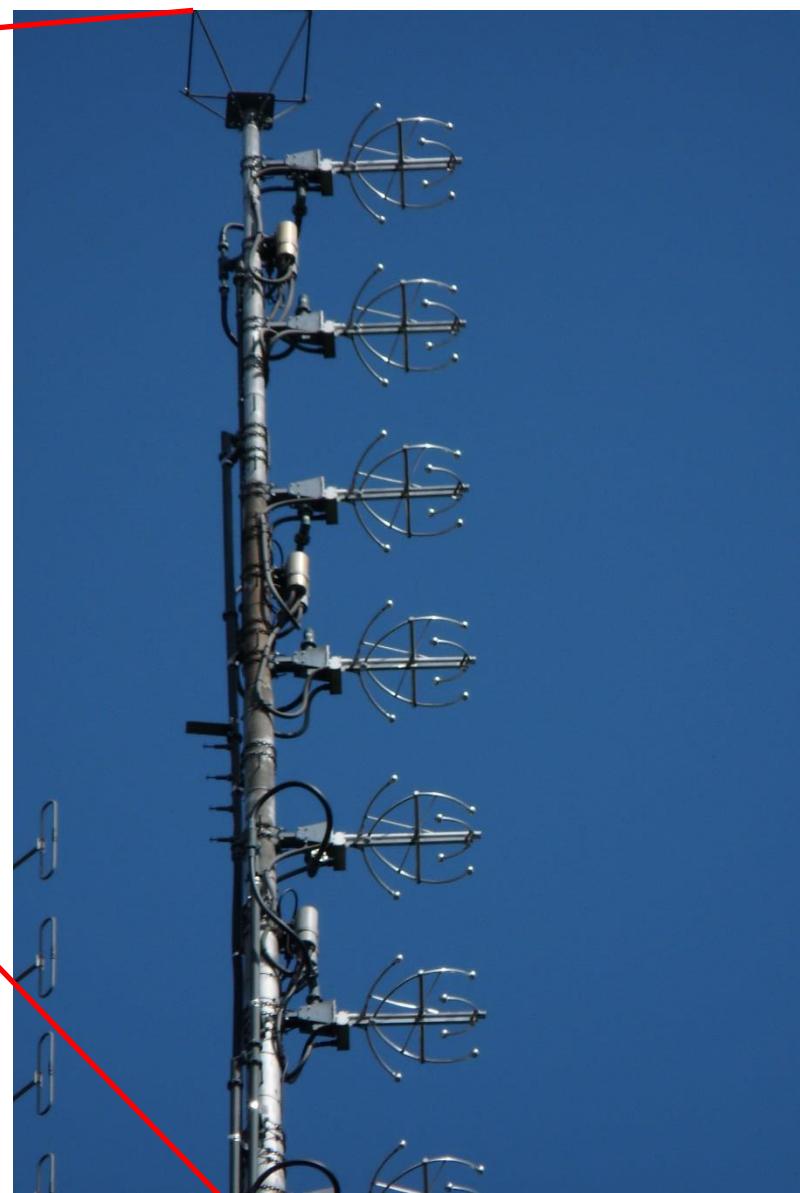
- Remarque: on aurait pu utiliser directement une table de transformées de Fourier:

$$T.F. \left[\Pi \left(\frac{z'}{L} \right) \right] = L \frac{\sin(\pi L f)}{\pi L f}$$

- Où $f \equiv \frac{\cos \theta}{\lambda}$

5.8 Réseaux d'antennes

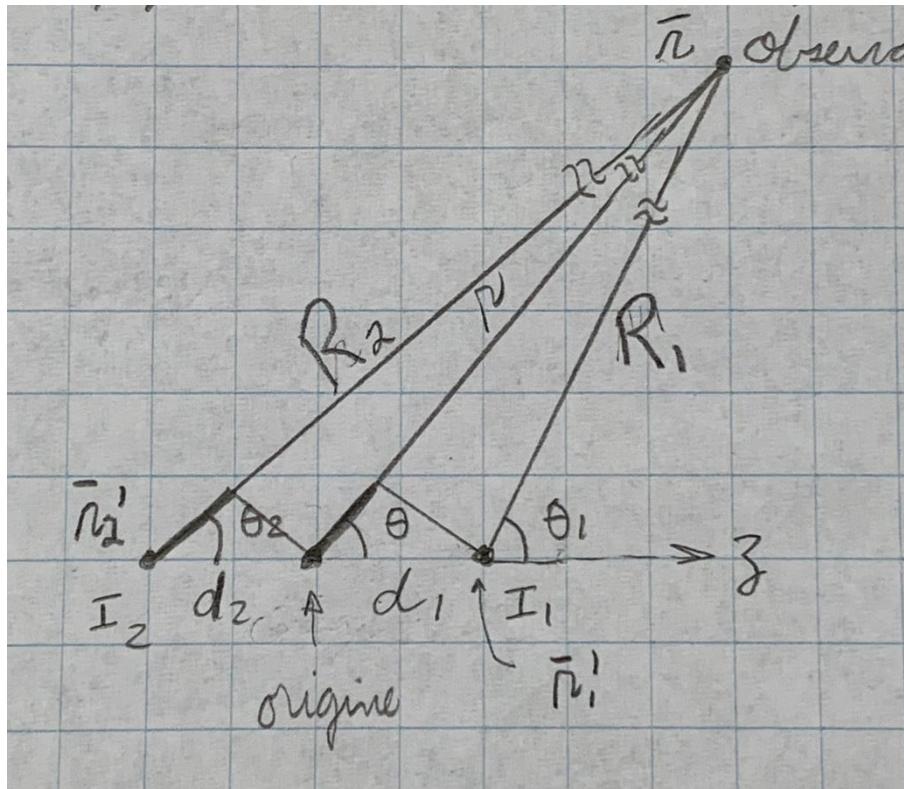
- Pour plus de flexibilité sur la synthèse du diagramme de rayonnement on peut superposer plusieurs antennes discrètes identiques, mais avec des positions dans l'espace, des amplitudes et phases d'excitation différentes
- On appelle un tel système un réseau d'antennes





5.8.1 Approximation des rayons parallèles pour réseaux

- Supposons deux antennes isotropes sur l'axe z



$$E = K \left(\frac{I_1 e^{-j\beta R_1}}{R_1} + \frac{I_2 e^{-j\beta R_2}}{R_2} \right)$$

Champ lointain:

