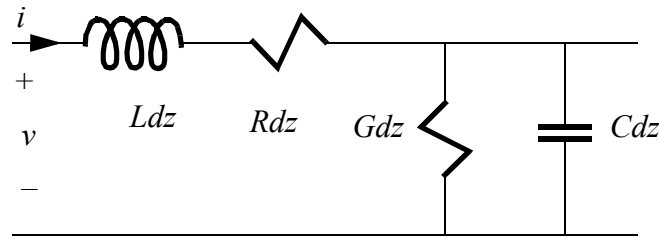


1.0 Chapitre I: Lignes de transmission

1.1 Rappels théoriques

1.1.1 Modèle équivalent d'un élément de ligne de transmission

Un élément de longueur dz de ligne de transmission peut être représenté par le circuit équivalent suivant dans lequel R , L , G et C sont respectivement la résistance (Ohm/m), l'inductance (Henry/m), la conductance (Siemens/m) et la capacité (Farad/m) résultant de la structure physique de la ligne par mètre de longueur.



Le courant i et la tension v obéissent aux "Équations du Télégraphiste", soit:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\left(L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\left(C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv\right) \quad (2)$$

1.1.2 Lignes sans pertes

Dans le cas où $R = 0$ et $G = 0$, la ligne est sans pertes et les équations (1) et (2) peuvent être combinées pour former l'équation d'ondes (pour i ou pour v):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (3)$$

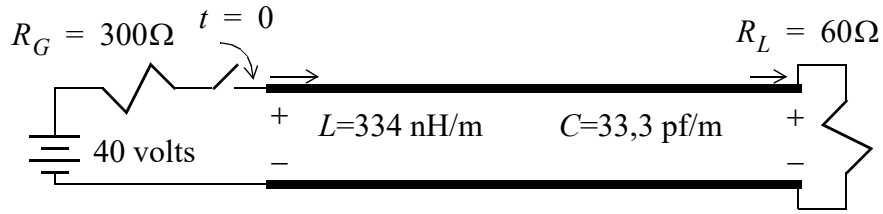
dont la solution générale peut s'écrire comme la somme d'une onde progressive se propageant en direction $+z$ et d'une onde rétrograde se propageant en direction $-z$. Par exemple:

$$v = f(z - ct) + g(z + ct) \quad (4)$$

$$i = (f(z - ct) - g(z + ct)) / Z_0 \quad (5)$$

Problème 1.1 Régime transitoire, source constante

Le circuit suivant est formé d'une source continue avec une résistance interne de 300Ω , branchée à une ligne de transmission de 300 mètres de longueur terminée sur une charge de 60Ω . La source est mise en circuit au temps $t = 0$. Les paramètres électriques de la ligne sont donnés dans la figure. On supposera que la ligne est sans pertes.



- Calculez Z_0 , la vitesse u et le délai τ de propagation d'un bout à l'autre de la ligne de transmission.
- Calculez l'amplitude de l'onde incidente à $t = 0^+$, en tension et en courant.
- Obtenir les réponses $v(t)$ et $i(t)$ à chaque extrémité de la ligne pour $0 < t < 3\tau$.
- Quelles sont les tensions et courants à l'équilibre (i.e. lorsque $t \rightarrow \infty$)?

Solution

- On obtient d'après la théorie des lignes sans pertes que la vitesse de propagation est donnée par:

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (6)$$

De même, l'impédance caractéristique est obtenue par:

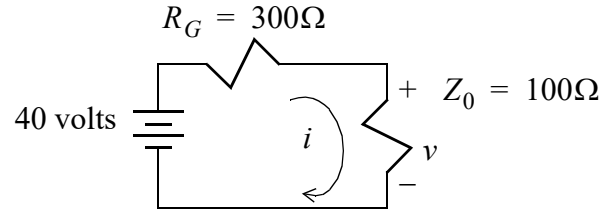
$$Z_0 = \sqrt{L/C} = 100.1\Omega \approx 100\Omega \quad (7)$$

Le délai sur une ligne de 300 mètres peut être simplement calculé ainsi:

$$\tau = \frac{300\text{m}}{u} = 1\mu\text{s} \quad (8)$$

- b.** Dans ce type de problème, il est important de bien définir au départ une convention pour le sens des courants et tensions positives. La convention utilisée pour ce problème, qui sera aussi adoptée pour tous les problèmes de ce recueil est illustrée avec des flèches et les signes + et – sur le schéma du circuit initial.

À $t = 0^+$, la source de Thévenin voit une charge équivalente d'impédance Z_0 car il n'y a pas encore eu de réflexion sur la charge. Le circuit équivalent pour trouver les ondes incidentes est donc le suivant.



On obtient donc pour les tension et courant initiaux:

$$\begin{aligned} v &= \frac{100\Omega}{(100 + 300)\Omega} \times 40 \text{ volts} = 10 \text{ volts} \\ i &= \frac{40 \text{ volts}}{(100 + 300)\Omega} = 100 \text{ mA} \end{aligned} \quad (9)$$

v et i correspondent aussi aux premières ondes incidentes lancées dans la ligne de transmission.

- c.** À l'extrémité où se trouve la source, la tension et le courant demeurent inchangées jusqu'à ce qu'une première réflexion revienne de la charge. Donc pendant tout l'intervalle $0 < t < 2\tau$ vous avons:

$$\begin{aligned} v_G &= 10 \text{ volts} \\ i_G &= 100 \text{ mA} \end{aligned} \quad (10)$$

À la charge, on conserve les valeurs initiales jusqu'à l'arrivée de l'onde émise par la source, ce qui se produit à $t = \tau$. Donc pour l'intervalle $t < \tau$ nous avons une tension et un courant nuls à la charge.

À $t = \tau$, une onde dont l'impédance caractéristique est de 100Ω arrive sur la charge de 60Ω . Puisqu'il y a une incompatibilité d'impédance, la charge doit réfléchir une onde vers la source. Le coefficient de réflexion de tension de la charge est égal à:

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{60\Omega - 100\Omega}{60\Omega + 100\Omega} = -\frac{1}{4} \quad (11)$$

L'amplitude des ondes réfléchies sera donc:

$$\begin{aligned} v^r &= \Gamma_L v^i = -\frac{1}{4} \times 10 \text{ volts} = -2.5 \text{ volts} \\ i^r &= -v^r / Z_0 = 2.5 \text{ volts} / 100\Omega = 25 \text{ mA} \end{aligned} \quad (12)$$

À partir de $t = \tau^+$, la tension et le courant sur la charge sont donc respectivement:

$$\begin{aligned} v_L &= v_L(\tau^-) + v^i + v^r = 0 + 10 - 2.5 \text{ volts} = 7.5 \text{ volts} \\ i_L &= i_L(\tau^-) + i^i + i^r = 0 + 100 + 25 \text{ mA} = 125 \text{ mA} \end{aligned} \quad (13)$$

Ces valeurs seront conservées jusqu'à l'arrivée à $t = 3\tau$ d'une autre onde réfléchie par la source.

À $t = 2\tau$, l'onde réfléchie par la charge arrive à la source, essayant ainsi de créer les conditions de tension et de courant obtenues à l'équation (13). On peut vérifier que ces conditions ne satisfont pas l'équation d'état aux bornes de la source de Thévenin, laquelle s'exprime:

$$v_G = 40 \text{ volts} - i_G \times 300\Omega \quad (14)$$

Il y aurait donc une réflexion par la source et le coefficient associé pour l'onde de tension sera:

$$\Gamma_G = \frac{R_G - Z_0}{R_G + Z_0} = \frac{300 - 100\Omega}{300 + 100\Omega} = \frac{1}{2} \quad (15)$$

Donc on a que

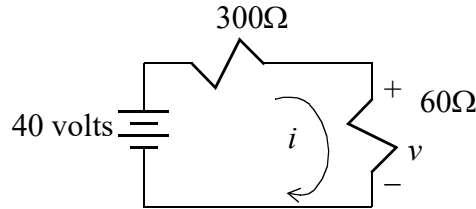
$$\begin{aligned} v_G^r &= \Gamma_G v_L^r = -2.5 \text{ volts} \times 0.5 = -1.25 \text{ volt} \\ i_G^r &= v_G^r / Z_0 = -12.5 \text{ mA} \end{aligned} \quad (16)$$

À partir de $t = 2\tau^+$, les courant et tension à l'extrémité source sont donc:

$$\begin{aligned}
v_G &= v_G(0^-) + v^i + v_L^r + v_G^r = 0 + 10 - 2.5 - 1.25 \text{ volts} = 6.25 \text{ volts} \\
i_G &= i_G(0^-) + i^i + i_L^r + i_G^r = 0 + 100 + 25 - 12.5 \text{ mA} = 112.5 \text{ mA}
\end{aligned}
\tag{17}$$

Ces valeurs persisteront jusqu'à l'arrivée d'une autre réflexion venant de la charge à $t = 4\tau$.

d. Lorsque $t \rightarrow \infty$, l'amplitude des réflexions devient très faible et les tensions à chaque bout de la ligne de transmission sont alors égales ($v_L = v_G$). Il en est de même pour les courants ($i_L = i_G$). On peut donc retirer la ligne du circuit, ce qui ne laisse que le circuit suivant:



La solution est de toute évidence:

$$\begin{aligned}
v &= v_G(t \rightarrow \infty) = v_L(t \rightarrow \infty) = \frac{R_L}{R_L + R_S} \times 40 \text{ volts} = 6.66 \text{ volts} \\
i &= i_G(t \rightarrow \infty) = i_L(t \rightarrow \infty) = \frac{40 \text{ volts}}{R_L + R_G} = 111 \text{ mA}
\end{aligned}
\tag{18}$$

On peut aussi arriver à ce résultat en faisant la somme de tous les rebonds dans la ligne. Du côté de la source, nous pouvons trouver l'expression générale de la tension après chaque rebond.

$$\begin{aligned}
v(0^+) &= v^i \\
v(2\tau^+) &= v^i(1 + \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_G) \\
v(4\tau^+) &= v^i(1 + \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_G + \Gamma_L^2 \Gamma_G^2 + \Gamma_L^2 \Gamma_G^2) \\
v(2n\tau^+) &= v^i(1 + \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_G + \Gamma_L^2 \Gamma_G^2 + \Gamma_L^2 \Gamma_G^2 + \dots + \Gamma_L^n \Gamma_G^{n-1} + \Gamma_L^n \Gamma_G^n)
\end{aligned}
\tag{19}$$

On peut écrire cette dernière expression sous forme plus compacte ainsi:

$$v(2n\tau^+) = v^i \left(\sum_{k=0}^n (\Gamma_L \Gamma_G)^k + \Gamma_L \sum_{k=0}^{n-1} (\Gamma_L \Gamma_G)^k \right) \quad (20)$$

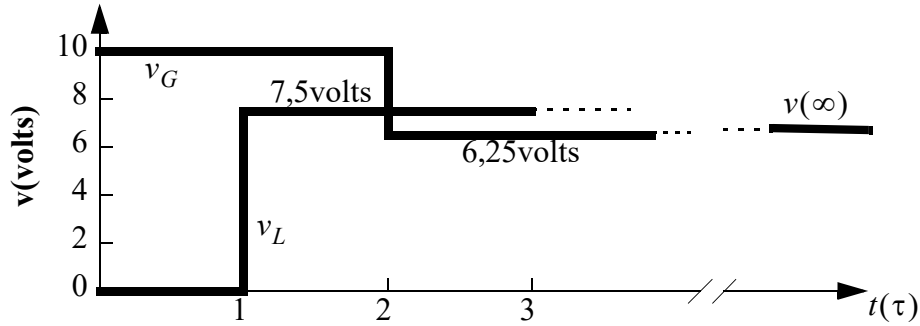
Chaque sommation est une série géométrique. Puisque $|\Gamma_L| < 1$ et $|\Gamma_G| < 1$, les séries sont convergentes¹ et on peut exprimer le résultat lorsque $n \rightarrow \infty$ par:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(2n\tau^+) = v^i \left(\frac{1}{1 - \Gamma_L \Gamma_g} + \Gamma_L \frac{1}{(1 - \Gamma_L \Gamma_g)} \right) \quad (21)$$

$$v(t \rightarrow \infty) = v^i \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L \Gamma_G} = 10 \text{ volts} \times \frac{(1 - 1/4)}{1 - (-1/4 \times 1/2)} = 6.66 \text{ volts} \quad (22)$$

Une démarche analogue permet de trouver la tension de charge.

D'après les résultats obtenus on peut tracer les réponses temporelles suivantes:



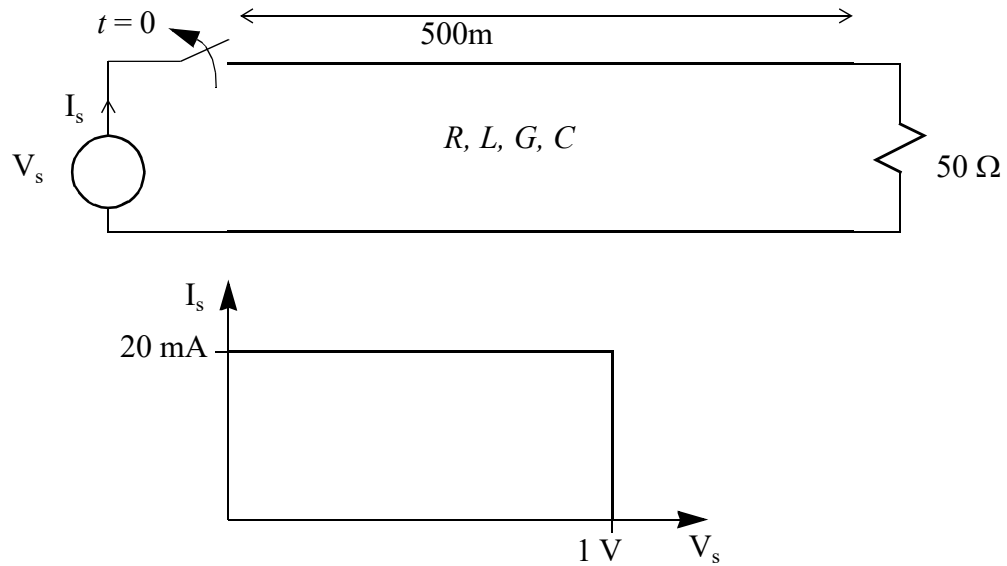
Suggestion: répéter cet exercice en utilisant les coefficients de réflexion pour les courants, et aussi en utilisant un diagramme de rebonds.

1. Rappel: pour une série géométrique avec $|\varepsilon| < 1$, nous avons que

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots = 1/(1 - \varepsilon).$$

Problème 1.2 Régime transitoire, source non-linéaire

Une ligne de transmission de 500m de longueur a les propriétés linéiques suivantes: $L = 9\mu\text{H/m}$, $R = 0\Omega/\text{m}$, $C = 100\text{ pF/m}$ et $G = 0\text{ S/m}$. Elle est branchée à un bloc d'alimentation ayant une caractéristique courant-tension non-linéaire montrée ci-dessous. L'interrupteur s'ouvre à l'instant $t = 0$.



- Quel est le délai de propagation T des signaux d'un bout à l'autre de ce circuit?
- Tracez un graphique de la tension en fonction du temps aux deux extrémités de la ligne pendant l'intervalle $0 \leq t \leq 6T$.
- Combien de temps faut-il pour que le courant dans la charge tombe à 25% ou moins de sa valeur initiale?

Solution

- On obtient d'après la théorie des lignes sans pertes que la vitesse de propagation est donnée par:

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3,33 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (23)$$

Donc le délai sur une ligne de 500 mètres peut être simplement calculé ainsi:

$$T = \frac{500\text{m}}{u} = 15\mu\text{s} \quad (24)$$

b. On obtient l'impédance caractéristique par la relation suivante:

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = 300\Omega \quad (25)$$

On effectue une solution graphique par la méthode de Bergeron en tenant compte que:

- pour $t < 0$: on a une caractéristique de source non-linéaire;
- pour $t > 0$: La source devient un circuit ouvert.

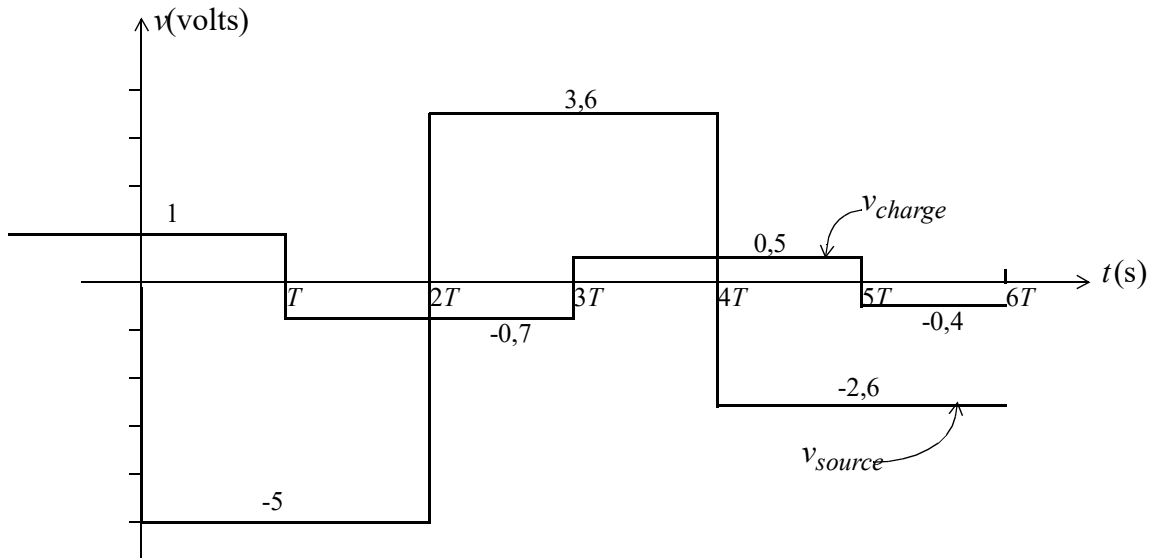
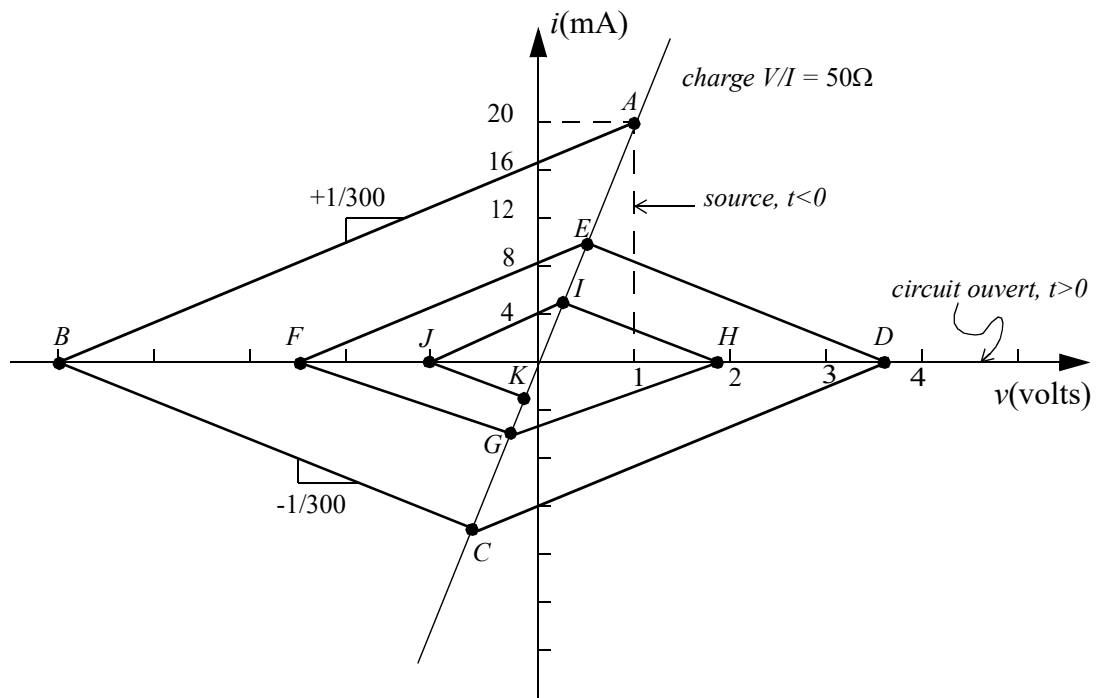
Pour $t < 0$, le circuit est stable et la solution est donnée par l'intersection des caractéristique de la charge et la source (voir figure suivante, point A).

À $t = 0^+$, une onde ayant comme propriété $\Delta i / \Delta v = 1/Z_0$ est lancée vers la charge, à partir de l'interrupteur. Puisque l'extrémité gauche du circuit est devenue un circuit ouvert, on doit se déplacer instantanément sur la caractéristique $i = 0$ (point B).

À $t = T$, l'onde arrive sur la charge de 50Ω qui produit un signal réfléchi ayant $\Delta i / \Delta v = -1/Z_0$. L'état résultant sur la charge est donné par le point C. Le processus se continue jusqu'à la stabilisation du circuit à $v = 0$ et $i = 0$. Le tableau suivant donne les valeurs approximatives des points obtenus dans le plan $v-i$.

temps (ns)	tension (volts)	courant (mA)	point
$t < 0$	-1	20	A
$t = 0^+$	-5	0	B
$t = T$	-0,7	-14	C
$t = 2T$	3,6	0	D
$t = 3T$	0,5	10	E
$t = 4T$	-2,6	0	F
$t = 5T$	-0,4	-7,3	G
$t = 6T$	1,8	0	H
$t = 7T$	0,3	5,2	I

Les points A, B, D, F, H correspondent aux états à l'extrémité gauche de la ligne et A, C, E, G, I correspondent aux états de la charge.

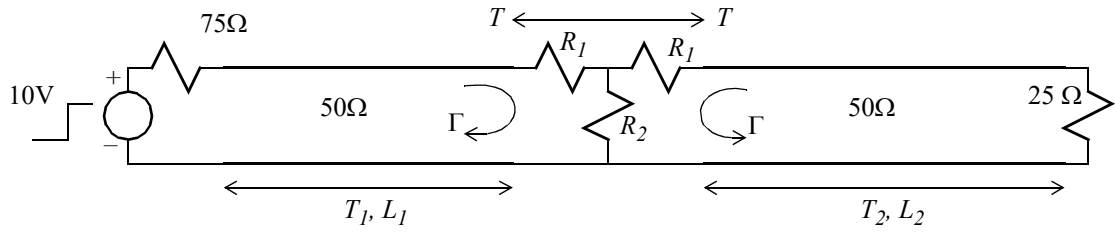


- c. On a comme valeur initiale du courant 20mA, et 25% de I_0 sera alors égal à 5mA.
Or d'après la question précédente, on a les valeurs suivantes du courant aux instants T, 3T, 5T et 7T.

temps (ns)	courant (mA)	Point
$t = T$	-14	C
$t = 3T$	10	E
$t = 5T$	-7,3	G
$t = 7T$	5,2	I

Et en extrapolant, on voit qu'à $t = 9T$ (point K), la valeur du courant sera inférieure en module à 5mA. Donc, il faut un temps $t = 9T = 135\mu s$ pour que le courant dans la charge tombe à 25% de sa valeur initiale.

