Devoir 2 Q3

2 avril 2022 21:26

Devoir 2
Question 3
ELE3500

Nom : ABDILLAHI
Prénom : Bouh
Matricule : 1940646

a)

$$P(z) = P(0)\, e^{-2\alpha z}$$

$$\frac{P(z)}{P(0)} = e^{-2\alpha z}$$

$$10 \log\left(\frac{P(z)}{P(0)}\right) = -3 \text{ dB}$$

$$10 \log\left(e^{-2\alpha z}\right) = -3 \text{ dB}$$

$$-2\alpha z = \ln\left(10^{\frac{-3}{10}}\right)$$

$$z = \frac{\ln\left(10^{\frac{-3}{10}}\right)}{}$$

Calcul de α :

mode TE_{10}

$$\Rightarrow \alpha^{10} = R_s \frac{1 + \frac{2b}{a}\left(f_c^{10}/f\right)^2}{b\,\eta\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2}}$$

avec $f_c^{10} = 23\,GHz$
$f = 28\,GHz$
$b = 1{,}52\,mm$
$a = 3{,}7\,mm$

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$ avec $\sigma = 5{,}8.10^7\ S/m$
$\omega = 2\pi \times 28.10^9\ rad/s$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_R}{\varepsilon_R}}$$ avec $\varepsilon_R = 3$, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ F/m$
$\mu_R = 1$, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H/m$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha^{10} = 0{,}3747}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 0{,}9218\ m}$$

b)

$b = 0{,}1175\,po = 2{,}9845\,mm$
$a = ?$

$Z_0 = 50\,\Omega$

$$Z_0 = \frac{\eta}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{50\times 2\pi}{\eta}} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{\cdots}{\eta}} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{b}{e^{50 \times 2\pi / \eta}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_R}} \qquad \varepsilon_R = 2,1$$

$$\Rightarrow \quad a = 0,89 \text{ mm}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad 2a = 1,8 \text{ mm}}$$

c) $\alpha = ?$

$$\alpha = \frac{R_S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{4\pi Z_0}$$

$a = 0,89 \text{ mm}$

$b = 2,9845 \text{ mm}$

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \omega = 2\pi \times 20.10^9 \text{ rad/s} \\ \sigma = 5,8.10^7 \text{ S/m} \\ \mu = 4\pi.10^{-7} \text{ H/m} \end{array}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_R}} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ F/m} \\ \varepsilon_R = 2,1 \end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \alpha = 0,0855 \text{ neper/m}}$$

Que vaut l'atténuation sur 100 pieds ?

$100 \text{ pieds} = 30{,}48 \text{ m}$

$$P(z) = P(0)\, e^{-2\alpha z}$$

$$\Rightarrow \frac{P(z)}{P(0)} = e^{-2\alpha z}$$

$$\Rightarrow 10 \log e^{-2\alpha z} = -70$$

$$\Rightarrow z = \frac{\log 10^{-70/10}}{-2\alpha}$$

$$\Rightarrow z = 94{,}2 \text{ m} \neq 30{,}48 \text{ m}$$

La donnée fournie n'est donc pas fiable

d) L'expression générale du champ E_z en mode TM est :

$$E_z = \left[A J_m(k_r \rho) + B Y_m(k_r \rho)\right]\left[C \cos(m\phi) + D \sin(m\phi)\right] e^{-jk_z z}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \phi} = \left[A J_m(k_r \rho) + B Y_m(k_r \rho)\right]\left[-Cm \sin(m\phi) + Dm \cos(m\phi)\right] e^{-jk_z z} = 0$$

$$\Rightarrow -Cm \sin(m\phi) + Dm \cos(m\phi) = 0$$

$$\Rightarrow C \sin(m\phi) = D \cos(m\phi)$$

$$\Leftrightarrow \tan(m\phi) = D/C \quad \text{si } C \neq 0 \qquad (\alpha)$$

si $m = 0$ et $D = 0$, on a l'équation (α) respectée.

donc la symétrie azimutale est respectée :

donc la symétrie azimutale est respectée :

$$\Rightarrow \quad E_z = \left[A\, J_0(k_r \rho) + B\, Y_0(k_r \rho)\right] e^{-jk_z z}$$

D'après les équations de Maxwell, on a :

$$E_\rho = \frac{-j k_z}{k_r^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = \frac{-j k_z}{k_r} \left[A\, J_0'(k_r \rho) + B\, Y_0'(k_r \rho)\right] e^{-jk_z z}$$

$$E_\phi = \frac{-j k_z}{k_r^2} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = 0$$

$\overline{E_{tan}} = 0$ sur le cuivre.

Donc $E_\phi\big|_{\rho=a} = E_\phi\big|_{\rho=b} = E_z\big|_{\rho=a} = E_z\big|_{\rho=b} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\, J_0(k_r a) + B\, Y_0(k_r a) = 0 \\ A\, J_0(k_r b) + B\, Y_0(k_r b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{B\, Y_0(k_r a)}{J_0(k_r a)} \\ B\left(-\dfrac{Y_0(k_r a) J_0(k_r b)}{J_0(k_r a)} + Y_0(k_r b)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{Y_0(k_r a) \cdot J_0(k_r b)}{J_0(k_r a)} + Y_0(k_r b) = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y_0(k_r a)\, J_0(k_r b) = Y_0(k_r b)\, J_0(k_r a)$$

$\Rightarrow Y_0(k_r a) J_0(k_r b) = Y_0(k_r b) J_0(k_r a)$

$$\Rightarrow Y_0(k_r a) J_0(k_r b) - Y_0(k_r b) J_0(k_r a) = 0 \qquad (3)$$

On trouve k_r en résolvant l'équation (3)

on sait que

$$k_r^2 + k_z^2 = \beta^2$$

à la fréquence de coupure, on a $k_z = 0$

$$\Rightarrow k_r = \beta = \frac{\omega_c}{c} = \frac{2\pi f_c}{c}$$

$$\Rightarrow f_c = \frac{c\, k_r}{2\pi}$$

e) On peut réécrire les équations du mode TM :

$$E_z = \left[A J_m(k_r \rho) + B Y_m(k_r \rho)\right]\left[C \cos(m\phi) + D \sin(m\phi)\right] e^{-j k_z z}$$

- Si aucun conducteur interne, on doit prendre $B = 0$ car :

$$\lim_{\rho \to 0} Y(\rho) = \infty$$

Donc on a :

$$E_z = A J_m(k_r \rho) \left[C \cos(m\phi) + D \sin(m\phi)\right] e^{-j k_z z}$$

$$E_z = A J_m(k_r \rho) \left[C \cos(m\phi) + D \sin(m\phi) \right] e^{-j k_z z}$$

$$E_\phi = \frac{-j k_z}{k_r^2} m \frac{J_m(k_r \rho)}{\rho} \left[-C \sin(m\phi) + D \cos(m\phi) \right] e^{-j k_z z}$$

$$\overline{E}_{tan} = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_z|_{\rho = b} = 0 \\ E_\phi|_{\rho = b} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il faut $J_m(k_r b) = 0$

La table des fonctions de Bessel donne :

$$J_m(k_r b) = 0$$

$$\Rightarrow k_r^{01} b = 2,4049$$

De même on a pour un mode TE

$$J_m'(k_r b) = 0$$

$$\Rightarrow k_r^{11} b = 1,8412$$

$$k_r = \frac{2\pi f_c}{c}$$

$$\Rightarrow f_c = \frac{k_r c}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_c^{TE_{11}} = 29,46 \text{ GHz} \\ f_c^{TM_{01}} = 38,47 \text{ GHz} \end{cases}$$