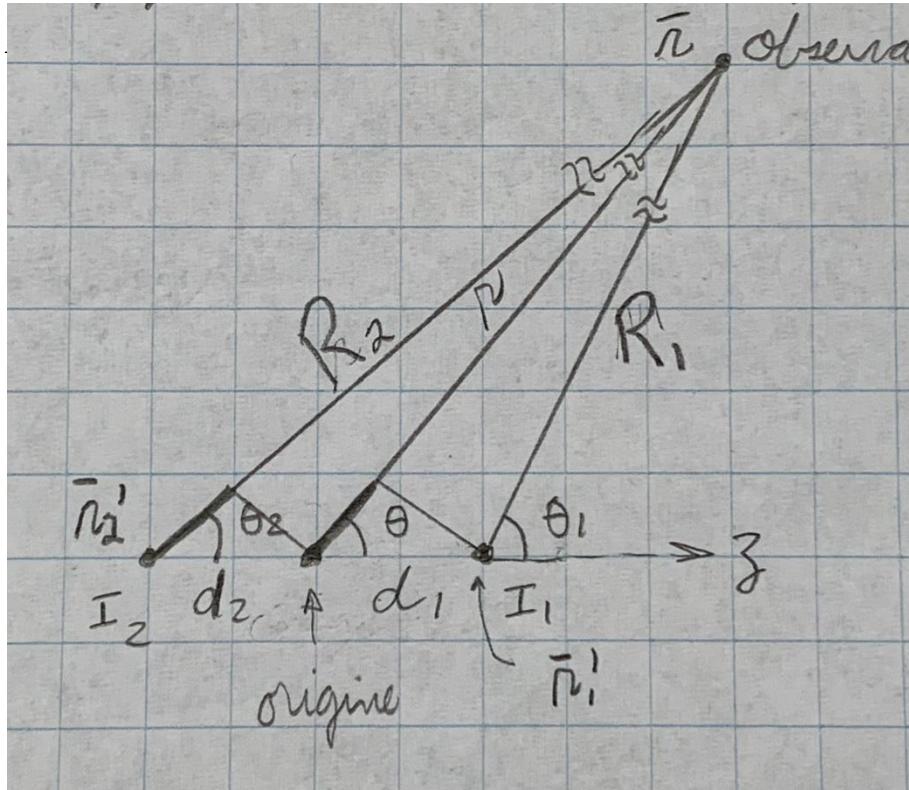
$$R_1, R_2, r \gg d_1, d_2, 2D^2/\lambda$$

Conséquence:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_2}$$

$$E = \frac{K}{r} (I_1 e^{-j\beta R_1} + I_2 e^{-j\beta R_2})$$

5.8.1 Approximation des rayons parallèles pour réseaux



$$\theta \approx \theta_1 \approx \theta_2$$

$$R_1 \approx r - d_1 \cos \theta$$

$$R_2 \approx r + d_2 \cos \theta$$

Champ lointain:

Facteur de réseau! (AF)

$$E = \frac{K}{r} e^{-j\beta r} (I_1 e^{j\beta d_1 \cos \theta} + I_2 e^{-j\beta d_2 \cos \theta})$$

5.8.1 Approximation des rayons parallèles pour réseaux

- Si on remplace les sources isotropes par des antennes ayant un diagramme d'élément $g(\theta, \varphi)$

$$E = \frac{K}{r} e^{-j\beta r} g(\theta, \varphi) (I_1 e^{j\beta d_1 \cos \theta} + I_2 e^{-j\beta d_2 \cos \theta})$$

Diagramme d'antenne = Facteur d'élément \times Facteur de réseau (AF)

$$F(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) \times AF(\theta, \varphi)$$

5.8.1 Approximation des rayons parallèles pour réseaux

- Généralisation de cette équation au cas d'un réseau de N éléments identiques situés à des positions \mathbf{r}_n'

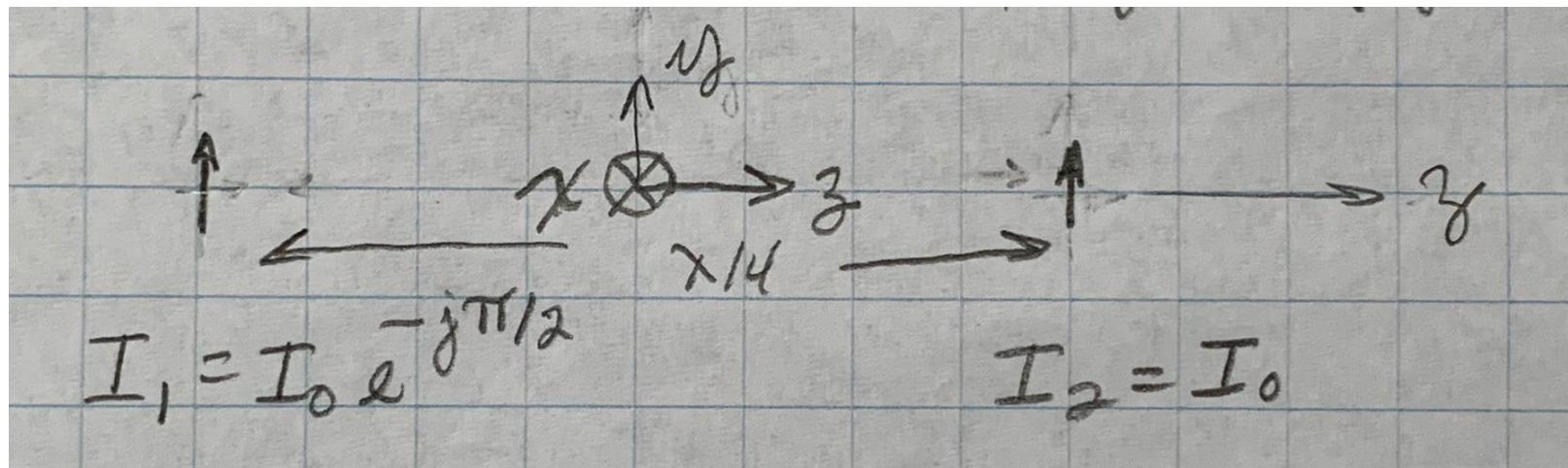
$$E = \frac{K}{r} e^{-j\beta r} g(\theta, \varphi) \sum_{n=1}^N I_n e^{j\beta \mathbf{r}_n' \cdot \hat{\mathbf{r}}}$$

Diagramme d'antenne = Facteur d'élément \times Facteur de réseau

$$F(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) \times AF(\theta, \varphi)$$

