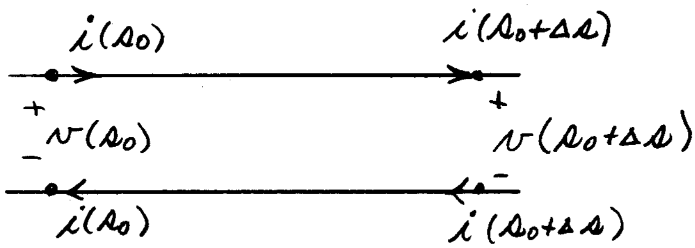
I Lignes de transmission

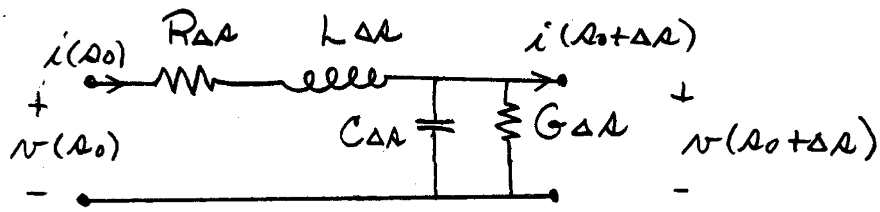
I.1 Équation d'ondes

- cellule élémentaire :



– quadrupôle

- circuit équivalent



R, L, G, C : paramètres linéiques ; unités : Ω/m, H/m, ℧/m, F/m

- Loi des mailles : $v(s_0+\Delta s) + v_L + v_R = v(s_0)$

i.e. $$\frac{v(s_0+\Delta s) - v(s_0)}{\Delta s} + R\,i(s_0) + L\left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{s=s_0} = 0$$

$\Delta s \to 0$ $$\boxed{\frac{\partial v}{\partial s} + R\,i + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \qquad (1)}$$

- Loi des noeuds $i(s_0+\Delta s) + i_G + i_C = i(s_0)$

i.e. $$\frac{i(s_0+\Delta s) - i(s_0)}{\Delta s} + G\,v + C\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$\Delta s \to 0$ $$\boxed{\frac{\partial i}{\partial s} + G\,v + C\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad (2)}$$

« Équations du Télégraphiste »

- Cas idéal : ligne sans pertes i.e $R=0$, $G=0$

Dans ce cas, $\frac{\partial}{\partial s}(1) - L\frac{\partial}{\partial t}(2)$

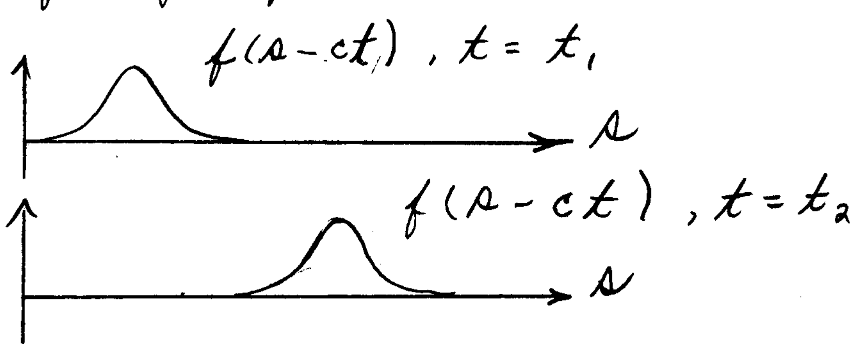
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3) \quad , \quad c^2 = 1/LC}$$

"équation d'ondes"

I.2 Solution de l'équation d'ondes

$$\boxed{v = f(s-ct) + g(s+ct) \qquad (4)}$$

- f et g fonctions arbitraires linéairement indépendantes



$t_1 < t_2$

Passage du temps $\rightarrow$ translation de $c(t_2-t_1)$ selon s

Vitesse de déplacement ? $\quad f$ invariant si $(s(t) - ct)$ invariant

$$\frac{\partial}{\partial t}(s(t) - ct) = 0 \rightarrow s(t) - ct = \text{constante}$$

$$\text{vitesse} = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{constante} + ct) = c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$L\,C$ dépendent des matériaux et de la géométrie (acétate)

$- g(s+ct)$? $\longrightarrow$ même développement $\to$ vitesse $= -c$

- signal se propageant en direction $-s$

I.3 $i(s,t)$

(4) dans (2) ; cas sans pertes avec $G=0$

$$\frac{\partial i}{\partial s} = -C\frac{\partial v}{\partial t} = -C\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}\right)$$

$$= -C\left(-c f' + c\, g'\right)$$

$'$: dérivée p/r argument

Mais, $f' = \dfrac{\partial f}{\partial(s-ct)} = \dfrac{\partial f}{\partial s}$

$$g' = \frac{\partial g}{\partial(s+ct)} = \frac{\partial g}{\partial s}$$

d'où : $\dfrac{\partial i}{\partial s} = -cC\left(-\dfrac{\partial f}{\partial s} + \dfrac{\partial g}{\partial s}\right)$

$\int$ p/r à s : $i(s,t) = \dfrac{C}{\sqrt{LC}}\left(f(s-ct) - g(s+ct)\right)$

$$= \sqrt{\frac{C}{L}}\,(f - g) = Y_0(f-g)$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{C}{L}} \triangleq Y_0}$$

Y_0 : admittance caractéristique de la ligne

- Signal en direction $+s$:

$$\boxed{\frac{v}{i} = \frac{f}{Y_0 f} = Z_0 \equiv \frac{1}{Y_0}}$$; impédance caractéristique

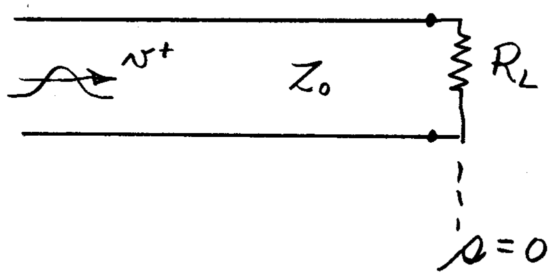
- Signal en direction $-s$

$$\boxed{\frac{v}{i} = \frac{g}{-Y_0 g} = -Z_0 = \frac{-1}{Y_0}}$$

I.4 Discontinuités

- solution complète de équation d'ondes inclut conditions aux frontières

i) ligne terminée par résistance R_L



- signal incident en direction $+s$: $\left\{ \dfrac{v^+(s,t)}{i^+(s,t)} = Z_0 \right.$

$$\frac{v^+(0,t)}{i^+(0,t)} = Z_0 \neq R_L$$

- solution possible si on ajoute un signal en direction $-s$

$$v(0,t) = v^+(0,t) + v^-(0,t)$$

$$i(0,t) = i^+(0,t) + i^-(0,t)$$

$$\frac{v(0,t)}{i(0,t)} = R_L \leftarrow \text{condition frontière}$$

Rappel: $v^+ = Z_0\, i^+ \qquad v^- = -Z_0\, i^-$

$$R_L = \frac{v(0,t)}{i(0,t)} = \frac{v^+ + v^-}{(v^+ - v^-)/Z_0}$$

$$\longrightarrow \frac{v^-(0,t)}{v^+(0,t)} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

$\rightarrow$ discontinuité cause signal réfléchi

$$\frac{v^-}{v^+} = \Gamma_V$$: coéfficient de réflexion pour la tension

De même :

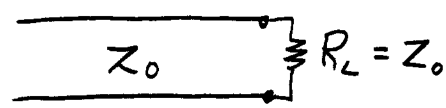
$$\frac{i^-}{i^+} = \Gamma_I \qquad \left(\frac{i^-}{i^+} = \frac{-v^-}{v^+} = -\Gamma_V \right)$$

$$\boxed{\Gamma_V = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}} = \frac{1/G_L - 1/Y_0}{1/G_L + 1/Y_0} = \frac{Y_0 - G_L}{Y_0 + G_L} = +\Gamma_V$$

$$\Gamma_I = \frac{G_L - Y_0}{G_L + Y_0}$$

ii) Cas où $R_L = Z_0$

- on dit que la ligne est "adaptée"
- résultat précédent :

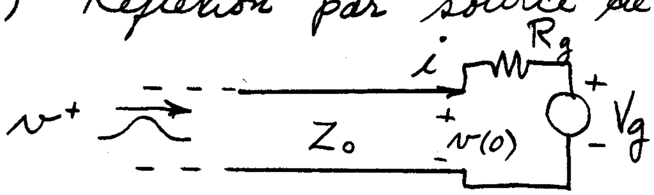


$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = 0$$

$$v^- = \Gamma_V v^+ = 0$$: pas de signal réfléchi, tout le signal est absorbé dans la charge

aussi $i^- = \dfrac{-v^-}{Z_0} = 0$

iii) Réflexion par source de Thévenin



signal incident $\dfrac{v^+}{i^+} = Z_0$ $\quad s=0$

à $s = 0$

$$v = v^+ + v^-$$

$$i = i^+ + i^-$$

$$v = V_g + R_g\, i$$

$$v^+ + v^- = V_g + R_g\left(\frac{v^+}{Z_0} - \frac{v^-}{Z_0}\right)$$

- - - -

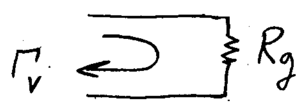
$$v^- = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} + v^+\left(\frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0}\right)$$

formule du diviseur de tension

signal émis par la source

même forme que Γ_v

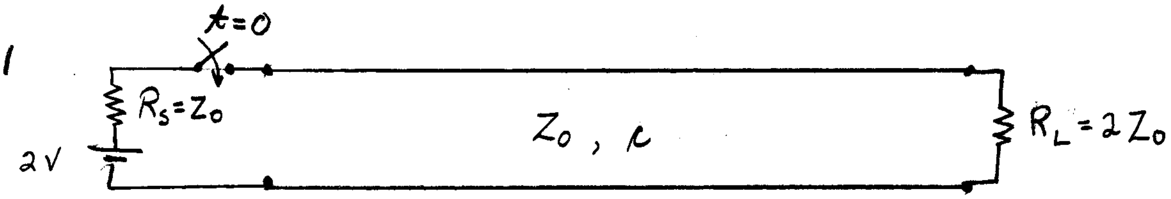
signal réfléchi par R_g (si $\neq Z_0$)



Conclusion : - générateur "voit" charge Z_0 et émet onde
- R_g : cause réflexion comme charge passive R_L

I. 5 Exemples

I.5.1

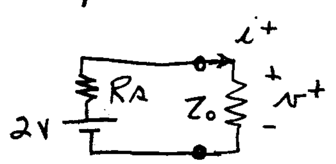


Tension à la source et à la charge en fonction du temps ?

à $t=0^-$ la ligne est déchargée : $v(s,0^-) = 0$

à $t=0$ on ferme l'interrupteur

à $t=0^+$
$s=0$



$v^+ = 2V \times \frac{Z_0}{R_s + Z_0}$; onde initiale lancée dans la ligne de transmission
$= 1\,V$

$t = T$: v^+ est réfléchie à $s = d$ $\quad v^- = v^+\Gamma_L = 1V\,\frac{2Z_0 - Z_0}{2Z_0 + Z_0} = 1/3\,V$

$\Gamma_L = 1/3$

à $t = 2T$ $\quad v^-$ est réfléchie à $s = 0$ $\quad v^{++} = v^- \Gamma_s = \frac{1}{3}V \frac{R_s - Z_0}{R_s - Z_0} = 0$

$\Gamma_s = 0$

Le circuit est stable à partir de $t = 2T$

$v(t, s=d)$?

$t < T$: v^+ pas arrivé, $\quad v = 0$

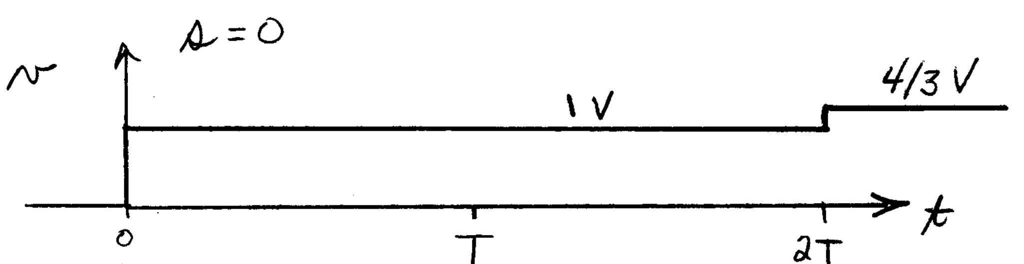
$t > T$: v^+ arrive et v^- est créée : $\quad v = v^+ + v^- = 4/3\ V$

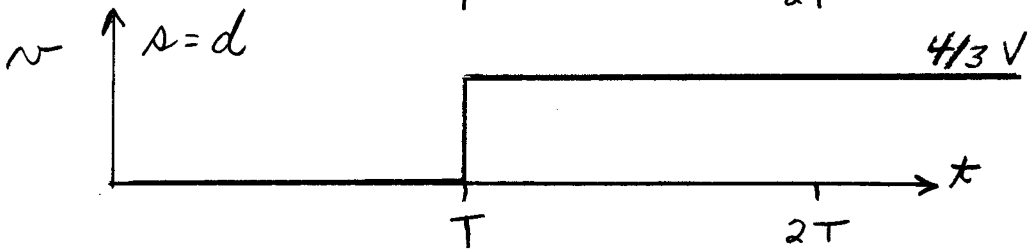
$v(t, s=0)$?

