# Chapitre 2
# Ondes planes en milieux infinis

# II Ondes planes dans milieu infini

## II.1 Introduction (K.R.D. 12-2)

D'après les équations de Maxwell les champs électrique et magnétique sont couplés.

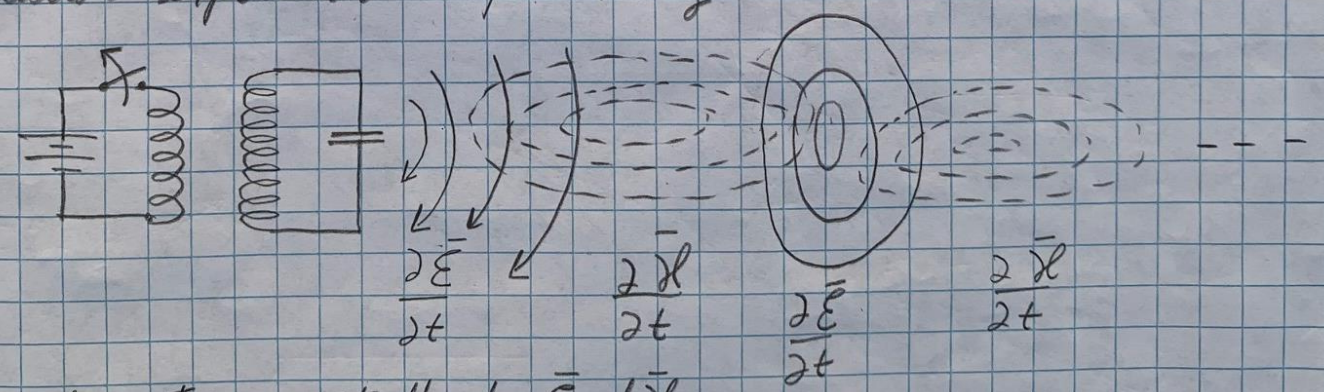
$$\nabla \times \bar{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{\mathcal{H}} = \epsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

variation de $\bar{\mathcal{H}}$

variation de $\bar{\mathcal{E}}$

Vérification expérimentale par Hertz en 1888:




- induction mutuelle de $\bar{\mathcal{E}}$ et $\bar{\mathcal{H}}$ permet de propager des signaux sur de grandes distances

Notations pour ce chapitre et suivants :

$\bar{\mathcal{E}}$, $\bar{\mathcal{H}}$, $\bar{\mathcal{J}}$ : vecteurs réels dépendent de $x, y, z$ et $t$ en général.

$\bar{E}_c$, $\bar{H}_c$, $\bar{J}_c$ : vecteurs complexes, e.g. $\bar{\mathcal{E}} = Re\{\bar{E}_c\}$, ...

$\bar{E}$, $\bar{H}$, $\bar{J}$ : vecteurs phasseurs, e.g. $\bar{E}_c = \bar{E}\, e^{j\omega t}$

$\underline{\gamma}$, $\underline{\epsilon}$ : constantes complexes, scalaires

## II.2 Solution des équations de Maxwell sous forme d'onde plane uniforme KRD 12-3

Equations de Maxwell:
(pour milieu linéaire homogène et isotrope)

$$\nabla \times \bar{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{\mathcal{H}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial t} + \bar{\mathcal{J}}$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathcal{D}} = \rho$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathcal{B}} = 0$$

avec $\bar{\mathcal{B}} = \mu \bar{\mathcal{H}}$ et $\bar{\mathcal{D}} = \epsilon \bar{\mathcal{E}}$

$$\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{J}}_{source} + \sigma \bar{\mathcal{E}}$$

i°) Simplifications

- pas de charge d'espace $\rightarrow$ $\rho = 0$
- milieu homogène : $\nabla \cdot \bar{\mathcal{D}} = \epsilon \; \nabla \cdot \bar{\mathcal{E}} = 0$

  $\nabla \cdot \bar{\mathcal{B}} = \mu \; \nabla \cdot \bar{\mathcal{H}} = 0$
- régime harmonique avec fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$
  - on peut générer un signal arbitraire par superposition à l'aide de la transformée de Fourier
  - permet notation complexe et l'utilisation de phasseurs

e.g. $\bar{\mathcal{E}}(\bar{r}, t) = \bar{\mathcal{E}}_0(\bar{r}) \cos(\omega t + \Psi(\bar{r}))$

en complexe : $\bar{E}_c = \bar{\mathcal{E}}_0(\bar{r}) \, e^{j(\omega t + \Psi(\bar{r}))}$

avec $\bar{\mathcal{E}} = Re\{\bar{E}_c\}$

et $\bar{E}_c = \bar{E}(\bar{r}) \, e^{j\omega t}$

e.g. $\bar{\mathcal{E}}(\bar{r},t) = \bar{\mathcal{E}}_0(\bar{r}) \cos(\omega t + \Psi(\bar{r}))$

en complexe: $\bar{E}_c = \bar{\mathcal{E}}_0(\bar{r})\, e^{j(\omega t + \Psi(\bar{r}))}$

avec $\bar{\mathcal{E}} = Re\{\bar{E}_c\}$

et $\bar{E}_c = \bar{E}(\bar{r})\, e^{j\omega t}$

phasour champ électrique

De même on a:

$\bar{\mathcal{H}}(\bar{r},t) = Re\{\bar{H}_c\}$ , $\bar{H}_c = \bar{H}(\bar{r})\, e^{j\omega t}$

$\bar{\mathcal{J}}(\bar{r},t) = Re\{\bar{\mathcal{J}}_c\}$ , $\bar{\mathcal{J}}_c = \bar{J}(\bar{r})\, e^{j\omega t}$

phasours

Si on substitue $\bar{E}_c$, $\bar{H}_c$, $\bar{J}_c$ dans les équations de Maxwell celles-ci deviennent :

$$\nabla \times \bar{E}\, e^{j\omega t} = -j\omega\mu \bar{H}\, e^{j\omega t}$$

$$\nabla \times \bar{H}\, e^{j\omega t} = j\omega\epsilon \bar{E}\, e^{j\omega t} + \bar{J}\, e^{j\omega t}$$

$$\nabla \cdot \bar{E}\, e^{j\omega t} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{H}\, e^{j\omega t} = 0$$

On peut omettre d'écrire $e^{j\omega t}$ :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \nabla \times \bar{H} = j\omega\epsilon \bar{E} + \bar{J} & (1) & \nabla \cdot \bar{E} = 0 \quad (3) \\ \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} & (2) & \nabla \cdot \bar{H} = 0 \quad (4) \end{array}}$$

ii) Equation de Helmholtz (ou équation d'onde)

(2) $\rightarrow$ $\bar{H} = \dfrac{\nabla \times \bar{E}}{-j\omega\mu}$ dans (1) $\rightarrow$ $\nabla \times \dfrac{\nabla \times \bar{E}}{-j\omega\mu} = j\omega\epsilon\bar{E} + \bar{J}$

Supposons qu'on s'intéresse aux points $\bar{r}$ externes à la source

$\bar{J}_{source} \longrightarrow \bar{J} = \sigma\bar{E}$

On a donc :

$$\frac{\nabla \times \nabla \times \bar{E}}{-j\omega\mu} = j\omega\epsilon\bar{E} + \sigma\bar{E} = j\omega\left(\epsilon - \frac{j\sigma}{\omega}\right)\bar{E}$$

$$= j\omega\epsilon_0\left(\epsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)\bar{E}$$

car $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$

$$= j\omega\underline{\epsilon}\bar{E} \quad \text{avec } \underline{\epsilon} = \epsilon_0\left(\epsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)$$

$\omega\epsilon_0$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = ? \qquad \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b})$$

$$= \nabla(\nabla\cdot\bar{E}) - \nabla^2\bar{E}$$

1er terme nul grâce à (3)

Donc :

$$-\nabla^2\bar{E} = -j\omega\mu\, j\omega\underline{\epsilon}\,\bar{E} = \omega^2\mu\underline{\epsilon}\,\bar{E}$$

ou

$$\boxed{\nabla^2\bar{E} + \omega^2\mu\underline{\epsilon}\,\bar{E} = 0} \qquad (5)$$

c'est l'équation de Helmholtz

Supposons que le milieu est non conducteur i.e. $\sigma = 0$

Alors :

$$\omega^2\mu\underline{\epsilon} = \omega^2\mu\epsilon \equiv \beta^2$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^2\bar{E} + \beta^2\bar{E} = 0}$$

iii) Solution générale de l'équation de Helmholtz sous forme d'onde plane uniforme

Rappel: $\bar{E}_t = \bar{E}_0(r)\, e^{j(\omega t + \psi(\bar{r}))}$
$= \bar{E}(\bar{r})\, e^{j\omega t}$ $\Rightarrow \bar{E}(r) = \bar{E}_0(r)\, e^{j\psi(r)}$

$\bar{E}_0$ : amplitude et direction du vecteur $\bar{E}$

$\psi(\bar{r})$ : phase de $\bar{E}$

Développement de l'équation (5) en ses composantes:

(5a) $\hat{x}$ : $\nabla^2 E_x + \beta^2 E_x = 0$ $\quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \beta^2 E_x = 0$

(5b) $\hat{y}$ $\quad \nabla^2 E_y + \beta^2 E_y = 0$ $\quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \beta^2 E_y = 0$

(5c) $\hat{z}$ $\quad \nabla^2 E_z + \beta^2 E_z = 0$ $\quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \beta^2 E_z = 0$

- 3 équations non couplés donc on pourrait obtenir 3 solutions indépendantes ; par contre, il faut respecter $\nabla \cdot \bar{E} = 0$
- équations aux dérivés partielles ; infinité de solutions possibles, dépend des conditions aux frontières.