5.8.2 Tracé du diagramme d'antenne

- Exemple de réseau de deux dipôles:



- Pour les cas simples on peut procéder par inspection
- On trace d'abord le facteur de réseau, en considérant les directions principales

- Annulation des contributions dans la direction +z

Diagram showing two vertical dipoles separated by a distance d . The top dipole has an intensity I_0 and radiates in the positive z -direction. The bottom dipole has an intensity $I_0 e^{-j\pi/2}$ and radiates in the negative z -direction.

$$I_0 e^{-j\pi/2} \times e^{-j\beta d}$$

$$I_0 e^{-j\pi/2} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}} = I_0 e^{-j\pi}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_0 - I_0 = 0 \\ I_0 e^{-j\pi} \end{array} \right\} I_0 e^{-j\pi}$$

- Addition des contributions dans la direction -z

Diagram showing two vertical dipoles separated by a distance d . The top dipole has an intensity $I_0 e^{-j\pi/2}$ and radiates in the negative z -direction. The bottom dipole has an intensity $I_0 e^{-j\beta d}$ and radiates in the negative z -direction.

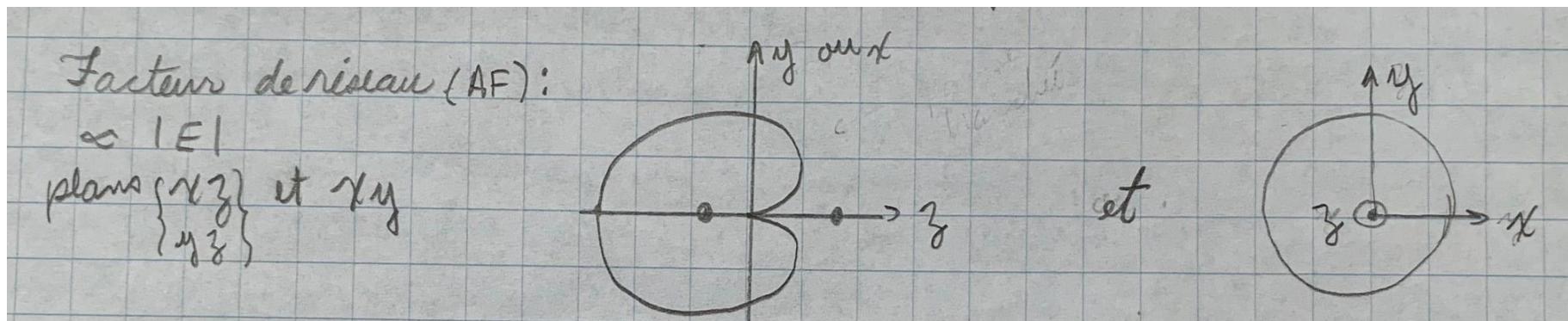
$$= I_0 e^{-j\pi/2} + I_0 e^{-j\pi/2} = 2I_0 e^{-j\pi/2}$$

- Addition partielle des 2 contributions dans le plan perpendiculaire à l'axe z (i.e. plan x,y):

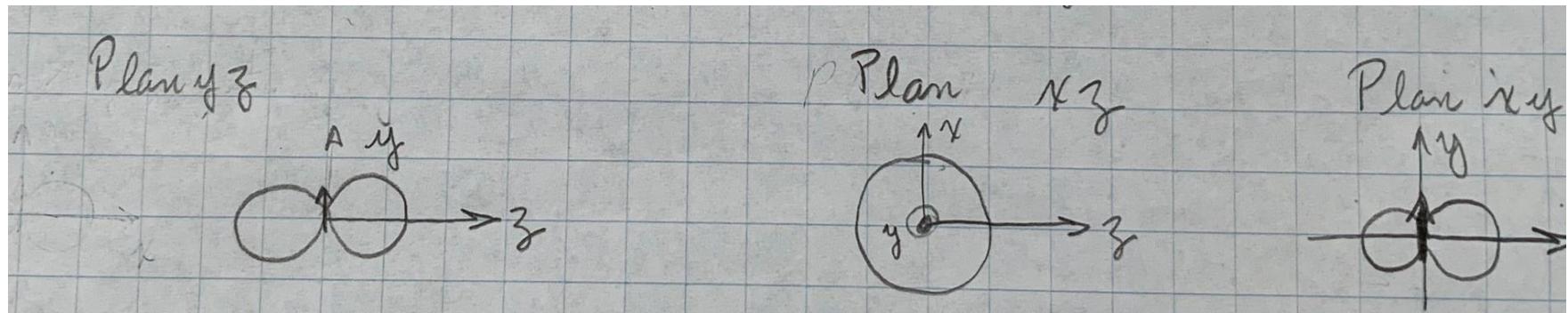
$$I_0 e^{-j\pi/2} + I_0 = I_0 (1 + e^{-j\pi/2}) = I_0 (1 - j) = I_0 \sqrt{2} \angle -\pi/4$$

$$I_0 e^{-j\pi/2} \quad I_0 = I_0 (1 + e^{-j\pi/2}) = I_0 (1 - j) = I_0 \sqrt{2} \angle -\pi/4$$

