

Chapitre 3

Propagation des ondes planes en présence de surface de discontinuité





Rayon direct



Rayon réfléchi

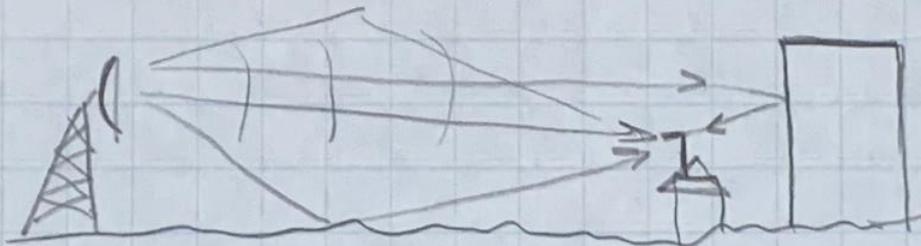


CHAPITRE III

⑥

Propagation en présence de surfaces de discontinuité

III.1 Introduction



- l'arrivée de plusieurs signaux produit de l'interférence TV.
- si il y a retard important entre signaux : **image fantôme**
- On traite les champs émis comme des ondes planes arrivant sur des interfaces

① types d'interface: diélectrique / diél
diél. / cond.

② géométrie de l'interface:

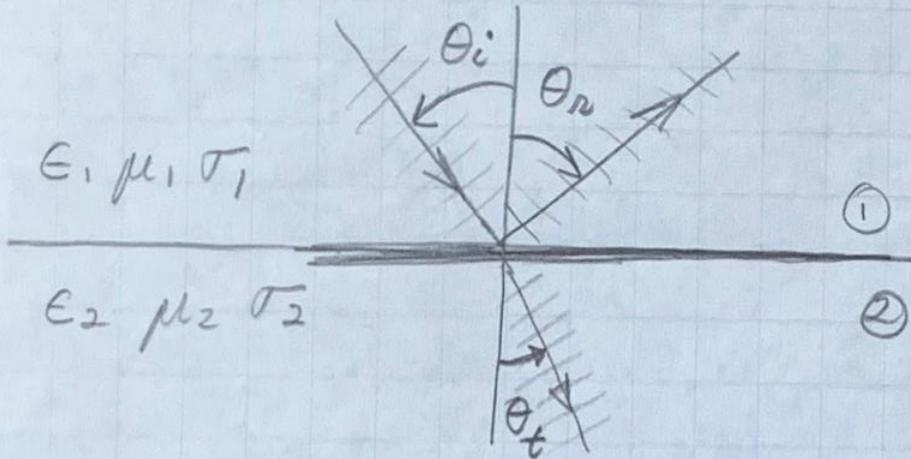
- planes \leftarrow ELE3500

- courbes

- onde incidente génère une
onde réfléchie et une onde
transmise

- la polarisation de l'onde incidente
est arbitraire: elliptique, linéaire, circulaire

- $\theta_i = 0$: incidence normale
 $\theta_i \neq 0$: incidence oblique
 $\theta_i = 90^\circ$: incidence rasante

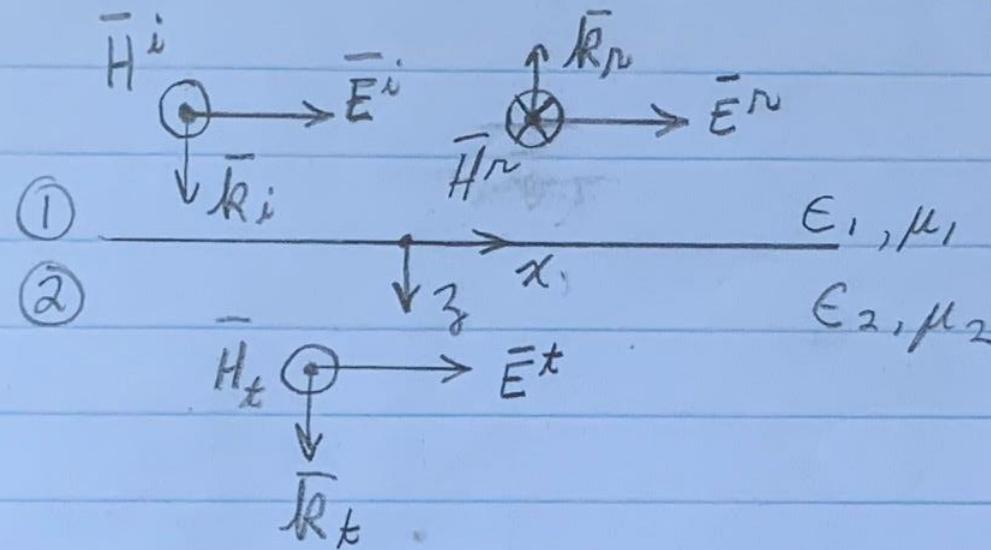


θ_i : angle d'incidence

θ_r : angle de réflexion

θ_t : angle de transmission

III.2 Onde Plane Uniforme à incidence normale - polarisation linéaire



NB: $\bar{E}^r \times \bar{H}^{r*}$ pointe vers
+ \bar{k}_r car \bar{H}_r est
négatif

NB: La convention de signe choisie,
avec toutes les composantes de
 \bar{E} dans le même sens, facilite
l'écriture des conditions aux fron-
tières.

$$\bar{E}_1 = \bar{E}^i + \bar{E}^r \quad z \leq 0$$

$$\bar{E}_2 = \bar{E}^t \quad z \geq 0$$

$$\bar{H}_1 = \bar{H}^i + \bar{H}^r \quad z \leq 0$$

$$\bar{H}_2 = \bar{H}^t \quad z \geq 0$$

à la frontière $z=0$:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \rightarrow E_{1,\tan} = E_{2,\tan} \quad (1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\epsilon \bar{E} + \bar{J} \rightarrow J_s = \hat{z} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = 0 \quad (2)$$

$J_s = 0$ car il n'y a pas de conducteur électrique parfait à l'interface $\rightarrow H_{1,\tan} = H_{2,\tan}$

Champs \bar{H} ?

$$\bar{H} = \frac{\bar{k} \times \bar{E}}{\omega\mu} \rightarrow \text{il faut connaître } \bar{k}$$

$$\bar{k}_i = +\hat{z} \beta_1 ; \beta_1^2 = \omega^2 \mu_i \epsilon_i$$

$$\bar{k}_n = -\hat{z} \beta_1 ; " "$$

$$\bar{k}_t = +\hat{y} \beta_2 ; \beta_2^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2$$

$$\bar{E}^i = \hat{x} E_x^i \rightarrow \bar{H}^i = \frac{\beta_1 \hat{z} \times \hat{x} E_x^i}{\omega\mu_i} = \hat{y} E_x^i / h_1$$

$$\bar{E}^n = \hat{x} E_x^n \rightarrow \bar{H}^n = \dots = -\hat{y} E_x^n / h_1$$

$$\bar{E}^t = \hat{x} E_x^t \rightarrow \bar{H}^t = \dots = \hat{y} E_x^t / h_2$$

i) Coefficients de réflexion (Γ) et de transmission (T)

application de (1) : $\bar{E}_{\tan}^i + \bar{E}_{\tan}^r = \bar{E}_{\tan}^t$
à $z=0$ $\hat{x} E_{x0}^i e^{-jk_i \cdot \bar{r}} + \hat{x} E_{x0}^r e^{-jk_r \cdot \bar{r}} = \hat{x} E_{x0}^t e^{-jk_t \cdot \bar{r}}$
 $\bar{k}_i = \hat{z} \beta_1$, $\bar{k}_r = -\hat{z} \beta_1$, $\bar{k}_t = \hat{z} \beta_2$, $\bar{r} = (x, y, 0)$

$$\begin{Bmatrix} \bar{k}_i \\ \bar{k}_r \\ \bar{k}_t \end{Bmatrix} \cdot \bar{r} = 0 \quad \rightarrow \quad E_{x0}^i + E_{x0}^r = E_{x0}^t \quad (3)$$

application de (2)

$$\hat{z} \times \hat{x} E_x^t / h_2 = \hat{z} \times \hat{x} \left(\frac{E_x^i}{h_1} - \frac{E_x^r}{h_1} \right) \quad \text{à } z=0$$

$$\rightarrow \frac{E_{x0}^t}{h_2} = \frac{1}{h_1} (E_{x0}^i - E_{x0}^r) \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow E_{x0}^t = (h_2/h_1) (E_{x0}^i - E_{x0}^r)$$

dans (3) $\rightarrow E_{x0}^i + E_{x0}^r = (h_2/h_1) (E_{x0}^i - E_{x0}^r) \quad \therefore E_{x0}^i$

$$1 + \frac{E_{N0}^R}{E_{N0}^i} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \left(1 - \frac{E_{N0}^R}{E_{N0}^i} \right)$$

avec :

$$1 + \Gamma = \frac{h_2}{h_1} (1 - \Gamma) \Rightarrow \Gamma = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$$

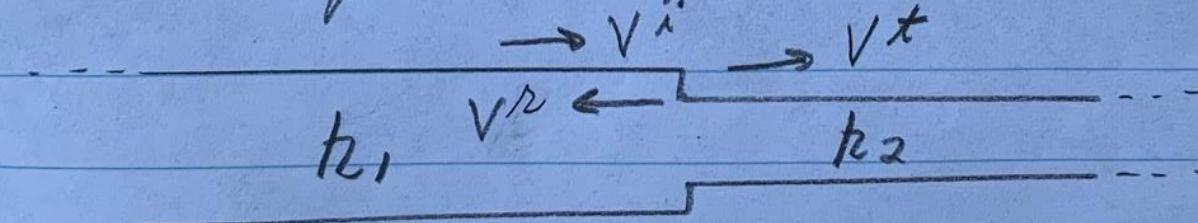
$$\Gamma = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$$

avec $\Gamma \equiv \frac{E_{N0}^R}{E_{N0}^i}$

dans (3) : $E_{N0}^i (1 + \Gamma) = E_{N0}^t \rightarrow$
 avec $T = E_{N0}^t / E_{N0}^i$

$$T = 1 + \Gamma = \frac{2h_2}{h_2 + h_1}$$

Parfaite analogie avec lignes de transmission :



$$\frac{Vr}{Vi} = \frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2}$$

$$\frac{Vt}{Vi} = \frac{2h_2}{h_1 + h_2}$$

(3)

Note : - Pour matériaux sans pertes t_2 et b_2 sont réels donc Γ et T sont réels. Si un des matériaux a des pertes, alors Γ et T sont en général complexes

Dans une ligne de transmission, V est associé à E_{tan} et I est associé à \bar{H}_{tan} .

ligne : V et I continus

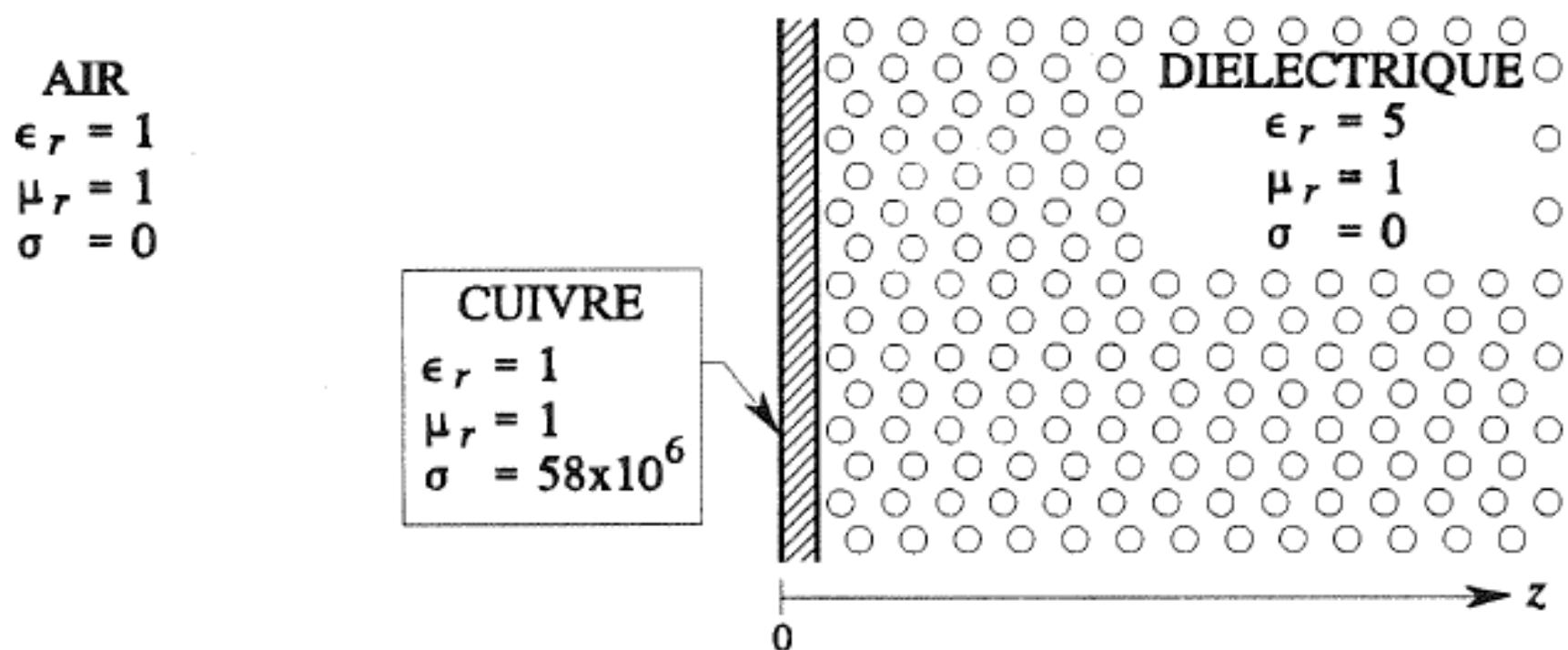
onde plane : E_{tan} et \bar{H}_{tan} continus

DONC : On pourra toujours retrouver E_{tan}^r/E_{tan}^i et E_{tan}^t/E_{tan}^i à partir de relations trouvées pour les lignes de transmission.