On cherche une solution simple dans laquelle $\bar{\mathcal{E}}_0(\bar{r})$ serait un vecteur constant dans tout l'espace, soit :

$$\bar{E} = \bar{\mathcal{E}}_0(\bar{r})\, e^{j\psi(r)}$$

$$\bar{E} = \bar{A}\, e^{j\psi(\bar{r})}$$

↳ vecteur constant complexe $\equiv$

$$\bar{A} = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$$

Forme de $\psi(\bar{r})$ ?

- Posons comme solution : $\psi(\bar{r}) = -\bar{k}\cdot\bar{r}$ où $\bar{k}$ est un vecteur constant.

$$\rightarrow \boxed{\bar{E} = \bar{A}\, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} = \bar{A}\, e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}}$$

- Vérifions si cette solution peut satisfaire les équations 5a, 5b et 5c :

par exemple :

$$E_x = A_x e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$ dans sa donne :

$$\left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \beta^2\right) A_x e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} = 0$$

$$\rightarrow \quad \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \|\bar{k}\|^2$$

Donc, la solution est possible si on satisfait une condition sur $\bar{k}$, i.e. $\boxed{\|\bar{k}\| = \beta}$

NB : L'expression $B_x e^{+j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ est aussi une solution, indépendante linéairement de $A_x e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$

iv) Représentation 3D de $A_x e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$

$$\angle E_x = \angle A_x - \bar{k}\cdot\bar{r}$$

On cherche les surfaces équiphases (i.e. à phase constante)

posons $\bar{k}\cdot\bar{r} - \angle A_x = \text{constante}$

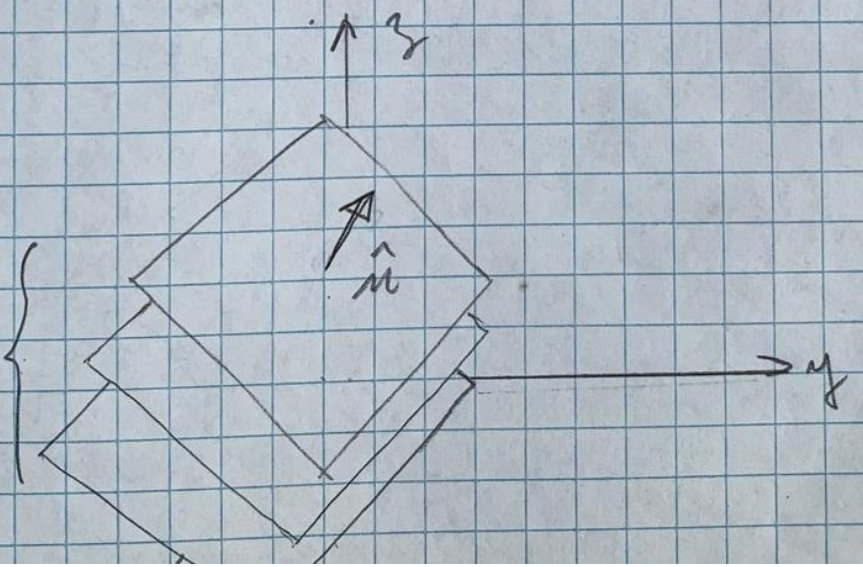
$$k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}$$

c'est l'équation d'un <u>plan</u>

$|E_x| = |A_x|$ → amplitude <u>uniforme</u> dans tout l'espace

On a donc une <u>O</u>NDE <u>P</u>LANE UNIFORME (OPU)

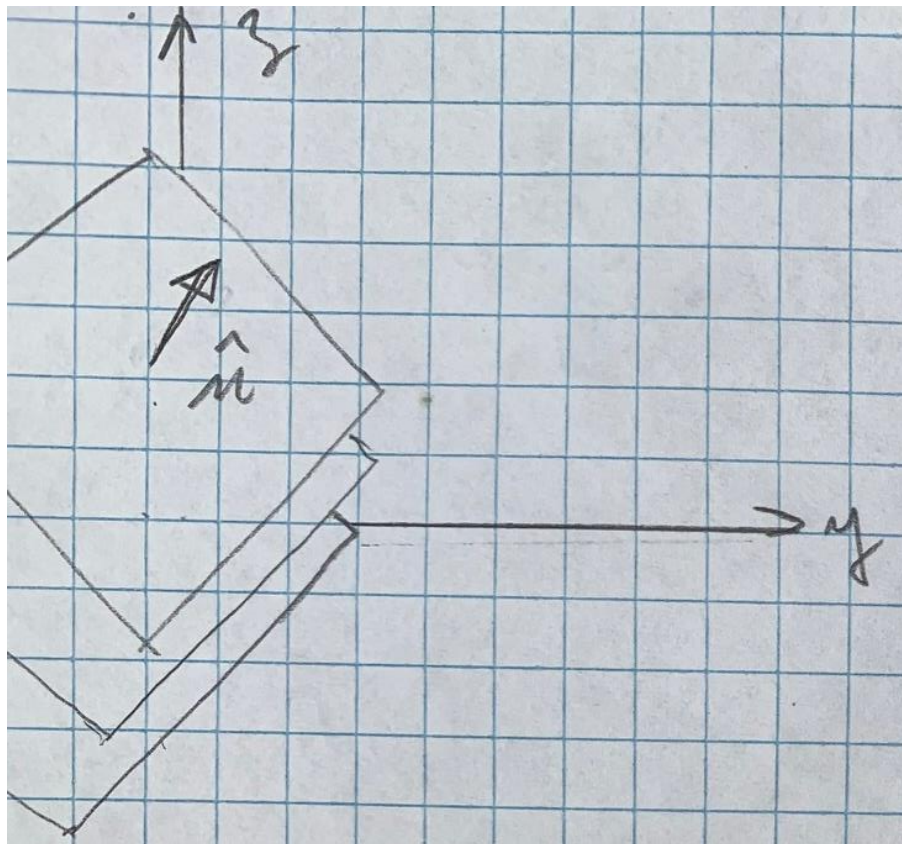
plans équiphases phase dépend de valeur de




- Les plans équiphases sont parallèles. Définissons $\bar{N}$, un vecteur normal à ces plans.

On a : $\bar{N} = \nabla(k_x x + k_y y + k_z z)$

$= k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$




- Les plans équiphases sont parallèles. Définissons $\overline{N}$, un vecteur normal à ces plans.

On a : $\overline{N} = \nabla(k_x x + k_y y + k_z z)$

$= k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$

$= \overline{k}$

puisque $|\overline{k}| = \beta$, alors

$\overline{N} = \beta \hat{n}$

$\hat{n}$ : vecteur normal unitaire

On peut ré-écrire $E_x$ comme :

$$\boxed{E_x = A_x \, e^{-j\beta \hat{n}\cdot\bar{r}}}$$

→ la phase décroît linéairement avec la distance dans la direction de $\hat{n}$ → analogue à $V = A e^{-j\beta s}$ sur une ligne de transmission. Il y a donc PROPAGATION.

NB : Les mêmes résultats s'appliquent à $E_y$ et $E_z$, soit

$$E_y = A_y \, e^{-j\beta \hat{n}\cdot\bar{r}} \qquad E_z = A_z \, e^{-j\beta \hat{n}\cdot\bar{r}}$$

i.e. $\bar{E} = \bar{A} \, e^{-j\beta \hat{n}\cdot\bar{r}}$

## II.3 Propriétés des ondes planes uniformes.

### i) Transversalité

On doit avoir $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ i.e $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$$-jk_x E_x - jk_y E_y - jk_z E_z = 0$$

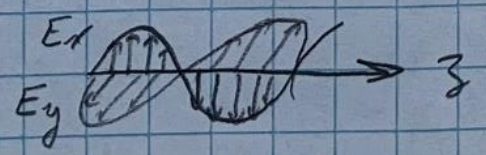
$$-j\,\bar{k} \cdot \bar{E} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \bar{k} \text{ et } \bar{E} \text{ sont perpendiculaires}}$$

i.e. $\bar{E}$ est $\perp$ à la direction de propagation

exemple : Si $\hat{n} = \hat{z}$, $\bar{k} = \beta\,\hat{z}$, $k_x = 0$, $k_y = 0$, $k_z = \beta$

$\rightarrow$ on doit avoir $E_z = 0$

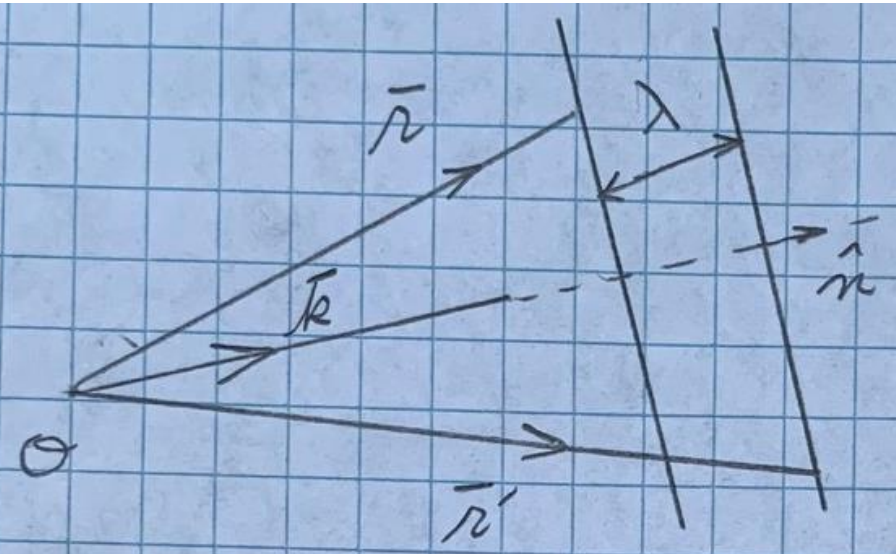



$$\bar{E} = (A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y})\,e^{-j\beta z}$$

ii) Périodicité

Distance entre 2 plans qui ont une phase identique ?