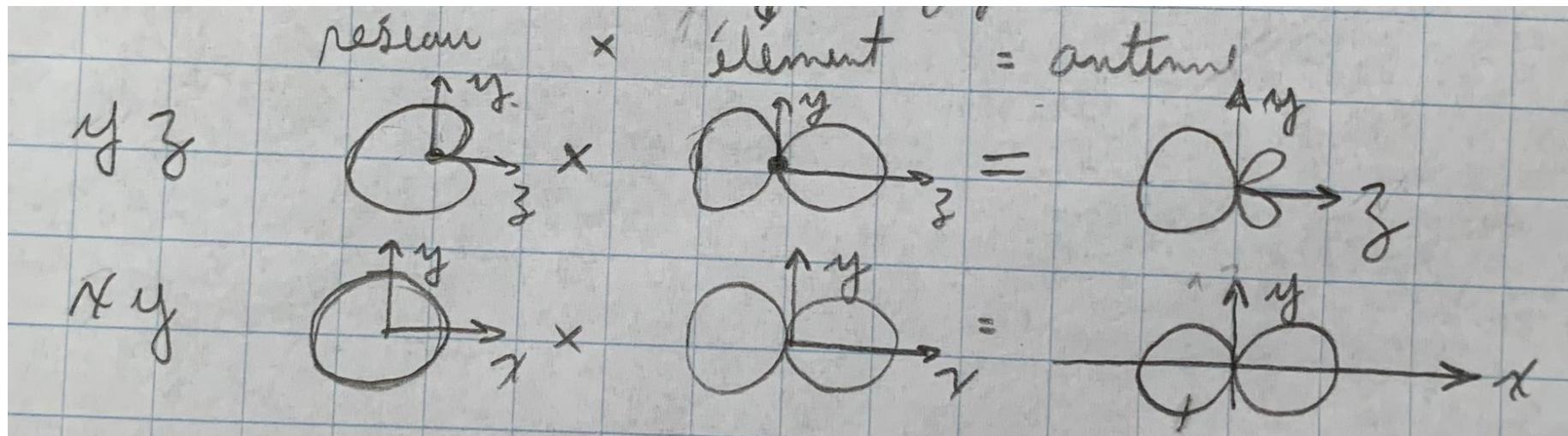
- Tracé du facteur de réseau

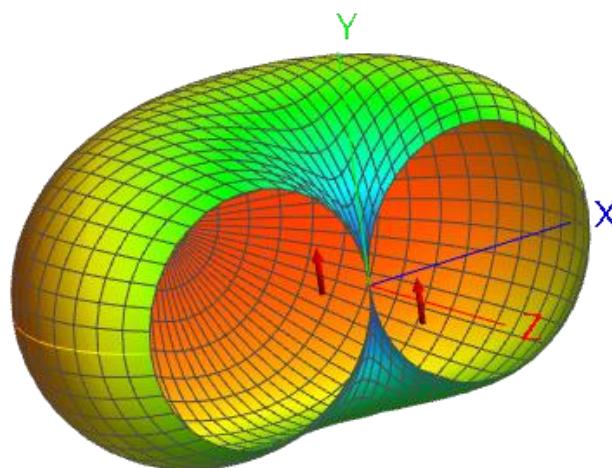
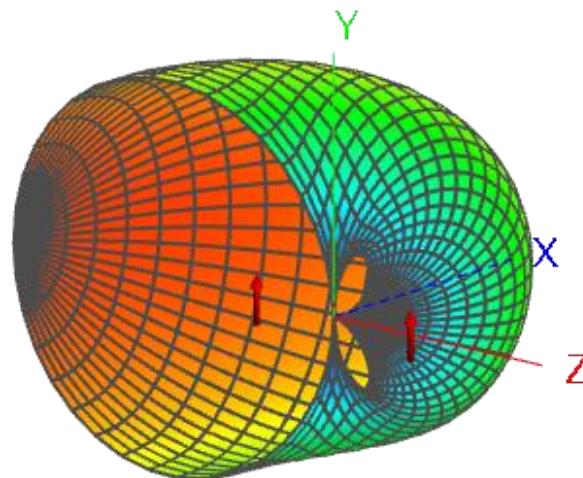
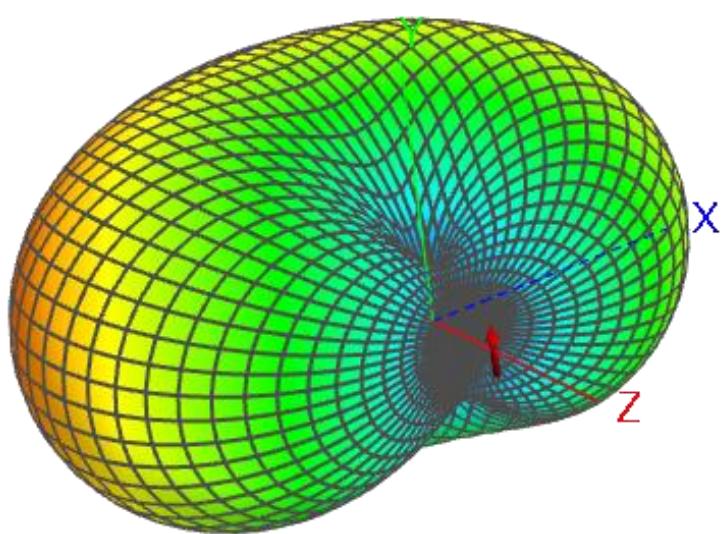
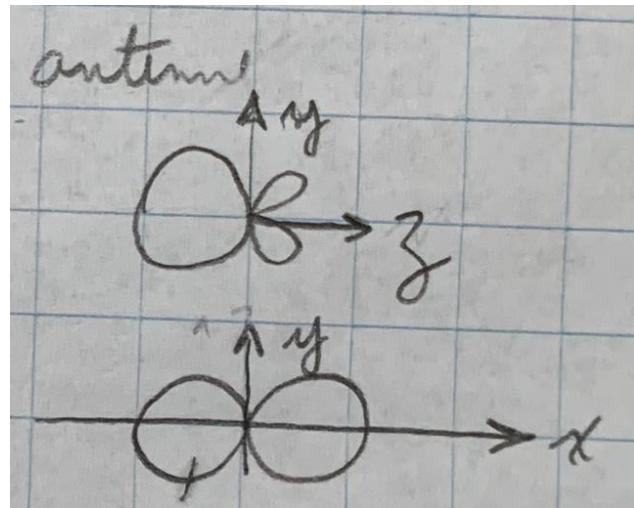