Problème 2.4

Une onde plane polarisée linéairement se propageant dans l'air à la fréquence de 2 GHz, est incidente de façon normale sur une plaquette de circuit imprimé (figure 2.4.1).

Si la couche de cuivre déposée sur le diélectrique a une épaisseur de $10 \mu\text{m}$, une conductivité de $\sigma = 58 \times 10^6 \text{ S/m}$, et que l'amplitude du champ électrique incident est $|E_{io}| = 10 \text{ V/m}$,



a) Quelle est l'amplitude du champ électrique à l'intérieur du cuivre (côté air) ?

$$E_{io} = T_{\text{air-Cu}} E_{io}$$

$$T_{\text{air-Cu}} = \frac{2Z_{\text{Cu}}}{Z_{\text{Cu}} + Z_{\text{air}}}$$

$$Z_{\text{Cu}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} \Bigg|_{\begin{array}{l} \mu = \mu_{\text{Cu}} \\ \sigma = \sigma_{\text{Cu}} \end{array}} = \sqrt{\frac{2\pi(2 \times 10^9) \left(\frac{4\pi}{10^7}\right)}{58 \times 10^6}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi}{100\sqrt{58}} e^{j\frac{\pi}{4}} \Omega$$

$$Z_{\text{air}} \approx Z_o = 120\pi \Omega$$

$$T_{\text{air-Cu}} = \frac{2Z_{\text{Cu}}}{Z_{\text{Cu}} + Z_{\text{air}}} = \frac{2Z_{\text{Cu}}}{Z_{\text{air}}} = \frac{\frac{2}{120\pi} \left(\frac{4\pi}{100\sqrt{58}} e^{j\frac{\pi}{4}} \right)}{e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{1500\sqrt{58}}$$

$$|E(z=0)| = |E_{to}| = |T_{\text{air-Cu}}| |E_{to}| = \left(\frac{1}{1500\sqrt{58}} \right) (10) = \frac{1}{150\sqrt{58}} \text{ V/m}$$

$$\approx 8.754 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

b) Quelle est l'amplitude du champ électrique incident à l'interface cuivre-diélectrique ?

$$E_i(z = 10 \mu\text{m}) = E_{\text{so}} e^{-\alpha_{\text{Cu}} d} \Big|_{d = 10 \mu\text{m}}$$

$$\alpha_{\text{Cu}} = \beta_{\text{Cu}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \Bigg|_{\begin{array}{l} \mu = \mu_{\text{Cu}} \\ \sigma = \sigma_{\text{Cu}} \end{array}} = \sqrt{\frac{2\pi(2 \times 10^9) \left(\frac{4\pi}{10^7}\right)(58 \times 10^6)}{2}} = 4\pi\sqrt{29} \times 10^4 \text{ Np/m}$$

$$\begin{aligned} |E_i(z = 10 \mu\text{m})| &= |E_{\text{so}}| e^{-\alpha_{\text{Cu}} d} = \frac{1}{150\sqrt{58}} e^{-(4\pi\sqrt{29} \times 10^4)(10^{-5})} \\ &\approx 1.007 \times 10^{-6} \text{ V/m} \end{aligned}$$

- c) Quelle est l'amplitude du champ électrique dans le diélectrique, à une distance de 0.1 cm de l'interface cuivre-diélectrique ?

$$T_{\text{Cu-dié}} = \frac{2Z_{\text{dié}}}{Z_{\text{dié}} + Z_{\text{Cu}}} = 2 \quad \text{car} \quad Z_{\text{dié}} \gg Z_{\text{Cu}}$$

$$\begin{aligned}|E(z=10 \mu\text{m} + 1 \text{mm})| &= |E(z=10 \mu\text{m})| \\&= |E_i(z=10 \mu\text{m})| \\&= |T_{\text{Cu-dié}}| |E_i(z=10 \mu\text{m})| \\&= (2) \left(\frac{e^{-4\pi\sqrt{29} \times 10^{-4}}}{150\sqrt{58}} \right) \\&= 2.015 \times 10^{-8} \text{ V/m}\end{aligned}$$

On a trouvé en ii) que $E_{ox}^i + E_{ox}^r = E_{ox}^t$

Par contre, on doit avoir $P^i = P^r + P^t \quad (5)$

i.e. la puissance incidente se divise en puissance transmise
+ puissance réfléchie

Selon la figure de départ :

$$P^i = \bar{P}^i \cdot \hat{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{E_x^i E_x^{i*}}{h_1^*} \right\} \cdot \hat{z}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{h_1^*} \right\} |E_{x0}^i|^2$$

de même, $P^r = \bar{P}^r \cdot \hat{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{h_1^*} \right\} |E_{x0}^r|^2$

$$P^t = \bar{P}^t \cdot \hat{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{h_2^*} \right\} |E_{x0}^t|^2$$

(5) devient: $|E_{x0}^i|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{h_1^*} \right\} = |E_{x0}^i|^2 \left[\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{h_1^*} \right\} |\Gamma|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{h_2^*} \right\} |T|^2 \right]$

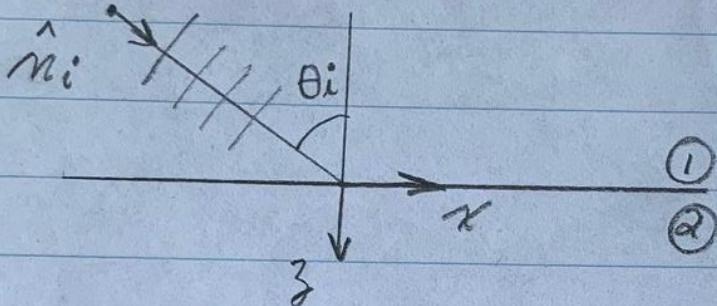
$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{h_1^*}\right\} \left(1 - |\Gamma|^2\right) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{h_2^*}\right\} |\Gamma|^2$$

Si les 2 miliers sont sans pertes :

$$1 - |\Gamma|^2 = \frac{h_1}{h_2} |\Gamma|^2$$

III. 3 Onde plane uniforme avec incidence oblique

i) Définition des vecteurs d'onde



θ_i = angle d'incidence

$$\hat{n}_i \cdot \hat{z} = \cos \theta_i$$

De façon générale

$$\bar{E}^i = \bar{A} e^{-j\beta_1 \hat{n}_i \cdot \bar{r}}$$

$$\bar{E}^r = \bar{B} e^{-j\beta_1 \hat{n}_r \cdot \bar{r}}$$

$$\bar{E}^t = \bar{C} e^{-j\beta_2 \hat{n}_t \cdot \bar{r}}$$

(ou $\bar{C} e^{-j\beta_2 \bar{r}}$ si le milieu 2 a des pertes)

- Supposons une onde plane se dirigeant vers l'interface
- Plan d'incidence: plan parallèle à \hat{n}_i et \hat{z} .
- L'onde incidente va produire une onde réfléchie et une onde transmise. On suppose qu'elles sont aussi des O.P.U.

On peut décomposer \hat{n}_i : \hat{n}_r et \hat{n}_t en composantes tangen-
tielles et normales à l'interface $z=0$. e.g. $\hat{n} = \bar{n}_{\text{tan}} + \hat{z} n_{i,z}$

On a donc:

$$\bar{E}^i = \bar{A} \exp -j\beta_1 \left\{ \bar{n}_{\text{tan}} \cdot \bar{n}_{i,\text{tan}} + z n_{i,z} \right\} \quad (1)$$

$$\bar{E}^r = \bar{B} \exp -j\beta_1 \left\{ \bar{n}_{\text{tan}} \cdot \bar{n}_{r,\text{tan}} + z n_{r,z} \right\} \quad (2)$$

$$\bar{E}^t = \bar{C} \exp -j\beta_2 \left\{ \bar{n}_{\text{tan}} \cdot \bar{n}_{t,\text{tan}} + z n_{t,z} \right\} \quad (3)$$

avec $\bar{n}_{\text{tan}} = \hat{x} n_x + \hat{y} n_y$, $\bar{n} = \bar{n}_{\text{tan}} + z \hat{z}$

N.B: Dans la figure, $\bar{n}_{i,\text{tan}} = \sin \theta_i \hat{x} + 0 \hat{y}$
 $n_{i,z} = \cos \theta_i$

ii) Loi de Snell

Considérons \bar{E}^i , \bar{E}^r et \bar{E}^t à l'interface $z=0$

- \bar{E}^i , \bar{E}^r et \bar{E}^t sont alors des fonctions de x et y seulement
- les conditions frontières (plan $z=0$)

$$\bar{E}_{\tan}^i(x, y, 0) + \bar{E}_{\tan}^r(x, y, 0) = \bar{E}_{\tan}^t(x, y, 0)$$

$$\bar{H}_{\tan}^i(x, y, 0) + \bar{H}_{\tan}^r(x, y, 0) = \bar{H}_{\tan}^t(x, y, 0)$$

douivent être satisfaites "partout" sur l'interface. $\Rightarrow \bar{E}^i(x, y, 0)$, $\bar{E}^r(x, y, 0)$ et $\bar{E}^t(x, y, 0)$ douivent avoir la même dépendance par rapport à x et y .

DONC il faut que

$$\beta_1 \bar{n}_{\tan} \cdot \bar{m}_{i, \tan} = \beta_1 \bar{n}_{\tan} \cdot \bar{m}_{r, \tan} = \beta_2 \bar{n}_{\tan} \cdot \bar{m}_{t, \tan}$$

i.e

$$\beta_1 \bar{m}_{i, \tan} = \beta_1 \bar{m}_{r, \tan} = \beta_2 \bar{m}_{t, \tan}$$

Loi de Snell en réflexion

$$\beta_1 \bar{n}_i, \tan = \beta_1 \bar{n}_r, \tan \Rightarrow \bar{n}_i, \tan = \bar{n}_r, \tan$$

$$\sin \theta_i \hat{x} + 0 \hat{y} = \bar{n}_r, \tan$$

$$\hat{n}_r = \bar{n}_{r, \tan} + n_{rz} \hat{z} + 0 \hat{y}$$

$$= \sin \theta_i \hat{x} + n_{rz} \hat{z}$$

et puisque $\|\hat{n}_r\|=1$, on a $n_{rz} = \pm \cos \theta_i$

L'onde réfléchie se dirige vers le haut ($-\hat{z}$) donc on prend

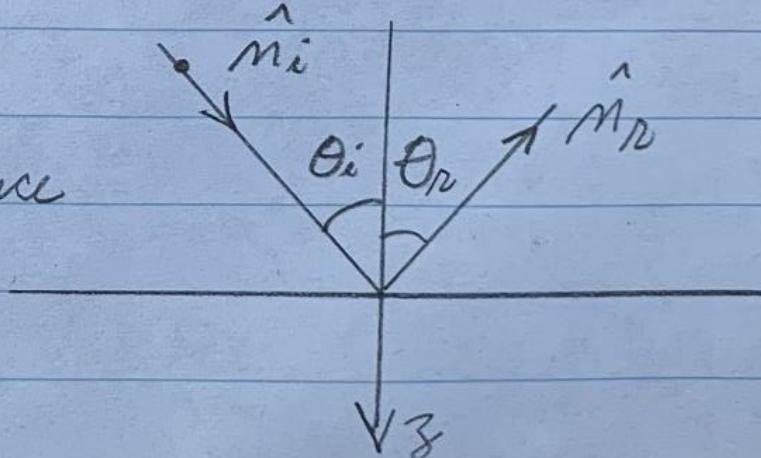
$$n_{rz} = -\cos \theta_i$$

$$\rightarrow \hat{n}_r = \sin \theta_i \hat{x} - \cos \theta_i \hat{z}$$

DONC: - \hat{n}_r est dans le plan d'incidence

$$\text{car } n_{ry} = 0$$

$$- \quad \theta_r = \theta_i$$



Loi de Snell en transmission

$$\beta_1 \bar{n}_i, \tan = \beta_2 \bar{n}_{t,\tan}$$

ie $\beta_1 (\sin \theta_i \hat{x} + 0 \hat{y}) = \beta_2 n_{tx} \hat{x} + \beta_2 n_{ty} \hat{y}$

d'où : $n_{ty} = 0$

$$\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 n_{tx} \rightarrow n_{tx} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i$$

Qui en est-il de n_{tz} ?