Posons $e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}'} = e^{-j(\bar{k}\cdot\bar{r}+2\pi)}$




Graphiquement :

$$\lambda = \bar{r}' \cdot \hat{n} - \bar{r} \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot (\bar{r}' - \bar{r})$$

$$\bar{k} \cdot \bar{r}' = \bar{k} \cdot \bar{r} + 2\pi$$

$$\bar{k} \cdot (\bar{r}' - \bar{r}) = 2\pi$$

$$\beta \; \hat{n} \cdot (\bar{r}' - \bar{r}) = 2\pi$$

$$\beta \quad \lambda \quad = 2\pi$$

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

On avait $\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

donc, $\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \omega^2 \mu \epsilon \longrightarrow \lambda f = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f}$$

On déduit :

$$\boxed{v = u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}}$$ , ou c.

vitesse de phase

vitesse de phase

exemple :

Dans le vide $\mu = \mu_0 = \frac{4\pi}{10^7}$ H/m

$$\epsilon = \epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$c = u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

iii) Impédance caractéristique

$\bar{E}$ et $\bar{H}$ sont couplés, e.g. $\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H}$

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

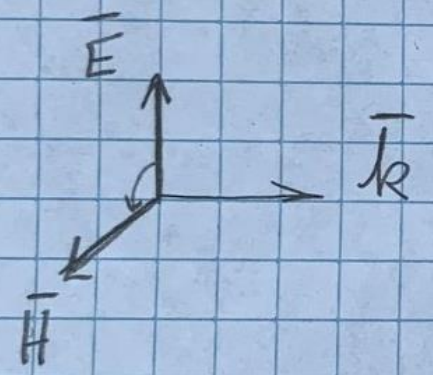
$$= \left(-jk_y E_z + jk_z E_y\right)\hat{x} + \left(-jk_z E_x + jk_x E_z\right)\hat{y} + \left(-jk_x E_y + jk_y E_x\right)\hat{z}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -jk_x & -jk_y & -jk_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\,\bar{k} \times \bar{E}$$

d'où $\boxed{\bar{H} = \dfrac{\bar{k} \times \bar{E}}{\omega\mu}}$

remarque : • $\bar{H}$ est $\perp$ à $\bar{k}$ et à $\bar{E}$

• on savait que $\bar{k} \perp$ à $\bar{E}$




$\Longrightarrow$ Onde transverse électromagnétique : TEM

- obéit à règle de la main droite : $\bar{E} \times \bar{H}$ pointe vers $\bar{k}$

$$\bar{H} = \frac{\bar{k} \times \bar{E}}{\omega\mu} = \frac{\beta}{\omega\mu}\hat{n} \times \bar{E}$$

$$\|\bar{H}\| = \frac{\beta}{\omega\mu}\|\bar{E}\| \rightarrow \frac{\|\bar{E}\|}{\|\bar{H}\|} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega}{\omega}\frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$\boxed{\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}}$ impédance caractéristique

Exemple:

soit $\bar{E} = A_x e^{-j\beta z} \hat{x} = E_x \hat{x}$

$\bar{k} = \hat{z}\beta \quad ; \quad \hat{n} = \hat{z}$

$\bar{H} = \frac{\beta}{\omega\mu} \hat{z} \times \hat{x} A_x e^{-j\beta z} = \frac{\beta}{\omega\mu} \hat{y} A_x e^{-j\beta z}$

$= H_y \hat{y}$

$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$

Dans le vide, $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377\Omega$

soit $\bar{E} = A_y e^{-j\beta z} \hat{y} \ldots \rightarrow \bar{H} = -\frac{\beta}{\omega\mu} \hat{x} A_y e^{-j\beta y}$

$\frac{E_y}{H_x} = -\eta$

NB: ici signe différent seulement à cause de la convention choisie pour les vecteurs $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ forçant $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$

# II.4 Polarisation KRD 12-3-2

Supposons 2 ondes planes se propageant dans la même direction (e.g. $\hat{z}$)

$$E_x = A_x e^{-j\beta z} \longrightarrow \mathcal{E}_x = |A_x| \cos(\omega t - \beta z + \theta_x)$$

$$E_y = A_y e^{-j\beta z} \longrightarrow \mathcal{E}_y = |A_y| \cos(\omega t - \beta z + \theta_y)$$

- Dans un plan perpendiculaire à $\bar{k}$ on a (disons à $z=0$)

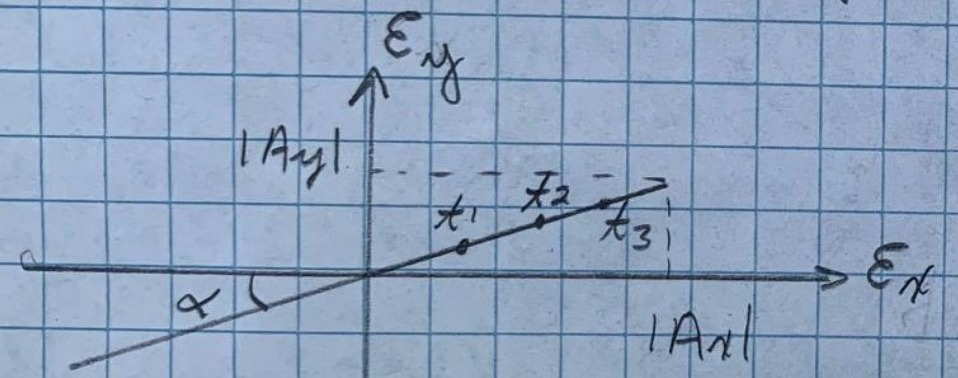
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= |A_x| \cos(\omega t + \theta_x) \\ \mathcal{E}_y &= |A_y| \cos(\omega t + \theta_y) \end{aligned}\right\}$$

la pointe du vecteur E décrit une trajectoire fermée lorsque t avance. Analogue aux figures de Lissajous sur un oscilloscope

## i) Polarisation linéaire

Condition : $\theta_x - \theta_y = 0 + n\pi$

i.e $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ sont en phase, ou déphasés de 180°




- le bout du vecteur $\bar{\mathcal{E}}$ oscille le long d'une ligne droite

$$\tan\alpha = \frac{|A_y|}{|A_x|}$$

## ii) Polarisation elliptique

$\boxed{\text{Condition } \theta_x - \theta_y \neq 0 \,,\, n\pi}$

Exemple : supposons $\theta_x = 0$ et $\theta_y = \theta \neq 0$

$$|A_x| = a \qquad |A_y| = b$$

plan $z=0$ :

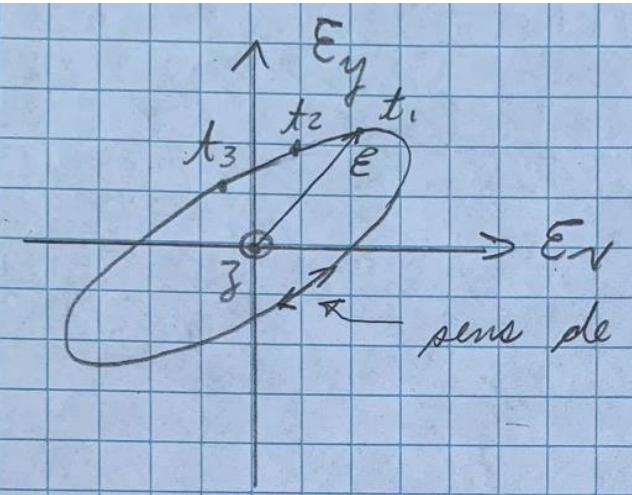
$$\mathcal{E}_x = a\cos\omega t \qquad \mathcal{E}_y = b\cos(\omega t + \theta) = b(\cos\omega t\cos\theta - \sin\omega t\sin\theta)$$

$$\frac{\mathcal{E}_y}{b} = \frac{\mathcal{E}_x}{a}\cos\theta - \sqrt{1-\left(\frac{\mathcal{E}_x}{a}\right)^2}\,\sin\theta$$

Peut être ré-écrit sous la forme :

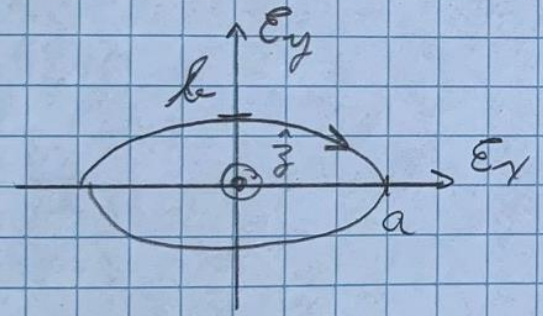
$$\frac{\mathcal{E}_x^2}{a^2\sin^2\theta} + \frac{\mathcal{E}_y^2}{b^2\sin^2\theta} - \frac{2\,\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y\cos\theta}{ab\sin^2\theta} = 1$$

$\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ décrivent une ellipse




sens de rotation dépend du signe de $\theta$

si $\theta = \pi/2$ (i.e $\theta_x = 0$ et $\theta_y = \pi/2$)




- $\mathcal{E}_y$ en avance de $\pi/2$ sur $\mathcal{E}_x$ → polarisation elliptique gauche

si $\theta = -\pi/2$ - $\mathcal{E}_y$ en retard sur $\mathcal{E}_x$ → polarisation elliptique droite

NB: sens "droite" ou "gauche" déterminé avec vecteur $\bar{k}$ pointant vers l'observateur.