- Tracé du facteur d'élément

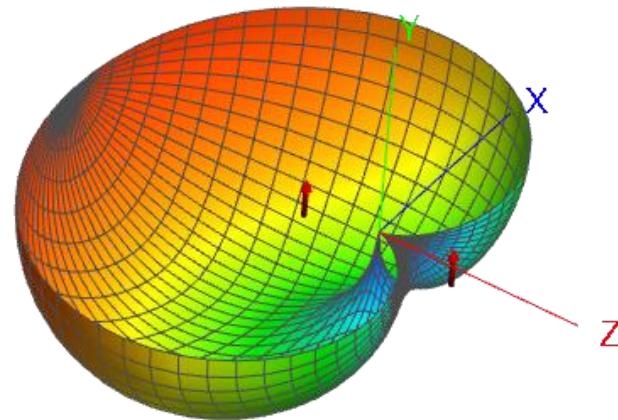
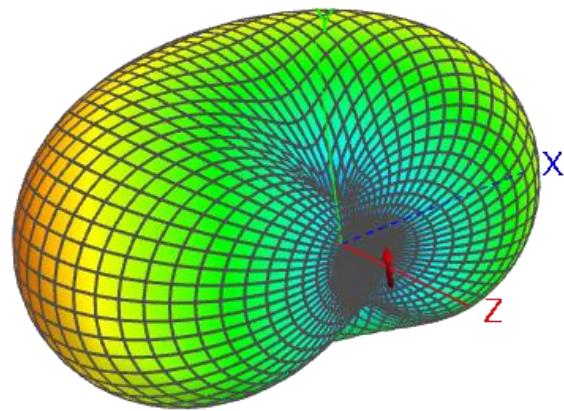
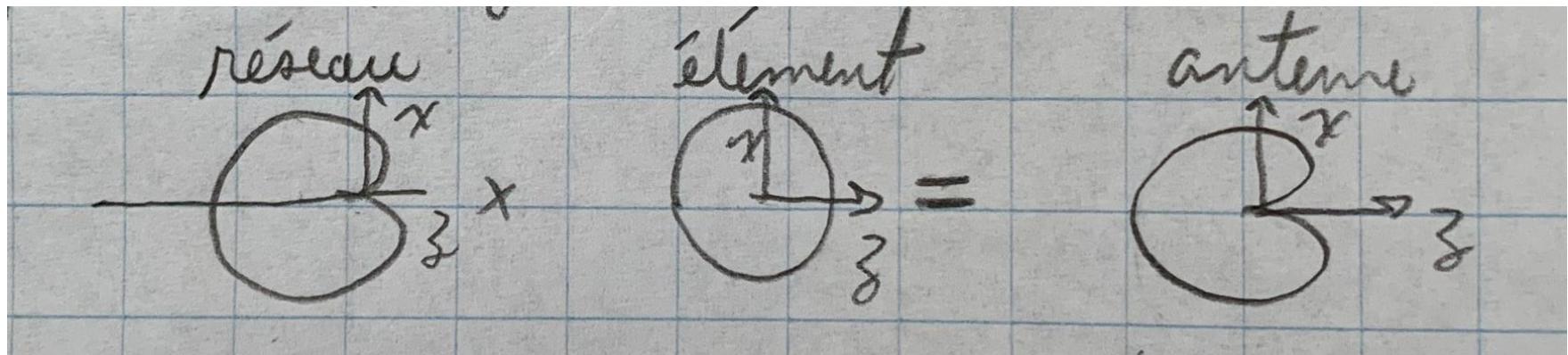


- Diagramme d'antenne dans deux plans E





- Diagramme d'antenne dans le plan H

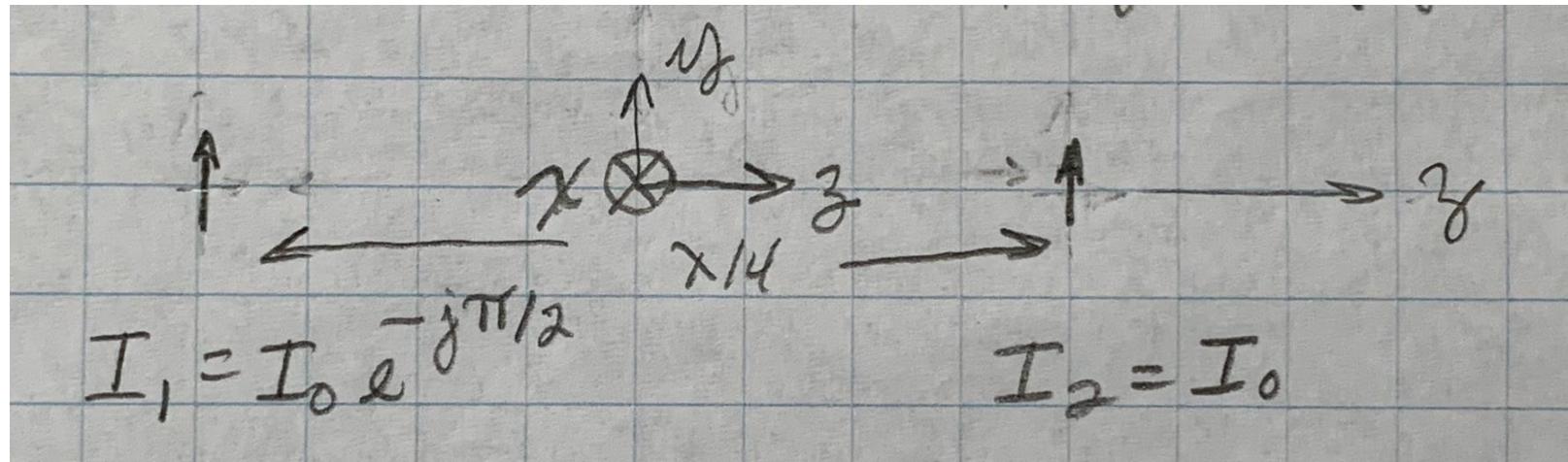


5.8.2 Tracé du diagramme d'antenne

- On peut aussi procéder avec l'expression du diagramme d'antenne:

$$E = \frac{K}{r} e^{-j\beta r} g(\theta, \varphi) \sum_{n=1}^N I_n e^{j\beta \mathbf{r}_n \cdot \hat{\mathbf{r}}}$$

- On refait le même exemple avec cette approche



$$\mathbf{r}'_1 = (0, 0, -\lambda/8)$$

$$\mathbf{r}'_2 = (0, 0, \lambda/8)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi$$

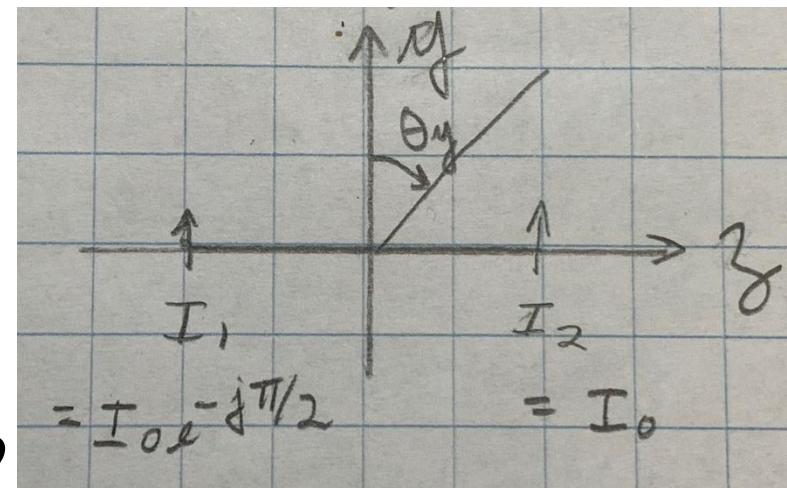
$$+ \hat{\mathbf{z}} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'_1 \bullet \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\lambda}{8} \cos \theta \quad \mathbf{r}'_2 \bullet \hat{\mathbf{r}} = \frac{\lambda}{8} \cos \theta$$

$$g(\theta, \varphi) = \sin \theta_y$$

$$E = \frac{K}{r} e^{-j\beta r} \sin \theta_y (I_0 e^{-j\pi/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} \cos \theta} + I_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} \cos \theta})$$

$$E = \frac{K}{r} e^{-j\beta r} \sin \theta_y I_0 e^{-j\pi/4} (e^{-j\pi/4} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} \cos \theta} + e^{j\pi/4} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} \cos \theta})$$



$$E = \frac{2K}{r} e^{-j\beta r} I_0 e^{-j\pi/4} \sin \theta_y \cos\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos \theta)\right)$$