$$\hat{n}_t = \frac{\beta_1 \sin \theta_i}{\beta_2} \hat{x} + 0 \hat{y} + n_{tz} \hat{z} \quad \text{et} \quad \|\hat{n}_t\| = 1$$

$$\rightarrow n_{tz} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i\right)^2}$$

Puisque l'onde se dirige vers les z positifs, on choisit le signe positif pour la racine

DONC:

- \hat{n}_t est dans le plan d'incidence car $n_{t,y} = 0$

- si on décompose \hat{n}_t en composantes x et y , on a :

$$\hat{n}_t = \sin \theta_t \hat{x} + 0 \hat{y} + \cos \theta_t \hat{z}$$

$$\text{i.e. } n_{tx} = \sin \theta_t \quad n_{tz} = \cos \theta_t$$

puisque $n_{tx} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i$ alors

$$\sin \theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i \quad \beta = w/c$$

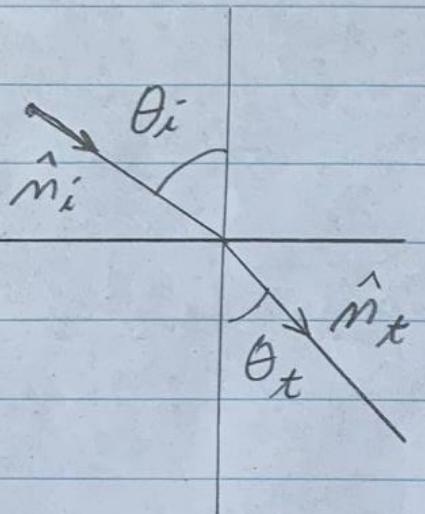
$$= \frac{w/c_1}{w/c_2} \sin \theta_i$$

$$(\frac{1}{c_2}) \sin \theta_t = (\frac{1}{c_1}) \sin \theta_i$$

$$\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sin \theta_t = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sin \theta_i$$

$$N_2 \sin \theta_t = N_1 \sin \theta_i$$

$N \equiv \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$: indice de réfraction



Si le milieu 2 a des pertes: (ohmiques ou diélectriques)

$$\underline{\epsilon}_2 = \epsilon_2' - j \epsilon_2'' \quad \epsilon_2'' \neq 0$$

La solution proposée des équations de Maxwell est du type:

$$\bar{E}^t = \bar{C} e^{-\frac{\gamma_t}{k} r}$$

Si on remplace cette solution dans l'équation de Helmholtz ($\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \mu \epsilon \bar{E} = 0$), on trouve que la solution est possible à condition d'avoir

$$\bar{\gamma}_t \cdot \bar{\gamma}_t = -\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 \quad (4)$$

$\bar{\gamma}_t$ se décompose en composantes tangentielle (x) et normale (z) à l'interface:

t : transmis

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_t &= \bar{\gamma}_x \hat{x} + \bar{\gamma}_z \hat{z} \\ &= (\alpha_x + j \beta_x) \hat{x} + (\alpha_z + j \beta_z) \hat{z} \\ &= \bar{\alpha}_t + j \bar{\beta}_t\end{aligned}$$

on se place dans le plan $z=0$ pour appliquer la loi de Snell:

$$\bar{E}^t(z=0) = \bar{C} e^{-\gamma_x x} e^{-\gamma_z 0} = \bar{C} e^{-\alpha_x x} e^{-j\beta_x x}$$

d'après Snell, la variation de \bar{E}^t le long de la surface doit être la même que la variation de \bar{E}^i .

Puisque $\bar{E}^i(z=0) \propto e^{-j\beta_i \sin\theta_i x}$
on doit avoir $E^t(z=0) \propto e^{-j\beta_i \sin\theta_i x}$

$$\Rightarrow \alpha_x = 0 \quad \beta_x = \beta_i \sin\theta_i$$

ie $\gamma_x = j\beta_i \sin\theta_i$
 $\bar{E}^t = \bar{C} e^{-j\beta_i \sin\theta_i x} e^{-\gamma_z z}$

Qu'en est-il de $\underline{\gamma}_3$?

D'après eq. 4:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_t \cdot \bar{\gamma}_t &= -\omega^2 \mu_2 \underline{\epsilon}_2 \\ (\underline{\gamma}_x \hat{x} + \underline{\gamma}_z \hat{z}) \cdot (\underline{\gamma}_x \hat{x} + \underline{\gamma}_z \hat{z}) &= -\omega^2 \mu \underline{\epsilon} \\ \underline{\gamma}_x^2 + \underline{\gamma}_z^2 &= -\omega^2 \mu_2 \underline{\epsilon}_2\end{aligned}$$

→

$$\underline{\gamma}_z = \sqrt{-\omega^2 \mu_2 \underline{\epsilon}_2 - \underline{\gamma}_x^2}$$

$$= \sqrt{-\omega^2 \mu_2 \underline{\epsilon}_2 + \beta_1^2 \sin^2 \theta_i}$$

$$= \sqrt{-\omega^2 \mu_2 \underline{\epsilon}_2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \theta_i}$$

$$= \alpha_z + j\beta_z$$

→ on choisit la racine qui a un $\alpha_z > 0$ pour avoir une solution physiquement possible, i.e. atténuation à mesure que le signal s'enfonce dans le matériau 2.

Remarques:

- pas d'atténuation avec λ dans le milieu à pertes
- si le milieu 2 est un très bon conducteur, alors on trouve: $\underline{\epsilon}_2 \approx -j\sigma/\omega$

$$\underline{\gamma}_3 \approx \sqrt{-\omega^2 \mu_2 \left(-j\frac{\sigma}{\omega}\right)'} = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu_2}{2}} (1+j)$$

ie $\underline{\alpha}_3 = \beta_3 = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} \gg \beta_x$

→ onde matigement propagée selon \hat{z}

- Puisque $\bar{Z}_t = 0 \hat{x} + \alpha_3 \hat{z}$
 $\bar{\beta}_t = \beta_x \hat{x} + \beta_3 \hat{z} \quad \beta_x \neq 0, \beta_3 \neq 0$

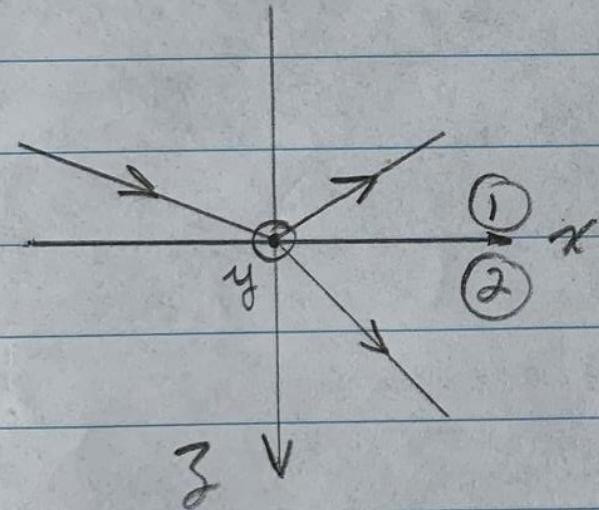
III.4

Conditions aux frontières (milieux sans pertes)

À l'interface entre 2 milieux on doit avoir continuité de \bar{E}_{tan} et \bar{H}_{tan} i.e :

$$\bar{E}_{tan,1} = \bar{E}_{tan,2} \quad \text{à } z=0$$

$$\bar{H}_{tan,1} = \bar{H}_{tan,2} \quad \text{à } z=0$$



En termes d'ondes "i", "r" et "t" on a donc :

$$\underbrace{\bar{E}_{i,tan} + \bar{E}_{r,tan}}_{(1)} = \underbrace{\bar{E}_{t,tan}}_{(2)}$$

$$\underbrace{\bar{H}_{i,tan} + \bar{H}_{r,tan}}_{(1)} = \underbrace{\bar{H}_{t,tan}}_{(2)}$$

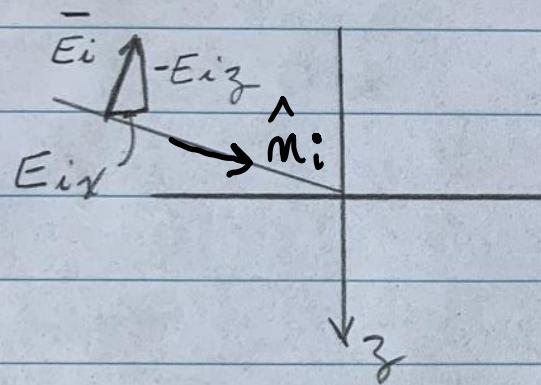
Il est utile de décomposer les champs en ondes où \bar{E} et \bar{H} sont tous deux perpendiculaires à \hat{n}_i , ou \hat{n}_s ou \hat{n}_t car les ondes planes sont TEM :

- composante parallèle au plan d'incidence

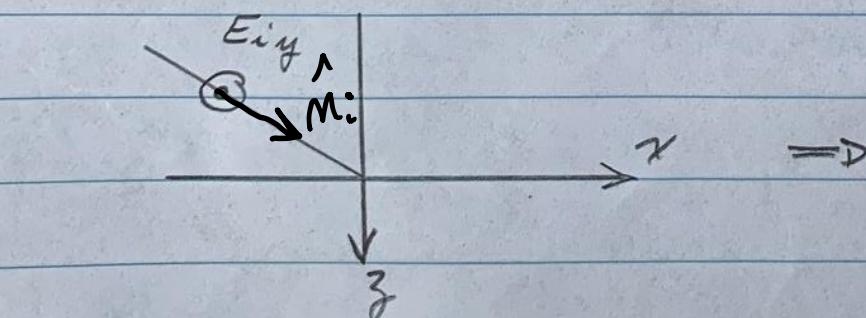
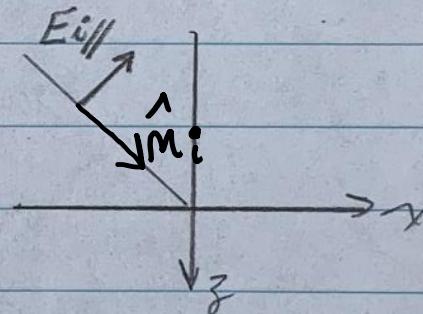
$$E_{ix} \hat{x} + E_{iz} \hat{z} \rightarrow E_{i\parallel} \hat{\parallel}$$

- composante perpendiculaire (normale) au plan d'incidence

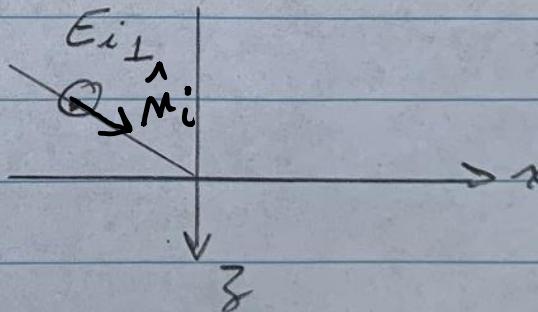
$$E_{iy} \hat{y} \rightarrow E_{i\perp} \hat{\perp}$$



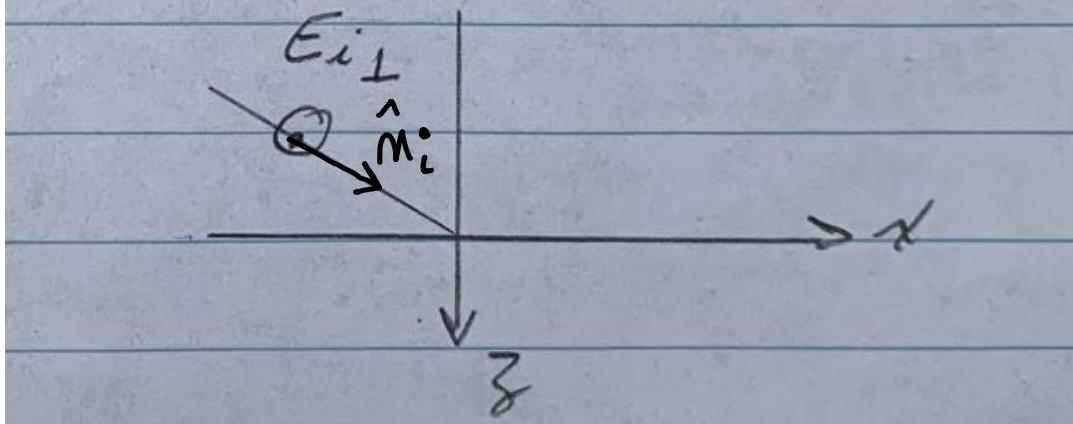
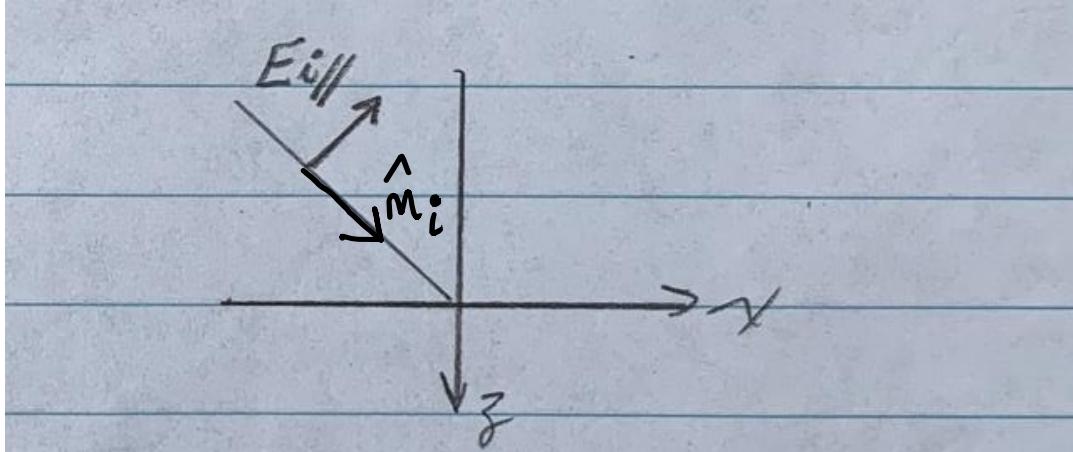
\Rightarrow



