

### 3.0 Guides d'ondes

#### Problème 3.1

Un guide métallique circulaire a un rayon interne de 1 centimètre est excité à une fréquence de 10 GHz. Le guide fonctionne dans le mode fondamental. À cause d'un obstacle, il y a des ondes stationnaires qui sont créées dans la direction longitudinale.

- a. La distance entre les minima de champ électrique est de 1,35 centimètre. Quelle est la vitesse de phase dans le guide?
- b. À partir du résultat de la question a.), quelle est la valeur de la constante diélectrique dans le guide si  $\mu_r = 1$  ?

#### Solution

- a. Tout d'abord il faut trouver la longueur d'onde qui est donnée par la relation suivante  $\Delta d_{min} = \lambda_g/2 = 1,35 \text{ cm}$ , ce qui nous donne  $\lambda_g = 2,7 \text{ cm}$ . Selon la relation entre la vitesse de phase et la longueur d'onde,  $u_\phi = f \cdot \lambda_g$ , on trouve:

$$u_\phi = 10 \times 10^9 \cdot 2,7 \times 10^{-2} = 2,7 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (340)$$

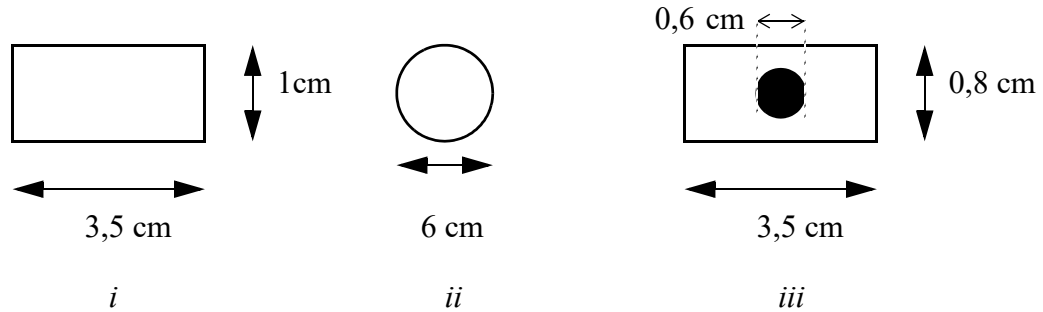
- b. On sait que  $\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$ , avec  $\lambda = c/f$  et  $f_c$  la fréquence du coupure du mode fondamental qui est donnée par  $f_c = c \chi_{11}' / 2\pi a$ .  $\chi_{11}'$  est le premier zéro de  $J_1'$ , la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre 1, alors que  $c$  et  $a$  sont respectivement la vitesse de la lumière en propagation libre dans le diélectrique et le rayon du guide. En manipulant les expressions ci-haut, on obtient:

$$c^2 = \frac{\lambda_g^2 f^2}{1 + \left( \frac{\chi_{11}' \lambda_g}{2\pi a} \right)^2} = \frac{(2,7 \times 10^{-2} \times 10^{10})^2}{1 + \left( \frac{1,8412 \times 2,7 \times 10^{-2}}{2\pi \times 10^{-2}} \right)^2} \quad (341)$$

ce qui donne  $c = 2,117 \times 10^8 \text{ m/s} = c_0 / \sqrt{\epsilon_r}$ .  $c$  est relié à  $c_0$ , la vitesse de la lumière dans le vide, par la relation  $c = c_0 / \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ , où  $c_0 = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Puisque  $\mu_r = 1$ , on trouve que  $\epsilon_r = (c_0/c)^2 = 2$ .

### Problème 3.2

Trois guides d'onde sont montrés en coupe dans la figure suivante. Les régions noires sont constituées de métal parfaitement conducteur alors que les régions claires sont constituées de vide.



- Dans chacune des trois structures, donnez le type (et spécifiez les indices  $mn$  s'il y a lieu) du mode fondamental.
- Quelle est la fréquence de coupure des trois modes identifiées en a)?
- Pour les guides  $i$  et  $ii$ , donnez la bande de fréquence dans laquelle un seul mode peut se propager sans atténuation.
- Quelle est la vitesse de phase et la vitesse de groupe du mode fondamental dans les guides  $i$  et  $ii$  à une fréquence égale à 1,5 fois la fréquence de coupure respective de chaque mode?
- Le guide  $i$  donne 100 dB d'atténuation à 5 GHz. Quelle est la longueur du guide si on suppose que la conductivité des parois est maintenant de  $10^7$  S/m?

### Solution

a.

i) Mode  $TE_{10}$ .

ii) Mode  $TE_{11}$ .

iii) Mode TEM.

b. À la coupure on a  $k_t = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon} = \omega / c$ , où  $k_t$  est la composante transversale du vecteur d'onde.

- Pour le Mode  $TE_{10}$  dans le guide  $i)$ :  $k_t = \pi/a$ . Donc  $\omega_c/c = \pi/a$ , d'où l'on tire  $f_c = c/2a = 4,28 \text{ GHz}$ .
- Pour le guide  $ii)$ :  $k_t a = 1,8412 = \omega a/c$ ; donc  $f_c = 1,8412c/2\pi a = 2,89 \text{ GHz}$ .
- Pour le guide  $iii)$ :  $k_t = 0$  d'où l'on déduit  $f_c = 0$ .

**c.**

- guide  $i)$ : On a  $f_c(TE_{20}) = 2f_c(TE_{10})$  et  $f_c(TE_{01}) = 3,5f_c(TE_{10})$ . Le premier mode à apparaître après  $TE_{10}$  sera donc  $TE_{20}$ . Il n'y aura donc qu'un seul mode dans la plage  $f_c(TE_{10}) < f < f_c(TE_{20})$ , c'est à dire:

$$4,28 \text{ GHz} < f < 8,56 \text{ GHz} \quad (342)$$

- guide  $ii)$ : On a  $k_t a = 3,0542(TE_{21}), 2,4049(TM_{01}), 1,8412(TE_{11})$ . Les autres  $k_t a$  sont plus grands. L'intervalle recherché est donc  $f_c(TE_{11}) < f < f_c(TM_{01})$  c'est à dire:

$$2,89 \text{ GHz} < f < 2,89 \text{ GHz} \times \frac{2,4049}{1,8412} \quad (343)$$

**d.** Pour un guide vide, les vitesses de phase et de groupe sont données respectivement par:

$$u_\phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (344)$$

$$u_g = c^2/u_\phi = c\sqrt{1 - (f_c/f)^2}$$

où  $k_z$  est le nombre d'onde du mode considéré. Donc pour le guide  $i)$  on trouve

$$u_\phi = 3 \times 10^8 / \sqrt{1 - (1/1,5)^2} = 4,02 \times 10^8 \text{ m/s} \text{ et } u_g = 2,23 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

On trouve la même chose pour l'autre guide car le rapport  $f_c/f$  est le même.

**e.** La variation du champ électrique sur une distance  $d$  dans la direction  $z$  s'exprime par:

$$|E(d)| = |E(0)|e^{-\alpha d} \quad (345)$$

Le guide  $i)$  nous donne 100 dB d'atténuation à 5 GHz, c'est à dire  $20\log_{10}(|E(d)|/|E(0)|) = -100 \text{ dB}$  d'où l'on tire  $|E(d)|/|E(0)| = 10^{-5} = e^{-\alpha d}$ . On

en déduit que  $\alpha d = -\ln(10^{-5}) = 11,51$ .  $\alpha$ , la constante d'atténuation linéique dans le guide est donnée par:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \frac{\left[1 + \frac{2b}{a}(f_c/f)^2\right]}{b\eta\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (346)$$

où  $\eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377\Omega$ ,  $\mu = 4\pi/10^7$  H/m,  $\sigma = 10^7$  S/m,  $b = 1$  cm et  $a = 3,5$  cm. À 5 GHz, les calculs donnent  $\alpha = 0,032$  neper/m. Et la longueur du guide  $d$  sera alors  $d = 360$  m.

### Problème 3.3

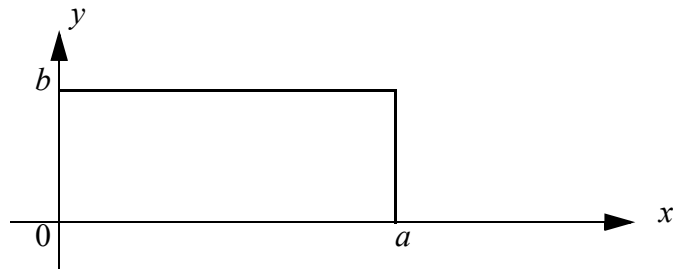
Considérant les modes  $TE_{mn}$  dans un guide métallique rectangulaire de dimensions latérales 2,3 cm par 1 cm, trouvez:

- l'expression des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  pour ces modes;
- l'impédance caractéristique, la vitesse de phase et la vitesse de groupe du mode  $TE_{32}$  à une fréquence égale à 1,5 fois la fréquence de coupure; on considère que le milieu interne est le vide;
- pour le mode dominant, la distance entre les minima successifs lorsqu'un obstacle crée des réflexions dans le guide et que la fréquence est de 10 GHz;
- les endroits où l'on retrouve une polarisation circulaire du champ magnétique, lorsque le mode dominant se propage dans le guide sans rencontrer d'obstacle.

### Solution

- Pour les modes TE, toutes les composantes de champ peuvent être retrouvées à partir de l'expression de la composante  $H_z$  et des opérateurs différentiels suivants:

(347)



avec  $\beta^2 = k_t^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ .

Après avoir inséré  $H_z$  dans les opérateurs, on obtient:

$$\begin{aligned}
H_z &= K \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z} \\
E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} &= \frac{j\omega\mu}{k_t^2} \left\{ \hat{\mathbf{x}} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right\} \\
H_x \hat{\mathbf{x}} + H_y \hat{\mathbf{y}} &= \frac{-jk_z}{k_t^2} \left\{ \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right\} \\
E_x &= \frac{n\pi j\omega\mu}{b k_t^2} K \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z} \\
E_y &= -\frac{m\pi j\omega\mu}{a k_t^2} K \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z} \\
H_x &= \frac{m\pi}{a} \frac{jk_z}{k_t^2} K \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z} \\
H_y &= \frac{n\pi}{b} \frac{jk_z}{k_t^2} K \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-jk_z z}
\end{aligned} \tag{348}$$

Puisqu'il s'agit d'un mode TE, nous avons évidemment  $E_z = 0$ .