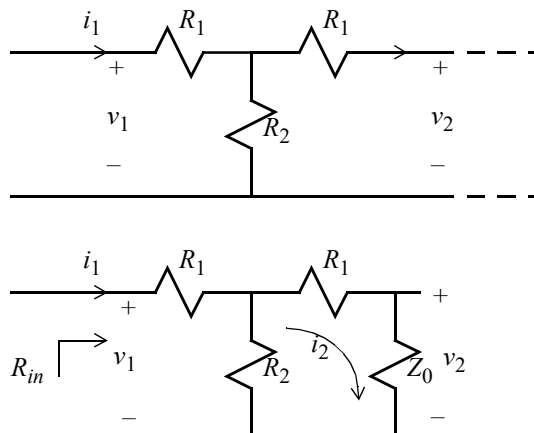
Problème 1.3 Régime transitoire, connexion tandem



- Dans le circuit ci-dessus, exprimez les coefficients Γ et T pour les ondes de tension en fonction de R_1 et R_2 . Vérifiez si l'équation $T = 1 + \Gamma$ est satisfaite.
- L'arrangement des trois résistances (R_1 , R_2) doit être conçu pour former un atténuateur adapté de 6 dB, i.e. ayant comme caractéristiques $\Gamma = 0$ et $20 \log_{10}|T| = -6.02$ dB. Terminez la conception en spécifiant les valeurs numériques de R_1 et R_2 .
- À l'aide de diagrammes de rebonds, obtenez la forme du signal de tension en fonction du temps aux bornes de la source de Thévenin dans la charge pendant l'intervalle $0 \leq t \leq 4(T_1 + T_2)$.
- En se servant du même diagramme, obtenez la distribution de tension en fonction de la position le long de la ligne à l'instant $t = T_1 + 2T_2$.

Solution

- Supposons une onde incidente venant du côté gauche arrivant sur le réseau des trois résistances. La ligne du côté droit peut être remplacée par une charge de 50Ω à la transitoire.



On peut décomposer v_1 et i_1 en signaux incidents et réfléchis, soit: $v_1 = v^i + v^r$ et $i_1 = i^i + i^r = (v^i - v^r)/Z_0$.

Par contre, v_2 et i_2 ne contiennent que le signal transmis: $v_2 = v^t$ et $i_2 = i^t = v^t/Z_0$.

En utilisant la règle des diviseurs de courant, on a:

$$i_2 = i_1 \times \frac{\frac{1}{R_1 + Z_0}}{\frac{1}{R_1 + Z_0} + \frac{1}{R_2}} = i_1 \times \frac{R_2}{R_1 + R_2 + Z_0} \quad (26)$$

En combinant ce résultat avec les expressions précédentes de i_1 et i_2 on obtient:

$$\frac{v^t}{Z_0} = \frac{(v^i - v^r)}{Z_0} \times \frac{R_2}{R_1 + R_2 + Z_0} \quad (27)$$

d'où l'on tire:

$$T = \frac{v^t}{v^i} = \left(1 - \frac{v^r}{v^i}\right) \times \frac{R_2}{R_1 + R_2 + Z_0} \quad (28)$$

Puisque nous avons $\Gamma = v^r/v^i$, il en résulte que $T = (1 - \Gamma)R_2/(R_1 + R_2 + Z_0)$ et donc on voit bien que $T \neq 1 + \Gamma$.

On peut calculer le coefficient de réflexion avec:

$$\Gamma = \frac{R_{in} - Z_0}{R_{in} + Z_0} \quad (29)$$

où:

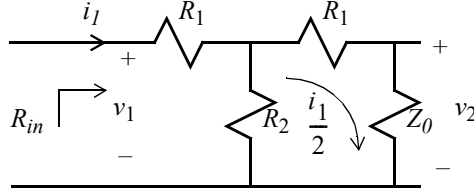
$$R_{in} = R_1 + (R_2 \parallel (R_1 + Z_0)) = R_1 + \frac{R_2(R_1 + Z_0)}{R_1 + R_2 + Z_0} = \frac{R_1(R_1 + R_2 + Z_0) + R_2(R_1 + Z_0)}{R_1 + R_2 + Z_0} \quad (30)$$

$$\text{D'où finalement, } \Gamma = \frac{R_1^2 + 2R_1R_2 - Z_0^2}{R_1^2 + 2R_1R_2 + 2Z_0(R_1 + R_2) + Z_0^2} \text{ et } T = (1 - \Gamma) \frac{R_2}{R_1 + R_2 + Z_0}.$$

b. La valeur de $|T|$ désirée est $10^{-6,02/20} = 1/2$

Avec $\Gamma = 0$, on a $i_1 = i^i$, et avec $T = \pm 1/2$, $i^t = \pm \frac{1}{2} i^i = \pm \frac{i_1}{2}$.

C'est-à-dire $i_2 = \pm i_1/2$. D'après la convention utilisée (voir figures partie a)) il est clair qu'on doit choisir le signe positif. Nous avons donc le schéma équivalent suivant:



Puisque R_2 forme un diviseur de courant avec la combinaison $R_1 + Z_0$, il est clair que nous devons avoir $R_1 + Z_0 = R_2$.

Si $\Gamma = 0$ alors $R_{in} = Z_0$ et rappelons que $R_{in} = R_1 + R_2 \parallel (R_1 + Z_0)$, ce qui dans les conditions présentes se ramène à $R_1 + R_2 \parallel R_2 = R_1 + R_2/2$.

Nous avons donc que $Z_0 = R_1 + R_2/2$ et en combinant avec $Z_0 + R_1 = R_2$, il reste $2Z_0 = 3R_2/2$. On peut en déduire alors que $R_1 = Z_0/3$ et $R_2 = 4Z_0/3$.

Avec ces résultats on peut vérifier que l'expression de Γ trouvée en a) conduit effectivement à $\Gamma = 0$

c. L'onde incidente lancée par la source à $t = 0$ est: $v^+ = 10\text{V} \times \frac{50}{50 + 75} = 4\text{V}$.

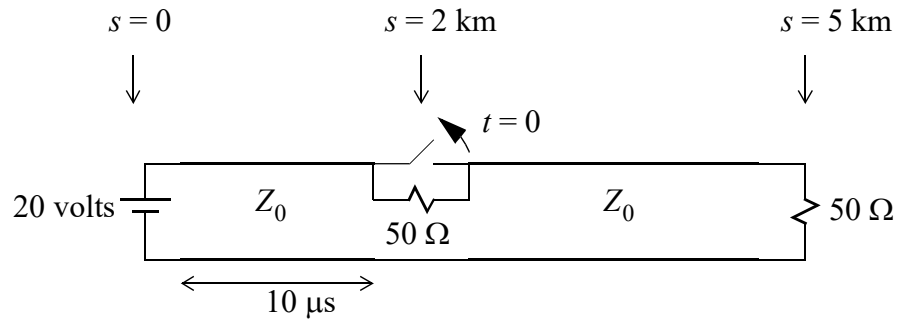
Coefficient de réflexion sur la source: $\Gamma_s = \frac{75 - 50}{75 + 50} = 0,2$.

Coefficient de réflexion sur la charge: $\Gamma_L = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -1/3$.

À la jonction nous avons que $T = 1/2$. Ce coefficient est valide pour la transmission vers la gauche et vers la droite. À partir de ces coefficient on peut tracer le diagramme de rebonds suivant:

Problème 1.4 Régime transitoire, connexion tandem

Une ligne de transmission de 5 km de longueur subit un bris à une distance de 2 km de la source. Le bris crée une résistance parasite de 50Ω en série avec la ligne. On modélise le phénomène en ajoutant un interrupteur qui s'ouvre à $t = 0$. La ligne a une impédance caractéristique Z_0 de 100Ω et on suppose que ses pertes sont négligeables.



- Déterminez l'inductance et la capacité par unité de longueur pour cette ligne.
- Quelles sont les valeurs du courant et de la tension sur la ligne avant l'ouverture de l'interrupteur?
- Obtenez un graphique de la tension et du courant en fonction de la position sur la ligne à l'instant $t = 5 \mu\text{s}$.
- Utilisez un diagramme de rebonds et produisez un graphique des formes d'onde de tension en fonction du temps à $s = 0$ et à $s = 5 \text{ km}$, pendant l'intervalle $0 < t < 40 \mu\text{s}$.
- Donnez les expressions de $v(s, t)$ et $i(s, t)$ à un temps très long après l'ouverture de l'interrupteur ($t \rightarrow \infty$).

Solution

- Le premier segment, a un délai de $10 \mu\text{s}$ et une longueur de 2 km. La vitesse de propagation dans la ligne sera donc:

$$u = \frac{2 \text{ km}}{10 \mu\text{s}} = 2 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (31)$$

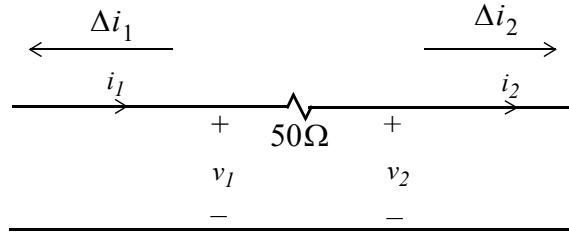
Or, d'après la théorie des lignes de transmissions sans perte on a $u = 1/(\sqrt{LC})$ et $Z_0 = \sqrt{L/C}$. On en tire $uZ_0 = 1/C$ et finalement $C = 50 \text{ pF/m}$. Substituant ce résultat dans l'une ou l'autre des deux équations, on trouve $L = 500 \text{ nH/m}$.

b. Pour $t < 0$, le circuit équivalent est:



Donc, $i = 20\text{V}/50\Omega = 0,4\text{ A}$ et $v = 20\text{V}$.

c. À l'instant $t = 0^+$, on a de nouveaux courants et tensions de part et d'autres de la résistance de $50\ \Omega$. On suppose qu'un signal Δi_1 est émis vers la gauche et qu'un signal Δi_2 est émis vers la droite.



Attention! Les flèches au-dessus du circuit indiquent la direction de propagation des ondes et non le sens du courant. Le sens du courant dans le fil supérieur est défini positif vers la droite.

Par superposition nous obtenons: $i_1 = i_0 + \Delta i_1$, $i_2 = i_0 + \Delta i_2$ et $i_0 = 0,4\text{A}$ (état initial).

Selon la loi des noeuds $i_1 = i_2$. Cela implique que $\Delta i_1 = \Delta i_2 = \Delta i$. De même, $v_1 = v_0 + \Delta v_1$, $v_2 = v_0 + \Delta v_2$ avec $v_0 = 20\text{ V}$. Et, puisque $Z_0 = 100\Omega$, nous avons que $\Delta v_1 = -100\Delta i$ et $\Delta v_2 = 100\Delta i$.

La loi d'Ohm sur la résistance de $50\ \Omega$ donne: $v_1 - v_2 = 50i = 50(i_0 + \Delta i)$, i.e.

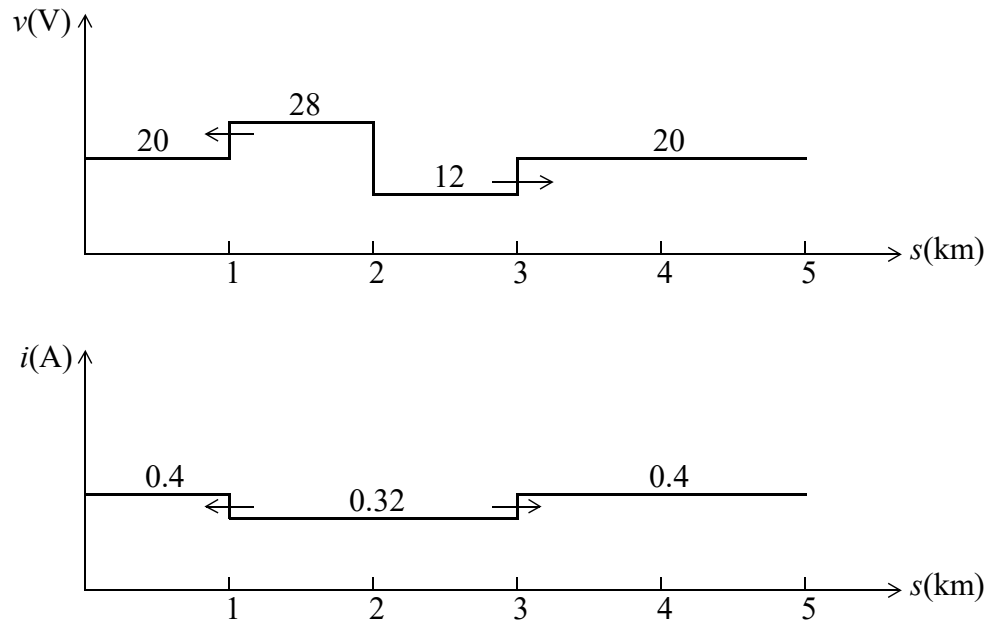
$$(v_0 + \Delta v_1) - (v_0 + \Delta v_2) = 50(0,4 + \Delta i) \quad (32)$$

En remplaçant v_0 par sa valeur et Δv_1 , Δv_2 par $-100\Delta i$ et $+100\Delta i$ respectivement, on trouve:

$$(20 - 100\Delta i) - (20 + 100\Delta i) = 20 + 50\Delta i \quad (33)$$

d'où l'on peut obtenir $\Delta i = -80 \text{ mA}$. Il en découle que $v_1 = 20 \text{ V} - (100 \times \Delta i) = 28 \text{ V}$, $\Delta v_1 = 8 \text{ V}$, $v_2 = 20 + (100 \times \Delta i) = 12 \text{ V}$; $\Delta v_2 = -8 \text{ V}$ et finalement $i = 0,4 \text{ A} + \Delta i = 0,32 \text{ A}$.

Après $5 \mu\text{s}$, le signal ne s'est propagé que sur 1 km dans les deux directions. La tension initiale de 20 volts est donc perturbée de +8V et -8V sur 1 km, de part et d'autre de l'interrupteur. De même, le courant initial de 0,4A est réduit de 80mA sur 1 km de part et d'autre de l'interrupteur.

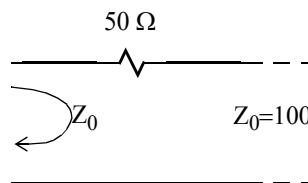


d. Calculons d'abord les coefficients de réflexion au générateur et à la charge,

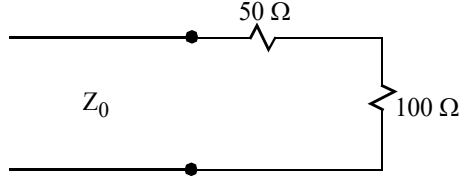
$$\Gamma_g = (R_g - Z_0)/(R_g + Z_0) \text{ avec } R_g = 0, \Gamma_g = -1.$$

$$\Gamma_L = (R_L - Z_0)/(R_L + Z_0) = (50 - 100)/(50 + 100) = -1/3.$$

Pour le coefficient de réflexion de la jonction à $s = 2 \text{ km}$ on considère le circuit suivant:

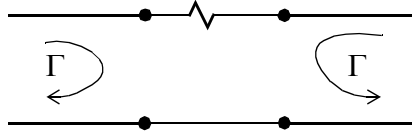


lequel est équivalent à:

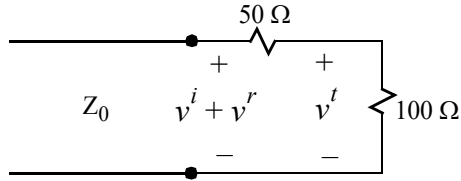


On en déduit donc que $\Gamma = (150 - Z_0)/(150 + Z_0) = 1/5$.

Par symétrie, le coefficient de réflexion sera le même du côté gauche et du côté droit de la jonction.



Pour calculer le coefficient de transmission, considérons le circuit équivalent suivant.:



On remarque qu'il s'agit d'un diviseur de tension, pour lequel nous avons:

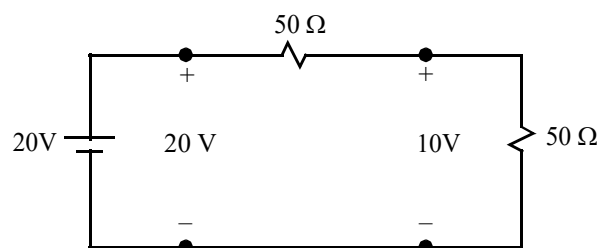
$$v^t = (v^i + v^r) \frac{100\Omega}{100\Omega + 50\Omega} = \frac{2}{3}v^i(1 + \Gamma), \quad (34)$$

d'où nous pouvons tirer que $T \equiv \frac{v^t}{v^i} = \frac{2}{3}(1 + \Gamma) = \frac{4}{5}$.

Évidemment, le coefficient de transmission est le même dans les deux sens, par symétrie.

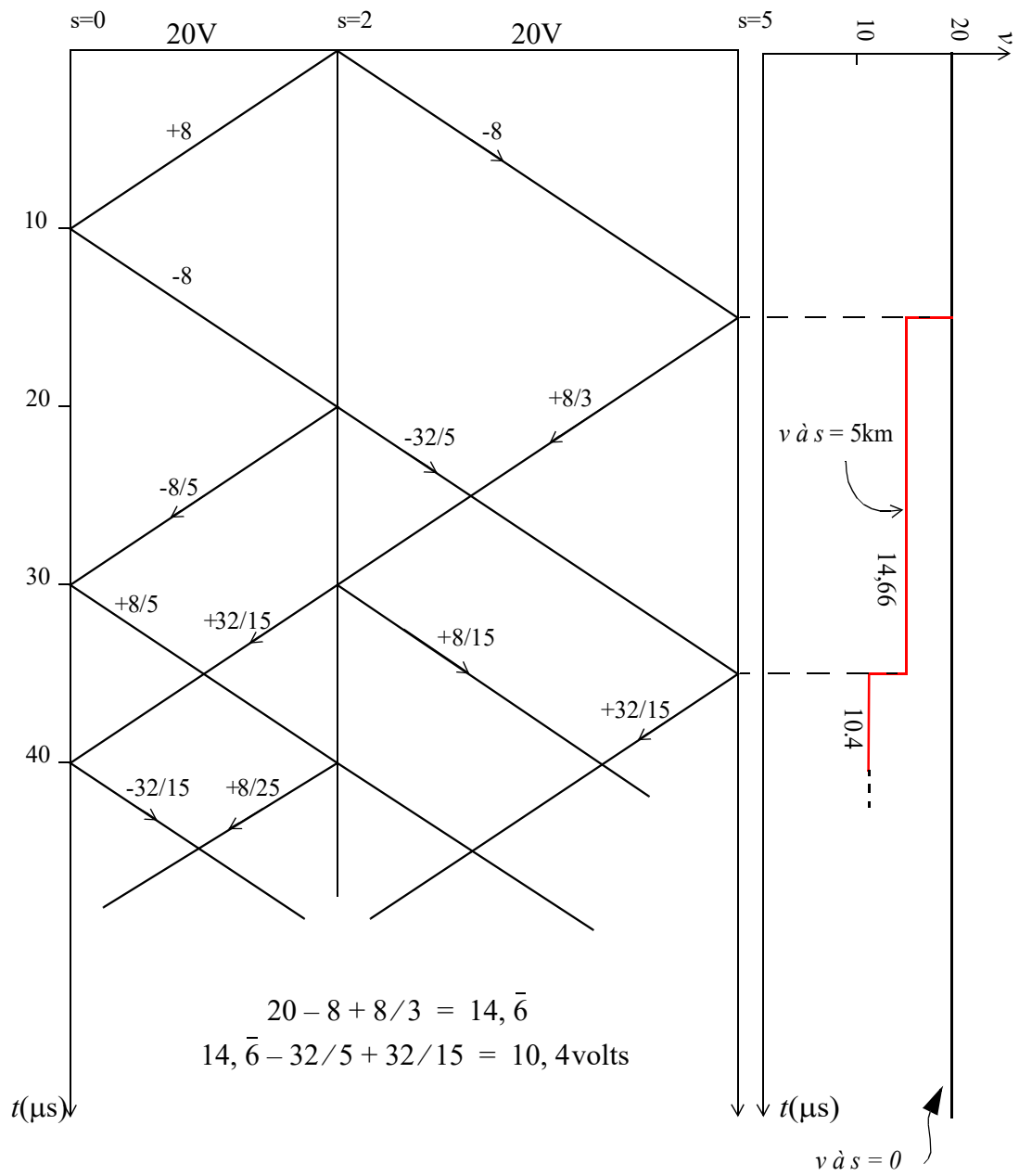
Ces coefficients sont utilisés pour tracer le diagramme de rebonds qui suit.

e. Si $t \rightarrow \infty$, le circuit devient:



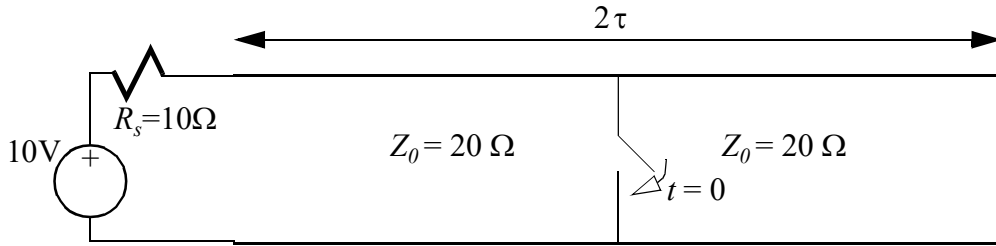
Donc $i = 20 \text{ V} / 100\Omega = 200 \text{ mA}$, et $v(s, \infty) = \begin{cases} 20\text{V}, & 0 \leq s < 2\text{km} \\ 10\text{V}, & 2\text{km} < s \leq 5\text{km} \end{cases}$.

$i(s, \infty) = 200\text{mA}$ pour $0 \leq s \leq 5\text{km}$.



Problème 1.5 Régime transitoire, connexion tandem

Dans le circuit suivant, l'interrupteur se ferme à $t = 0$. La ligne est sans pertes et le temps de propagation d'un bout à l'autre de la ligne est 2τ . L'interrupteur est situé en plein centre de la ligne.



- Démontrez qu'à partir du moment où l'interrupteur se ferme, le coefficient de transmission T d'un côté à l'autre de l'interrupteur est nul.
- Tracez un graphique de la tension en fonction du temps à l'extrémité droite de la ligne pendant l'intervalle $0 \leq t \leq 6\tau$.
- Obtenez un graphique du courant débité par la source de Thévenin pendant ce même intervalle. Spécifiez aussi la tendance du courant après un temps très long.