- Il faut exprimer $\sin \theta_y$ en fonction de θ et φ
- θ_y est l'angle entre $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{r}}$ $\rightarrow \cos \theta_y = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \varphi$$

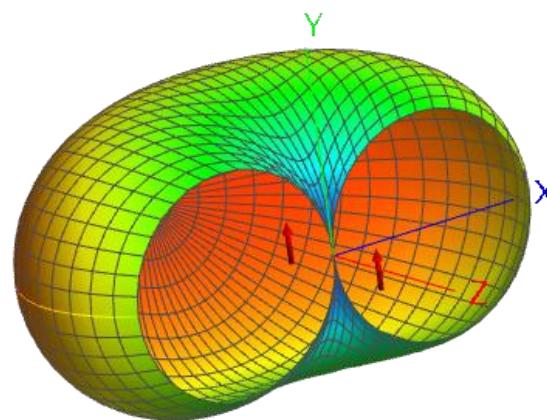
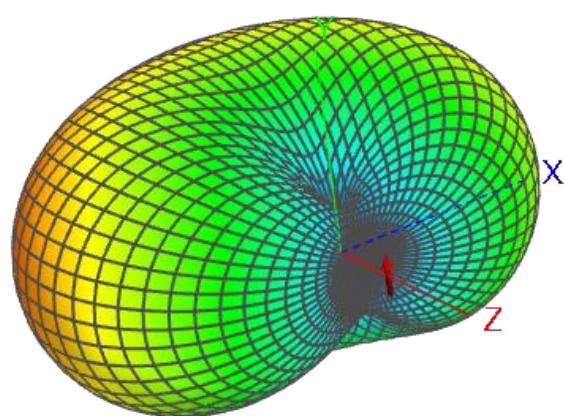
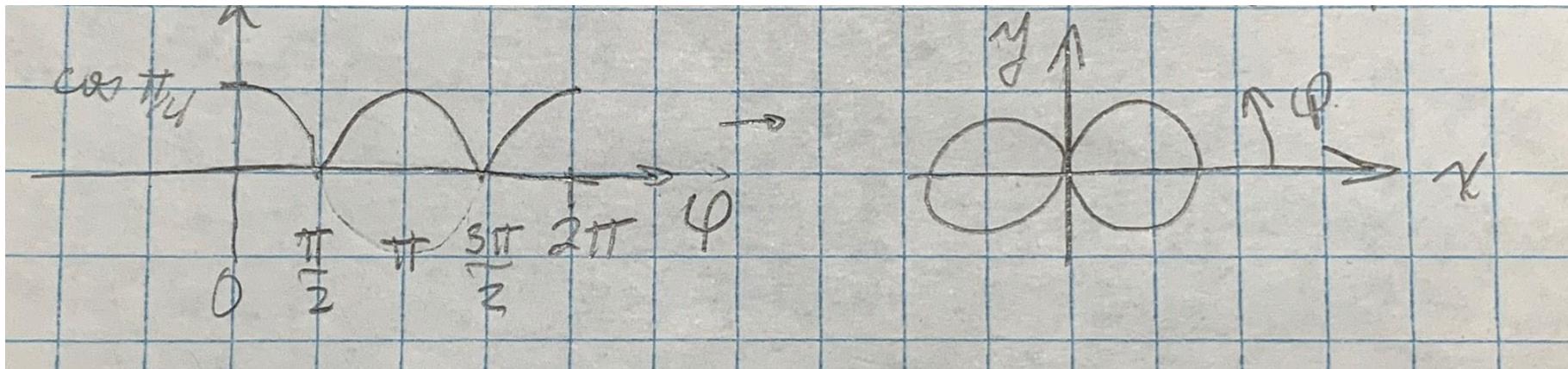
$$\sin \theta_y = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_y} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}$$

- Le diagramme d'antenne est donc ($g * AF$):

$$F(\theta, \varphi) = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos \theta)\right)$$