## iii) Polarisation circulaire

conditions : $|A_x| = |A_y|$ et $\theta_y - \theta_x = \pm \pi/2$

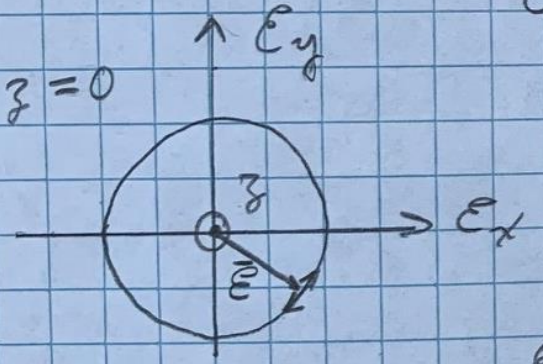
Peut être vu comme un cas particulier de la polarisation elliptique.

Posons par exemple $|A_x| = |A_y| = a$ $\quad \theta_x = 0$, $\theta_y = \theta = \pm \pi/2$

$$\mathcal{E}_x = a \cos \omega t \qquad \mathcal{E}_y = a \cos(\omega t \pm \pi/2)$$

$$\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 = a^2 \longrightarrow \bar{\mathcal{E}} \text{ décrit un cercle de rayon } a$$

à $z = 0$



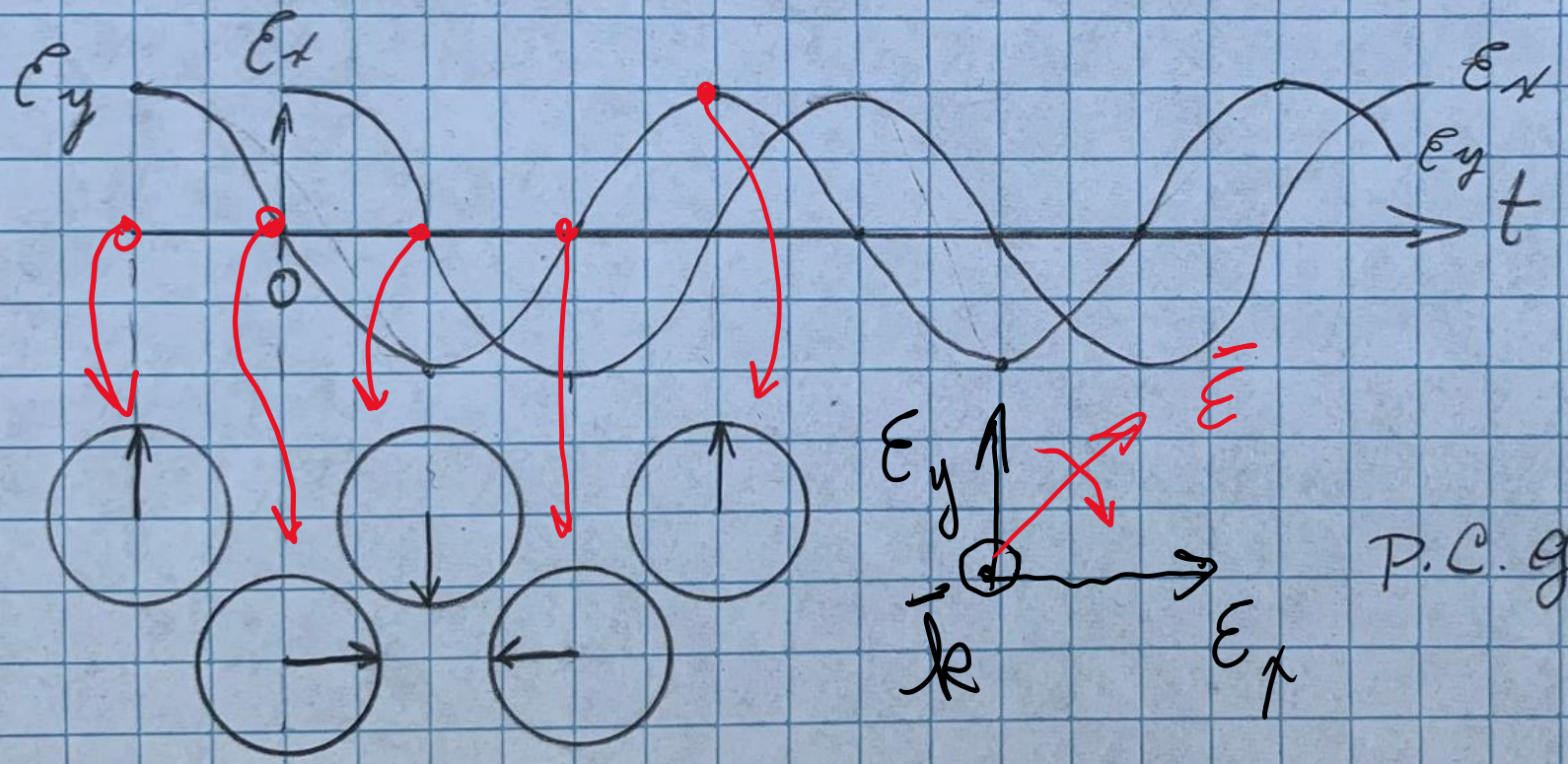

- peut être <u>droite</u> ou <u>gauche</u> i.e p.c.d. ou p.c.g.

En notation phasor on a à $z = 0$ : $\begin{cases} E_x = A_x \qquad E_y = A_x e^{\pm j \pi/2} \\ \text{i.e : } \quad E_x = \mp j E_y \end{cases}$

- $\theta = +\pi/2 \qquad E_x = -j E_y \longrightarrow E_y$ en avance sur $E_x \rightarrow$ p.c.g.
- $\theta = -\pi/2 \qquad E_x = j E_y \longrightarrow E_x$ en avance sur $E_y \rightarrow$ p.c.d.

Exemple avec $\theta = \pi/2$

$$\mathcal{E}_x = |A_x| \cos\omega t \qquad \mathcal{E}_y = |A_x| \cos(\omega t + \pi/2) = -|A_x| \sin\omega t$$




P.C.g.

Remarque :

- polarisation circulaire est la combinaison de deux polarisations linéaires

$$\hat{R} = (\hat{x} - j\hat{y}) \qquad p.c.d. \; ; \; \bar{E}_{pcd} = E_0 \hat{R} e^{-j\beta z}$$

$$\hat{L} = (\hat{x} + j\hat{y}) \qquad p.c.g. \; ; \; \bar{E}_{pcg} = E_0 \hat{L} e^{-j\beta z}$$

- polarisation linéaire peut être la combinaison de deux polarisations circulaires

$$\hat{x} = \frac{1}{2}(\hat{R} + \hat{L})$$

$$\hat{y} = \frac{1}{2j}(\hat{L} - \hat{R})$$

- $|E|$ est non nul en tout temps $\rightarrow$ pas nécessaire d'orienter l'antenne de réception, comme en polarisation linéaire. Utile en communications mobiles.

## II.5 Transport de puissance (KRD 12-6)

On définit le vecteur de Poynting comme $\bar{P} = \bar{\mathcal{E}} \times \bar{\mathcal{H}}$ [W/m²]

$$\bar{P} = Re\{\bar{E}_c\} \times Re\{\bar{H}_c\}$$

$$= Re\{\bar{E}\, e^{j\omega t}\} \times Re\{\bar{H}\, e^{j\omega t}\}$$

$$= \frac{\bar{E}\, e^{j\omega t} + \bar{E}^*\, e^{-j\omega t}}{2} \times \frac{\bar{H}\, e^{j\omega t} + \bar{H}^*\, e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{4}\left(\bar{E}\times\bar{H}^* + \bar{E}^*\times\bar{H}\right) + \frac{1}{4}\left(\bar{E}\times\bar{H}e^{2j\omega t} + \bar{E}^*\times\bar{H}^* e^{-2j\omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\, 2\,\mathrm{Re}\{\bar{E}\times\bar{H}^*\} + \frac{1}{4}\, 2\,\mathrm{Re}\{\bar{E}\times\bar{H}\, e^{2j\omega t}\}$$

D'après le théorème de Poynting, $\bar{P}$ représente un flux de puissance.
Le flux de puissance moyen sur une période est

$$\bar{P}_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{P}\, dt = \frac{1}{T}\left(T\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\bar{E}\times\bar{H}^*\} + 0\right)$$