\Rightarrow



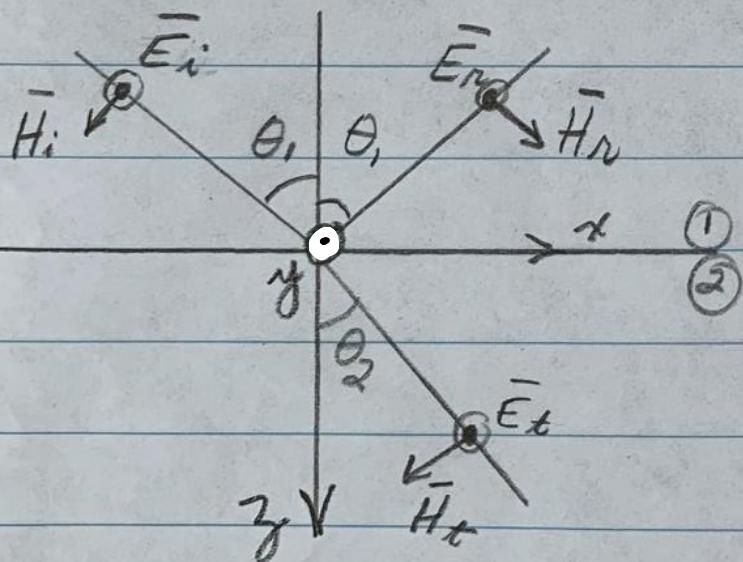
Pouvez-vous tracer le vecteur H_i dans les deux cas?



Cette décomposition permet de traiter les ondes $E_{i\parallel}$ et $E_{i\perp}$ comme deux ondes independantes

→ permet d'obtenir $E_{r\parallel}$ et $E_{t\parallel}$ de façon indépendante à $E_{r\perp}$ et $E_{t\perp}$.

i) Cas de E_\perp , Transverse Électrique, ou TE



- sens de \bar{E}_i , \bar{E}_r et \bar{E}_t défini positif dans le même sens

- sens positif de \bar{H}_i , \bar{H}_r et \bar{H}_t choisi pour avoir $\bar{E} \times \bar{H}$ dans le sens de \hat{n}

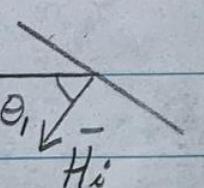
Pour une valeur de E_i donnée, on peut trouver les 5 autres valeurs, i.e E_n , E_t , H_i , H_n , H_t

5 équations : (1) $\frac{E_i}{H_i} = h_1$, (2) $\frac{E_n}{H_n} = h_1$, (3) $\frac{E_t}{H_t} = h_2$

et à $z=0$, (4) $\bar{E}_{tan,1} = \bar{E}_{tan,2}$, (5) $\bar{H}_{tan,1} = \bar{H}_{tan,2}$

$$(4) \quad \bar{E}_{tan,1} = E_i \hat{y} + E_n \hat{y} \quad \bar{E}_{tan,2} = E_t \hat{y}$$

$$\Rightarrow E_i + E_n = E_t \quad \text{à } z=0 \quad (4a)$$

$$(5)$$


$$\bar{H}_{tan,1} = -\hat{x} H_i \cos \theta_1 + \hat{x} H_n \cos \theta_1$$

$$\bar{H}_{tan,2} = -\hat{x} H_t \cos \theta_2$$

$$\Rightarrow (H_i - H_n) \cos \theta_1 = H_t \cos \theta_2 \quad (5a)$$

(1), (2), (3) dans (5a)

18

$$\frac{E_i - E_n}{h_1} \cos \theta_1 = \frac{E_t}{h_2} \cos \theta_2 \quad (5b)$$

$$(4a) \times \frac{\cos \theta_2}{h_2} = \frac{E_t \cos \theta_2}{h_2} \quad (5c)$$

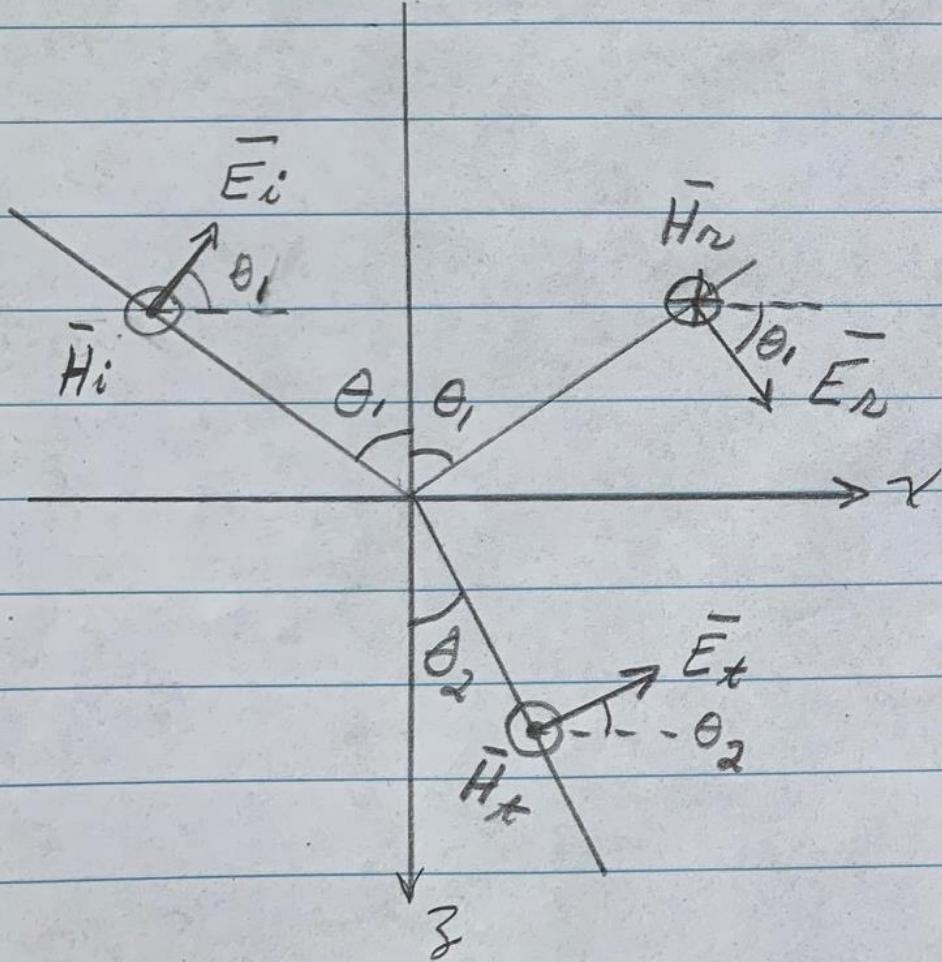
$$(E_i + E_n) \frac{\cos \theta_2}{h_2} = (E_i - E_n) \frac{\cos \theta_1}{h_1}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{E_{n\perp}}{E_{i\perp}} = \Gamma_\perp = \frac{h_2 \cos \theta_1 - h_1 \cos \theta_2}{h_2 \cos \theta_1 + h_1 \cos \theta_2}}$$

$$(4a) \quad \frac{E_i + E_n}{E_i} = \frac{E_t}{E_i} \rightarrow 1 + \Gamma_\perp = T_\perp$$

$$\boxed{T_\perp = \frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2 h_2 \cos \theta_1}{h_2 \cos \theta_1 + h_1 \cos \theta_2}}$$

ii) Cas de E_H , Transverse Magnétique ou TM



- sens positif de \bar{E}_i , \bar{E}_r et \bar{E}_t
défini pour avoir composante tan-
gentielle en direction + x

- sens positif de \bar{H} défini pour avoir
 $\bar{E} \times \bar{H}$ dans le sens de \hat{n}

$$\begin{aligned} \alpha_3 = 0 \quad \bar{E}_{\text{tan},1} &= \bar{E}_{\text{tan},2} \rightarrow E_i \cos \theta_1 + E_n \cos \theta_1 = E_t \cos \theta_2 \quad (\hat{x}) \\ \bar{H}_{\text{tan},1} &= \bar{H}_{\text{tan},2} \rightarrow H_i - H_n = H_t \quad (\hat{y}) \end{aligned}$$

Avec $E_i/H_i = h_1$, $E_n/H_n = h_2$ et $E_t/H_t = h_3$ on trouve :

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{n\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{h_2 \cos \theta_2 - h_1 \cos \theta_1}{h_2 \cos \theta_2 + h_1 \cos \theta_1}$$

Avec

$$E_i \cos \theta_1 + E_n \cos \theta_1 = E_t \cos \theta_2$$

$$E_i \cos \theta_2$$

$$\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} (1 + \Gamma_{\parallel}) = \frac{E_t}{E_i} = T_{\parallel}$$

$$(NB: T_{\parallel} \neq 1 + \Gamma_{\parallel})$$

$$T_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 h_2 \cos \theta_1}{h_2 \cos \theta_2 + h_1 \cos \theta_1}$$

III.5 Calcul des champs

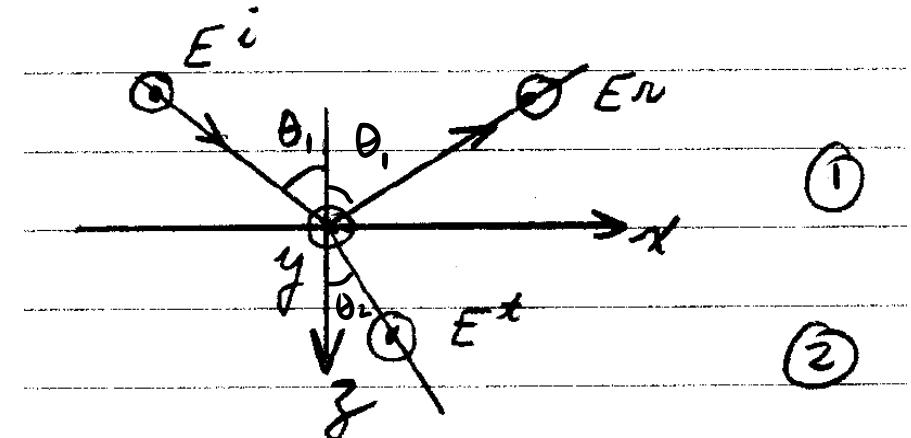
- Exemple de E_{\perp}

$$\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\perp} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}_r = E_0 \Gamma_{\perp} \hat{\perp} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$$

$$\mathbf{H}_1 = \nabla \times \mathbf{E}_1 / (-j\omega\mu_1)$$



$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{E}_t = E_0 T_{\perp} \hat{\perp} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H}_2 = \nabla \times \mathbf{E}_2 / (-j\omega\mu_2)$$

