

## 2.0 Ondes planes

### Problème 2.1

Considérez l'onde plane pour laquelle le phaseur champ magnétique s'exprime par:

$$\mathbf{H} = (A\hat{\mathbf{x}} + B\hat{\mathbf{y}} + C\hat{\mathbf{z}})e^{-j2\pi(4x-3y)} \text{ A/m}$$

avec:

- $A = 3/(10\pi)$ ,
  - $\varepsilon = \varepsilon_0 \cong 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $\mu = \mu_0 = 4\pi/10^7 \text{ H/m}$ ,  $\sigma = 0$
  - polarisation circulaire droite
- a. Trouvez le vecteur donnant la direction de propagation et exprimez-le sous la forme  $\hat{\mathbf{n}} = \dots\hat{\mathbf{x}} + \dots\hat{\mathbf{y}} + \dots\hat{\mathbf{z}}$ . Dessinez ce vecteur dans un repère cartésien.
- b. Trouvez la valeur des constantes  $B$  et  $C$ .

### Solution

- a. Comme les champs d'une onde plane sont proportionnels à  $e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , d'après l'expression du phaseur champ magnétique  $\mathbf{H} = (A\hat{\mathbf{x}} + B\hat{\mathbf{y}} + C\hat{\mathbf{z}})e^{-j2\pi(4x-3y)}$ , on peut voir que:

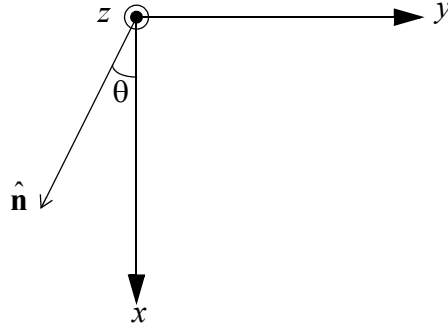
$$2\pi(4x - 3y) = (k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} + k_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) = k_x x + k_y y + k_z z \quad (108)$$

Donc, par identification des termes on en déduit:

$$\mathbf{k} = 2\pi(4\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}}) \quad (109)$$

Pour trouver le vecteur unitaire indiquant la direction de propagation, il suffit de normaliser ce vecteur.

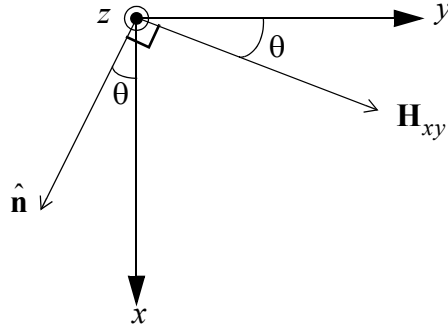
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{4\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0,8\hat{\mathbf{x}} - 0,6\hat{\mathbf{y}} \quad (110)$$



L'angle  $\theta$  illustré dans la figure correspond à  $\theta = \arctan(-n_y/n_x)$  et on peut écrire

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\hat{\mathbf{y}}.$$

**b.**



Le schéma ci-dessus montre la composante  $H_{xy}$  qui est la composante de  $\mathbf{H}$  tangentielle au plan  $xy$ . Celle-ci est reliée à  $H_x$  par:

$$H_x = H_{xy}\sin\theta = A \quad (111)$$

Avec  $A = 3/10\pi$  et  $\sin\theta = 0,6$ , il en résulte:

$$H_{xy} = \frac{1}{2\pi} \quad (112)$$

D'après la figure nous avons ainsi:

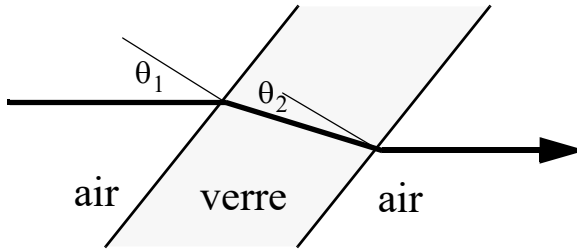
$$H_y = B = H_{xy}\cos\theta = \frac{1 \times 0,8}{2\pi} = \frac{0,4}{\pi} = \frac{2}{5\pi} \quad (113)$$

En ce qui concerne,  $C$ , on a d'après les données du problème qu'il s'agit d'une onde à polarisation circulaire droite. On peut en déduire que  $|C| = |H_{xy}| = 1/2\pi$ , et que  $H_{xy}$  est en avance de phase sur  $H_z$  donc  $H_z = -jH_{xy}$ . Puisque  $H_z = e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}C$ , on en déduit:

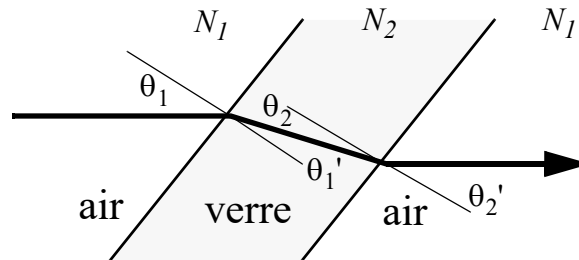
$$C = -j|C| = -j\frac{1}{2\pi} \quad (114)$$

## Problème 2.2

Pour minimiser les pertes de puissance par réflexion à travers les fenêtres de verre des lasers à gaz, on utilise des fenêtres inclinées à l'angle de Brewster (voir figure). Démontrez que dans le cas où les deux faces d'une plaque de verre sont parallèles, si l'angle  $\theta_1$  est égal à l'angle de Brewster pour le passage de l'air au verre, l'angle  $\theta_2$  sera alors forcément égal à l'angle de Brewster pour le passage du verre à l'air. Quelle devrait être la polarisation de l'onde générée par ce type de laser?



## Solution



Géométriquement on voit que  $\theta_1' = \theta_2$  car il s'agit d'angles alternes. Puisque les milieux 1 et 2 sont sans pertes, on peut simplement écrire que  $\tan(\theta_B(\text{air} \rightarrow \text{verre})) = N_{\text{verre}}/N_{\text{air}}$  où  $N_{\text{verre}}$  et  $N_{\text{air}}$  sont les indices de réfraction des deux milieux. Selon la loi de Snell on écrit:

$$N_1 \sin \theta_1 = N_2 \sin \theta_1' \text{ et } N_2 \sin \theta_2 = N_1 \sin \theta_2' \quad (115)$$

Posons  $\theta_1 = \theta_B(1 \rightarrow 2) = \theta_{B1 \rightarrow 2}$ , soit l'angle de Brewster pour le passage de l'air au verre. Pour le passage du verre à l'air nous avons  $N_1/N_2 = \tan \theta_{B(2 \rightarrow 1)}$ . L'équation (115) devient:

$$\sin \theta_1' = \frac{N_1}{N_2} \sin \theta_1 = \frac{N_1}{N_2} \sin \theta_{B(1 \rightarrow 2)} \quad (116)$$

On peut remplacer  $\theta_1'$  par  $\theta_2$  et mettre le tout au carré:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_2 &= \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \sin^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)} \\ \cos^2 \theta_2 &= 1 - \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \sin^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)} \\ \tan^2 \theta_2 &= \frac{(N_1/N_2)^2 \sin^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)}}{1 - (N_1/N_2)^2 \sin^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)}} \\ &= \frac{\sin^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)} / \tan^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)}}{1 - \sin^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)} / \tan^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)}} \\ &= \frac{\cos^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)}}{\sin^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)}} = \frac{1}{\tan^2 \theta_{B(1 \rightarrow 2)}} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 = \tan^2 \theta_{B(2 \rightarrow 1)} \end{aligned} \quad (117)$$

Finalement, on voit que  $\tan^2 \theta_2 = \tan^2 \theta_{B(2 \rightarrow 1)}$  si  $\theta_1 = \theta_{B(1 \rightarrow 2)}$ . En conséquence,  $\theta_2 = \theta_{B(2 \rightarrow 1)}$  si  $\theta_1 = \theta_{B(1 \rightarrow 2)}$ . Dans ce cas, il y aura donc transmission totale aux deux interfaces.

Puisque le phénomène de transmission totale à angle de Brewster ne se produit que pour  $E_{//}$ , alors la polarisation sera parallèle au plan d'incidence.

### Problème 2.3

Une onde plane se propage dans l'air à une fréquence de 30 GHz. La direction de propagation est parallèle au vecteur  $(1\hat{x}, 1\hat{y}, 0\hat{z})$ . La puissance transportée est de 10 mW/m<sup>2</sup>.

- a. Quelle est l'amplitude et la direction (vecteur unitaire) du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ ?
- b. À une valeur de phase près, donnez l'expression complète du phaseur champ électrique de cette onde en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , si celui-ci est polarisé linéairement et est perpendiculaire à  $\hat{z}$ .
- c. Donnez l'expression du phaseur champ électrique dans le cas où l'onde est à polarisation circulaire droite.
- d. Obtenez les expressions des champs magnétiques  $\mathbf{H}$  associés aux champs  $\mathbf{E}$  trouvés en b) et c).

### Solution

- a. Le vecteur  $\mathbf{k}$  pointe dans la direction de propagation, c'est-à-dire  $(1\hat{x}, 1\hat{y}, 0\hat{z})$ . Puisque nous cherchons un vecteur unitaire, nous devons normaliser ce vecteur, soit:

(118)

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

Pour une onde plane uniforme, le module de  $\mathbf{k}$  est donnée par  $\omega/c$  où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde, laquelle est d'environ  $3 \times 10^8$  m/s dans l'air. Nous avons donc que:

$$\|\mathbf{k}\| = \frac{2\pi \times 3 \times 10^{10} \text{ Hz}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 200\pi \text{ m}^{-1}. \quad (119)$$

Avec  $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{n}}\|\mathbf{k}\|$ , il en résulte que:

$$\mathbf{k} = (\hat{x} + \hat{y})200\pi/\sqrt{2} \text{ m}^{-1}. \quad (120)$$

- b. Le phaseur champ électrique s'exprime:

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}\hat{\mathbf{y}} + E_{0z}\hat{\mathbf{z}})e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (121)$$

On spécifie que le champ est perpendiculaire à l'axe  $z$ , ce qui signifie que  $E_{0z} = 0$ . Pour trouver les composantes  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  il faut d'abord appliquer la loi de Gauss au cas d'une onde plane se propageant dans un milieu ne contenant pas de charge d'espace ( $\rho = 0$ ).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (122)$$

Développant le deuxième membre de l'équation (122), on obtient une relation entre  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$ :

$$k_x E_{0x} + k_y E_{0y} = 0. \quad (123)$$

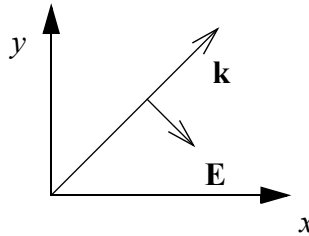
Comme nous l'avons vu en a),  $k_x = k_y$ . Nous avons donc que  $E_{0x} = -E_{0y}$ . Le module de chaque composante est associé à la densité de puissance transportée par l'onde par:

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2\eta} = \frac{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2}{2\eta} = \frac{|E_{0x}|^2}{\eta} = 10 \text{ mW/m}^2 \quad (124)$$

Dans l'expression ci-haut, nous avons utilisé la valeur crête du champ électrique. Pour la valeur rms, il faut écarter le facteur  $1/2$ .  $\eta$  représente l'impédance du milieu, laquelle vaut environ  $120\pi$  pour l'air. On en déduit donc que  $E_{0x} = 1,94 \text{ V/m}$ . Nous pouvons donc exprimer le champ électrique total sous forme phaseur:

$$\mathbf{E} = 1,94(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})e^{j\varphi_0} \exp\{-j200(\pi/\sqrt{2})(x+y)\} \text{ V/m} \quad (125)$$

où  $\varphi_0$  est la valeur initiale de la phase.



Remarque: La valeur instantanée du champ électrique s'écrit:

$$\mathcal{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}e^{j\omega t}\} = 1,94(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})\cos\left(\omega t - \frac{200\pi}{\sqrt{2}}(x+y) + \varphi_0\right) \quad (126)$$

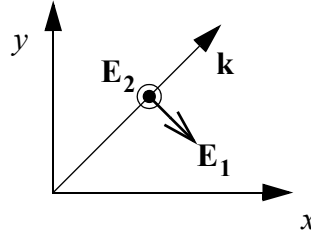
- c. La polarisation circulaire est obtenue par superposition de deux ondes à polarisation linéaire de même amplitude mais déphasées d'un quart de cycle. Chaque composante a polarisation linéaire transporte la moitié de la puissance totale, soit 5 mW. Comme première onde, nous pouvons prendre celle décrite à la partie b, mais en appliquant à chaque composante  $x$  et  $y$  un facteur de  $1/\sqrt{2}$  pour obtenir la puissance désirée:

$$\mathbf{E}_1 = 1.37(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})e^{j\varphi_0} \exp\{-j200(\pi/\sqrt{2})(x+y)\} \text{ V/m} \quad (127)$$

La deuxième onde à polarisation linéaire doit être polarisée dans une direction perpendiculaire à la première, puis dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation donnée par  $\hat{\mathbf{n}}$ . D'après la figure précédente,  $\mathbf{E}_1$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  sont dans le plan  $xy$ . Donc, la deuxième onde devra être polarisée en direction  $\hat{\mathbf{z}}$ . C'est-à-dire:

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{z}}E_{0z}e^{j(\varphi_0 \pm \pi/2)} \exp\{-j200(\pi/\sqrt{2})(x+y)\} \text{ V/m} \quad (128)$$

Pour avoir la même puissance que l'onde  $\mathbf{E}_1$ , il faut que les deux ondes aient le même module, ce qui conduit à  $E_{0z} = \sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2} = \sqrt{1,37^2 + 1,37^2} = 1.94 \text{ V/m}$ . Les deux champs sont représentés dans la figure ci-dessous.



Il ne reste qu'à déterminer le signe devant  $\pi/2$  dans l'exponentielle, lequel dépend du sens de la polarisation circulaire. Pour avoir une polarisation circulaire droite, il faut que le champ  $\mathbf{E}_2$  soit en avance d'un quart de cycle sur le champ  $\mathbf{E}_1$  et il faut donc choisir le signe positif, ce qui conduit à:

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{z}} 1,94 e^{j(\varphi_0 + \pi/2)} \exp\{-j200(\pi/\sqrt{2})(x+y)\} \text{ V/m} \quad (129)$$

- d. Le champ  $\mathbf{H}$  est obtenu directement du champ  $\mathbf{E}$  à l'aide de la loi d'induction de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (130)$$



Dans le cas d'une onde plane, cette équation peut être transformée en:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega\mu} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}}{\eta} \quad (131)$$

Pour l'onde à polarisation linéaire de la partie b), nous avons alors:

$$\mathbf{H} = \frac{(1/\sqrt{2})(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \times 1.94(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})e^{j\varphi_0} \exp\{-j200(\pi/\sqrt{2})(x+y)\}}{\eta} \quad (132)$$

$$\mathbf{H} = \frac{(-2,74 \hat{\mathbf{z}})e^{j\varphi_0} \exp\{-j200(\pi/\sqrt{2})(x+y)\}}{\eta} \quad (133)$$

Pour l'onde à polarisation circulaire, il suffit de calculer l'expression suivante

$$\mathbf{H} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)}{\eta}, \quad (134)$$

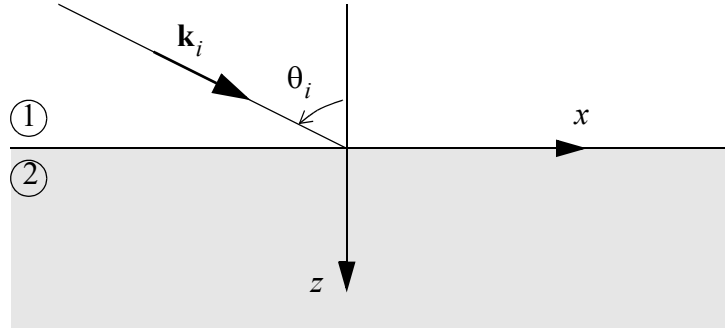
Ce qui résulte en:

$$\mathbf{H} = \frac{(-1.94 \hat{\mathbf{z}}) + (1.94/\sqrt{2})(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})e^{j\pi/2}}{\eta} e^{j\varphi_0} \exp\left\{-j200\pi\frac{(x+y)}{\sqrt{2}}\right\} \quad (135)$$

## Problème 2.4

Une onde plane arrive à incidence oblique sur une interface séparant les milieux 1 et 2. Le milieu 1 est de l'air et la fréquence du signal est de 10 GHz. Le milieu 2 est de l'eau ayant les propriétés suivantes:  $\epsilon_r = 81$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\sigma = 0$ . L'onde incidente arrive à l'angle de Brewster et on exprime son champ électrique par:

$$\mathbf{E}^i = (10\hat{\mathbf{x}} + j5\hat{\mathbf{y}} + E_{z0}\hat{\mathbf{z}})e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$



- Trouvez les valeurs numériques de  $E_{z0}$  et  $\mathbf{k}_i$ .
- Trouvez les valeurs des composantes perpendiculaires et parallèles du champ électrique incident  $E_{\perp}^i$  et  $E_{\parallel}^i$ .
- Quelles sont les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission pour chacune de ces composantes?
- Donnez l'expression complète du champ électrique transmis dans l'eau.

