ELE3500 - Ondes Électromagnétiques

Examen final

Résumé

Hiver 2018

Louis-Philippe Mathurin

Polytechnique de Montréal

04/05/2018

Table des matières

Liste des figures

Ce document est un résumé des équations se retrouvant dans le manuel de référence *Engineering Electromagnetics* de Kenneth R. Demarest [1]

1 Ondes Planes

1.1 Équations de base

$$k = \sqrt{-j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad [m^{-1}] \tag{1.1}$$

où k est le *wave number* du medium de transmission. La permittivité du matériau s'exprime

$$\epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r \tag{1.2}$$

avec $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}\ F \cdot m^{-1}$

La perméabilité magnétique du matériau est :

$$\mu = \mu_0 \times \mu_r \tag{1.3}$$

avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m$

La constante de propagation est :

$$\gamma = jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{1.4}$$

1.2 Ondes planes dans un média sans perte

Le *wave number* dans un milieu sans perte est :

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{1.5}$$

Tandis que la constante de propagation devient :

$$\gamma = \underbrace{\alpha}_{0} + j\underbrace{\beta}_{k} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{1.6}$$

Le champ électrique **E** est donné par :

$$\mathbf{E} = E_{xo}^{+} e^{-j\beta z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} + E_{xo}^{-} e^{+j\beta z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \tag{1.7}$$

$$\mathbf{E} = |E_{xo}^{+}|\cos(\omega t - \beta z + \theta^{+})\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} + |E_{xo}^{-}|\cos(\omega t + \beta z + \theta^{-})\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \tag{1.8}$$

La vélocité de la phase u_p et la longueur d'onde λ sont :

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad [m/s] \tag{1.9}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\omega}{u_p} \quad [m] \tag{1.10}$$

Dans le cas du vide $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, on a :

$$\mu_p = 3.0 \times 10^8\ [m/s]\ = c \tag{1.11}$$

L'impédance intrinsèque d'un milieu sans perte est :

$$\eta = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega] \tag{1.12}$$

Dans le vide, on a :

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_o}} \approx 377\ \Omega \tag{1.13}$$

Donc, le champ magnétique **H** s'exprime :

$$\mathbf{H} = \frac{E_{xo}^{+}}{\eta} e^{-j\beta z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} - \frac{E_{xo}^{-}}{\eta} e^{+j\beta z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \tag{1.14}$$

$$\mathbf{H} = \frac{|E_{xo}^{+}|}{\eta}\cos(\omega t - \beta z + \theta^{+})\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} - \frac{|E_{xo}^{-}|}{\eta}\cos(\omega t + \beta z + \theta^{-})\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \tag{1.15}$$

La figure suivante illustre ces deux champs se propageant dans la direction +z

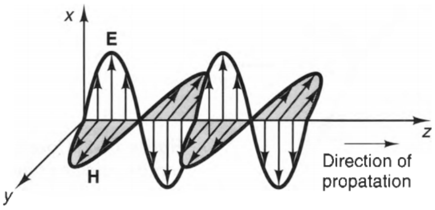

FIGURE 1.1 – Champs E et H se propageant dans la direction z

1.3 Propagation des ondes planes dans une direction arbitraire

Quand les ondes se propagent dans la direction +z, on a, pour le champ électrique et magnétique :

$$\mathbf{E} = \left[E_{xo}\mathbf{\hat{a}_x} + E_{yo}\mathbf{\hat{a}_y}\right] e^{-j\beta z} \tag{1.16}$$

$$\mathbf{H} = \left[\frac{E_{xo}}{\eta}\mathbf{\hat{a}_x} - \frac{E_{yo}}{\eta}\mathbf{\hat{a}_y}\right] e^{-j\beta z} \tag{1.17}$$

Il est possible de décrire une onde plane se propageant dans n'importe quelle direction en choisissant la direction du *wave number vector* **k** de manière qu'il pointe dans la direction de propagation étant :

$$\mathbf{k} = k\hat{a}_k \tag{1.18}$$

où $\hat{a}_k$ est la direction de propagation. Ainsi, les équations des champs deviennent :

$$\mathbf{E} = E_o e^{-jk\cdot r} \tag{1.19}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu}(k \times E_o)e^{-jk\cdot r} \tag{1.20}$$

$$E_o \cdot k = E_o \cdot k\hat{a}_k = 0 \tag{1.21}$$

où E_o est le vecteur de polarisation pouvant être n'importe quel vecteur perpendiculaire à k, c'est à dire : $E_o \cdot k = 0$. r est le vecteur position d'un point arbitraire $\rightarrow r = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$.