- Exemple de E_{\perp}

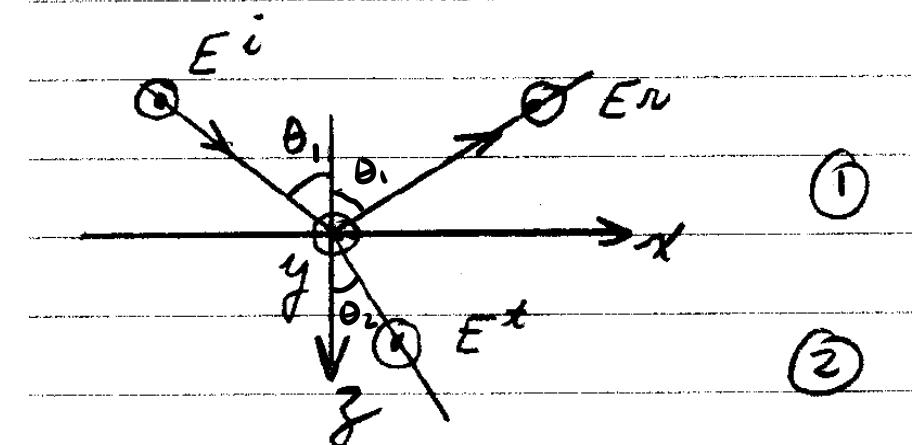
$$\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)}$$

$$\mathbf{E}_r = E_0 \Gamma_{\perp} \hat{\mathbf{y}} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$$

$$= E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_1} (e^{-j\beta_1 z \cos \theta_1} + \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 z \cos \theta_1})$$

$$\mathbf{H}_1 = \nabla \times \mathbf{E}_1 / (-j\omega \mu_1)$$



$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{E}_t = E_0 T_{\perp} \hat{\mathbf{y}} e^{-j\beta_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}$$

$$\mathbf{H}_2 = \nabla \times \mathbf{E}_2 / (-j\omega \mu_2)$$

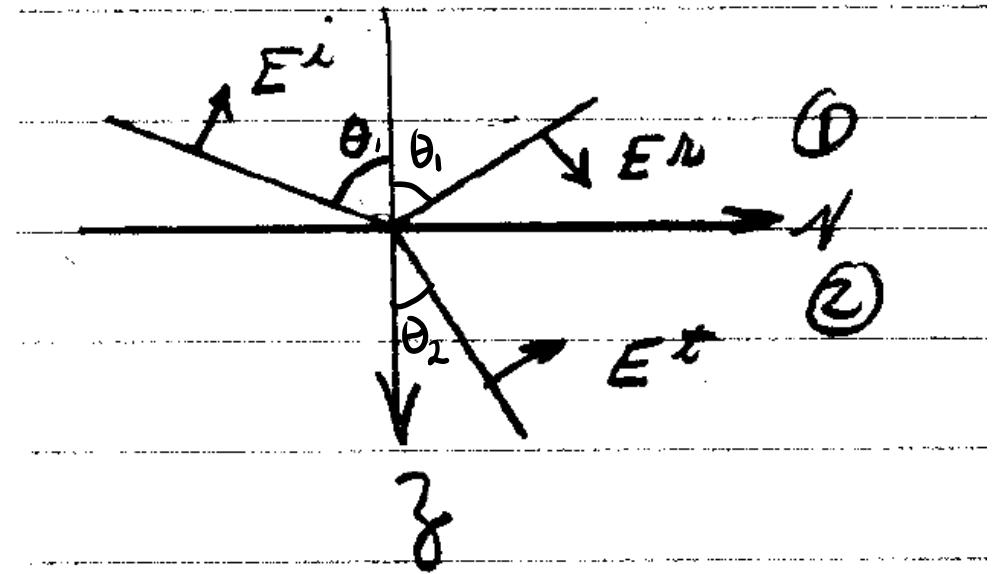
- Exemple de E_{\parallel}

$$\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{l}}_i e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}_r = E_0 \Gamma_{\parallel} \hat{\mathbf{l}}_r e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$$

$$\mathbf{H}_1 = \nabla \times \mathbf{E}_1 / (-j\omega\mu_1)$$



$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{E}_t = E_0 T_{\parallel} \hat{\mathbf{l}}_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H}_2 = \nabla \times \mathbf{E}_2 / (-j\omega\mu_2)$$

Cas de E_{\parallel}

$$\mathbf{E}_i = E_0(\hat{x} \cos \theta_1 - \hat{z} \sin \theta_1) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)}$$

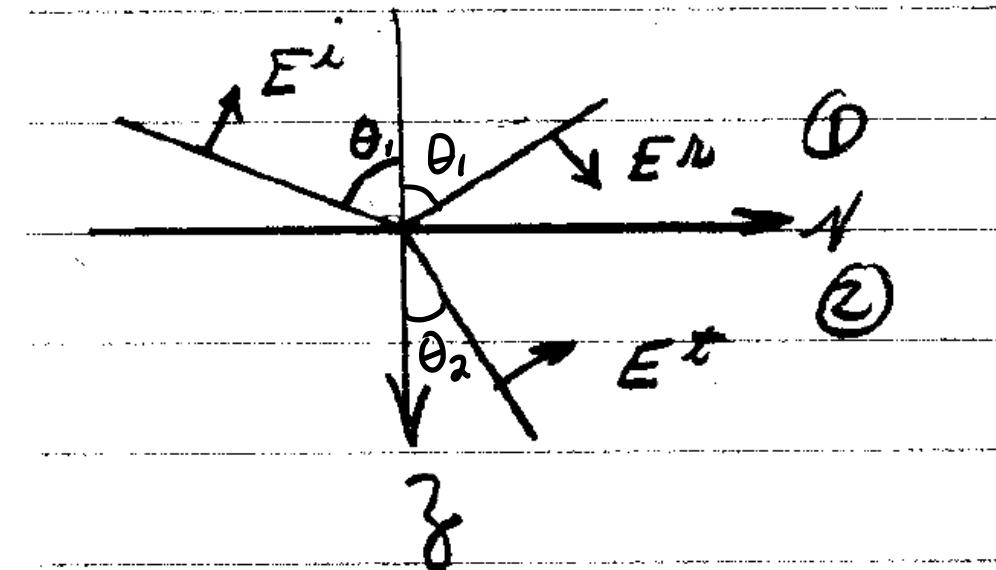
$$\mathbf{E}_r = E_0 \Gamma_{\parallel} (\hat{x} \cos \theta_1 + \hat{z} \sin \theta_1) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$$

$$= E_0 \hat{x} \cos \theta_1 e^{-j\beta_1 x \sin \theta_1} (e^{-j\beta_1 z \cos \theta_1} + \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 z \cos \theta_1}) + \dots$$

$$\dots E_0 \hat{z} \sin \theta_1 e^{-j\beta_1 x \sin \theta_1} (-e^{-j\beta_1 z \cos \theta_1} + \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 z \cos \theta_1})$$

$$\mathbf{H}_1 = \nabla \times \mathbf{E}_1 / (-j\omega \mu_1)$$



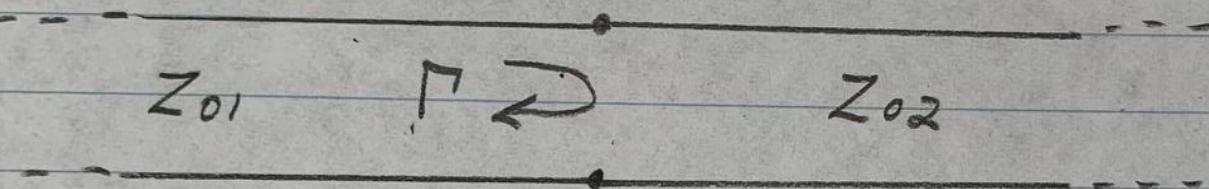
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{E}_t = E_0 T_{\parallel} (\hat{x} \cos \theta_2 - \hat{z} \sin \theta_2) \dots e^{-j\beta_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}$$

$$\mathbf{H}_2 = \nabla \times \mathbf{E}_2 / (-j\omega \mu_2)$$

III.6 Transmission totale

ligne de transmission:

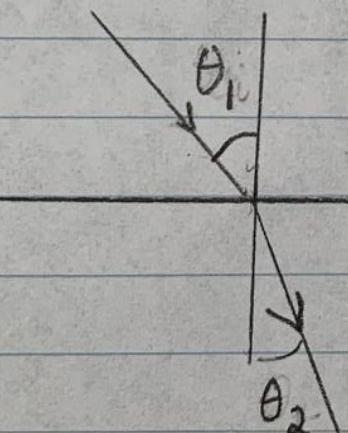


- transmission totale si $\Gamma = 0$, i.e. si $Z_{01} = Z_{02}$

onde plane:

$$\epsilon_{r1} \neq \epsilon_{r2}$$

$$\mu_1 = \mu_2$$



$$\frac{①}{②}$$

on a que :

$$\Gamma = \frac{n_{2,\tan} - n_{1,\tan}}{n_{2,\tan} + n_{1,\tan}}$$

$$\rightarrow \Gamma = 0 \text{ si } n_{1,\tan} = n_{2,\tan}$$

i) Cas de E_{\parallel}^i

$$n_{\text{tan}} = n_{\text{milieu}} \cos \theta$$

$$n_{2,\text{tan}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_2$$

$$n_{1,\text{tan}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_1$$

$$\Gamma_{\parallel} = 0 \text{ si}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_1$$

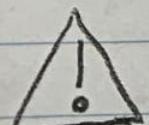
Snell:

$$\sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sin \theta_2 = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \theta_1$$

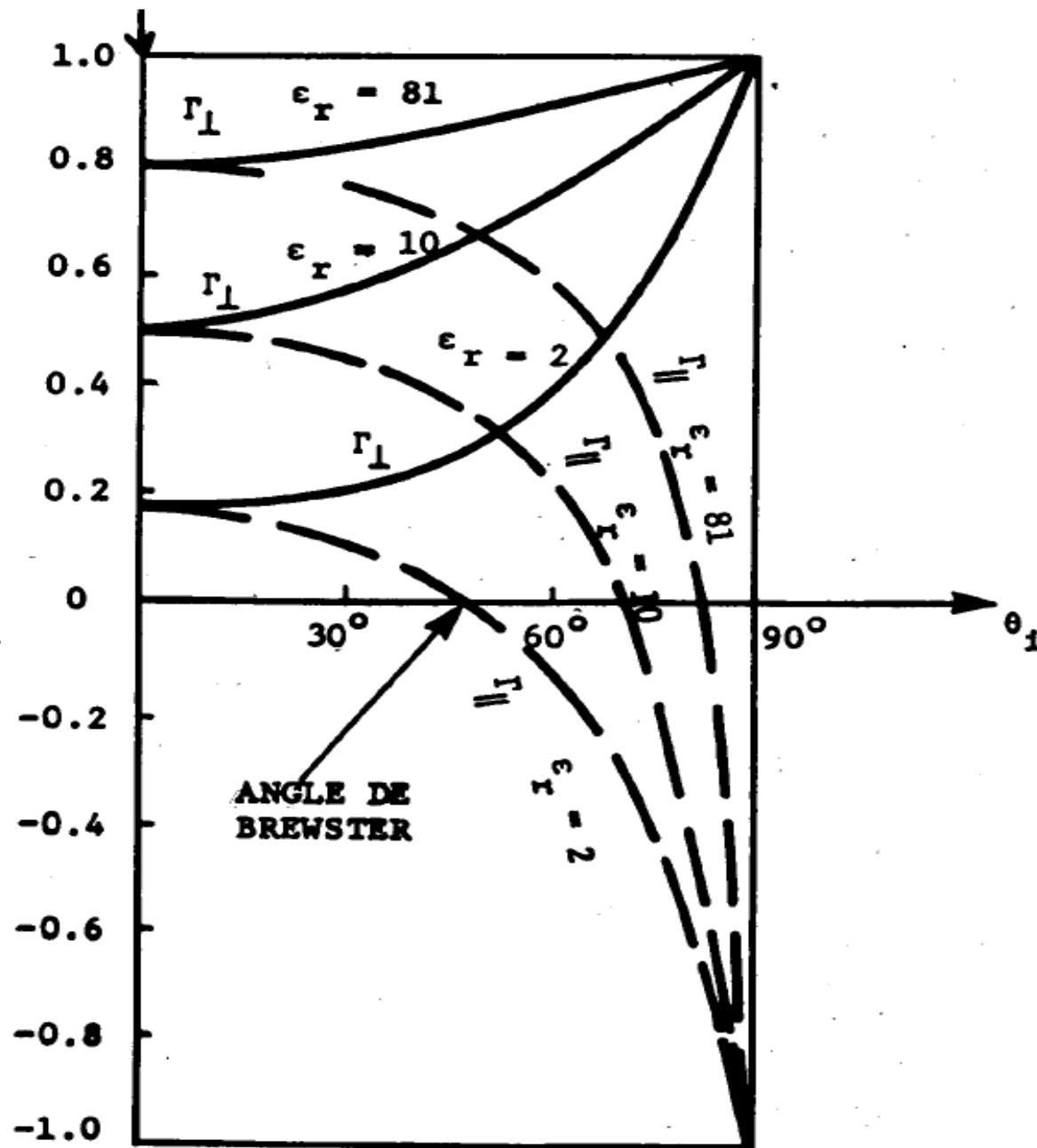
$$2 \text{ egs } 2 \text{ inc. } \dots \tan \theta_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

θ_1 appelé angle de Brewster: θ_B

$$\boxed{\tan \theta_B = \frac{N_2}{N_1}}$$



ATTENTION: $\Gamma_{\parallel} = 0$ ne veut pas dire $T_{\parallel} = 1$



ii) Cas de E_{\perp}^i

$$h_{2,\tan} = \frac{h_2}{\cos \theta_2} \quad h_{1,\tan} = \frac{h_1}{\cos \theta_1}$$

Est-il possible d'avoir $\Gamma = 0$, i.e. $h_{1,\tan} = h_{2,\tan}$
ou $h_1 \cos \theta_2 = h_2 \cos \theta_1$,