**b.** Nous utiliserons comme définition de l'impédance caractéristique le rapport des composantes transversales à  $z$  des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , soit  $\|\mathbf{E}\|_{\text{transversal}}/\|\mathbf{H}\|_{\text{transversal}}$ . Par exemple pour le champ  $\mathbf{E}$  nous avons:  $\|\mathbf{E}\|_{\text{transversal}} = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$ . Après calcul à partir des expressions ci-dessus nous obtenons:

$$\eta_g = \frac{j\omega\mu}{jk_z} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \tag{349}$$

Ici nous avons fait usage de l'égalité  $k_z = \beta_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$ . La constante  $c$  est la vitesse des ondes TEM dans le milieu, soit  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . Pour tous les modes TE, l'impédance caractéristique à  $f = 1.5f_c$  sera donc:

$$\eta_g = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1 - (1/1.5)^2}} = \frac{\eta_{\text{vide}}}{\sqrt{1 - (1/1.5)^2}} = \frac{377\Omega}{\sqrt{1 - (1/1.5)^2}} = 506\Omega \quad (350)$$

où nous avons utilisé  $377\Omega$  pour l'impédance caractéristique des ondes planes dans le vide. Pour un guide vide, les vitesses de phase et de groupe sont données respectivement par:

$$\begin{aligned} u_\phi &= \frac{c}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = 4.02 \times 10^8 \text{ m/s} \\ u_g &= c \sqrt{1 - (f_c/f)^2} = 2.23 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (351)$$

**c.** Un obstacle réfléchissant dans le guide donnera lieu à des ondes stationnaires. La distance entre les minima dans ce cas est toujours égale à une demie longueur d'onde le long de la direction de propagation. Avec la relation  $u_\phi = \lambda_g f$  et l'équation (351), nous pourrions facilement obtenir une valeur numérique pour  $\lambda_g/2$  à 10 GHz, mais il nous faut d'abord calculer la fréquence de coupure. Pour le mode  $\text{TE}_{10}$ , celle-ci est donnée simplement par  $c/2a$ , soit 6.52 GHz. Combinant toutes ces équations, nous arrivons à:

$$\lambda_g = \frac{c/f}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = 3.95 \text{ cm} \quad (352)$$

La distance entre les minima sera donc de 1,975 cm, soit  $\lambda_g/2$ .

**d.** Dans le mode fondamental ( $m = 1, n = 0$ ), les expressions des composantes du champ magnétique lorsqu'il n'y a pas de réflexions se réduisent simplement à:

$$\begin{aligned} H_z &= K \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_z z} \\ H_x &= \frac{\pi j k_z}{a k_t^2} K \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (353)$$

La polarisation circulaire est obtenue lorsque les deux composantes sont de même amplitude et que leurs phases diffèrent de  $\pm\pi/2$ , en d'autres termes lorsque  $H_x/H_z = \pm j$ .

Notant que  $k_t^2 = (\pi/a)^2$  pour le mode fondamental, la polarisation circulaire sera obtenue lorsque:

$$\frac{k_z a}{\pi} \tan\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \pm 1 \quad 0 \leq x \leq a \quad (354)$$

$$\text{soit } x = \frac{a}{\pi} \operatorname{atan}\left(\pm \frac{\pi}{k_z a}\right) \quad (355)$$

On peut déduire d'après la fonction "tan" qu'il y aura polarisation circulaire pour deux valeurs de  $x$  situées de part et d'autre du plan  $x = a/2$ , et que la rotation de  $\mathbf{H}$  dans ces deux plans sera en sens contraire. La présence de la polarisation circulaire dans ce mode est à la base du fonctionnement de dispositifs micro-ondes essentiels (isolateurs, circulateurs) utilisant des composés ferromagnétiques.



### Problème 3.4

Un guide métallique rectangulaire rempli d'air a pour dimensions latérales 20 centimètres et 6 centimètres. On désire utiliser ce guide pour un four micro-ondes industriel dont la fréquence de source est 915 MHz.

- a. Commentez sur le choix de la taille du guide en termes du nombre de modes possibles à la fréquence de travail.
- b. Calculez les vitesses de groupe et de phase du mode fondamental à 915 MHz.
- c. Combien de décibels d'atténuation a-t-on encouru après 3 mètres de guide à cette fréquence si celui-ci a une conductivité de  $6.5 \times 10^7 \text{ S/m}$  ?
- d. Le champ de claquage dans le guide est de 300 kV/m. Quelle est la puissance maximum qu'on peut transmettre à une charge dont le coefficient de réflexion est de 0.8. On supposera que les pertes dans le guide sont nulles et que la propagation s'effectue dans le mode fondamental uniquement.

### Solution

a. Pour cela, on va calculer la fréquence de coupure des premiers modes:

- mode 10:  $f_c^{10} = c/2a = 3 \times 10^8 \text{ m/s} / 40 \text{ cm} = 750 \text{ MHz}$
- mode 01:  $f_c^{01} = c/2b = 3 \times 10^8 \text{ m/s} / 12 \text{ cm} = 2,5 \text{ GHz}$
- mode 20:  $f_c^{20} = c/a = 3 \times 10^8 \text{ m/s} / 20 \text{ cm} = 1,5 \text{ GHz}$

Donc, on voit bien que seul le mode fondamental  $\text{TE}_{10}$  pourra se propager sans atténuation.

b. Les vitesses de phase et de groupe du mode fondamental à 915 MHz sont données respectivement par:

$$u_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{1 - (750/915)^2}} = 5.23 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (356)$$
$$u_g = c^2 / u_\phi = 1.71 \times 10^8 \text{ m/s}$$

c. Pour cela, on va calculer le coefficient d'atténuation de l'onde qui est donné par:

$$\alpha = \frac{R_s}{b\eta\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \left[ 1 + \frac{2bf_c^2}{af^2} \right] \quad (357)$$

où  $\eta = 377\Omega$  est l'impédance caractéristique dans le vide et

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 915 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{2 \times 6,5 \times 10^7}} = 7.45 \times 10^{-3} \Omega \quad (358)$$

En substituant  $R_s$  par sa valeur dans l'équation (358), on trouve  $\alpha = 8.06 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ .

Donc, l'atténuation après 3m de guide sera  $e^{-\alpha \times 3} = 0.997$  et par passage en décibel, on trouve:

$$20 \log_{10} 0.997 = -0.021 \text{ dB} \quad (359)$$

**d.** Pour le mode fondamental  $\text{TE}_{10}$ , la puissance est donnée par:

$$P_z = \frac{1}{4} |H_{oz}^{\text{inc}}|^2 \eta ab (f/f_c)^2 \sqrt{1-(f_c/f)^2} \quad (360)$$

où:

$$|H_{oz}^{\text{inc}}| = |E_{oy}^{\text{inc}}| \frac{\pi}{a\omega\mu} \quad (361)$$

Si la charge a un coefficient de réflexion de 0,8 alors:

$$\max |E_y| = |E_{oy}^{\text{inc}}| (1 + |\Gamma|) \quad (362)$$

Ce champ maximum doit demeurer inférieur au champ de claquage de  $3 \times 10^5 \text{ V/m}$ . Il en résulte donc que  $|E_{oy}^{\text{inc}}| = 1.66 \times 10^5 \text{ V/m}$ , et en effectuant les substitutions nécessaires dans l'équation (362), on trouve:

$$|H_{oz}^{\text{inc}}| = \frac{\pi \times 1.66 \times 10^5}{0.2 \times 2\pi \times 915 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 362.4 \text{ A/m} \quad (363)$$

Donc la valeur de la puissance incidente sera au maximum:

$$P_z^{\text{inc}} = \frac{1}{4} \cdot (362.4)^2 \cdot 377 \cdot 0.2 \cdot 0.06 \cdot (915/750)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{750}{915}\right)^2} = 1.27 \times 10^5 \text{ Watts} \quad (364)$$

Finalement, on peut en déduire la puissance absorbée par la charge:

$$P_{\text{absorbée}} = P_z^{\text{inc}} (1 - |\Gamma|^2) = 4.55 \times 10^4 \text{ Watts} \quad (365)$$

### Problème 3.5

Une guide d'ondes rectangulaire rempli d'air a les dimensions suivantes:  $a = 4$  cm et  $b = 1$  cm.

- a. Si on propage que le mode  $TE_{10}$  à une fréquence de 5 GHz, quelle puissance maximum peut-on utiliser sachant que le champ de claquage dans l'air est de 300 kV/m?
- b. Si une charge ayant  $|\Gamma| = 0.3$  est présente au bout du guide, quelle est la puissance maximum que nous pouvons dissiper dans cette charge?

### Solution

- a. Pour un guide rectangulaire, la fréquence de coupure des modes ayant pour indices  $m$  et  $n$  est donné par  $f_c = k_t c / 2\pi$  où  $k_t = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$  et  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu (air). Pour le mode fondamental  $TE_{10}$ , nous avons  $f_c = c/2a$ , soit  $f_c = 3.75$  GHz, dans le mode fondamental, il n'y a que la composante  $E_y$  pour le champ électrique et celle-ci doit être inférieure au champ disruptif de 300 kV/m. L'amplitude de  $E_y$  est donnée par:

$$|E_y| = \frac{|H_{0z}| \omega \mu a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} < 300 \text{ kV/m} \quad (366)$$

où  $H_{0z}$  est l'amplitude du champ  $H_z$ . L'inégalité ci-dessus conduit à  $|H_{0z}| < 596.8$  A/m. Pour calculer la puissance maximale, nous utilisons l'équation suivante:

$$P_z = \frac{|H_{0z}|^2 \omega \mu \beta_g ab}{4k_t^2} \quad (367)$$

avec  $k_t = m\pi/a$  et  $\beta_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$ . Le calcul donne une puissance de 15.8 kW.

- b. La puissance transmise à la charge  $P_{trans}$  est obtenue à l'aide de la puissance incidente et du coefficient de réflexion avec  $P_{trans} = P_{inc}(1 - |\Gamma|^2) = 0.91 P_{inc}$ . Puisqu'il y a réflexion au bout du guide, nous devons nous assurer que le champ total est en tout temps inférieur au champ disruptif. En termes d'onde incidente, il faut donc que  $E_{inc}(1 + |\Gamma|) < 300$  kV/m. La valeur de  $|H_{0z}|$  trouvée en a.) doit donc être réduite par

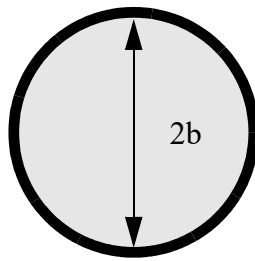
un facteur  $1 + |\Gamma|$  et en conséquence, la puissance incidente sera celle trouvée précédemment, mais réduite du facteur  $(1 + |\Gamma|)^2$ . La puissance transmise à la charge sera donc:

$$P_{\text{trans}} = 15,8 \text{ kW} \times \frac{(1 - |\Gamma|^2)}{(1 + |\Gamma|)^2} = 8.5 \text{ kW} \quad (368)$$

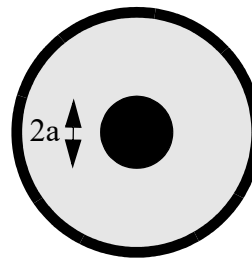
### Problème 3.6

Un guide métallique circulaire a un rayon interne  $b$  de 7 millimètres. Le guide est rempli de Téflon ayant une permittivité relative de 2.04.

- Quelle est la fréquence de coupure du mode fondamental dans ce guide?
- Si il y a un obstacle qui crée des réflexions du mode fondamental, quelle sera la distance entre deux minima consécutifs de champ électrique le long du guide si la fréquence d'opération est égale à 1.5 fois la fréquence de coupure?
- Donnez l'expression générale des trois composantes du champ électrique du mode  $TM_{22}$ .
- On désire ajouter un conducteur central de rayon  $a$  au centre de ce guide pour en faire une ligne coaxiale. Quelle doit être la valeur de  $a$  pour que l'impédance caractéristique du mode TEM dans ce guide soit de  $50 \Omega$ ?



guide circulaire



guide coaxial

### Solution

- Pour un guide circulaire de rayon  $b$ , la fréquence de coupure des modes TE est donné par  $f_c^{mn} = (k_t^{mn} c) / (2\pi \sqrt{\epsilon_r})$  où  $k_t^{mn} b$  est le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre  $m$  ( $J_1'(k_t^{mn} b) = 0$ ) et  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Dans le cas du mode fondamental  $TE_{11}$  la valeur de  $k_t^{mn} b$  est d'environ 1,84 et donc:

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{1.84}{b} = \frac{12.55}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ GHz} = 8.78 \text{ GHz} \quad (369)$$

- b.** Un obstacle réfléchissant dans le guide donnera lieu à des ondes stationnaires. La distance entre les minima dans ce cas est toujours égale à une demie longueur d'onde le long de la direction de propagation. Avec la relation  $\lambda_g = \lambda_{libre} / \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$ , nous pourrions obtenir une valeur numérique pour  $\lambda_g/2$ , où  $f = 1.5f_c = 13.17$  GHz et  $\lambda_{libre} = (c/\sqrt{\epsilon_r})/f = 1.59$  cm. Donc:

$$\lambda_g = \frac{1.59 \text{ cm}}{\sqrt{1 - (1/1.5)^2}} = 2.13 \text{ cm} \quad (370)$$

La distance entre les minima sera donc  $d_{min} = \lambda_g/2 = 1.069$  cm.