Solution

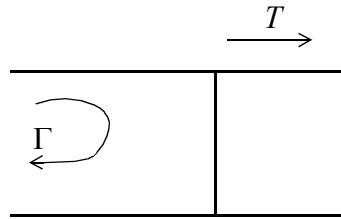
- Si l'on considère la jonction après la fermeture de l'interrupteur avec un signal v^i incident du côté gauche, on a que la tension du côté gauche vaut $v_g = v^i + v^r$. À droite de la jonction nous avons $v_d = v^t$. Puisque $v_d = v_g = 0$ à cause du court circuit, il en découle que:

$$\frac{v^i}{v^i} + \frac{v^r}{v^i} = \frac{v^t}{v^i} = 0 \quad (35)$$

D'où

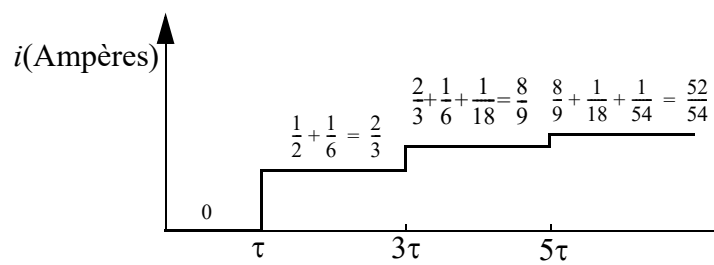
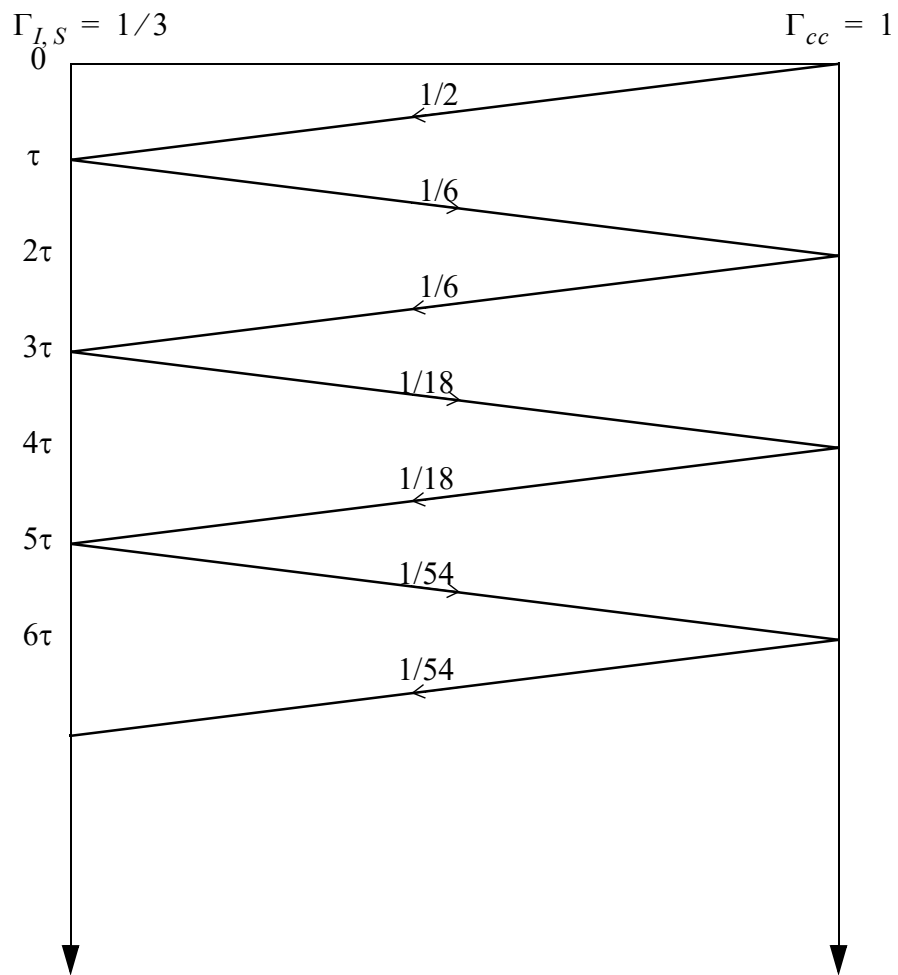
$$1 + \Gamma = T = 0 \quad (36)$$

En conséquence, nous avons $\Gamma = -1$. Si l'onde incidente vient de la gauche le résultat sera le même car la structure est symétrique.



b.

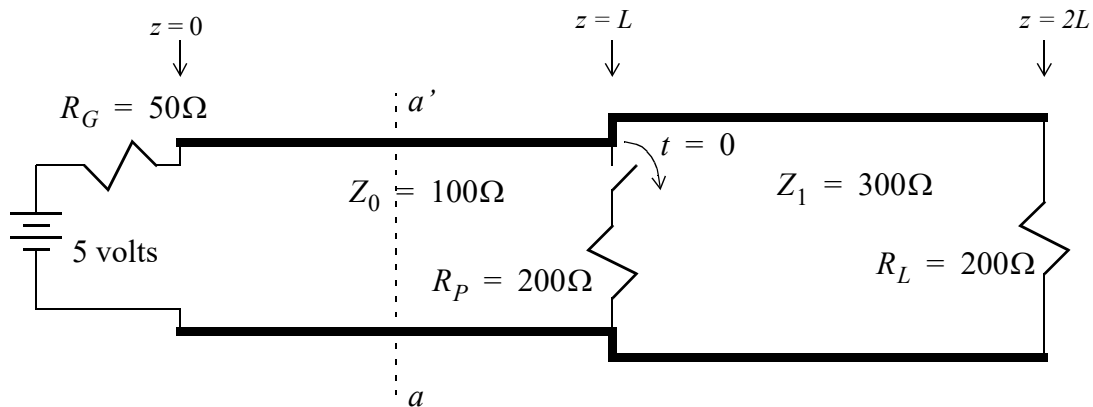
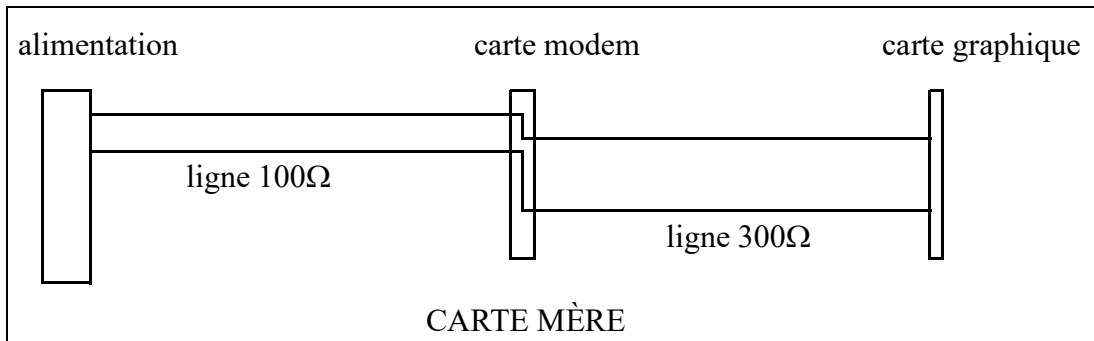
On utilise d'abord un diagramme de rebonds. Pour $t < 0$, nous avons que $v = 10$ volts sur toute la ligne. Puisque $T = 0$ à la jonction, il est inutile de considérer la moitié gauche du circuit car on peut considérer que les deux moitiés sont isolées. Lorsque l'interrupteur se ferme, la tension passe "instantanément" de 10 volts à 0 volt. Il y a donc un signal de -10 volts émis dans les deux directions à partir de l'interrupteur. Ceci est illustré sur le diagramme de rebonds, de même que les réflexions sur l'extrémité droite en circuit ouvert et sur la jonction en court circuit.



après un temps très long, le courant tend vers $10\text{V}/10\Omega = 1$ ampère .

Problème 1.6 Régime transitoire, connexion tandem

On se propose de débrancher une carte modem dans un ordinateur personnel, mais sans éteindre l'alimentation de l'ordinateur. On désire connaître les conséquences de ce débranchement sur les surtensions causées au circuit d'alimentation continue 5 volts sur la carte mère de l'ordinateur. Ce circuit est constitué d'une ligne imprimée dont l'impédance caractéristique varie abruptement de 100Ω à 300Ω . Le débranchement de la carte d'effectue à $t = 0$. Un dessin de la carte et un circuit équivalent sont représentés dans les figures suivantes.



Les deux bouts de ligne de transmission ont la même longueur (L). La propagation sur la ligne de 300Ω est 50% plus rapide que sur la ligne de 100Ω . Le délai sur la ligne de 100Ω est de τ_0 . Au moment du débranchement, il y a déjà une carte graphique dans l'ordinateur ayant une impédance de 200Ω . La carte modem retirée représente aussi une charge équivalente de 200Ω . Afin d'analyser l'effet du débranchement, on demande:

- de faire un diagramme de rebonds pour la tension pour l'intervalle $-\infty < t < 4\tau_0$;

- b. en déduire le signal $v(t)$ dans le plan aa' situé au milieu du premier segment de ligne;
- c. déterminer la tension finale sur le circuit, ainsi que le niveau de tension maximal créé sur la carte graphique après le débranchement de la carte modem.

Solution

- a. Avant de construire le diagramme de rebonds, il convient de définir et calculer quelques paramètres importants. On posera d'abord que la source de 5 volts, la carte modem et la carte graphique sont respectivement localisées à $z = 0$, $z = L$ et $z = 2L$. Puisque le délai sur la ligne de 100Ω est de τ_0 et que $u_1/u_0 = 3/2$, on aura un délai de $\tau_1 = 2\tau_0/3$ sur la ligne de 300Ω . Le coefficient de réflexion d'une onde arrivant sur la source sera de:

$$\Gamma_G = \frac{R_G - Z_0}{R_G + Z_0} = \frac{50 - 100\Omega}{50 + 100\Omega} = -1/3 \quad (38)$$

alors que le coefficient de réflexion sur la carte graphique au bout de la ligne sera de:

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_1}{R_L + Z_1} = \frac{200 - 300\Omega}{200 + 300\Omega} = -1/5 \quad (39)$$

Une onde se propageant vers la droite sur la ligne de 100Ω et arrivant à la jonction des deux lignes verra l'impédance caractéristique Z_1 . Les coefficients de réflexion et de transmission à cette jonction subits par cette onde seront donc:

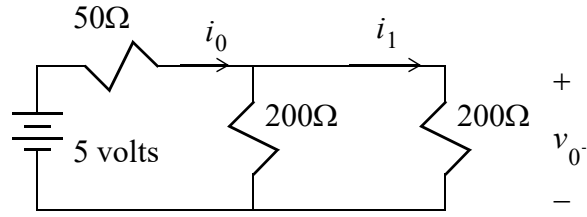
$$\Gamma_{00} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = 1/2 \quad T_{10} = 1 + \Gamma_{00} = 3/2 \quad (40)$$

À l'inverse, un signal se propageant vers la gauche sur la ligne d'impédance Z_1 sera réfléchi et transmis à cette jonction avec les coefficients:

$$\Gamma_{11} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_1 + Z_0} = -1/2 \quad T_{01} = 1 + \Gamma_{11} = 1/2 \quad (41)$$

Il nous sera maintenant possible de calculer la valeur de tous les signaux réfléchis/transmis dans le diagramme de rebonds. Par contre, il faut d'abord calculer la valeur des ondes incidentes lancées dans le circuit lors du débranchement de la carte modem. La tension dans tout le circuit pour $t < 0$ peut être obtenue en considérant le circuit avec des lignes de

transmission de longueurs nulles.



Les deux charges forment une résistance équivalente de 100Ω . La tension v_{0-} est donc de $5 \text{ volts} \times 100/150 = 3.33 \text{ volts}$. On en tire que les courants i_0 et i_1 sont respectivement de $33,3 \text{ mA}$ et $16,6 \text{ mA}$. Immédiatement après que la carte soit retirée à $t = 0^+$, nous avons à gauche et à droite de la jonction:

$$\begin{aligned}
 \text{à gauche } v(z = L^-) &= v_{0-} + \Delta v_0 & \Delta v_0 &= -Z_0 \Delta i_0 \\
 \text{à droite } v(z = L^+) &= v_{0-} + \Delta v_1 & \Delta v_1 &= Z_1 \Delta i_1 \\
 \text{à droite } i(z = L^+) &= 16.6 \text{ mA} + \Delta i_1 \\
 \text{à gauche } i(z = L^-) &= 33.3 \text{ mA} + \Delta i_0
 \end{aligned} \tag{42}$$

Les Δv et Δi sont les ondes de tension et de courant initiales émises sur les deux segments de ligne lors du retrait de la carte. Les conditions frontières à la jonction des deux segments pour $t > 0$ sont:

$$\begin{aligned}
 v(L^+) &= v(L^-) \\
 i(L^+) &= i(L^-)
 \end{aligned} \tag{43}$$

En combinant les quatre expressions de l'équation (42) avec la première condition frontière de (43), on arrive à relier les ondes de courant initiales des deux côtés de la jonction, soit:

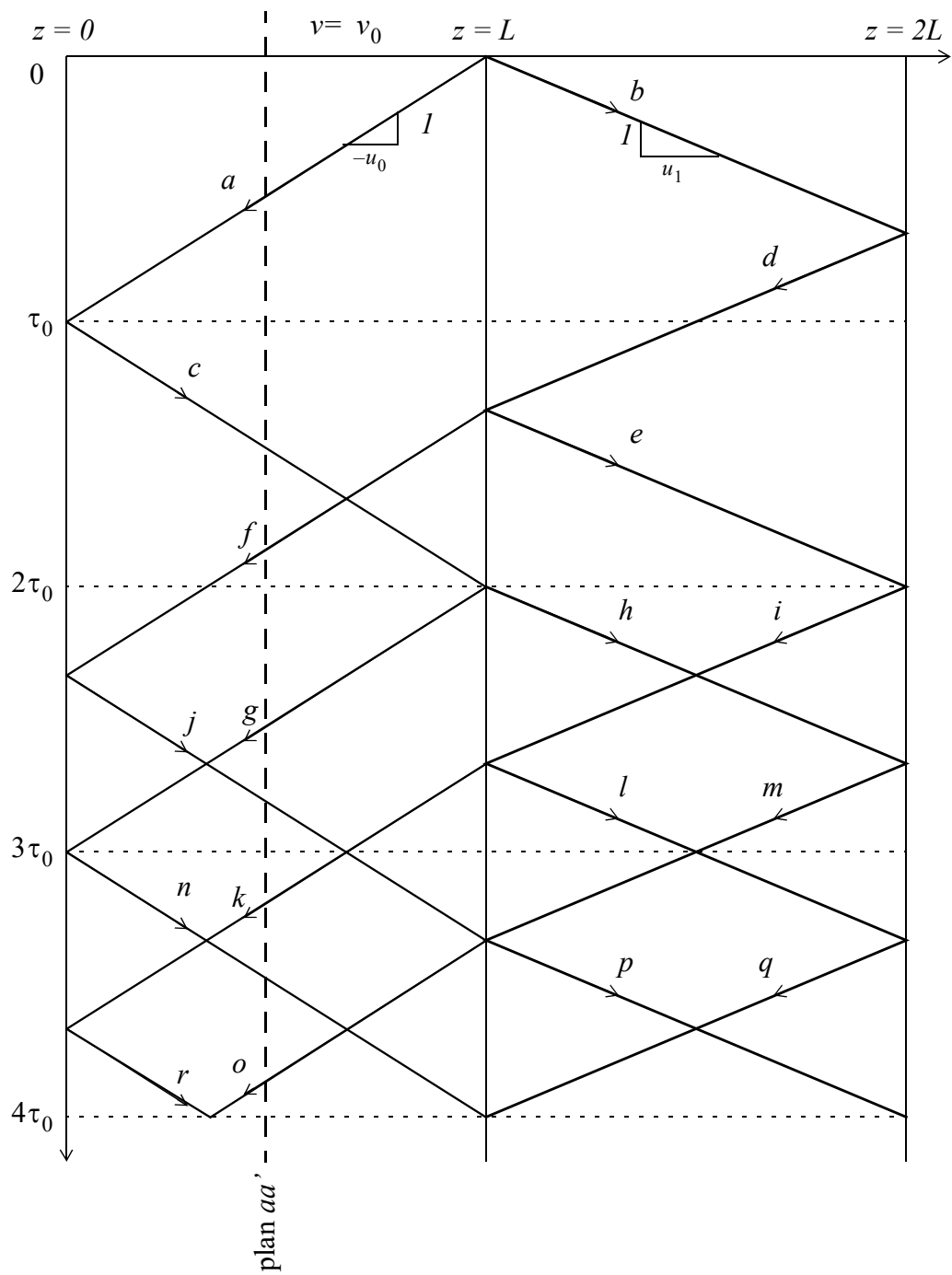
$$\Delta i_0 = -\frac{Z_1}{Z_0} \Delta i_1 = -3 \Delta i_1 \tag{44}$$

Puis, avec la deuxième condition frontière de (43) on trouve:

$$16.6 \text{ mA} + \Delta i_1 = 33.3 \text{ mA} - \frac{Z_1}{Z_0} \Delta i_1 \quad (45)$$

d'où l'on tire $\Delta i_1 = 4.16 \text{ mA}$ et $\Delta i_0 = -12.5 \text{ mA}$. Ceci conduit aussi aux égalités:

$i(L^+) = i(L^-) = 20.83 \text{ mA}$ et $\Delta v_0 = \Delta v_1 = 1.25 \text{ volt}$. On est maintenant prêt à tracer le diagramme de rebonds. Il suffit, en débutant par des flèches émanant de la jonction, de tracer des flèches ayant une pente de $\Delta z / \Delta t = \pm L / \tau_0 = \pm u_0$ sur la ligne de 100Ω et une pente de $\Delta z / \Delta t = \pm 3L / 2\tau_0 = \pm u_1$ sur la ligne de 300Ω . Ce processus est illustré à la page suivante.



Chaque signal est représenté par une flèche dont les valeurs peuvent être calculées avec les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
 a &= \Delta v_0 = 1.25 \text{ volt} \\
 b &= \Delta v_1 \\
 c &= \Delta v_0 \Gamma_G = -0.4166 \text{ volt} \\
 d &= \Delta v_1 \Gamma_L \\
 e &= \Delta v_1 \Gamma_L \Gamma_{11} \\
 f &= \Delta v_1 \Gamma_L T_{01} = -0.125 \text{ volt} \\
 g &= \Delta v_0 \Gamma_G \Gamma_{00} = -0.2083 \text{ volt} \\
 h &= \Delta v_0 \Gamma_G T_{10} \\
 i &= \Delta v_1 \Gamma_L^2 \Gamma_{11} \\
 j &= \Delta v_1 \Gamma_L T_{01} \Gamma_G = 0.0416 \text{ volt} \\
 k &= \Delta v_1 \Gamma_L^2 \Gamma_{11} T_{01} = -0.0125 \text{ volt} \\
 l &= \Delta v_1 \Gamma_L^2 \Gamma_{11}^2 \\
 m &= \Delta v_0 \Gamma_G T_{10} \Gamma_L \\
 n &= \Delta v_0 \Gamma_G^2 \Gamma_{00} = 0.0694 \text{ volt} \\
 o &= \Delta v_0 \Gamma_G T_{10} \Gamma_L T_{01} + \Delta v_1 \Gamma_L T_{01} \Gamma_G \Gamma_{00} = 0.0833 \text{ volt} \\
 p &= \Delta v_0 \Gamma_G T_{10} \Gamma_L \Gamma_{11} + \Delta v_1 \Gamma_L T_{01} \Gamma_G T_{10} \\
 q &= \Delta v_1 \Gamma_L^3 \Gamma_{11}^2 \\
 r &= \Delta v_1 \Gamma_L^2 \Gamma_{11} T_{01} \Gamma_G
 \end{aligned}$$

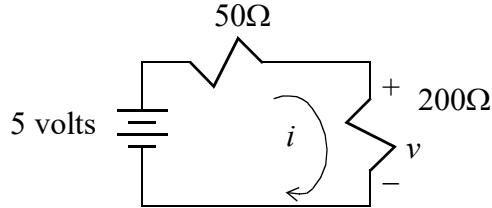
b. Afin d'obtenir une réponse temporelle, il suffit de tracer un axe du temps coupant l'axe z à la position désirée. Dans le cas du plan aa' , on trace cet axe à $z = L/2$ (voir le diagramme). Pour chaque valeur de t où cet axe croise une flèche du diagramme de rebonds, on ajoute la valeur du signal correspondant à la tension accumulée. Il ne faut pas oublier d'inclure la tension initiale v_{0-} prévalant avant le retrait de la carte modem.

En se servant des valeurs déjà calculées à la partie a, on obtient les résultats dans le tableau suivant. La première colonne indique la valeur de t à partir de laquelle il faut

inclure la contribution de chaque signal. Ces valeurs peuvent être lues directement sur le diagramme de rebonds, à condition qu'il soit dessiné avec suffisamment de précision. La deuxième colonne indique la valeur de la tension accumulée.

$-\infty$	$v_{0^-} = 3.33$ volts
$\tau_0/2$	$3.33 + a = 4.583$ volts
$3(\tau_0/2)$	$4.583 + c = 4.166$ volts
$11\tau_0/6$	$4.166 + f = 4.042$ volts
$5\tau_0/2$	$4.042 + g = 3.833$ volts
$17\tau_0/6$	$3.833 + j = 3.875$ volts
$19\tau_0/6$	$3.875 + k = 3.862$ volts
$7\tau_0/2$	$3.862 + n = 3.932$ volts
$23\tau_0/6$	$3.932 + o = 4.0153$ volts

- c. Pour obtenir la tension finale sur le circuit, il suffit de considérer le même circuit mais dans lequel les lignes de transmission ont été retirées.



La tension finale sera de $5 \text{ volts} \times 200/250 = 4 \text{ volts}$.

Afin de déterminer le niveau de surtension sur la carte graphique, il suffit de se servir du diagramme de rebonds à $z = 2L$. Dans l'intervalle $2\tau_0/3 < t < 2\tau_0$ nous pouvons voir que:

$$\begin{aligned}
 v(z = 2L) &= 3.33 + \Delta v_1 + \Delta v_1 \Gamma_L \\
 &= 3.33 + 1.25(1 - 0.2) = 4.33 \text{ volts}
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

On peut vérifier que les tensions subséquentes seront inférieures. Dans ces conditions, une valeur de 4.33 volts ne sera pas critique et il n'y aura probablement pas de dommages causés à la carte graphique. Ceci n'aurait peut-être pas été le cas si l'impédance du deuxième bout de ligne avait été plus élevé. En pratique, il y a généralement des composants de pro-

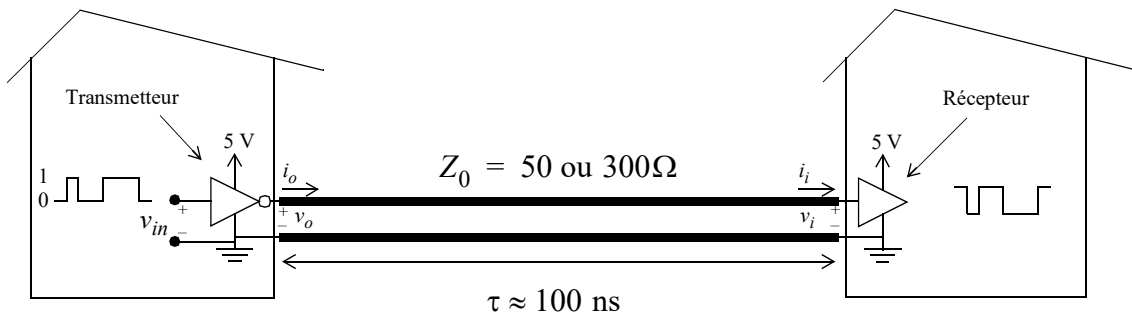
tection (e.g. diodes de verrouillage, régulateurs de tension,...) installés aux portes d'entrée des dispositifs électroniques. Ces composants jouent aussi, jusqu'à un certain point, un rôle de protection contre les surtensions créées par les décharges électrostatiques.