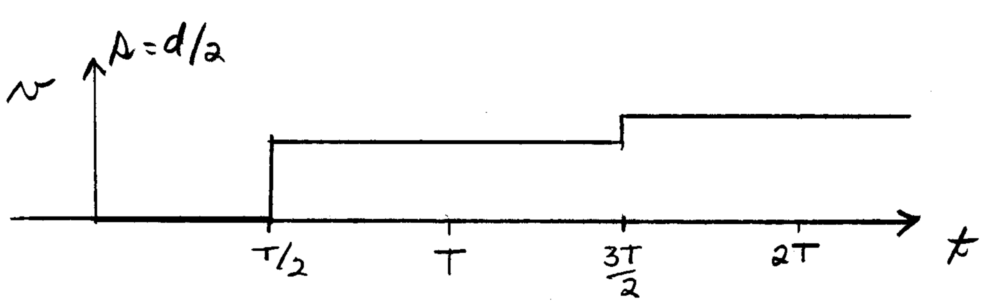
$t < 0$: $\quad v = 0$

$0 < t < 2T$: onde v^+ seulement : $\quad v = v^+ = 1\ V$

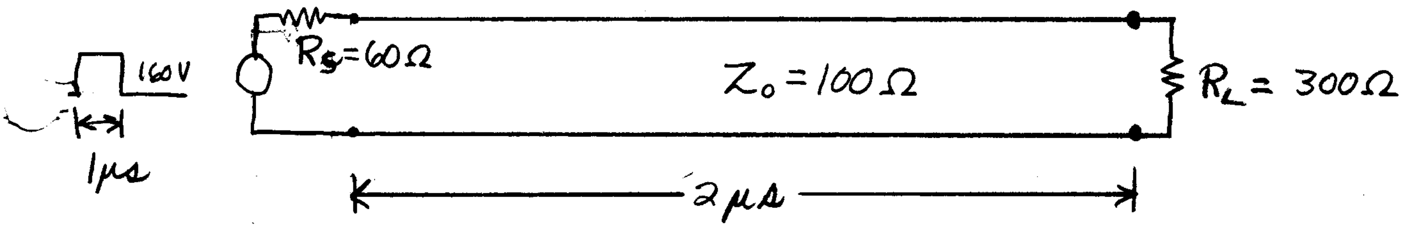
$t \geq 2T$: v^- se superpose à v^+ $\quad v = v^+ + v^- = 4/3\ V$







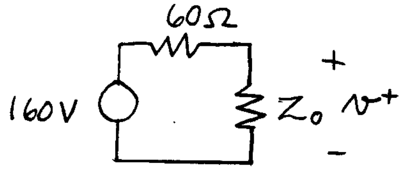
I.5.2



$v(t)$ et $i(t)$ au milieu de la ligne ?

Solution:

- signal incident



$$v^+ = 160\,V \times \frac{Z_0}{Z_0 + R_S} = 100\,V$$

- réflexion de v^+ sur R_L à $t = 2\mu s$

$$v^- = \Gamma_L\, v^+ \qquad \Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{300-100}{300+100} = 1/2$$

$$v^- = 1/2 \times 100\,V = 50\,V$$

- réflexion de v^- sur R_S à $t = 4\mu s$

$$v^{++} = \Gamma_S\, v^- \qquad \Gamma_S = \frac{R_S - Z_0}{R_S + Z_0} = \frac{60-100}{60+100} = -1/4$$

$$v^{++} = -1/4 \times 50 = -12.5\,V$$

- réflexion de v^{++} sur R_L à $t = 6\mu s$

$$v^{--} = \Gamma_L\, v^{++} = 1/2 \times -12.5 = -6.25\,V$$

Pour le courant, on divise la tension par $+Z_0$ ou $-Z_0$.

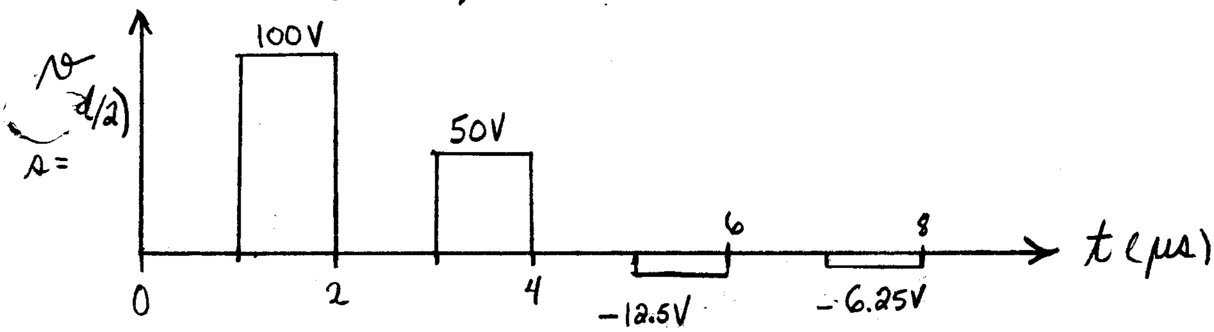
- signal incident $\quad i^+ = \dfrac{v^+}{Z_0} = \dfrac{100\,V}{100\,\Omega} = 1\,A$

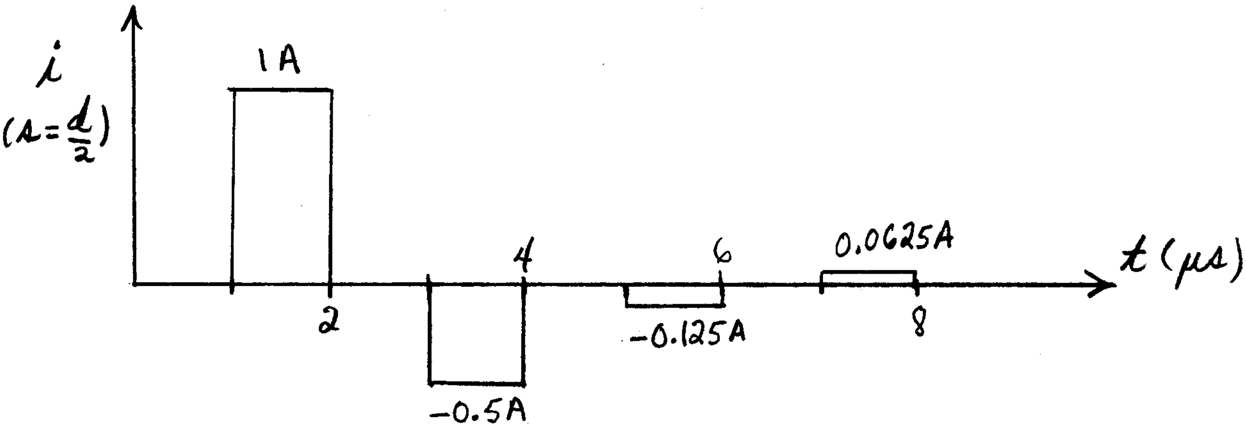
- réflexion sur la charge à $t = 2\mu s$ $\quad i^- = -\dfrac{v^-}{Z_0} = -0.5\,A$

- réflexion sur source à $t = 4\mu s$ $\quad i^{++} = \dfrac{v^{++}}{Z_0} = -0.125\,A$

- réflexion sur charge à $t = 6\mu s$ $\quad i^{--} = -\dfrac{v^{--}}{Z_0} = 0.0625\,A$

Chaque réflexion dure 1 μs



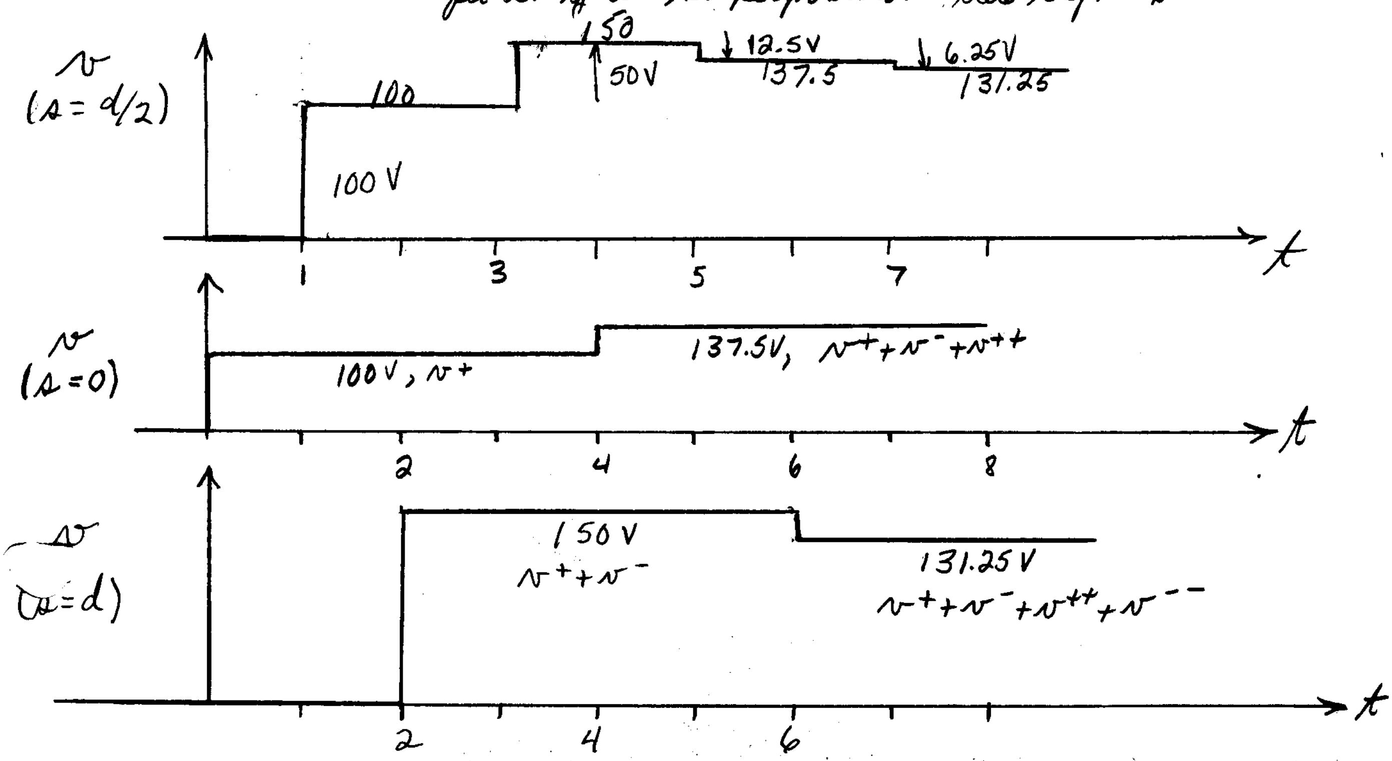


I.5.3

Même exemple que I.5.2 mais la source est de type échelon plutot que de type pulse

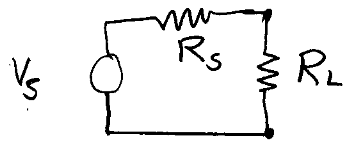
Solution :

- mêmes valeurs d'ondes incidentes et reflechies sauf qu'il y a superposition des signaux



Remarques

- ce cas est pertinent pour circuits numériques rapides
- à $t \to \infty$ l'amplitude des réflexions tend vers 0 ; l'état final du circuit est obtenu avec le circuit suivant :

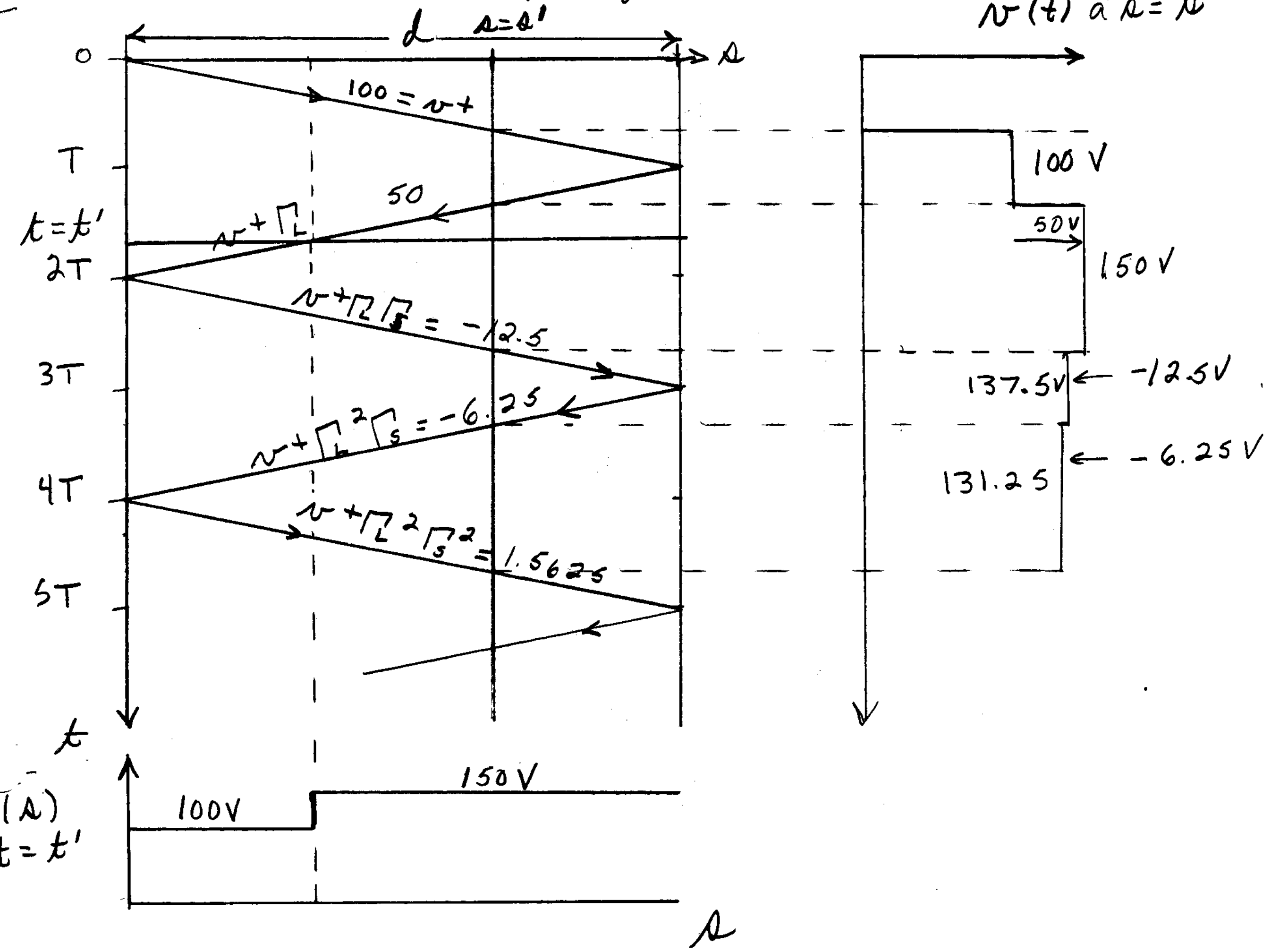


$$v(s, t \to \infty) = V_s \times \frac{R_L}{R_L + R_S} = 133.3V$$

I.6 Méthodes graphiques

I.6.1 Diagramme de rebonds

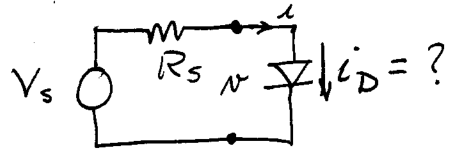
- obtenir onde de tension et onde de courant initiale lancée dans le circuit lors de la transitoire
- calculer les coefficients de réflexion à chaque discontinuité : e.g. $\Gamma_L = 1/2$ $\Gamma_S = -1/4$
- procéder graphiquement