- c.** Pour le mode  $TM_{22}$ , toutes les composantes de champ peuvent être obtenues à partir de l'expression de la composante  $E_z$  qui s'écrit de la manière suivante  $E_z = AJ_2(k_t \rho) \cos(2(\varphi - \varphi_0)) e^{-jk_z z}$ . La valeur de  $k_t$  est trouvée en posant que  $k_t b$  est le deuxième zéro de la fonction de Bessel d'ordre 2. On trouve que  $k_t b = 8.417$ . En ce qui concerne les autres composantes, on les obtient à l'aide des opérateurs différentiels:

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{k_t^2} (-jk_z) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = \frac{-jk_z}{k_t} AJ_2'(k_t \rho) \cos(2(\varphi - \varphi_0)) e^{-jk_z z} \\ E_\varphi &= \frac{-jk_z}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = \frac{+jk_z}{k_t^2} \frac{2}{\rho} J_2(k_t \rho) \sin(2(\varphi - \varphi_0)) e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (371)$$

- d.** L'impédance caractéristique d'un guide coaxial est donnée par:

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln(b/a) \quad (372)$$

Où  $\eta = \eta_0 / \sqrt{\epsilon_r} = 120\pi / \sqrt{2.04}$ . Donc la valeur du rayon interne  $a$  pour avoir une impédance égale à  $50 \Omega$  est obtenu facilement après substitution de  $Z_0$  par sa valeur. On trouve alors:

$$a = b e^{-5\sqrt{2.04}/6} = 2.13 \text{ mm} \quad (373)$$

### Problème 3.7

Un guide circulaire a un diamètre de 5 cm et il est rempli d'air.

- a. Si on augmente la fréquence à partir de 0 Hz, quels sont les cinq premiers modes à pouvoir se propager dans le guide?

Les parties suivantes s'adressent spécifiquement au mode  $TM_{01}$

- b. Donnez les expressions générales des composantes de champ  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  pour ce mode.
- c. Exprimez le champ  $H_\phi$  sous la forme  $H_\phi = H_{0\phi} f(\rho) e^{-\gamma z}$  puis pour  $f > f_c$ , trouvez l'expression de la puissance  $P_z(z)$  associée au mode en fonction de  $H_{0\phi}$ .
- d. Déterminez l'expression de la densité de courant  $J_z$  à la surface du guide i.e. à  $\rho = 2.5$  cm, puis déduisez-en la puissance dissipée  $dP_z(z)$  dans les parois d'un élément de guide de longueur  $dz$ . On supposera que le guide est fait d'un excellent conducteur de conductivité  $\sigma$  et que l'approximation  $\mathbf{E}_{tan} = Z_s \mathbf{J}_s$  est valide à la surface du guide,  $Z_s$  étant l'impédance de surface du métal formant le guide.
- e. À partir des résultats des parties c et d, obtenez une expression pour la constante d'atténuation  $\alpha$ . (Aide: essayez d'obtenir une équation différentielle de la forme  $\frac{d}{dz} P_z(z) = -2\alpha P_z(z)$ )

### Solution

- a. Pour un guide circulaire de rayon  $a$ , la fréquence de coupure est donné par  $f_c^{mn} = (k_t^{mn} c)/(2\pi)$  où  $k_t^{mn} a$  est le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction de Bessel d'ordre  $m$  ( $J_m$ ) dans le cas des modes TM, ou de sa dérivée ( $J_m'$ ) dans le cas des modes TE. Les cinq plus petites valeurs de zéros sont:

- 1.8412, le premier zéro de  $J_1'$ ;
- 2.4048, le premier zéro de  $J_0$ ;
- 3.0542, le premier zéro de  $J_2'$ ;
- et à égalité, 3.8317, à la fois le premier zéro de  $J_1$  et le premier zéro de  $J_0'$ .



Dans l'air, avec  $c = 3 \times 10^8$  m/s, les premiers modes à se propager dans le guide sont donc:

- TE<sub>11</sub> avec une fréquence de coupure de 3.516 GHz;
- TM<sub>01</sub> avec une fréquence de coupure de 4.593 GHz;
- TE<sub>21</sub> avec une fréquence de coupure de 5.833 GHz;
- TE<sub>01</sub> et TM<sub>11</sub> avec une fréquence de coupure de 7.318 GHz.

**b.** Pour le mode TM<sub>01</sub>, les composantes des champs **E** et **H** s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 E_z &= L J_0(k_t \rho) e^{-\gamma z} \\
 E_\phi &= 0 \\
 E_\rho &= -L \frac{\gamma}{k_t} J_0'(k_t \rho) e^{-\gamma z} \\
 H_z &= 0 \\
 H_\phi &= -L \frac{j\omega \epsilon}{k_t} J_0'(k_t \rho) e^{-\gamma z} \\
 H_\rho &= 0
 \end{aligned} \tag{374}$$

où  $L$  est une constante arbitraire et  $k_t = 2.4048/a$ . Dans le cas où il n'y a pas de pertes dans les parois métalliques et dans le diélectrique remplissant le guide nous avons que  $\gamma = j\beta_g = jk_z$

**c.** Si l'on pose  $H_\phi = H_{0\phi} f(\rho) e^{-\gamma z}$ , nous avons d'après les résultats précédents que  $f(\rho) = J_0'(p\rho)$  et  $H_{0\phi} = -Lj\omega\epsilon/k_t$ . La densité de puissance du mode se propageant en direction  $z$  est donnée par la partie réelle de la composante du vecteur de Poynting en cette direction, soit:

$$(1/2) \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \cdot \hat{\mathbf{z}} = (1/2) \text{Re}\{E_\rho H_\phi^*\} \tag{375}$$

On remarque que  $E_\rho = \gamma H_\phi / j\omega\epsilon$ . Pour obtenir la puissance transmise dans le mode, il suffit d'intégrer cette densité de puissance sur la section du guide:

$$\begin{aligned}
P_z &= \frac{1}{2} \int_A \operatorname{Re} \{ E_\rho H_\varphi^* \} dA = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \operatorname{Re} \{ E_\rho H_\varphi^* \} \rho d\rho d\varphi \\
&= \pi |H_{0\varphi}|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \right\} \int_0^a (f(\rho))^2 \rho d\rho
\end{aligned} \tag{376}$$

L'intégrale sur  $\rho$  à évaluer est:

$$l = \int_0^a \rho (J_0'(k_t \rho))^2 d\rho \tag{377}$$

On a que  $J_0'(p\rho) = -J_1(p\rho)$ . L'intégrale devient alors:

$$l = \int_0^a \rho (J_1(k_t \rho))^2 d\rho \tag{378}$$

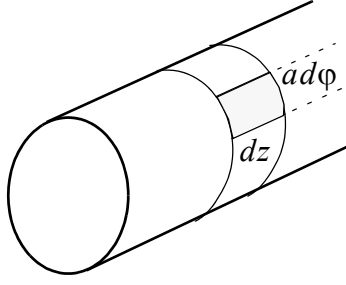
Cette intégrale est disponible dans des tables de mathématiques:

$$\int x J_n^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} (J_n'(\alpha x))^2 + \frac{x^2}{2} \left( 1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2} \right) (J_n(\alpha x))^2 \tag{379}$$

Nous aurons donc que:  $l = \frac{a^2}{2} (J_1'(k_t a))^2 + \frac{a^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{(k_t a)^2} \right) (J_1(k_t a))^2$ .

**d.** Partant de la condition frontière  $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}|_{\rho=a}$ , nous pouvons déduire la composante  $z$  de la densité de courant de surface. Celle-ci est donnée, avec  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\rho}$ , par:

$$\mathbf{J}_s = -\hat{\rho} \times \hat{\varphi} H_\varphi = -\hat{\mathbf{z}} H_{0\varphi} f(a) e^{-\gamma z} \text{ (A/m)} \tag{380}$$



La puissance dissipée dans un élément de surface  $ad\phi dz$  est obtenu à partir de la résistance de surface du métal  $R_s = Z_s = \text{Re}\{\sqrt{j\omega\mu/\sigma}\} = \sqrt{\omega\mu/2\sigma}$ . Pour calculer la résistance équivalente de l'élément de surface il suffit de multiplier  $R_s$  par la longueur de l'élément (dimension parallèle au sens du courant) et de diviser par la largeur (dimension perpendiculaire au sens du courant) de l'élément. Puisque le courant circule dans la direction  $z$ , la longueur de l'élément est  $dz$  et sa largeur est  $ad\phi$ . La résistance équivalente est donc  $R_{eq} = R_s dz / (ad\phi)$ . Le courant circulant dans l'élément est obtenu de la densité de courant de surface et de la largeur de l'élément:  $dI = (\mathbf{J}_s \cdot \hat{\mathbf{z}})ad\phi$ . La puissance dissipée dans l'élément est alors:  $dP_z = R_{eq}|dI|^2/2 = R_s ad\phi dz |\mathbf{J}_s \cdot \hat{\mathbf{z}}|^2/2$ . En substituant les valeurs de  $R_s$  et  $\mathbf{J}_s$  trouvées plus tôt, on arrive à:

$$dP_z = \sqrt{\omega\mu/8\sigma} |H_{0\phi}|^2 f(a)^2 ad\phi dz \quad (381)$$

Pour connaître la puissance dissipée dans un anneau de longueur  $dz$ , il suffit d'intégrer par rapport à  $\phi$ . L'intégrale selon  $\phi$  se résume à une multiplication par  $2\pi$  car il y a symétrie autour de l'axe  $z$ . Si on définit  $+P_z$  comme la puissance se propageant dans le guide, il faut changer le signe de l'expression (381) car il s'agit d'une perte de puissance dans les parois du guide. On peut donc écrire le taux de variation de puissance par rapport à  $z$  à partir de l'équation (381):

---

1. Puisque les fonctions de Bessel utilisées ont des valeurs réelles on écrit  $f^2$  au lieu de  $|f|^2$  pour alléger.

$$\frac{dP_z}{dz} = -2\pi a \sqrt{\omega\mu/8\sigma} |H_{0\phi}|^2 f(a)^2 \quad (382)$$

e. On cherche une constante d'atténuation  $\alpha$  telle que  $P_z(z) = P_z(0)e^{-2\alpha z}$ . Cette fonction est solution de l'équation différentielle  $dP_z/dz = -2\alpha P_z$ . Utilisant les expressions de  $P_z$  (eq. (376)) et  $dP_z/dz$  (eq.(382)) déjà trouvées, on peut isoler  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{a \sqrt{\omega\mu/8\sigma} f(a)^2}{Re \left\{ \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \right\} \int_0^a (f(\rho))^2 \rho d\rho} \quad (383)$$

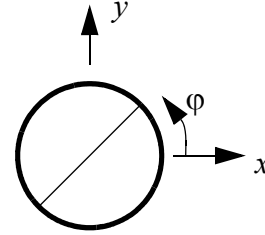
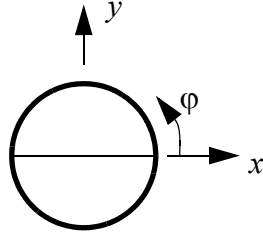
L'air ayant de faibles pertes, on peut supposer que la permittivité est réelle. De même, on peut poser  $\gamma = \alpha + j\beta_g$  et prendre comme valeur de  $\beta_g$  la valeur obtenue pour une guide sans pertes. Ceci est possible car la conductivité du guide est généralement élevée et elle a peu d'effet sur  $\beta_g$ . Il vient alors, avec  $\beta_g = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - (f_c/f)^2}$  et l'eq.(377), que:

$$\alpha = \frac{a \sqrt{\omega\epsilon/8\sigma} f(a)^2}{(1 - (f_c/f)^2) l} \quad (384)$$

### Problème 3.8

Un guide métallique circulaire et parfaitement conducteur a un rayon interne de 3 centimètres.