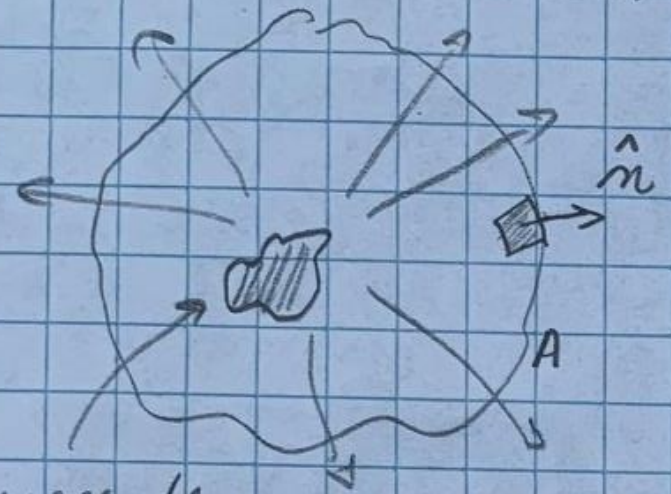
$$\boxed{\bar{P}_{moy} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\bar{E}\times\bar{H}^*\}}$$

ou $\bar{P}_{moy} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\bar{S}\}$

$\bar{S}$ : vecteur de Poynting complexe

$$\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H}^*$$

# Puissance traversant une surface



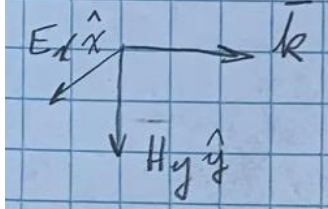

source de rayonnement

$$P_{out} = \oiint_A \bar{P}_{moy} \cdot d\bar{A} \qquad d\bar{A} = \hat{n}\, dA$$

exemples :

i) O.P.U. à polarisation linéaire dans milieu sans pertes

$$\bar{H} = \frac{\bar{k}}{\omega\mu} \times \bar{E} \qquad \bar{H}^* = \frac{\bar{k}^*}{\omega\mu} \times \bar{E}^*$$




dans un milieu sans pertes $\bar{k}$ est réel, donc $\bar{k}^* = \bar{k}$

e.g. $\bar{E} = \hat{x} E_x = \hat{x} A_x e^{-j\beta z}$

$\bar{k} = \beta \hat{z}$

$$H_y = \frac{1}{\eta} E_x \qquad H_y^* = \frac{1}{\eta} E_x^*$$

$$P_{moy} = \frac{1}{2} Re\{ E_x \hat{x} \times H_y^* \hat{y} \} = \frac{1}{2} Re\{ E_x \hat{x} \times \frac{E_x^*}{\eta} \hat{y} \}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|E_x|^2}{\eta} \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \frac{|E_x|^2}{2\eta} \text{ .. et également } \hat{z}\, \eta \frac{|H_y|^2}{2}$$

Remarque : Le flux de puissance est dans le sens de la propagation.

(ii) O.P.U à polarisation elliptique dans milieu sans pertes

$$\bar{E} = \hat{x}\, A_x\, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} + \hat{y}\, A_y\, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} \qquad \bar{k} = \beta\hat{n}$$

$$\bar{E} \rightarrow \bar{H} \rightarrow \bar{H}^* \rightarrow \bar{P}_{moy} \cdots$$

$$\bar{P}_{moy} = \hat{n}\,\frac{1}{2\eta}\left(|A_x|^2 + |A_y|^2\right) = \hat{n}\left(\frac{|A_x|^2}{2\eta} + \frac{|A_y|^2}{2\eta}\right)$$

Remarque : - résultat équivalent au traitement de deux ondes planes à polarisation linéaire superposées

$\Rightarrow$ découplage possible car les 2 composantes de polarisation linéaire sont orthogonales.

Dans un cas général on aura donc :

$$\bar{E} = \bar{A}\, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

$$\boxed{\bar{P}_{moy} = \hat{n}\,\frac{|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2}{2\eta}}$$

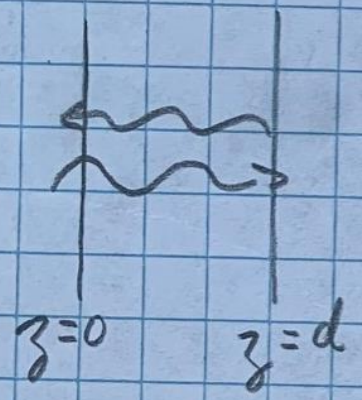
## II.6 Interférence entre 2 ondes planes

i) Ondes en directions opposées

e.g. $$\bar{E} = \hat{x}\, A e^{-j\beta z} + \hat{x}\, B e^{+j\beta z}$$

→ ondes stationnaires comme sur une ligne de transmission

$$TOS = \frac{|E_{max}|}{|E_{min}|} = \frac{|A| + |B|}{||A| - |B||} = \frac{1 + |B|/|A|}{1 - |B|/|A|} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$




→ matrice ABCD :

$$\begin{bmatrix} E_x(0) \\ H_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta d & j\eta \sin\beta d \\ \frac{j}{\eta}\sin\beta d & \cos\beta d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(d) \\ H_y(d) \end{bmatrix}$$

ii) Ondes en directions differentes (non alignées) mais co-polarisées

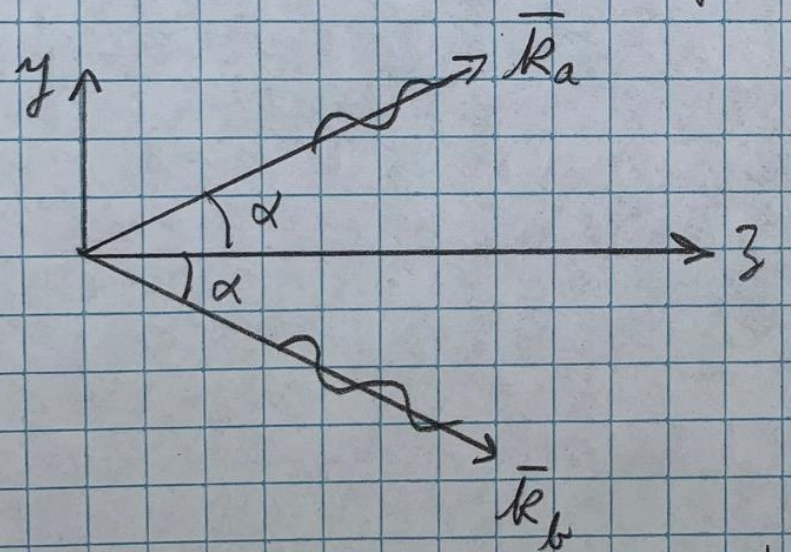
e.g. $\bar{E}_A = C\, e^{-j(k_{ax}x + k_{ay}y + k_{az}z)}\,\hat{x}$

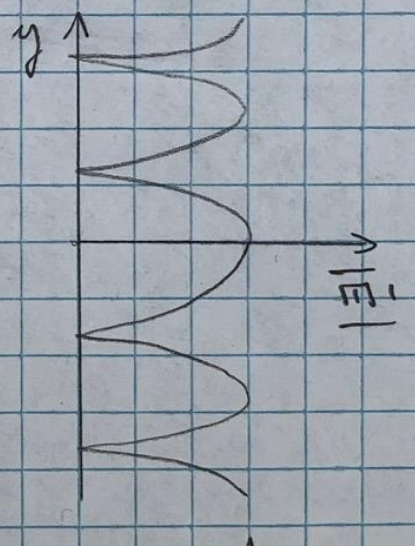
$\bar{E}_B = C\, e^{-j(k_{bx}x + k_{by}y + k_{bz}z)}\,\hat{x}$

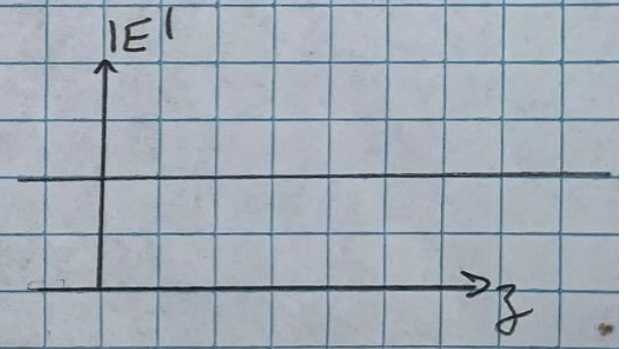
$\bar{k}\cdot\bar{E} = 0 \longrightarrow k_{ax} = 0 \qquad k_{bx} = 0$

Supposons que $k_{az} = k_{bz} = \beta\cos\alpha = k_z$

$k_{ay} = -k_{by} = \beta\sin\alpha = k_y$



$$\bar{E} = \bar{E}_A + \bar{E}_B = C\,\hat{x}\; e^{-jk_z z}\left(e^{-jk_y y} + e^{+jk_y y}\right)$$

$$= \hat{x}\; e^{-jk_z z}\; 2C\cos(k_y y)$$

onde stationnaire en $y$

onde progressive en $z$

$$\bar{\mathcal{E}} = 2|C|\cos(\omega t - k_z z + \theta_0)\;\cos(k_y y)\;\hat{x}$$

Vitesse de propagation selon $z$ :

$$u_z = \frac{\omega}{k_z} \quad \leftarrow \text{vitesse de phase}$$

puisque $k_z < \beta$ (car $|\bar{k}| = \beta$), alors $u_z > c$

## II.7 O.P.U. dans milieux dissipatifs KRD 12-4

Principalement deux mécanismes de pertes :