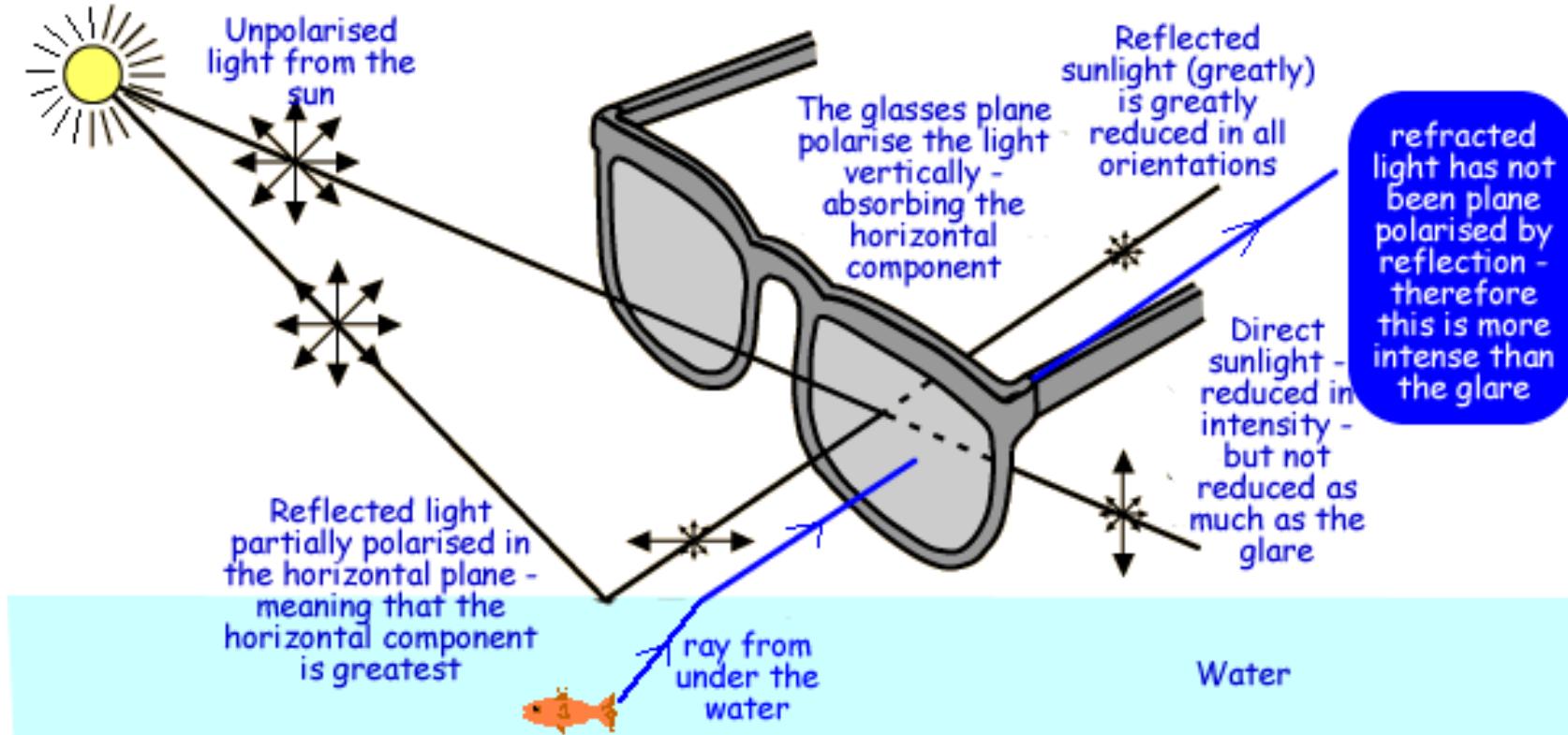
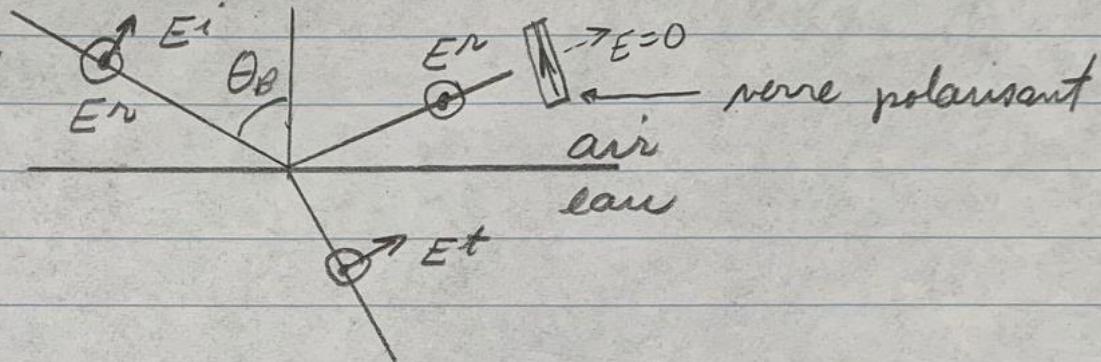
- $\epsilon_1 \neq \epsilon_2, \mu_1 = \mu_2$
selon Snell, si $\epsilon_1 < \epsilon_2 \rightarrow \theta_2 < \theta_1 \rightarrow \boxed{\cos \theta_2 > \cos \theta_1}$
 $\rightarrow \boxed{h_1 > h_2}$

impossible de satisfaire
l'égalité (ni résultat si
 $\epsilon_1 > \epsilon_2$)

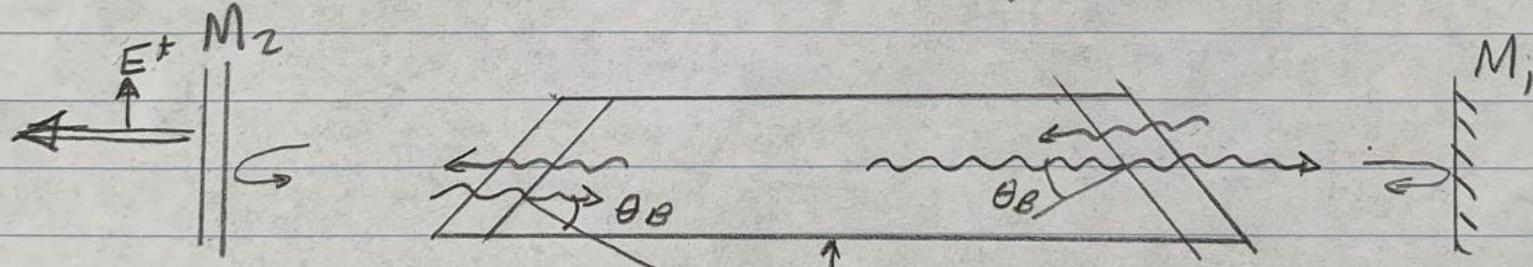
- transmission totale impossible pour cette polarisation
 \hookrightarrow (par contre possible si $\mu_1 \neq \mu_2$)

iii) Applications:

- polarisation par réflexion; lunettes polarisantes

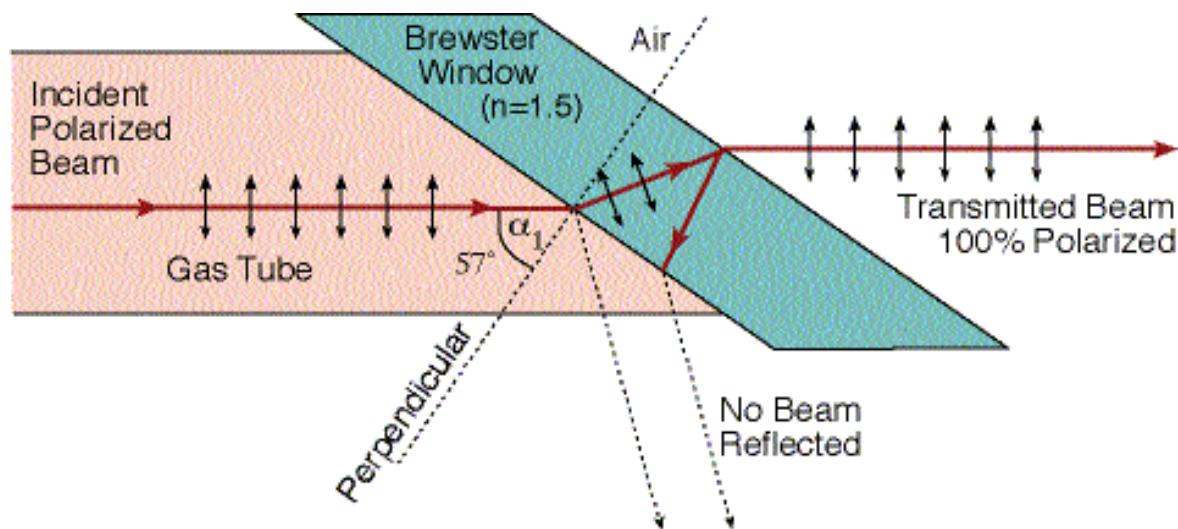
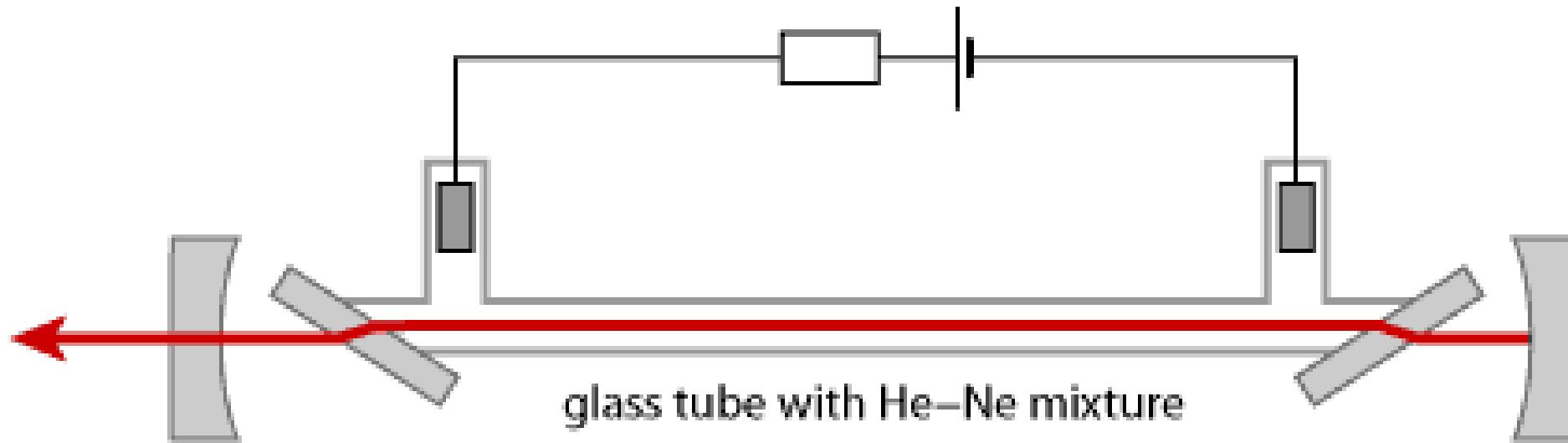


- fenêtres d'un laser à gaz



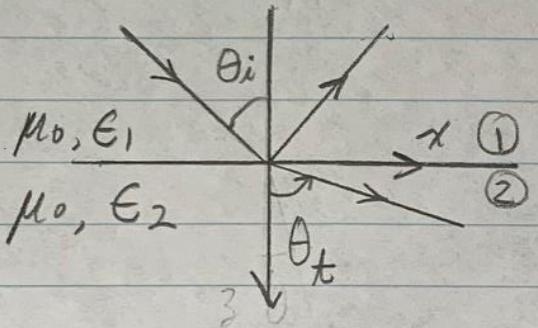
tube de verre avec décharge gazeuse

- fenêtres transparentes, pas de pertes par réflexion
- lumière sortant du laser polarisée linéairement



III.7 Réflexion totale

Peut-on avoir $|n| = 1$?



$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

$$0 \leq \theta_i < 90^\circ \rightarrow 0 \leq \sin \theta_i \leq 1$$

→ donc, si θ_i élevé et $n_1 > n_2$ on obtient
 $\sin \theta_t > 1$, impossible si θ_t réel.

Quel est le sens physique de ce résultat ?

→ pour valeurs faible de θ_i on peut avoir
 $\sin \theta_t \leq 1$

angle critique θ_c : $\sin \theta_t = 1 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_c$

ou $\sin(\theta_c) = n_2/n_1$

$$\theta_i > \theta_c \rightarrow \sin \theta_t > 1$$

$$\theta_i < \theta_c \rightarrow \sin \theta_t < 1$$

Consequences sur Γ :

i) Γ_{\parallel}

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_t - n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_t + n_1 \cos \theta_i}$$

$$\cos \theta_i = \cos \theta_i$$

$$\cos \theta_t = ? \text{ (si } \sin \theta_t > 1)$$

$$\begin{aligned}\cos \theta_t &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = j \sqrt{\sin^2 \theta_t - 1} \\ &= j \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}\end{aligned}$$

$$= \pm j \left| \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1} \right| = \pm j q$$

avec $q \geq 0$

Racine +ive ou -ive?

Exammons les champs transmis:

$$\bar{E}_t = \bar{C} \exp \left\{ -j\beta_2 (n_{tx} x + n_{tz} z) \right\}$$

$$= \bar{C} \exp \left\{ -j\beta_2 (\sin \theta_t x + \cos \theta_t z) \right\}$$

Pour un x donné, on a

$$\begin{aligned}\bar{E}_t &\propto e^{-j\beta_2 \cos \theta_t z} = e^{-j\beta_2 (\pm j q) z} \\ &= e^{\pm \beta_2 q z}\end{aligned}$$

On a $\beta_2 > 0$, $q > 0$, $z > 0$

signe $(+)$ $\rightarrow |\bar{E}_t|$ augmente exponentiellement avec z
 \rightarrow physiquement impossible

signe $(-)$ $\rightarrow |\bar{E}_t|$ s'atténue avec z
 \Rightarrow onde évanescante \neq O.P.U.