- À partir de quelle fréquence peut-on avoir propagation guidée sans atténuation si le guide est rempli d'air?
- Si la fréquence utilisée est seulement la moitié de la valeur trouvée en a), combien de décibels d'atténuation aura-t-on pour chaque centimètre de longueur du guide?
- Donnez l'expression de toutes les composantes du champ électrique et du champ magnétique dans le mode fondamental dans le cas où:
  - le guide contient une mince feuille de métal dans le plan  $\varphi = 0$ ;
  - le guide contient une mince feuille de métal dans le plan  $\varphi = 45^\circ$ .



- Pour le premier cas ci-dessus, trouvez l'expression de la densité de courant à la surface interne du cylindre. À partir de ce résultat, à quelle valeur de  $\varphi$  pourrait-on couper de minces fentes longitudinales (i.e. en direction  $z$ ) dans la paroi du guide, sans perturber la propagation du mode? De telles fentes sont parfois utilisées pour mesurer le TOS dans les guides.

### Solution

- Pour cela, on doit trouver la fréquence de coupure de l'onde guidée. On a alors pour le mode fondamental  $TE_{11}$   $k_t a = 1.8412$ . En plus, à  $f = f_c$ ,  $k_t = 2\pi f_c / c = 1.8412 / a$ , avec  $c = 3 \times 10^8$  m/s on trouve:

$$f_c = \frac{c}{2\pi} \frac{1.8412}{a} = \frac{3 \times 10^8}{2\pi} \frac{1.8412}{3 \times 10^{-2}} = 2.93 \text{ GHz} \quad (385)$$

Donc on peut obtenir une propagation guidée sans atténuation au dessus de la fréquence de coupure trouvée à l'équation (385).

**b.** L'expression du champ électrique à une distance  $z$  quelconque est donnée par l'expression suivante  $E(z) = E_0 e^{-jk_z z}$ , où  $k_z$  est le nombre d'onde donné par:

$$k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (f_c/f)^2} = \frac{2\pi(2.93/2) \cdot 10^9}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - \left(\frac{2.93}{(2.93/2)}\right)^2} \quad (386)$$

$$k_z = 30.68 \sqrt{-3} = -j53.1$$

En substituant alors  $k_z$  par sa valeur dans l'expression du champ électrique, cette dernière devient:

$$E(z) = E_0 e^{-53.1z} \quad (387)$$

On aura alors, pour  $z = 1$  cm une atténuation de  $4.61 \text{ dB} = -20 \log_{10}(e^{-53.1z})|_{z=0.01}$ .

**c.**

- On doit avoir  $E_\rho = 0$  à  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 180^\circ$  pour satisfaire la condition frontière  $E_{\tan} = 0$  sur la feuille de métal. Or dans le cas du mode  $TE_{11}$  les composantes du champ électrique et magnétique peuvent s'écrire:

$$E_\rho = \frac{j\omega\mu}{k_t^2} \frac{J_1(k_t\rho)}{\rho} (C \sin\varphi - D \cos\varphi) e^{-jk_z z}$$

$$E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{k_t} J_1'(k_t\rho) (C \cos\varphi + D \sin\varphi) e^{-jk_z z}$$

$$E_z = 0$$

$$H_\rho = \frac{-jk_z}{k_t} J_1'(k_t\rho) (C \cos\varphi + D \sin\varphi) e^{-jk_z z} \quad (388)$$

$$H_\varphi = \frac{jk_z}{k_t^2} \frac{J_1(k_t\rho)}{\rho} (C \sin\varphi - D \cos\varphi) e^{-jk_z z}$$

$$H_z = (C \cos\varphi + D \sin\varphi) J_1(k_t\rho) e^{-jk_z z}$$

En imposant que  $k_t = 1.8412/a$ , cette solution satisfait la condition  $\mathbf{E}_{\tan} = 0$  à la frontière  $\rho = a$ . Pour satisfaire la condition  $\mathbf{E}_{\tan} = 0$  sur la plaque de métal horizontale située à  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 180^\circ$ , il faudrait, selon l'expression de la composante  $E_\rho$  que la constante  $D$  soit nulle. Nous arrivons donc à:

$$\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{j\omega\mu}{k_t^2} \frac{J_1(k_t\rho)}{\rho} (C \sin \varphi) e^{-jk_z z} \\
E_\varphi &= \frac{j\omega\mu}{k_t} J_1'(k_t\rho) (C \cos \varphi) e^{-jk_z z} \\
E_z &= 0 \\
H_\rho &= \frac{-jk_z}{k_t} J_1'(k_t\rho) (C \cos \varphi) e^{-jk_z z} \\
H_\varphi &= \frac{jk_z}{k_t^2} \frac{J_1(k_t\rho)}{\rho} (C \sin \varphi) e^{-jk_z z} \\
H_z &= (C \cos \varphi) J_1(k_t\rho) e^{-jk_z z}
\end{aligned} \tag{389}$$

- Dans le cas où on a une feuille de métal à  $\varphi = 45^\circ$  (et  $\varphi = 225^\circ$ ), il suffit simplement de faire translater (i.e. tourner) la solution trouvée ci-haut de  $45$  degrés. Ceci s'effectue en remplaçant  $\varphi$  par  $\varphi - 45^\circ$  dans l'équation (389).

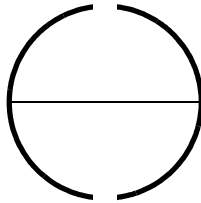
- d.** La densité de courant à la surface interne du cylindre est donnée par  $\bar{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}|_{\rho=a}$ , où  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\rho}$ . Après développement, on trouve:

$$\bar{\mathbf{J}}_s = -\hat{\rho} \times (H_\rho \hat{\rho} + H_\varphi \hat{\varphi} + H_z \hat{\mathbf{z}}) = -\hat{\rho} \times \hat{\varphi} H_\varphi - \hat{\rho} \times \hat{\mathbf{z}} H_z = (-\hat{\mathbf{z}} H_\varphi + \hat{\varphi} H_z) \Big|_{\rho=a} \tag{390}$$

et en substituant  $H_z$  et  $H_\varphi$  par leurs expressions trouvées en c), l'équation (390) devient:

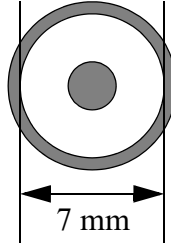
$$\bar{\mathbf{J}}_s = \left( \frac{-jk_z}{k_t^2} \frac{J_1(k_t a)}{a} C \sin \varphi \hat{\mathbf{z}} + C \cos \varphi J_1(k_t a) \hat{\varphi} \right) e^{-jk_z z} \tag{391}$$

Une fente en  $z$  pourrait couper le courant  $J_\varphi$ . Il faut donc choisir une valeur de  $\varphi$  où  $J_\varphi = 0$ . Ceci est possible avec  $\varphi = 90^\circ$  ou  $\varphi = 270^\circ$  car  $J_\varphi$  est proportionnel à  $\cos \varphi$ .



### Problème 3.9

On considère un guide d'ondes cylindrique coaxial. Le diamètre du conducteur extérieur est de 7 millimètres et le rayon du conducteur intérieur est de  $a$ . Le guide d'abord considéré comme un parfait conducteur. Le matériau séparant les deux conducteurs est un diélectrique parfaitement isolant ayant pour caractéristiques  $\epsilon_r = 1$  et  $\mu_r = 1$ . Le champ de claquage dans cet isolant est de  $3 \times 10^5 \text{ V/m}$ .



- a. Quel est le rayon du conducteur interne ( $a$ ) si le guide a une impédance caractéristique de  $50\Omega$ ?
- b. On considère la propagation en direction  $+z$  et le mode de propagation TEM. Obtenez par intégration la puissance totale  $P$  transportée par le mode en fonction du courant de ligne de transmission  $I^+$  (NB: résultat vérifiable par la théorie des lignes de transmission).
- c. Quelle est la puissance maximale pouvant être transportée par ce mode (on suppose que le guide est terminé par une charge adaptée)?
- d. Quelles sont les vitesses de groupe et de phase de ce mode?
- e. On considère un élément de longueur  $\Delta z$  de ce câble. Calculez les résistances équivalentes  $R_a$  et  $R_b$  des conducteurs extérieur et intérieur de ce petit élément. Les surfaces du câble sont recouvertes de cuivre ayant  $\sigma = 5.7 \times 10^7 \text{ S/m}$  et la fréquence de travail est 1 GHz. En considérant toujours que les parois du guide sont faites de cuivre, donnez l'expression de la puissance dissipée en fonction de la fréquence dans un segment de longueur  $\Delta z$  de ce guide.
- f. À partir des résultats de b.) et e.), donnez l'expression de la constante d'atténuation  $\alpha$  due aux pertes ohmiques dans les conducteurs. (Aide: essayez d'obtenir une équation différentielle de la forme  $\frac{d}{dz}P(z) = -2\alpha P(z)$ .)