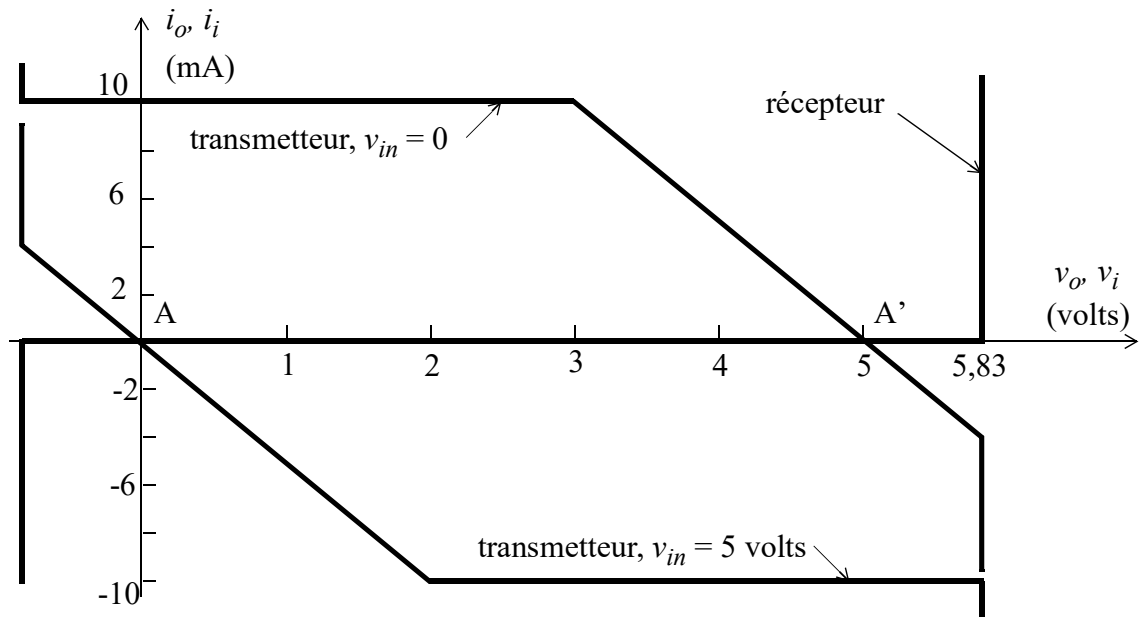
Problème 1.7 Régime transitoire, source et charge non-linéaires

Vous devez établir un lien de communication entre deux circuits numériques situés dans des édifices voisins. À cette fin, vous avez à votre disposition de la ligne de transmission bi-filaire de 300Ω , d'utilisation courante dans les installations d'antennes de réception de télévision, ainsi que du câble coaxial standard ayant une impédance caractéristique de 50Ω . On négligera les pertes dans ces lignes. Dans chaque type de ligne, on sait que le délai de propagation d'un édifice à l'autre sera de 100 nanosecondes (ns) environ. Le temps de commutation interne des composants électroniques utilisés est d'environ 5 nanosecondes. Compte tenu:

- des caractéristiques courant-tension des dispositifs électroniques utilisés;
- d'un seuil de transition logique de 0 à 1, et de 1 à 0, se situant près de 2,5 volts à l'entrée du circuit récepteur;
- de la définition des niveaux logiques 0 et 1 de 0 volt et 5 volts respectivement;

déterminer lequel des deux types de lignes fera en sorte que la liaison sera moins sensible aux bruits générés à l'entrée du récepteurpermettra un taux de transfert de données plus rapide.





Caractéristiques tension–courant à l’entrée du récepteur et à la sortie du transmetteur

Solution

Pour répondre à cette question, il faudra d’abord estimer la forme de l’onde de tension à l’entrée du récepteur. Afin de simplifier l’analyse, et puisque les temps de commutation (5 ns) sont beaucoup plus courts que le temps de propagation (100 ns), on supposera d’abord que les transitions sont instantanées dans les composants électroniques. Aussi, étant donné la symétrie des caractéristiques du récepteur et du transmetteur par rapport au seuil de 2,5 volts, il suffira d’examiner qu’un seul type de transition (0 à 1, ou 1 à 0).

Lorsque v_{in} est dans l’état logique 1 (i.e. 5 volts) depuis très longtemps, le circuit atteint l’équilibre et l’intersection des caractéristiques du transmetteur et du récepteur donne $v_i = v_o = 0$ volt et $i_i = i_o = 0$ mA. Cet état est représenté par le point A dans la figure ci-dessus. Lorsque v_{in} passe de l’état logique 1 à l’état logique 0, la caractéristique du transmetteur change (voir figure) et donc le point A ne représente plus une solution du circuit non-linéaire. La nouvelle solution à l’équilibre sera donnée par le point A’ montré sur la figure. La transition de l’état A à l’état A’ s’effectuera par une suite de rebonds sur la ligne de transmission. Puisque le circuit est non-linéaire, on utilisera la méthode de Bergeron.

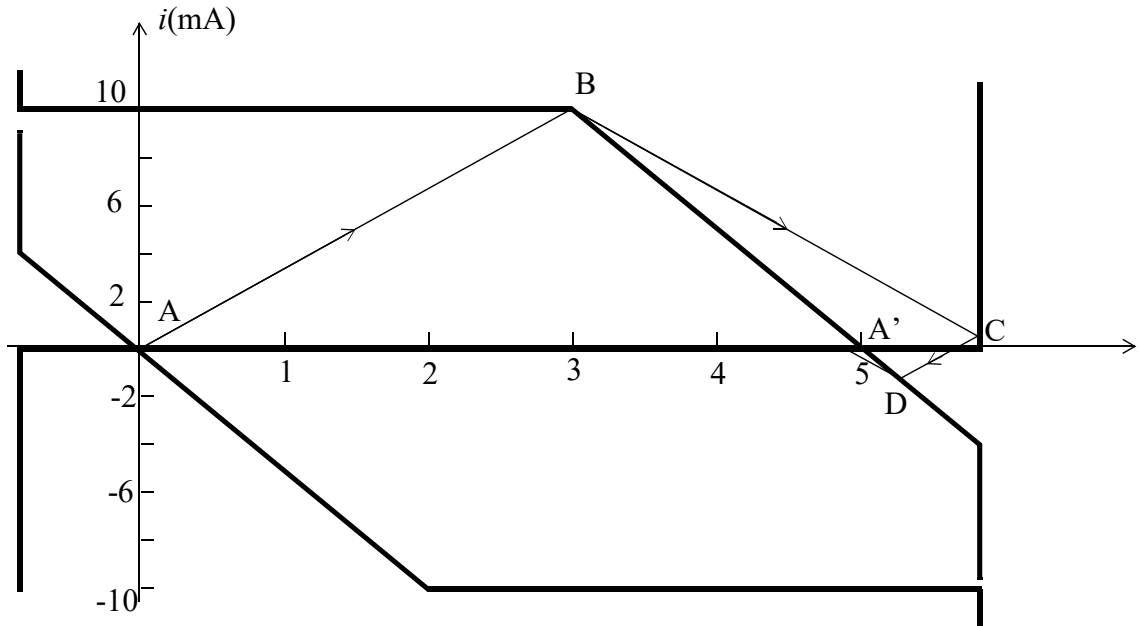
- Cas où $Z_0 = 300\Omega$

Immédiatement après la transition de v_{in} de l'état 1 à l'état 0, le point A n'est plus sur la caractéristique du transmetteur et donc celui-ci doit émettre une onde qui lui permette de se retrouver immédiatement sur sa nouvelle caractéristique tension-courant. Puisque $Z_0 = 300\Omega$, cette onde n'a d'autre choix que d'avoir un rapport $\Delta v_1/\Delta i_1 = 300\Omega$. En moins de 5 ns, la sortie du transmetteur se retrouve donc dans l'état B (voir figure suivante). Sur la figure, on peut lire qu'à $t = 0^+$, on aura $v_o = 3$ volts et $i_o = 10$ mA. Le récepteur étant à 100 ns de là, sa tension et son courant demeurent inchangées pour le moment.

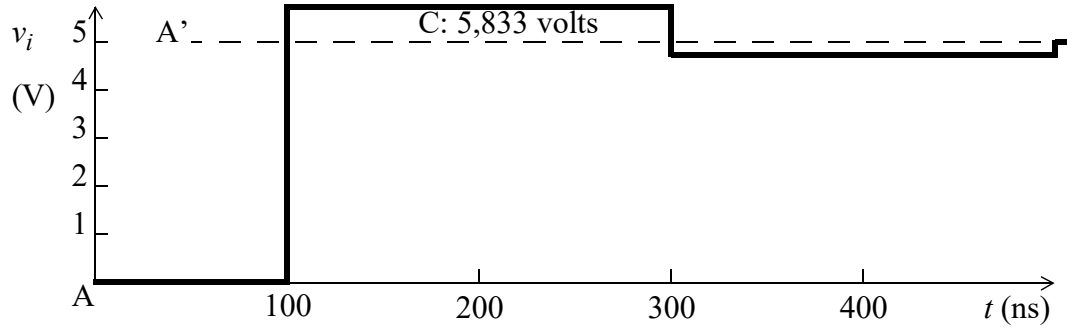
Après 100 ns, l'onde arrive au récepteur. Le point B n'étant pas sur la caractéristique du récepteur, celui-ci doit émettre une onde vers la gauche. Cette onde doit avoir comme caractéristique $\Delta v_2/\Delta i_2 = -300\Omega$. Graphiquement, cette onde ramène la tension et le courant de l'état B à l'état C qui doit se trouver sur la caractéristique du récepteur. Donc, à $t = 100$ ns nous pouvons lire sur le graphique:

$$\begin{array}{ll} \text{Sortie du transmetteur (Point A): } v_o = 3 \text{ volts} & i_o = 10 \text{ mA} \\ \text{Entrée du récepteur (Point C): } v_i = 5,83 \text{ volts} & i_i = 0,55 \text{ mA} \end{array} \quad (47)$$

Le processus se continue ainsi avec des $\Delta v/\Delta i$ de $\pm 300\Omega$, jusqu'à l'atteinte de l'état d'équilibre (point A') ayant $v_0 = v_i = 5$ volts et $i_o = i_i = 0$ mA.



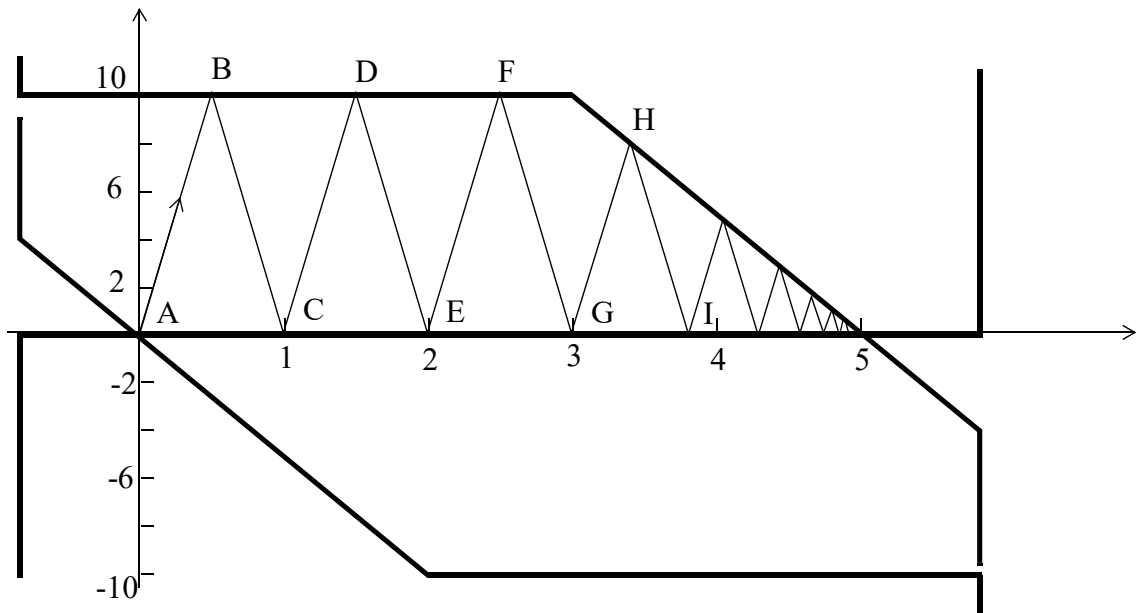
La forme de l'onde de tension à l'entrée du récepteur aura donc approximativement la forme suivante.



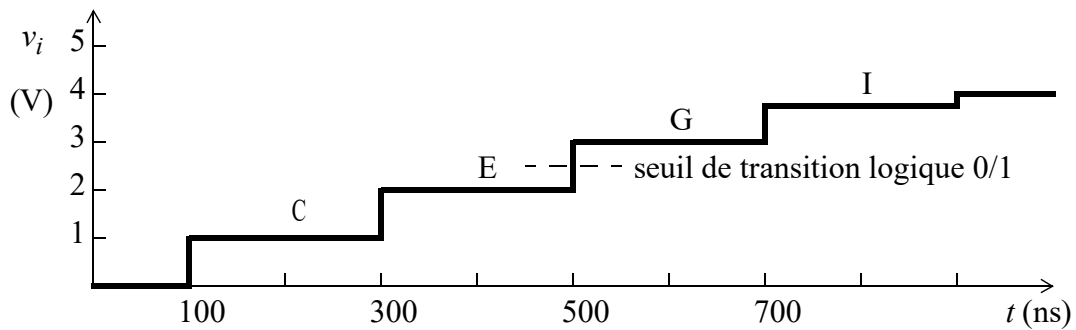
Cas où $Z_0 = 50\Omega$

Le processus de solution est exactement le même que précédemment, sauf que les ondes émanant du transmetteur auront un $\Delta v / \Delta i = 50\Omega$ et celles provenant du récepteur auront un $\Delta v / \Delta i = -50\Omega$. La séquence des rebonds est illustrée à la figure suivante. On en déduit les tensions et courants approximatifs sur le circuit:

temps (ns)	tension (volts)	courant (mA)	point
$t < 0$	$v_i = v_o = 0$	$i_i = i_o = 0$	A
$t = 0^+$	$v_o = 0,5$	$i_o = 10$	B
$t = 100^+$	$v_i = 1$	$i_i = 0$	C
$t = 200^+$	$v_o = 1,5$	$i_o = 10$	D
$t = 300^+$	$v_i = 2$	$i_i = 0$	E
$t = 400^+$	$v_o = 2,5$	$i_o = 10$	F
$t = 500^+$	$v_i = 3$	$i_i = 0$	G
$t = 600^+$	$v_o = 3,4$	$i_o = 7,8$	H
$t = 700^+$	$v_i = 3,75$	$i_i = 0$	I



La tension à l'entrée du récepteur aura donc approximativement la forme suivante:



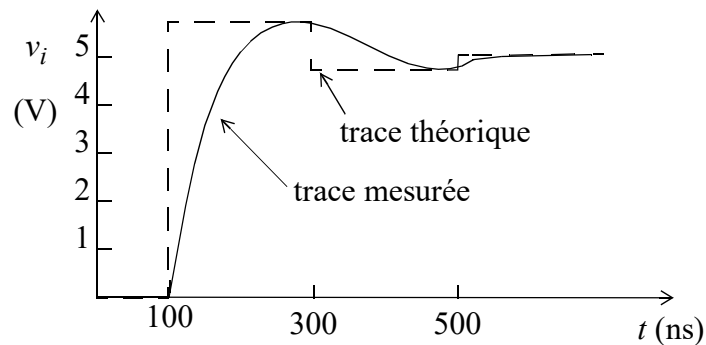
Dans le cas de la ligne 300Ω , le changement d'état logique ($v_i > 2,5$ volts) à l'entrée du récepteur s'effectue après environ 100 ns, soit dès l'arrivée de l'onde initiale. Dans le cas de la ligne 50Ω , le délai de transition au récepteur est de 500 ns, la ligne constituant une charge de trop faible impédance pour le transmetteur. Dans ces conditions, le premier cas permettra donc un plus grand débit de données, puisqu'il n'est limité que par le temps de transition interne des dispositifs électroniques, le signal passant "d'un seul coup" de 0 à 5,8 volts et demeurant par la suite autour de 5 volts (état 1). Au contraire, dans le second cas nous avons que $|v_{in} - 2.5 \text{ volts}| = 0.5 \text{ volt}$ pendant tout l'intervalle $300 \text{ ns} < t < 700 \text{ ns}$. Pendant cet intervalle de 400 ns, toute interférence d'amplitude supérieure à 0,5 volt serait susceptible de faire passer le signal v_i d'un état logique à l'autre et ainsi induire des fausses de données logiques à l'entrée du récepteur. Pour

amoindrir ce problème, on peut utiliser un récepteur à effet d'hystérésis dont le seuil de tension pour une transition logique 0 à 1 est plus élevé que pour une transition 1 à 0 (communément appelé “trigger” de Schmitt). Cependant, cette meilleure immunité à l'interférence se fera au détriment d'un plus long passage d'un état logique à l'autre, ce qui diminuera encore plus le taux de transfert de données.

Remarques

Pour déterminer le taux maximum de transfert de données de façon quantitative, il faudrait considérer plusieurs transitions successives de v_{in} . Ce type d'analyse est possible avec la plupart des simulateurs de circuits. Par contre la méthode de Bergeron suppose que le circuit est dans un état stable lorsque la transition est amorcée. Il ne serait donc pas possible d'analyser le cas de plusieurs transitions successives rapprochées dans le temps avec cette technique.

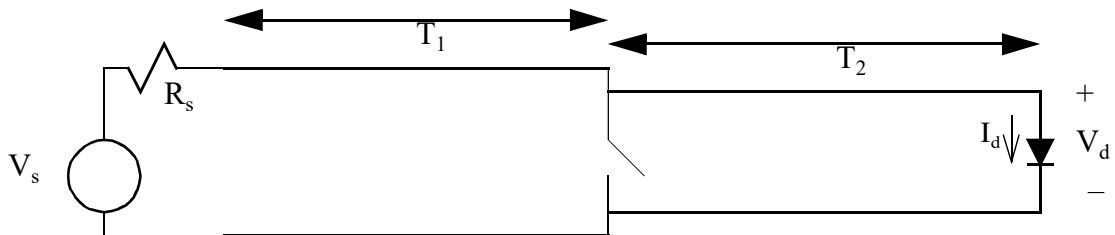
Les tracés de v_i versus t que nous avons obtenus ont des transitions de tension instantanées. En pratique des effets capacitifs dans les composants électroniques et leurs boîtiers sont présents et introduisent des constantes de temps “RC” dans les transitions. Les transitions auront donc en pratique les “transitions douces”, tel qu'illustré ci-dessous pour le cas de la ligne 300Ω.



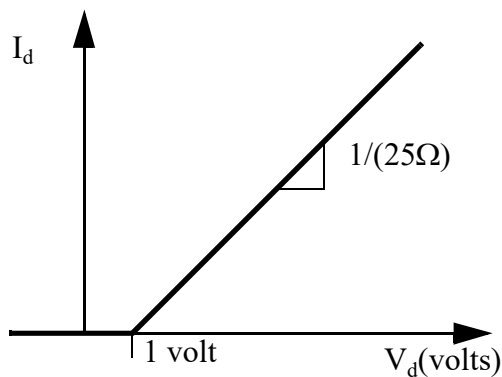
Problème 1.8 Régime transitoire, connexion tandem, charge non-linéaire

Un circuit est formé de deux sections de ligne de transmission sans pertes. Le délai de propagation sur la première section est de T_1 et le délai sur la deuxième section est de T_2 . Les paramètres linéiques sur chacune des lignes sont:

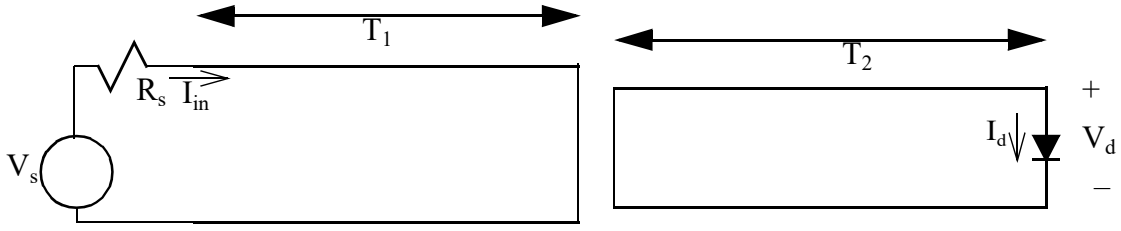
L_1	334 nH/m
L_2	167 nH/m
C_1	33,4 pF/m
C_2	66,8 pF/m



La tension V_s est de 10 volts, la valeur de la résistance R_s est de 166Ω . L'interrupteur se ferme à $t = 0$. La caractéristique courant-tension de la diode est illustrée ci-dessous.



Après la fermeture de l'interrupteur, le circuit peut être traité comme deux circuits séparés avec des conditions frontières appropriées, tel que montré à la page suivante (voir Problème 1.5).



- a. Obtenez la forme d'onde $I_{in}(t)$ à l'entrée de la première ligne dans l'intervalle $0 < t < 6T_1$ à l'aide d'un diagramme de rebonds. Obtenez la valeur du courant à l'équilibre après un temps très long.
- b. Obtenez la forme d'onde $V_d(t)$ sur la diode pendant l'intervalle $0 < t < 4T_2$ à l'aide de la méthode graphique de votre choix.

Solution

- a. L'impédance caractéristique de chaque ligne est obtenue par:

$$Z_1 = \sqrt{L_1/C_1} = 100 \, \Omega \quad Z_2 = \sqrt{L_2/C_2} = 50 \, \Omega \quad (48)$$

Le coefficient de réflexion de chaque côté de la jonction est de -1 . Le coefficient de réflexion sur la source de tension est de $\Gamma_s = (R_s - Z_1)/(R_s + Z_1) = 1/4$. Avant que l'interrupteur se ferme, la tension est considérée comme stable sur les deux lignes. Sa valeur peut être obtenue à partir de la droite de charge. Par contre, puisque la caractéristique de la diode est linéaire par morceaux, on peut aussi trouver la solution à l'aide d'équations linéaires, à condition de choisir le bon segment de la caractéristique. Puisque V_s est supérieure à la tension seuil de la diode qui est de 1 volt, il est évident que le courant circulera dans la diode et donc que le point solution se trouve sur le segment de la caractéristique représenté par l'expression:

$$V_d = 1 \text{ volt} + 25I_d \quad (49)$$

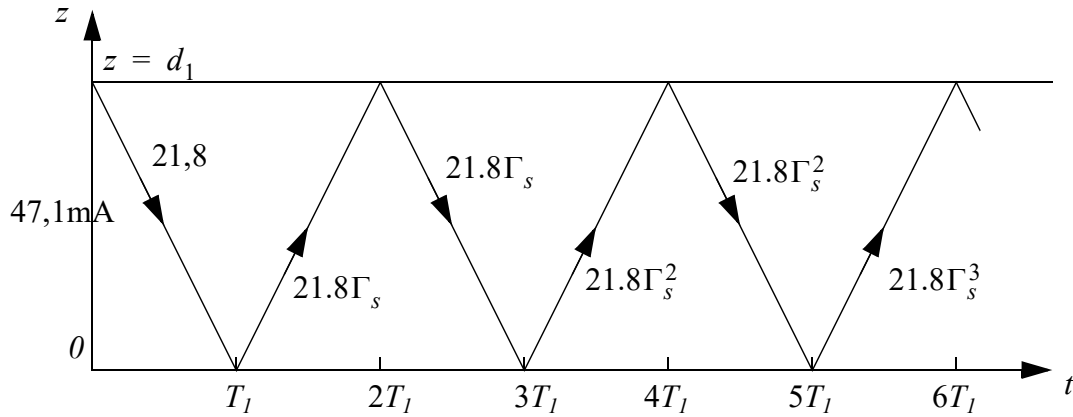
D'après la caractéristique de la source de tension, nous avons aussi que:

$$V_d = 10 \text{ volts} - R_s I_d \quad (50)$$

La solution de ces deux équations donne $I_d = 47.1 \text{ mA}$ et $V_d = 2.18 \text{ volts}$. À la fermeture de l'interrupteur, la tension à la jonction des deux lignes passe subitement de 2,18

volts à 0 volt. Autrement dit, il y a une onde de tension de $-2,18$ volts qui est lancée dans les deux circuits de part et d'autre de la jonction. À partir de ce moment les circuits se comportent aussi de façon indépendante.

