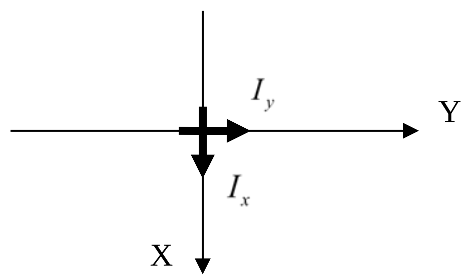
Antennes – Problèmes résolus

Question 1.

Deux antennes courtes de 1 cm de longueur sont alimentées avec une fréquence de 1 GHz et un courant de 1 ampère. On peut les considérer comme des dipôles élémentaires. L'antenne 1 est orientée en x et l'antenne 2 en y. L'antenne 2 est en avance d'un quart de cycle sur l'antenne 1 (voir figure).

- Déterminez l'amplitude et l'orientation de $\bar{E}$ à 100 m de l'origine sur les axes +x, +y et +z.

- Indiquez le type de polarisation de l'onde dans chaque cas.

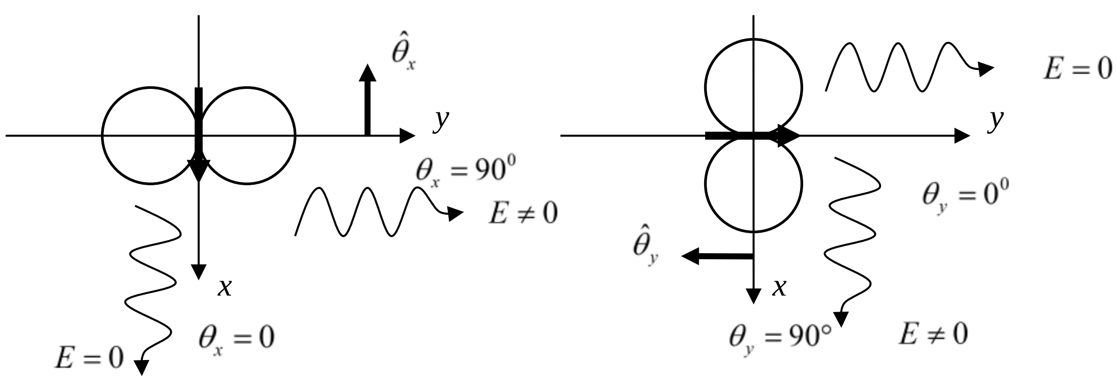


Solution :

Posons $I_x = 1$. Il en découle que $I_y = 1e^{+j\pi/2}$ car I_y est en avance sur I_x.
Pour tous les cas, on a $\lambda = c/f = 30\,\text{cm}$

i) Axe x, $\bar{r}$ = (100,0,0)m

Dipôle en *x* Dipôle en *y*



NB : Les angles θ_x et θ_y définis dans la figure ci-dessus ne sont pas des angles habituellement utilisés dans le système de coordonnées sphériques. Ils sont introduits ici pour indiquer les angles entre la direction de l'observateur ($\hat{r}$) et les axes des dipôles orientés respectivement selon *x* et *y*.

$$\bar{E}\left(100,0,0\right) = -\hat{y}\ j\eta\ \beta\ I_y \Delta y\ \frac{e^{-j\beta 100}}{4\pi \times 100} \qquad\qquad I_y = j\,1A,\ \Delta y = 1cm$$

Amplitude : $\left|\bar{E}\right| = \left|\dfrac{\eta\beta I_y \Delta y}{400\pi}\right| = 377 \times \dfrac{2\pi}{0.3} \times \dfrac{1 \times 0.01}{400\pi} = 6.28 \times 10^{-2}\ V\!\!\diagup\!_m$