## Solution

a. L'impédance caractéristique d'un guide cylindrique coaxial est donnée par la relation suivante:

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 50\Omega \quad (392)$$

où  $a$  représente le rayon interne et  $b$  le rayon externe du guide, lequel égal à 3,5 mm. Et en substituant  $b$ ,  $\eta$  et  $Z_0$  par leurs valeurs dans l'équation (392), on trouve:

$$a = b e^{-2\pi Z_0 / \eta} = 1.52 \text{ mm} \quad (393)$$

b. On trouve d'après les équations de Maxwell les expressions suivantes des champs électrique et magnétique pour un guide d'onde cylindrique coaxial:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{V_2 - V_1}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} e^{-j\beta z} \hat{\rho} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\eta} \frac{V_2 - V_1}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} e^{-j\beta z} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (394)$$

avec  $V_2 - V_1 = V^+ = Z_0 I^+$ . La densité de puissance du mode se propageant en direction  $z$  est donnée par la partie réelle de la composante du vecteur de Poynting en cette direction, soit:

$$\mathbf{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*\} = \frac{|I^+|^2 Z_0^2}{2\eta (\ln(b/a)\rho)^2} \hat{\rho} \times \hat{\phi} \quad (395)$$

avec  $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$ . Donc l'équation (395) devient  $\mathbf{P}_{\text{moy}} = \hat{z} \frac{|I^+|^2 Z_0^2}{2\eta (\ln(b/a)\rho)^2}$ . Pour obtenir

la puissance totale transportée par le mode, il suffit d'intégrer la densité de puissance sur la section du guide:

$$\begin{aligned} P &= \int_A (\mathbf{P}_{\text{moy}} \cdot \hat{z}) dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b d\rho \frac{|I^+|^2 Z_0^2}{2\eta \rho^2 \ln^2(b/a)} \rho(d\phi) \\ &= \frac{2\pi |I^+|^2 Z_0^2}{2\eta \ln^2(b/a)} \ln \rho \Big|_a^b = \frac{\pi |I^+|^2 Z_0^2}{\eta \ln(b/a)} \end{aligned} \quad (396)$$

Vérification: d'après la théorie des lignes nous avons  $P = \frac{1}{2}Z_0|I^+|^2$ , on peut déduire du résultat précédent que:  $Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ . Ceci est bien l'expression de  $Z_0$ , ce qui confirme la validité de l'eq (396).

c. On remarque à partir de l'expression de la puissance calculée à la question précédente que la puissance totale dépend du courant. Donc pour trouver sa valeur maximale il suffit de trouver la valeur du courant maximale. D'après l'équation (394) le champ électrique maximal, correspondant au champ de claquage, s'obtient au point  $\rho = a$ , soit, d'après (394):

$$3 \times 10^5 = \frac{Z_0 |I^+_{max}|}{\ln(b/a)} \frac{1}{a} \rightarrow |I^+_{max}| = \frac{3 \times 10^5 a \ln(b/a)}{Z_0} = 7.6 \text{ ampères} \quad (397)$$

et finalement avec (396):

$$\max(P) = 1445 \text{ Watts} \quad (398)$$

d. Pour le mode TEM, les vitesses de phase et de groupe sont données par:

$$u_\phi = u_g = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (399)$$

e. La résistance est obtenue par la résistance de surface  $\times$  la longueur  $\Delta z$  de l'élément  $\div$  la largeur ( $2\pi\rho$ ) de l'élément. Pour le conducteur interne on a:

$$R_a = \frac{\Delta z \operatorname{Re}\{Z_s\}}{2\pi a} \quad (400)$$

et pour le conducteur externe:

$$R_b = \frac{\Delta z \operatorname{Re}\{Z_s\}}{2\pi b} \quad (401)$$

En appliquant la loi d'Ohm dans les 2 conducteurs, la variation de puissance sera:

$$\Delta P = -\left(\frac{R_a |I^+|^2}{2} + \frac{R_b |I^+|^2}{2}\right) = -\frac{|I^+|^2}{4\pi} \Delta z \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (402)$$

**f.** On a d'après la question **e)**  $\frac{\Delta P}{\Delta z} = -\frac{|I^+|^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$  et selon **b)** on a  $|I^+|^2 = 2P/Z_0$ .

Donc:

$$\frac{\Delta P}{\Delta z} = -\frac{2P}{4\pi Z_0} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (403)$$

En faisant tendre  $\Delta z$  vers zéro l'équation (403) devient:

$$\frac{dP}{dz} = -2P \frac{1}{4\pi Z_0} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (404)$$

et en posant  $\alpha = \frac{1}{4\pi Z_0} \sqrt{\omega\mu/2\sigma} ((1/a) + (1/b))$  (la constante d'atténuation linéique),

l'équation précédente aura pour solution  $P(z) = P(0)e^{-2\alpha z}$ , ce qui est le comportement recherché.

### Problème 3.10

Considérez le guide coaxial du Problème 3.9. On désire faire l'analyse des modes  $TM_{0n}$  ayant la symétrie azimutale (i.e. pas de variation des champs par rapport à l'angle  $\varphi$ ).

- Donnez l'expression générale de toutes les composantes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  de ces modes.
- En supposant que les parois du guide sont parfaitement conductrices, quelles conditions doivent être respectées aux frontières du guide? Exprimez votre réponse en fonction de composantes de champ électrique.
- Trouvez une expression reliant  $k_t$ , la constante de séparation, aux rayon interne  $a$  et rayon externe  $b$  du guide.

### Solution

- L'expression générale du champ électrique  $E_z$  des modes  $TM_{0n}$  est donnée par:

$$E_z = [AJ_m(k_t \rho) + BY_m(k_t \rho)][C \cos m\varphi + D \sin m\varphi]e^{-jk_z z} \quad (405)$$

On aura la symétrie azimutale ( $\partial E_z / \partial \varphi = 0$ ). Si  $D = 0$  et  $m = 0$ . Dans ce cas l'expression de  $E_z$  devient:

$$E_z = [AJ_0(k_t \rho) + BY_0(k_t \rho)]e^{-jk_z z} \quad (406)$$

à partir des équations de Maxwell, on trouve:

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{-jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = \frac{-jk_z}{k_t} [AJ_0'(k_t \rho) + BY_0'(k_t \rho)]e^{-jk_z z} \\ E_\varphi &= \frac{-jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = 0 \\ H_\rho &= \frac{j\omega \epsilon}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = 0 \\ H_\varphi &= \frac{-j\omega \epsilon}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = \frac{-j\omega \epsilon}{k_t} [AJ_0'(k_t \rho) + BY_0'(k_t \rho)]e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (407)$$

**b.** Sur le métal, il faut que la composante tangentielle du champ électrique soit nulle.

Considérant le mode du problème précédent, il faut donc que  $E_\varphi = 0$  et  $E_z = 0$  à

$\rho = a$  et  $\rho = b$ .

**c.** Avec les conditions frontières trouvées en b, on a:

$$\begin{aligned} E_z|_{\rho=a} = 0 & \rightarrow AJ_0(k_t a) + BY_0(k_t a) = 0 \\ E_z|_{\rho=b} = 0 & \rightarrow AJ_0(k_t b) + BY_0(k_t b) = 0 \end{aligned} \quad (408)$$

En manipulant les deux dernières équations, on peut éliminer les constantes  $A$  et  $B$  et trouver:

$$J_0(k_t a) \cdot Y_0(k_t b) = J_0(k_t b) \cdot Y_0(k_t a) \quad (409)$$

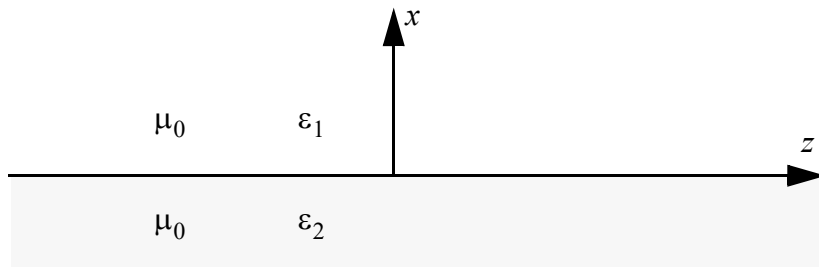
qui est une équation transcendante à solutionner pour  $k_t$ . Avec  $k_t$  on trouve ensuite  $k_z$

avec l'équation de séparation  $k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_t^2}$ .

### Problème 3.11

On désire étudier le potentiel que pourrait avoir une simple interface entre deux matériaux diélectriques de guider des ondes électromagnétiques. Pour simplifier, on supposera que ces ondes sont de type TM et que la propagation est selon la direction  $z$  avec le facteur  $e^{-\gamma z}$ . On considérera une interface plane, soit le plan  $yz$ , entre deux milieux sans pertes ayant la même perméabilité que le vide ( $\mu = \mu_0$ ), mais ayant des permittivités réelles respectives  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . Pour simplifier davantage, on se limitera au cas où il n'y a pas de variation des champs par rapport à  $y$  ( $\frac{\partial}{\partial y}(\ast) = 0$ ).

- Développer les expressions complètes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans les milieux 1 et 2.
- Exprimez l'équation de séparation dans chacune des régions.
- Appliquez les conditions aux frontières sur les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  à l'interface  $x = 0$  puis déduisez l'équation de dispersion reliant  $\gamma$  aux propriétés physiques de la structure.
- Dans le cas où le milieu 1 est le vide et le milieu 2 est un plasma froid sans pertes, quelle est la fréquence limite à laquelle ces ondes peuvent se propager? Pour le plasma, la permittivité est donnée par l'expression:  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0(1 - f_p^2/f^2)$  où  $f$  est la fréquence de travail et  $f_p$  est la fréquence plasma, une constante.



### Solution

- Puisque la solution sera de type TM, on peut obtenir toutes les composantes de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  uniquement à partir de  $E_z$ . Un critère important à respecter pour le choix de solution est que les champs doivent demeurer finis pour toute valeur de  $x$ . Une forme de solu-

tion ayant cette propriété, qui est utilisée dans l'analyse de guides diélectriques, est une solution à décroissance exponentielle selon  $x$ . Celle-ci s'écrit pour chacune des régions:

$$\begin{aligned} E_{z1} &= E_1 e^{-q_1 x} e^{-\gamma z} \\ E_{z2} &= E_2 e^{q_2 x} e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (410)$$

Où le facteur  $e^{j\omega t}$  a été omis pour simplifier l'écriture. On remarque aussi que ces expressions ne dépendent pas de  $y$ , tel que demandé. Afin que les champs demeurent finis ou nuls lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ , nous devons nous assurer que  $\text{Re}\{q_1\} \geq 0$  et  $\text{Re}\{q_2\} \geq 0$ .

Exprimant les champs à partir de  $E_z$  en coordonnées cartésiennes, on arrive à:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-\gamma}{k_i^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ H_y &= \frac{-j\omega\epsilon}{k_i^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (411)$$

alors que toutes les autres composantes sont nulles. Dans ces expressions nous avons que  $k_i^2 = \omega^2 \mu_i \epsilon_i$ . Ayant spécifié que les milieux sont sans pertes, il est clair que  $k_i^2$  est réel dans les deux régions. Appliquant ce résultat aux régions 1 et 2, nous obtenons:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= \frac{\gamma q_1}{k_1^2 + \gamma^2} E_1 e^{-q_1 x} e^{-\gamma z} \\ E_{x2} &= \frac{-\gamma q_2}{k_2^2 + \gamma^2} E_2 e^{q_2 x} e^{-\gamma z} \\ H_{y1} &= \frac{j\omega\epsilon_1 q_1}{k_1^2 + \gamma^2} E_1 e^{-q_1 x} e^{-\gamma z} \\ H_{y2} &= \frac{-j\omega\epsilon_2 q_2}{k_2^2 + \gamma^2} E_2 e^{q_2 x} e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (412)$$

**b.** Pour retrouver l'équation de séparation, il suffit d'évaluer les termes de l'équation de Helmholtz en substituant les expressions ci-dessus dans:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (413)$$

On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} q_1^2 + \gamma^2 + k_1^2 &= 0 \\ q_2^2 + \gamma^2 + k_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (414)$$

c. Il y a trois conditions à respecter à la frontière  $x = 0$  :

- continuité du champ électrique tangentiel, soit  $E_{z1} = E_{z2}$  ;
- continuité du champ magnétique tangentiel, soit  $H_{y1} = H_{y2}$  ;
- absence de charge de surface, soit  $\varepsilon_1 E_{x1} = \varepsilon_2 E_{x2}$  .