## Solution

- À l'aide de la figure, on peut déduire que:

$$\mathbf{k}_i = |\mathbf{k}_i|(\hat{\mathbf{x}} \sin \theta_i + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_i) \quad (136)$$

En supposant que les propriétés de l'air sont les mêmes que celles du vide, on trouve que  $|\mathbf{k}_i| = \omega/c = 2\pi \times 10^{10} \text{ rad/s} / 3 \times 10^8 \text{ m/s} = (200\pi/3) \text{ m}^{-1}$ . L'angle  $\theta_i$  correspond à l'angle de Brewster. Puisque les milieux 1 et 2 sont sans pertes, on peut simplement écrire que  $\tan \theta_i \equiv \tan \theta_1 = N_2/N_1$  où  $N_1$  et  $N_2$  sont les indices de réfraction des deux

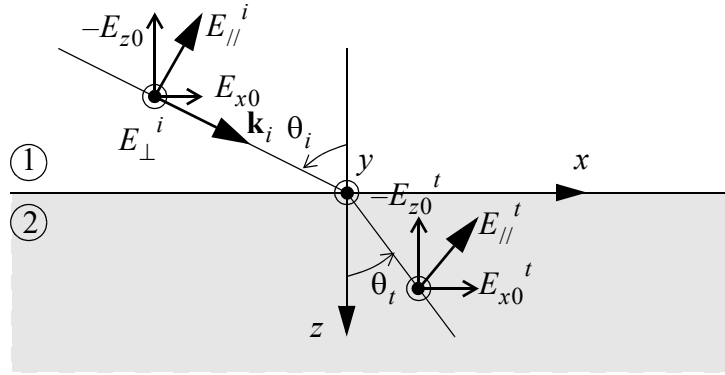
milieux. Considérant que  $N_2 = \sqrt{\epsilon_{r, \text{eau}} \mu_{r, \text{eau}}} = 9$  et  $N_1 = 1$ , on trouve  $\theta_i = 1.4601$  radian. En insérant ce résultat dans (136), on arrive à:

$$\mathbf{k}_i = (200\pi/3)(\hat{x}\sin(1.4601) + \hat{z}\cos(1.4601)) \quad (137)$$

Pour trouver  $E_z$ , on peut se baser sur le fait que le vecteur  $\mathbf{k}_i$  est perpendiculaire au champ électrique pour une onde plane uniforme. Ceci découle de l'équation de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ; applicable dans un milieu ayant une densité de charge électrique nulle.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{E} &= (200\pi/3)(10\sin(1.4601) + E_{z0}\cos(1.4601))e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = 0 \\ E_{z0} &= -10\tan(1.4601) = -10\tan\theta_i = -10N_2 = -90 \text{ V/m} \end{aligned} \quad (138)$$

**b.** Les composantes parallèles et perpendiculaires au plan d'incidence sont illustrées dans la figure suivante.



On remarque que:

$$\begin{aligned} E_{//}^i &= \sqrt{(E_{x0})^2 + (-E_{z0})^2} = \sqrt{10^2 + 90^2} = 90,55 \text{ V/m} \\ E_{\perp}^i &= E_{y0} = j5 \text{ V/m} \end{aligned} \quad (139)$$

**c.** Les coefficients de réflexion pour les deux polarisations sont donnés par:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp} &= \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \\ \Gamma_{//} &= \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \end{aligned} \quad (140)$$

où  $\theta_t$  est l'angle de transmission dans le milieu 2. Puisque nous sommes à l'angle de Brewster, la valeur de  $\Gamma_{//}$  est nulle. Pour calculer  $\Gamma_{\perp}$ , il faut d'abord obtenir  $\cos\theta_t$  à partir de la loi de Snell.

$$\begin{aligned}\sin\theta_t &= \frac{N_1}{N_2} \sin\theta_i = 0.1104 \\ \cos\theta_t &= \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = 0.9939\end{aligned}\tag{141}$$

Les impédances caractéristiques pour les deux milieux sont  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1} = 377\Omega$  et  $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2} = 41.89\Omega$ . À l'aide de (140), on obtient que  $\Gamma_{\perp} = -0.9756$ .

Les coefficients de transmission s'écrivent:

$$\begin{aligned}T_{\perp} &= \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \\ T_{//} &= \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}\end{aligned}\tag{142}$$

Les valeurs numériques sont alors  $T_{\perp} = 0.024$  et  $T_{//} = 0.111$ . Remarquez que malgré le fait qu'il y ait transmission totale de la composante parallèle, nous n'avons pas  $T_{//} = 1$  car il y a un changement d'impédance caractéristique et de direction de propagation. On peut cependant vérifier qu'il y a continuité du flux de puissance en direction  $z$  à travers l'interface.

**d.** Les deux composantes de champ transmises dans l'eau sont obtenues à partir des valeurs des composantes de champ incident et des coefficients de transmission, soit:

$$\begin{aligned}E_{//}^t &= T_{//} E_{//}^i = 0,111 \times 90,55 \text{ V/m} = 10.06 \text{ V/m} \\ E_{\perp}^t &= T_{\perp} E_{\perp}^i = 0.024 \times 5j \text{ V/m} = 0.122j \text{ V/m}\end{aligned}\tag{143}$$

À l'aide de la figure, on peut déduire que pour les composantes du champ électrique selon  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont obtenues par:

$$\begin{aligned}
E_{x0}^t &= E_{//}^t \cos \theta_t = 9.955 \text{ V/m} \\
E_{z0}^t &= -E_{//}^t \sin \theta_t = -1.111 \text{ V/m} \\
E_{y0}^t &= E_{\perp}^t = 0.122j \text{ V/m}
\end{aligned} \tag{144}$$

Quant au vecteur d'onde, on l'obtient à l'aide de l'angle de transmission et des propriétés du milieu 2.

$$\mathbf{k}_t = |\mathbf{k}_t|(\hat{\mathbf{x}} \sin \theta_t + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta_t) \tag{145}$$

Où  $|\mathbf{k}_t| = \omega \sqrt{\epsilon_{r2} \mu_{r2}} / c = 600\pi \text{ m}^{-1}$ . L'expression complète du champ transmis est donc:

$$\mathbf{E}^t = (9.955\hat{\mathbf{x}} + 0.122j\hat{\mathbf{y}} - 1.111\hat{\mathbf{z}})e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \tag{146}$$

Avec  $\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} = 600\pi(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t) = 600\pi(0,1104x + 0,9939z)$ .

## Problème 2.5

Une onde plane d'une fréquence de 1 MHz arrive à incidence normale sur une plaque d'aluminium épaisse ( $\epsilon_r = 1$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\sigma = 3,5 \times 10^7 \text{ S/m}$ ).

- Quelle est la longueur d'onde, la constante d'atténuation et la vitesse de propagation de l'onde transmise dans le métal?
- Quelle est l'impédance  $E_{\text{tan}}/H_{\text{tan}}$  à la surface du métal?
- Quel est le coefficient de transmission de l'air au métal?
- À quelle profondeur dans le métal a-t-on une atténuation de 100 dB par rapport au champ à la surface?

## Solution

- Pour une onde plane uniforme, la constante de propagation est donnée par  $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon_{\text{Al}}$  où  $\epsilon_{\text{Al}}$  est la permittivité de la plaque d'aluminium:  $\epsilon_{\text{Al}} = \epsilon_0 - j \frac{\sigma}{\omega}$  et  $\mu = \mu_r \mu_0$ , Nous avons donc que:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -(2\pi \times 10^6)^2 \times \frac{4\pi}{10^7} \times \left( 8,85 \times 10^{-12} - j \frac{3,5 \times 10^7}{2\pi \times 10^6} \right) \\ &\approx j 2\pi \times 10^6 \times \frac{4\pi}{10^7} \times 3,5 \times 10^7 \\ &= j \omega \mu \sigma \end{aligned} \quad (147)$$

Ce qui résulte en

$$\gamma = \sqrt{\sigma \omega \mu} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j) = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} (1 + j) = \alpha + j\beta \quad (148)$$

D'où l'on déduit la constante d'atténuation et le nombre d'onde:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} = 1,175 \times 10^4 \text{ m}^{-1} \quad (149)$$

Pour trouver la longueur d'onde, on a la relation suivante  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$  qui nous donne:

$$\lambda = 5,34 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (150)$$

Pour ce qui est de la vitesse de propagation, elle donnée par  $u = \lambda f$  dans le cas d'une onde plane, ce qui mène à:

$$u = 534,5 \text{ m/s} \quad (151)$$

**b.** À incidence normale, l'impédance caractéristique à la surface du métal est donnée par

$$E_{\text{tan}}/H_{\text{tan}} = Z_s, \text{ où } Z_s = \eta_2 = \sqrt{\mu/\epsilon_{\text{Al}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{-j(\sigma/\omega)}}, \text{ ce qui donne:}$$

$$Z_s = \sqrt{j} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = (1+j) 3,35 \times 10^{-4} \Omega \quad (152)$$

**c.** Les coefficients de transmission de l'air au métal, sont donnés par:

$$T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (153)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

Où  $\theta_i$  l'angle d'incidence de l'onde,  $\theta_t$  l'angle de transmission dans le métal et  $\eta_1, \eta_2$  sont respectivement les impédance caractéristiques des deux milieux (l'air et la plaque de métal). Nous avons  $\eta_1 = 377 \Omega$  et  $\eta_2$  est donnée par (152). Puisque nous sommes à incidence normale, les valeurs de  $\theta_i$  et  $\theta_t$  sont nulles, ce qui conduit à la simplification suivante:

$$T = T_{\parallel} = T_{\perp}$$

$$T = \frac{2\eta_{\text{metal}}}{\eta_{\text{metal}} + \eta_{\text{air}}} \quad (154)$$

La valeur numérique est alors:

$$T = \frac{2(1+j)3,35 \times 10^{-4}}{(1+j)3,35 \times 10^{-4} + 377} = 2,51 \times 10^{-6} \angle 45^\circ \quad (155)$$

**d.** On cherche  $z$  pour que  $20\log_{10}\frac{\|\mathbf{E}'(z)\|}{\|\mathbf{E}'(0)\|} = -100 \text{ dB}$  où  $\mathbf{E}'(0)$  représente le champ transmis à la surface du métal.

Or le champ transmis dans le métal à une distance  $z$  s'exprime en fonction de  $\mathbf{E}'(0)$  par la relation  $\mathbf{E}'(z) = \mathbf{E}'(0)e^{-\gamma z}$ , où  $\gamma = \alpha + j\beta$  représente la constante de propagation de l'onde dans le métal.

Donc en passant en module on trouve:

$$\frac{\|\mathbf{E}'\|}{\|\mathbf{E}'(0)\|} = e^{-\alpha z} \quad (156)$$

Et finalement, on peut écrire:

$$20\log_{10}(e^{-\alpha z}) = -100 \text{ dB}, \text{ ce qui équivaut à } e^{-\alpha z} = 1 \times 10^{-5}. \quad (157)$$

On en déduit que:

$$z = \frac{11,51}{\alpha} = \frac{11,75}{1,175 \times 10^4} = 979,8 \text{ microns ou } 0,9798 \text{ mm}. \quad (158)$$



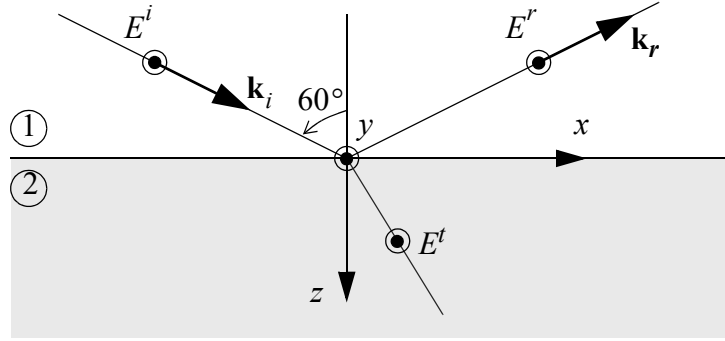
## Problème 2.6

Une onde plane uniforme se propageant dans l'air se heurte à un milieu ayant les propriétés suivantes:  $\epsilon_r = 5$ ,  $\sigma = 1 \times 10^{-3} \text{ S/m}$  et  $\mu_r = 1$ . La fréquence du signal est de 1 MHz et l'angle d'incidence par rapport à la normale est de 60 degrés. On suppose que l'onde est polarisée linéairement avec la direction du champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence (polarisation horizontale). Vous devez déterminer:

- la valeur complexe du coefficient de réflexion que subit l'onde incidente à l'interface avec le milieu conducteur;
- la puissance dissipée par mètre carré dans les premiers 1 mètre d'épaisseur du milieu conducteur, considérant que le module du champ électrique incident est de 10 V/m rms.

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 1 \\ \mu_r &= 1 \\ \sigma &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 5 \\ \mu_r &= 1 \\ \sigma &= 10^{-3} \text{ (S/m)}\end{aligned}$$



## Solution

- L'onde est polarisée linéairement avec la direction du champ électrique, perpendiculaire au plan d'incidence. Pour cette composante, le coefficient de réflexion s'écrit:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\perp} &= \frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} = \frac{\eta_2 / \cos \theta_2 - \eta_1 / \cos \theta_1}{\eta_2 / \cos \theta_2 + \eta_1 / \cos \theta_1} \\ &= \frac{\eta_2 \cos \theta_1 - \eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2}\end{aligned}\tag{159}$$

Pour évaluer  $\Gamma_{\perp}$ , nous devons d'abord trouver  $\eta_2$  et  $\cos \theta_2$ . Pour  $\eta_2$  il suffit d'utiliser l'expression:

$$\underline{\eta}_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - j(\sigma/\omega\varepsilon_0))}} \quad (160)$$

$$\underline{\eta}_2 = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8,852 \times 10^{-12} \times 5 - j(10^{-3}/2\pi \times 10^6)}} = \sqrt{7607 \angle 74,45^\circ} = \pm 87,22 \angle 37,22^\circ$$

Notez que cette impédance caractéristique est complexe (donc symbole souligné). Également, le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle de la permittivité complexe ( $p = \sigma/\varepsilon_r\varepsilon_0$ ) vaut 3,59. Dans ce cas il n'est pas possible d'utiliser l'approximation des bons conducteurs. On doit choisir une impédance à partie réelle positive. En effet pour une onde plane d'amplitude  $H_0$  dans le milieu 2, la densité de puissance est obtenue par

$P = \text{Re} \left\{ |H_0|^2 \underline{\eta}_2 \right\}$ . Physiquement, une puissance négative n'aurait pas de sens, donc il faut avoir  $P > 0$ , et conséquemment il faut choisir le signe positif dans l'expression de  $\underline{\eta}_2$ .

Pour trouver  $\cos\theta_2$ , considérons l'expression des champs transmis et incident:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^t &= \hat{\mathbf{y}} E_{0t} e^{-\underline{\gamma}_2(\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})} = \hat{\mathbf{y}} E_{0t} e^{-\underline{\gamma}_2(\sin\theta_2 x + \cos\theta_2 z)} \\ \mathbf{E}^i &= \hat{\mathbf{y}} E_{0i} e^{-j\beta_1(\sin 60^\circ x + \cos 60^\circ z)} \end{aligned} \quad (161)$$

avec  $\underline{\gamma}_2 = \sqrt{-\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2} = \sqrt{-\omega^2 \mu_0 (5\varepsilon_0 - j(\sigma/\omega))} = \pm 9,05 \times 10^{-2} \angle 52,75^\circ$ ,  $\underline{\gamma}_2$  correspond à la constante de propagation pour une onde se propageant en direction  $+\hat{\mathbf{n}}_2$  dans le milieu 2. Physiquement, cette onde doit s'atténuer et avoir une progression de phase négative. Donc, si  $\underline{\gamma}_2 = \alpha_2 + j\beta_2$ , nous devons choisir le signe qui donne  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  positifs, soit  $\underline{\gamma}_2 = +9,05 \times 10^{-2} \angle 52,75^\circ$ .

D'après la loi de Snell, la variation des champs par rapport à  $x$  le long de la frontière  $z = 0$  doit être la même dans les deux milieux. Appliquant ceci à  $\mathbf{E}^t$  et  $\mathbf{E}^i$  on doit avoir:

$$E_{0t} e^{-\underline{\gamma}_2 \sin(\theta_2)x} \propto E_{0i} e^{-j\beta_1 \sin 60^\circ x} \quad (162)$$

ce qui implique que:

$$\gamma_2 \sin \theta_2 = j\beta_1 \sin 60^\circ \quad (163)$$

ainsi, on trouve que:

$$\sin \theta_2 = j\beta_1 \sin \theta_1 / \gamma_2 = j \frac{\omega}{c} \sin \theta_1 / \gamma_2 = 0,2 \angle 37,25^\circ \quad (164)$$

On en déduit alors  $\cos \theta_2$  par:

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \pm 0,9975 \angle -1,1^\circ \quad (165)$$

Pour choisir le signe, nous devons prendre en considération que l'amplitude du signal doit s'atténuer à mesure que celui-ci s'enfonce dans le milieu 2, celui ci ayant des pertes.

$$|\mathbf{E}^t| \propto |e^{-\gamma_2 \cos(\theta_2)z}| = |e^{-(9,05 \times 10^{-2} \angle 52,75^\circ \times \pm 0,9975 \angle -1,1^\circ)z}| = e^{-(\pm(0,0559 + j0,0706))z} \quad (166)$$

Pour qu'il y ait atténuation de  $E^t$  avec  $z$ , il faut donc choisir le signe positif, d'où  $\cos \theta_2 = 0,9975 \angle -1,1^\circ$ . Nous avons maintenant toutes les variables nécessaires pour calculer  $\Gamma_\perp$ :

$$\Gamma_\perp = \frac{87,22 \angle 37,22 \cos 60^\circ - 377 \cdot 0,9975 \angle -1,1^\circ}{87,22 \angle 37,22 \cos 60^\circ + 377 \cdot 0,9975 \angle -1,1^\circ} = 0,834 \angle 171,7^\circ \quad (167)$$

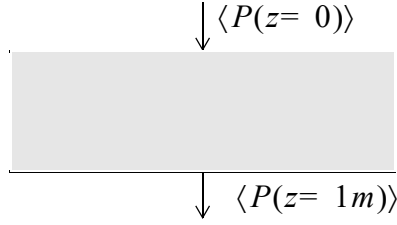
- b.** Pour calculer la puissance dissipée dans le milieu conducteur, il faut d'abord calculer les composantes de champ transmises qui s'obtiennent à partir des valeurs des composantes de champ incident et des coefficients de transmission. Puisque la direction du champ incident est perpendiculaire au plan d'incidence on a alors  $E_{//}^t = T_{//} E_{//}^i = 0$  et:

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{y}} E^i(0, 0, 0) T_\perp e^{-(\bar{\gamma}_2 \cdot \bar{\mathbf{r}})} = \hat{\mathbf{y}} E^t e^{-(\bar{\gamma}_2 \cdot \bar{\mathbf{r}})} \quad (168)$$

Avec  $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2(\sin \theta_2 \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_2 \hat{\mathbf{z}})$ . Pour  $T_\perp$  nous avons directement:

$$T_\perp = \frac{2\eta_2 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2} = 0,212 \angle 34,5^\circ \quad (169)$$

Or selon les données du problème, on a  $E^i = 10\text{V/m}$



Soit  $P_{diss}$  la puissance dissipée dans un mètre carré pour une épaisseur de 1 m, i.e.:

$$P_{diss} = P_z(z=0) - P_z(z=1) \quad (170)$$

Trouvons l'expression générale de  $P_z$  pour l'onde plane non uniforme dans le milieu 2.

$$P_z = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^* \} \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (171)$$

avec  $\mathbf{E}_2$  est donnée par l'équation (169) et  $\mathbf{H}_2$  est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \frac{j}{\omega \mu_0} \nabla \times \mathbf{E}_2 = \frac{j}{\omega \mu_0} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_{2y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega \mu_0} \left( \hat{\mathbf{x}} \left( -\frac{\partial E_{2y}}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial E_{2y}}{\partial x} \right) \right) \\ &= \frac{j}{\omega \mu_0} (\gamma_z \hat{\mathbf{x}} - \gamma_x \hat{\mathbf{z}}) E^i e^{-(\tilde{\gamma}_2 \cdot \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (172)$$

On utilise ce résultat pour calculer le vecteur de Poynting moyen en direction z, soit:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^* &= \hat{\mathbf{y}} E^i e^{-(\tilde{\gamma}_2 \cdot \mathbf{r})} \times \frac{-j}{\omega \mu_0} (\gamma_z^* \hat{\mathbf{x}} + \gamma_x^* \hat{\mathbf{z}}) E^{i*} e^{-(\tilde{\gamma}_2^* \cdot \mathbf{r})} \\ &= \frac{-j}{\omega \mu_0} |E^i|^2 (-\hat{\mathbf{z}} \gamma_z^* - \hat{\mathbf{x}} \gamma_x^*) e^{-2\text{Re}\{\tilde{\gamma}_2 \cdot \mathbf{r}\}} \end{aligned} \quad (173)$$

et finalement:

$$\begin{aligned}
Re\{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^*\} \cdot \hat{\mathbf{z}} &= \frac{|E|^2}{\omega\mu_0} e^{-2Re\{\tilde{\gamma}_2 \cdot \mathbf{r}\}} Re\{j\tilde{\gamma}_z^*\} \\
&= \frac{|E|^2}{\omega\mu_0} e^{-2Re\{\gamma_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)\}} Re\{j\gamma_2^*(\cos\theta_2)^*\}
\end{aligned} \tag{174}$$

En a.) nous avons trouvé que  $\gamma_2 \sin\theta_2 = j\beta_1 \sin\theta_1$ . Ce terme est donc imaginaire car  $\beta_1$  et  $\cos\theta_1$  sont tous les deux réels. Il en résulte que:

$$e^{-2Re\{\gamma_2 x \sin\theta_2\}} = e^0 = 1$$

Il n'y a donc pas de variation selon  $x$  de la densité de puissance transmise en direction  $z$ .