Direction du champ E: $-\hat{y}$, donc l'onde est à polarisation linéaire

ii) Axe y, $\bar{r} = \left(0,100m,0\right)$

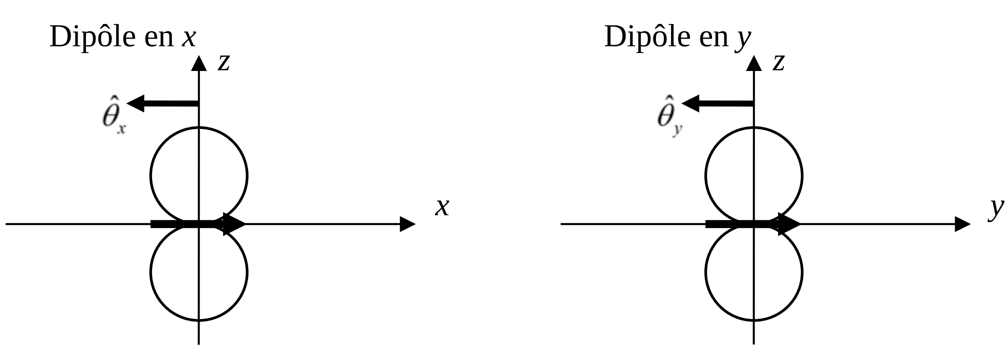
Seul le dipôle en x contribue :

$$\bar{E}\left(0,100,0\right) = -\hat{x}\ j\eta\beta\ I_x \Delta x\ \frac{e^{-j\beta 100}}{4\pi \times 100} \qquad\qquad I_x = 1A \quad \Delta x = 1cm$$

$\left|\bar{E}\right| = 6.28 \times 10^{-2}\ V\!\!\diagup\!_m$

Direction : $-\hat{\mathrm{x}} \rightarrow$ polarisation linéaire

iii) Axe z $\qquad\qquad \left(\bar{\mathrm{r}} = 0,0,100\mathrm{m}\right)$



Il y a superposition des 2 contributions

Avec $\Delta x = \Delta y$, $\hat{\theta}_x = -\hat{x}$ et $\hat{\theta}_y = -\hat{y}$ on arrive à :

$$\overline{E} = -\left(\hat{x} + j\hat{y}\right) j\beta\, \eta\left(1A\right) \Delta x \,\frac{e^{-j\beta 100}}{4\pi \times 100}$$

Les termes $-je^{-j\beta 100}$ ne changent pas l'amplitude des champs ni la phase relative entre les deux composantes. Ils peuvent donc être omis. Il en résulte que :

$\overline{E} = 6.28 \times 10^{-2} \times (\hat{x} + j\hat{y}) \;\; {}^{V}\!/_{m}$. La norme du champ électrique serait donc :

$\left\|\overline{E}\right\| = \sqrt{2} \times 6.28 \times 10^{-2}\, V/m$

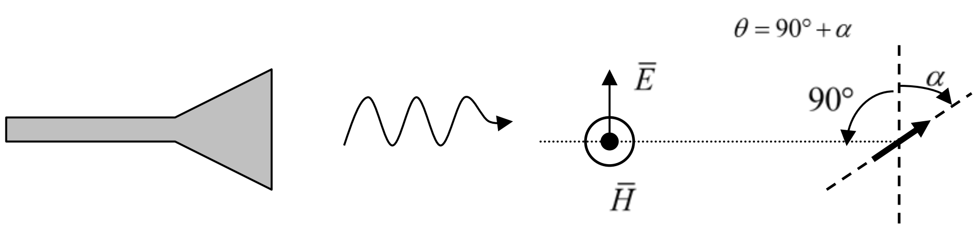
Direction : Pas de direction fixe car $\overline{E}$ est à polarisation circulaire $\left(Ex = \pm\, jEy\right)$. Ey en avance sur $Ex \rightarrow$ polarisation circulaire gauche.
N.B. Pour les z négatifs, on a une polarisation circulaire droite.

Question 2.

Une antenne cornet émet une puissance de 10 Watts et possède une directivité de 13dB. La fréquence d'émission est de 3GHz. Un dipôle de 2 cm de longueur reçoit ce signal à une distance de 500m. L'axe du dipôle fait un angle α avec le champ électrique incident. Déterminez la puissance disponible au récepteur si :

a) $\alpha = 0^o$

b) $\alpha = 30^o$



Solution :

$P_R = S_r \;\; A_e$ $\qquad$ S_r : vecteur de Poynting incident sur l'antenne
A_e : surface équivalente de captation

Pour le dipôle, supposons un rendement de 100%. Dans ce cas

$G_{d\,ip} = D_{d\,ip}$ et $A_e = \dfrac{\lambda^2\, G_{d\,ip}}{4\pi}$

$S_r = \dfrac{P_{ray}}{4\pi\, r^2} D_{cornet}$ $D_{cornet} = 10^{(13dB/10)} = 19.95$

$= \dfrac{10 \text{ Watts} \times 19.95}{4\pi \times (500)^2 \text{ m}^2} = 6.35 \times 10^{-5} \text{ W}/\text{m}^2$ $\lambda = 10\text{cm à } 3\text{GHz}$

a) $D_{dipôle}$?