Puisque nous nous intéressons à I_{in} , il est préférable d'utiliser les ondes de courant pour construire le diagramme de rebonds. Pour les **ondes de courant**, le coefficient de réflexion sur l'interrupteur fermé sera de $+1$ et le coefficient de réflexion sur la source de tension sera $\Gamma_s = -1/4$. L'onde de courant partant vers la gauche à la fermeture de l'interrupteur sera de $-(-2.18)/Z_1 = 21.8\text{mA}$. Dans la solution graphique, il ne faut pas oublier d'inclure le courant initial de $47,1\text{ mA}$ débité par la source.,

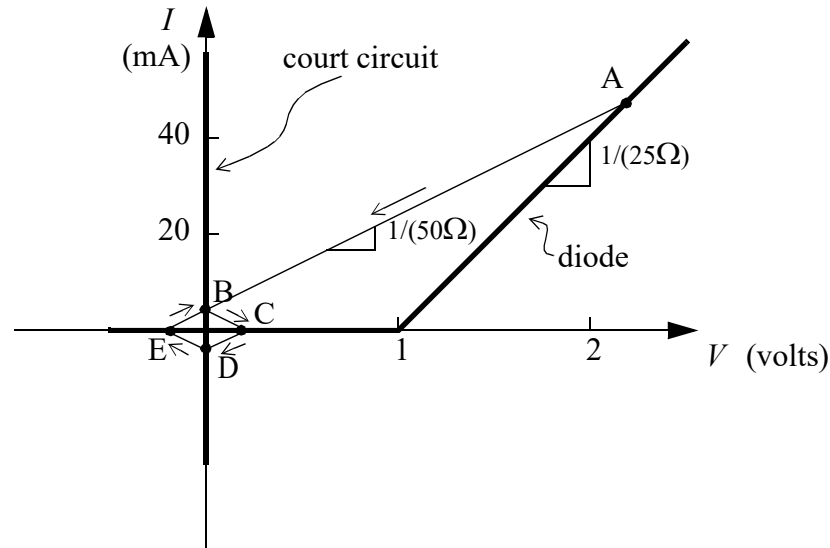


La lecture du courant I_{in} s'effectue le long de l'axe $z = 0$ sur le diagramme:

- pour $t < T_1$, I_{in} conserve sa valeur initiale de $47,1\text{ mA}$;
- pendant l'intervalle $T_1 < t < 3T_1$, I_{in} prend la valeur $(47.1 + 21.8 + 21.8\Gamma_s)\text{ mA} = 63,4\text{ mA}$;
- pendant l'intervalle $3T_1 < t < 5T_1$, le courant devient $(63.4 + 21.8\Gamma_s + 21.8\Gamma_s^2)\text{ mA} = 59,4\text{ mA}$;
- puis, pendant l'intervalle $5T_1 < t < 7T_1$ nous ajoutons les deux derniers termes ce qui mène à $(59.4 + 21.8\Gamma_s^2 + 21.8\Gamma_s^3)\text{ mA} = 60,4\text{ mA}$.

On peut voir d'après le circuit que le courant convergera éventuellement à la valeur de $10\text{ volts}/166\Omega = 60,24\text{ mA}$.

- b. La charge étant non-linéaire dans le circuit contenant la ligne 2, nous utiliserons la méthode graphique de Bergeron. La solution est illustrée ci-dessous.



Tout d'abord, il faut tracer la caractéristique courant-tension des dispositifs situés à chaque bout de la ligne lorsque l'interrupteur est fermé, c'est-à-dire la diode et le court circuit. Celui-ci est représenté par la droite $V = 0$. Avant la fermeture de l'interrupteur, l'état de la diode est représenté par le point A, soit 47,1 mA et 2,18 volts, que nous avons trouvé en a. À $t = 0$, la caractéristique de la source de tension "disparaît" et elle est remplacée par la caractéristique du court circuit. Il faut donc passer sans délai à un point se trouvant sur la caractéristique du court circuit (point B). Lors de ce passage, une onde ayant une impédance de 50Ω est émise vers la diode. Le passage du point A au point B s'effectue donc sur un segment de droite ayant une pente de $+1/(50\Omega)$. Lorsque cette onde arrive sur la diode, une onde réfléchie est produite afin de pouvoir passer sur la caractéristique de la diode (point C). Cette onde a une impédance de -50Ω , donc le segment de B à C aura une pente de $-1/(50\Omega)$. Le processus de réflexions multiples se continue vers le point D (extrémité court circuit) puis le point E (extrémité diode). Curieusement, la trajectoire retournera ensuite aux points B, C, D, E, ... et il y aura une oscillation jusqu'à l'infini. Ceci est dû au fait que ni la diode en état de non conduction, ni le court circuit, ne peuvent dissiper d'énergie. On pourrait faire l'analogie avec un circuit résonant LC ayant un facteur de qualité infini.

La réponse $V_d(t)$ peut être obtenue des résultats suivants tirés du graphique:

- pendant l'intervalle $t < T_2$ la diode est dans son état initial avec $V_d = 2.18$ volts (point A);
- à $t = T_2$, l'état de la diode devient le point C et on lit sur le graphique une valeur approximative de $V_d = 0.18$ volts ;
- à $t = 3T_2$ l'état de la diode passe au point E pour lequel on lit $V_d = -0.18$ volts ;
- par la suite, V_d oscillera entre 0,18 (C) et -0,18 (E) volt après chaque intervalle de $2T_2$. Quant à l'état du court circuit, il oscillera entre les points B et D.

Problème 1.9 Régime transitoire, dispersion

Une ligne de transmission utilisée pour propager des signaux téléphoniques sur de grandes distances a les caractéristiques linéiques suivantes:

$$L = 1 \mu\text{H/m}$$

$$R = 0,8 \Omega/\text{m}$$

$$C = 25 \text{ pf/m}$$

$$G = 15 \mu\text{S/m}$$

a. La ligne est excitée à $z = 0$ par une tension égale à:

$$v(0, t) = f(t) \quad (51)$$

On souhaite que la propagation s'effectue sans distorsion de la forme du signal. Par contre, on peut tolérer une atténuation du signal car des répéteurs sont insérés le long de la ligne. Démontrer qu'une solution de type

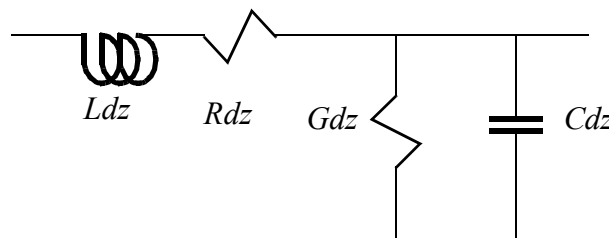
$$v(z, t) = e^{-\alpha z} f(t - z/u) \quad (52)$$

représente une onde se propageant sans distorsion. Trouvez les conditions reliant R , L , G et C pour que cette solution puisse être possible.

b. En supposant que tous les autres paramètres linéiques restent inchangés, quelle devrait être la valeur de L pour que cette condition soit satisfaite? Dans ces conditions, trouvez l'expression de l'onde de courant $i(z, t)$, calculez α et u , ainsi que l'atténuation encourue sur un kilomètre de ligne.

Solution

a. Considérons d'abord une section infinitésimale de la ligne de transmission.



Le signal $f(t)$ doit être arbitraire car on ne peut présumer de l'information qui sera envoyée sur la ligne. Si on décompose ce signal en son contenu fréquentiel à l'aide d'une transformée de Fourier, on constate d'après le circuit ci-dessus que les hautes fréquences

seront davantage affectées par L et C que par R et G , dans la mesure où on a $\omega L \gg R$ et $\omega C \gg G$. Aux basses fréquences, on aurait le phénomène inverse. Ainsi, le comportement du modèle équivalent de la ligne semble varier selon la fréquence et donc on devrait s'attendre à ce que les signaux changent de forme par effet de filtrage à mesure qu'ils évoluent sur la ligne. Pour que la ligne soit "sans distorsion", il faudrait que le signal à la sortie de la ligne ne soit que la version retardée de $f(t)$. i.e.

$$v(z, t) = f(t - \tau(z)) \quad (53)$$

Puisqu'on a en général que le délai τ est proportionnel à z , on peut écrire que $\tau = z/u$ où u est une constante à déterminer. Un signal sans distorsion aura la même variation temporelle peu importe la position sur la ligne. Cependant il pourra varier d'un facteur d'amplitude qui est indépendant du temps. En d'autres mots, on peut ajouter un facteur d'amplitude $A(z)$, avec $\partial A / \partial t = 0$ dans la solution sans perdre d'information.

$$v(z, t) = A(z)f(t - z/u) \quad (54)$$

Puisque la ligne dissipe de l'énergie, il est évident que A devra s'atténuer à mesure que l'onde se propage. Une forme possible serait de prendre $A = e^{-\alpha z}$. Il nous reste maintenant à prouver que cette solution satisfait les équations du télégraphiste lesquelles, pour une ligne avec pertes s'expriment:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\left(L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right) \quad (55)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\left(C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv\right) \quad (56)$$

Afin de découpler la tension et le courant, dérivons la première équation par rapport à z puis la seconde par rapport à t . En combinant les résultats on arrive à:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial v}{\partial t} + RGv \quad (57)$$

En substituant la solution proposée pour $v(z, t)$, nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = e^{-\alpha z} (LCf'' + (LG + RC)f' + RGf) \quad (58)$$

ou le symbole “prime” signifie la dérivée par rapport à l’argument $t-z/u$.

Pour évaluer le membre de gauche, il faut d’abord noter que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial(t-z/u)} = -f' \quad (59)$$

Ce qui permet d’écrire:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = e^{-\alpha z} \left(\frac{1}{u^2} f'' + \frac{2\alpha}{u} f' + \alpha^2 f \right) \quad (60)$$

En égalisant les facteurs respectifs de f , f' et f'' dans les équations (58) et (60), on trouve que:

$$\frac{1}{u^2} = LC \quad (61)$$

$$2\alpha/u = LG + RC \quad (62)$$

$$\alpha^2 = RG \quad (63)$$

On en conclut qu’une solution sans distorsion sera possible si on peut trouver des valeurs de R , L , G et C qui satisfont ces trois équations. Après quelques manipulations algébriques, on s’aperçoit qu’elles peuvent être satisfaites simultanément si

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (64)$$

Cette expression a été découverte vers la fin du XIXe siècle par le Britannique Oliver Heaviside, et elle porte le nom de “condition de Heaviside.”

b. Avec les valeurs de R , G et C données, il faut choisir selon la condition de Heaviside:

$$L = \frac{RC}{G} = 1.333 \mu\text{H} \quad (65)$$

Cette valeur est supérieure à celle de la ligne disponible. Le fait qu’il faille augmenter l’inductance fut, à tort, très contesté du temps de Heaviside car il était bien connu que l’inductance introduit un déphasage entre la tension et le courant, et donc que son augmentation ne conduirait qu’à plus de distorsion. Les ingénieurs de l’époque faisaient en fait tout leur possible pour diminuer la valeur de L !

Au lieu d'augmenter L , une autre option serait de réduire R . Malheureusement, on se heurte à la valeur limite de la conductivité du métal, typiquement du cuivre. Il est aussi exclus d'augmenter G , ce qui ferait augmenter les pertes de puissance. On pourrait songer à diminuer C mais ceci n'est pas toujours possible. On a donc peu de choix d'un point de vue pratique pour satisfaire la condition de non distorsion. Une solution originale proposée par Heaviside consiste à augmenter artificiellement la valeur de L en insérant périodiquement des inductances discrètes, par exemple de petites bobines, le long de la ligne de transmission. Un choix approprié d'inductance localisée, dans notre cas 333 nH/m, permet de satisfaire approximativement la condition à basse fréquence. Toutefois, la périodicité peut affecter la propagation des hautes fréquences de façon très importante.

La vitesse de propagation et l'atténuation linéique sur la ligne sans distorsion seraient:

$$\begin{aligned} u &= 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{1.333 \text{ } \mu\text{H/m} \times 25 \text{ pf/m}} = \sqrt{3} \times 10^8 \text{ m/s} \\ \alpha &= \sqrt{RG} = 3.46 \times 10^{-3} \text{ 1/m} \end{aligned} \quad (66)$$

Sur un segment de 1 km, la perte sera de $-20 \log_{10} e^{-1000\alpha} = 30 \text{ dB}$. À la fin d'une ligne de 1 km de longueur il ne resterait donc plus qu'un millièème de la puissance incidente.

Pour l'onde de courant, il suffit d'insérer $v(z, t)$ dans (56) pour trouver:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial z} &= -C e^{-\alpha z} f' - G e^{-\alpha z} f \\ &= C u \left(-\frac{1}{u} \right) e^{-\alpha z} f' + \frac{G}{\alpha} (-\alpha) f \end{aligned} \quad (67)$$

Les équations (62) et (64) nous donnent que $G/\alpha = 1/uL$ alors que (61) nous donne $Cu = 1/uL$. Ainsi la deuxième ligne de (67) peut être réécrite ainsi:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{uL} \left(-\frac{1}{u} e^{-\alpha z} f' - \alpha e^{-\alpha z} f \right) \quad (68)$$

avec $1/uL = \sqrt{C/L} \equiv 1/Z_0$, ce qui donne $Z_0 = 231 \Omega$. On remarque que l'expression entre parenthèses peut s'exprimer comme une dérivée partielle par rapport à z :

$$\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{uL} \frac{\partial}{\partial z} (e^{-\alpha z} f(t - z/u)) \quad (69)$$

Il suffit donc d'intégrer de chaque côté pour trouver:

$$i(z, t) = \frac{1}{Z_0} e^{-\alpha z} f(t - z/u) = v(z, t)/Z_0 \quad (70)$$

Il n'y a donc pas de distorsion non plus pour l'onde de courant.

Problème 1.10 Régime permanent, ondes stationnaires

Une charge de $40+j60\Omega$ est branchée au bout d'une ligne de transmission dont l'impédance caractéristique est de 50Ω . Sans utiliser d'abaque de Smith, déterminez les quantités suivantes:

- a. le taux d'ondes stationnaires sur la ligne;
- b. la distance entre la charge et le premier minimum de tension;
- c. l'impédance d'entrée à l'autre extrémité de la ligne si elle a une longueur totale de $3\lambda/8$;
- d. le rapport des tensions à chaque bout de la ligne.

Solution

Ce problème peut être résolu sans utiliser l'abaque de Smith.

- a. Le taux d'ondes stationnaires est donné par:

$$TOS = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \quad (71)$$

où Γ_L est le coefficient de réflexion de la charge:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{40 + j60 - 50\Omega}{40 + j60 + 50\Omega} = 0.562 \angle 1.15 \text{ rad.} \quad (72)$$

On a donc simplement:

$$TOS = \frac{1 + 0.562}{1 - 0.562} = 3.57 \quad (73)$$

- b. À une distance d de la charge le long de la ligne de transmission, la tension complexe est reliée au phaseur de l'onde incidente sur la charge V^+ par l'expression suivante:

$$V(d) = V^+(1 + \Gamma_L e^{-2j\beta d})e^{j\beta d} \quad (74)$$

où $\beta = 2\pi/\lambda$. D'après cette expression, on voit que le module de la tension sera minimum ($d = d_{min}$) lorsque les deux termes entre parenthèses sont en opposition de phase, ce qui arrive lorsque la phase du second terme est un nombre impair de π radians. C'est-à-dire:

$$(2n + 1)\pi = \angle(\Gamma_L e^{-2j\beta d_{min}}) = \angle\Gamma_L - 2\beta d_{min} \quad (75)$$

où n est un entier. Donc, on a

$$d_{min} = \frac{1.15 - (2n + 1)\pi}{2\beta} \quad (76)$$

On peut vérifier que le choix $n = -1$ conduit à la plus petite valeur positive de d_{min} .

c. Pour calculer l'impédance à une distance connue de la charge, il suffit d'appliquer la formule suivante dans laquelle z_L est l'impédance de charge normalisée ($= Z_L/Z_0$):

$$Z(d) = Z_0 \frac{(z_L + j \tan \beta d)}{(1 + j z_L \tan \beta d)} \quad (77)$$

En substituant les valeurs appropriées dans la formule, avec une valeur de d de $3\lambda/8$, on arrive à:

$$Z(3\lambda/8) = 50\Omega \frac{(0.8 + j1.2 - j)}{(1 - j(0.8 + j1.2))} = 14.6 + j9.8\Omega \quad (78)$$

d. D'après l'expression donnée en **b**, nous pouvons relier les tensions à chaque bout de la ligne par:

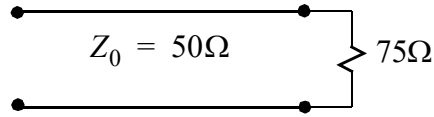
$$\frac{V(d)}{V(0)} = \frac{V^+(1 + \Gamma_L e^{-2j\beta d})e^{j\beta d}}{V^+(1 + \Gamma_L e^0)} = \frac{(1 + \Gamma_L e^{-2j\beta d})e^{j\beta d}}{1 + \Gamma_L} \quad (79)$$

Puisque $\beta d = 3\pi/4$, nous aurons que $e^{-2j\beta d} = j$ et $e^{j\beta d} = (-1 + j)/\sqrt{2}$. La substitution de la valeur de Γ_L dans l'équation (79) conduit finalement à:

$$\frac{V(d)}{V(0)} = 0,404 \angle (2,40 \text{ rad.}). \quad (80)$$

Problème 1.11 Régime permanent, ligne avec pertes

Considérez le circuit suivant qui contient une ligne sans pertes.



- Quelle est la valeur de l'impédance à une distance de $0,2\lambda$ de la charge?
- Donnez le module et la phase de Γ_V à cette position.
- Le phaseur de tension mesuré sur la charge est de $V = 300 - j150$ volts. Quelles sont alors les valeurs du phaseur tension et du phaseur courant à $0,25\lambda$ de la charge?
- Une mesure effectuée à une fréquence de 500 MHz révèle que la ligne de 50Ω a en fait des pertes de l'ordre de 0,015 neper/longueur d'onde. Quelle serait alors la valeur de Γ_V à $0,2\lambda$ de la charge?
- D'autres mesures indiquent que la vitesse de propagation est de 2×10^8 m/s et que malgré le fait que la ligne ait des pertes, celle-ci propage les signaux **sans causer de distorsion**. Trouvez les valeurs des paramètres linéiques R , L , G et C de cette ligne.

Solution

a. $Z(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{jZ_L \tan \beta d + Z_0}$ avec $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} 0,2\lambda = 0,4\pi$. Donc, $\tan \beta d = 3,077$.

$$Z(d) = 50 \frac{75 + j50 \times 3,077}{j75 \times 3,077 + 50} = 35,2\Omega - j8,62\Omega = 36,24 \angle -13,75^\circ \Omega$$

b. $\Gamma_V = \frac{Z(d) - 50}{Z(d) + 50} = \frac{35,2 - 50 - j8,62}{35,2 + 50 - j8,62} = 0,2 \angle -144^\circ$

- c. On utilise la matrice chaîne pour un segment de ligne:

$$\begin{bmatrix} V(d) \\ I(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta d & jZ_0 \sin \beta d \\ \frac{j}{Z_0} \sin \beta d & \cos \beta d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad (81)$$

avec $V(0) = 300 - j150 \text{ volts}$, $I(0) = V(0)/75\Omega = (4 - j2) \text{ ampères}$ et $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \times 0,25\lambda = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\cos \beta d = 0$ et $\sin \beta d = 1$.

Utilisant la matrice chaîne ci-dessus, on trouve:

$$V(d) = j50(4 - j2) = (j200 + 100) \text{ volts} \quad (82)$$

et

$$I(d) = \frac{j}{50}(300 - j150) = (3 + j6) \text{ ampères} \quad (83)$$

d. Le coefficient de réflexion le long de la ligne est calculé par $\Gamma(d) = \Gamma(0)e^{-2\gamma d}$ où $\gamma = \alpha + j\beta$ est la constante de propagation complexe. Pour calculer $\Gamma(0)$ on peut supposer que la ligne a de faibles pertes, de sorte que $Z_0 \approx 50\Omega$. Il en résulte que $\Gamma(0) = (75 - 50)/(75 + 50) = 0,2$. La valeur de α/λ est fournie et vaut 0.015, alors que $\beta = 2\pi/\lambda$. Donc:

$$\gamma d = \left(0,015 \frac{\text{np}}{\lambda} + j \frac{2\pi}{\lambda}\right) \times 0,2\lambda = 0,003 + j0,4\pi \quad (84)$$

et:

$$\Gamma(0,2\lambda) = 0,2e^{-0,006}e^{-j0,8\pi} = 0,1988 \angle -144^\circ \text{ ou } 0,1988 \angle -0,8\pi \quad (85)$$

e. Pour les lignes sans distorsion, nous savons que les trois équations suivantes sont satisfaites:

$$\alpha = \sqrt{RG} \quad (86)$$

$$u = 1/\sqrt{LC} \quad (87)$$

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \text{ (condition de Heaviside)} \quad (88)$$

L'impédance caractéristique pour les lignes avec pertes se calcule avec:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{R/L + j\omega}{G/C + j\omega}} \quad (89)$$

Compte tenu de (88), la deuxième racine carrée de l'expression précédente vaut 1, et donc il ne reste que $Z_0 = \sqrt{L/C}$. Combinant ceci avec (87), on peut trouver L et C avec $C = 1/(uZ_0)$ et $L = Z_0/u$. On obtient:

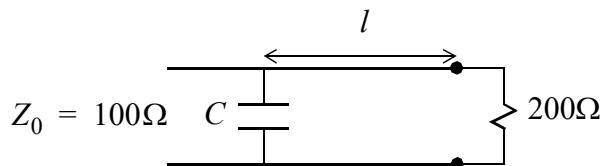
$$C = 10^{-10} \text{F/m} \text{ et } L = 2 \times 10^{-7} \text{H/m}. \quad (90)$$

Pour obtenir R et G nous pouvons nous servir de l'équation (86). La donnée du problème spécifie que $\alpha = 0,015 \text{np}/\lambda$. À 500 MHz, nous avons $\lambda = u/f = 2 \times 10^8 \text{m/s} / 5 \times 10^8 \text{Hz} = 0,4 \text{ m}$. Les unités de α sont des np/m. Donc, en convertissant les unités nous obtenons $\alpha = 0,015 \text{np}/\lambda \times (1\lambda/0,4 \text{ m}) = 0,0375 \text{np/m}$. En combinant les équations (86) et (88) nous pouvons déduire que $R = \alpha \sqrt{L/C}$, ce qui correspond à $R = \alpha Z_0$. Finalement, on obtient G de $G = \alpha^2/R$ grâce à l'équation (86). Il suffit maintenant de substituer les valeurs numériques, ce qui donne: $R = 1,875 \Omega/\text{m}$ et $G = 72,5 \times 10^{-4} \text{S/m}$.

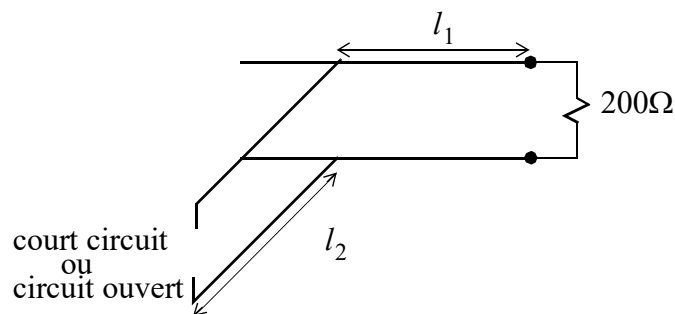
Problème 1.12 Régime permanent, circuits d'adaptation

On désire brancher une impédance de 200Ω à une ligne de transmission dont l'impédance caractéristique est de 100Ω . Il faut donc construire un circuit d'adaptation. Le but de ce problème est de comparer la performance de plusieurs solutions possibles pour le circuit d'adaptation. La source utilisée a une fréquence de 1 GHz et la vitesse de propagation dans toutes les lignes de transmission est de $2 \times 10^8\text{ m/s}$. Les pertes dans les lignes sont considérées comme négligeables.