De plus, nous avons que:

$$\gamma_2 \cos\theta_2 = 0,9975 \angle -1,1^\circ \cdot 9,05 \times 10^{-2} \angle 52,75^\circ = (5,6 + j7,08) \times 10^{-2}$$

d'où  $Re\{\gamma_2 \cos\theta_2\} = 5,6 \times 10^{-2}$  et  $Re\{j\gamma_2^*(\cos\theta_2)^*\} = +7,08 \times 10^{-2}$ .

En résumé, nous avons  $P_z = |E|^2 8,967 \times 10^{-3} e^{-2 \cdot 5,6 \times 10^{-2} z}$ , donc:

- Appliquant ce résultat à  $z = 0$ , nous trouvons:

$$\begin{aligned}
P_z(z=0) &= |E|^2 8,967 \times 10^{-3} = |TE|^2 8,967 \times 10^{-3} = |0,212 \times 10 \text{ V/m}|^2 8,967 \times 10^{-3} \\
&= 4,03 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2
\end{aligned} \tag{175}$$

- puis à  $z = 1$ , on trouve:

$$P_z(z=1) = 4,03 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2 e^{-(2 \times 5,6 \times 10^{-2} \times 1)} = 3,60 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2 \tag{176}$$

La puissance dissipée dans 1 mètre d'épaisseur du milieu 2 est donc de  $(4,03 - 3,60) \times 10^{-2} \text{ W/m}^2 = 4,3 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$ .

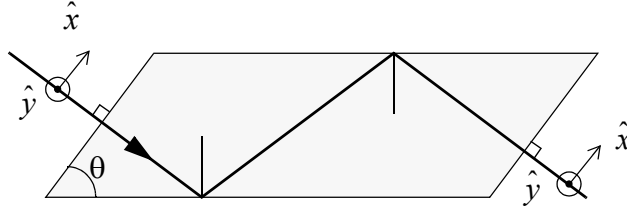
## Problème 2.7

Dans le rhomboïde de Fresnel montré dans la figure suivante, une onde plane uniforme à polarisation linéaire pénètre dans le matériau à incidence normale et subit deux réflexions totales internes avant de ressortir de la structure.  $\theta$  définit l'angle de coupe du rhomboïde. Le champ incident et le champ transmis à la sortie sont donnés respectivement par:

$$\mathbf{E}^i = (a\hat{\mathbf{x}} + b\hat{\mathbf{y}})e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{E}^t = (c\hat{\mathbf{x}} + d\hat{\mathbf{y}})e^{-j\beta z}$$

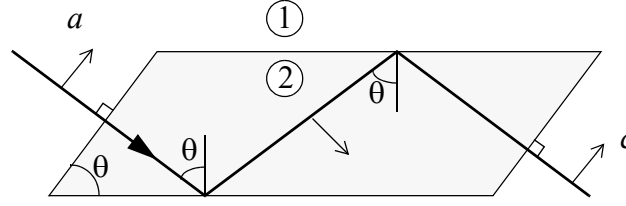
- Quelle doit être la relation entre les constantes complexes  $a$  et  $b$  pour que le champ transmis soit à polarisation circulaire?
- Si le rhomboïde est formé d'un diélectrique ayant ( $\epsilon_r = 4$ ), quelle devrait être la valeur de  $\theta$  pour que l'onde transmise soit à polarisation circulaire?
- Comment pourrait-on faire avec ce montage pour sélectionner le sens de rotation de la polarisation circulaire (droite ou gauche), pour des valeurs fixées de  $\epsilon_r$  et  $\theta$ ?
- Proposez une modification à ce dispositif, ajoutant au besoin d'autres matériaux, qui permettrait d'avoir 100% de transmission aux interfaces d'entrée et de sortie (indice: inspirez vous du circuit d'adaptation à ligne  $\lambda/4$ ).



## Solution

- Tel que spécifié, le champ  $\mathbf{E}^i$  est polarisé linéairement, donc  $a$  et  $b$  ont la même phase, modulo  $\pi$ . Il nous faut maintenant trouver la relation entre leurs amplitudes. On voit que  $a\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{E}_{//}^i$ ,  $b\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{E}_{\perp}^i$ ,  $c\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{E}_{//}^t$  et  $d\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{E}_{\perp}^t$ . Donc pour avoir une polarisation circulaire à la sortie, il faut que  $|c| = |d|$  et que  $c = de^{\pm j(\pi/2)}$ .

- Cas //:



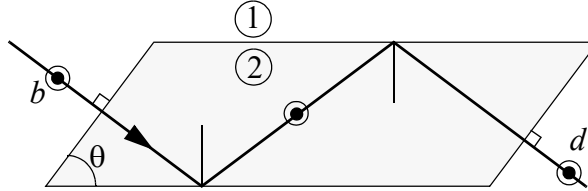
On voit que le champ à la sortie du rhomboïde subit deux transmissions et deux réflexions donc:

$$c = a\Gamma_{//}\Gamma_{//}e^{-j\beta_1 L_1} \times T_{12} \times T_{21} \times e^{-j\beta_2 L_2} \quad (177)$$

Ici  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont les constantes de propagation dans l'air et le matériau respectivement et  $L_1, L_2$  sont les longueurs de parcours dans le l'air et dans le rhomboïde.

On voit aussi que l'angle  $\theta$  est égal à l'angle d'incidence pour les deux réflexions internes.

- Cas  $\perp$ :



De la même manière on obtient:

$$d = b\Gamma_{\perp}\Gamma_{\perp}e^{-j\beta_1 L_1} \times T_{12} \times T_{21} \times e^{-j\beta_2 L_2} \quad (178)$$

En calculant le rapport des équations (177) et (178) on trouve:

$$\frac{c}{d} = \frac{a(\Gamma_{//})^2}{b(\Gamma_{\perp})^2} \quad (179)$$

Notez que les coefficients de transmission à incidence normale à l'entrée et à la sortie du rhomboïde sont les mêmes pour les deux types de polarisation. Aussi, puisqu'on a une réflexion totale aux deux surfaces horizontales, on peut écrire:  $|\Gamma_{//}| = |\Gamma_{\perp}| = 1$ .

Nous avons vu que pour avoir une polarisation circulaire il faut avoir  $|c| = |d|$  et  $c = de^{\pm j(\pi/2)}$ . Ceci mène à:

$$\left| \frac{c}{d} \right| = |e^{\pm j(\pi/2)}| = \left| \frac{a(\Gamma_{//})^2}{b(\Gamma_{\perp})^2} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| = 1 \quad (180)$$

Il est spécifié que l'onde incidente est à polarisation linéaire. Comme mentionné précédemment, ceci implique que les deux composantes du champ  $\mathbf{E}^i$  sont en phase (ou déphasées de  $\pi$  l'une par rapport à l'autre). Donc, pour satisfaire l'équation (180) la relation recherchée entre  $a$  et  $b$  pourrait donc être  $a = b$  ou  $a = -b$ .

**b.** On a d'après la question précédente:

$$\frac{a}{b} = \pm 1 \quad (181)$$

Donc, selon l'éq. (179), il en résulte que:

$$\frac{c}{d} = \pm \frac{\Gamma_{//}^2}{\Gamma_{\perp}^2} \quad (182)$$

Nous savons déjà que  $c$  et  $d$  ont la même amplitude. La relation précédente nous indique qu'au niveau de la phase il faut que:

$$\angle(c/d) = \begin{cases} 2(\angle\Gamma_{//} - \angle\Gamma_{\perp}) & \text{si } a/b = 1 \\ 2(\angle\Gamma_{//} - \angle\Gamma_{\perp}) + \pi & \text{si } a/b = -1 \end{cases} \quad (183)$$

Si  $\angle(c/d) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ , il y aura une différence d'un quart de cycle entre les 2 signaux et on aura un signal à polarisation circulaire. Il suffira donc de changer le signe de  $a/b$  pour faire changer le déphasage  $\angle(c/d)$  de  $\pi$ , et ainsi changer le sens de rotation de la polarisation circulaire.

Il y a 2 cas et 4 solutions possibles:



- Cas où  $\angle(c/d) = \frac{\pi}{2}$  c'est-à-dire que  $2(\angle\Gamma_{//} - \angle\Gamma_{\perp}) = \frac{\pi}{2}$ . Ceci revient à dire que

$$\angle(\Gamma_{//}/\Gamma_{\perp}) = \frac{\pi}{4} \text{ ou } -3\frac{\pi}{4}$$

- Cas où  $\angle(c/d) = -\frac{\pi}{2}$  c'est à dire que  $2(\angle\Gamma_{//} - \angle\Gamma_{\perp}) = -\frac{\pi}{2}$ . Ceci arrive lorsque

$$\angle(\Gamma_{//}/\Gamma_{\perp}) = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } 3\frac{\pi}{4}$$

On doit donc trouver les valeurs de  $\theta$  qui pourraient faire en sorte que

$$\angle(\Gamma_{//}/\Gamma_{\perp}) = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, -3\frac{\pi}{4}.$$

Pour cela il faut calculer les coefficients de réflexion:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\perp} &= \frac{\eta_2 \cos \theta_1 - \eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2} \\ \Gamma_{//} &= \frac{\eta_2 \cos \theta_2 - \eta_1 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1}\end{aligned}\tag{184}$$

Notez qu'il s'agit de réflexion interne dans le verre (milieu 2), ce qui implique l'inversion des indices par rapport aux formules habituelles.

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} = \frac{377}{\sqrt{4}}\Omega \\ \eta_1 &= \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} = 377\Omega\end{aligned}\tag{185}$$

Et selon la loi de Snell  $\sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \theta_1 = \sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \theta_2$ . Pour avoir une réflexion totale, il faut que  $\sin \theta_1 > 1$ . À la limite  $\sin \theta_1 = 1$  nous avons que  $\sin \theta_2 = \sqrt{\epsilon_{r1}/\epsilon_{r2}} = 1/2$ , d'où  $\theta_2 = 30^\circ$ . Donc on aura une réflexion totale si  $\theta_2 > 30^\circ$ .

Dans l'air, le signal ne peut pénétrer. Dans ce cas on écrit:

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \sin^2 \theta_2} = \pm j \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \sin^2 \theta_2 - 1}\tag{186}$$

On peut maintenant calculer le rapport des coefficients de réflexion en fonction de l'angle  $\theta_2$ . Notez que  $\theta_2$  représente l'angle  $\theta$  dans les figures précédentes. Seul le signe négatif peut être conservé dans l'équation (186) pour avoir une onde évanescente dans l'air. Le signe positif conduit à une croissance exponentielle non physique des champs.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma_{//}}{\Gamma_{\perp}} &= \frac{(\eta_1 \cos \theta_1 - \eta_2 \cos \theta_2)(\eta_1 \cos \theta_2 + \eta_2 \cos \theta_1)}{(\eta_1 \cos \theta_1 + \eta_2 \cos \theta_2)(\eta_1 \cos \theta_2 - \eta_2 \cos \theta_1)} \\
 &= \frac{\eta_1^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \eta_1 \eta_2 (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2) - \eta_2^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\eta_1^2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \eta_2 (\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1) - \eta_2^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2} \\
 &= \frac{(\eta_1^2 - \eta_2^2) \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \eta_1 \eta_2 (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2)}{(\eta_1^2 - \eta_2^2) \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \eta_1 \eta_2 (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2)}
 \end{aligned} \tag{187}$$

Cette dernière expression est de la forme  $\frac{\Gamma_{//}}{\Gamma_{\perp}} = \frac{B+A}{B-A}$ , avec:

$$\begin{aligned}
 B &= (\eta_1^2 - \eta_2^2) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
 A &= \eta_1 \eta_2 (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2)
 \end{aligned} \tag{188}$$

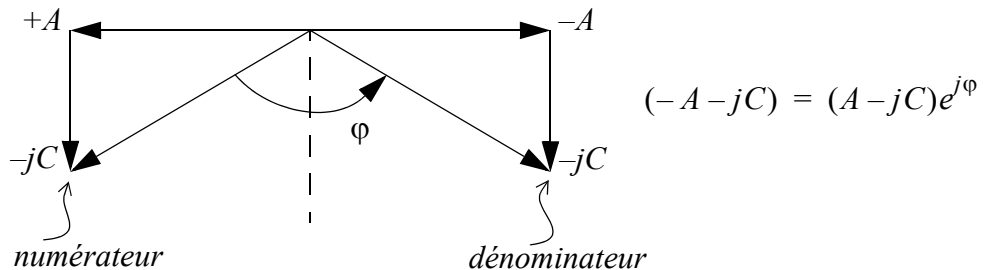
On peut constater que:

- A est un réel négatif
- B est un imaginaire négatif, soit  $B = -jC$

En conséquences, l'équation (187) peut s'écrire sous cette forme:

$$\frac{\Gamma_{//}}{\Gamma_{\perp}} = \frac{A - jC}{-A - jC} = e^{j\varphi}, \quad \varphi = \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4} \right\} \tag{189}$$

Voici l'illustration dans le plan complexe:



D'après la figure, on voit que les cas  $\varphi = +\pi/4$  ou  $\varphi = +3\pi/4$  sont des cas possibles alors que  $\varphi = -\pi/4$  et  $\varphi = -3\pi/4$  sont impossibles. On voit aussi que  $-A/C = \tan(\varphi/2)$ . Donc:

$$\frac{-A}{C} = \frac{-A}{jB} = \frac{\eta_1 \eta_2 (\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1)}{j(\eta_1^2 - \eta_2^2) \cos \theta_1 \cos \theta_2} = \tan \frac{\varphi}{2} \quad (190)$$

Pour simplifier, posons  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1$  et  $\theta_2 = \theta$ . Donc l'équation (190) devient:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\varphi}{2} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} (\cos^2 \theta + \varepsilon_r \sin^2 \theta - 1)}{j \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \cos \theta (-j \sqrt{\varepsilon_r \sin^2 \theta - 1})} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} (\varepsilon_r - 1) \sin^2 \theta}{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \cos \theta \sqrt{\varepsilon_r \sin^2 \theta - 1}} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_r} \sin^2 \theta}{\cos \theta \sqrt{\varepsilon_r \sin^2 \theta - 1}} \end{aligned} \quad (191)$$

En mettant l'expression au carré, on trouve:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r \sin^4 \theta &= \tan^2 \frac{\varphi}{2} [\cos^2 \theta (\varepsilon_r \sin^2 \theta - 1)] \\ \cot^2 \frac{\varphi}{2} \varepsilon_r \sin^4 \theta &= (1 - \sin^2 \theta) (\varepsilon_r \sin^2 \theta - 1) \\ &= \varepsilon_r \sin^2 \theta - 1 - \varepsilon_r \sin^4 \theta + \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (192)$$

Ou encore:

$$\sin^4 \theta \varepsilon_r \left(1 + \cot^2 \frac{\varphi}{2}\right) + \sin^2 \theta (-1 - \varepsilon_r) + 1 = 0 \quad (193)$$

D'où:

$$\sin^2\theta = \frac{(1 + \varepsilon_r) \pm \sqrt{(1 + \varepsilon_r)^2 - 4\varepsilon_r \left(1 + \cot^2\frac{\varphi}{2}\right)}}{2\varepsilon_r \left(1 + \cot^2\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (194)$$

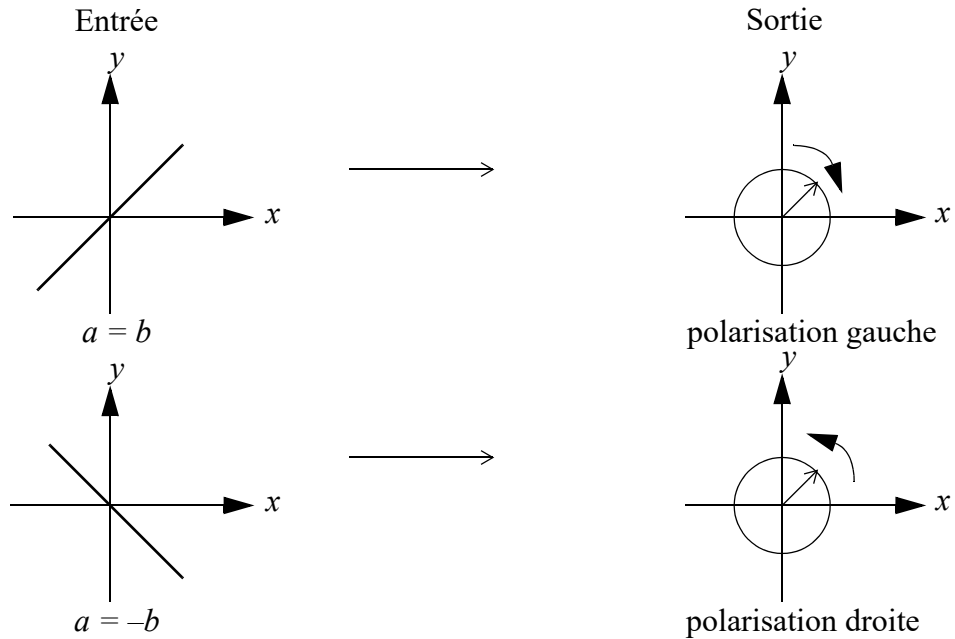
En remplaçons  $\varphi$  par ses deux valeurs  $\pi/4$  et  $3\pi/4$  identifiées plus haut, on trouve:

- Pour  $\varphi = \pi/4$ ,  $\sin^2\theta$  est complexe.
- Pour  $\varphi = 3\pi/4$ ,  $\sin^2\theta = (5 \pm \sqrt{6,255})/9,372$ , d'où  $\theta = 63,46^\circ$  ou  $\theta = 31,09^\circ$ .