Pour un dipôle élémentaire, on a D = 1.5. Ceci est la valeur maximum mais l'antenne n'est pas isotrope et D dépend de θ, angle entre l'axe de l'antenne et la direction d'arrivée.

En transmission, on a $D(\theta) = \dfrac{S_r(\theta)}{S_r^{iso}}$

On sait que pour un dipôle, on a $S_r(\theta) = \max(S_r) \times \sin^2\theta$

Donc : $D(\theta) = \max(D)\sin^2\theta = 1.5\sin^2\theta$

Selon la figure, si $\alpha = 0$, on aura θ = 90° $\rightarrow$ D dipôle = 1.5

$P_R = S_r \dfrac{\lambda^2 D_{dip}}{4\pi} = 6.35 \times 10^{-5} \dfrac{(0.1)^2}{4\pi} \times 1.5$

$= 7.57 \times 10^{-8}$ W, soit -41.2 dBm

b) Si $\alpha = 30^o$, on a $\theta = 30^o + 90^o = 120^o$

D'après le résultat de a), on a directement

$P_R = 7.57 \times 10^{-8} \sin^2 120^o = 5.68 \times 10^{-8}$ W, -42.4 dBm

NB : Puissance en dBm = $10\log_{10}\left(\dfrac{Puissance}{1\,mW}\right)$

Une approche alternative consisterait à utiliser directement la formule de Friis, ce qui évite les étapes intermédiaire du calcul de densité de puissance et de surface équivalente.

$$P_R = P_T G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2$$

Ici nous avons P_T = 10 watts, G_T=19.95, λ=0.1m et r = 500m. G_R vaut 1.5 si $\alpha = 0$ et $1.5 \sin^2 120°$ si $\alpha = 30°$.

Question 3 **(tiré de F. Gardiol, « Électromagnétisme »)**

On veut déterminer le gain de 3 antennes, A, B et C. On effectue 3 mesures de puissance reçue avec des paires d'antennes séparées de 3 m, dont une est alimentée avec 10W. La fréquence est de 1.5GHz. Les résultats des mesures sont les suivants :

- Antennes A et B : puissance reçue = 851mW = P_{R1}
- Antennes A et C : puissance reçue = 263mW = P_{R2}
- Antennes B et C : puissance reçue = 263mW = P_{R3}

Déterminez le gain des trois antennes.

Solution :

Puisque $P_{R2} = P_{R3}$, il est évident que $G_A = G_B$ car $P_{R2} \propto G_A\ G_C$ et $P_{R3} \propto G_B\ G_C$ d'après la formule de Friis.

Pour le premier test on a :

$$P_{R1} = P_T\ G_A\ G_B \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 = P_T\ G_A^2 \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$$

$$\text{d'où} \rightarrow G_A = G_B = \sqrt{\frac{P_R}{P_T}}\ \frac{4\pi r}{\lambda} = \sqrt{\frac{0.851}{10}}\ \left(\frac{4\pi \times 3m}{0.2m}\right)$$

ici $\lambda = {}^{c}\!/_{f} = 20cm$

On obtient : $G_A\ G_B = 55$

Pour trouver G_c, on peut utiliser le 2e ou le 3e résultat

$$P_{R2} = P_T\ \ G_A\ G_C \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 = 0.263W$$

$$G_C = \frac{P_{R2}}{P_T}\ \frac{1}{G_A} \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2 = \frac{0.263}{10}\ \frac{1}{55}\ \left(\frac{4\pi \times 3}{0.2}\right)^2$$

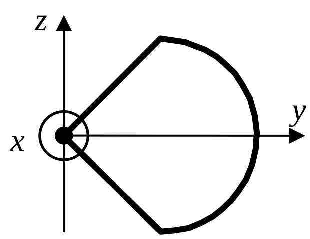
$G_C = 17$

Question 4

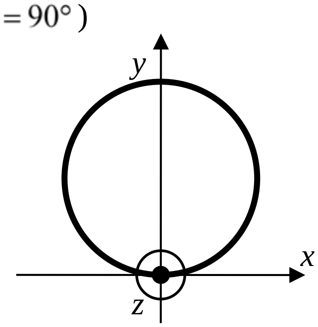
Calculez la directivité d'une antenne pour laquelle le champ rayonné est donné par :

$$\overline{E} = \begin{cases} \hat{\varphi} \quad \dfrac{E_0 \sin\theta \sin\varphi}{4\pi r} e^{-j\beta r} & \text{et} \quad \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le 3\pi/4 \\ & \quad\; 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 & \quad\; \text{ailleurs} \end{cases}$$