Ces conditions conduisent respectivement aux égalités suivantes:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ \frac{\varepsilon_1 q_1 E_1}{k_1^2 + \gamma^2} &= \frac{-\varepsilon_2 q_2 E_2}{k_2^2 + \gamma^2} \\ \frac{\varepsilon_1 q_1 E_1}{k_1^2 + \gamma^2} &= \frac{-\varepsilon_2 q_2 E_2}{k_2^2 + \gamma^2} \end{aligned} \quad (415)$$

Les deux dernières sont identiques mais on peut utiliser les deux premières pour éliminer les deux constantes arbitraires  $E_1$  et  $E_2$  . De plus, utilisant les équations de séparation sous la forme  $k_i^2 + \gamma^2 = -q_i^2$  , l'équation (415) conduit à:

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1} = -\frac{\varepsilon_2}{q_2} \quad (416)$$

Puisque nous devons avoir des valeurs positives pour  $q_1$  et  $q_2$  , il est clair que cette condition ne pourrait être satisfaite pour la vaste majorité des matériaux car les permittivités sont généralement positives. Le mécanisme de guidage proposé ne serait donc pas possible physiquement. On verra que ceci n'est pas le cas en présence d'un plasma. Le plus souvent, on cherche à déterminer  $\gamma$  en fonction de  $\omega$  . Ceci est possible en mettant chaque terme de l'équation (416) au carré. On obtient ainsi:



$$\varepsilon_1^2(\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2) = \varepsilon_2^2(\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1) \quad (417)$$

Puis, on isole  $\gamma^2$  :

$$\gamma^2 = \frac{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega^2 \mu_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (418)$$

Puisque nous avons supposé au départ qu'il n'y a pas de pertes, alors on prouve facilement que l'équation de dispersion ci-haut indique que  $\gamma^2$  sera réel. Une valeur positive indique un évanouissement exponentiel selon  $z$  alors qu'une valeur négative indique la propagation d'une onde progressive avec  $\gamma = j\beta$ .

**d.** D'après le paragraphe précédent, nous devons satisfaire l'inégalité suivante pour qu'il y ait propagation.

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega^2 \mu_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} > 0 \quad (419)$$

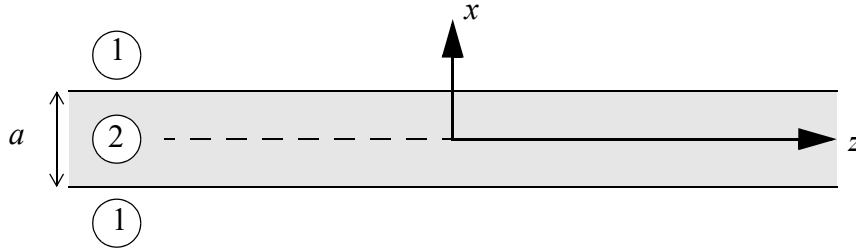
Substituant les valeurs de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , cette condition devient:

$$\frac{f^2 - f_p^2}{2f^2 - f_p^2} > 0 \quad (420)$$

On peut vérifier que cette condition est satisfaite lorsque  $f < f_p / \sqrt{2}$  ou  $f > f_p$ . Cependant dans le deuxième cas, la valeur de  $\varepsilon_2$  est positive et l'équation (416) indique que  $q_1$  et  $q_2$  seraient de signes opposés. Ceci veut dire que les champs augmentent à l'infini avec  $|x|$  dans un des deux milieux, ce qui est contraire aux hypothèses de départ. En conséquence, seule la bande de fréquences  $f < f_p / \sqrt{2}$  permet la propagation d'une onde de surface sur cette structure.

### Problème 3.12

La structure suivante forme un guide diélectrique plan. La permittivité relative dans le milieu 1 est de 1.0 et elle est de 2.33 dans le milieu 2. L'épaisseur  $a$  du milieu 2 est de 2,5 millimètres. On désire étudier les champs qui se propagent dans cette structure dans la



direction  $z$ , pour lesquels on supposera qu'il n'y a pas de variation par rapport à  $y$  ( $\partial(\ )/\partial y = 0$ ).

- a. Donnez l'expression générale de toutes les composantes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  pour les modes TE guidés dans cette structure. Séparez le résultat en deux types de solution: symétriques et anti-symétriques par rapport au plan horizontal  $x = 0$ .
- b. Reprenez la partie a. ci-dessus, mais pour les modes TM.
- c. La structure est excitée par une source dont la fréquence est de 60 GHz. Combien y a-t-il de modes TE et de modes TM susceptibles de se propager?
- d. On désire former un substrat de circuit imprimé en remplaçant la partie de la structure comprise sous le plan horizontal  $x = 0$  par du métal parfaitement conducteur, laissant ainsi une épaisseur de seulement  $a/2$  pour la région 2. Quelles doivent être les conditions frontières à satisfaire sur les composantes de champ électrique à la surface du métal pour les modes se propageant dans cette nouvelle structure?
- e. Pour la structure réalisée en d., combien y aura-t-il de modes qui pourraient se propager à 60 GHz?
- f. Considérant le mode ayant la plus basse fréquence de coupure, démontrez que lorsque la fréquence devient très grande, la constante de propagation  $k_z$  tend vers une valeur limite donnée par:

$$k_z \approx \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad (421)$$

où  $\epsilon_2$  et  $a$  sont respectivement la permittivité et l'épaisseur de la couche de diélectrique.

## Solution

a. Pour les modes TE, toutes les composantes de champ peuvent être retrouvées à partir de l'expression de la composante  $H_z$  et des opérateurs différentiels:

- Dans le cas symétriques:  $E_x = 0$ ,  $H_y = 0$ ,  $E_z = 0$  et  $H_z$  est donnée par:

$$H_z = \begin{cases} B e^{-qx} e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ C \cos(px) e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ B e^{qx} e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (422)$$

avec  $p = \sqrt{\beta_2^2 - k_z^2}$  et  $q = \sqrt{k_z^2 - \beta_1^2}$ . On pourra alors en tirer,  $E_y$  et  $H_x$ , avec

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \text{ et } H_x = \frac{-jk_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

La constante de séparation  $k_t$  au dénominateur n'est pas la même dans les deux matériaux. Elle est reliée à  $p$  et  $q$  par les définitions  $p^2 \equiv k_{t2}^2$  et  $q^2 \equiv -k_{t1}^2$ . Dans les expressions de  $p$  et  $q$  ci-dessus nous avons également que  $\beta_1^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1$  et  $\beta_2^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2$ . Les expressions suivantes sont obtenues à partir de la composante  $H_z$  (éq. (422)):

$$E_y = j\omega\mu \begin{cases} \frac{1}{q} B e^{-qx} e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ -\frac{1}{p} C \sin(px) e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ -\frac{1}{q} B e^{qx} e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (423)$$

Nous pouvons également obtenir l'expression de  $H_x$  :

$$H_x = -jk_z \begin{cases} \frac{1}{q} B e^{-qx} e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ -\frac{1}{p} C \sin(px) e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ -\frac{1}{q} B e^{qx} e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (424)$$

- Dans le cas anti-symétriques, nous avons:

$$H_z = \begin{cases} B e^{-qx} e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ D \sin(px) e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ -B e^{qx} e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (425)$$

Puis à partir des mêmes opérateurs différentiels on arrive à:

$$E_y = j\omega\mu \begin{cases} \frac{1}{q} B e^{-qx} e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ \frac{1}{p} D \cos(px) e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ \frac{1}{q} B e^{qx} e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (426)$$

$$H_x = -jk_z \begin{cases} \frac{1}{q} B e^{-qx} e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ \frac{1}{p} D \cos(px) e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ \frac{1}{q} B e^{qx} e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (427)$$

- b.** Pour les modes TM ( $H_z = 0$ ), toutes les composantes de champ peuvent être retrouvées à partir de l'expression de la composante  $E_z$  et des opérateurs différentiels données par:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ E_y &= \frac{-jk_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad \text{car } \frac{\partial}{\partial y} = 0 \\ H_x &= \frac{j\omega\epsilon}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad \text{car } \frac{\partial}{\partial y} = 0 \\ H_y &= \frac{-j\omega\epsilon}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (428)$$

- Dans le cas symétrique:

$$E_z = \begin{cases} Be^{-qx}e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ C \cos(px)e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ Be^{qx}e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (429)$$

$$E_x = -jk_z \begin{cases} \frac{1}{q}Be^{-qx}e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ -\frac{1}{p}C \sin(px)e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ -\frac{1}{q}Be^{qx}e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (430)$$

- Dans le cas anti-symétrique:

$$E_z = \begin{cases} Be^{-qx}e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ D \sin(px)e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ -Be^{qx}e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (431)$$

$$E_x = -jk_z \begin{cases} \frac{1}{q}Be^{-qx}e^{-jk_z z} & (x > a/2) \\ \frac{1}{p}D \cos(px)e^{-jk_z z} & (|x| < a/2) \\ \frac{1}{q}Be^{qx}e^{-jk_z z} & (x < -a/2) \end{cases} \quad (432)$$

D'après (428) nous pouvons déduire que:  $H_y = \frac{\omega \varepsilon}{k_z} E_x$ , où  $\varepsilon = \varepsilon_2 = 2,33 \varepsilon_0$  si  $|x| < a/2$

et  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_0$  si  $|x| > a/2$ .

c. La fréquence de coupure pour ce type de guide diélectrique plan est donnée par:

$$f_c = \frac{n-1}{2a\sqrt{\mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}} = \frac{n-1}{2a\sqrt{(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1})}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{(n-1)c}{2a\sqrt{(2.33-1)}} \quad (433)$$

où  $n = 1, 2, 3, \dots$  et  $c = 3 \times 10^8$  m/s. Après calcul, on trouve  $f_c = (n-1)52$  GHz. Les valeurs de  $n$  impaires correspondent aux mode anti-symétriques et les valeurs paires correspondent aux modes symétriques.

- pour  $n = 1$ ,  $f_c = 0$ , donc il y aura propagation de modes TE et TM anti-symétriques.

- pour  $n = 2$ ,  $f_c = 52$  GHz, donc il y aura propagation de modes TE et TM symétriques
- pour  $n = 3$ ,  $f_c = 104$  GHz, ces ondes ne sont pas guidées à 60 GHz.

Il y a donc 4 modes possibles à 60 GHz.

- d.** Il faut avoir  $E_z = 0$  et  $E_y = 0$  à  $x = 0$  si on insère du métal à  $x \leq 0$ .
- e.** L'existence des solutions est vérifiée à partir des expressions de champs trouvées en **a** et **b**, et des conditions frontière imposées en **d**.

- Modes TE:

modes symétriques: possibles car  $E_y(x = 0) = 0$  et  $E_z = 0$

modes anti-symétriques: ne peuvent exister car  $E_y(x = 0) \neq 0$ .

- Modes TM

mode symétriques: ne peuvent exister car  $E_z \neq 0$  à  $x = 0$ .

modes anti-symétriques: possibles car  $E_z = 0$  à  $x = 0$  et  $E_y = 0$ .

Donc, à 60 GHz on pourra avoir:

mode TE symétrique avec  $n = 2$ ,  $f_c = 52$  GHz ;

mode TM anti-symétrique avec  $n = 1$ ,  $f_c = 0$ .