I.6.2 Méthode de Bergeron

- fonctionne pour sources et charges linéaires ou non linéaires
- inspiré de la méthode de la droite de charge

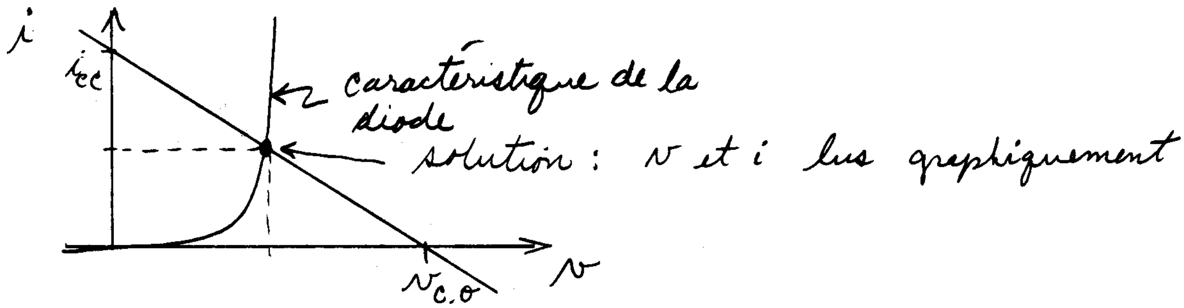
Rappel : méthode de la droite de charge



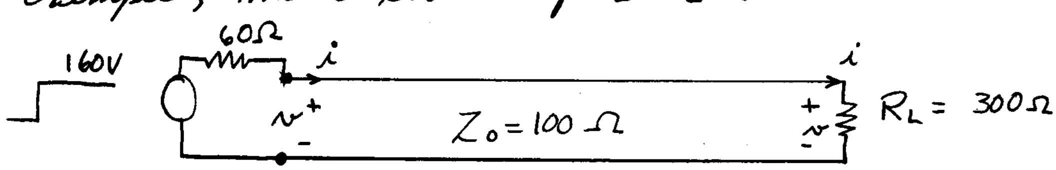
Source : $v = V_s - R_s\, i$

→ équation d'une droite

$i_{cc} = V_s / R_s \qquad v_{c.o} = V_s$



Exemple, même circuit qu'en I.5.3

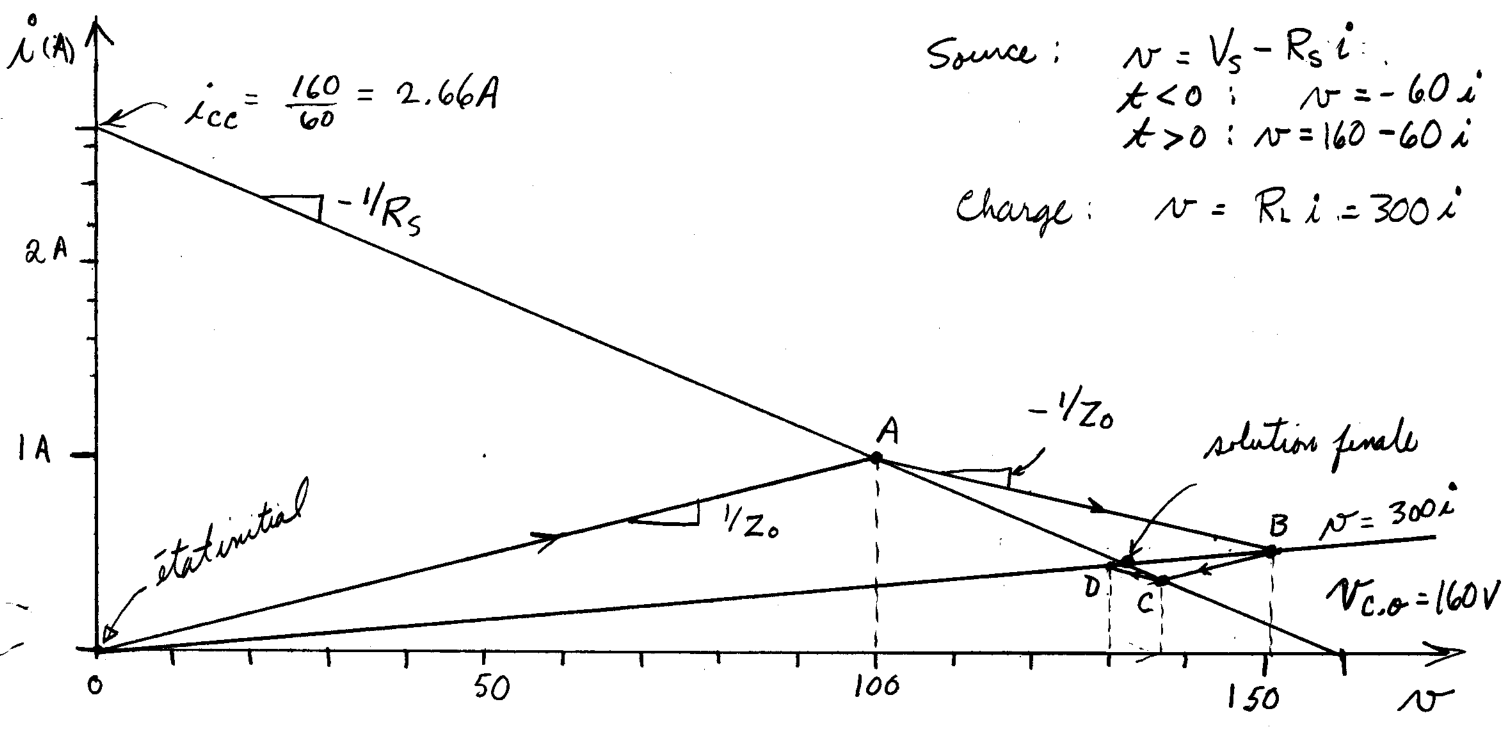


Source : $v = V_s - R_s\, i$

$t < 0$: $v = -60\, i$

$t > 0$: $v = 160 - 60\, i$

Charge : $v = R_L\, i = 300\, i$



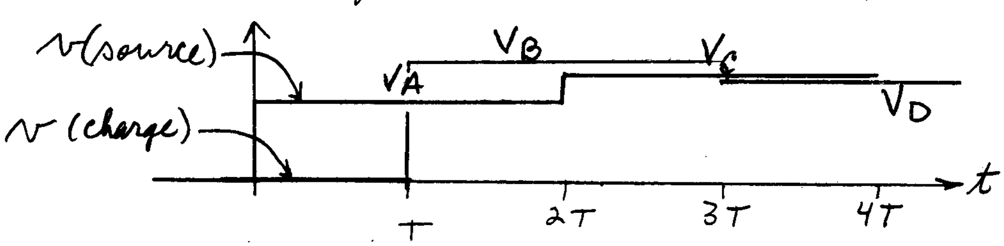
- pour $t<0$ $\quad i=0$ et $v=0$
- à $t=0^+$ transition sur caractéristique de source avec $\frac{\Delta v}{\Delta i} = +Z_0$ (point A)
- à $t=T$
  - onde arrive à la charge
  - transition sur caractéristique de charge avec $\frac{\Delta v}{\Delta i} = -Z_0$ (point B)
- à $t=2T$
  - onde réfléchie arrive sur la source
  - transition sur la caractéristique de source avec $\frac{\Delta v}{\Delta i} = +Z_0$ (point C)
- à $t=3T$
  - 2e onde arrive sur la charge
  - transition sur caractéristique de charge avec $\frac{\Delta v}{\Delta i} = -Z_0$ (point D)

– – –

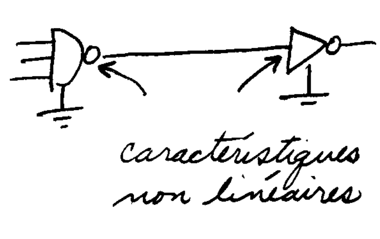
– – –

- à $t \to \infty$
  - solution finale à l'intersection des deux caractéristiques, comme en courant continu

À la sources, on a les valeurs tensions/courant des points A, C, ...
" " charge, " " " " " " " " B, D, ...

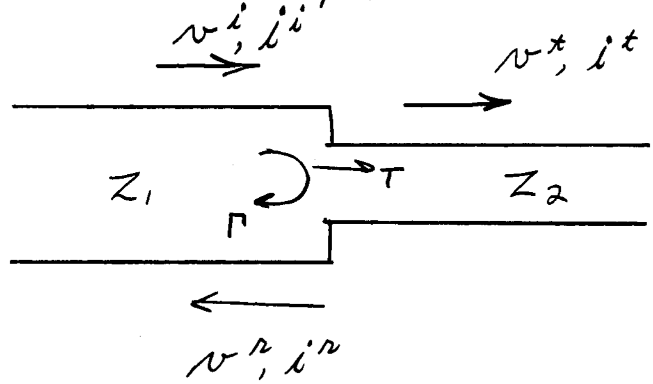


Cette technique est fort utile pour circuits numériques rapides:



I.7 Connexion en tandem

- soit une connexion "en tandem" de deux lignes d'impédances différentes
- un signal arrive sur la ligne Z_1 : v^i



- signal réfléchi v^r, i^r
- signal transmis v^t, i^t

à la jonction : - côté Z_1 $\quad v_1 = v^i + v^r \quad i_1 = i^i + i^r$

$$v^i / i^i = Z_1 \qquad v^r / i^r = -Z_1$$

- côté Z_2 $\quad v_2 = v^t \quad i_2 = i^t$

$$v^t / i^t = Z_2$$

- lois de Kirchhoff : $v_1 = v_2 \qquad i_1 = i_2$

$$v^i + v^r = v^t \quad \div v^i \;\rightarrow\; 1 + \frac{v^r}{v^i} = \frac{v^t}{v^i} \qquad \frac{v^r}{v^i} \equiv \Gamma \quad \frac{v^t}{v^i} \equiv T$$

$$\boxed{1 + \Gamma = T}$$

$$i_1 = i^i + i^r = \frac{v^i}{Z_1}(1 - \Gamma) \quad ; \quad i_2 = i^t = \frac{v^i T}{Z_2} = \frac{v^t}{Z_2}$$

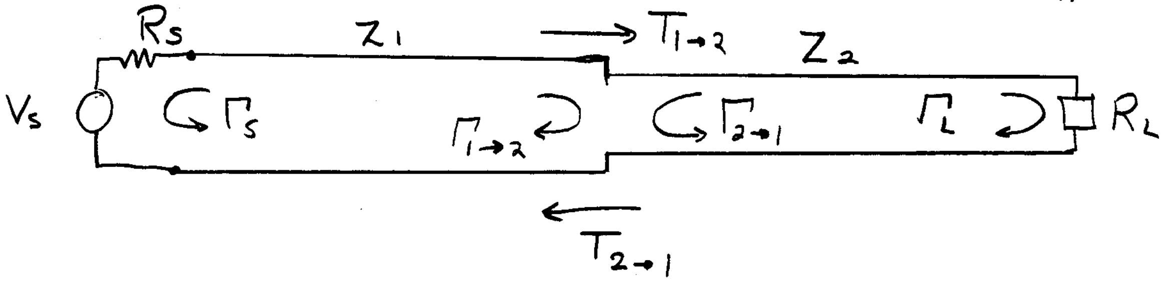
$$\frac{v^i}{Z_1}(1 - \Gamma) = \frac{v^i}{Z_2}(1 + \Gamma) \longrightarrow \frac{Z_2}{Z_1} - 1 = \Gamma \longrightarrow \boxed{\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}}$$

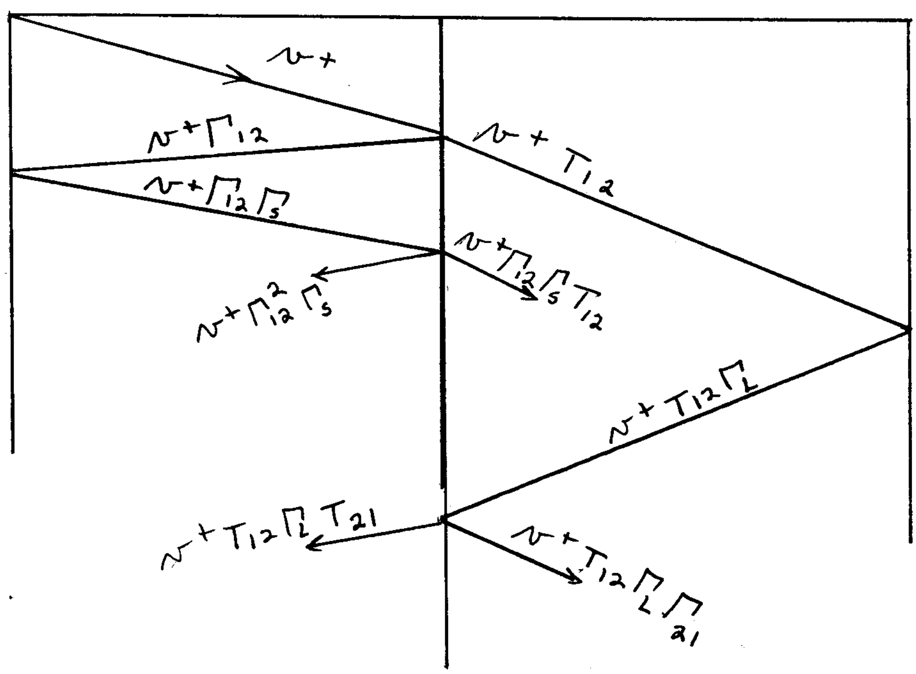
$$\boxed{T = 1 + \Gamma = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

Si le signal incident vient de la ligne 2, on a plutot

$$\Gamma_{2\to 1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad T_{2\to 1} = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

On peut traiter ce cas avec la méthode du diagramme de rebonds





NB: prendre compte des temps de parcours différents sur les deux lignes

I.8 Lignes avec pertes

- pertes causent distorsion du signal à cause de réponse en fréquence non constante des éléments R et L ou G et C
- On cherche une solution sans distorsion ; celle-ci pourrait être du type : $v(s,t) = f(s-ct)\, e^{-\alpha s}$

$f(s-ct)$: signal original qui se propage à vitesse c

$e^{-\alpha s}$: atténuation indépendante du temps

donc : – "forme" de $v(s=s';t)$ ne change pas avec s'
– niveau de v change
– toute l'information est préservée

Solution possible ?