Coupe du diagramme de rayonnement dans le plan H ($\varphi = 90°$)



Coupe du diagramme de rayonnement dans le plan E ($\theta = 90°$)



Solution :

$$D = \frac{S_r^{max}}{S_r^{iso}}$$

P_r^{max} : il est clair que le maximum est dans la direction $\theta = 90^o$ et $\varphi = 90^o$

$$S_r^{max} = \max\left(\frac{|\overline{E}|^2}{2\eta}\right) = \frac{|E_0|^2}{32\pi^2\, r^2\, \eta}$$

$$S_r^{iso} = \frac{P_{ray}}{4\pi\, r^2}$$

$P_{ray} = \oiint S_r \ \hat{r} \bullet d\bar{A} =$ puissance totale rayonnée par l'antenne

Élément de surface sur une sphère de rayon r entourant l'antenne : $d\bar{A} = \hat{r} \ \ r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$P_{ray} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{|E|^2}{2\eta} \ r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$P_{ray} = \frac{|E_0|^2}{32\pi^2\eta} \ \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \ \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^3\theta \, d\theta$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\text{; valeur moyenne ½ sur pour } \varphi \text{ compris entre 0 et } \pi$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \times \pi = \frac{\pi}{2}$$

Intégrale selon θ

$$\int \sin^3\theta \, d\theta = \int \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right) \ d\theta = \int \sin\theta \, d\theta - \int \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^3\theta \, d\theta = -\cos\theta + \left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$= \sqrt{2}\left(1/2 + 1/2 - 1/12 - 1/12\right) = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

d'où $\qquad S_r^{iso} = \frac{|E_0|^2}{32\pi^2\eta} \frac{\pi}{2} \ \frac{5\sqrt{2}}{6} \ \ \frac{1}{4\pi r^2}$

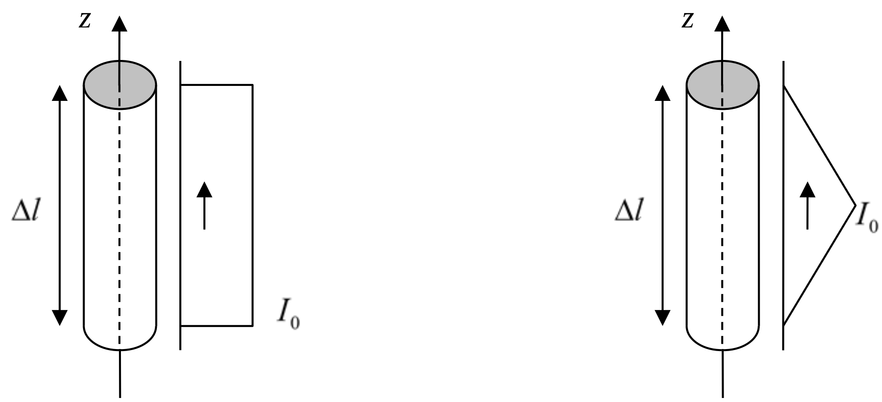
$$D = \frac{48}{5\sqrt{2}} \ = 6.78$$

En fonction de θ et φ :

$$D(\theta,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{48}{5\sqrt{2}}\ \sin^2\theta\sin^2\varphi & \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}\ \text{et}\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

Question 5.

Le modèle de dipôle élémentaire suppose que le courant le long de l'antenne (I) est uniforme sur toute la longueur du dipôle Δl. Selon la loi de Kirchkoff sur les courants, le courant doit être nul aux bouts de l'antenne. Il peut être supposé que la distribution est plutôt de type triangulaire, i.e. courant non nul au centre et courant nul dans les bouts :



Dipôle élémentaire $\Delta l \ll \lambda$

Dipôle réel $\Delta l \ll \lambda$

En supposant que le courant d'alimentation I_0 est le même au centre des deux antennes, déterminez dans le cas du dipôle « réel » :

a. L'expression des champs $\overline{\mathrm{E}}$ et $\overline{\mathrm{H}}$ lointains;
b. La directivité;
c. La résistance de rayonnement.