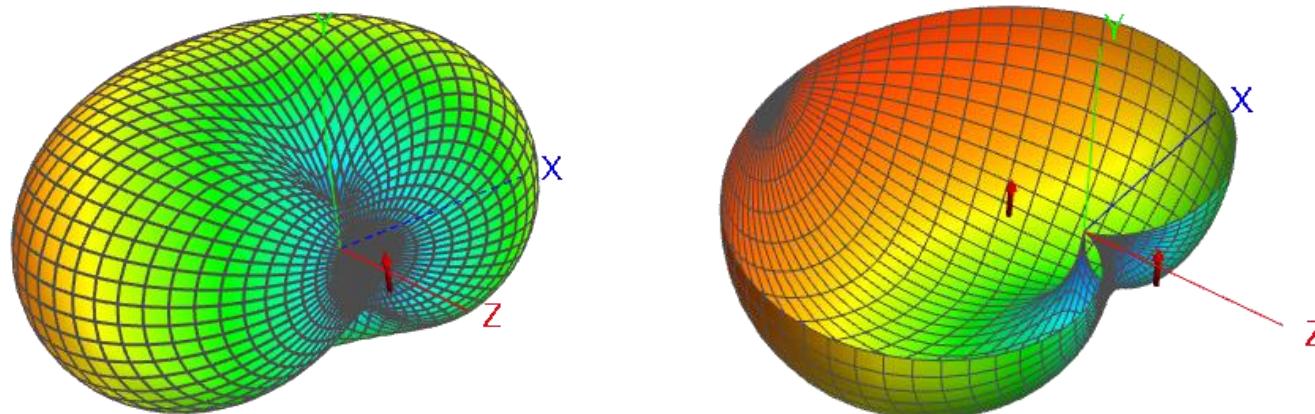
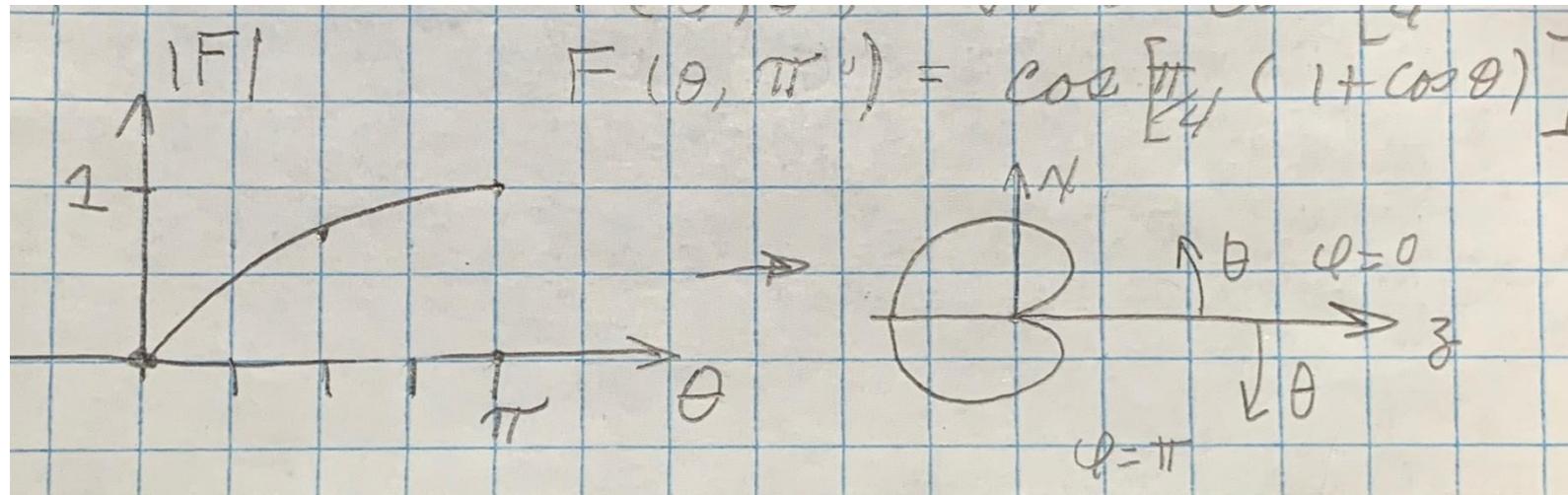
Plan XY: $\theta = \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$F(\pi/2, \varphi) = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cos\left(\frac{\pi}{4}(1+0)\right) = \cos \varphi \cos(\pi/4)$$



Plan XZ: $0 \leq \theta \leq \pi, \varphi = 0, \varphi = \pi$

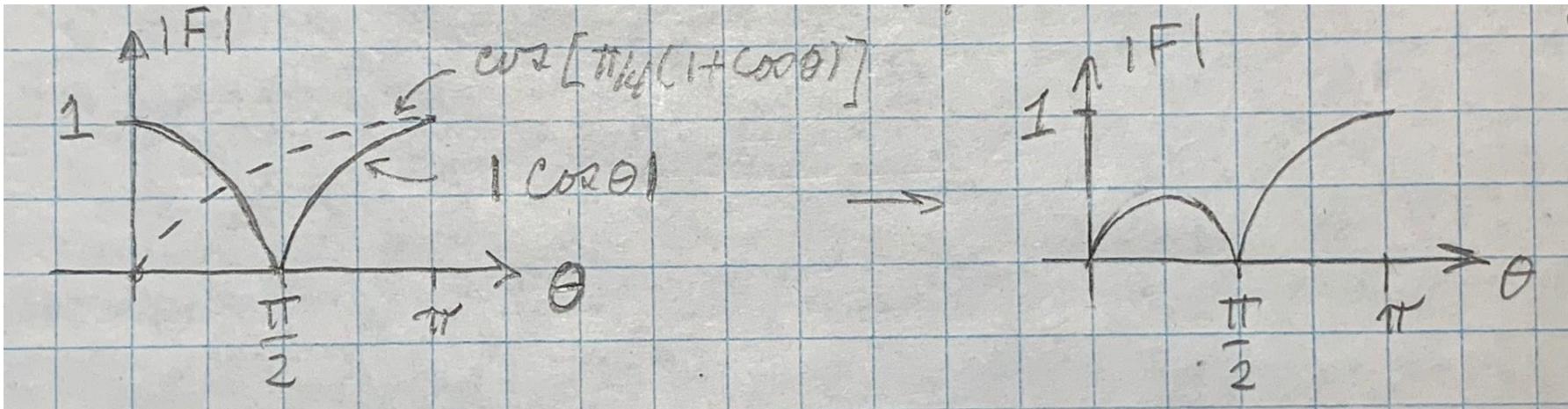
$$F(\theta, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}) = \sqrt{1 - 0} \cos\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos \theta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos \theta)\right)$$