- f.** On a l'équation de dispersion pour le mode TM anti-symétrique:

$$\frac{pa}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan \frac{pa}{2} = \frac{qa}{2} \quad (434)$$

Combinant les équations de séparation dans les deux milieux nous obtenons<sup>1</sup>:

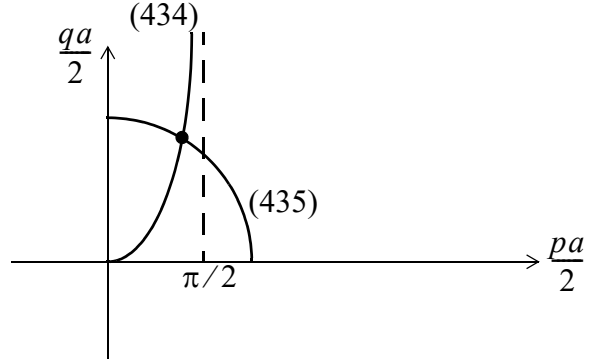
$$\left(\frac{pa}{2}\right)^2 + \left(\frac{qa}{2}\right)^2 = \left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 \mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (435)$$

qui définit un cercle centré à l'origine dans le plan  $(pa/2, qa/2)$ . Le rayon du cercle est

$$\left(\frac{\omega a}{2}\right) \sqrt{\mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$$

---

1. Milieu 1:  $k_z^2 = \beta_1^2 + q^2$ , milieu 2:  $k_z^2 = \beta_2^2 - p^2$ .



On remarque que lorsque  $\omega$  tend vers l'infini, le rayon du cercle dans l'équation (435) devient très grand et l'intersection du cercle avec la courbe définie par l'équation (434) se produit lorsque  $\frac{pa}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Donc en substituant dans l'équation (435), on trouve:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{qa}{2}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 \mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (436)$$

d'où l'on peut tirer  $q^2 \approx \omega^2 \mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - (\pi/a)^2$ . Avec l'équation de séparation dans le milieu 1 ( $k_z^2 - q^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1$ ), on arrive alors à:

$$k_z^2 \approx (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 + \omega^2 \mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - (\pi/a)^2) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 - (\pi/a)^2 \quad (437)$$

d'où le résultat attendu:

$$k_z \approx \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad (438)$$

### Problème 3.13

Dans un satellite, un guide métallique rectangulaire “vide” opère à une fréquence de 3 GHz égale à 1.5 fois la fréquence de coupure du mode fondamental. Le rapport largeur/hauteur ( $a/b$ ) est de 2,5. La longueur n’est pas spécifiée. Les parois sont en aluminium ( $\sigma = 3.5 \times 10^7 \text{ S/m}$ ).

- a. Afin de réduire le poids du guide, on propose de réduire sa hauteur  $b$  d’un facteur 2. Quel est l’impact de cette solution sur l’atténuation linéique le long du guide à 3 GHz?
- b. Toujours dans le but de diminuer le poids au lancement du satellite, on propose d’utiliser des guides d’ondes rectangulaires ayant des dimensions latérales 10 fois plus petites que les dimensions initiales. Ceci est accompli en insérant dans le guide d’onde un matériau diélectrique. Si la fréquence de coupure et la fréquence de travail demeurent inchangées, quelle doit être la permittivité relative du matériau diélectrique inséré dans le guide?
- c. Quel est l’impact de la solution proposée en b.) sur le niveau de puissance maximal permis, considérant que le champ disruptif dans le guide vide et dans le guide rempli du matériau diélectrique sont les mêmes? (répondez de façon quantitative)

### Solution

a.

- Soit  $a$  la largeur du guide et  $b$  sa hauteur, on a  $a/b = 2.5$ .
- Soit  $f$  la fréquence d’opération du guide et  $f_c$  la fréquence de coupure du mode fondamental, on a alors  $f = 1.5f_c = 3 \text{ GHz}$  et donc  $f_c = 2 \text{ GHz}$ .

Pour un guide rectangulaire, la fréquence de coupure des modes est donné par  $f_c = \frac{c}{2} \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu (air). Pour le mode fondamental  $\text{TE}_{10}$ , nous avons  $f_c = c/2a$ , avec  $f_c = 2 \text{ GHz}$  ce qui nous permet de trouver la largeur du guide  $a = 7.5 \text{ cm}$  à partir de laquelle on peut tirer facilement la hauteur grâce au spécification du guide; on trouve alors  $b = a/2.5 = 3 \text{ cm}$ . Une fois les dimensions du guide trouvées, on peut calculer les fréquences d’autres modes. Pour d’autres valeurs de  $m$  et  $n$ , nous calculons:  $f_c^{01} = c/2b = 5 \text{ GHz}$ ,



$f_c^{20} = c/a = 4 \text{ GHz}$ . Donc, il y aura une apparition d'un deuxième mode à la fréquence 4 GHz.

Lorsqu'on réduit la hauteur d'un facteur 2 celle-ci devient égale à 1.5 cm. On se propose de calculer  $\alpha(b=3)/\alpha(b=1.5)$ , où l'expression de l'atténuation linéique est donnée par:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{[1 + (2b/a)(f_c/f)^2]}{b\eta\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (439)$$

$f_c$  est indépendant de  $b$ , donc:

$$\frac{\alpha(b=3)}{\alpha(b=1.5)} = \left[ \frac{1 + (2b/a)(f_c/f)^2}{b} \right]_{b=3} \cdot \left[ \frac{b}{1 + (2b/a)(f_c/f)^2} \right]_{b=1.5} \quad (440)$$

après substitution, on trouve  $\alpha(b=3)/\alpha(b=1.5) = 0.574$ . Donc les pertes sont de  $0.574^{-1} = 1.74$  fois plus élevées avec le guide mince.

**b.** Pour le mode fondamental  $\text{TE}_{10}$ , nous avons  $f_c = c/2a$  où cette fois-ci  $c = (3 \times 10^8)/\sqrt{\epsilon_r}$  et  $2a$  est réduit d'un facteur de 10, soit  $2a = 2 \times 7.5 \text{ cm}/10 = 1.5 \text{ cm}$ . Il est alors possible de calculer la permittivité relative du matériau diélectrique inséré dans le guide:

$$\epsilon_r = \left( \frac{3 \times 10^8}{2af_c} \right)^2 = \left( \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^9 \times 1.5 \times 10^{-2}} \right)^2 = 100 \quad (441)$$

**c.** Pour le mode fondamental  $\text{TE}_{10}$ , nous avons:

$$P = \frac{1}{4} |H_0|^2 k_z \frac{\omega\mu}{k_t^2} ab \quad (442)$$

Le champ électrique  $E_y$  est relié à  $H_0$  par  $|E_y| = |(j\omega\mu/k_t)H_0|$ , ou  $|H_0|^2 = |E_y|^2 (k_t^2/\omega^2\mu^2)$ . En substituant  $|H_0|^2$  par cette expression dans l'équation (442), la puissance devient:

$$P = \frac{1}{4} |E_y|^2 \frac{k_z ab}{\omega \mu} \quad (443)$$

Or, la valeur crête permise de  $|E_y|$  est la même dans les 2 guides. Donc l'impact de la solution proposée en **b)** sur le niveau de puissance maximal dans les deux guides sera donné par  $\frac{P(a= 7.5)}{P(a= 0.75)} = \frac{k_z ab|_{(7.5, 3)}}{k_z ab|_{(0.75, 0.3)}}$ , où  $k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$ . On garde la même

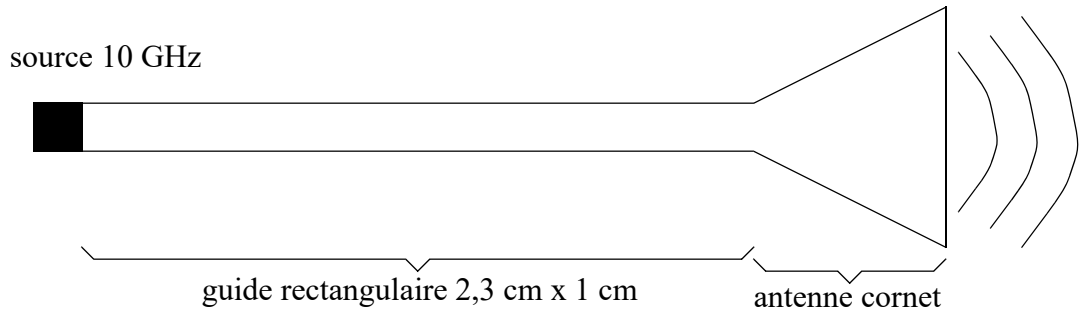
fréquence de coupure et même fréquence de travail. On trouve alors:

$$\frac{P(a= 7.5)}{P(a= 0.75)} = 100 \frac{1}{c|_{a=7.5}} c|_{a=0.75} = \frac{100 \times 3 \times 10^8}{3 \times 10^8 \times \sqrt{100}} = \frac{100}{\sqrt{100}} = 10 \quad (444)$$

D'où l'on déduit que le guide vide peut supporter 10 fois plus de puissance que le guide plein.

### Problème 3.14

Un guide d'onde rectangulaire rempli d'air, terminé par une antenne cornet à une extrémité, est excité en mode fondamental par une source de 10 GHz. On considère que le guide est parfaitement conducteur. Les dimensions latérales du guide sont 2,3 cm et 1 cm.



Le rapport entre le champ maximal et le champ minimal le long du guide est de 1,8. On note qu'il y a un maximum de champ électrique à 8 cm de la charge.

- Quelle est la longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  ?
- Quelles sont les valeurs du module et de la phase du coefficient de réflexion de cette antenne? Indiquez cette valeur par une étiquette "Cz" dans l'abaque de Smith en utilisant les coordonnées d'impédance. NB: On définit  $\Gamma$  comme le rapport  $E_{\text{réfléchi}} / E_{\text{incident}}$ .
- À quelle distance de l'antenne, dans le guide, peut-on placer une susceptance en parallèle qui permettrait d'adapter l'impédance de l'antenne à l'impédance caractéristique du guide, sachant que cette susceptance doit être positive (i.e. capacitive)? Trouvez la plus petite valeur de distance possible et donnez le résultat en centimètres.
- Trouvez la valeur normalisée de la susceptance qui permettrait d'adapter l'impédance.

### Solution

- La longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  est donnée par:

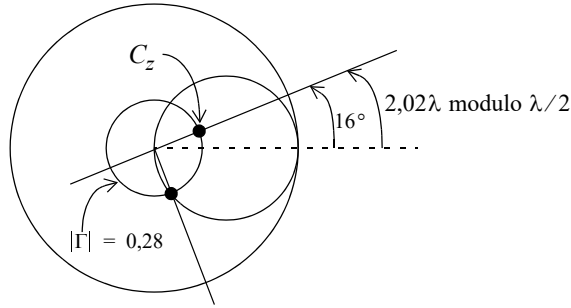
$$\lambda_g = \frac{\lambda_{\text{libre}}}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (445)$$

où  $\lambda_{libre} = c/f = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)} / 10^{10} \text{ Hz}$ ,  $f$  est la fréquence d'opération et  $f_c$  est la fréquence de coupure du mode fondamental, soit  $f_c^{10} = c/2a = 6.52 \text{ GHz}$ . Après calcul, on obtient  $\lambda_g = 3.956 \text{ cm}$ .