Donc, on a

$$\cos \theta_t = -j \sqrt{-\dots}$$

$$\cos \theta_t = -j \sqrt{\dots}$$

Il en résulte que :

$$\Gamma_{II} = \frac{h_2 (-j \sqrt{\frac{N_1^2}{N_2} \sin^2 \theta_i - 1}) - h_1 \cos \theta_i}{h_2 (-j \sqrt{\frac{N_1^2}{N_2} \sin^2 \theta_i - 1}) + h_1 \cos \theta_i}$$

$$h_2 (-j \sqrt{\frac{N_1^2}{N_2} \sin^2 \theta_i - 1}) + h_1 \cos \theta_i$$

(i) Γ_I

Par un raisonnement semblable on trouve :

$$\Gamma_I = \frac{h_2 \cos \theta_i + j h_1 \sqrt{\dots}}{h_2 \cos \theta_i - j h_1 \sqrt{\dots}}$$

Remarques :

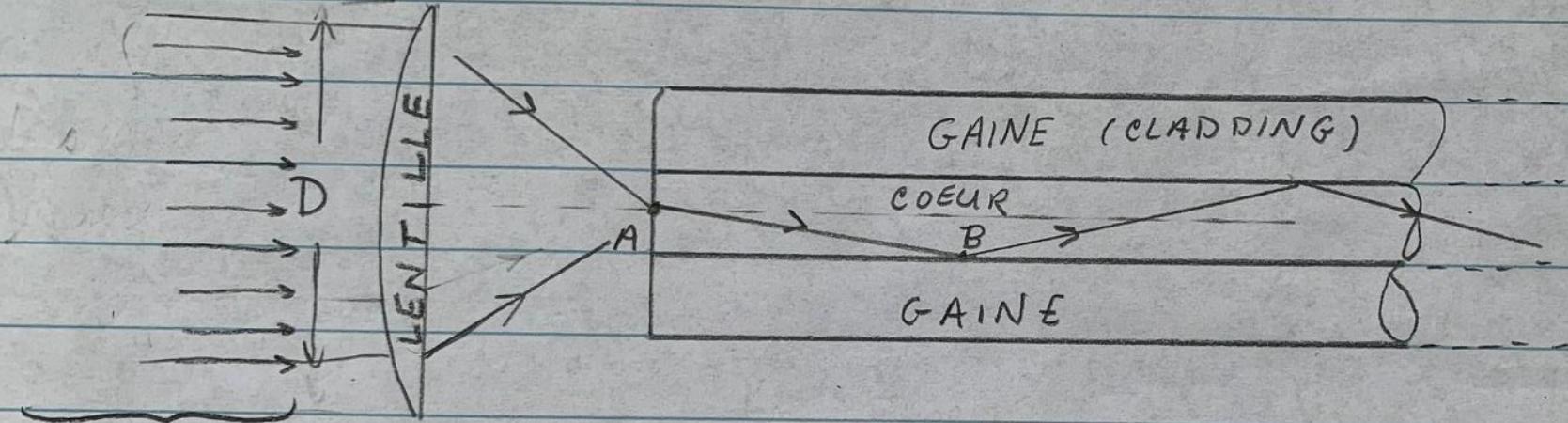
- Γ_{\parallel} et Γ_{\perp} sont sous la forme :

$$\Gamma = \frac{a + jb}{a - jb}$$

$$- \text{ donc } |\Gamma_{\parallel}| = |\Gamma_{\perp}| = 1$$

- b dépend de θ_i → la phase de Γ change avec θ_i , et changement de phase pas le même pour Γ_{\perp} et Γ_{\parallel}

Exemple : Couplage de lumières dans une fibre optique



faisceau
laser

| F |

Valeurs typiques :

cladding : $125\mu\text{m}$

coeur : $8\mu\text{m}$ (mono)
 $50\mu\text{m}$ (multi)

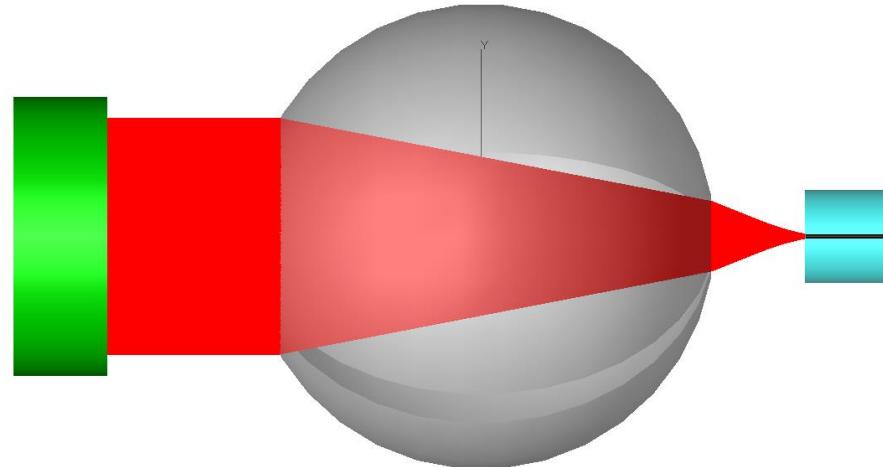
$\lambda : 1.3, 1.55\mu$

Déterminez le rapport F/D de la lentille de couplage qui garantit "100%" de transmission dans le cœur de la fibre.

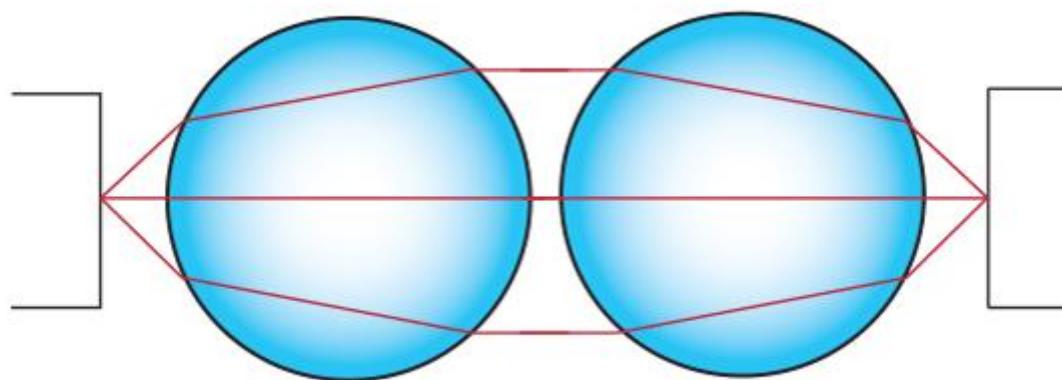
$$N_{\text{coeur}} = 1.4545$$

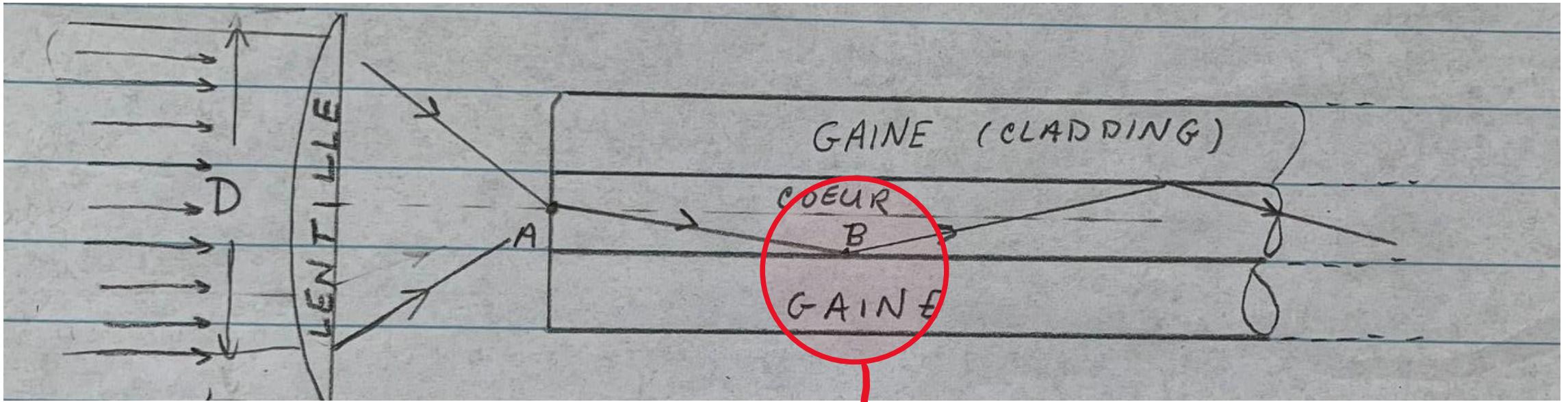
$$N_{\text{cladding}} = 1.45$$

Couplage d'un
rayon laser à une
fibre optique



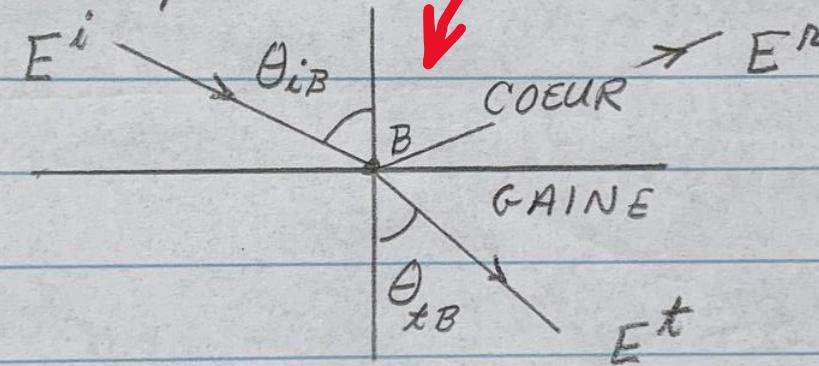
Couplage entre
deux fibres
optiques





Solution.

Pour ne pas perdre de signal dans la gaine il faut avoir une réflexion totale au point B



Se l'on voit sur a :

$$N_{\text{core}} \sin \theta_{iB} = N_{\text{cladding}} \sin \theta_{tB}$$

i.e

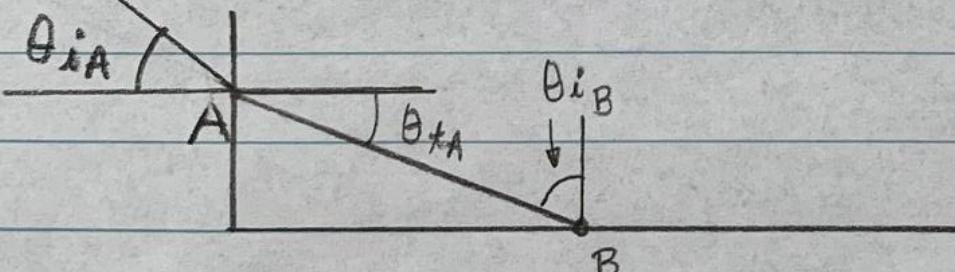
$$\sin \theta_{tB} = \frac{1.4545}{1.45} \sin \theta_{iB}$$

Pour avoir réfraction totale on doit avoir $\sin \theta_{tB} > 1$

$$\rightarrow \sin \theta_{iB} > 1.45 / 1.4545$$

$$\text{i.e } \theta_{iB} > 85.49^\circ$$

On peut en déduire θ_{tA} :



$$\text{on voit que } \theta_{iB} = 90^\circ - \theta_{tA}$$

$$\rightarrow 90^\circ - \theta_{tA} > 85.49^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{tA} < 4.508^\circ$$

Pour calculer θ_{ia} on utilise

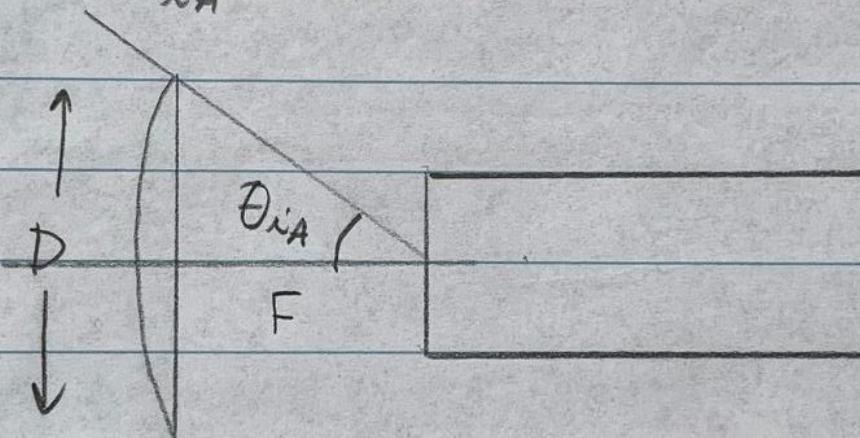
$$\sin \theta_{ia} = N_{coeur} \sin \theta_{ta}$$