2 Équations du télégraphiste combinées :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = LC\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC+LG)\frac{\partial v}{\partial t} + RGv \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = -\alpha e^{-\alpha s} f(s-ct) + e^{-\alpha s} f'(s-ct)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = \alpha^2 e^{-\alpha s} f(s-ct) - \alpha e^{-\alpha s} f' - \alpha e^{-\alpha s} f' + e^{-\alpha s} f'' \qquad (2)$$

On peut voir que pour la forme de solution proposée nous avons :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = e^{-\alpha s} f'' c^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -e^{-\alpha s} f' c$$

donc en combinant (1) et (2) puis en regroupant les dérivées du même ordre, on arrive à :

f'' : $\quad 1 = LCc^2 \longrightarrow c = 1/\sqrt{LC} \qquad (3)$

vitesse de propagation

f' : $\quad \frac{2\alpha}{c} = RC + LG \qquad (4)$

f : $\quad \alpha^2 = RG \longrightarrow \alpha = \sqrt{RG} \qquad (5)$

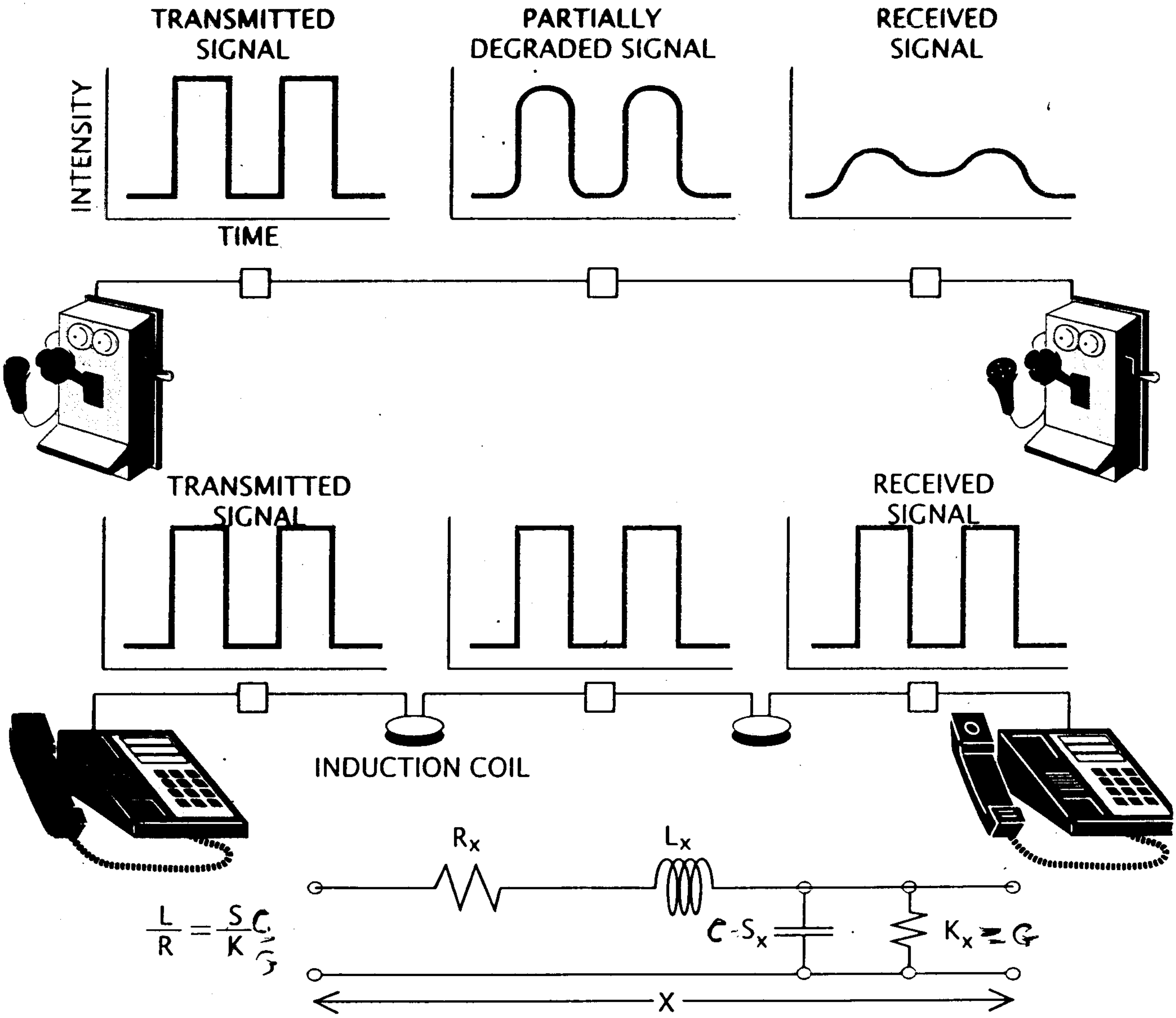
constante d'atténuation

Combinant (3), (4) et (5) on arrive à

$$\boxed{RC = LG}^{*} \longleftarrow$$ condition de Heaviside pour propagation sans distorsion

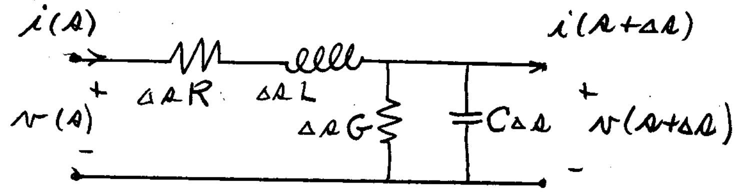
– on augmente L avec éléments discrets pour satisfaire la condition.

* ou $\frac{R}{\omega L} = \frac{G}{\omega C}$ si signal harmonique ; i.e. $Q_{\text{série}} = Q_{\text{shunt}}$



DISTORTION destroys a signal by causing its higher-frequency components to outpace its lower-frequency ones, turning a sharp pulse into a blur (*top*). Distortionless transmission (*middle*) incorporates induction loading to balance the equation (*bottom, with circuit diagram*) of inductance *L*, linear resistance *R*, capacitance *S* and leakage resistance *K*, caused by leakage between a circuit's forward and return legs.

I.9 Equation d'ondes en régime fréquentiel



Rappel :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial s} + R i + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \qquad (1) \\ &\frac{\partial i}{\partial s} + G v + C\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad (2) \end{aligned}}$$

- On excite le circuit avec un signal sinusoïdal à une fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$
- le circuit atteint le régime permanent
- on utilise une notation de type phaseur : $v = Re\{V e^{j\omega t}\}$

$$i = Re\{I e^{j\omega t}\}$$

Dans (1) et (2) ... $\frac{\partial}{\partial t}(\ ) = j\omega(\ )$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial s} \rightarrow \frac{d(\ )}{ds}$$

$$\left.\boxed{\begin{aligned} &\frac{dV}{ds} + (R + j\omega L) I = 0 \\ &\frac{dI}{ds} + (G + j\omega C) V = 0 \end{aligned}}\right\} \qquad \frac{d^2V}{ds^2} - (R+j\omega L)(G+j\omega C) V = 0$$

Posons $\boxed{\gamma^2 = (R+j\omega L)(G+j\omega C)}$

$$\boxed{\frac{d^2V}{ds^2} - \gamma^2 V = 0}$$

Remarque : $(R+j\omega L)$ et $(G+j\omega C)$ sont dans 1^{er} quadrant $(R, L, G, C \geq 0)$

$\rightarrow \gamma^2$ dans 1^{er} ou 2^e quadrant

$\rightarrow \gamma$ dans 1^{er} ou 3^e quadrant

$\rightarrow Re\{\gamma\}$ et $Im\{\gamma\}$ ont le même signe

I.9.1 Solution générale

$$\boxed{V(s,\omega) = A e^{-\gamma(\omega)s} + B e^{\gamma(\omega)s}}$$

- 2 solutions linéairement indépendantes
- A et B : phaseurs constants

Considérons d'abord le 1er terme

$$V = A e^{-\gamma s}$$

$$v = Re\{A e^{-\gamma s} e^{j\omega t}\}$$

$\gamma = \alpha + j\beta$; constante de propagation

α : constante d'atténuation (1/m) } ont le même signe

β : nombre d'onde (1/m)

$$v = Re\{|A| e^{j\theta_A} e^{j\omega t} e^{-\alpha s} e^{-j\beta s}\} = |A| e^{-\alpha s}\cos(\omega t - \beta s + \theta_A)$$

- $\cos(\omega t - \beta s + \theta_A)$: périodique selon t et s

s fixe et t varie : période T : $\omega(t+T) - \omega t = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

t fixe et s varie : période λ : $\beta(s+\lambda) - \beta s = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

- vitesse de déplacement : $\frac{d}{dt}[\omega t - \beta s + \theta_A] = 0$

$$\rightarrow \omega = \beta \frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f \lambda}{2\pi}$$

$$\boxed{c = \lambda f}$$

$$c = \frac{\omega}{\beta}$$

- $e^{-\alpha s}$: le signal s'atténue à mesure que s augmente

- Si il n'y a pas de pertes : $R=0$, $G=0$

$$\gamma^2 = -\omega^2 LC \rightarrow \gamma \text{ imaginaire} \qquad \gamma = j\beta$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{c} \qquad c = 1/\sqrt{LC}$$

$\alpha = 0$ pas d'atténuation

Terme $\quad Be^{+\gamma s}$

- même comportement mais propagation et atténuation en direction $-s$

$$V = \underbrace{Ae^{-\gamma s}}_{\text{onde en direction } +s} + \underbrace{Be^{\gamma s}}_{\text{onde en direction } -s}$$

I.9.2 Courant $I(s,\omega)$

On a que $\quad \dfrac{dV}{ds} + (R+j\omega L)I = 0$

$$\rightarrow \quad I = \frac{-1}{R+j\omega L}\left[-\gamma Ae^{-\gamma s} + \gamma Be^{\gamma s}\right]$$

$$= + \frac{\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}}{(R+j\omega L)}\left[Ae^{-\gamma s} - Be^{\gamma s}\right]$$

$$I = \frac{1}{Z_0}\left[Ae^{-\gamma s} - Be^{\gamma s}\right]$$

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}}$$

NB: $\dfrac{V(s)}{I(s)} \neq Z_0$ en général, à moins d'avoir $B=0$

I.9.3 Transfert de puissance

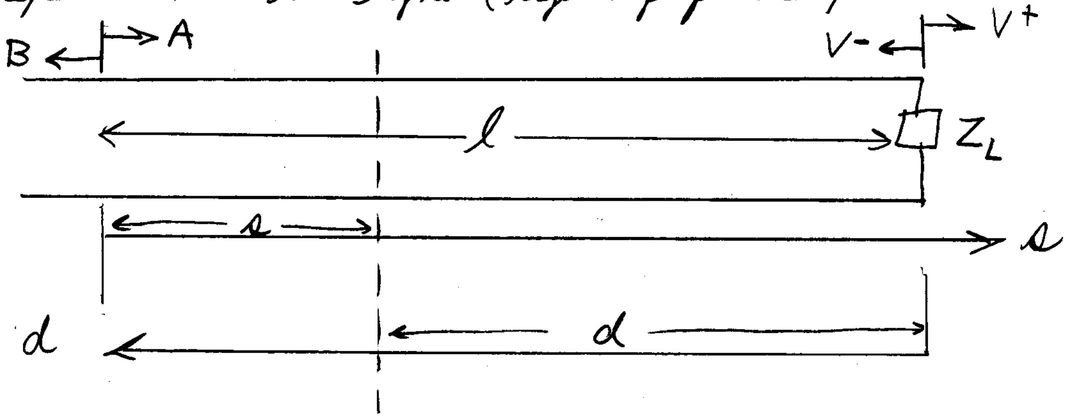
puissance instantannée $\quad p = v\, i$

$$p = Re\{Ve^{j\omega t}\}\, Re\{Ie^{j\omega t}\} = \frac{1}{4}\left(Ve^{j\omega t} + V^*e^{-j\omega t}\right)\left(Ie^{j\omega t} + I^*e^{-j\omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[VIe^{2j\omega t} + V^*I^*e^{-2j\omega t} + VI^* + V^*I\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} Re\{VIe^{2j\omega t}\}}_{\text{puissance réactive, oscille à } 2\omega} + \boxed{\underbrace{\frac{1}{2} Re\{VI^*\}}_{\text{puissance moyenne constante dans le temps}}}$$

I.10 Réflexions sur une ligne (régime fréquentiel)



$$l = s + d \rightarrow s = l - d$$

$$V = A e^{-\gamma s} + B e^{+\gamma s}$$
$$= A e^{-\gamma l} e^{+\gamma d} + B e^{+\gamma l} e^{-\gamma d}$$
$$= V^+ e^{\gamma d} + V^- e^{-\gamma d}$$

$$V^+ \equiv A e^{-\gamma l} \qquad V^- \equiv B e^{\gamma l}$$

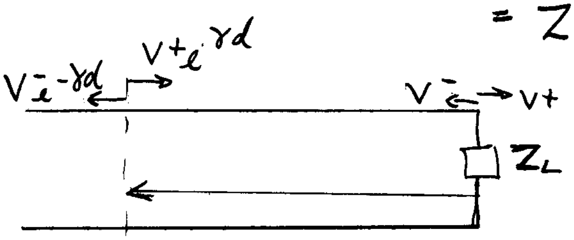
$$I = \frac{1}{Z_0}\left[A e^{-\gamma s} - B e^{+\gamma s}\right]$$
$$= \frac{1}{Z_0}\left[V^+ e^{\gamma d} - V^- e^{-\gamma d}\right]$$