- Donnez l'impédance caractéristique et la longueur physique d'une ligne quart-d'onde qui serait suffisante pour réussir l'adaptation d'impédance.
- Si le circuit d'adaptation est formé d'un seul condensateur branché en parallèle sur la ligne, donnez la valeur C de cette capacité et sa position l par rapport à la charge. Le bout de ligne de longueur l a également une impédance caractéristique de 100Ω .



- Si le circuit d'adaptation est formé avec un tronçon en parallèle sur la ligne, donnez les valeurs de l_1 et l_2 (longueurs physiques) dans deux cas, soit lorsque le tronçon se termine par un circuit ouvert et lorsqu'il se termine par un court circuit. Pour chacun de ces deux cas, il existe plusieurs solutions possibles. Choisissez la solution qui donne la valeur de l_2 la plus courte possible dans chaque cas. Encore une fois, les lignes ont toutes une impédance caractéristique de 100Ω .

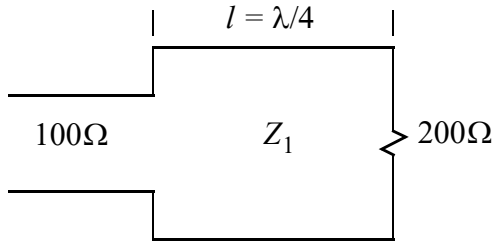


- Pour les 4 circuits trouvés ci-dessus (a, b, c avec court circuit et circuit ouvert), développez les équations qui permettent de calculer le taux d'ondes stationnaires sur la ligne de transmission, côté générateur, en fonction de la fréquence.

- e. Écrivez un programme Matlab qui calcule le TOS sur la bande 900–1100 MHz pour chacun des 4 circuits. Obtenez un graphique comprenant les 4 courbes TOS vs. fréquence. D'après vos résultats, quel circuit présente les meilleures performances sur la plage de fréquences considérée?

Solution

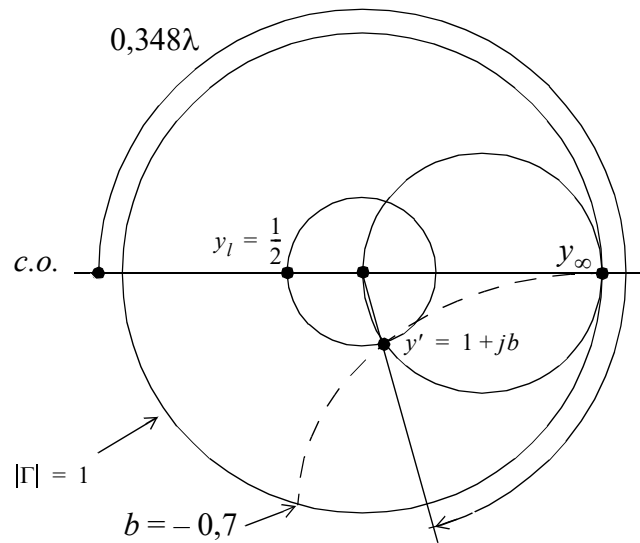
a.



D'après la théorie des lignes de transmissions on a: $Z_1 = \sqrt{200\Omega \times 100\Omega} \approx 141,2\Omega$,

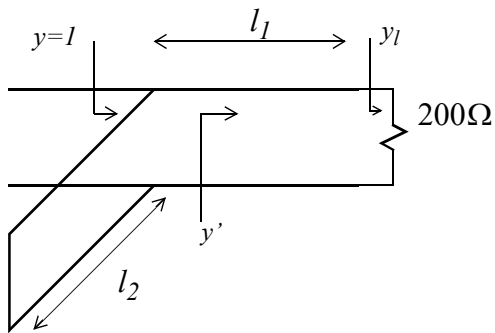
$$l = \lambda/4 = (u/f) \cdot (1/4) = 2 \times 10^8 / 4 \times 10^9 = 5 \text{ cm. (NB: } \lambda = 20 \text{ cm)}$$

- b. Partant de $y_l = (200/100)^{-1} = 1/2$, on trouve avec l'abaque la distance nécessaire pour se rendre au cercle unitaire, soit à $y' = 1 + jb$. On lit $l = 0,348\lambda = 6,96 \text{ cm}$, ainsi que $b = -0,7$. Donc la susceptance normalisée du condensateur b_c est de $+0,7$, c'est-à-dire: $b_c = 0,7 = (\omega \cdot C)/0,01$. Il en résulte que $\Rightarrow C = 0,007/(2\pi \times 10^9) = 1,11 \text{ pf. (Voir l'abaque à la page suivante).}$



c. Circuit avec tronçon en parallèle

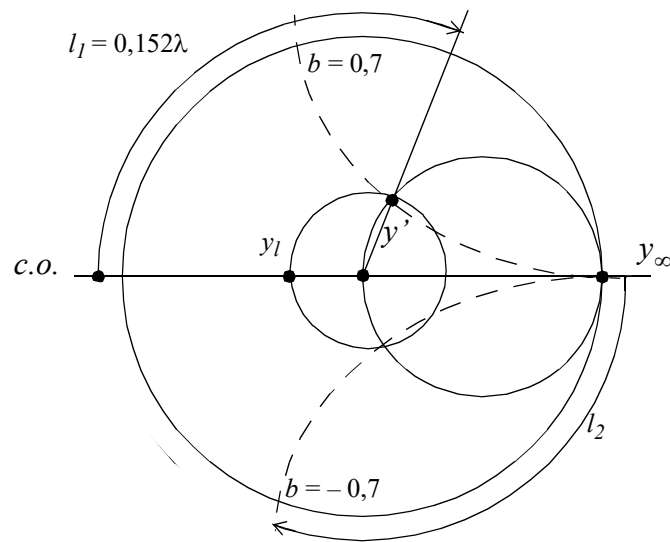
- Court circuit.



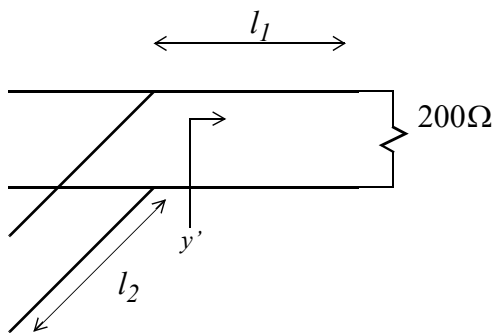
Puisque l_2 doit être le plus court possible, le tronçon parallèle aura un comportement inductif. Il nous faudra donc avoir $y' = 1 + jb$, avec b positif (i.e. capacitif).

Donc, $l_1 = 0,152\lambda = 3,04 \text{ cm}$, $y' = 1 + j0,7 \rightarrow y_{\text{tronçon}} = -j0,7$

Sur l'abaque on lit $l_2 = 0,151\lambda = 3,04 \text{ cm}$.

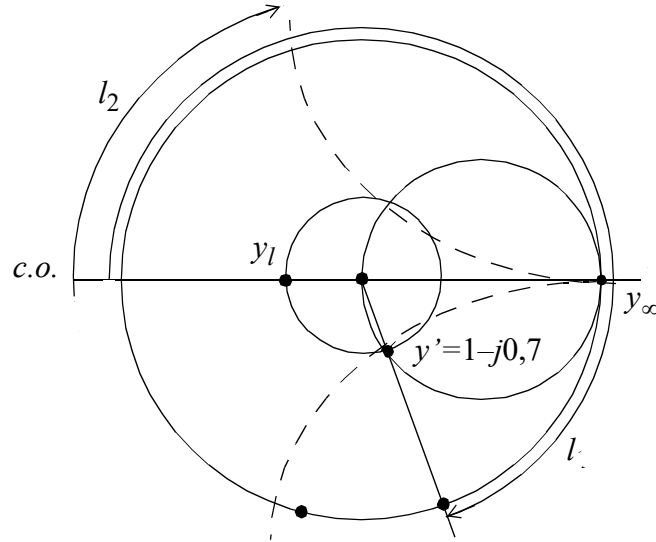


- Circuit ouvert



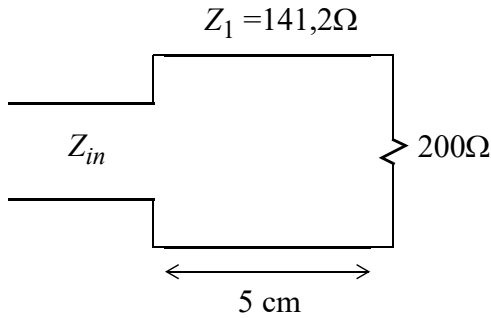
Puisque l_2 doit être minimisée, le tronçon parallèle aura un comportement capacitif. Nous devons donc avoir $y' = 1 + jb$ avec ($b < 0$), ce qui correspond à la partie inférieure de l'abaque en coordonnées d'admittances.

On trouve $y' = 1 - j0,7$ avec $l_1 = 0,347\lambda = 6,93 \text{ cm}$. Pour trouver l_2 , on part du point d'admittance nulle et on se déplace de $l_2 = 0,097\lambda$ sur le bord de l'abaque jusqu'à $+j0,7$. On a donc $l_2 = 0,097\lambda = 1,94 \text{ cm}$.



d. Calcul du TOS

- Circuit $\lambda/4$:

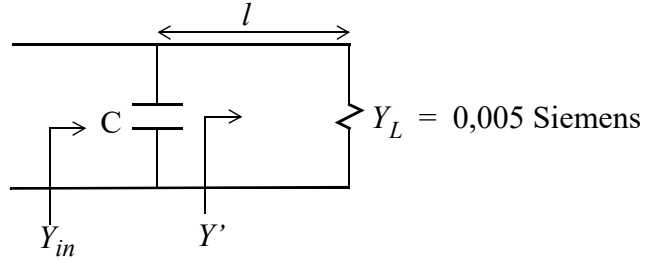


$$Z_{in} = \frac{Z_L + jZ_1 \tan \beta l}{j \frac{Z_L}{Z_1} \tan \beta l + 1} \quad (91)$$

$$\text{avec } \beta l = \frac{\omega}{u} \times 5 \text{ cm} = 2\pi f \times 0,05 / 2 \times 10^8 \text{ et } Z_L = 200\Omega, Z_1 = 141,2\Omega \quad (92)$$

On obtient ensuite $\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$ avec $Z_0 = 100$, et le $TOS = \frac{1 + |\Gamma_{in}|}{1 - |\Gamma_{in}|}$.

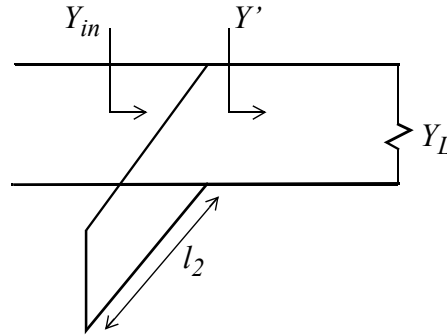
- Adaptation avec condensateur:



À partir du circuit ci-dessus on a: $Y' = \left((Z_L + jZ_0 \tan \beta l) / \left(j \frac{Z_L}{Z_0} \tan \beta l + 1 \right) \right)^{-1}$ avec $\beta l = (\omega/u) \times 6,96 \text{ cm}$, $Z_L = 200 \Omega$ et $Z_0 = 100 \Omega$. Nous avons alors $Y_{in} = Y' + j\omega C$, $C = 1,11 \text{ pF}$, $\Gamma_I = (Y_{in} - Y_0) / (Y_{in} + Y_0)$ avec $Y_0 = 1/100 \text{ Siemens}$.

$$\text{Et donc TOS} = \frac{1 + |\Gamma_I|}{1 - |\Gamma_I|}$$

- Adaptation avec tronçon en court circuit:



$$Y_{in} = Y' + Y_{cc} \quad \text{avec} \quad Y' = \left((Z_L + jZ_0 \tan \beta l_1) / \left(j \frac{Z_L}{Z_0} \tan \beta l_1 + 1 \right) \right)^{-1} \quad \text{et}$$

$$Y_{cc} = -jY_0 \cot \beta l_2, \quad l_2 = 3,06 \text{ cm} \text{ et } l_1 = 3,04 \text{ cm}.$$

$$\text{On obtient en suite } \Gamma_I = \frac{Y_{in} - Y_0}{Y_{in} + Y_0} \text{ puis } TOS = \frac{1 + |\Gamma_I|}{1 - |\Gamma_I|}$$

- Adaptation avec circuit ouvert:

Ici, on calcule l'admittance du tronçon circuit-ouvert, soit $Y_{co} = jY_0 \tan \beta l_2$ avec $l_2 = 1,94 \text{ cm}$.

Pour Y' , on conserve la même formule mais avec $l_1 = 6,93 \text{ cm}$.

Donc $Y_{in} = Y_{co} + Y'$. On peut calculer $\Gamma_I = \frac{Y_{in} - Y_0}{Y_{in} + Y_0}$ et finalement $TOS = \frac{1 + |\Gamma_I|}{1 - |\Gamma_I|}$.

e. Un programme en matlab calculant le TOS sur la plage 900-1100 MHz est donné ci-dessous. D'après le graphique du TOS versus fréquence, on voit clairement que le circuit à ligne $\lambda/4$ est celui qui conserve le plus bas TOS sur toute la plage de fréquence. Il est suivi du circuit avec tronçon parallèle en court-circuit. Les deux circuits avec charge capacitive en parallèle présentent des mauvaises performances à peu près équivalentes.

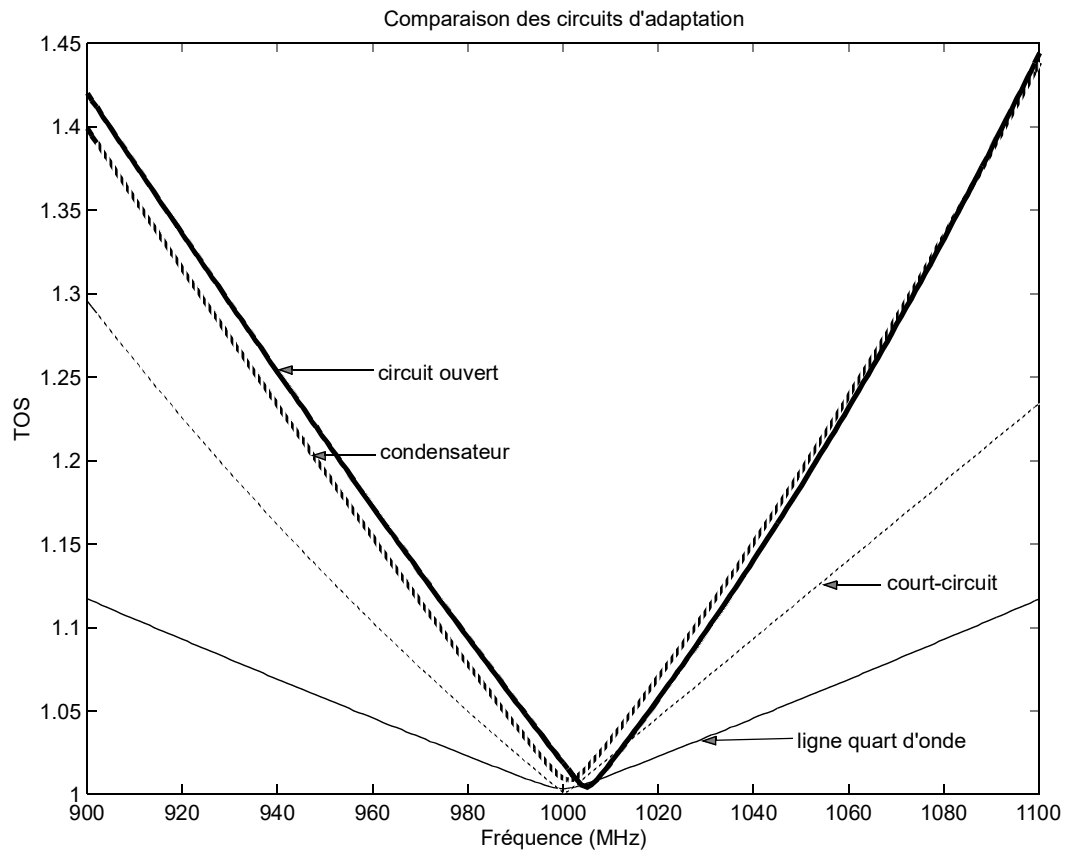
On remarque que nous n'avons pas exactement $TOS = 1$ à 1GHz car les valeurs trouvées avec l'abaque de smith sont approximatives.

```
f=[900:1:1100] '*1e6;
beta=2*pi*f/2e8;
%circuit a ligne lambda/4
tbl=tan(beta*5e-2);
Zin=((200+j*141.2*tbl)/(j*(200/141.2)*tbl+1));
Gamma=(Zin-100)/(Zin+100);
TOSA=(1+abs(Gamma))/(1-abs(Gamma));
% circuit avec condensateur
tbl=tan(beta*6.96e-2);
Yprim=((200+j*100*tbl)/(j*(200/100)*tbl+1)).^-1;
Yc=j*2*pi*f*1.11e-12;
Yin=Yprim+Yc;
Gamma=(Yin-0.01)/(Yin+0.01);
TOSB=(1+abs(Gamma))/(1-abs(Gamma));
%circuit avec troncon en court circuit
tbl1=tan(beta*3.04e-2);
Yprim=((200+j*100*tbl1)/(j*(200/100)*tbl1+1)).^-1;
tbl2=tan(beta*3.04e-2);
Yprim=((200+j*100*tbl1)/(j*(200/100)*tbl1+1)).^-1;
Ycc=-j*0.01./tbl2;
Yin=Yprim+Ycc;
Gamma=(Yin-0.01)/(Yin+0.01);
TOSCC=(1+abs(Gamma))/(1-abs(Gamma));
% circuit avec troncon en circuit ouvert
tbl1=tan(beta*6.93e-2);
tbl2=tan(beta*1.94e-2);
Yprim=((200+j*100*tbl1)/(j*(200/100)*tbl1+1)).^-1;
Yco=j*0.01*tbl2;
Yin=Yprim+Yco;
Gamma=(Yin-0.01)/(Yin+0.01);
```

```

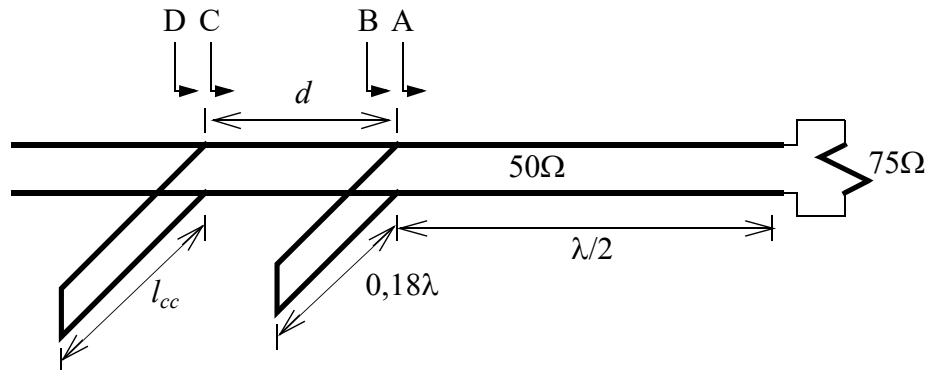
TOSCO=(1+abs(Gamma))./(1-abs(Gamma));
%graphique du TOS
fMHz=f/1e6;
plot(fMHz,TOSA,'k-',fMHz,TOSB,'k--',fMHz,TOSCC,'k--',fMHz,TOSCO,'k-')
title('Comparaison des circuits d'adaptation')
ylabel('TOS')
xlabel('Frequence (MHz)')
grid

```



Problème 1.13 Circuit d'adaptation double tronçon

Le circuit suivant est un circuit d'adaptation à double tronçon servant à adapter une charge de 75Ω à une ligne de transmission de 50Ω . Toutes les lignes utilisées ont une impédance caractéristique de 50Ω et le premier tronçon a une longueur fixée à $0,18\lambda$. On considérera que toutes les lignes sont sans pertes.



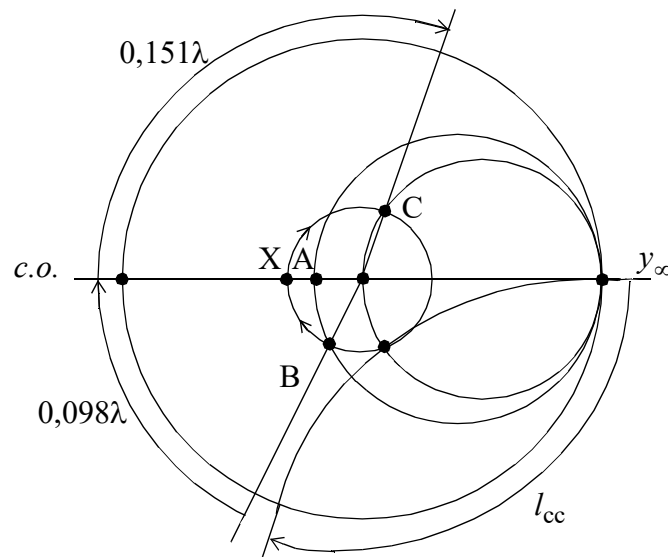
- Les points A et B sont de part et d'autre du premier tronçon. Montrez les points A et B dans l'abaque de Smith en coordonnées d'admittance normalisée (indiquez clairement avec les lettres A et B), puis donnez les valeurs de Γ_V correspondantes.
- Donnez les valeurs du TOS sur:
 - le premier bout de ligne de longueur $\lambda/2$ branché directement sur la charge;
 - le segment de ligne de longueur d compris entre les plans B et C.
- Trouvez les valeurs de d/λ et l_{cc}/λ qui permettent de réaliser l'adaptation. Indiquez la position des points C et D sur l'abaque. Les points C et D sont de part et d'autre du second tronçon.
- Combien y a-t-il de minimums de courant et de tension sur le segment de longueur d ?

Solution

a. $z_L = 75/50 = 1,5$.

Pour passer au point A, à $\lambda/2$ de la charge, on fait un tour complet sur l'abaque. On lit $z_A = 1,5$ et $\Gamma_V = 0,2$.

- c. La longueur d permet de ramener le point y_B vers le point y_C situé sur le cercle de conductance normalisée unitaire. Le chemin parcouru est de $0,098 + 0,151 = 0,249\lambda$. Au point C nous avons $y_C = 1 + j0,7$. Afin d'avoir $y_D = 1$, nous devons ajouter une charge en parallèle de $-j0,7$. Ceci est réalisé avec $l_{cc} = 0,154\lambda$ selon l'abaque.



- d. Lors du passage du point B au point C , on croise l'axe réel au point X dans l'abaque. Puisque nous utilisons les coordonnées d'admittance. Le point X correspond à un minimum de courant et à un maximum de tension. Il n'y a donc qu'un seul minimum de courant et aucun minimum de tension sur ce segment de ligne.

Problème 1.14 Régime permanent, circuits d'adaptation

Une antenne de réception de télévision a une impédance à peu près constante de 300Ω sur la bande de fréquences VHF de 30 à 300 MHz. Elle est branchée à une courte ligne de transmission bi-filaire dont l'impédance caractéristique nominale est aussi de 300Ω . On négligera les pertes dans les lignes de transmission pour ce problème. On désire brancher l'antenne à un récepteur de télévision dont l'impédance d'entrée est de 75Ω . Étant en région éloignée où la réception est mauvaise, il est important d'avoir le meilleur transfert de puissance possible de l'antenne au récepteur. Il est connu que les deux seuls signaux disponibles dans la région sont les chaînes française et anglaise de Radio-Canada occupant respectivement les canaux 2 ($f = 57 \pm 3$ MHz) et 6 ($f = 81 \pm 3$ MHz). Pour brancher l'antenne au récepteur, on considère trois types de circuits d'adaptation:

- bout de ligne $\lambda/4$;
- circuit avec un tronçon de ligne de transmission en parallèle construit avec de la ligne coaxiale d'impédance caractéristique 75Ω ;
- ajout d'une capacité en parallèle le long d'une ligne de 75Ω .