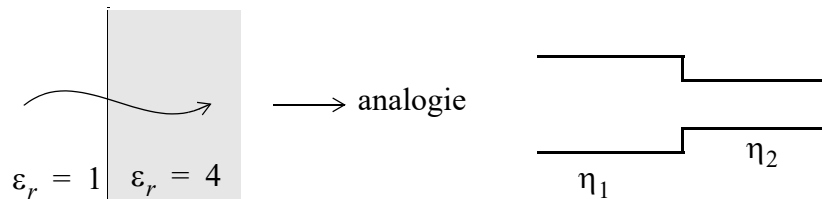
Il y a donc deux valeurs possibles de  $\theta$  qui conduisent à une polarisation circulaire en sortie.

- c. On a vu avec l'équation (183) qu'il suffit de changer le signe de  $a/b$  pour changer le sens de la polarisation circulaire en sortie.
- Dans le cas où:  $a/b = 1$ , nous avons  $2\angle(\Gamma_{//}/\Gamma_{\perp}) = \angle(c/d)$ . Donc  $\angle(c/d) = 2\varphi = 3\pi/2$ . En conséquence,  $c = de^{j(3\pi/2)}$  d'où  $E_x = E_y e^{-j\pi/2}$  c'est-à-dire que  $E_x \propto \cos(\omega t - \pi/2)$  et  $E_y \propto \cos(\omega t)$  ce qui montre que  $E_x$  est en retard sur  $E_y$ . Donc on a une polarisation circulaire gauche.
  - Dans le cas où:  $a/b = -1$ , nous avons  $2\angle(\Gamma_{//}/\Gamma_{\perp}) + \pi = \angle(c/d)$  c'est-à-dire  $\angle(c/d) = 2\varphi + \pi = 3\pi/2 + \pi = 5\pi/2$  ou  $\pi/2$ . Donc,  $c = de^{j(\pi/2)}$  ou de façon équivalente,  $E_x = E_y e^{j(\pi/2)}$ .  $E_x$  étant en avance sur  $E_y$ , il s'agit d'une polarisation circulaire droite.

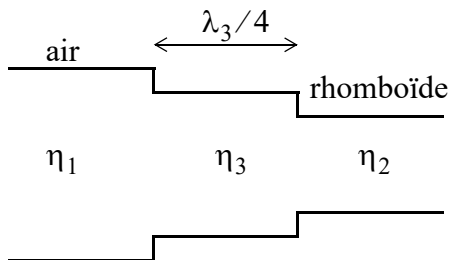
Donc pour générer la polarisation circulaire désirée à la sortie, il suffit d'orienter adéquatement le sens de la polarisation linéaire à l'entrée.



- d.** On peut faire l'analogie entre la structure à une interface et la jonction entre deux lignes de transmission d'impédances caractéristiques  $\eta_1$  et  $\eta_2$ .

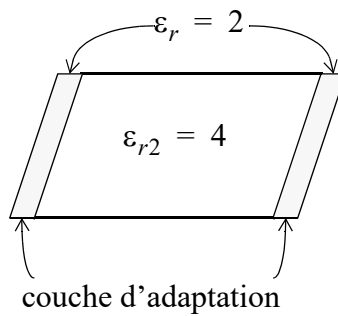


Pour éviter toute réflexion, on peut insérer une ligne quart d'onde entre les deux lignes.



Selon les relations trouvées pour les lignes de transmissions on aura  $\eta_3 = \sqrt{\eta_1 \eta_2}$ .  
 Donc  $\eta_3 = 377\Omega/\sqrt{2}$ . Dans le cas d'une onde plane dans un diélectrique  
 $\eta = 377\Omega/\sqrt{\epsilon_r}$ . On en déduit donc que  $\epsilon_{r3} = 2$ .

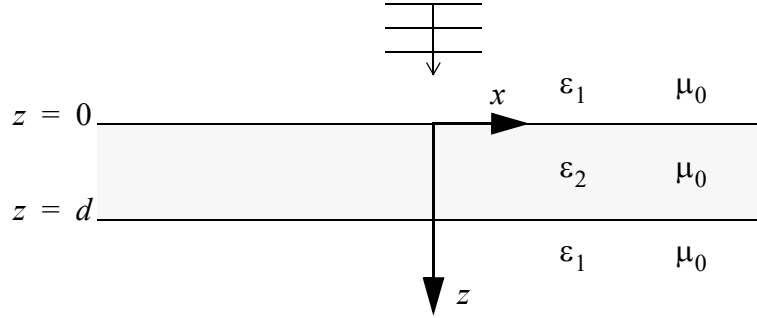
Il suffit donc d'ajouter une couche de matériau ayant une épaisseur égale à un nombre impair de  $\lambda_3/4$ , où  $\lambda_3$  est la longueur d'onde dans la couche. Le matériau a une permittivité relative  $\epsilon_{r3} = 2$  et donc  $\lambda_3 = \lambda_{\text{air}}/\sqrt{2}$ . Puisque le circuit d'adaptation fonctionne dans les deux sens, on fait la même chose sur l'autre surface à la sortie.



## Problème 2.8

Une onde plane se propageant dans l'air (milieu 1) arrive à incidence normale sur une plaque de matériau d'épaisseur  $d$  (milieu 2). Le champ électrique de l'onde incidente est donné par:

$$\mathbf{E}^i = E_0 e^{-j\beta_1 z} \hat{\mathbf{x}}$$



- Créez un modèle formé de lignes de transmissions qui est équivalent à cette structure.
- À partir du modèle trouvé en **a**, trouvez les termes de la matrice ABCD reliant les champs d'une frontière à l'autre du milieu 2, telle que définie ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ H_y \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ H_y \end{bmatrix}_{z=d} \quad (195)$$

- Trouvez les expressions de  $Z_{in}$  et  $\Gamma_{in}$  définies comme suit.

$$Z_{in} \equiv \frac{E_x(z=0)}{H_y(z=0)} \quad \Gamma_{in} \equiv \frac{E_x^r(z=0)}{E_x^i(z=0)} \quad (196)$$

avec  $r$ : réfléchi,  $i$ : incident.

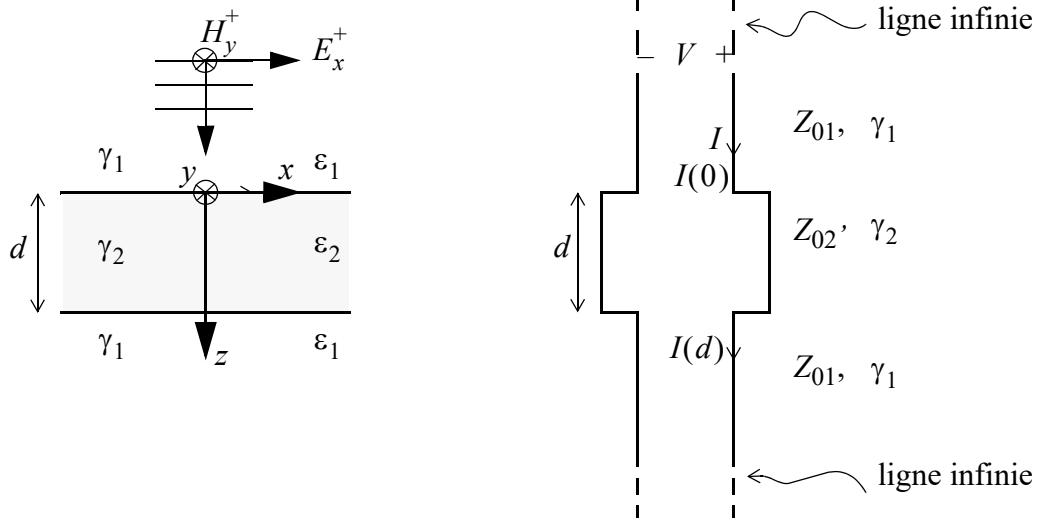
- Le milieu 2 est une tranche de boeuf cru de 2 cm d'épaisseur qu'on désire chauffer dans un four micro-ondes. Les fours industriels peuvent fonctionner à une fréquence de 915 MHz ou une fréquence de 2450 MHz. Afin de déterminer laquelle des deux fré-

quences conduit au chauffage le plus efficace, déterminez le pourcentage de la puissance incidente qui est dissipé dans la tranche de boeuf à chaque fréquence. Les propriétés du boeuf cru sont données dans le tableau suivant<sup>1</sup>.

fréquence	$\epsilon_r'$	$\tan \delta$
915 MHz	54.5	0.411
2450 MHz	52.4	0.33

## Solution

a.



	Onde plane	ligne de transmission
Impédance de l'onde incidente.	$E_x^+ / H_y^+ = \eta$	$V^+ / I^+ = Z_0$
Impédance de l'onde réfléchie.	$E_x^- / H_y^- = -\eta$	$V^- / I^- = -Z_0$
Onde incidente.	$E_x^+ = A e^{-\gamma z}$	$V^+ = A e^{-\gamma z}$
Onde réfléchie.	$E_x^- = B e^{+\gamma z}$	$V^- = B e^{+\gamma z}$

Dans chaque milieu, on peut donc faire les correspondances suivantes:

1. Dans un matériau de permittivité complexe,  $\tan \delta$  est défini comme  $-Im\{\epsilon\} / Re\{\epsilon\} = \epsilon'' / \epsilon'$ .



$$\begin{aligned}
E_x &\rightarrow V \\
H_y &\rightarrow I \\
\eta &\rightarrow Z_0, \text{ avec } Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon} \\
\text{avec } \gamma &= \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon}, \text{ (}\varepsilon \text{ peut être complexe)}
\end{aligned} \tag{197}$$

Donc dans le milieu 1 qui est l'air, on a:

$$\begin{aligned}
Z_{01} &= \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1} \approx \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \\
\gamma_1 &= \sqrt{-\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1} \approx \sqrt{-\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0} = j \frac{\omega}{c} = j\beta_1
\end{aligned} \tag{198}$$

Dans le milieu 2, on a:

$$\begin{aligned}
Z_{02} &= \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2} \\
\gamma_2 &= \sqrt{-\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2} = \alpha_2 + j\beta_2
\end{aligned} \tag{199}$$

avec  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r' (1 - j \tan \delta)$ .

**b.** La matrice ABCD d'un bout de ligne de transmission est ainsi définie:

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}_{z=d} \tag{200}$$

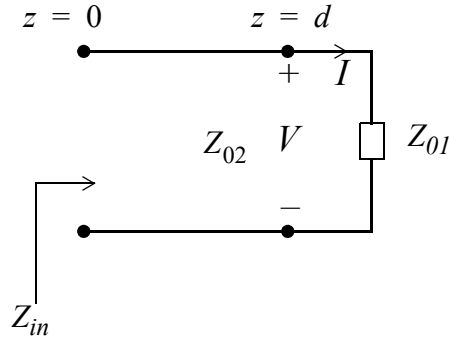
D'après la théorie des lignes de transmissions, on a:

$$\begin{aligned}
A &= \cosh \gamma_2 d & B &= Z_{02} \sinh \gamma_2 d \\
C &= \frac{1}{Z_{02}} \sinh \gamma_2 d & D &= \cosh \gamma_2 d
\end{aligned} \tag{201}$$

En faisant correspondre  $(E_x, H_y)$  à  $(V, I)$  on a:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ H_y \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma_2 d & Z_{02} \sinh \gamma_2 d \\ \frac{1}{Z_{02}} \sinh \gamma_2 d & \cosh \gamma_2 d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ H_y \end{bmatrix}_{z=d} \tag{202}$$

c. À  $z = d$ , la ligne 2 est branchée à une ligne infinie d'impédance caractéristique  $Z_{01}$



On a alors:

$$\frac{V(d)}{I(d)} = \frac{E_x(d)}{H_y(d)} = Z_{01} \quad (203)$$

$$Z_{in} = \left. \frac{V}{I} \right|_{z=0} = \left. \frac{E_x}{H_y} \right|_{z=0} = \frac{AE_x(d) + BH_y(d)}{CE_x(d) + DH_y(d)} \quad (204)$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par  $H_y(d)$ , on trouve:

$$Z_{in} = \frac{A(E_x(d)/H_y(d)) + B}{C(E_x(d)/H_y(d)) + D} = \frac{AZ_{01} + B}{CZ_{01} + D} \quad (205)$$

Pour le coefficient de réflexion  $\Gamma_{in}$ , comme le circuit ci-dessus est branché à une ligne d'impédance caractéristique  $Z_{01}$  à  $z = 0$ , alors on a simplement:

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_{01}}{Z_{in} + Z_{01}} \quad (206)$$

d. Si on fait un bilan de puissance dans la structure on peut écrire:

$$P_{dissipée} = P_{incidente} - P_{réfléchie} - P_{transmise} \quad (207)$$

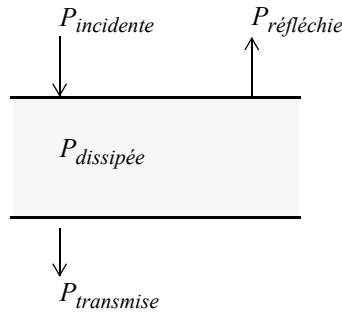
Avec

$$\begin{aligned} P_{in} &= P_{incidente} - P_{réfléchie} \\ P_{out} &= P_{transmise} \end{aligned} \quad (208)$$

On définit les divers termes ainsi:

- $P_{dissipée}$ : puissance absorbée par la couche de boeuf,  $0 < z < d$ .
- $P_{incidente}$ : puissance associée à l'onde incidente dans l'espace  $z < 0$ .
- $P_{réfléchie}$ : puissance de l'onde réfléchie par la structure et se propageant en direction  $-z$ ,  $z < 0$ .
- $P_{transmise}$ : puissance de l'onde se propageant en direction  $+z$ ,  $z > d$ .

$$P_{in} - P_{out} = P_{dissipée} \quad (209)$$



Par analogie avec le circuit équivalent on peut écrire:

$$\begin{aligned} P_{in} &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ V I^* \} \Big|_{z=0} \\ P_{out} &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ V I^* \} \Big|_{z=d} \end{aligned} \quad (210)$$

Posons  $I=1$  ampère à  $z = d$ , donc:

$$\begin{aligned} V(z = d) &= Z_{01} I(z = d) = 377 \text{ volts} \\ V(z = 0) &= A V(d) + B I(d) = \cosh(\gamma_2 d) \cdot 377 \text{ volts} + Z_{02} \sinh(\gamma_2 d) \cdot 1 \text{ amp} \\ I(z = 0) &= C V(d) + B I(d) = \frac{1}{Z_{02}} \sinh(\gamma_2 d) \cdot 377 \text{ volts} + \cosh(\gamma_2 d) \cdot 1 \text{ amp} \end{aligned}$$

Ces valeurs de  $V$  et  $I$  permettent de calculer  $P_{in}$  et  $P_{out}$ .

Pour trouver  $P_{incidente}$ , il faut connaître  $V^+$  à  $z = 0$ .

$$P_{incidente} = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_{01}} \Big|_{z=0} \quad (211)$$

On sait que:

$$V(0) = V^+(1 + \Gamma_{in}(z=0)) \quad (212)$$

avec  $\Gamma_{in}$  déjà trouvé en (c).

La puissance réfléchie est simplement obtenue avec:

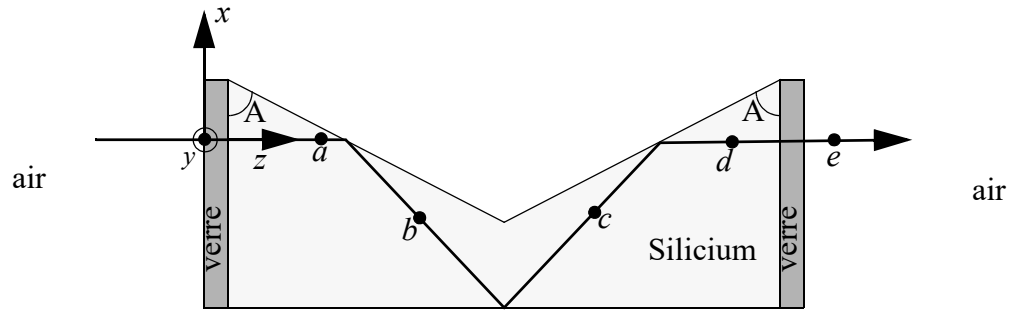
$$P_{réfléchie} = P_{incidente} |\Gamma_{in}|^2 \quad (213)$$

Pour la puissance transmise on utilise l'équation (210). Les résultats calculés sont donnés dans le tableau suivant:

$f = 915 MHz$	$f = 2450 MHz$
$Z_{in} = 69,9 + j31,4 \Omega$	$Z_{in} = 71,92 + j42,68 \Omega$
$\varepsilon = (4,825 - j1,983) \times 10^{-10} F/m$	$\varepsilon = (4,639 - j1,531) \times 10^{-10} F/m$
$\gamma = 28,52 + j144,4$	$\gamma = 22,61 + j140,6$
$\Gamma_{in} = 0,689 \angle 170,14^\circ$	$\Gamma_{in} = 0,682 \angle 166,6^\circ$
$V(0) = -456,8 + j65,4 V$	$V(0) = -418,9 + j71,2 V$
$I(0) = -5,08 + j3,22 A$	$I(0) = -3,873 + j3,288 A$
$V^+ = -1187 + j640 V$	$V^+ = 1280 + j2880 V$
$P_{incidente} = 2412 W$	$P_{incidente} = 1740 W$
$P_{réfléchie} = 1145 W$	$P_{réfléchie} = 809,3 W$
$P_{in} = 1267 W$	$P_{in} = 928,4 W$
$P_{out} = 188,5 W$	$P_{out} = 188,5 W$
$P_{diss} = 1078 W$	$P_{diss} = 739,9 W$
$P_{réfléchie}/P_{incidente} = 47,4\%$	$P_{réfléchie}/P_{incidente} = 46,5\%$
$P_{diss}/P_{incidente} = 44,7\%$	$P_{diss}/P_{incidente} = 42,5\%$

On remarque qu'il y a très peu de différence entre les deux rapports  $P_{diss}/P_{incidente}$ . Dans chaque cas, environ 47% de la puissance incidente est perdue en réflexion à l'interface  $z = 0$ . Le pourcentage de puissance qui traverse la couche ( $P_{out}/P_{incidente}$ ) est plutôt faible. Donc, la majorité de la puissance perdue vient de la réflexion. Pour optimiser le processus de chauffage on aurait avantage à améliorer l'adaptation d'impédance à l'entrée du circuit, par exemple en ajoutant une couche de diélectrique sans pertes. Finalement, on note que dans le circuit équivalent les unités de  $V$ ,  $I$  et  $P$  sont respectivement des volts, ampères et watts. Dans la structure réelle les unités de  $E$ ,  $H$  et  $P$  sont plutôt V/m, A/m et W/m<sup>2</sup>. Bien sûr, les rapports de puissances sont inchangés.