V^+, V^- : ondes incidentes et réfléchies à la charge à $s = l$ et $d = 0$

Ainsi, on peut définir $Z(d)$, l'impédance à une distance d de la charge

$$Z(d) = \frac{V(d)}{I(d)} = \frac{V^+ e^{\gamma d} + V^- e^{-\gamma d}}{\frac{1}{Z_0}\left[V^+ e^{\gamma d} - V^- e^{-\gamma d}\right]}$$

$$= Z_0 \frac{1 + V^-/V^+ \, e^{-2\gamma d}}{1 - V^-/V^+ \, e^{-2\gamma d}}$$



$$\Gamma(d) = \frac{V^- e^{-\gamma d}}{V^+ e^{\gamma d}} \qquad \Gamma_L = \frac{V^-}{V^+} \rightarrow \boxed{\Gamma(d) = \Gamma_L e^{-2\gamma d}}$$

Donc :

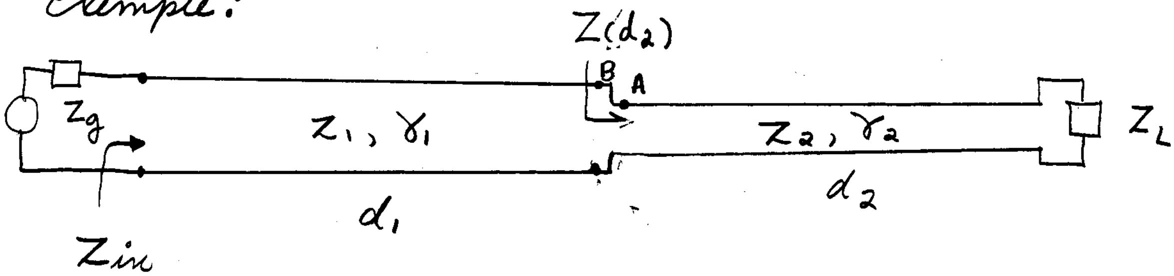
$$\boxed{Z(d) = Z_0 \frac{1 + \Gamma(d)}{1 - \Gamma(d)}} \rightarrow \boxed{\Gamma(d) = \frac{Z(d) - Z_0}{Z(d) + Z_0}}$$

$$\boxed{Z(0) = Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}} \rightarrow \boxed{\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

Avec impédances normalisées : $\boxed{z_L = \dfrac{Z_L}{Z_0} \qquad z(d) = \dfrac{Z(d)}{Z_0}}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} z(d) = \dfrac{1+\Gamma(d)}{1-\Gamma(d)} & \Gamma(d) = \dfrac{z(d)-1}{z(d)+1} \\[2ex] z_L = \dfrac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} & \Gamma_L = \dfrac{z_L - 1}{z_L + 1} \end{array}}$$

Exemple :



- Trouver Z_{in}
- Trouver I^{inc} fourni par la source à l'entrée de la ligne 1

Solution :

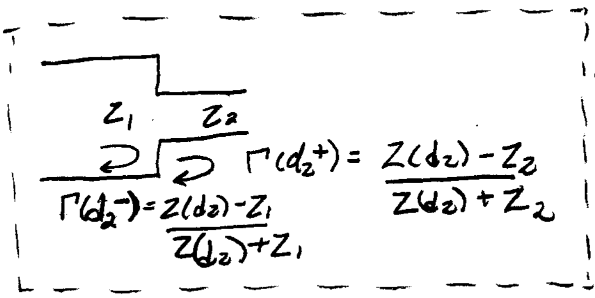
- On procède de la charge vers la source : Z_L à Z_L' à Z_{in}

• $\Gamma_L = \dfrac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2}$

• $\Gamma(A)$ à la jonction sur ligne 2 $\quad \Gamma(A) = \Gamma_L e^{-2\gamma_2 d_2}$

NB : • Γ est différent de part et d'autre de la jonction

•Z est le même de part et d'autre car V et I sont continus



• $Z(A) = Z_2 \dfrac{1+\Gamma(A)}{1-\Gamma(A)}$

• $Z(B) = Z(A)$

• $\Gamma(B) = \dfrac{Z(B) - Z_1}{Z(B) + Z_1}$

• $\Gamma_{in} = \Gamma(B)\, e^{-2\gamma d_1}$

• $Z_{in} = Z_1 \dfrac{(1+\Gamma_{in})}{(1-\Gamma_{in})}$

à l'entrée du circuit nous avons donc:

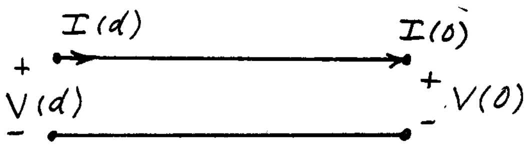
$$V_{in} = V_g \frac{Z_{in}}{Z_{in}+Z_g} = V^i + V^r = Z_1(I^i - I^r) \qquad I_{in} = \frac{V_g}{Z_{in}+Z_g} = I^i + I^r$$

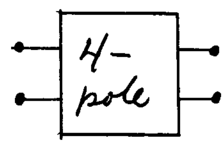
$$I_{in} = I^i + I^r = V_g/(Z_{in}+Z_g)$$

$$V_{in} = Z_1(I^i - I^r) = V_g \; Z_{in}/(Z_{in}+Z_g)$$

2 éqs. 2 inconnus $\longrightarrow$ $I^i = \dfrac{V_g}{2Z_1}\;\dfrac{Z_1+Z_{in}}{Z_g+Z_{in}}$

I.11 Quadrupôle équivalent d'une ligne de transmission





Format ABCD est utile pour lignes de transmission

$$\begin{bmatrix} V(d) \\ I(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} V(d) &= V^+ e^{\gamma d} + V^- e^{-\gamma d} \\ I(d) &= \frac{1}{Z_0}\left[V^+ e^{\gamma d} - V^- e^{-\gamma d}\right] \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} V(d) \\ I(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\gamma d} & e^{-\gamma d} \\ e^{\gamma d}/Z_0 & -e^{-\gamma d}/Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^+ \\ V^- \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} V(0) &= V^+ + V^- \\ I(0) &= \frac{1}{Z_0}\left[V^+ - V^-\right] \end{aligned}\right\} \quad V^+ = \frac{V(0) + I(0)\,Z_0}{2} \qquad V^- = \frac{V(0) - I(0)\,Z_0}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & Z_0/2 \\ 1/2 & -Z_0/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^+ \\ V^- \end{bmatrix}$$

En combinant les 2 équations matricielles on arrive à:

$$\begin{bmatrix} V(d) \\ I(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\gamma d} & e^{-\gamma d} \\ \frac{e^{\gamma d}}{Z_0} & -\frac{e^{-\gamma d}}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & Z_0/2 \\ 1/2 & -Z_0/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix}$$

i.e

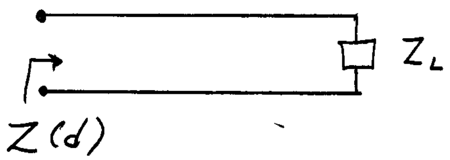
$$\boxed{\begin{bmatrix} V(d) \\ I(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma d & Z_0 \sinh \gamma d \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma d & \cosh \gamma d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix}}$$

On peut utiliser ce résultat pour transformer l'impédance

$$Z(d) = \frac{V(d)}{I(d)} = \frac{V(0)\cosh \gamma d + I(0)\, Z_0 \sinh \gamma d}{\frac{V(0)}{Z_0}\sinh \gamma d + I(0)\cosh \gamma d} \quad \begin{matrix} \div I(0) \\ \div I(0) \end{matrix}$$

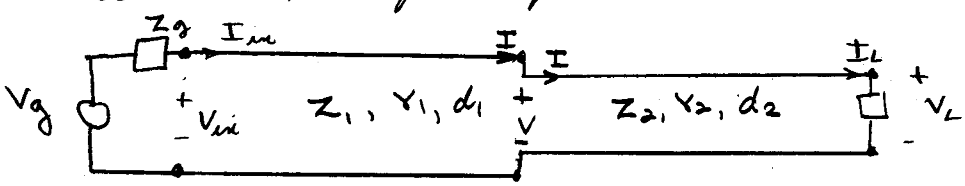
avec $\frac{V(0)}{I(0)} = Z_L$

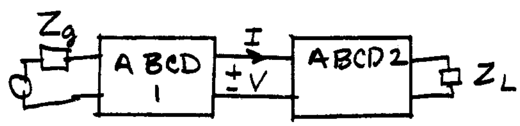
$$\boxed{Z(d) = \frac{Z_L \cosh \gamma d + Z_0 \sinh \gamma d}{\frac{Z_L}{Z_0}\sinh \gamma d + \cosh \gamma d}}$$



la ligne agit comme un transformateur d'impédance.

- matrice ABCD utile pour cascader des quadrupôles





$$\begin{bmatrix} V_{in} \\ I_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_L \\ I_L \end{bmatrix}$$

I.12 Lignes sans pertes

si $R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$ on considère $R = 0$ et $G = 0$

$\gamma^2 = -\omega^2 LC$; $\gamma = \alpha + j\beta \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = \omega\sqrt{LC} = \frac{\omega}{c} \end{array}$

$V(d)$: $\quad V = V^+ e^{j\beta d} + V^- e^{-j\beta d}$

$I = \frac{V^+}{Z_0} e^{j\beta d} - \frac{V^-}{Z_0} e^{-j\beta d}$, avec $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$\cosh \gamma d = \cosh(j\beta d) = \cos\beta d$

$\sinh \gamma d = \sinh j\beta d = j \sin\beta d$

$$\begin{bmatrix} V(d) \\ I(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta d & j Z_0 \sin\beta d \\ \frac{j}{Z_0}\sin\beta d & \cos\beta d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix}$$

$$Z(d) = \frac{Z_L \cos\beta d + j Z_0 \sin\beta d}{j\frac{Z_L}{Z_0}\sin\beta d + \cos\beta d} = Z_0 \frac{(Z_L + j Z_0 \tan\beta d)}{(j Z_L \tan\beta d + Z_0)}$$

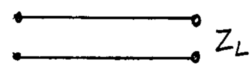
$$z(d) = \frac{Z(d)}{Z_0} = \frac{z_L + j\tan\beta d}{j z_L \tan\beta d + 1}$$

$$\Gamma(d) = \Gamma_L e^{-2j\beta d}$$

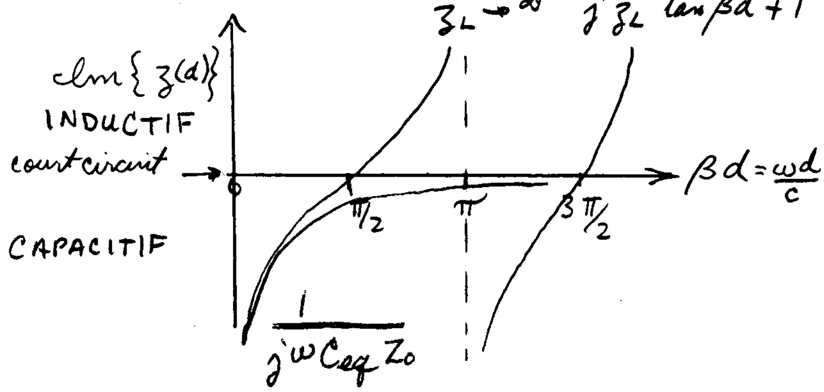
Cas Particuliers

i) Ligne terminée par un circuit ouvert

$Z_L \to \infty \qquad I_L = I(0) = 0$



$$z(d) = \lim_{z_L \to \infty} \frac{z_L + j\tan\beta d}{j z_L \tan\beta d + 1} = -j\cot(\beta d)$$



Remarque : à basse fréquence $\beta d \to 0$

$$\cot\beta d \approx \frac{1}{\beta d}$$

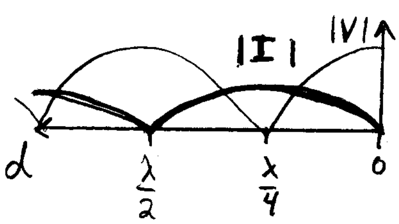
$$Z(d) = Z_0 \frac{-j}{\beta d} = \frac{1}{j\beta d/Z_0}$$

$$= \frac{1}{j\omega\frac{d}{Z_0 c}} = \frac{1}{j\omega d C}$$

$$= \frac{1}{j\omega C_{eq}} \qquad C_{eq} = dC$$

$$V(d) = V(0)\cos\beta d$$

$$I(d) = j\frac{V(0)}{Z_0}\sin\beta d$$



$$P_{moy} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{V I^*\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{ j|V(0)|^2 \cos\beta d \sin\beta d\} = 0$$; aucune énergie absorbée par la charge

$$\Gamma(d) = \Gamma_L e^{-2j\beta d} \qquad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

$|\Gamma(d)| = 1$; réflexion totale

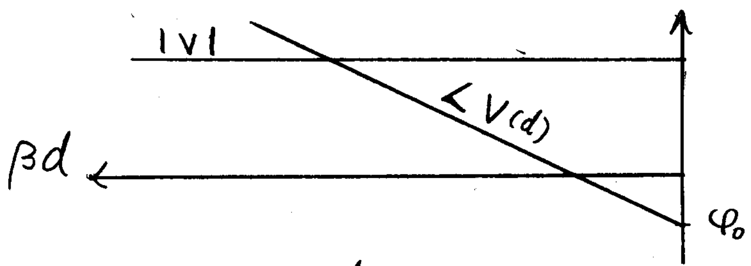
ii) Charge résistive $R_L = Z_0$

$$Z_L(d) = Z_0 \frac{1 + j\tan\beta d}{j\tan\beta d + 1} = Z_0$$; indépendant de βd.