Solution :

a) Puisque Δl est le même dans les deux cas, un observateur en région lointaine verra le dipôle réel et le dipôle élémentaire comme deux sources de très petites dimensions car on a supposé que $\Delta l << \lambda$. Les champs rayonnés seront donc les mêmes dans les deux cas, sauf pour un facteur d'amplitude : le courant moyen sur le dipôle réel est la moitié du courant moyen sur le dipôle idéal. Les champs émis, pour un même courant I_0 au centre des deux antennes, seront donc réduits de moitié pour le dipôle réel :

$$\overline{\mathrm{E}}_{\text{réel}}=\frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{E}}_{\text{élém.}}=\hat{\theta}\ j\eta I_o\beta\Delta l\sin\theta\,\frac{e^{-j\beta r}}{8\pi r}$$

$$\overline{H}_{réel} = \frac{1}{2}\ \overline{H}_{élém.} = \hat{\varphi}\ jI_o\ \beta\Delta l \sin\theta\ \frac{e^{-j\beta r}}{8\pi r}$$

b) Directivité :
La dépendance des champs émis par rapport à θ et φ est la même (i.e. sin θ). La directivité demeure donc inchangée.

c) Pour un même courant I_o, les champs du dipôle réel sont réduits de moitié (voir a). La puissance émise sera donc réduite d'un facteur 4 :

$$P_{ray}\left(\text{élém.}\right) = \oiint S_r^{\text{élém.}}\ \hat{r} \bullet d\overline{S}$$

$$P_{ray}\left(\text{réel}\right) = \oiint S_r^{\text{réel}}\ \hat{r} \cdot d\overline{S} = \frac{1}{4}\ P_{ray}\left(\text{élém.}\right)$$

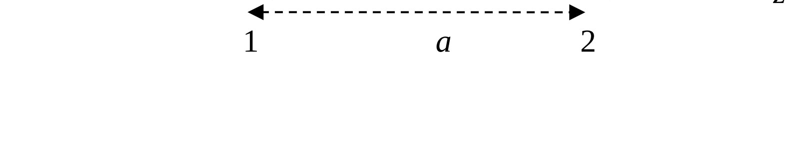
On a aussi que $$P_{ray}(\text{réel}) = \frac{1}{2}\ R_{ray}^{\text{réel}}\ \left|I_o\right|^2$$

$$P_{ray}(\text{idéal}) = \frac{1}{2}\ R_{ray}^{\text{élém.}}\ \left|I_o\right|^2$$

Donc, on aura $$R_{ray}^{\text{réel}} = \frac{1}{4}\ R_{ray}^{\text{élém.}}$$

$$= 20\left(\frac{\pi\Delta l}{\lambda}\right)^2 \text{ ohms.}$$

Question 6.
Deux dipôles élémentaires alignés sur l'axe *z* sont séparés d'une distance *a*. Le déphasage entre les deux dipôles est ψ. Obtenir l'expression du diagramme de rayonnement dans un plan contenant l'axe *z*, et faites en un croquis dans le cas où $a = \frac{\lambda}{2}$ et $\psi = \pi$.



Solution :

Le diagramme de rayonnement ne change pas si l'antenne se déplace. On peut donc arbitrairement fixer :

$$\overline{r}_1^{'} = \left(0, 0, -{}^{a}\!/_{2}\right) \qquad \overline{r}_2^{'} = \left(0, 0, {}^{a}\!/_{2}\right)$$

Tout en respectant la contrainte $\overline{r}_2^{'} - \overline{r}_1^{'} = a\,\hat{z}$

L'expression générale du facteur de réseau est :

$$AF = \sum_{n=1}^{N} I_n \, e^{j\beta \overline{r}_n \cdot \hat{r}}$$

Ici, N = 2. Nous avons aussi : $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\hat{r} = \hat{x} \sin\theta \cos\varphi + \hat{y} \sin\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta$

Donc :

$$AF = I_o e^{-j\beta \frac{a}{2} \cos\theta} + I_o e^{j\Psi + \beta \frac{a}{2} \cos\theta}$$

$$= I_o e^{j\frac{\Psi}{2}} \left[e^{-j\left(\frac{\Psi}{2} + \frac{\beta a}{2} \cos\theta\right)} + e^{j\left(\frac{\Psi}{2} + \frac{\beta a}{2} \cos\theta\right)} \right]$$

$$= 2\, I_o \, e^{j\frac{\Psi}{2}} \cos\left[\frac{\Psi}{2} + \frac{\beta a}{2} \cos\theta \right]$$

AF : facteur de réseau (*Array Factor*)

Le facteur d'élément est $\sin\theta$ pour l'antenne dipôle.

$$F = \text{facteur d'antenne } = \left| \sin\theta \cos\left[\frac{\Psi}{2} + \frac{\beta a}{2} \cos\theta \right] \right|$$

La constante $2\, I_o \, e^{j\Psi/2}$ est omise car elle n'affecte pas la forme du diagramme de rayonnement.