- pertes ohmiques ($\sigma$) dues aux collisions des électrons avec les atomes lorsqu'ils se déplacent librement
- relaxation diélectrique : pertes encourues par électrons qui demeurent captifs i.e. non libres de se déplacer d'un atome à l'autre

Semiconducteur : Courant de dérive des électrons

$\longrightarrow E$

$q_e = -e$

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = q_e E - \underbrace{m_e \frac{dx}{dt}}_{\text{qté de mvt.}} \underbrace{\nu}_{\text{fréq de collision avec atomes, défauts...}}$$

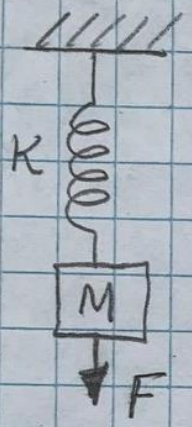
à l'équilibre, vitesse limite $\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 0$

$$\rightarrow \quad q_e E = m_e \nu v$$

$$v = \frac{q_e}{m_e \nu} E = \frac{-e}{m_e \nu} E = -\mu_e E \qquad \mu_e \equiv \frac{e}{m_e \nu}, \text{ mobilité}$$

Courant : $J_e = -N e v = N e \mu_e E = \sigma_e E \qquad \sigma_e \equiv N e \mu_e$

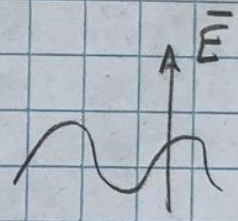
Isolant : - Analogie avec système masse-ressort
(diélectrique)

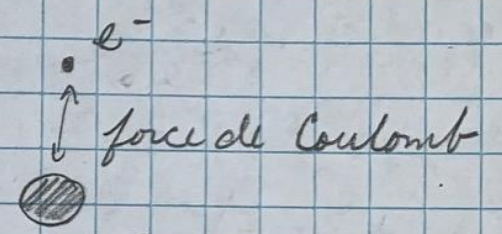



$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - b\frac{dx}{dt} + F$$

viscosité

$\Longrightarrow$




$$m_e\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - m_e\frac{dx}{dt}\nu + qE$$

- l'électron à une fréquence de résonance $\omega_r$

$\omega < \omega_r$ matériau se polarise, l'électron suit

$\omega > \omega_r$ matériau ne se polarise pas $\rightarrow \epsilon \searrow$

$\rightarrow$ voir fig 9-18, $\epsilon'$ seulement

Dans un matériau quelconque les deux phénomènes sont indiscernables et on utilise une conductivité effective $\sigma_e(\omega)$.

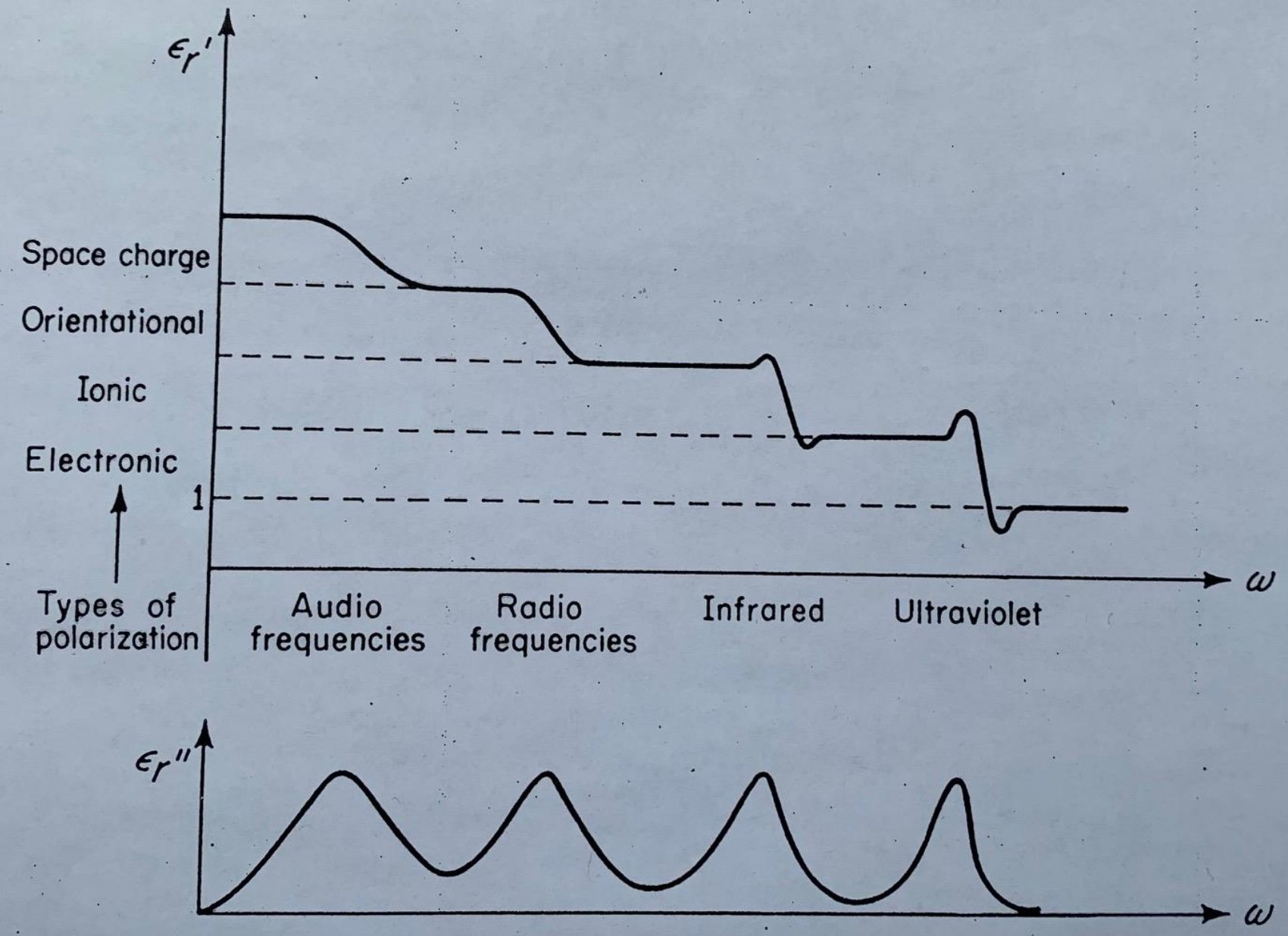



**Figure 9-18.** The variation of permittivity with frequency.

c') inclusion de $\sigma_e$ dans les équations de Maxwell

$$\bar{J} = \sigma_e \bar{E} \quad \leftarrow \text{nouveau terme}$$

(1) $$\nabla \cdot \epsilon \bar{E} = 0$$

(2) $$\nabla \cdot \mu \bar{H} = 0$$

(3) $$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H}$$

(4) $$\nabla \times \bar{H} = j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} + \sigma_e \bar{E}$$

On peut ré-écrire la dernière équation comme:

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = j\omega \underline{\epsilon} \bar{E}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\underline{\epsilon} = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j\frac{\sigma_e}{\omega \epsilon_0}\right)}$$

$\underline{\epsilon}$ : permittivité complexe

$$\underline{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon'' \quad ; \quad \epsilon' = \epsilon_0 \epsilon_r \qquad \epsilon'' = \frac{\sigma_e}{\omega}$$

→ revoir fig 9.18 avec variation de $\epsilon''$

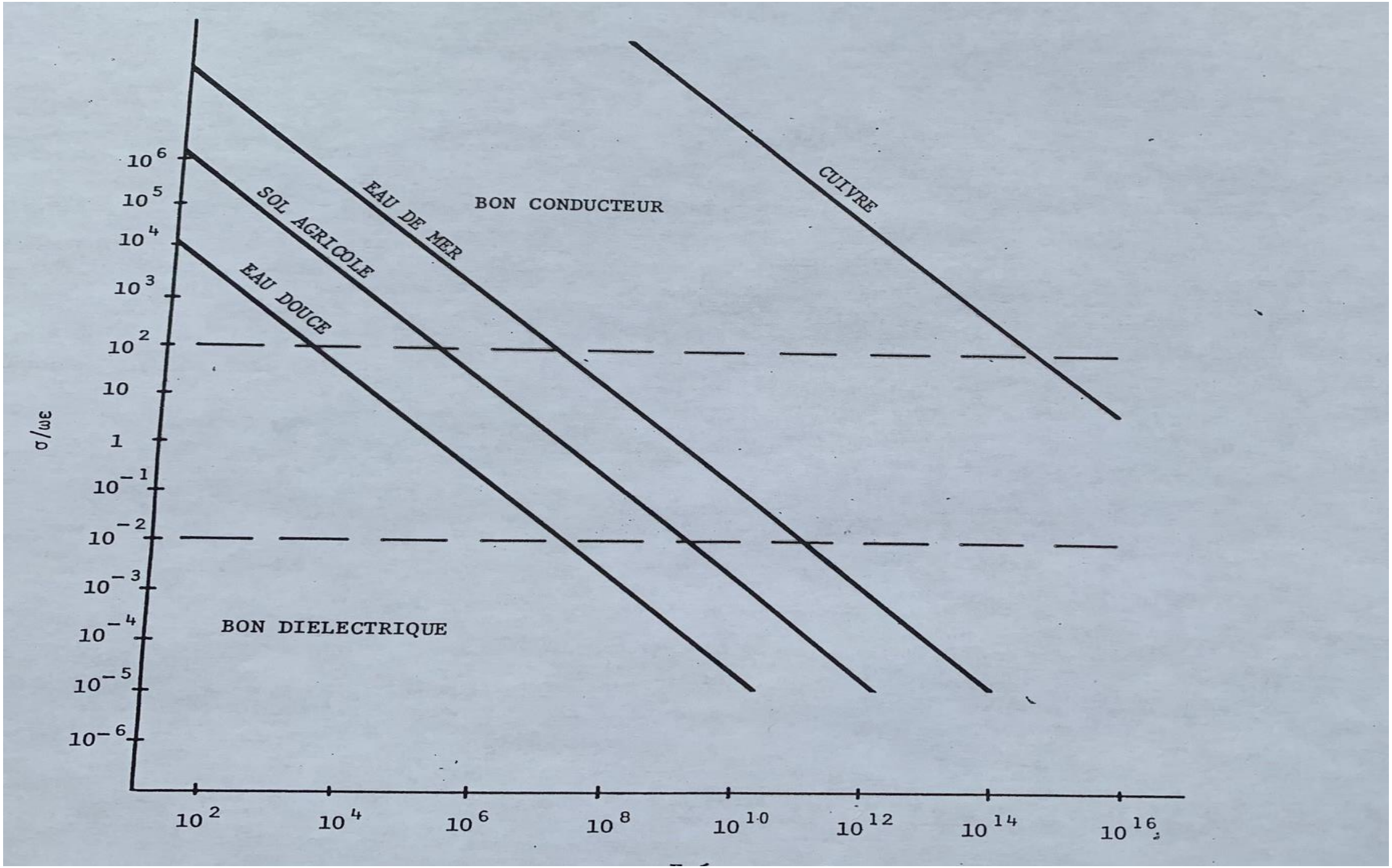
$\underline{\epsilon}$ permet de déterminer si on a un bon conducteur, semiconducteur ou un isolant