## Problème 2.9



Un rayon infra-rouge pénètre dans un bloc de silicium taillé en V. L'angle  $A$  vaut  $52,9613$  degrés, la longueur d'onde dans l'air est de  $1,3$  micron et l'indice de réfraction du silicium à cette longueur d'onde est  $3,5053$ . Le rayon incident possède une polarisation circulaire droite et l'amplitude (valeur crête) du champ électrique est de  $1$  volt/mètre.

- Donnez les expressions complètes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  du rayon incident se propageant dans l'air, en supposant que ces champs peuvent être approximatés par le comportement d'une onde plane.
- Une couche de verre est ajoutée à l'entrée et à la sortie du bloc de silicium dans le but d'éliminer les réflexions à ces interfaces. Trouvez l'épaisseur minimum et la valeur de l'indice de réfraction des couches de verre.
- Décomposez le champ  $\mathbf{E}$  en 2 composantes orthogonales et donnez la valeur de l'amplitude chaque composante et la phase relative entre ces 2 composantes aux points  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  identifiés le long du parcours. Quel est l'état de polarisation (linéaire, circulaire ou elliptique; droite ou gauche) en chacun de ces points?
- À une phase près, donnez l'expression complète des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  transmis à la sortie du dispositif (point  $e$ ).
- Quel est le pourcentage de la puissance incidente transmis à travers ce dispositif? Où est allée la puissance perdue s'il y en a?

## Solution

- Soit  $\mathbf{E}^i$  et  $\mathbf{H}^i$  les champs du rayon incident se propageant dans l'air.

$\mathbf{E}^i$  peut s'écrire sous cette forme:

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}_0 e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (214)$$

tel que  $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{z}}\beta = \hat{\mathbf{z}}\frac{2\pi}{\lambda}$ , avec  $\lambda = 1,3\mu\text{m}$ .

$\mathbf{H}^i$  peut être obtenu de l'expression suivante:

$$\mathbf{H}^i = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}^i}{\omega\mu} \quad (215)$$

Or, pour avoir une polarisation circulaire droite, il faut que  $E_y$  soit en retard sur  $E_x$  c'est à dire que  $E_y = -jE_x$  et puisque l'amplitude du champ électrique est de 1V/m en tout temps  $\mathbf{E}_0$  sera donc égal à:

$$\mathbf{E}_0 = (\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}}) \quad (216)$$

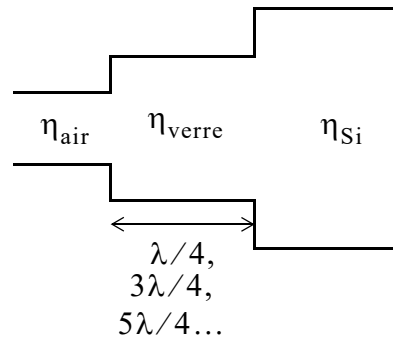
En substituant cette valeur de  $\mathbf{E}_0$  dans l'équation (214), cette dernière devient:

$$\mathbf{E}^i = (\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}})e^{-j\beta z} \quad (217)$$

Puis à l'aide de l'éq. (215) on déduit:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i &= \frac{\beta}{\omega\mu}(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}})e^{-j\beta z} \\ \mathbf{H}^i &= \frac{\beta}{\omega\mu}(\hat{\mathbf{y}} + j\hat{\mathbf{x}})e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (218)$$

**b.** La couche de verre ajoutée agit comme circuit d'adaptation  $\lambda/4$



Donc, l'épaisseur minimum du verre sera égale à  $\lambda/4$ :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{4} &= \frac{\lambda_{\text{verre}}}{4} = \frac{\lambda_{\text{air}}/\sqrt{\epsilon_{r,\text{verre}}}}{4} \\ &= \frac{1,3\mu\text{m}}{4N_{\text{verre}}}\end{aligned}\quad (219)$$

tel que  $N_{\text{verre}} = \sqrt{\epsilon_{r,\text{verre}}}$  est l'indice de réfraction des couches de verre.

Cependant, l'adaptation d'impédance exige que  $\eta_{\text{verre}} = \sqrt{\eta_{\text{air}}\eta_{\text{Si}}}$ . Donc,

$1/\sqrt{\epsilon_{r,\text{verre}}} = \sqrt{(1/\sqrt{\epsilon_{r,\text{air}}}) \cdot (1/\sqrt{\epsilon_{r,\text{Si}}})}$  ce qui mène à:

$$\frac{1}{N_{\text{verre}}} = \sqrt{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{N_{\text{Si}}}} \quad (220)$$

où que  $N_{\text{Si}}$  est l'indice de réfraction du silicium  $N_{\text{Si}} = \sqrt{\epsilon_{r,\text{Si}}} = 3,5053$

On en déduit l'indice de réfraction de verre:

$$N_{\text{verre}} = \sqrt{N_{\text{Si}}} = \sqrt{3,5053} \quad (221)$$

Finalement, on peut obtenir l'épaisseur minimum du verre, en substituant  $N_{\text{verre}}$  dans l'équation (219), d'où:

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{1,3\mu\text{m}}{4 \times 1,8722} = 0,1736\mu\text{m} \quad (222)$$

c. On a  $E_{\perp}^i = E_y^i = -j$  et  $E_{\parallel}^i = E_x^i = 1$

- Au point  $a$ :

Passage de l'air, au verre et du verre au Si: il n'y a pas de réflexion à cause de la couche de verre, donc la densité de puissance dans la direction perpendiculaire aux interfaces de la couche est conservée soit:

$$\frac{\|\mathbf{E}^i\|^2}{\eta_{\text{air}}} \cos(\theta_{\text{air}}) = \frac{\|\mathbf{E}^a\|^2}{\eta_{\text{Si}}} \cos(\theta_{\text{Si}})$$

Puisque  $\theta_{\text{air}}$  et  $\theta_{\text{Si}}$  sont nuls nous avons simplement:



$$\frac{\|\mathbf{E}^i\|^2}{\eta_{\text{air}}} = \frac{\|\mathbf{E}^a\|^2}{\eta_{\text{Si}}} \rightarrow \|\mathbf{E}^a\| = \|\mathbf{E}^i\| \sqrt{\frac{\eta_{\text{Si}}}{\eta_{\text{air}}}} \quad (223)$$

Donc:

$$\|\mathbf{E}^a\| = \|\mathbf{E}^i\| \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r\text{Si}}}}} = \frac{\|\mathbf{E}^i\|}{\sqrt{N_{\text{Si}}}} = \|\mathbf{E}^i\| / \sqrt{3,5053} \quad (224)$$

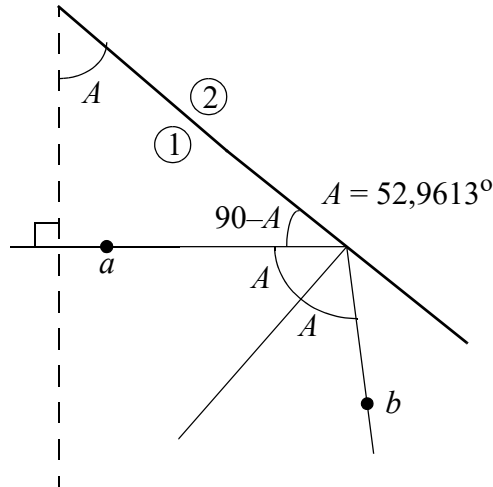
Puisqu'on a une incidence normale,  $E_{//}^i$  et  $E_{\perp}^i$  subissent le même déphasage. Alors,

$$|E_{//}^a| = |E_{\perp}^a| = 1 / \sqrt{3,5053} = 0,5341 \text{ V/m}$$

$$\text{et } \angle E_{//}^a - \angle E_{\perp}^a = 0^\circ - (-90^\circ) = 90^\circ. \quad (225)$$

$E_{//}^a$  et  $E_{\perp}^a$  ont même amplitude et un déphasage de  $90^\circ$  entre eux. Il s'agit donc bien d'une polarisation circulaire droite.

- Au point  $b$ :



Tout d'abord on remarque d'après la figure que l'angle d'incidence à l'interface silicium–air est égal à  $A$ . Si on omet les retards de phase associés à la propagation, on peut écrire:

$E_{//}^b = E_{//}^a \Gamma_{//}$  et  $E_{\perp}^b = E_{\perp}^a \Gamma_{\perp}$  avec  $\theta_i = 52,9613^\circ$ , et selon la loi de Snell il vient:

$$N_{\text{Si}} \sin \theta_i = N_{\text{air}} \sin \theta_t = \sin \theta_t = 2,798 > 1 \quad (226)$$

Puisque  $\sin \theta_t > 1$  nous sommes en présence d'une réflexion totale.

Dans ce cas, on calcule  $\cos\theta_t = \pm j\sqrt{\sin^2\theta_i - 1} = \pm j2,6132$ . Nous avons vu dans le Problème 2.7 qu'il est requis de choisir le signe négatif pour avoir un comportement d'onde évanescence dans l'air. On peut aussi calculer:

$$\eta_{Si} = \frac{377}{N_{Si}} = 107,55\Omega \quad (227)$$

$$\eta_{air} = 377\Omega \quad (228)$$

et finalement:

$$\Gamma_{//} = \frac{\eta_{air}\cos\theta_t - \eta_{Si}\cos\theta_i}{\eta_{air}\cos\theta_t + \eta_{Si}\cos\theta_i} = 0,9914 - j0,1309 = 1\angle -7,52^\circ \quad (229)$$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_{air}\cos\theta_i - \eta_{Si}\cos\theta_t}{\eta_{air}\cos\theta_i + \eta_{Si}\cos\theta_t} = -0,21 + j0,977 = 1\angle 102,12^\circ \quad (230)$$

$|\Gamma_{\perp}| = 1, |\Gamma_{//}| = 1$  donc:

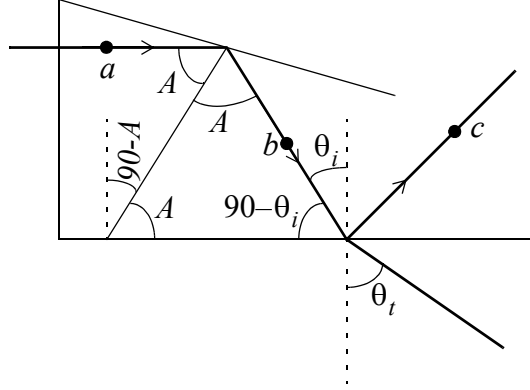
$$\begin{aligned} |E_{//}^b| &= |E_{//}^a| = 0,5341 \text{ V/m} \\ |E_{\perp}^b| &= |E_{\perp}^a| = 0,5341 \text{ V/m} \end{aligned} \quad (231)$$

Les deux signaux subissent un changement de phase différent lors de la réflexion. Nous aurons donc que:

$$\angle E_{//}^b - \angle E_{\perp}^b = 90^\circ + \angle \Gamma_{//} - \angle \Gamma_{\perp} = 90^\circ - 7,52^\circ - 102,12^\circ = -19,64^\circ \quad (232)$$

Bien qu'on ait la même amplitude, le déphasage n'est plus de  $90^\circ$ , il en résultera une polarisation elliptique au point b.

- Point  $c$ :



On a d'après le schéma:

$$\begin{aligned} 90^\circ - \theta_i &= 180^\circ - 2A \\ \theta_i &= -90^\circ + 2 \times 52,9613^\circ = 15,922^\circ \end{aligned} \quad (233)$$

Donc  $\cos \theta_i = 0,9616$ .

Pour calculer  $\sin \theta_t$ , on utilise la loi de Snell:

$$N_{\text{Si}} \sin \theta_i = 1 \sin \theta_t \quad (234)$$

On obtient  $\sin \theta_t = 0,961$ , d'où l'on tire  $\theta_t = 74,07^\circ$  et finalement  $\cos \theta_t = 0,2744$ . L'évaluation des coefficients de réflexion avec des expressions analogues aux équations en (229) et (230) conduit à  $\Gamma_{\parallel} \approx 0$  et  $\Gamma_{\perp} = 0,849$ . On peut remarquer que pour cette réflexion, l'angle d'incidence est égal à l'angle de Brewster soit  $\tan \theta_i = N_{\text{air}}/N_{\text{Si}}$ . Il n'est donc pas surprenant de trouver que  $\Gamma_{\parallel} \approx 0$ . Ceci indique que la composante parallèle est complètement transmise dans l'air sous le bloc de silicium. Ainsi nous avons:

$$\begin{aligned} |E_{\parallel}^c| &= |E_{\parallel}^b \Gamma_{\parallel}| = 0 \\ |E_{\perp}^c| &= |E_{\perp}^b \Gamma_{\perp}| = 0,5341 \text{ V/m} \cdot 0,849 = 0,453 \text{ V/m} \end{aligned} \quad (235)$$

La phase relative est non définie car  $E_{//}^c = 0$ . Puisqu'on a une seule composante, la polarisation est forcément linéaire.

- Point  $d$ : Les conditions pour la troisième réflexion sont les mêmes que pour la première à cause de la symétrie de la structure. On aura donc aussi réflexion totale, mais cette fois uniquement pour la composante qui reste.

$$\begin{aligned} |E_{\perp}^d| &= |E_{\perp}^c \Gamma_{\perp}| = |E_{\perp}^c| = 0,453 \text{ V/m} \text{ car } |\Gamma_{\perp}| = 1 \\ |E_{//}^d| &= |E_{//}^c \Gamma_{//}| = 0 \end{aligned} \quad (236)$$

Nous sommes toujours en présence d'une polarisation linéaire.

- Point  $e$ : à cause de la couche de verre, il y a transmission totale. Comme pour la couche d'entrée, les densités de puissance sont les mêmes aux points  $d$  et  $e$ :

$$\frac{\|E^e\|^2}{\eta_{air}} = \frac{\|E^d\|^2}{\eta_{Si}} \quad (237)$$

Donc:

$$\|E^e\| = \|E^d\| \sqrt{\frac{\eta_{air}}{\eta_{Si}}} = |E^d| \sqrt{N_{Si}} = 0,453 \text{ V/m} \cdot \sqrt{3,5053} = 0,849 \text{ V/m} \quad (238)$$

- d.** On ne tient pas compte du déphasage subi par le chemin parcouru dans le silicium.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^e &= 0,849 \text{ V/m } \hat{\mathbf{y}} e^{-j\beta z} \\ \mathbf{H}^e &= -\hat{\mathbf{x}} \frac{0,849}{377\Omega} \text{ A/m } e^{-j\beta z} \end{aligned} \quad (239)$$

avec  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{air}}$ .

**e.**

$$\begin{aligned} P_{trans} &= \frac{\|E^e\|^2}{2\eta_{air}} = \frac{0,849^2}{2\eta_{air}} = \frac{0,36}{\eta_{air}} \\ P_{inc} &= \frac{\|E^d\|^2}{2\eta_{air}} = \frac{1^2 + 1^2}{2\eta_{air}} = \frac{1}{\eta_{air}} \end{aligned} \quad (240)$$

Et:

$$100 \times \frac{P_{trans}}{P_{inc}} = \frac{0,36}{1} \times 100 = 36\% \quad (241)$$

$$\frac{P_{perdue}}{P_{inc}} = 100\% - 36\% = 64\%$$

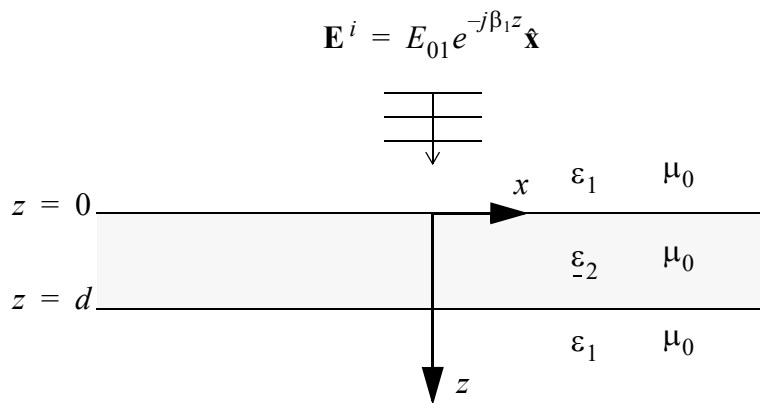
Il n'y a pas de perte dans le silicium. Toute la puissance incidente a fui lors de la réflexion à la base du dispositif. La moitié (50%) de la puissance est associée à  $E_{//}$ . Or, il y a transmission totale de cette composante. Pour ce qui est de  $E_{\perp}$ , la réflexion est partielle, car  $\Gamma_{\perp} = 0,849$ , et donc une partie de la puissance  $(1-|\Gamma_{\perp}|^2)$  est transmise dans l'air sous le bloc de silicium.