Si $a = \dfrac{\lambda}{2}$ et $\Psi = \pi$ on a :

$$F = \left| \sin\theta \cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos\theta \right] \right|$$

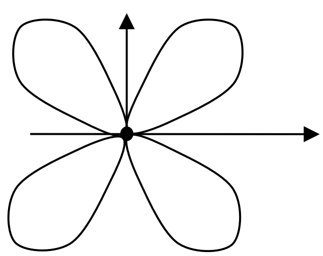
$$\left(\mathrm{NB}: \cos\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{x}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos \mathrm{x} - \sin\frac{\pi}{2}\sin \mathrm{x} = -\sin \mathrm{x} \right)$$

$$\mathrm{F} = \left| \sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \right|$$

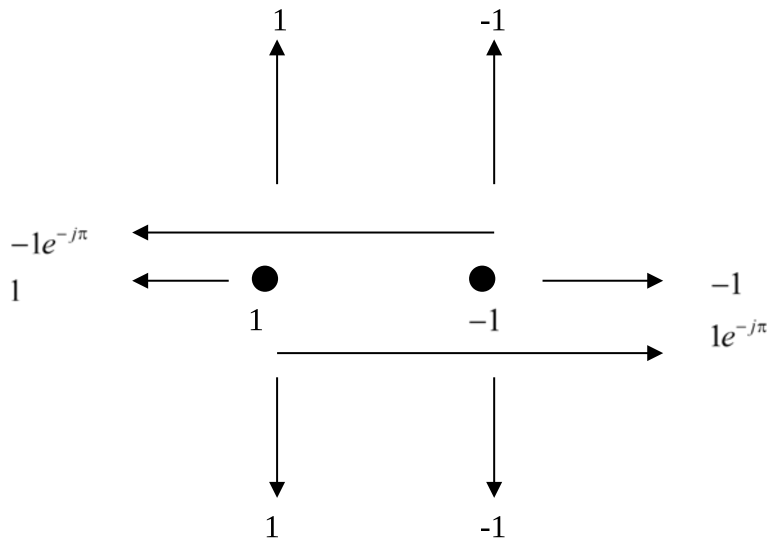
Valeurs de F pour les directions principales

θ	$\left\|\sin(\frac{\pi}{2}\cos\theta)\right\|$	$\left\|\sin\theta\right\|$	F
0	1	0	0
$\pi/2$	0	1	0
π	1	0	0
$3\pi/2$	0	1	0

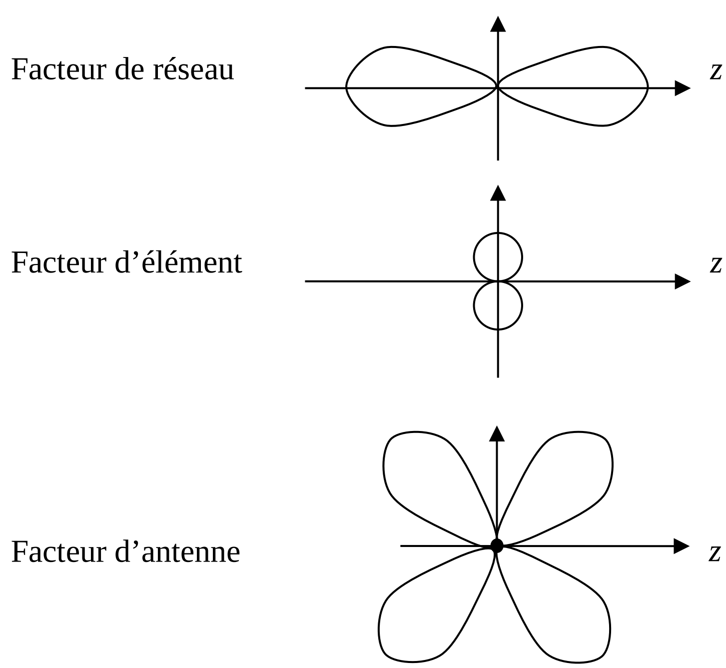
Sachant que F est non nul entre ces 4 directions, on peut faire une esquisse du diagramme de rayonnement. On notera que le réseau et les éléments ont une géométrie qui a une symétrie de rotation autour de l'axe *z*. Donc, le diagramme ne dépend pas de φ. On pourrait donc obtenir une représentation tridimensionnelle du diagramme en faisant pivoter la figure autour de l'axe *z*.