$$V(d) = V(0)\cos\beta d + j\,I(0)\,Z_0 \sin\beta d$$; $V(0) = R_L I(0) = Z_0 I(0)$

$$= V(0)(\cos\beta d + j\sin\beta d) = V(0)e^{j\beta d}$$

$$= |V(0)|\,e^{j(\beta d + \varphi_0)}$$ $\varphi_0 = \angle V(0)$



$$\Gamma(d) = \Gamma_L e^{-2j\beta d}$$ $\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = 0 \rightarrow \Gamma(d) = 0$

aucune réflexion

$$I(d) = \frac{j}{Z_0} V(0)\sin\beta d + I(0)\cos\beta d$$

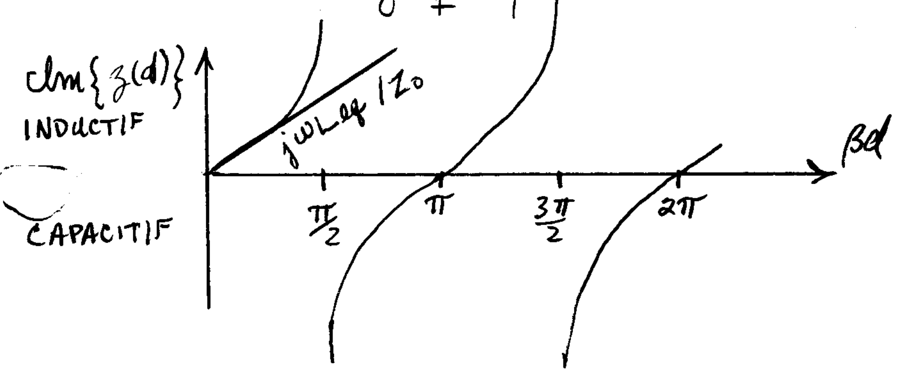
$$= \frac{j}{Z_0} V(0)\sin\beta d + \frac{V(0)}{Z_0}\cos\beta d = \frac{V(0)}{Z_0} e^{j\beta d}$$, $\frac{V}{I} = Z_0$ partout

$$P_{moy} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V I^*\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{|V(0)|^2}{Z_0}\right\} = \frac{|V(0)|^2}{2Z_0}$$

iii) Ligne terminée par court circuit

$V(0) = 0$ $Z_L = 0$ Z_L

$$z(d) = \frac{0 + j\tan\beta d}{0 + 1}$$ $Z(d) = j\,Z_0 \tan\beta d$

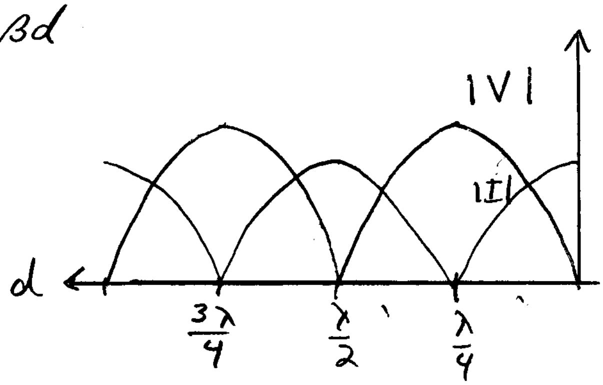


Remarque:
à basse fréquence $\beta d \to 0$
$\tan\beta d \approx \beta d$

$$Z(d) \approx Z_0\, j\beta d = \sqrt{\frac{L}{C}}\, j\frac{\omega d}{c}$$
$$= j\omega d\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC} = j\omega L d$$
$$= j\omega L_{eq}$$

$V(d) = j Z_0 I(0) \sin\beta d$

$I(d) = I(0) \cos\beta d$



$P_{moy} = \frac{1}{2} Re\{VI^*\} = \frac{1}{2} Re\{j|I(0)|^2 Z_0 \sin\beta d \cos\beta d\} = 0$ aucune énergie absorbée par la charge

$\Gamma(d) = \Gamma_L e^{-2j\beta d}$ $\qquad \Gamma_L = \dfrac{0-Z_0}{0+Z_0} = -1$

$\Gamma(d) = -e^{-2j\beta d}$

$|\Gamma(d)| = 1$; réflexion totale

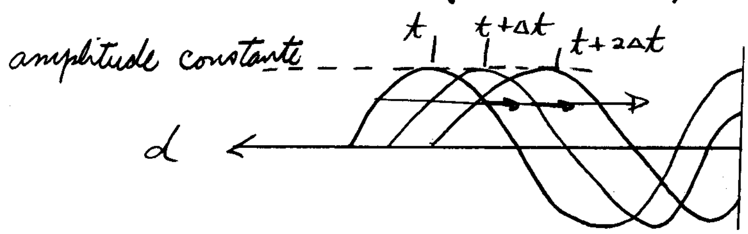
I.12.1 Ondes stationnaires vs ondes progressives

Pour la ligne terminée par $R_L = Z_0$ on a :

$V(d) = |V(0)| e^{j(\beta d + \varphi_0)}$

$v(d,t) = Re\{V(d) e^{j\omega t}\} = |V(0)| \underbrace{\cos(\omega t + \beta d + \varphi_0)}_{}$

onde se déplaçant en direction $-d$



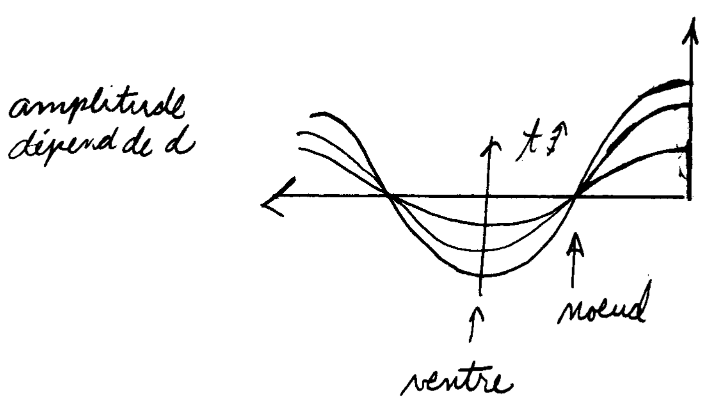
onde progressive

Ligne terminée par circuit ouvert :

$V(d) = V(0) \cos\beta d$ $\qquad v = Re\{V(0) \cos\beta d \, e^{j\omega t}\}$

$= |V(0)| Re\{\cos\beta d \, e^{j(\omega t + \varphi_0)}\}$

$= |V(0)| \cos\beta d \cos(\omega t + \varphi_0)$



I.13 Lignes à faibles pertes :

en général :

$$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

γ et Z_0 complexes

– approximation de γ :

$$\gamma = \sqrt{j\omega L\, j\omega C\,(1+R/j\omega L)(1+G/j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{R}{j\omega L}\right)^{1/2}\left(1+\frac{G}{j\omega C}\right)^{1/2}$$

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{LC}\left(1-\frac{jR}{2\omega L}\right)\left(1-\frac{jG}{2\omega C}\right), \text{ car } \sqrt{1+\epsilon} \approx 1+\frac{\epsilon}{2}$$

$$= j\omega\sqrt{LC}\left(1-j\left(\frac{R}{2\omega L}+\frac{G}{2\omega C}\right)-\frac{GR}{4\omega^2 LC}\right)$$

terme de second ordre négligeable

$$\approx j\omega\sqrt{LC} + \frac{\omega\sqrt{LC}}{2}\left(\frac{R}{\omega L}+\frac{G}{\omega C}\right)$$

$$= j\beta + \alpha$$

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{LC} \qquad \alpha = \frac{\sqrt{LC}}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)}$$

comme lignes sans pertes

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{Z_0}+\frac{G}{Y_0}\right)$$

– Approximation de Z_0 :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{1+(R/j\omega L)}{1+(G/j\omega C)}} \qquad \frac{1}{1+\epsilon} = 1-\epsilon+\epsilon^2-\epsilon^3\ldots$$

$$\sqrt{1-\epsilon} \approx 1-\frac{\epsilon}{2}$$

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1+\frac{R}{2j\omega L}\right)\left(1-\frac{G}{2j\omega C}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1+\frac{1}{2j\omega}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)+\frac{RG}{4\omega^2 LC}\right)$$

terme de second ordre

$=0$ si ligne sans distorsion (Heaviside)
$\neq 0$ en général mais effets s'annulent partiellement

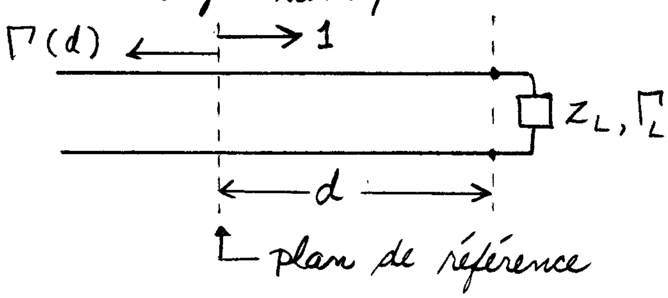
d'où l'on prend

$$\boxed{Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

comme dans le cas sans pertes

I.14 Analyse graphique des lignes en régime fréquentiel

considérons une ligne sans pertes :



dans le plan de référence :

$$\left.\begin{aligned} V^i &= V^+ e^{+j\beta d} \\ V^r & V^- e^{-j\beta d} \end{aligned}\right\} \quad \frac{V^r}{V^i} = \Gamma(d)$$

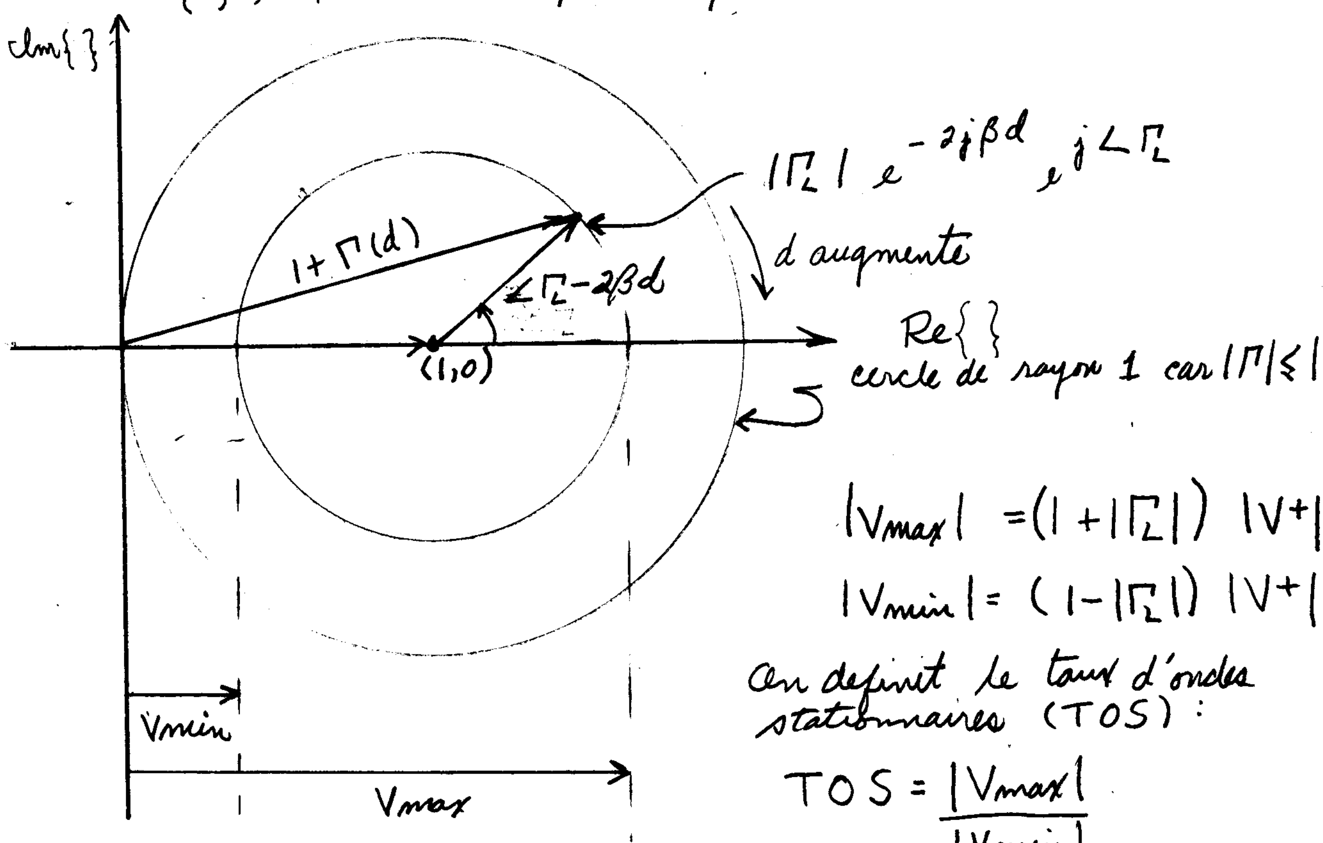
• Difficile de prédire où sont les max. et les mins. → normaliser p/r à V^i

$$V(d) = V^+ e^{j\beta d} + V^- e^{-j\beta d} = V^+ e^{j\beta d}\left(1 + \frac{V^-}{V^+} e^{-2j\beta d}\right)$$

$$= V^+ e^{j\beta d}\left(1 + \Gamma_L e^{-2j\beta d}\right) = V^+ e^{j\beta d}\left(1 + \Gamma(d)\right)$$

$$= V^+ e^{j\beta d}\left\{1 + |\Gamma_L|\, e^{-2j\beta d}\, e^{j\angle\Gamma_L}\right\}$$