## Problème 2.10

On désire blinder un équipement électronique contre l'interférence électromagnétique en utilisant une mince couche de cuivre plaquée à l'intérieur de son boîtier. La fréquence de l'interférence est de 100 MHz, la conductivité du cuivre est de  $5.8 \times 10^7$  S/m et la perméabilité est de  $\mu = \mu_0 = 4\pi/10^7$  Henry/m. On considérera que l'interférence est une onde plane arrivant à incidence normale sur le boîtier.

a. En utilisant le système de coordonnées montré dans la figure ci-dessous, donnez l'expression complète des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans les trois régions de l'espace pour les deux cas suivants:

- on ne tient pas compte des réflexions multiples aux interfaces de la couche de métal;
- on tient compte des réflexions multiples aux interfaces de la couche de métal.



- b. En utilisant le résultat trouvé en a) pour le cas sans réflexions multiples, trouvez l'épaisseur de cuivre minimum permettant d'obtenir une efficacité de blindage<sup>1</sup> de 90 dB.
- c. En utilisant l'épaisseur trouvée en b), quelle serait l'efficacité de blindage obtenue lorsqu'on tient compte des réflexions multiples?
- d. Calculez le pourcentage de la puissance incidente dissipée dans la couche de métal dans les deux cas.

---

1. Efficacité de blindage: module du champ incident / module du champ transmis.

## Solution

a.

Sans tenir compte des réflexions multiples

On a dans le milieu 1  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r = (E_{10}e^{-j\beta_1 z} + \Gamma_{12}E_{10}e^{j\beta_1 z})\hat{\mathbf{x}}$  tel que:

$\Gamma_{12} = \frac{\underline{\eta}_2 - \eta_1}{\underline{\eta}_2 + \eta_1}$ , avec  $\eta_1$ ,  $\underline{\eta}_2$ , les impédances caractéristiques des deux milieux.

$$\underline{\eta}_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\frac{\sigma}{\omega}}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma}} \approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}, \text{ et } \eta_1 = 377\Omega.$$

Dans le milieu 2:  $\mathbf{E}_2 = E^i(z=0)T_{12}e^{-\gamma_2 z}\hat{\mathbf{x}} = E_{10}T_{12}e^{-\gamma_2 z}\hat{\mathbf{x}}$  avec  $T_{12} = \frac{2\underline{\eta}_2}{\eta_1 + \underline{\eta}_2}$  et

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = j\sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_2} \approx (1+j)\sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}}$$

Et dans le milieu 3:  $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2(z=d)T_{23}e^{-j\beta_3(z-d)} = E_{10}T_{12}e^{-\gamma_2 d}T_{23}e^{-j\beta_3(z-d)}\hat{\mathbf{x}}$

avec  $\beta_1 = \beta_3 = \frac{\omega}{c}$ ,  $T_{23} = \frac{2\underline{\eta}_3}{\eta_3 + \underline{\eta}_2}$  et  $\eta_3 = \eta_1$ .

Pour le champ  $\mathbf{H}$ :

- Dans le milieu 1:

Pour les signaux incident et réfléchi nous avons respectivement:

$$H_y^i = \frac{E_x^i}{\eta_1} \text{ et } H_y^r = \frac{-E_x^r}{\eta_1} \quad (242)$$

D'où il résulte:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{E_{01}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} - \Gamma_{12}e^{j\beta_1 z})\hat{\mathbf{y}} \quad (243)$$

- Dans le milieu 2:

$$H_{y2} = \frac{E_{x2}}{\eta_2} \text{ donc } \mathbf{H}_2 = \frac{E_{10}}{\eta_2} T_{12} e^{-\gamma_2 z} \hat{\mathbf{y}} \quad (244)$$

- Dans le milieu 3:

$$H_{y3} = \frac{E_{x3}}{\eta_1} \text{ donc } \mathbf{H}_3 = \frac{E_{01}}{\eta_1} T_{12} T_{23} e^{-\gamma_2 d} e^{-j\beta_3(z-d)} \hat{\mathbf{y}} \quad (245)$$

En tenant compte des réflexions multiples

On peut utiliser les matrices ABCD car elles tiennent compte de tous les phénomènes.

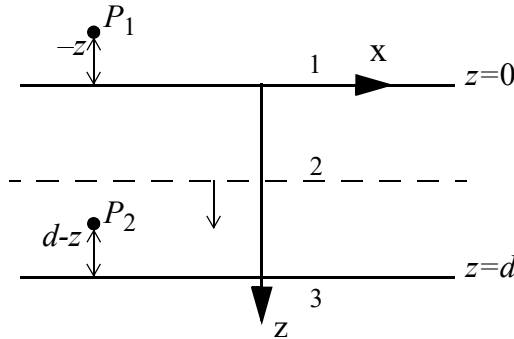
- Dans le milieu 3 on sait qu'il n'y a pas d'onde en direction  $-z$  Donc,

$$\mathbf{E}_3 = E_{03} e^{-j\beta_1 z} \hat{\mathbf{x}} \quad (246)$$

$$\mathbf{H}_3 = \frac{E_{03}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \hat{\mathbf{y}} \quad (247)$$

Le choix de  $E_{03}$  est arbitraire. On peut choisir  $E_{03} = 1 \text{ V/m}$  par exemple.

- Dans le milieu 2:



$$\begin{bmatrix} E_{x2}(z) \\ H_{y2}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x2}(z=d) \\ H_{y2}(z=d) \end{bmatrix} \quad (248)$$

Par continuité à l'interface 2-3, nous connaissons la valeur des champs à  $z = d$

$$E_{x2}(z=d) = E_{x3}(z=d) = E_{03} e^{-j\beta_1 d} \quad (249)$$

$$H_{y2}(z=d) = H_{y3}(z=d) = \frac{E_{03}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 d} \quad (250)$$



Les termes de la matrice ABCD dépendent de la distance entre les deux plans considérés. Pour un point  $P_2$  situé à une distance  $d-z$  du plan  $z = d$ , la matrice s'écrit:

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh[\gamma_2(d-z)] & \eta_2 \sinh[\gamma_2(d-z)] \\ \frac{1}{\eta_2} \sinh[\gamma_2(d-z)] & \cosh[\gamma_2(d-z)] \end{bmatrix} \quad (251)$$

En substituant dans l'éq. (248) on trouve:

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}} \left\{ \cosh[\gamma_2(d-z)] + \frac{\eta_2}{\eta_1} \sinh[\gamma_2(d-z)] \right\} E_{03} e^{-j\beta_1 d} \quad (252)$$

$$\mathbf{H}_2 = \hat{\mathbf{y}} \left\{ \frac{1}{\eta_2} \sinh[\gamma_2(d-z)] + \frac{1}{\eta_1} \cosh[\gamma_2(d-z)] \right\} E_{03} e^{-j\beta_1 d} \quad (253)$$

- Dans le milieu 1 on a:

$$\begin{bmatrix} E_{x1}(z) \\ H_{y1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1}(z=0) \\ H_{y1}(z=0) \end{bmatrix} \quad (254)$$

Si on invoque le fait que les champs tangentiels doivent être continus à la frontière 1-2 on trouve:

$$E_{x1}(z=0) = E_{x2}(z=0) = \left\{ \cosh \gamma_2 d + \frac{\eta_2}{\eta_1} \sinh \gamma_2 d \right\} E_{03} e^{-j\beta_1 d} \quad (255)$$

$$H_{y1}(z=0) = H_{y2}(z=0) = \left\{ \frac{1}{\eta_2} \sinh \gamma_2 d + \frac{1}{\eta_1} \cosh \gamma_2 d \right\} E_{03} e^{-j\beta_1 d} \quad (256)$$

Dans ce cas, la distance entre le point  $P_1$  et le plan de référence  $z = 0$  est  $-z$ , puisque  $z$  est négatif.

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta_1 z) & j\eta_1 \sin(-\beta_1 z) \\ \frac{j}{\eta_1} \sin(-\beta_1 z) & \cos(-\beta_1 z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 z & -j\eta_1 \sin \beta_1 z \\ -\frac{j}{\eta_1} \sin \beta_1 z & \cos \beta_1 z \end{bmatrix} \quad (257)$$

avec l'équation (254) on obtient donc

$$E_{x1}(z) = \cos(\beta_1 z)E_{2x}(0) - j\eta_1 \sin \beta_1 z H_{2y}(0) \quad (258)$$

$$H_{y1}(z) = \frac{-j}{\eta_1} \sin(\beta_1 z)E_{2x}(0) + \cos(\beta_1 z)H_{2y}(0) \quad (259)$$

**b.** Soit  $EB$ , l'efficacité de blindage.

Sans tenir compte des réflexions multiples

Donc d'après la définition on a:

$$EB = -20 \log_{10} \left\| \frac{\mathbf{E}^t}{\mathbf{E}^i} \right\| = 90 \quad (260)$$

En remplaçant  $\mathbf{E}^t$  et  $\mathbf{E}^i$  par leurs valeurs, on trouve:

$$EB = -20 \log_{10} |T_{12} T_{23} e^{-\gamma_2 d}| = -20 \log_{10} (e^{-\alpha_2 d} |T_{12} T_{23}|) \quad (261)$$

Donc:

$$90 = -20 \log_{10} (e^{-\alpha_2 d}) - 20 \log_{10} |T_{12}| - 20 \log_{10} |T_{23}| \quad (262)$$

Tel que:

$$T_{12} \frac{2\underline{\eta}_2}{\underline{\eta}_1 + \underline{\eta}_2} \text{ et } T_{23} = \frac{2\underline{\eta}_1}{\underline{\eta}_1 + \underline{\eta}_2} \quad (263)$$

Avec

$$\underline{\eta}_2 = (1+j) \sqrt{\frac{2\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{2 \times 5,8 \times 10^7}} = (1+j) 2,6 \times 10^{-3} \Omega \text{ et } \underline{\eta}_1 = 377 \Omega \quad (264)$$

Puisque  $|\underline{\eta}_2| \ll \eta_1$ , on peut utiliser les approximations suivantes:

$$T_{12} \approx \frac{2\underline{\eta}_2}{\underline{\eta}_1} = 1,38 \times 10^{-5} (1+j) = 1,94 \times 10^{-5} \angle 45^\circ \quad (265)$$

et:

$$T_{23} = \frac{2\underline{\eta}_1}{\underline{\eta}_1 + \underline{\eta}_2} \approx 2 \quad (266)$$

Et en substituant les équations (265) et (266) dans l'équation (262), on trouve:

$$90 + 20\log_{10}(2 \times 1,96 \times 10^{-5}) = -20\log_{10}e^{-\alpha_2 d} = 1,85 \quad (267)$$

d'où l'on tire:

$$e^{-\alpha_2 d} = 10^{\frac{-1,85}{20}} = 0,807 \quad (268)$$

Donc:

$$\alpha_2 d = 0,213 \text{ neper} \quad (269)$$

En a) nous avons vu la définition de la constante d'atténuation  $\alpha_2$

$$\alpha_2 \approx \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} = \sqrt{\frac{5,8 \times 10^7 \times 2\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{2}} = 1,5 \times 10^5 \text{ neper/mètre} \quad (270)$$

Finalement:

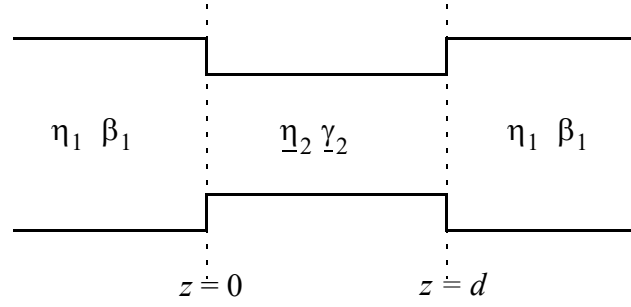
$$d = 0,213 / 1,5 \times 10^5 = 1,41 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (271)$$

Remarque: Cette épaisseur est inférieure à la profondeur de peau ( $\delta = 1/\alpha_2$ ) qui vaut ici  $6,66 \times 10^{-6} \text{ m}$ . Le blindage provient donc surtout du fait que  $|\Gamma_{12}|$  est très proche de 1, car la propagation dans le cuivre ne fait qu'ajouter que 1.85 dB de blindage.

**c.** Deux méthodes sont proposées pour faire ce calcul. La première méthode est basée sur l'utilisation de la matrice ABCD.

*i) méthode 1*

On remplace la structure par un circuit équivalent formé de lignes de transmission. L'objectif est de calculer le rapport entre le champ incident à  $z=0$  et le champ qui sera transmis à  $z=d$ . Pour le champ transmis, on supposera que le champ  $E_{03}e^{-j\beta_1 z}$  à la sortie de la ligne 2 vaut 1 V/m.



Pour déterminer le champ  $E^i$  à l'entrée on doit d'abord trouver sa relation avec le champ total  $E_{x1}(z=0)$ , incluant l'onde incidente et l'onde réfléchie à l'entrée, soit:

$$E_{x1}(z=0) = E^i(1 + \Gamma_{in}) \quad (272)$$

d'où l'on obtient:

$$|E^i| = \frac{|E_{x1}(z=0)|}{|1 + \Gamma_{in}|} \quad (273)$$

Nous avons besoin du coefficient de réflexion à l'entrée du circuit, lequel s'obtient avec:

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - \eta_1}{Z_{in} + \eta_1}. \quad (274)$$

Il nous faut l'impédance d'entrée  $Z_{in}$ . Pour la calculer on peut utiliser l'expression suivante tirée de la théorie des lignes de transmission. Ici on considère une ligne d'impédance caractéristique  $\eta_2$  terminée par une charge  $\eta_1$  correspondant au milieu 3 d'épaisseur infinie.

$$Z_{in} = \frac{E_{x1}(z=0)}{H_{y1}(z=0)} = \frac{\eta_1 \cosh \gamma_2 d + \eta_2 \sinh \gamma_2 d}{\frac{\eta_1}{\eta_2} \sinh \gamma_2 d + \cosh \gamma_2 d} \quad (275)$$

Ceci donne  $Z_{in} = 0,0122 - j0,00037$ . On peut alors calculer  $\Gamma_{in}$  et on arrive à:

$$\Gamma_{in} = -0,999 + j1,96 \times 10^{-6}.$$

Pour utiliser (272) il ne nous manque que  $|E_{x1}(z=0)|$ . Pour cela, on utilise l'équation (255) tirée de la matrice ABCD, où l'on posera arbitrairement que  $E_{03}e^{-j\beta_1 d} = 1$  V/m :

$$E_{x1}(z=0) = E_{2x}(z=0) = \left\{ \cosh \gamma_2 d + \frac{\eta_2}{\eta_1} \sinh \gamma_2 d \right\} 1 \text{ V/m.}$$

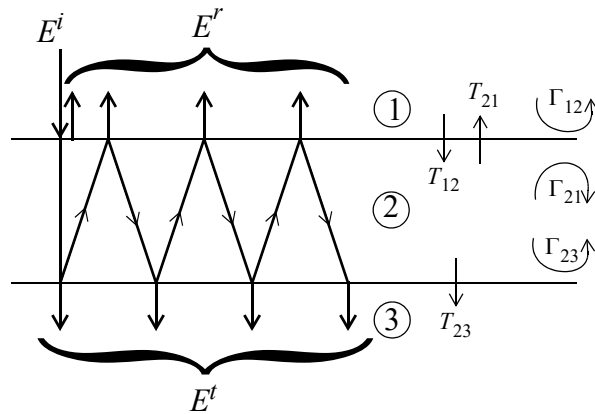
Ceci nous donne  $E_{x1} = 0,999 + j0,045$ . Enfin, avec (272) nous obtenons  $|E^i| = 1,54 \times 10^4$  V/m. On peut alors calculer l'efficacité de blindage:

$$-20 \log_{10} \left| \frac{E_{03}}{E_i} \right| = 83,76 \text{ dB} \quad (276)$$

À noter que ce résultat est très sensible à la précision du calcul de  $|1 + \Gamma_{in}|$  qui donne une réponse très près de zéro. Il faut donc conserver plusieurs chiffres significatifs dans le calcul. Étant donné que le champ électrique considéré n'a qu'une seule composante, on utilise la valeur absolue du champ phaseur pour calculer la norme du champ, i.e.  $\|\mathbf{E}\| = |E|$ , dans le but d'alléger la notation.

## ii) méthode 2

Dans cette méthode, nous obtenons successivement l'expression des rayons réfléchis entre les interfaces puis transmis dans le milieu 3. On effectue ensuite la somme de tous ces termes.



Considérant tous les rayons transmis dans le milieu 3, on obtient:

$$E^t = E^i T_{12} T_{23} e^{-\gamma_2 d} \times (1 + \Gamma_{23} \Gamma_{21} e^{-2\gamma_2 d} + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{21}^2 e^{-4\gamma_2 d} + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{21}^3 e^{-6\gamma_2 d} + \dots)$$

On constate qu'il s'agit d'une série géométrique.<sup>1</sup> Donc, la relation se simplifie comme suit:

$$\frac{E^t}{E^i} = \frac{T_{12}T_{23}e^{-\gamma_2 d}}{1 - \Gamma_{23}\Gamma_{21}e^{-2\gamma_2 d}} \quad (277)$$

Au dénominateur nous avons:

$$\Gamma_{21}\Gamma_{23} = \frac{\eta_1 - \underline{\eta}_2}{\eta_1 + \underline{\eta}_2} \cdot \frac{\eta_1 - \underline{\eta}_2}{\eta_1 + \underline{\eta}_2} \approx 1 \quad (278)$$

Car  $|\underline{\eta}_2| \ll |\eta_1|$ . Nous avons ainsi:

$$e^{-2\gamma_2 d} = \exp\{-2(1+j) \times 1,5 \times 10^5 \times 1,41 \times 10^{-6}\} = 0,652 \angle -24,5^\circ \quad (279)$$

Donc:

$$\left| \frac{E^t}{E^i} \right| = \frac{|1,96 \times 10^{-5} \angle 45^\circ| \times 2e^{-\alpha_2 d}}{|1 - (0,652 \angle -24,5^\circ)|} = 6,5 \times 10^{-5} \quad (280)$$

d'où l'on déduit:

$$EB = -20 \log_{10} 6,5 \times 10^{-5} = 83,76 \text{ dB} \quad (281)$$

Les deux méthodes conduisent au même résultat. Par contre, on voit que nous surestimons l'efficacité de blindage de plus de 6 dB (90 – 83,76) si nous omettons les réflexions multiples.