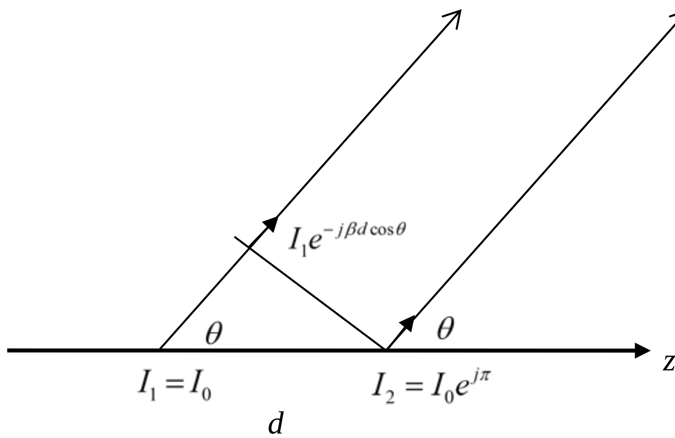
On peut obtenir un résultat similaire par inspection. Pour esquisser le facteur de réseau, on établit d'abord que le retard de phase d'une onde se déplaçant sur une distance *a* est de $\beta a = (2\pi/\lambda)(\lambda/2) = \pi$. Il suffit ensuite de calculer la phase des contributions de chaque antenne, incluant la phase de l'excitation et celle due au retard de phase découlant de la différence de parcours. En supposant une excitation de $I_0 = 1$ pour la première antenne, l'excitation de la seconde sera de $I_0 e^{j\psi} = -1$. Le déphasage de βa aura lieu lorsque l'observateur sera sur l'axe du réseau. Dans le plan passant entre les deux éléments le déphasage dû à la différence de parcours est nulle.



On peut en déduire que le facteur de réseau aura l'allure suivante. En multipliant dans chaque direction avec le facteur d'un élément de type dipôle couché sur l'axe *z*, on obtient le facteur d'antenne dans tout plan parallèle à l'axe *z*.



Quoique facile à comprendre, l'approche intuitive utilisée ci-dessus pour dessiner le facteur de réseau ne fonctionne que lorsque la phase relative entre les antennes est un multiple de $\pi / 2$. De plus, lorsque la distance séparant les antennes est supérieure à $\lambda / 2$, il y a un risque de manquer certains nuls ou maximums de rayonnement. Une façon plus systématique d'identifier les nuls et les maximums est illustrée ci-dessous.



Suivant l'approximation des rayons parallèles, un observateur dans le champ lointain recevra un champ proportionnel à

$$\left| I_1 e^{-j\beta d\cos\theta} + I_2 \right|$$

L'exponentielle dans le premier terme correspond au délai de phase dû à la propagation sur une distance égale à la différence de chemin entre les deux parcours. Nous aurons un maximum lorsque les deux termes de cette somme sont en phase, et un minimum lorsqu'ils sont en anti-phase. Si en plus les deux courants sont de même amplitude, ce minimum sera un nul.

Dans l'exemple que nous avons ici, avec $d = \lambda / 2$, les maximums seront atteints lorsque $I_0 e^{-j\pi\cos\theta}$ est en phase (modulo 2π) avec $I_0 e^{-j\pi}$, c'est-à-dire lorsque $\cos\theta = 1$ et $\cos\theta = -1$. Il y aura donc des maximums à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. À l'opposé, on aura un nul lorsque $I_0 e^{-j\pi\cos\theta}$ est en opposition de phase (modulo 2π) avec $I_0 e^{-j\pi}$. Ceci est possible seulement si $\cos\theta = 0$, donc lorsque $\theta = \pi / 2$. Ces résultats sont cohérents avec le diagramme de rayonnement obtenu précédemment.