Quantité entre { }, representée dans plan complexe



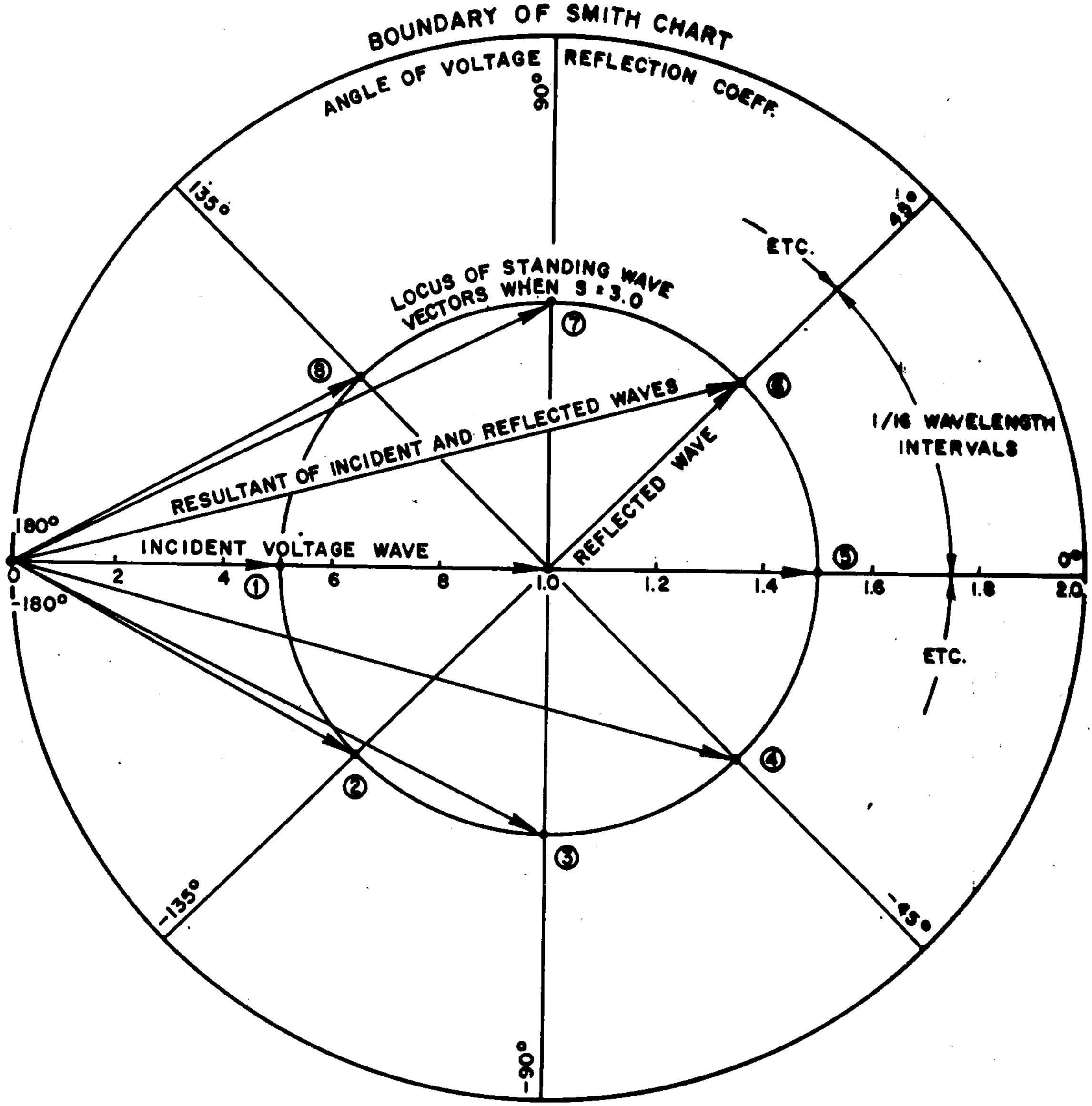
$$|V_{max}| = (1 + |\Gamma_L|)\, |V^+|$$

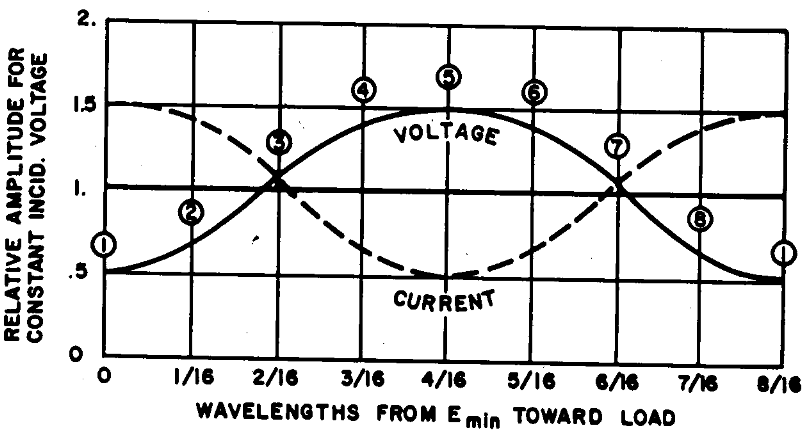
$$|V_{min}| = (1 - |\Gamma_L|)\, |V^+|$$

On definit le taux d'ondes stationnaires (TOS) :

$$TOS = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|}$$

$$\boxed{TOS = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}}$$





VOLTAGE VECTOR	AMPLITUDE
0 – 1	0.50
0 – 2	0.66
0 – 3	1.06
0 – 4	1.40
0 – 5	1.50
0 – 6	1.40
0 – 7	1.06
0 – 8	0.66

Fig. 1.5 Solution for Prob. 1-1, construction of standing wave shapes.

ou encore $\boxed{TOS = \dfrac{1+|\Gamma(d)|}{1-|\Gamma(d)|}}$

$TOS \equiv VSWR \equiv S$ (rarement utilisé)

exemple: - ligne terminée par un circuit ouvert:

$|\Gamma_L| = 1$, $TOS \to \infty$

- charge adaptée : $|\Gamma_L| = 0$ $TOS = 1$

Remarques: - on avait vu que $z_L = \dfrac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}$; donc $z_L = TOS$ si Γ_L est réel +if.

- distance entre 2 max consécutifs* (ou 2 min consécutifs)
(* en amplitude, sans égard à la phase)

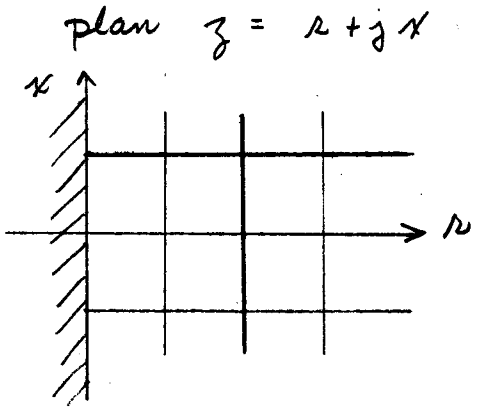
$\Gamma(d) \propto e^{-2j\beta d} \longrightarrow 2\beta d_2 - 2\beta d_1 = 2\pi \rightarrow \frac{4\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = 2\pi$

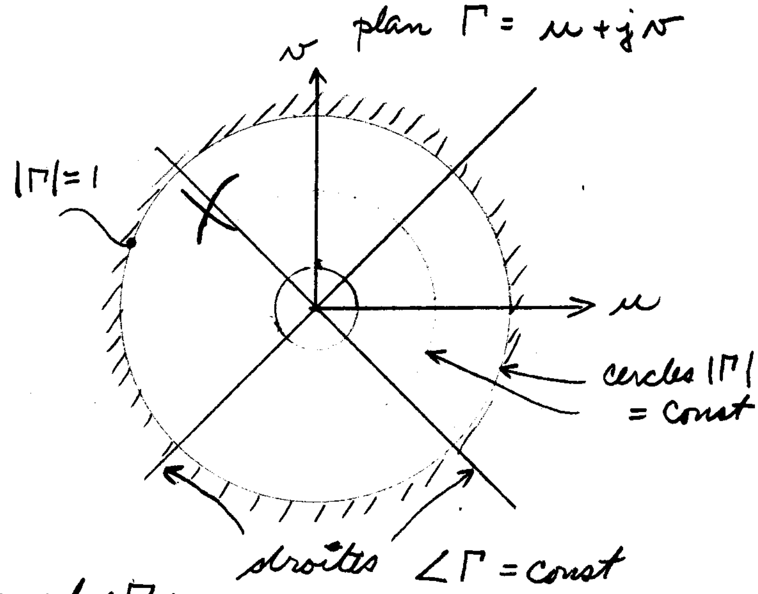
$d_2 - d_1 = \lambda/2$

- distance entre 1 min et 1 max $= \lambda/4$

- sur un court circuit on obtient graphiquement $V = 0$
- sur un circuit ouvert on obtient $V = 2V^+$
- max de courant correspond à min de tension, et vice-versa

I.15 L'abaque de Smith





Transformation du plan z au plan Γ:

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

Transformation inverse: $z = \dfrac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$

transformation des droites $r = cte$, $x = cte$

$$r = Re\{z\} = Re\left\{\frac{1+u+jv}{1-u-jv}\right\}, \quad x = Im\{z\} = Im\left\{\frac{1+u+jv}{1-u-jv}\right\}$$

$$\left(u - r/(1+r)\right)^2 + v^2 = \left(1/(1+r)\right)^2 \qquad (u-1)^2 + (v - 1/x)^2 = 1/x^2$$

cercles centrés à $\Gamma = \left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$ et de rayon $(1/1+r)$

cercles centrés à $\Gamma = (1, 1/x)$ et de rayon $1/x$

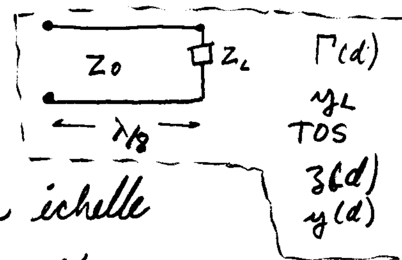
- 2 familles de cercles

  plan z : droites $r = cte.$ et $x = cte$ se coupent à 90°

  plan Γ : courbes " et $x =$ " " " à 90°
  car transformation conforme

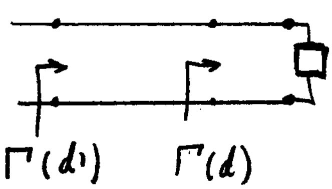
- Voir acétate avec 2 types de cercle
- sur abaque : r, x, $|\Gamma|$ et $\angle\Gamma$ sont accessibles

Exemple : $Z = 80 + j40$ et $Z_0 = 50$

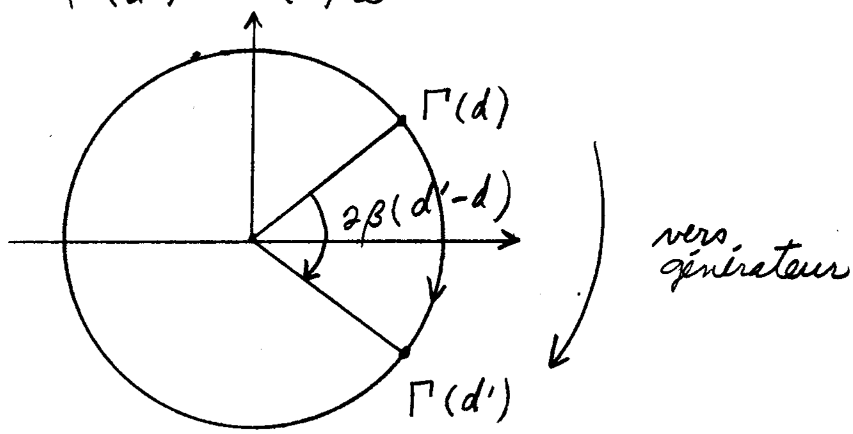


- normaliser : $z = 1.6 + j0.8$
- $|\Gamma|$: avec compas, rapporter sur échelle
- $\angle\Gamma$: lire directement sur bord de l'abaque

I.15.1 Déplacement du plan de référence



$$\Gamma(d') = \Gamma(d)\, e^{-2j\beta(d'-d)}$$

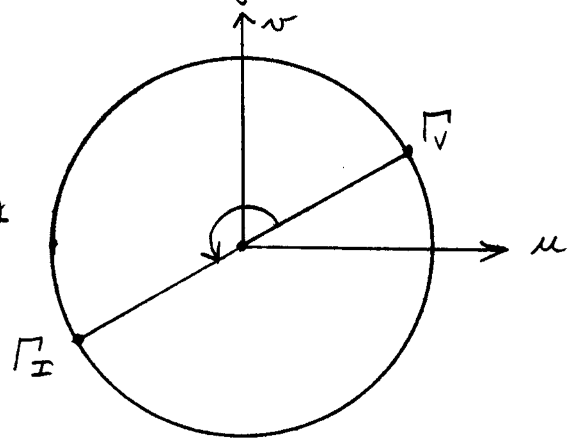


- déplacement avec compas sur cercle $|\Gamma| = cte$
- on peut lire $z(d)$ et $z(d')$ sans calculer

I. 15.2 Transformation de z à y

on sait que $\Gamma_I = -\Gamma_V$

ou $\Gamma_I = \Gamma_V e^{\pm j\pi}$



$$\Gamma_V = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1/y - 1}{1/y + 1} \times \frac{y}{y} = \frac{1-y}{y+1}$$

$$y \equiv Y/Y_0 = 1/z$$

$$\Gamma_I = -\Gamma_V = \frac{y-1}{y+1}$$

Transformation de y à Γ_I est exactement la même que la transformation de z à Γ_V

Donc, pour lire y sur l'abaque :

- $z \to \Gamma_V$ (mettre point z sur l'abaque)
- $\Gamma_V \to \Gamma_I$ (rotation 180° sur l'abaque)
- $\Gamma_I \to y$ (transfo inverse, lire y directement sur l'abaque)

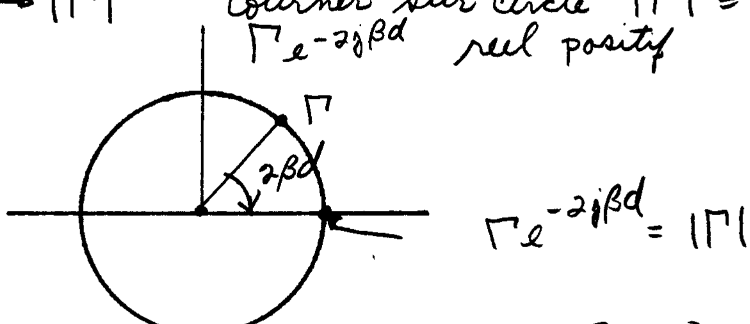
NB : $\Gamma_I = -\Gamma_V$ ne veut pas dire $z = -y$

- au centre de l'abaque $z = 1$, $y = 1$, rotation n'a pas d'effet.