Bien que ceci ne soit pas demandé dans la question la somme des rebonds peut également être utilisée pour calculer le champ réfléchi par la plaque de métal. Par inspection de la figure précédente on peut déduire que:

$$E^r = E^i \left( \Gamma_{12} + T_{12}T_{21}\Gamma_{23}e^{-2\gamma_2 d} + T_{12}T_{21}\Gamma_{23}^2\Gamma_{21}e^{-4\gamma_2 d} + T_{12}T_{21}\Gamma_{23}^3\Gamma_{21}^2e^{-6\gamma_2 d} + \dots \right) \quad (282)$$

Regroupant les termes on peut ré-écrire cette équation comme:

---

1. Lorsque  $|x| < 1$  nous avons que  $1 + x + x^2 + x^3 \dots = 1/(1-x)$ .

$$E^r = E^i \left( \Gamma_{12} + T_{12} T_{21} \Gamma_{23} e^{-2\gamma_2 d} \left( 1 + \Gamma_{23} \Gamma_{21} e^{-2\gamma_2 d} + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{21}^2 e^{-4\gamma_2 d} + \dots \right) \right) \quad (283)$$

La somme infinie entre parenthèses est une série géométrique. Donc on a que:

$$E^r = E^i \left( \Gamma_{12} + \frac{T_{12} T_{21} \Gamma_{23} e^{-2\gamma_2 d}}{1 - \Gamma_{23} \Gamma_{21} e^{-2\gamma_2 d}} \right) \quad (284)$$

**d.**

- Sans réflexions multiples:

$$\frac{P_{dissipée}}{P_{inc}} = \frac{P_{inc} - P_{ref} - P_{trans}}{P_{inc}} = 1 - |\Gamma_{12}|^2 - |T_{12} T_{23} e^{-\gamma_2 d}|^2 \quad (285)$$

Dans cette expression,  $\Gamma_{12}$  correspond à la première réflexion à l'interface air-métal.

Donc  $|\Gamma_{12}| = \left| \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \right| = 0,9999861\dots$  Avec les valeurs de  $T_{12} T_{23}$  et  $\gamma_2 d$  trouvées

auparavant on obtient:

$$\frac{P_{dissipée}}{P_{inc}} = 2,76 \times 10^{-5} \quad (286)$$

- Avec réflexion multiples:

En posant:

$$E_{03} e^{-j\beta_1 d} = 1 \text{ V/m} \quad (287)$$

et utilisant les expressions (275) à (273) on trouve:

$$|E^i| = 1,5422 \times 10^4 \text{ V/m} \quad (288)$$

Et:

$$|E^r| = |E^i| |\Gamma_{in}| = 1,5422 \times 10^4 \text{ V/m} \quad (289)$$

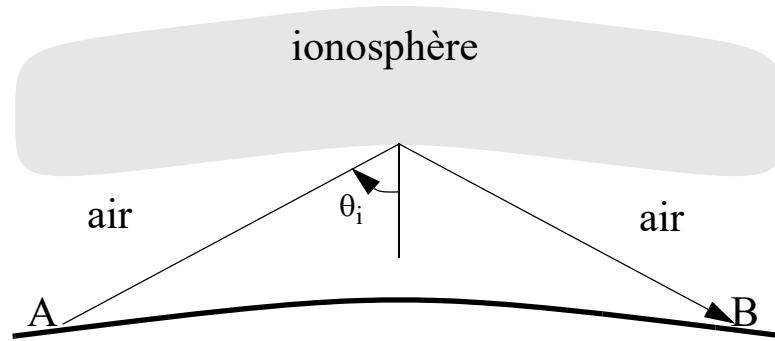
D'où le résultat:

$$\frac{P_{dissipée}}{P_{inc}} = \frac{P_{inc} - P_{ref} - P_{trans}}{P_{inc}} = 1 - |\Gamma_{in}|^2 - \frac{|E_{03}|^2 / \eta_1}{|E^i|^2 / \eta_1} = 1,297 \times 10^{-4} \quad (290)$$

Encore une fois, on remarque que le fait de ne pas tenir compte des réflexions multiples mène à une erreur considérable. La puissance dissipée, quoique très faible, est sous-estimée par un facteur 4,7 environ.



## Problème 2.11



À cause de la courbure terrestre, deux points A et B très éloignés à la surface de la Terre ne peuvent communiquer à l'aide d'un rayon direct. Une des approches utilisées pour contourner cette difficulté consiste à utiliser l'ionosphère comme miroir pour réfléchir les ondes. En première approximation, on peut modéliser l'ionosphère comme un milieu ayant une perméabilité de  $\mu_0$  et une permittivité donnée par:

$$\epsilon_p = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right)$$

Où on supposera que la constante  $f_p$ , appelée fréquence plasma, vaut 10 MHz. Notez qu'aux fréquences supérieures à  $f_p$  la permittivité reste positive mais elle est inférieure à  $\epsilon_0$ , alors qu'aux fréquences inférieures à  $f_p$  la permittivité est négative.

- On désire obtenir une réflexion totale à l'interface air-ionosphère. Quel devrait être l'angle d'incidence minimum pour obtenir la réflexion totale, en fonction de la fréquence.
- Quelle doit être la fréquence minimum d'un émetteur au sol permettant d'envoyer des signaux à un satellite situé au-dessus de l'ionosphère, juste vis-à-vis l'émetteur?
- L'onde incidente sur l'ionosphère contient deux composantes en phase et d'amplitudes égales. Son phaseur champ électrique s'écrit:

$$\mathbf{E}^i = E_0(\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{b}})\exp\{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}\}$$

où  $\hat{\mathbf{a}}$  et  $\hat{\mathbf{b}}$  pointent respectivement dans la direction normale et parallèle au plan d'incidence. Quel est le type de polarisation (linéaire, circulaire, elliptique) de l'onde incidente?

- d.** Si la fréquence de travail est 5 MHz, trouvez la valeur approximative de l'angle d'incidence pour lequel on obtient une polarisation circulaire pour l'onde réfléchie à l'interface. (Suggestion: Tracez d'abord des courbes de  $\angle \Gamma_{//}$  et  $\angle \Gamma_{\perp}$  versus  $\theta_i$  avec Matlab.)

### Solution

- a.** On a d'après la loi de Snell:

$$\sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \theta_t \quad (291)$$

Ici nous avons  $\epsilon_{r1} = 1$  et  $\epsilon_{r2} = 1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2$

Or, pour avoir une réflexion totale il faut que  $\sin \theta_t > 1$  c'est-à-dire que:

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{1 - (f_p/f)^2}} > 1 \quad (292)$$

$$\sin \theta_i > \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2} \quad (293)$$

et donc

$$\sin^2 \theta_i > 1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2 \quad (294)$$

d'où  $(f_p/f)^2 > 1 - \sin^2 \theta_i = \cos^2 \theta_i$ . La condition de réflexion totale se résume donc à:

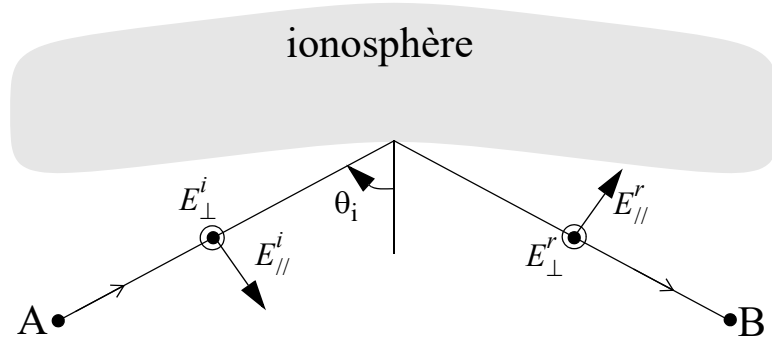
$$f < f_p / \cos \theta_i \quad (295)$$

- b.** Puisque le satellite est juste au dessus de l'émetteur, on doit avoir  $\theta_i = 0$ . Selon le résultat de **a)**, on voit que pour  $f > f_p$  il n'y aura pas réflexion totale. Donc, on peut communiquer avec  $\theta_i = 0$  et  $f > f_p$ .

- c.** On dit que les deux composantes  $\hat{\mathbf{a}}$  et  $\hat{\mathbf{b}}$  ont la même phase. Donc, le type de polarisation est linéaire.

- d.** Pour avoir une polarisation circulaire, il faut que ces deux composantes de champs:

- aient le même module i.e.  $|E_0 \Gamma_{\perp}| = |E_0 \Gamma_{//}|$  ;
- aient une différence de phase de  $\pm \pi/2$  .

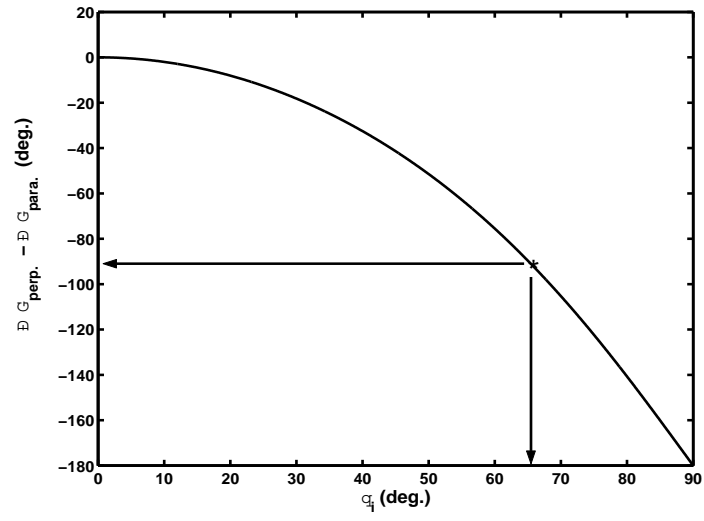


À 5 MHz, on a  $f < f_p$ . D'après la partie **a)**, il y a réflexion totale, quelque soit l'angle d'incidence  $\theta_i$ . Donc  $|\Gamma_{//}| = |\Gamma_{\perp}| = 1$  et alors la première condition est remplie. Pour la deuxième condition, il faut  $|\angle \Gamma_{\perp} - \angle \Gamma_{//}| = \pi/2$  avec:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\perp} &= \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \\ \Gamma_{//} &= \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}\end{aligned}\tag{296}$$

où  $\eta_2 = \eta_1 / \sqrt{\epsilon_{r2}}$ ,  $\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}$ ,  $\sin \theta_t = \sin \theta_i / \sqrt{\epsilon_{r2}}$ .

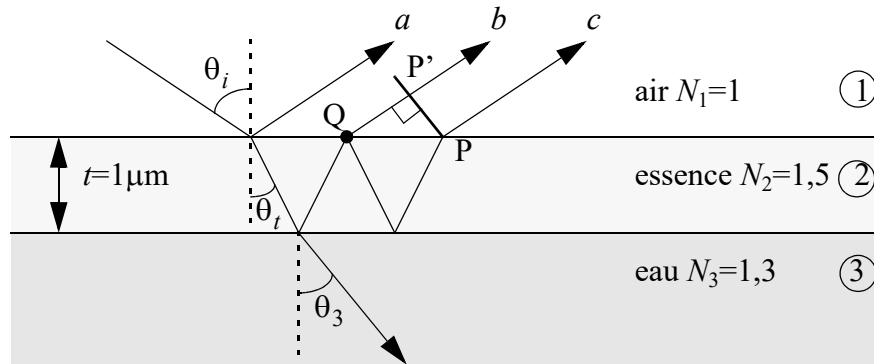
Le graphique ci-dessous montre la différence de phase obtenue en fonction de  $\theta_i$ . Cette courbe est obtenue par calcul avec Matlab.



On note sur le graphique que  $\angle \Gamma_{\perp} - \angle \Gamma_{\parallel} = -90^\circ$  pour  $\theta_i \approx 65^\circ$ . Nous avons donc que  $\mathbf{E}_{\parallel}$  est en avance de 90 degrés sur  $\mathbf{E}_{\perp}$ . D'après la figure à la page précédente, il s'agira donc d'une polarisation circulaire droite.

## Problème 2.12

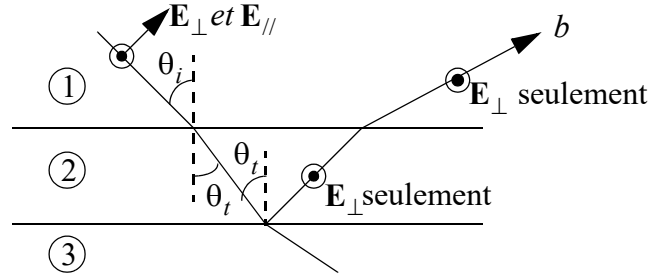
On considère un rayon lumineux arrivant sur une flaque d'eau. Le rayon incident contient les deux types possibles de polarisation (i.e. parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence). Le fond de la flaque est absorbant et ne réfléchit aucune lumière. Une mince pellicule d'essence flotte à la surface de l'eau. Les indices de réfraction de l'eau et de l'essence sont respectivement 1.3 et 1.5. Tous les matériaux ont une perméabilité magnétique identique à celle du vide. L'épaisseur de la couche d'essence est de 1 micron. On considérera un nombre limité de réflexions multiples entre les deux interfaces, tel qu'illustré dans la figure ci-dessous.



- a. Sans utiliser d'équations, expliquez dans quelle condition on obtiendrait une polarisation linéaire pour les rayons  $b$  et  $c$ . Quel serait alors l'orientation de la polarisation obtenue pour ces rayons?
- b. Quelle devrait être la valeur de  $\theta_i$  pour que la condition trouvée en a) se réalise?
- c. Donnez une expression qui permettrait de calculer la différence entre la phase du rayon  $b$  prise au point  $P'$  et la phase du rayon  $c$  prise au point  $P$ . On suppose que le point  $P$  est juste au-dessus de l'interface air-essence.
- d. Si  $\theta_i$  prend la valeur trouvée en b), pour quelles valeur(s) de longueur d'onde la différence de phase entre les points  $P'$  et  $P$  est-elle un multiple entier de  $2\pi$ ? Spécifiez uniquement les valeurs de longueurs d'onde dans l'air comprises entre 450 nanomètres et 650 nanomètres.

## Solution

a.

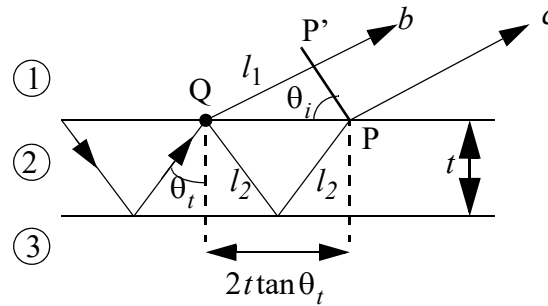


S'il y a transmission totale à l'interface inférieure essence-eau, alors le rayon réfléchi ne contiendra que  $E_{\perp}$ . Pour que cela se réalise, il faut donc que  $\Gamma_{//} = 0$  et donc que  $\theta_t = \theta_B$ , tel que  $\theta_B$  est l'angle de Brewster.

- b. Puisque les milieux 1 et 2 sont sans pertes, on peut simplement écrire que  $\tan \theta_t \equiv \tan \theta_B = N_3/N_2$  où  $N_3$  et  $N_2$  sont les indices de réfraction des deux milieux. On trouve  $\theta_t = \theta_B = 40,9^\circ$ . Selon la loi de Snell à l'interface supérieure air-essence:

$$\begin{aligned} N_1 \sin \theta_i &= N_2 \sin \theta_t \\ 1 \sin \theta_i &= 1,5 \sin 40,9^\circ \\ \theta_i &= 79,2^\circ \end{aligned} \quad (297)$$

- c. Le rayon  $c$  sera forcément polarisé en direction perpendiculaire au plan d'incidence car il est aussi obtenu après réflexion sur l'interface essence-eau avec le même angle d'incidence.



Supposant que l'onde arrivant au point Q a une valeur de champ  $E_{\perp}$  de 1 V/m. On obtient alors les champs électriques aux point P et P' à l'aide des équations suivantes:

$$E_{\perp}(P') = T_{21}e^{-j\beta_1 l_1}$$

$$E_{\perp}(P) = \Gamma_{21}\Gamma_{23}T_{21}e^{-j\beta_2(l_2 + l_2)}$$
(298)

où  $T_{21}$  est le coefficient de transmission de la deuxième couche (essence) à la première couche (air),  $\Gamma_{21}$  est le coefficient de réflexion à l'interface supérieure essence-air et  $\Gamma_{23}$  est le coefficient de réflexion à l'interface inférieure essence-eau. La différence de phase entre les signaux aux points P' et P peut donc s'écrire ainsi:

$$\begin{aligned}\angle E(P') - \angle E(P) &= (\angle T_{21} - \beta_1 l_1) - (\angle \Gamma_{21} + \angle \Gamma_{23} + \angle T_{21} - 2\beta_2 l_2) \\ &= 2\beta_2 l_2 - \beta_1 l_1 - \angle \Gamma_{21} - \angle \Gamma_{23}\end{aligned}$$
(299)

Avec  $l_2 = t/\cos\theta_t$ ,  $l_1 = 2t\tan\theta_t\sin\theta_t$ ,  $\beta_1 = (2\pi/\lambda)N_1$  et  $\beta_2 = (2\pi/\lambda)N_2$ . Ici  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide.

**d.** On veut que la différence de phase entre les deux point P et P' soit un multiple de  $2\pi$  donc l'équation (299) devient:

$$2n\pi = \frac{4\pi}{\lambda}N_2 l_2 - \frac{2\pi}{\lambda}l_1 - \angle \Gamma_{21} - \angle \Gamma_{23}$$
(300)

avec

$$\begin{aligned}\Gamma_{21} &= \frac{\eta_1 \cos\theta_t - \eta_2 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_t + \eta_2 \cos\theta_i} = \frac{N_2 \cos\theta_t - N_1 \cos\theta_i}{N_2 \cos\theta_t + N_1 \cos\theta_i} \\ \Gamma_{23} &= \frac{\eta_3 \cos\theta_t - \eta_2 \cos\theta_3}{\eta_3 \cos\theta_t + \eta_2 \cos\theta_3} = \frac{N_2 \cos\theta_t - N_3 \cos\theta_3}{N_2 \cos\theta_t + N_3 \cos\theta_3}\end{aligned}$$
(301)

Pour calculer  $\cos\theta_3$ , il faut d'abord obtenir  $\theta_3$  à partir de la loi de Snell, avec  $\theta_t = 40,9^\circ$ .

$$\begin{aligned}\sin\theta_3 &= \frac{N_2}{N_3}\sin\theta_t \\ \theta_3 &= 49,1^\circ\end{aligned}$$
(302)

Après substitution des valeurs numériques dans l'équation (301) on trouve que  $\angle \Gamma_{21} = 0$  et  $\angle \Gamma_{23} = 0$ .