En supposant que ces trois circuits sont conçus pour avoir une adaptation optimale au canal 2, donnez:

- a. les détails de construction de chaque circuit;
- b. le taux de transfert de puissance obtenus à la fréquence centrale du canal 6 pour chaque circuits.

Solution

- a. Dans ce problème, la puissance provient d'une onde plane incidente sur l'antenne. On peut représenter l'antenne ainsi illuminée comme étant une source de Thévenin ayant $Z_{th} = Z_{ant}$ où l'impédance de l'antenne Z_{ant} est de 300Ω . Le problème se réduit donc à essayer d'adapter une source d'impédance 300Ω , appelons la Z_1 , à une impédance de 75Ω (Z_0). Faisons d'abord la conception de chaque circuit.

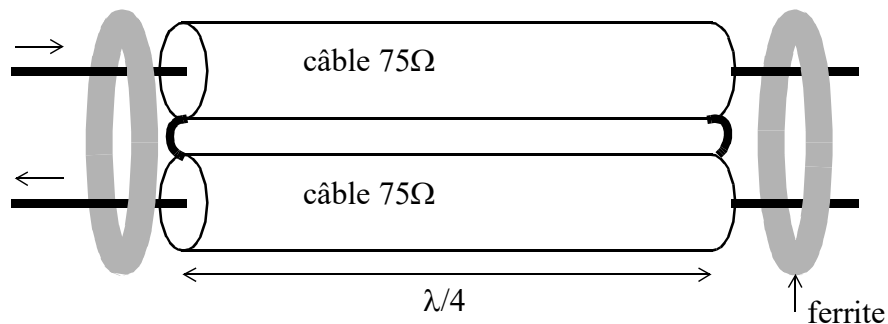
i) Ligne $\lambda/4$

Pour adapter Z_1 à Z_0 , il suffit d'insérer une ligne de longueur $\lambda/4$ dont l'impédance caractéristique est:

$$Z_2 = \sqrt{Z_0 Z_1} \quad (95)$$

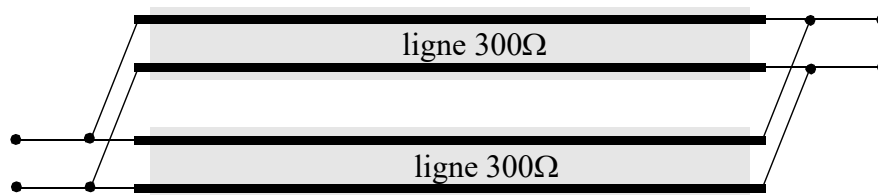
soit $Z_2 = \sqrt{75\Omega \times 300\Omega} = 150\Omega$. La longueur physique de la ligne $\lambda/4$ dépend de la vitesse de propagation dans la ligne de 150Ω choisie.

En pratique, il est très difficile sinon impossible de trouver sur le marché de la ligne de 150Ω . Il sera donc nécessaire d'en fabriquer à partir de lignes coaxiales ou bifilaires d'impédance standard (50Ω , 75Ω , 90Ω , 300Ω , etc...). La figure ci-dessous montre une option possible avec de la ligne coaxiale de 75Ω . Il s'agit de brancher avec des fils très courts les blindages extérieurs de deux bouts de câble. Le circuit résultant entre les deux conducteurs intérieurs des câbles consiste en deux lignes de 75Ω branchées en série, ce qui est équivalent à une ligne de 150Ω . Des noyaux de ferrite peuvent être ajoutés à chaque bout de la ligne pour forcer les courants dans les deux conducteurs passant dans un noyau opposés, et ainsi réduire le courant qui pourrait fuir à l'extérieur du blindage. Aussi, un contact continu des deux blindages tout le long de la ligne permet de réduire le couplage d'interférences.



Une autre possibilité pour obtenir une impédance de 150Ω serait de brancher en parallèle deux lignes bi-filaires de 300Ω tel que montré ci-dessous. Cette solution est moins élégante car la ligne bi-filaire n'est pas blindée, ce qui permet un couplage électromagnétique capacitif et inductif non négligeable entre les lignes, lequel changerait l'impé-

dance caractéristique obtenue. Ce phénomène n'existe pas dans le cas précédent car les lignes sont blindées par le conducteur externe des câbles coaxiaux.



ii) Circuit d'adaptation à un tronçon

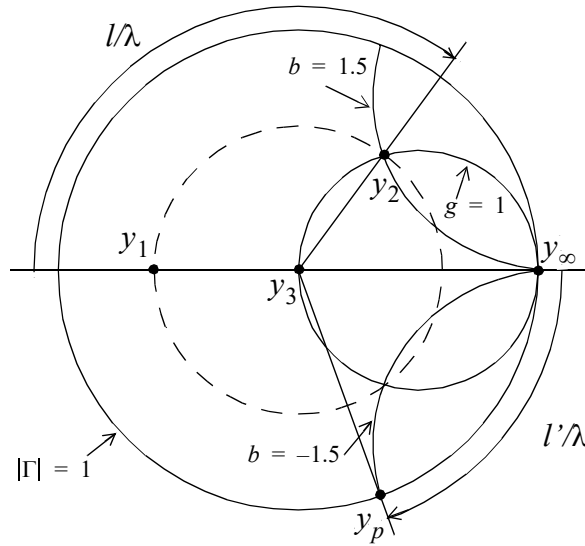
Ce circuit doit être réalisé avec des bouts de ligne de 75Ω uniquement. On procédera avec un abaque de Smith pour trouver les longueurs du circuit. Puisque le tronçon est branché en parallèle, il est requis d'utiliser un abaque en coordonnées d'admittance. Les étapes du processus sont indiquées ci-dessous et illustrées sur un abaque. Nous avons le choix de considérer la valeur de 300Ω comme la charge et la valeur de 75Ω comme la source, ou vice versa. Puisqu'il est demandé d'utiliser des lignes dont l'impédance caractéristique est de 75Ω pour réaliser l'adaptation, la valeur de 75Ω se retrouvera au centre de l'abaque. En conséquence, il est plus pratique de traiter la terminaison de 300Ω comme la charge. Ce choix détermine le sens des rotations dans l'abaque de Smith. Dans cette démarche, on part avec l'impédance de 300Ω puis on progresse graduellement vers l'impédance de 75Ω . À noter que dans le circuit réel c'est la source qui a une impédance de 300Ω . Ceci n'a pas vraiment d'importance car le circuit est réciproque. Il est recommandé de se procurer un abaque avec une grille plus fine pour obtenir des résultats précis.

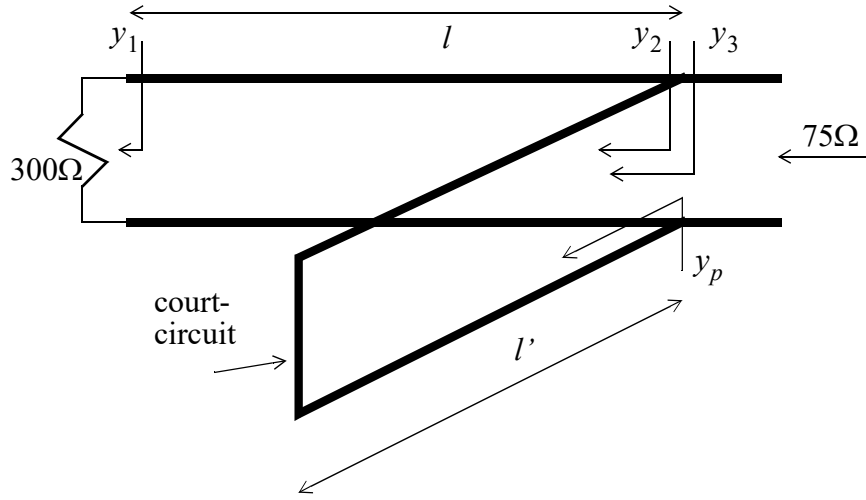
- Tout d'abord, on normalise l'admittance de la source de 300Ω par rapport à l'admittance de la ligne de 75Ω , i.e. $y_1 = (1/300)/(1/75) = 0.25 + j0$, puis on localise cette admittance normalisée dans l'abaque.
- Le premier élément du circuit d'adaptation est un bout de ligne 75Ω qui permettra de transformer y_1 en une nouvelle admittance normalisée ayant une partie réelle unitaire, soit $y_2 = 1 + jb$. La longueur de ligne l/λ nécessaire est obtenue en tournant dans le sens horaire sur l'abaque sur un cercle de $|Y|$ constant de y_1 jusqu'au cercle $g = 1$. Deux valeurs de b et une infinité de valeurs de l/λ sont possibles. On choisira la valeur de l/λ la plus petite possible ce qui, dans ce problème conduit à une valeur de b positive selon l'abaque. Pour ce choix, nous lisons directement sur l'abaque $l/\lambda = 0.176$

- L'étape suivante consiste à ajouter une charge y_p en parallèle avec y_2 afin d'éliminer la susceptance résiduelle jb . D'après l'abaque, nous avons que $b = 1.5$ et conséquemment nous devons faire en sorte que $y_p = -j1.5$. Cette charge doit être synthétisée avec un tronçon de ligne qui peut se terminer à une extrémité par un court-circuit ou un circuit ouvert. Dans notre cas, le tronçon court-circuit est le plus court. Pour en déterminer la longueur l'/λ , il suffit de partir du point y_∞ représentant le court-circuit et de tourner en sens horaire sur le cercle $|\Gamma| = 1$, jusqu'à l'atteinte d'une susceptance de $-1,5$. La valeur obtenue graphiquement est $l'/\lambda = 0.094\lambda$. Après l'ajout de ce tronçon, l'admittance normalisée résultante est:

$$y_3 = y_2 + y_p = 1 \quad (96)$$

ce qui est bien le résultat désiré. La topologie du circuit final est montrée ci-dessous.



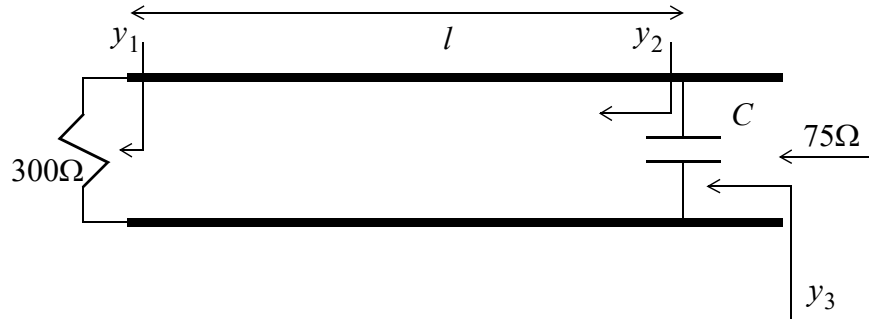


iii) Adaptation avec capacité en parallèle

Dans ce circuit on se sert d'un condensateur plutôt que d'un tronçon parallèle pour annuler la susceptance jb de y_2 . Puisque la susceptance d'un condensateur est toujours positive, il faudra que la susceptance b soit négative afin de pouvoir l'annuler. La valeur de l/λ trouvée dans le cas précédent n'est donc pas satisfaisante. Il faut en fait continuer à tourner autour du centre de l'abaque jusqu'à ce qu'on atteigne l'intersection du cercle $g = 1$ avec un cercle de susceptance négative. Par rapport au cas précédent, ce nouveau point y_2 sera à une position symétrique, sous l'axe horizontal de l'abaque et sa valeur sera donc $y_2 = 1 - j1.5$. À cause de cette symétrie, on peut aussi trouver facilement la nouvelle valeur de l/λ à partir de la valeur précédente de 0.176. Puisqu'un tour complet donne 0.5λ , nous aurons donc maintenant que $l/\lambda = 0.5 - 0.176 = 0.324$. Quant à la valeur de la capacité, elle doit être telle que:

$$jb = -j1.5 = \frac{-j\omega C}{(1/75\Omega)} \quad (97)$$

Pour une fréquence centrale de 57 MHz, ceci conduit à $C = 55,84$ pf. Le circuit est le suivant.



Remarque:

Puisque les trois circuits sont réciproques, il est équivalent de dire qu'après adaptation le récepteur voit une source équivalente de 75Ω , ou que l'antenne voit un récepteur équivalent de 300Ω .

- b.** À la fréquence du canal 6, la source équivalente de Thévenin ne voit plus une impédance adaptée de 300Ω car les circuits d'adaptation ont été conçus pour une autre fréquence. Il y aura donc réflexion des signaux vers l'antenne qui ré-émettra une partie du signal reçu. Si l'impédance vue par l'antenne est Z_{in} , alors le coefficient de réflexion serait:

$$\Gamma = \frac{300\Omega - Z_{in}}{300\Omega + Z_{in}} \quad (98)$$

Le pourcentage de la puissance reçue disponible au récepteur, ce qui représente le rendement du circuit d'adaptation, serait alors de $1 - |\Gamma|^2$. Il s'agit donc de déterminer Z_{in} , puis $|\Gamma|$ pour les trois circuits d'adaptation proposés mais pour une fréquence de 81 MHz.

i) Ligne $\lambda/4$

Le rapport des longueurs d'ondes pour les canaux 6 et 2 est donné, en supposant que les lignes de transmission ne sont pas dispersives, par:

$$\frac{\lambda_6}{\lambda_2} = \frac{f_2}{f_6} = \frac{57}{81} = 0.704 \quad (99)$$

La longueur physique de la ligne de 150Ω est de $l = \lambda_2/4$. Au canal 6, la longueur électrique de ce segment sera donc de $l/\lambda_6 = \lambda_2/4\lambda_6 = 1/(4 \times 0.704) = 0.355$. Il s'agit donc de normaliser l'impédance de charge de 75Ω par rapport à 150Ω , puis de tourner de 0.355λ en sens horaire sur l'abaque pour obtenir l'impédance normalisée vue par la source équivalente de 300Ω . Ce passage de $z_0 (= 75\Omega/150\Omega)$ à $z_{in} (= Z_{in}/150\Omega)$ est illustré sur l'abaque. Sur un abaque plus précis, on peut lire $z_{in} \approx 0.95 - j0.67$, ce qui nous conduit à:

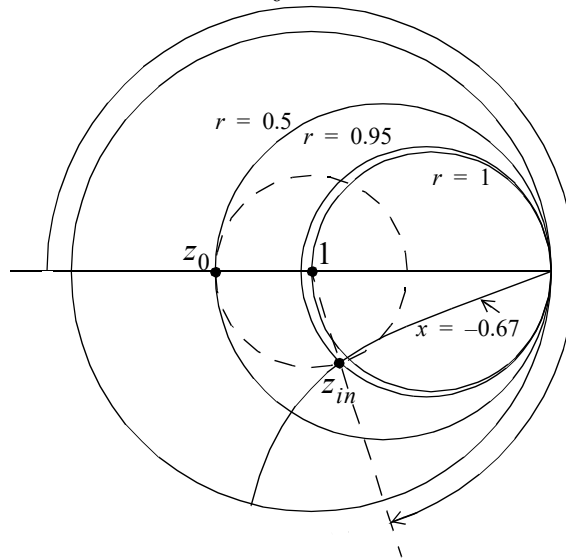
$$Z_{in} = 150\Omega(0.95 - j0.67) = 142.5 - j100.5\Omega$$

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - 300\Omega}{Z_{in} + 300\Omega} = -0.29 - j0.29 \quad (100)$$

$$\text{rendement} = 100(1 - |\Gamma|^2) = 83\%$$

Il y a donc une perte de 17% de la puissance disponible, soit 0,8 dB, si on utilise ce circuit.

$$l/\lambda_6 = 0.355$$



ii) Circuit d'adaptation à un tronçon

On utilisera un abaque de Smith en coordonnées d'admittance, avec une normalisation par rapport à l'admittance caractéristique de $1/75\Omega$. Les deux longueurs l et l' doivent être renormalisées par rapport à λ_6 :

$$\begin{aligned}
l/\lambda_6 &= 0.176 \times \lambda_2/\lambda_6 = 0.2501 \\
l'/\lambda_6 &= 0.094 \times \lambda_2/\lambda_6 = 0.134
\end{aligned}
\tag{101}$$

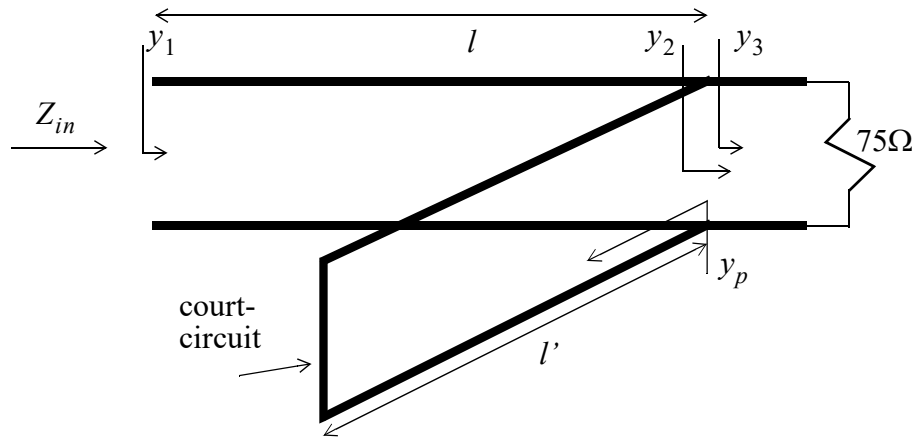
Se référant au schéma ci-dessous, le point de départ dans l'abaque est le récepteur de 75Ω , ce qui correspond à une admittance normalisée $y_3 = 1$.

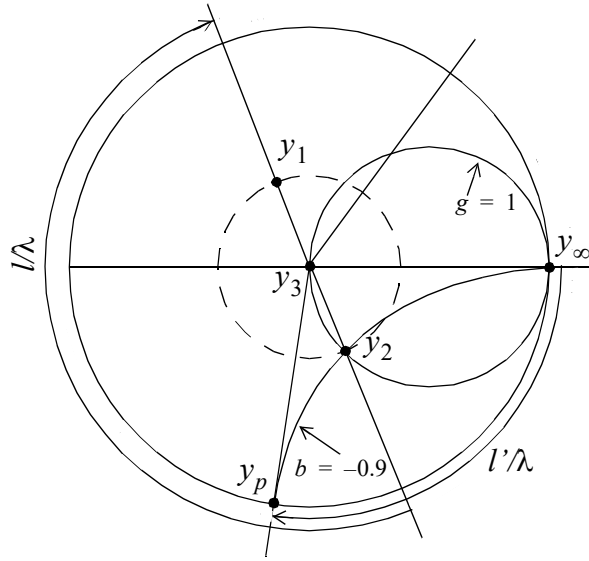
- On ajoute d'abord l'admittance y_p en parallèle. Cette admittance est celle d'une ligne 75Ω court-circuitée ayant une longueur l' . Partant de y_∞ puis tournant dans le sens horaire de $0,134\lambda$, on arrive à $y_p \approx -j0.9$. L'admittance normalisée résultante est alors $y_2 = y_3 + y_p = 1 - j0.9$
- Partant de y_2 , il faut maintenant se déplacer vers la source (sens horaire) d'une distance l , soit $0,2501\lambda$. Ceci nous amène à l'admittance normalisée y_1 dont la valeur approximative lue sur l'abaque est environ $0,55+j0,5$. Après dénormalisation et inversion du résultat, on arrive à l'impédance Z_{in} qui est égale à $75-j67,5\Omega$. Il en résulte que:

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - 300}{Z_{in} + 300} = -0.55 - j0.28
\tag{102}$$

$$\text{rendement} = 100 \times (1 - |\Gamma|^2) = 62\%$$

Il y a donc une perte de 38% de la puissance, ce qui représente 2.1 dB.





iii) Adaptation avec capacité en parallèle

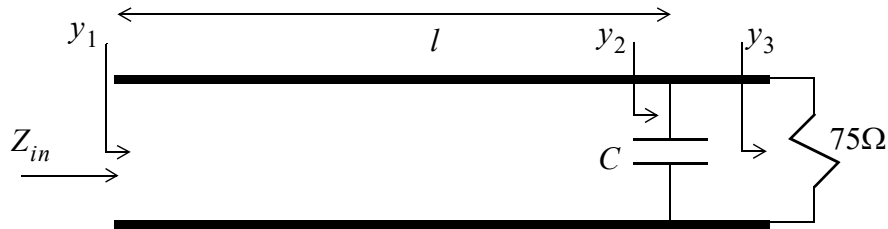
La démarche est exactement la même que dans le cas précédent, sauf pour la valeur de y_p qui est:

$$y_p = \frac{j\omega_6 C}{1/(75\Omega)} = j2.13 \quad (103)$$

On part donc de $y_2 = 1 + j2.13$, puis on tourne dans le sens horaire. Nous avons maintenant que la longueur normalisée du déplacement est:

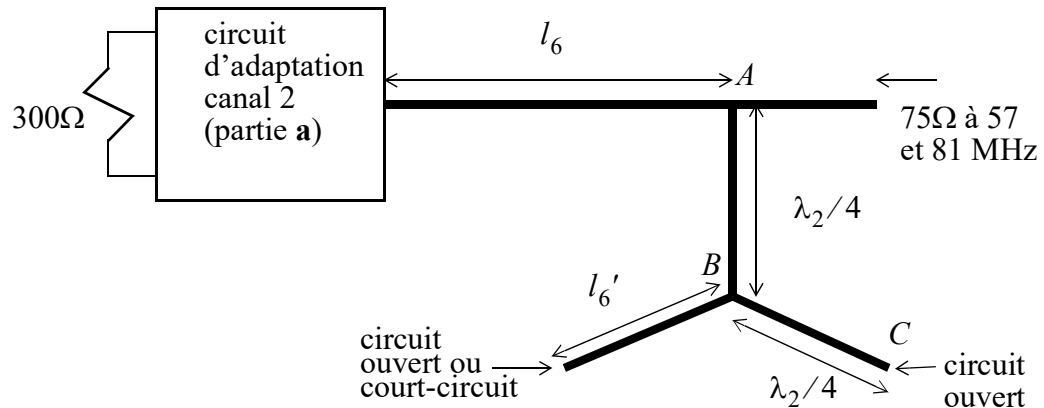
$$l/\lambda_6 = l/\lambda_2 \times \lambda_2/\lambda_6 = 0.324 \times 1.42 = 0.460 \quad (104)$$

Suite à ce déplacement, on arrive sur l'abaque à $y_1 = 0.42 + j1.3$. Ceci correspond à une impédance d'entrée Z_{in} de $16,8 - j52,2\Omega$. De cette valeur, on obtient un rendement de seulement 19,6%, soit une perte de 7 dB.



En conclusion, pour ce cas particulier le circuit d'adaptation à ligne $\lambda/4$ conçu pour le canal 2 procure la meilleure adaptation au canal 6 avec une perte de 0,8 dB. Le circuit d'adaptation à condensateur en parallèle offre la pire performance avec une perte de 7 dB à ce canal.

À la lumière de ces résultats, on peut se demander si il est possible de concevoir un circuit qui procurerait une adaptation parfaite aux deux fréquences simultanément. Le circuit suivant permettrait d'atteindre cet objectif. Il est d'abord composé d'un circuit d'adaptation pour le canal 2, ce qui pourrait n'importe lequel des trois circuits conçus à la partie **a**, suivi d'un circuit d'adaptation à tronçon parallèle pour l'adaptation au canal 6. Pour que le second circuit n'affecte pas l'adaptation au canal 2, il faut que son tronçon soit "invisible" à 57 MHz, donc qu'il ait une admittance nulle (circuit ouvert) à cette fréquence. Dans le schéma ci-dessous chaque trait gras représente un bout de câble 75Ω .