I. 15.3 Lecture du TOS

$$TOS = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \qquad z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \qquad z = TOS \text{ si } \Gamma \text{ réel +if}$$

- $z \to \Gamma$ (mettre point z sur l'abaque)
- $\Gamma \to |\Gamma|$ tourner sur cercle $|\Gamma| = cte$ pour avoir $\Gamma e^{-2j\beta d}$ réel positif



- $z \to TOS$ - lire z, $Re\{z\} = TOS$ $Im\{z\} = 0$

Autre approche:
- mettre pt. z
- mesurer $|\Gamma|$ avec compas
- reporter sur échelle SWR ou VSWR

I.15.4 Périodicité

$$z(d) = \frac{z_L + j\tan\beta d}{j z_L \tan\beta d + 1}$$

$$\Gamma(d) = \Gamma_L e^{-2j\beta d}$$

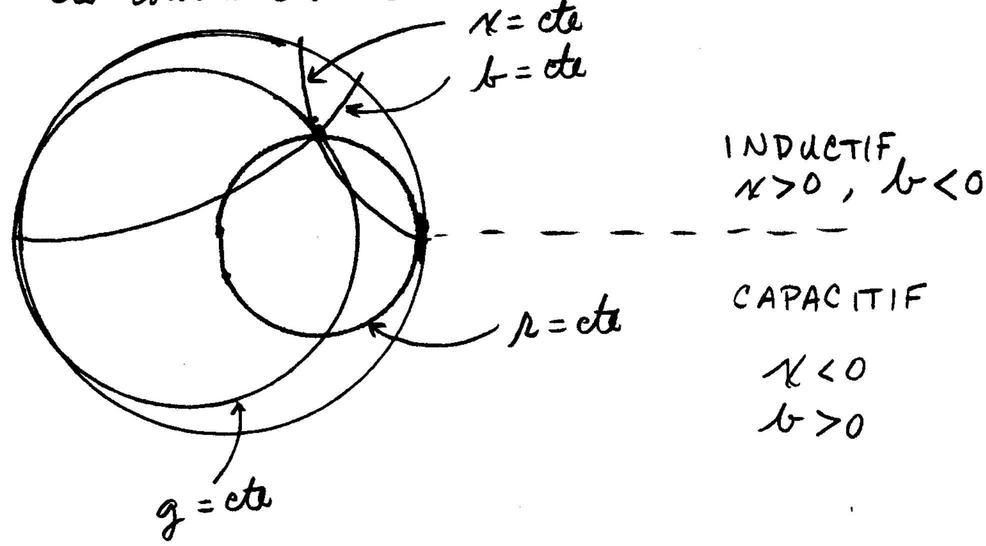
} périodiques en βd, période $= \pi$

$\Delta\beta d = \pi \rightarrow \Delta d = \frac{\lambda}{2}$

$\lambda/2 = 1$ tour sur l'abaque ; retrouve m̂ z et Γ à tous les $\lambda/2$ sur la ligne

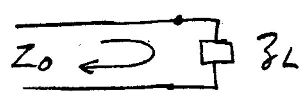
I.15.5 Abaque en y et z $\quad y = g + jb$

Au lieu de faire une rotation de 180° pour trouver y, on ajoute un groupe de courbes de niveau $g = $ cte et $b = $ cte tournée de 180°



I.16 Circuits d'adaptation

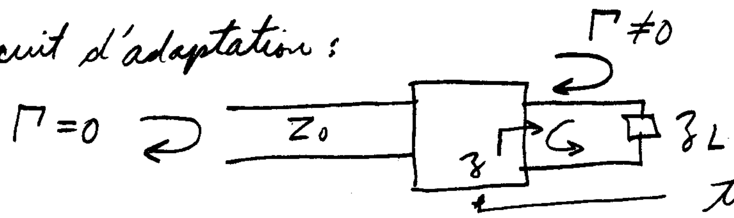
But :



$z_L \neq 1 \rightarrow \Gamma_L \neq 0$

- partie de l'énergie retourne vers la source: perte de retour

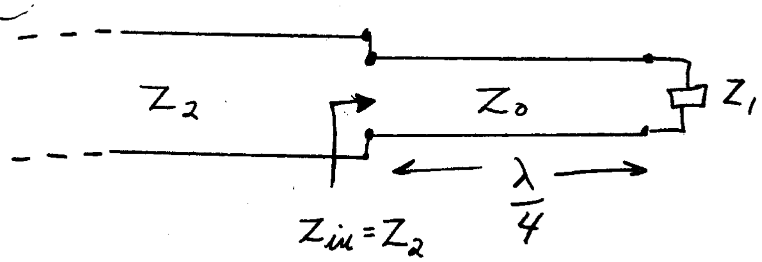
avec circuit d'adaptation :



transforme z en $z = 1$

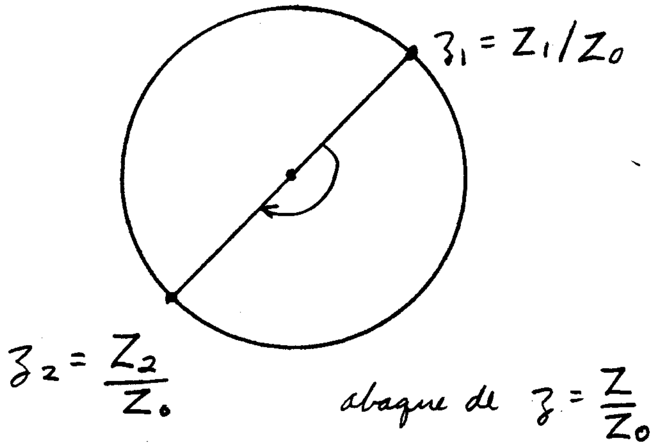
100% de l'énergie est transmise à la charge

I.16.1 Ligne $\lambda/4$



But : - faire en sorte que $Z_{in} = Z_2$

- déplacement $\lambda/4$ = rotation de 180° dans l'abaque



abaque de $z = \frac{Z}{Z_0}$

- Considérons le produit $z_1 z_2$

$$z_1 z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_0^2}$$

- rotation de 180° effectue transfo. de z à y ; donc

$$z_2 = y_1$$

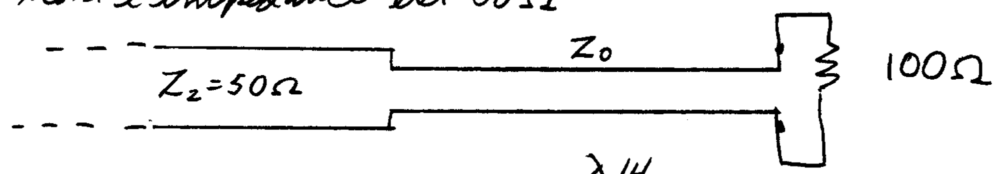
d'où $\quad z_1 z_2 = z_1 y_1$.

Puisque $z_1 y_1 = 1$, on trouve

$$z_1 z_2 = 1 \longrightarrow Z_0^2 = Z_1 Z_2$$

i.e. $\boxed{Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2}}$

Exemple : Adapter une charge de $100\,\Omega$ à une ligne de transmission dont l'impédance est $50\,\Omega$

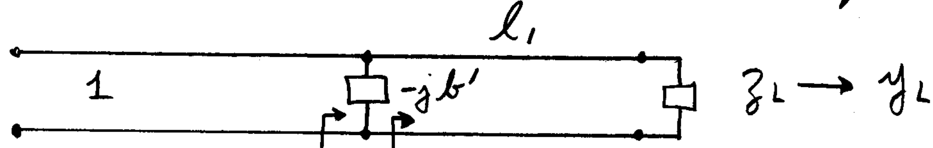


$$Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{50 \times 100} = 100/\sqrt{2} \approx 70.7\,\Omega$$

Remarque :
- en coax ou en bifilaire, on a des valeurs de Z_0 standard : 50Ω, 75Ω, 90Ω, 125Ω, 300Ω
  $\rightarrow$ impossible à réaliser en général
- avec ligne micro-ruban, très facile d'ajuster Z_0

I.16.2 Adaptation avec une susceptance en parallèle

- utiliser admittances normalisées sur l'abaque



$y_{in} = 1$ $\quad$ $y_L' = \underline{\underline{1}} + jb'$

conductance unitaire $\quad$ susceptance résiduelle

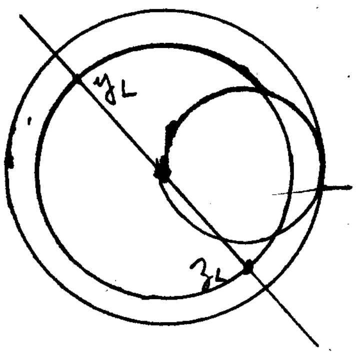
1° transformer z_L en y_L si nécessaire ; rotation de 180°

2° insérer bout de ligne pour obtenir conductance unitaire

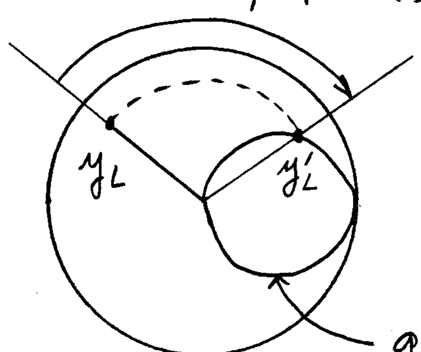
$y_L \rightarrow y_L' = 1 + jb' \qquad b' \neq b$

3° ajouter susceptance de $-jb'$ en parallèle pour obtenir

$y_{in} = 1$



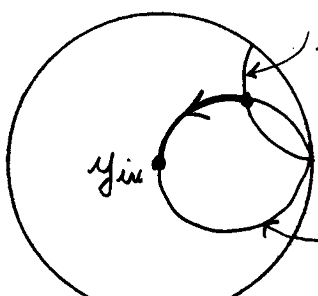
1°



2° - rotation en sens horaire car

$\Gamma(d) = \Gamma(0)\, e^{-2j\beta d}$

- plusieurs solutions possibles



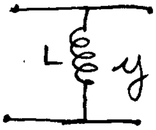
3°

NB: - bout de ligne l_1 et susceptance $-jb'$ ne dissipent pas → toute la puissance va dans z_L

Réalisation de $-jb'$:

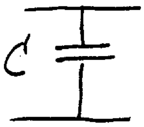
i) Avec composant discret

- si $b' > 0$, réaliser $-jb'$ avec inductance



$$y = \frac{1/j\omega L}{Y_0} = \frac{-j}{\omega L Y_0} = -jb' \Rightarrow L = \frac{1}{\omega Y_0 b'}$$

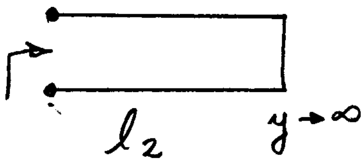
- si $b' < 0$, réaliser $-jb'$ avec condensateur



$$y = \frac{j\omega C}{Y_0} = j(-b') \rightarrow C = \frac{-b' Y_0}{\omega}$$

ii) Avec charge distribuée

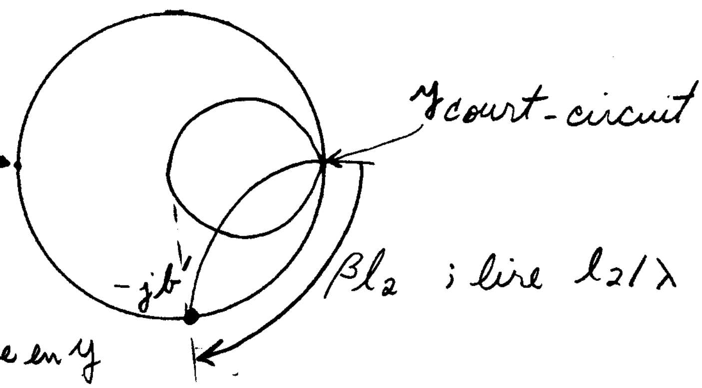
- si $b' > 0$, réaliser $-jb'$ avec tronçon terminé par un court-circuit

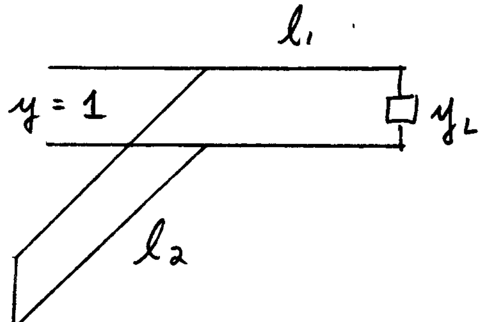


$y_{cc} = -j \cot \beta l_2 \qquad y_{cc} = -jb' \qquad \beta l_2 = \text{arccot}(b')$

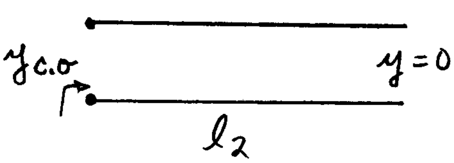
- on peut aussi trouver l_2/λ avec l'abaque

NB: Sur abaque en z le court-circuit est ici





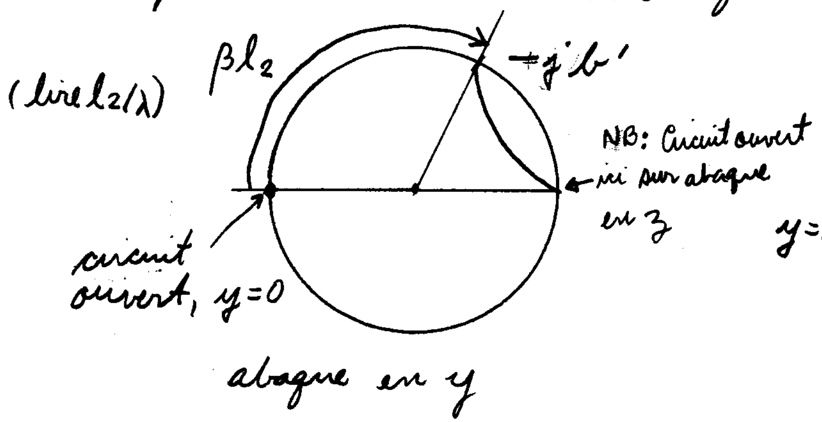
- si $b' < 0$, utiliser troncon avec circuit ouvert

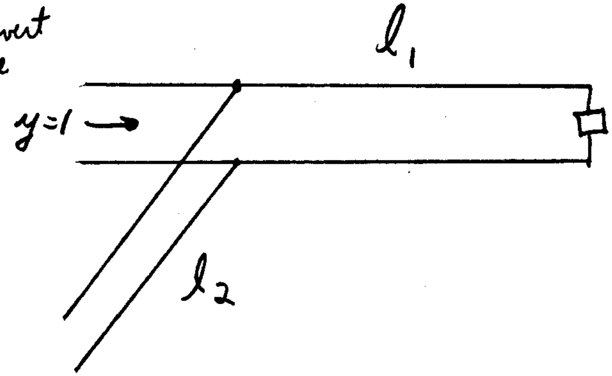


$$y_{c.o} = j \tan \beta l_2 = -jb' = j(-b')$$

$$\beta l_2 = \arctan(-b')$$

On peut aussi utiliser l'abaque:





Voir exemple sur acétate.

I.16.3 Adaptation avec charge série

Même principe sauf qu'on utilise abaque en z

NB: tronçons série sont difficilement réalisables en pratique → préférable d'utiliser charges localisées