$$p \equiv \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma_e}{\omega \epsilon'}$$ (voir acétate.

si $p > 100$ → bon conducteur ; si $p < 1/100$ → bon isolant

entre les deux → semiconducteur

Remarque : le comportement dépend de $\omega$ ; un même matériau peut avoir un comportement différent en fonction de $\omega$ ; e.g. eau douce, eau de mer (voir figure)


σ/ωε
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
EAU DE MER
SOL AGRICOLE
EAU DOUCE
CUIVRE
BON CONDUCTEUR
BON DIELECTRIQUE
10^2
10^4
10^6
10^8
10^10
10^12
10^14
10^16

ii) Equation de Helmholtz avec pertes

Combinant (3) et (4) :

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \mu \underline{\epsilon} \bar{E} = 0$$

Solution :

$$\bar{E} = \bar{A} e^{-j \bar{k} \cdot \bar{r}} \quad \left( + \bar{B} e^{+j \bar{k} \cdot \bar{r}} \right)$$

dans l'éq. conduit à :

$$\boxed{\bar{k} \cdot \bar{k} = \omega^2 \mu \underline{\epsilon} \equiv - \underline{\gamma}^2}$$

$$\bar{k} \cdot \bar{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$\underline{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta$

constante de propagation complexe

$\alpha$ : constante d'atténuation

$\beta$ : nombre d'onde

$\bar{k}$ : vecteur d'onde complexe ; $\boxed{\bar{k} = -j\,\underline{\gamma}\,\hat{n}}$

$\hat{n}$ : vecteur unitaire, direction de propagation

On peut donc écrire

$$\bar{E} = \bar{A}\, e^{-j(-j\underline{\gamma}\,\hat{n}\cdot\bar{r})} + \bar{B}\, e^{+j(-j\underline{\gamma}\,\hat{n}\cdot\bar{r})}$$

$$= \bar{A}\, e^{-\alpha\,\hat{n}\cdot\bar{r}}\, e^{-j\beta\,\hat{n}\cdot\bar{r}}$$

$$+ \bar{B}\, e^{+\alpha\,\hat{n}\cdot\bar{r}}\, e^{+j\beta\,\hat{n}\cdot\bar{r}}$$

$$\underbrace{\underbrace{e^{-\alpha\,\hat{n}\cdot\bar{r}}}_{\text{atténuation}}\ \underbrace{e^{-j\beta\,\hat{n}\cdot\bar{r}}}_{\text{progression de phase}}}_{\text{dans la même direction : } +\hat{n} \text{ ou } -\hat{n}}$$

Remarques :

- l'onde est toujours TEM avec $\bar{E} \perp \hat{n}$, $\bar{H} \perp \hat{n}$, $\bar{E} \perp \bar{H}$
- $\eta$ est maintenant complexe : $\underline{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\epsilon}}}$ donc $\bar{E}$ et $\bar{H}$ ne sont plus en phase.

iii) Propagation dans les bons conducteurs

Si $\boxed{p > 100}$ alors

$$\underline{\epsilon} = \epsilon' - j\frac{\sigma}{\omega} \approx -j\frac{\sigma}{\omega}$$

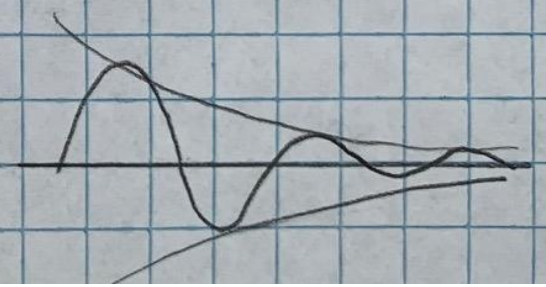
Il en résulte que

$$\underline{\gamma} = \sqrt{-\omega^2\mu\underline{\epsilon}} \approx \sqrt{j\omega^2\mu\sigma/\omega} = \sqrt{\sigma\omega\mu}\sqrt{j}$$

$$\sqrt{j} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} = e^{j\pi/4} \quad (\text{ou } e^{-3j\pi/4})$$

Donc $\underline{\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}}$ et

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}}}$$



De même :

$$\underline{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\epsilon}}} \simeq \sqrt{\frac{\mu}{-j\sigma/\omega}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\, e^{j\pi/4} = \boxed{(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}}$$

exemple :

$$\bar{E} = \hat{x} A e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

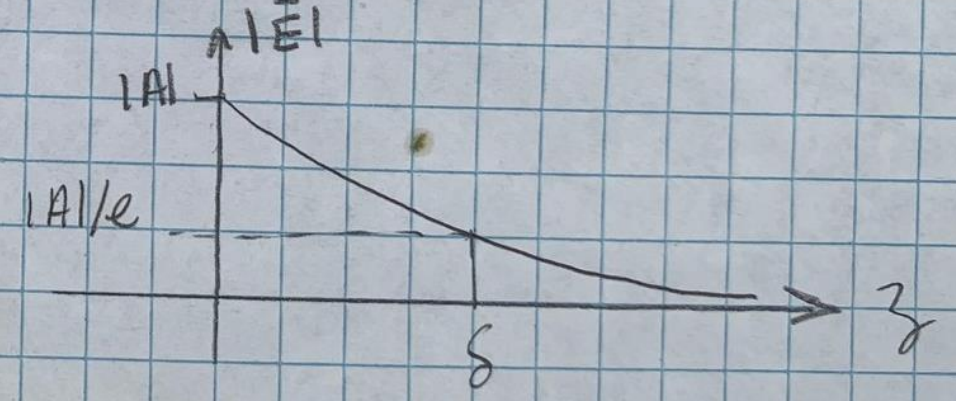
$$\bar{H} = \hat{y} \frac{A e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\, e^{j\pi/4}}$$