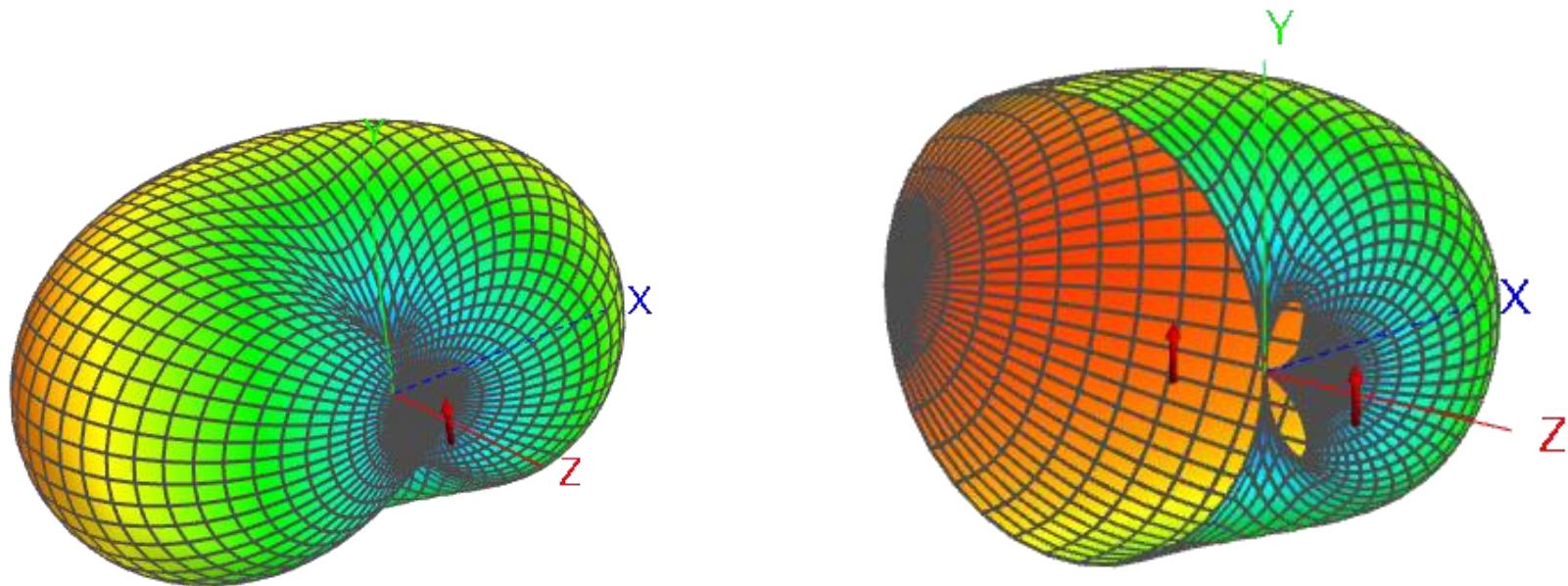
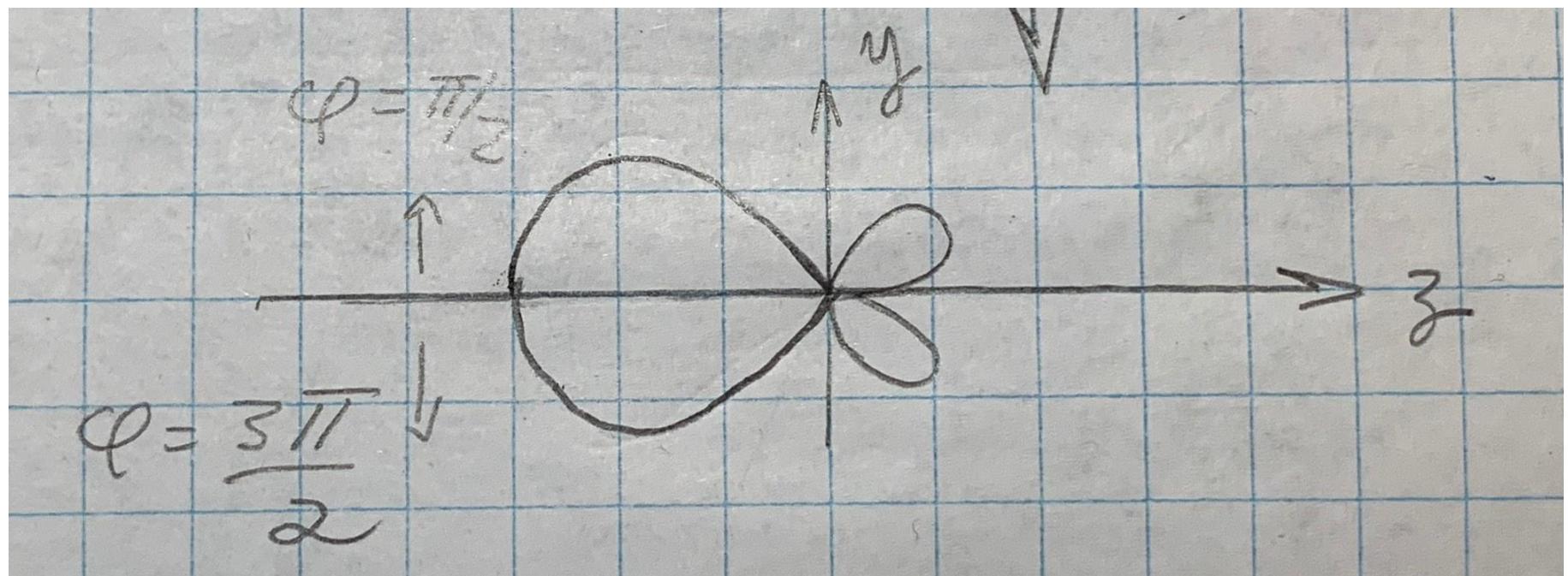


Plan YZ: $0 \leq \theta \leq \pi$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = 3\pi/2$

$$F(\theta, \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{Bmatrix}) = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos \theta)\right)$$

$$\dots = \cos \theta \cos\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos \theta)\right)$$

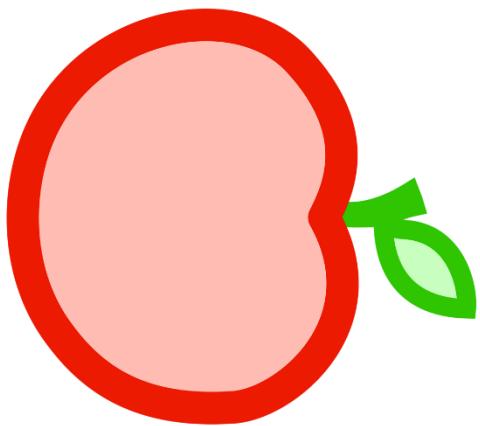




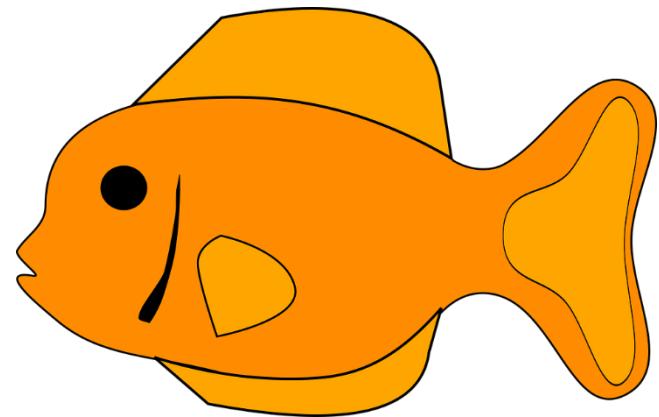
Fin du chapitre



X



=



Facteur d'élément

Facteur de
réseau

Diagramme
d'antenne