L'équation (300) devient alors:

$$2n\pi = \frac{4\pi}{\lambda}N_2l_2 - \frac{2\pi}{\lambda}l_1 \quad (303)$$

D'où l'on tire  $\lambda = (3l_2 - l_1)/n$  avec  $l_2 = 1,32 \times 10^{-6}$  et  $l_1 = 1,7 \times 10^{-6}$ .

Donc  $\lambda = 2,26 \times 10^{-6}/n = (2260/n)$  nanomètres.

Or nous sommes intéressés aux valeurs de longueurs d'onde comprises entre 450 nanomètres et 650 nanomètres. C'est à dire que:

$$450 < \frac{2260}{n} < 650 \quad (304)$$

$$n = 4 \text{ pour } \lambda = 565 \text{ nm (vert)}$$

$$n = 5 \text{ pour } \lambda = 452 \text{ nm (bleu)}$$

Pour ces longueurs d'onde tous les rayons qui émergent de la couche d'essence ( $b$ ,  $c$  et suivants) auront la même phase, ce qui conduit à une interférence constructive. La couche d'essence aura donc une apparence bleu-vert.



### Problème 2.13

Une onde plane uniforme se propage dans l'air et arrive à incidence normale sur une frontière plane entre l'air et une région métallique épaisse. La fréquence du signal est de 1 MHz et la conductivité du métal est de  $2\pi \times 10^6$  S/m. Le métal a une permittivité relative unitaire, et la perméabilité relative est aussi unitaire dans les deux régions.

- a. Par rapport à la puissance de l'onde incidente, quel est le pourcentage de puissance dissipée dans le métal?
- b. Quelle est la vitesse de propagation de l'onde transmise dans le métal?
- c. À quelle profondeur dans le métal a-t-on une chute de 60 dB par rapport au niveau de champ total présent à l'interface?
- d. Si on suppose que le métal est un parfait conducteur, montrez à l'aide d'un dessin les endroits où le module du champ électrique total est minimum. Quelle est la distance entre deux minima consécutifs?

### Solution

- a. On a d'après la conservation de la puissance à l'interface des deux milieux

$$P_{inc} = P_{trans} + P_{réf}, \text{ tel que:}$$

$$P_{inc} = Re \left\{ \frac{|\mathbf{E}^i|^2}{2\eta_{air}} \right\} \quad (305)$$

et

$$P_{trans} = Re \left\{ \frac{|\mathbf{E}|^2}{2\eta_{metal}^*} \right\} = Re \left\{ \frac{|T\mathbf{E}^i|^2}{2\eta_{metal}^*} \right\} \quad (306)$$

Puisque toute la puissance transmise dans le métal sera dissipée par effet joules, le pourcentage de la puissance dissipée par rapport à la puissance incidente sera:

$$\frac{P_{trans}}{P_{inc}} = |T|^2 \frac{Re\{1/\eta_{metal}^*\}}{Re\{1/\eta_{air}\}} = |T|^2 \eta_{air} Re \left\{ \frac{1}{\eta_{metal}^*} \right\} \quad (307)$$

avec

$$(308)$$

$$\begin{aligned}
\eta_{metal} &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) = (1+j) \sqrt{\frac{2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{2 \times 2\pi \times 10^6}} \ll \eta_{air} \\
\eta_{metal}^* &= (1-j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \\
\frac{1}{\eta_{metal}^*} &= e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} = (1+j) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \\
Re\left\{\frac{1}{\eta_{metal}^*}\right\} &= \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}
\end{aligned} \tag{309}$$

On calcule maintenant le coefficient de transmission de l'air au métal:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\eta_{metal}}{\eta_{metal} + \eta_{air}} \approx \frac{2\eta_{metal}}{\eta_{air}} \\
|T|^2 &= \frac{4}{\eta_{air}^2} \left| e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \right|^2 = \frac{4}{\eta_{air}^2} \frac{\omega\mu}{\sigma}
\end{aligned} \tag{310}$$

Finalement, on trouve:

$$\frac{\langle P_{trans} \rangle}{\langle P_{inc} \rangle} = \frac{4}{\eta_{air}^2} \frac{\omega\mu}{\sigma} \times \eta_{air} \times \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} = \frac{4}{\eta_{air}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = 8,41 \times 10^{-4} \% \tag{311}$$

**b.** La vitesse de propagation de l'onde transmise dans le métal se calcule comme suit:

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{312}$$

où

$$\beta = \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}} \tag{313}$$

Donc:

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{(\sigma\omega\mu)/2}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^6}{2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}} \quad (314)$$

$$v = \sqrt{\frac{1 \times 10^7}{2\pi}} = 1261 \text{ m/s}$$

c. Pour cela, il faut trouver l'expression du champ transmis dans le métal. On a:

$$\mathbf{E}^t(z) = \mathbf{E}^t(0)e^{-\gamma z} \quad (315)$$

Donc par passage au module, avec  $\alpha$  est la partie réelle de  $\gamma$ , on trouve:

$$|\mathbf{E}^t(z)| = |\mathbf{E}^t(0)|e^{-\alpha z} \quad (316)$$

avec

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 10^6 \times 2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{2}} = 4,98 \times 10^3 \quad (317)$$

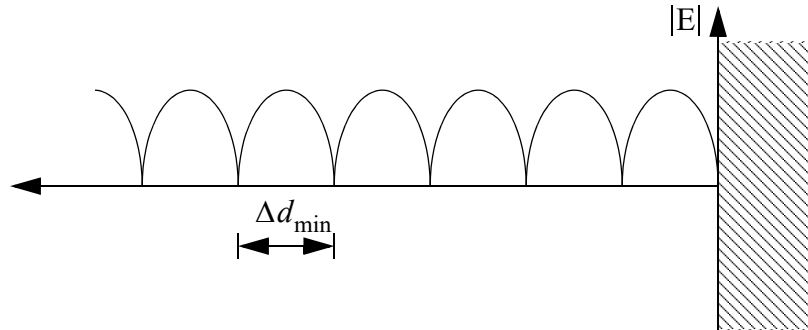
Finalement, la profondeur pour qu'on ait une chute de 60 dB par rapport au niveau de champ présent à l'interface se calculera comme suit:

$$60 = 20\log_{10}|\mathbf{E}^t(0)/\mathbf{E}^t(z)| = 20\log_{10}(e^{\alpha z}) \quad (318)$$

D'où l'on déduit:

$$z = \frac{\ln(10^3)}{\alpha} = 1,39 \text{ mm} \quad (319)$$

d. Avec un parfait conducteur,  $\Gamma = -1$  et nous avons des ondes stationnaires avec un champ nul à l'interface. La distance entre deux minima consécutifs  $\Delta d_{\min}$  est de  $\lambda/2$ , soit  $c/2f = 150$  mètres.

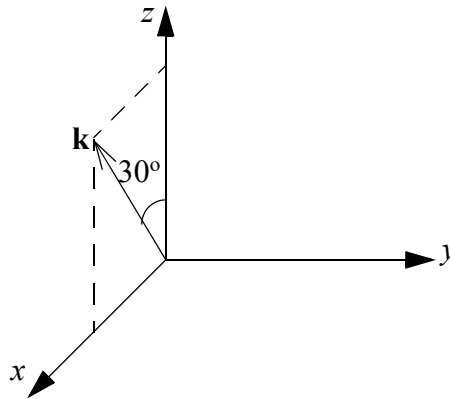


## Problème 2.14

Une onde plane uniforme se propage dans l'air. Son vecteur d'onde ( $\mathbf{k}$ ) est tangentiel au plan  $xz$  et fait un angle de 30 degrés avec l'axe  $z$ . La fréquence du signal est de 3 GHz et le champ magnétique est donné par:

$$\mathbf{H} = (H_x \hat{\mathbf{x}} + 10\hat{\mathbf{y}} + j5\hat{\mathbf{z}})e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

- Trouvez la valeur de  $\mathbf{k}$  (grandeur et direction).
- Trouvez la valeur de  $H_x$ .
- Quel est le type de polarisation de cette onde?
- Donnez l'expression complète du champ électrique associé à cette onde.
- Quelle est la valeur de la densité de flux de puissance en direction  $z$ ?



## Solution

- Le vecteur  $\mathbf{k}$  pointe dans la direction de propagation, et est tangentiel au plan  $xz$  tout en faisant un angle de 30 degrés avec l'axe  $z$ . Donc la direction de  $\mathbf{k}$  sera portée par le vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} &= \hat{\mathbf{x}} \sin 30^\circ + \hat{\mathbf{z}} \cos 30^\circ \\ \hat{\mathbf{n}} &= 0,5\hat{\mathbf{x}} + 0,866\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\tag{320}$$

Pour une onde plane uniforme, le module de  $\mathbf{k}$  est donnée par  $\omega/c$  où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde, laquelle est d'environ  $3 \times 10^8$  m/s dans l'air. Nous avons donc que:

$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi \times 3 \times 10^9 \text{ Hz}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 20\pi \text{ m}^{-1}. \quad (321)$$

Avec  $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{n}}|\mathbf{k}|$ , il en résulte que:

$$\mathbf{k} = 20\pi(0,5\hat{\mathbf{x}} + 0,866\hat{\mathbf{z}}) \text{ m}^{-1} \quad (322)$$

**b.** Pour une onde plane uniforme,  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{H}$  sont perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (323)$$

Ce qui donne:

$$0,5H_x + 0,866H_z = 0 \quad \text{avec } H_z = 5j \quad (324)$$

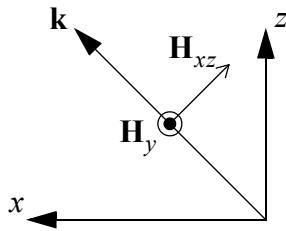
On en déduit donc:

$$H_x = \frac{-5j \cdot 0,866}{0,5} = -j8,66 \quad (325)$$

**c.** Puisque  $H_x$  et  $-H_z$  sont en phase, on peut définir une combinaison des composantes  $x$

et  $z$  dans le plan  $xz$  comme  $H_{xz} = j\sqrt{5^2 + 8,66^2} = j10$ .

Ce terme a le même module que  $H_y$  mais il est en avance de  $\pi/2$ . Il s'agira donc d'une onde à polarisation circulaire. D'après la figure, on peut déduire que le retard de  $H_y$  d'un quart de cycle donne lieu à une polarisation gauche.



**d.** On a d'après l'une des équations de Maxwell:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{-j\mathbf{k} \times \mathbf{H}}{j\omega\epsilon} = \frac{-\beta}{\omega\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \\
&= \frac{-\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = -\eta_0 \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ \\ -j8,66 & 10 & j5 \end{vmatrix} e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}
\end{aligned} \tag{326}$$

Ce qui nous donne:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\eta_0 [\hat{\mathbf{x}}(-10 \cos 30^\circ) + \hat{\mathbf{y}}(-j8,66 \cos 30^\circ - j5 \sin 30^\circ) + \hat{\mathbf{z}} 10 \sin 30^\circ] e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\
\mathbf{E} &= \eta_0 [8,66 \hat{\mathbf{x}} + j10 \hat{\mathbf{y}} - 5 \hat{\mathbf{z}}] e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}
\end{aligned} \tag{327}$$

e. La valeur de la densité de puissance dans la direction de propagation pour un milieu sans pertes se calcule comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} = \frac{\eta}{2} \|\mathbf{H}\|^2 \hat{\mathbf{n}} \\
\mathbf{P} &= \frac{\eta}{2} (|H_{xz}|^2 + |H_y|^2) \hat{\mathbf{n}} = \frac{377}{2} (10^2 + 10^2) \hat{\mathbf{n}} = 37700 \text{ W/m}^2 \hat{\mathbf{n}}
\end{aligned}$$

Le flux de puissance est dans la direction de  $\hat{\mathbf{n}}$ . La composante selon  $z$  sera simplement  $37700 \cos 30^\circ \text{ W/m}^2$ .

## Problème 2.15

Une onde plane uniforme se propage dans l'air à une fréquence de 1 MHz et arrive sur une frontière plane entre l'air et une région composée d'un matériau ayant les propriétés suivantes:  $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 2\pi \times 10^{-3}$  S/m. L'angle d'incidence est de 30 degrés et on a une polarisation linéaire du champ électrique, parallèle au plan d'incidence.

- Déterminez si le matériau sur lequel l'onde arrive est un bon conducteur, un bon isolant ou simplement un semiconducteur.
- Dessinez un repère cartésien centré sur l'interface entre les deux milieux et montrez les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  incidents, réfléchis et transmis.
- Déterminez la valeur numérique de chaque composante des 3 vecteurs d'onde,  $\mathbf{k}_i$ ,  $\mathbf{k}_r$  et  $\mathbf{k}_t$ .
- Le phasor champ électrique incident vaut 1 V/m à l'origine. Donnez l'expression complète des champs électriques incident et réfléchi en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans l'air. Donnez toutes les expressions nécessaires pour calculer l'amplitude et la phase du champ réfléchi.

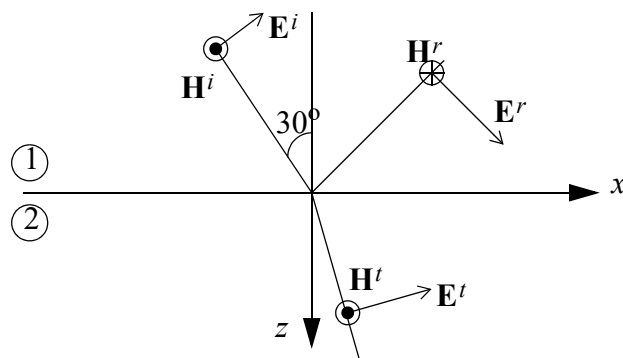
## Solution

a. On a

$$p = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} = \frac{2\pi \times 10^{-3} \cdot 36\pi \times 10^9}{2\pi \times 10^6 \times 4} = 9\pi = 28,27 \quad (329)$$

Il s'agit d'un semi-conducteur car  $0,01 \leq p \leq 100$ .

b.



c. On a  $\mathbf{k}_i = \beta_1(\hat{\mathbf{x}} \sin 30^\circ + \hat{\mathbf{z}} \cos 30^\circ)$  avec  $\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 10^6}{3 \times 10^8} = 0,0209 = \frac{2\pi}{300}$

Ce qui donne:

$$\mathbf{k}_i = 0,0105\hat{\mathbf{x}} + 0,0181\hat{\mathbf{z}} \quad (330)$$

De la même manière, on trouve:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_r &= \beta_1(\hat{\mathbf{x}} \sin 30^\circ - \hat{\mathbf{z}} \cos 30^\circ) \\ &= 0,0105\hat{\mathbf{x}} - 0,0181\hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (331)$$

Pour trouver  $\mathbf{k}_t$ , on a selon la loi de Snell  $k_{tx} = k_{ix} = k_{rx}$ , donc:

$$k_{tx} = \beta_1 \sin 30^\circ = \pi/300 \approx 0,0105 \quad (332)$$

Pour trouver  $k_{tz}$ , on a:

$$\gamma_x^2 + \gamma_z^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \quad (333)$$

Puisque  $j\mathbf{k} = \gamma$ , alors  $jk_{tx} = \gamma_x$ , d'où on peut tirer  $\gamma_x^2 = (jk_{tx})^2 = -k_{tx}^2 = -(\pi/300)^2$  et finalement:

$$\begin{aligned} \gamma_z^2 &= -\omega^2 \mu \epsilon - \gamma_x^2 \\ &= -4\pi^2 \times 10^{12} \times \frac{4\pi}{10^7} \times \left( 4 \times 8,854 \times 10^{-12} - j \frac{2\pi \times 10^{-3}}{2\pi \times 10^6} \right) + \frac{\pi^2}{300^2} \\ &= -16\pi^3 \times 10^5 (4 \times 8,854 \times 10^{-12} - j \times 10^{-9}) + \frac{\pi^2}{300^2} \\ &\approx \left( -\frac{16\pi^2}{9} \times 10^{-4} \right) + \left( \frac{\pi}{300} \right)^2 + j16\pi^3 \times 10^{-4} \\ &= -\left( \frac{4\pi}{300} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{300} \right)^2 + j16\pi^3 \times 10^{-4} \\ &= -1,645 \times 10^{-3} + j4,96 \times 10^{-2} \\ \gamma_z^2 &= 4,9627 \times 10^{-2} \angle 91,9^\circ \end{aligned} \quad (334)$$



D'où il résulte:

$$\gamma_z = \pm 2,22 \times 10^{-1} \angle 45,95^\circ = \pm (0,1549 + j0,1601) \quad (335)$$

Or, pour avoir atténuation avec  $z$  positif, on doit choisir le signe (+), d'où:

$$\gamma_z = 0,1549 + j0,1601 = \alpha_z + j\beta_z \quad (336)$$

aussi, puisque  $j\mathbf{k} = \gamma$  on aura:

$$jk_{tz} = \gamma_z \quad (337)$$

Donc:

$$\mathbf{k}_t = \hat{\mathbf{x}} 0,0105 + \hat{\mathbf{z}} (0,1601 - j0,1549) \quad (338)$$

**d.** D'après la figure en **b.**), on a l'expression du champ incident:

$$\mathbf{E}^i = E_0(\hat{\mathbf{x}} \cos 30^\circ - \hat{\mathbf{z}} \sin 30^\circ) e^{-j(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} \quad (339)$$

L'expression du champ réfléchi sera donc:

$$\mathbf{E}^r = E_0 \Gamma_{//}(\hat{\mathbf{x}} \cos 30^\circ + \hat{\mathbf{z}} \sin 30^\circ) e^{-j(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \quad (340)$$

On voit donc, que pour connaître l'amplitude et la phase du champ réfléchi, il faut calculer le coefficient de réflexion  $\Gamma_{//}$ , qui s'exprime comme suit:

$$\Gamma_{//} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (341)$$

Avec  $\cos \theta_i = \cos 30^\circ$ ,  $\eta_1 = 377 \Omega$ ,  $\eta_2 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon} = \sqrt{\mu_0 / (4\epsilon_0 - j(\sigma / \omega))}$  et

$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}$ .  $\sin \theta_t$  est obtenu à l'aide de la loi de Snell:

$$\sqrt{1} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon / \epsilon_0} \sin \theta_t \rightarrow \sin \theta_t = \sin \theta_i \sqrt{\epsilon_0 / \epsilon} \quad (342)$$

Finalement:

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i (\epsilon_0 / \epsilon)} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{4 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}}} \quad (343)$$