$\rightarrow$ $\bar{H}$ est en retard de $\pi/4$ p/r à $\bar{E}$

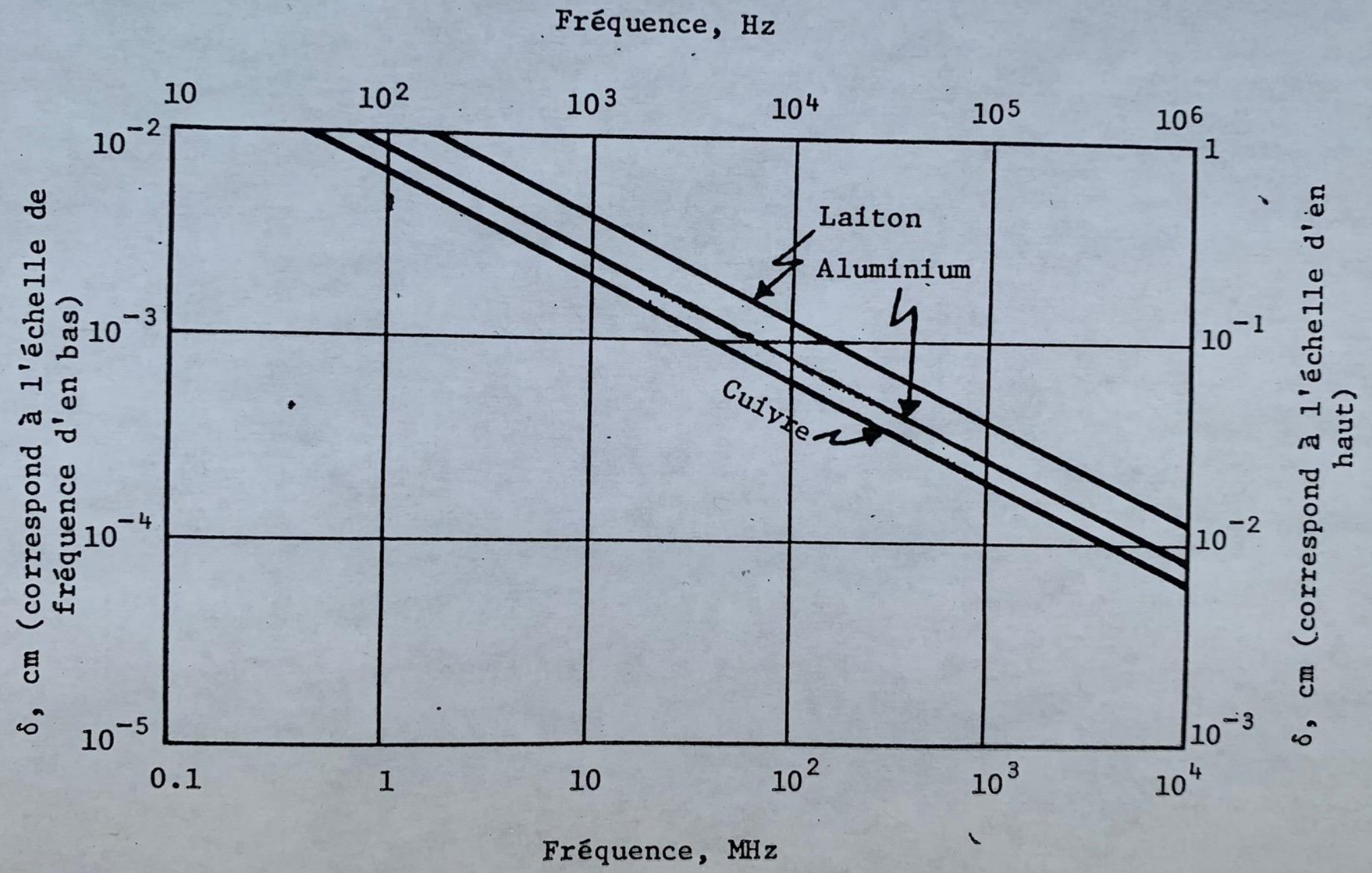
- Effet de peau
  - $\alpha$ très élevé → champs à décroissance rapide
  - champs restent confinés près de la surface du métal → blindage
  - $\delta$ : profondeur de peau (skin depth)

$$\delta \equiv 1/\alpha$$

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}}$$




NB: $1/e = 0.367$ ; $20\log_{10}(1/e) = -8.68\,dB$


Fréquence, Hz
10
$10^2$
$10^3$
$10^4$
$10^5$
$10^6$
$10^{-2}$
$10^{-3}$
$10^{-4}$
$10^{-5}$
δ, cm (correspond à l'échelle de fréquence d'en bas)
1
$10^{-1}$
$10^{-2}$
$10^{-3}$
δ, cm (correspond à l'échelle d'en haut)
Laiton
Aluminium
Cuivre
0.1
1
10
$10^2$
$10^3$
$10^4$
Fréquence, MHz

- $\delta$ dépend de la fréquence (voir tableau)

basse fréq. → $\delta$ grand → courant quasi uniforme

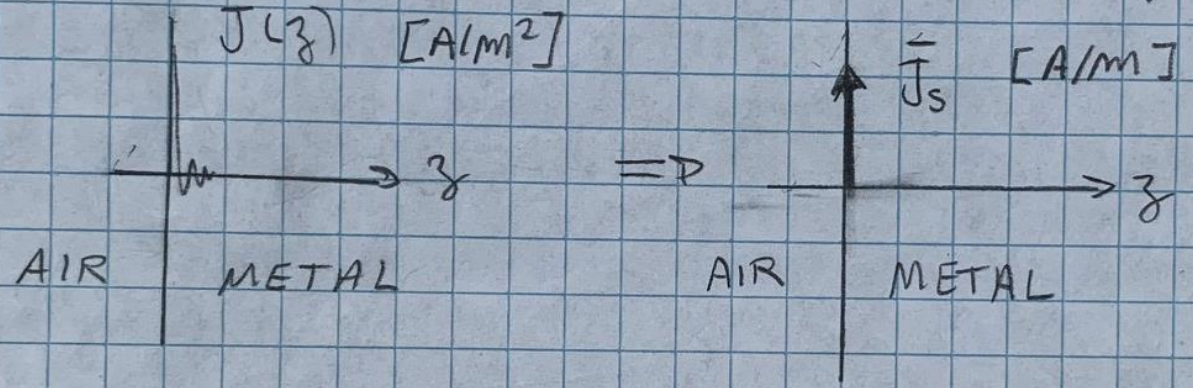
hautes fréq. → $\delta$ petit → courant confiné à la surface → résistance ↗

- Vitesse de phase

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}}$$ ← très dispersif (voir tableau)

- Impédance équivalente de surface

Si $\delta$ est très petit, on peut remplacer $\bar{J}$ [A/m²] par un courant pelliculaire équivalent $\bar{J}_s$ [A/m]




i.e. $\bar{J}(z) = \bar{J}_s\, \delta(z)$

Dirac !!

$$\bar{J}_s = \int_0^\infty \bar{J}(z)\, dz = \frac{\bar{J}(0)}{\underline{\gamma}}$$

On définit $\underline{Z}_s$ comme : $\dfrac{\text{champ } E \text{ à la surface } (z=0)}{\text{courant de surface } J_s}$

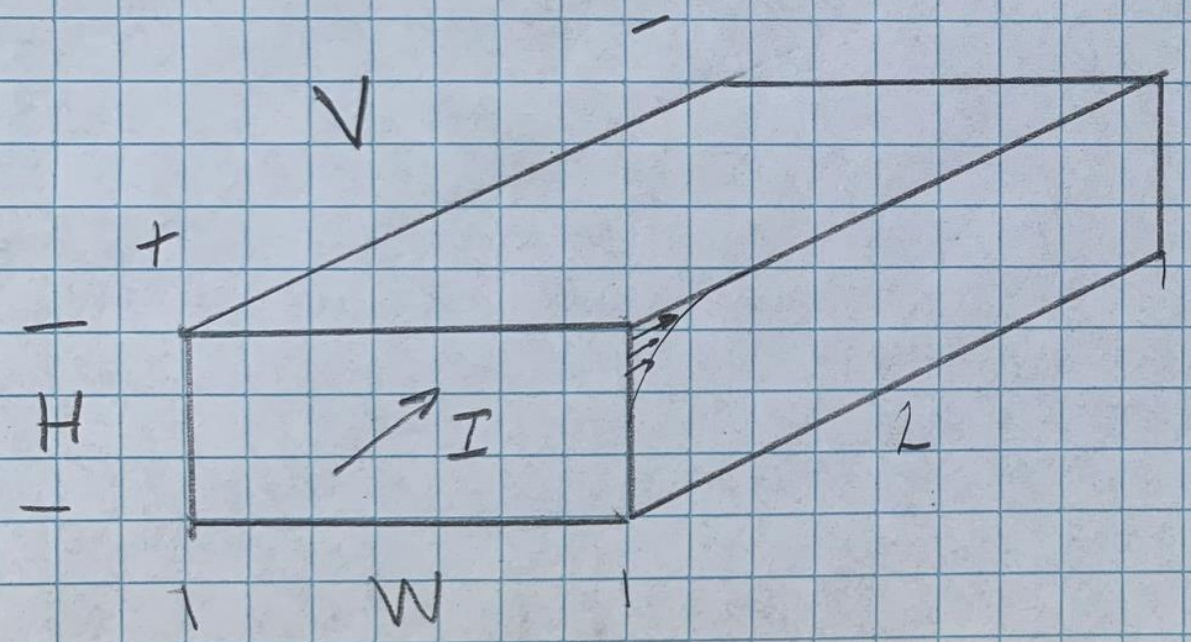
$E_x(0) \equiv A$

$$\bar{J}_{s_x} = \frac{J_x(0)}{\underline{\gamma}} = \frac{\sigma\, E_x(0)}{\underline{\gamma}} = \frac{\sigma A}{\underline{\gamma}}$$

D'où

$$\boxed{\underline{Z}_s \equiv \frac{E_x}{J_{s_x}}} = \frac{\underline{\gamma}}{\sigma} = \frac{\alpha}{\sigma} + j\frac{\beta}{\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \boxed{= \underline{h}}$$

Exemple : Calcul de la résistance d'une plaque métallique




à 0 Hz J est uniforme
car $\delta \to \infty$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{E \cdot L}{J\,HW}$$

$$= \frac{E \cdot L}{\sigma E\,HW}$$

$$= \frac{L}{\sigma HW}$$

à très hautes fréquence lorsque $\delta \ll H$

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{E \cdot L}{J_s \cdot W} = \frac{E \cdot L}{\frac{E}{Z_s} \cdot W} = Z_s \frac{L}{W}$$

$$= (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\,\frac{L}{W}$$

ou encore

$$Z_{eq} = (1+j)\frac{1}{\sigma\delta}\,\frac{L}{W}$$

Comparaison $R(0\,Hz)$ avec $Re\{Z_{eq}\}$ :

$$\frac{L}{\sigma W H} \quad vs \quad \frac{L}{\sigma W \delta}$$

→ épaisseur effective de $\delta$

$\Rightarrow$ si $H \gg \delta$, il ne sert à rien d'augmenter $H$

si on veut diminuer $Z_{eq}$.