**b.** On a  $\text{TOS} = \frac{|E_{max}|}{|E_{min}|} = 1.8 = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$  donc  $|\Gamma| = \frac{\text{TOS}-1}{\text{TOS}+1} = \frac{0.8}{2.8} = 0.2857$ . On

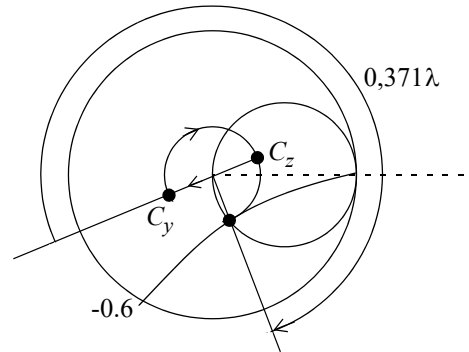
peut situer la charge sur le cercle  $|\Gamma| = 0.2857$  dans un abaque de Smith. Dans un abaque d'impédance, les maxima de champ électrique se situent sur la moitié droite de l'axe réel. Partant d'un maximum situé à 8 cm, soit  $2.02\lambda_g$ , de la charge, on doit se déplacer de  $2.02\lambda_g$  en sens anti-horaire pour atteindre l'antenne. On peut effectuer ce déplacement graphiquement ou encore utiliser:

$$\Gamma_L = \Gamma_{max} e^{+2j\frac{2\pi}{\lambda_g} d_{max}} = 0.2857 e^{2j\frac{2\pi}{3.956} \cdot 8} = 0.2857 e^{j25.41} = 0.2857 \angle 16^\circ.$$



**c.** Puisque la susceptance est branchée en parallèle, il est requis d'utiliser des coordonnées d'admittance. On fait alors une conversion en admittance jusqu'à  $y = 0.56 - j0.966$  (point  $C_y$ ). Puis on effectue un déplacement sur un cercle de  $|\Gamma|$  constant jusqu'au cercle  $\text{Re}\{y\} = 1$ , tout en gardant  $\text{Im}\{y\} < 0$ . On trouve alors:

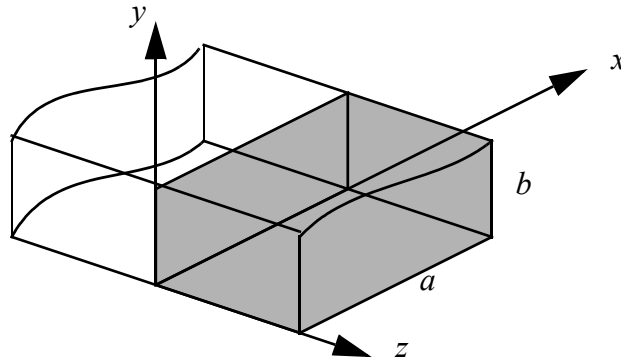
$$l = 0.371\lambda_g = 1.476 \text{ cm} \quad (446)$$



- d.** Après ajout de  $l$ , on a  $y = 1 - j0.6$ . Donc pour faire l'adaptation d'impédance on prend une susceptance de  $+0.6$  (valeur normalisée).

### Problème 3.15

Un guide d'onde rectangulaire infiniment long est rempli d'air dans la section  $z < 0$  et rempli d'un matériau diélectrique ayant des pertes ohmiques dans la section  $z > 0$ . Les dimensions latérales du guide  $a$  et  $b$  sont 10 cm et 4 cm alors que la permittivité du matériau est  $\epsilon_m = \epsilon_0(4 - j0.2)$ .



- Donnez l'expression de toutes les composantes de champ électrique et magnétique dans la région  $z > 0$  pour le mode  $TE_{10}$ , se propageant dans la direction  $+z$ . Comment faudrait-il modifier ces expressions pour une propagation en direction  $-z$ ?
- Quelle est la conductivité du matériau si les pertes sont uniquement ohmiques et que la fréquence de travail est 2.45 GHz?
- Pour le mode  $TE_{10}$ , quelles sont les constantes de propagation  $k_z$  pour chacune des deux régions (air et diélectrique) à 2.45 GHz?
- Une plaque métallique verticale parfaitement conductrice bouchant le guide est installée à  $z = d$  ( $d > 0$ ). Quelle est la distance, le long de l'axe  $z$ , entre les minima de champ électrique dans la région  $0 < z < d$ ?

### Solution

a.

- Mode se propageant dans la direction  $+z$ . On sait que pour les mode TE, toutes les composantes des champs électrique et magnétique peuvent être obtenues à partir de la composantes  $H_z$  et les opérateurs différentiels.

On a alors pour le mode TE<sub>10</sub>  $H_z$  est donnée par  $H_z = H_0 \cos(\pi x/a) e^{-jk_z z}$ . On peut en tirer les autres composantes:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{j\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{-j\omega\mu}{\pi/a} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_z z} \\ H_x &= \frac{-jk_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{jk_z}{\pi/a} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (447)$$

- En direction  $-z$ , il suffit de changer  $k_z$  par  $-k_z$ .
- b.** On a selon les données du problème que la permittivité du matériau est  $\varepsilon_m = \varepsilon_0(4 - j0.2)$ . Or, en considérant que les pertes sont uniquement ohmiques, cette dernière pourra s'écrire aussi de la manière suivante  $\varepsilon_m = 4\varepsilon_0 - j(\sigma/\omega)$ . En comparant alors les deux formules on peut tirer la relation suivante:  $\sigma/\omega = 0.2\varepsilon_0$ .

Donc la conductivité du matériau sera:

$$\sigma = 0.2\omega\varepsilon_0 = 0.2 \times 2\pi \times 2.45 \times 10^9 \times 8.85 \times 10^{-12} = 2.72 \times 10^{-2} \text{ S/m} \quad (448)$$

- c.** Pour le mode TE<sub>10</sub>,  $k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - (\pi/a)^2}$ . Dans la région  $z < 0$ , nous avons  $\mu\varepsilon = \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$  et dans la région  $z > 0$ ,  $\mu\varepsilon = (4 - j0.2)/c^2$ . On peut alors calculer les constantes de propagation  $k_z$  pour chacune des deux régions.

- dans l'air  $k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/0.1)^2} = 40.57 \text{ m}^{-1}$ .
- dans le diélectrique

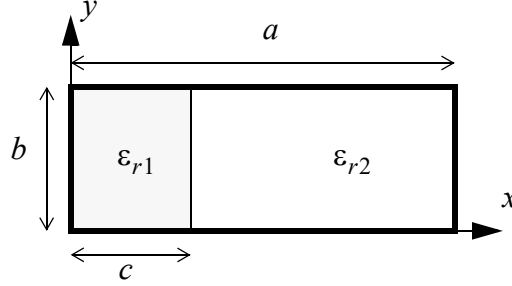
$$k_z = \sqrt{\omega^2(4 - j0.2)/c^2 - (\pi/0.1)^2} = \sqrt{9545 - j5266} = 97.8 \angle -1.5^\circ = 97.76 - j2.73$$

- d.** On a de façon générale  $k_z = \beta_z - j\alpha_z$ , où  $\beta_z = 2\pi/\lambda_z$ . On sait que  $d_{min} = \lambda_g/2 = 2\pi/2\beta_z$ , avec  $\beta_z = 97.76$  (partie réelle de  $k_z$  trouvé à la question précédente). Après calcul on trouve:

$$d_{min} = \frac{\pi}{97.76} = 3.21 \text{ cm} \quad (449)$$

### Problème 3.16

Un guide rectangulaire est partiellement rempli de matériau diélectrique. On s'intéresse aux modes  $TE_{m0}$  n'ayant aucune variation de champ par rapport à  $y$  et se propageant selon  $z$  avec le facteur  $e^{-\gamma z}$ .



- a. Donnez les expressions **générales** des champs  $H_{z1}$  et  $H_{z2}$  correspondant à chacune des régions, puis déduisez les expressions générales de  $E_{y1}$  et  $E_{y2}$  qui en découlent. Incluez aussi les équations de séparation reliant les constantes de séparations  $p_1$  et  $p_2$  à la constantes de propagation  $\gamma$  commune aux deux régions (i.e.  $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ ).
- b. Posez les conditions frontières sur:
  - $E_{y1}$  à  $x = 0$ ;
  - $E_{y2}$  à  $x = a$ ;
  - $E_{y1}$  et  $E_{y2}$  à  $x = c$ ;
  - $H_{z1}$  et  $H_{z2}$  à  $x = c$ .
- c. À partir des conditions trouvées en b, éliminez les constantes inconnues des expressions trouvées en a, puis déduisez-en une équation transcendante reliant  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\gamma$ ,  $a$  et  $c$ .

### Solution

- a. On peut utiliser directement les solutions générales obtenues après séparation des variables. Puisqu'on se limite aux modes ayant  $n = 0$ , on n'inclut pas de dépendance par rapport à  $y$  dans les solutions.

$$\begin{aligned} H_{z1} &= [A \sin p_1 x + B \cos p_1 x] e^{-\gamma z} \\ H_{z2} &= [C \sin p_2 x + D \cos p_2 x] e^{-\gamma z} \end{aligned} \tag{450}$$



On peut obtenir les autres composantes de champ en substituant la solution précédente dans les équations de Maxwell. Pour la composante  $E_y$ , on obtient:

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (451)$$

D'où pour chaque milieu

$$\begin{aligned} E_{y1} &= \frac{j\omega\mu p_1}{k_1^2 + \gamma^2} [A \cos p_1 x - B \sin p_1 x] e^{-\gamma z} \\ E_{y2} &= \frac{j\omega\mu p_2}{k_2^2 + \gamma^2} [C \cos p_2 x - D \sin p_2 x] e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (452)$$

Les équations de séparation sont obtenues de façon indépendante dans chaque milieu:

$$\begin{aligned} p_1^2 - \gamma^2 &= k_1^2 = \omega^2 \mu \epsilon_1 \\ p_2^2 - \gamma^2 &= k_2^2 = \omega^2 \mu \epsilon_2 \end{aligned} \quad (453)$$

Il est à noter que contrairement au cas du guide d'ondes rempli d'un matériau homogène, les valeurs numériques des constantes  $p_1$  et  $p_2$  ne sont pas connues.

**b.** Sur les parois métalliques du guide à  $x = 0$  et  $x = a$ , nous devons avoir que le champ électrique tangentiel est nul car on suppose que le métal est un parfait conducteur électrique. Il en découle donc que

$$\begin{aligned} E_{y1}(x=0) &= 0 \\ E_{y2}(x=a) &= 0 \end{aligned} \quad (454)$$

Aussi, nous devons avoir que le champ électrique tangentiel est continu aux interfaces. Donc, ceci veut dire que  $E_{y1} = E_{y2}$  à  $x = c$ . De même, puisqu'il n'y a pas de courant localisé à l'interface entre les deux milieux, nous devons avoir que le champ magnétique est continu, soit  $H_{z1} = H_{z2}$  à  $x = c$ .

**c.** L'application des conditions frontières (454) dans les solutions (452) fait en sorte que nous devons avoir  $A = 0$  et  $C \cos p_2 a = D \sin p_2 a$ . Cette dernière expressions relie entre elles les constantes inconnues  $C$  et  $D$ . Les conditions de continuité à  $x = c$  conduisent à:

$$\frac{-B}{p_1} \sin p_1 c = \frac{1}{p_2} [C \cos p_2 c - D \sin p_2 c] \quad (455)$$

pour la composante  $E_y$  puis

$$B \cos p_1 c = C \sin p_2 c + D \cos p_2 c \quad (456)$$

Pour la composante  $H_z$ . On peut d'abord éliminer la constante inconnue  $B$  en divisant l'une par l'autre les équations (455) et (456).

$$-\tan p_1 c = \frac{p_1 [C \cos p_2 c - D \sin p_2 c]}{p_2 [C \sin p_2 c + D \cos p_2 c]} \quad (457)$$

Se servant ensuite de la relation  $C = D \tan p_2 a$  trouvée ci-haut, il vient:

$$-\tan p_1 c = \frac{p_1 [D \tan p_2 a \cos p_2 c - D \sin p_2 c]}{p_2 [D \tan p_2 a \sin p_2 c + D \cos p_2 c]} \quad (458)$$

qui se réduit à:

$$\tan p_1 c = \frac{p_1 [\tan p_2 c - \tan p_2 a]}{p_2 [\tan p_2 a \tan p_2 c + 1]} \quad (459)$$

Cette équation non-linéaire, ainsi que les équations de séparation (453) doivent être résolues simultanément. Une solution analytique de ce système d'équations n'est pas possible et il est requis de faire appel à une méthode numérique.