Puisque le point C est un circuit ouvert, le point B à la jonction sera un court-circuit à 57 MHz. À la jonction A , ce court-circuit sera transformé à nouveau en circuit ouvert à cette fréquence et donc l'impédance sur la ligne ne sera pas affectée (charge parallèle "invisible"). Il s'agira alors d'ajuster les longueurs l_6 et l_6' pour obtenir l'adaptation à 75Ω à 81 MHz. Pouvez-vous trouver ces longueurs? (voir Problème 1.15)

Problème 1.15 Régime permanent, adaptation à deux fréquences

On utilise une ligne $\lambda/4$ pour adapter une charge de 300Ω à une ligne dont l'impédance caractéristique est de 75Ω . Le circuit est conçu pour fonctionner à 57 MHz (canal 2). On souhaite que le circuit fonctionne aussi à 81 MHz (canal 6). Ceci peut être réalisé avec le circuit montré ci-dessous. Déterminez les valeurs de l_6/λ et l'_6/λ qui permettront de réussir l'adaptation aux deux fréquences.

Solution

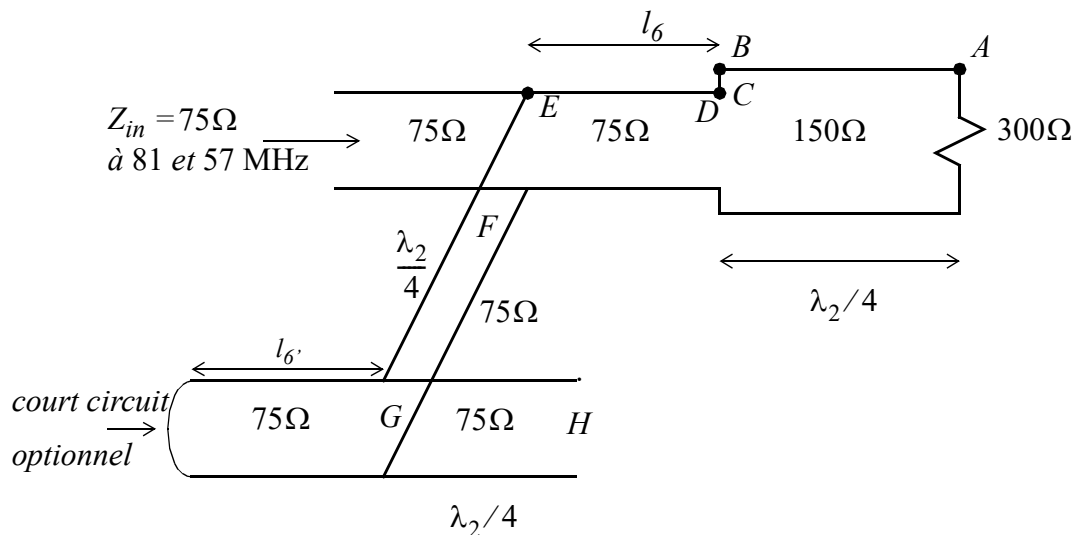
Tel que montré dans la figure l'adaptation à 57 MHz est obtenue avec une ligne de longueur $\lambda_2/4$ et d'impédance caractéristique de $150\Omega = \sqrt{75 \times 300}$.

Objectif:

- Adapter une résistance de charge de 300Ω à une ligne de transmission ayant $Z_0 = 75\Omega$ aux fréquences de 57 et 81 MHz.

Contraintes:

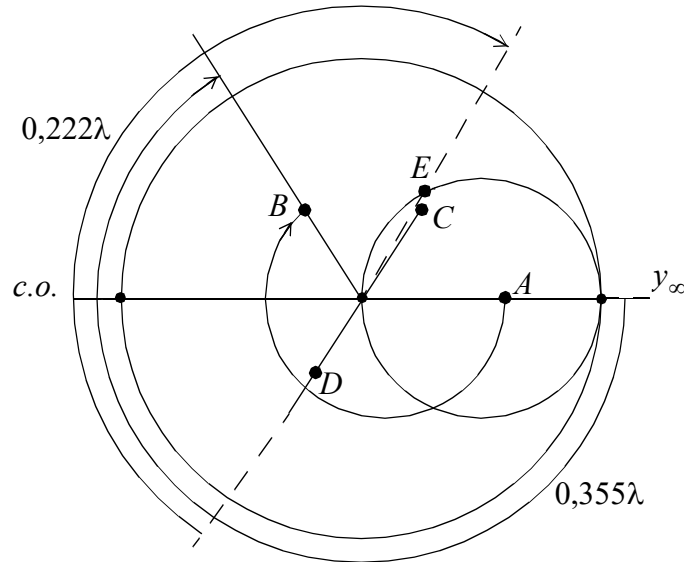
- adaptation à 57 MHz ne doit pas être affectée par le circuit d'adaptation à 81 MHz.
- le circuit à construire est uniquement formé de lignes de 75Ω .
- topologie du circuit réalisant l'adaptation:



- Détermination de l_6

Au point E , on doit avoir une conductance normalisée unitaire.

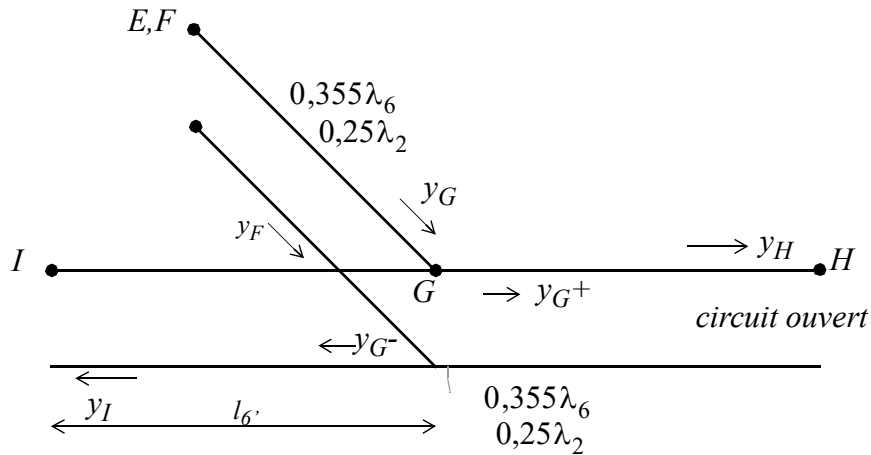
- On part de $R_L = 300\Omega$ sur une ligne de 150Ω , i.e. $z_L = 2$, point A .
- En terme de λ_6 la ligne $\lambda_2/4$ devient $\frac{\lambda_6 \lambda_2}{\lambda_6 4} = \frac{\lambda_6 \lambda_2}{4 \lambda_6} = \frac{\lambda_6 f_6}{4 f_2} = 0,355\lambda_6$.
- On effectue donc un déplacement du point A de $0,355\lambda$ vers le générateur jusqu'au point B .
- Il faut alors renormaliser l'impédance par rapport à une impédance caractéristique de 75Ω , ce qui déplace le point B vers le point C . L'impédance normalisée en C est obtenue par: $z_c = (z_B \times 150\Omega)/75\Omega \approx 1,4 + 1j$.
- Puisque l'adaptation se fera par l'ajout de composant en parallèle, on doit transformer z_C en y_D , ce qui est une simple rotation de 180° dans l'abaque.
- Finalement, on effectue une rotation vers le générateur jusqu'au point E pour avoir $Re\{y\} = 1$. Cette rotation est de $0,222\lambda \Rightarrow l_6 = 0,222\lambda_6$ et $y_E = 1 + j0,92$.



d. Détermination de l_6'

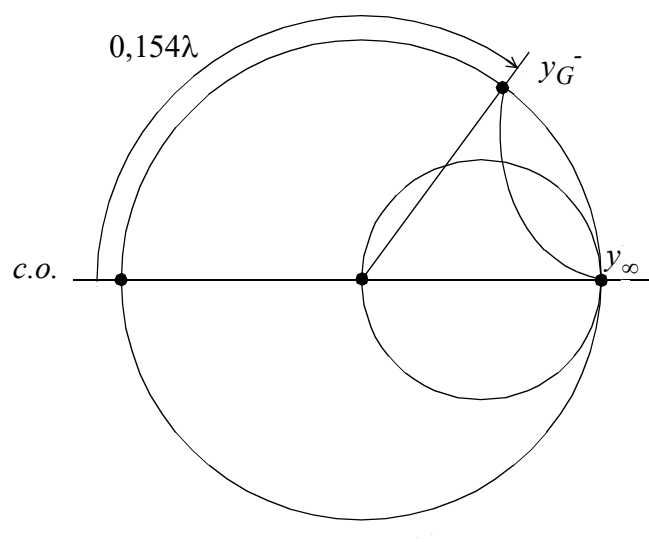
À fin de réussir l'adaptation, il faut que la charge branché en parallèle au point E ait une admittance normalisée de $y_F = -j0,92$ à 81MHz. Par contre, pour ne pas nuire à l'adaptation à 57MHz, il faut avoir $y_F(57) = 0$. Ceci est accompli par le circuit ouvert au

point H , lequel se transforme en court circuit au point G (car $\overline{GH} = \lambda_2/4$) puis en circuit ouvert au point F (car $\overline{FG} = \lambda_2/4$).



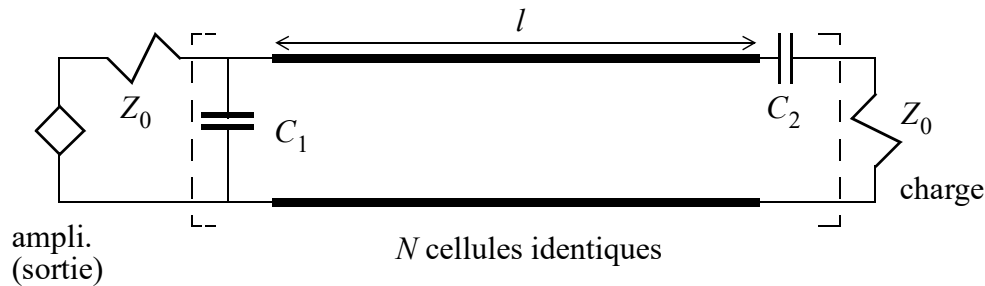
- à 81MHz, on obtient y_G en déplaçant le point $y_F = -j0,92$ de $0,355\lambda$ en tournant vers la charge. Ceci nous mène à $y_G \approx j0,17$. (N.B. $0,25\lambda_2 = 0,355\lambda_6$)
- L'admittance à droite du point G est celle d'un tronçon de circuit ouvert de $0,355\lambda$ (à 81MHz), soit: $y_{G^+} = -j1,29$.
- Ceci nous permet de trouver l'admittance vue à gauche du point G par: $y_G = y_{G^+} + y_{G^-}$ tel que $y_{G^-} = 0,17j + 1,29j = j1,46$.
- Pour réaliser $y_{G^-} = j1,46$, on a un tronçon de ligne plus court avec un tronçon terminé par un circuit ouvert. Sur l'abaque, on lit $l'_6 = 0,154\lambda_6$.

•



Problème 1.16 Régime permanent, modèles de quadrupôle

Un circuit utilisé dans une application de communications sans fils à 2,45 GHz inclut un amplificateur à transistor MESFET. Dans le but d'avoir la plus grande efficacité énergétique du transistor, on l'opère en mode grand signal. Ceci génère de la distorsion à la sortie, due entre autre à la présence d'une seconde harmonique à 4,9 GHz. On propose de mettre un filtre à la sortie de l'amplificateur pour éliminer cette fréquence et ne laisser passer que la fréquence fondamentale. La topologie du filtre proposée est une mise en cascade d'un grand nombre (N) de cellules de base identiques. Chaque cellule contient deux condensateurs et un bout de ligne de transmission d'impédance caractéristique Z_0 . L'impédance interne de l'amplificateur et l'impédance de la charge en bout de circuit sont aussi égales à Z_0 .

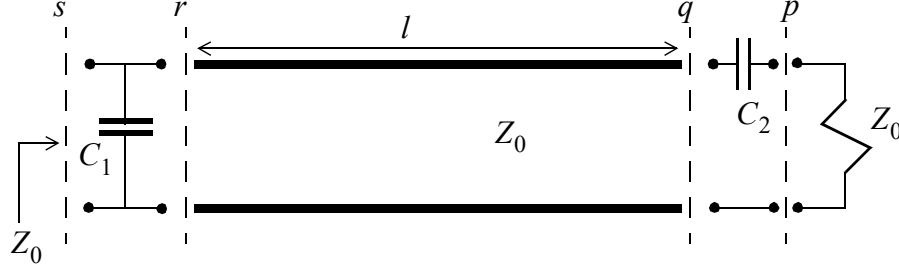


- À l'aide d'abaques de Smith, déterminez la valeur de l en termes de longueurs d'ondes à 2,45 GHz, ainsi que la relation entre C_1 et C_2 , qui fait en sorte que la sortie de l'amplificateur voit une charge adaptée à 2,45 GHz.
- En vous servant de l'abaque, vérifiez que la deuxième harmonique à 4,9 GHz sera atténuée si on utilise un grand nombre de cellules.
- Trouvez la matrice ABCD de la cellule élémentaire à 2,45 GHz à partir des conditions trouvées en **a**. Déterminez ensuite la matrice ABCD d'un ensemble de N cellules.

Solution

- Puisqu'on ne spécifie pas le nombre de cellules, on doit s'assurer que le filtre fonctionnera pour une valeur de N arbitraire. En conséquences, il faut que la cellule soit "transparente", c'est-à-dire qu'elle puisse transformer l'impédance de charge Z_0 en une impédance d'entrée qui soit aussi de Z_0 à la fréquence de 2,45 GHz. Afin de faciliter

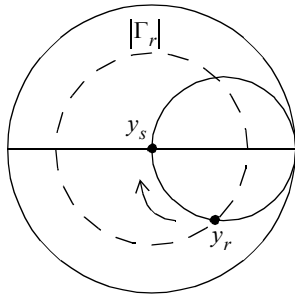
l'explication, on scindera la cellule en sous-éléments séparés par les plans p , q , r et s . On s'intéressera aux impédances (z_p et z_q) ou aux admittances (y_r et y_s) vues à droite de ces plans.



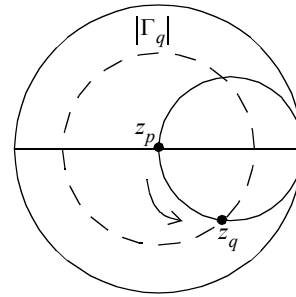
Puisque C_2 est en série et C_1 en parallèle, on obtiendra d'abord respectivement leur impédance et admittance normalisées. Posons donc:

$$\begin{aligned} y_1 &= j\omega C_1 / Y_0 = jb_1 & b_1 > 0 \\ z_2 &= 1 / (j\omega C_2 Z_0) = jx_2 & x_2 < 0 \end{aligned} \quad (105)$$

Puisqu'il faut avoir $y_s = 1$ lorsque le circuit est adapté, et que nous avons $y_s = y_r + y_1$, il en résulte que $y_r = 1 + jb_r$ avec $b_r = -b_1$. Étant donné que $b_r < 0$, on peut poser le point y_r sur la partie inférieure du cercle de conductance unitaire dans l'abaque de Smith. De même, puisqu'on a que $z_q = 1 + jx_2$ et que $x_2 < 0$, le point z_q sera sur la partie inférieure du cercle de résistance unitaire dans l'abaque de Smith.



coordonnées y



coordonnées z

Les plans r et q étant reliés par un simple bout de ligne de transmission, il faut obligatoirement que les points y_r et z_q soient sur des cercles ayant le même rayon $|\Gamma|$, ce qui revient à dire que $|\Gamma_r| = |\Gamma_q|$. Si tel est le cas, alors d'après les abaques ci-haut on constate qu'on

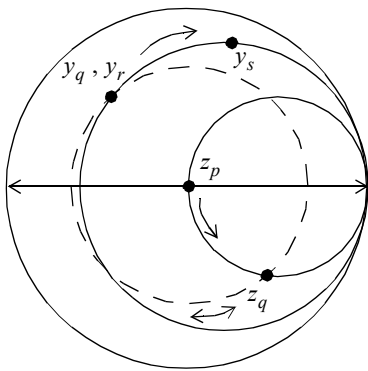
aura donc aussi $y_r = z_q$. Pour trouver la longueur du bout de ligne, il nous suffit donc de transformer z_q en y_q , puis de tourner sur l'abaque dans le sens horaire de y_q à y_r . Passer de z_q à y_q équivaut à faire un demi-tour dans l'abaque, la longueur du segment l pour passer de y_q à y_r représentera elle aussi un demi-tour car il faut revenir au même point ($y_r = z_q$). On en déduit donc que $l = \lambda/4$ où λ est la longueur d'onde dans la ligne à 2,45 GHz.

De même, l'égalité $y_r = z_q$ permet de trouver une relation sur les valeurs de capacités:

$$\begin{aligned}
 1 + jb_r &= 1 + jx_q \\
 b_r = x_q &\rightarrow -b_1 = x_2 \\
 \frac{\omega C_1}{Y_0} &= \frac{1}{\omega C_2 Z_0} \\
 \omega C_1 \omega C_2 &= 1/Z_0^2
 \end{aligned} \tag{106}$$

avec $\omega = 2\pi \times 2.45 \times 10^9$.

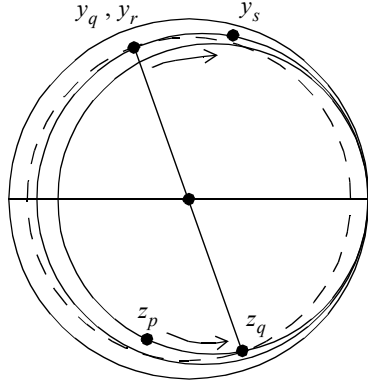
b. À 4,9 GHz, nous avons que $l = \lambda/2$. Aussi, la valeur de y_1 est doublée alors que celle de z_2 est réduite de moitié. Les passages successifs aux plans p , q , r et s de la première cellule sont illustrés ci-dessous. On remarque que la nouvelle valeur de l fait en sorte que $y_r = y_q$.



- passage de z_p à z_q par l'ajout de z_2 , déplacement sur le cercle de résistance unitaire;
- rotation de 180 degrés pour transformer z_q en y_q ;
- rotation de 360 degrés sur un cercle de $|\Gamma|$ constant pour transformer y_q en y_r ;
- passage de y_r à y_s par l'ajout de y_1 , déplacement sur un cercle de conductance constante

- z_s peut être obtenu simplement en tournant y_s de 180 degrés.

Nous pouvons maintenant utiliser z_s trouvé pour la première cellule comme point de départ z_p de la seconde cellule. Les transformations effectuées par la deuxième cellule sont illustrées dans l'abaque suivant:



- passage de z_p à une valeur plus capacitive z_q par déplacement sur un cercle de résistance constante;
- rotation de 180 degrés pour transformer z_q en y_q ;
- rotation de 360 degrés pour passer de y_q à y_r ;
- passage de l'admittance à une valeur plus capacitive y_s par un déplacement sur un cercle de conductance constante.

Les cercles de conductance et de résistance constante sont décalés à droite par rapport au centre de l'abaque. Ainsi, puisque $\text{Im}\{y_s\} > \text{Im}\{y_r\}$, on voit que y_s sera toujours plus près du bord de l'abaque que ne l'est y_r . Un raisonnement analogue permet de constater que z_q sera toujours plus proche du bord de l'abaque que ne l'est z_p . Ceci nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned} |\Gamma(z_q)| &> |\Gamma(z_p)| \equiv |\Gamma_p| \\ |\Gamma(y_s)| &> |\Gamma(y_r)| \end{aligned} \quad (107)$$

Par contre, on a aussi que:

$$\begin{aligned} |\Gamma(y_r)| &= |\Gamma(y_q)| = |\Gamma(z_q)| \equiv |\Gamma_{qr}| \\ |\Gamma(y_s)| &= |\Gamma(z_s)| \equiv |\Gamma_s| \end{aligned} \quad (108)$$

On peut alors en déduire:

$$|\Gamma_s| > |\Gamma_{qr}| > |\Gamma_p| \quad (109)$$

On pourrait vérifier que cette inégalité sera satisfaite tant et aussi longtemps que $\text{Im}\{z_p\} \leq 0$. Aussi, il suffit que le premier z_p satisfasse cette condition pour qu'il en soit ainsi pour tous les autres z_p car

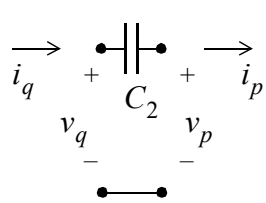
$$\begin{aligned}\text{Im}\{z_2\} < 0 &\rightarrow \text{Im}\{z_q\} < \text{Im}\{z_p\} \\ \text{Im}\{y_1\} > 0 &\rightarrow \text{Im}\{y_s\} > \text{Im}\{y_r\}\end{aligned}\tag{110}$$

Finalement, puisque le passage de la cellule k à la cellule $k+1$ fait en sorte que:

$$\begin{aligned}|\Gamma_p|_{k+1} &= |\Gamma_s|_k > |\Gamma_p|_k \\ |\Gamma_p|_{k+1} &> |\Gamma_p|_k\end{aligned}\tag{111}$$

on voit que plus on ajoutera de cellules, plus on se rapprochera du bord de l'abaque et donc moins l'adaptation d'impédance à 4,9 GHz sera bonne à la sortie de l'amplificateur.

c. Pour trouver la matrice ABCD de l'ensemble de la cellule, il suffit de trouver les matrices des deux condensateurs et du bout de ligne et de multiplier ces matrices dans la même séquence que l'ordre de branchement. Pour le condensateur C_2 , on voit que:




$$\begin{aligned}v_q &= v_p + i_p / j\omega C_2 \\ i_q &= i_p\end{aligned}\tag{112}$$

On peut ré-écrire ces équations facilement dans le format requis pour la matrice ABCD:

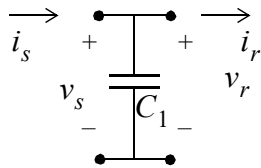
$$\begin{bmatrix} v_q \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j/\omega C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ i_p \end{bmatrix}\tag{113}$$

Pour le bout de ligne de transmission à 2,45 GHz, la matrice ABCD est grandement simplifiée car $\beta l = \pi/2$:



$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \beta l & jZ_0 \sin \beta l \\ jY_0 \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_q \\ i_q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & jZ_0 \\ jY_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_q \\ i_q \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{114}$$

Quant au condensateur parallèle C_1 , les tensions et courants à ses bornes sont reliés par les équations suivantes:



$$\begin{aligned} v_s &= v_r \\ i_s &= i_r + v_r j \omega C_1 \end{aligned} \quad (115)$$

soit:

$$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix}$$

Pour la cellule entière nous obtenons donc:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & jZ_0 \\ jY_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/j\omega C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ i_p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & jZ_0 \\ jY_0 - Z_0\omega C_1 + 1/\omega C_2 Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ i_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (116)$$

Avec la condition trouvée en **a** pour la conception du filtre, soit $Z_0^2 = 1/\omega^2 C_1 C_2$, l'élément D de la matrice s'annule. On obtient alors $v_s = jZ_0 i_p$ et $i_s = jy_0 v_p$. On vérifie donc que $v_s/i_s = Z_0$, ce qui indique que la sortie de l'amplificateur voit une charge adaptée à 2,45 GHz, comme prévu.