à $\theta_{ta} = 4.508$ on a $\theta_{ia} = 6.56^\circ$

Comme θ_{ta} et θ_{ia} augmentent ensemble, alors il faudra que

$$\theta_{ia} < 6.56^\circ$$

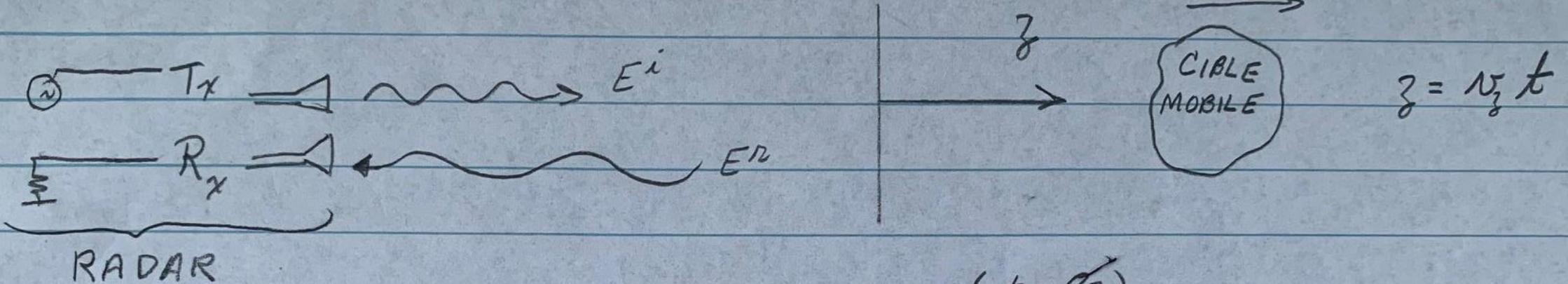
$$F/D = ?$$



on a $\frac{D}{2F} = \tan 6.56^\circ \rightarrow \frac{F}{D} = \frac{1}{2 \tan 6.56^\circ} = 4.34$

Il faudra donc que $\frac{F}{D} > 4.34$ pour capturer 100% du signal

III. 8 Effet Doppler



Champs complexes : dans le référentiel du radar

$$\left\{ \begin{array}{l} E^i = E_{0i} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E^n = \Gamma E_{0i} e^{j(\omega't + \beta'z)} \end{array} \right.$$

$$\beta = \frac{\omega}{c}$$

$$\beta' = \frac{\omega'}{c}$$

Sur l'obstacle on a en tout temps $E^n = \Gamma E^i$

i.e. $\Gamma E_{0i} e^{j(\omega't + \beta'z)} = \Gamma E_{0i} e^{j(\omega t - \beta z)}$

$$E_{0n} = \Gamma E_{0i}$$

$$\Rightarrow \omega' t + \beta' z = \omega t - \beta z$$

$$z/t = N_z$$

$$\beta'/\omega' = 1/c$$

$$\beta/\omega = 1/c$$

$$\omega' t \left(1 + \frac{\beta'}{\omega'} \frac{z}{t} \right) = \omega t \left(1 - \frac{\beta}{\omega} \frac{z}{t} \right)$$

$$\Rightarrow \omega' \left(1 + \frac{N_z}{c} \right) = \omega \left(1 - \frac{N_z}{c} \right)$$

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = -(\omega' + \omega) \frac{N_z}{c}$$

$$\Delta\omega = -(\omega + \Delta\omega + \omega) N_z/c$$

$$\rightarrow \Delta\omega = -2\omega N_z / (c(1 + N_z/c)) ; \text{ Mach 1: } 330 \text{ m/s} \rightarrow N_z \ll c \rightarrow \Delta\omega \approx -\frac{2\omega N_z}{c}$$

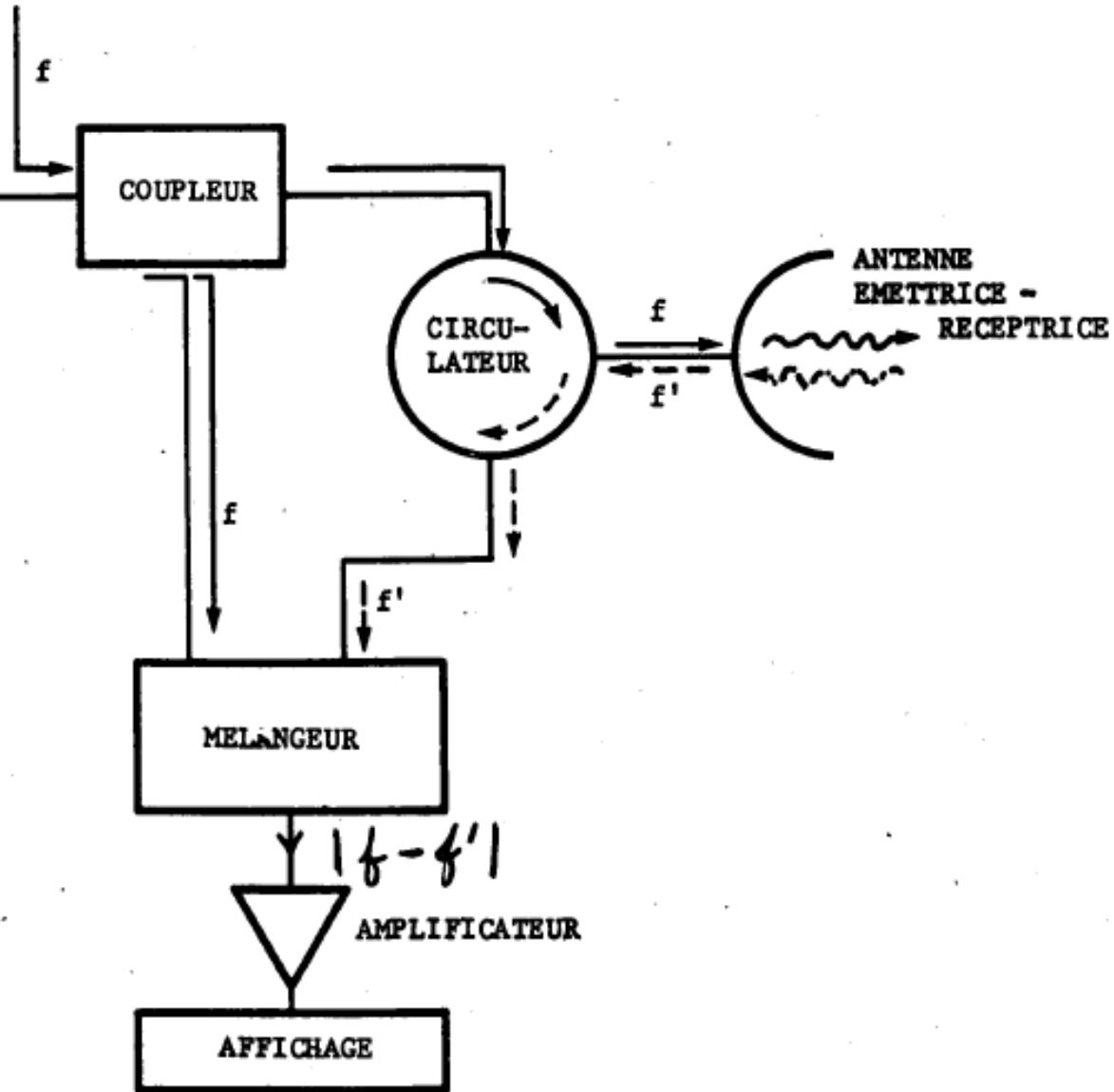
On définit la fréquence Doppler $f_d = \frac{\omega' - \omega}{2\pi}$

d'où

$$2\pi f_d \approx -2\omega N_z/c = -\frac{2N_z}{c} \quad 2\pi f = -4\pi N_z \frac{1}{\lambda}$$

$$f_d = -\frac{2N_z}{\lambda}$$

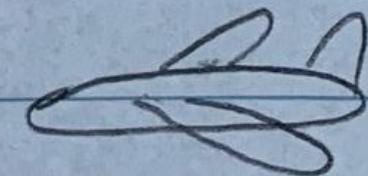
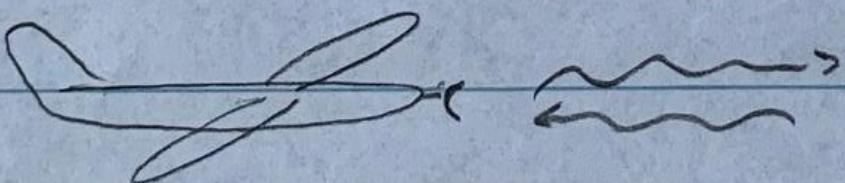
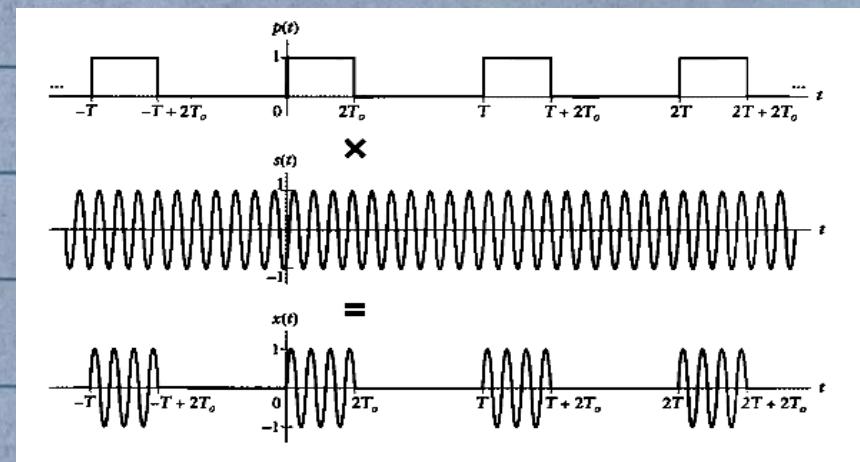
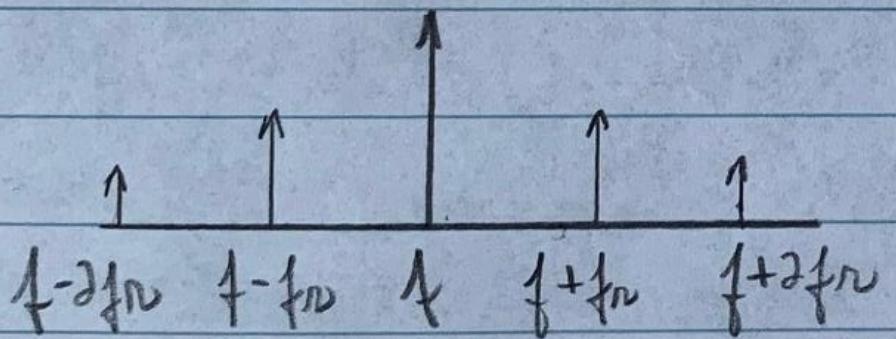
GENERATEUR DE
SIGNALS EN
HYPERFREQUENCES

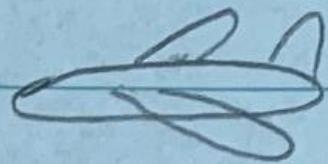
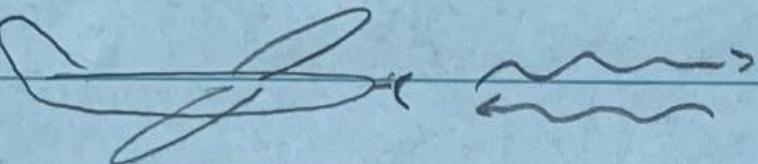


Ambiguité:

Le signal émis par le radar est pulsé avec un taux de répétition f_r

Le spectre d'émission est donc : $f, f \pm f_r, f \pm 2f_r, \dots$

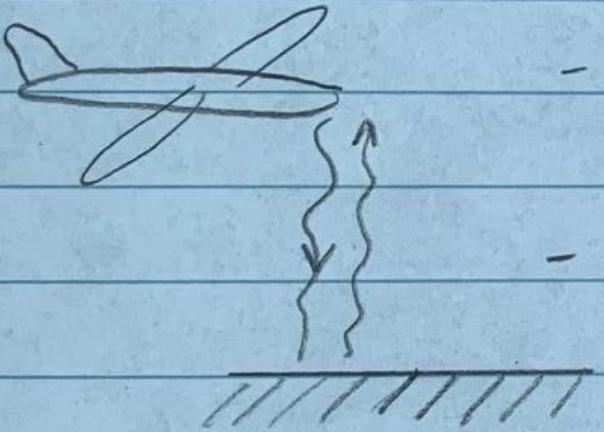




Le spectre à la réception est décalé de f_d :

$f + f_d$, $f + f_d \pm f_r$, $f + f_d \pm 2f_r$, ...
 \downarrow signal d'intérêt.

Echo du sol:



- aucun effet Doppler car l'avion se déplace parallèlement au sol

- spectre réfléchi par le sol:

$$f, f \pm fr, f \pm 2fr$$

→ le signal $f + fr$ réfléchi par le sol peut être à la même fréquence que le signal d'intérêt $f + fd$ → impossible de dissocier le sol d'un obstacle mobile → "ambiguité".

→ Solution: utiliser une antenne directionnelle qui reçoit peu d'écho du sol.

Sol