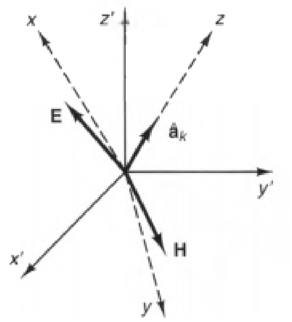

FIGURE 1.2 – Système de coordonnées pour représenté une onde plane se propageant dans une direction arbitraire

1.3.1 Exemple

Find the expression for the plane wave that propagates parallel to the xy-plane in the direction indicted in Figure 12-3. Assume that **E** has only a z-component.

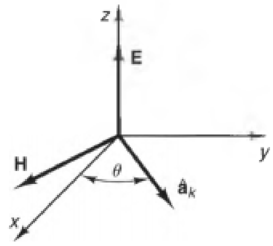

Figure 12-3 A plane wave propagating parallel to the xy-plane at an angle θ with respect to the x-axis.

Solution:

Since this wave propagates at an angle θ with respect to the x-axis, we can express the wave-number vector **k** as

$$\mathbf{k} = k(\cos\theta\,\hat{\mathbf{a}}_x + \sin\theta\,\hat{\mathbf{a}}_y).$$

As a result,

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k(x\cos\theta + y\sin\theta).$$

Since **E** has only a z-component, we also can write

$$\mathbf{E}_o = E_o\hat{\mathbf{a}}_z.$$

Substituting these expressions into Equation (12.35), we obtain

$$\mathbf{E} = E_o\hat{\mathbf{a}}_z e^{-jk(x\cos\theta + y\sin\theta)}.$$

To find **H**, we first evaluate $\mathbf{k}\times\mathbf{E}_o$:

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}_o = k(\cos\theta\,\hat{\mathbf{a}}_x + \sin\theta\,\hat{\mathbf{a}}_y)\times E_o\hat{\mathbf{a}}_z$$
$$= kE_o(\sin\theta\,\hat{\mathbf{a}}_x - \cos\theta\,\hat{\mathbf{a}}_y).$$

Finally, using $(\omega\mu)/k = \eta$, we have, from Equation (12.36),

$$\mathbf{H} = \frac{E_o}{\eta}(\sin\theta\,\hat{\mathbf{a}}_x - \cos\theta\,\hat{\mathbf{a}}_y)e^{-jk(x\cos\theta + y\sin\theta)}.$$

FIGURE 1.3 – Exemple d'onde se propageant dans une direction arbitraire

1.4 Polarisation

Une onde se propageant dans la direction +z est représentée comme suit :

$$\mathbf{E} = (|E_{xo}e^{j\theta_x}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + E_{yo}e^{j\theta_y}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}|)e^{-j\beta z} \tag{1.22}$$

où $|E_{xo}|$ et $|E_{yo}|$ sont l'amplitude max des composants x et y de **E** et θ_x et θ_y sont la phase de ces composants quand z=0.
Dans le domaine temporel, on a :

$$\mathbf{E} = E_{xo}\cos(\omega t - \beta z + \theta_x)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + E_{yo}\cos(\omega t - \beta z + \theta_y)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} \tag{1.23}$$

1.4.1 Polarisation Linéaire

En polarisation linéaire, on a $\theta_x = \theta_y = \theta$. On a donc, pour ce cas :

$$\mathbf{E} = (|E_{xo}|\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + |E_{yo}|\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y})\cos(\omega t - \beta z + \theta) \tag{1.24}$$

L'angle τ de la figure ci-dessous est donné par :

$$\tau = \tan^{-}1\frac{|E_{yo}|}{|E_{xo}|} \tag{1.25}$$

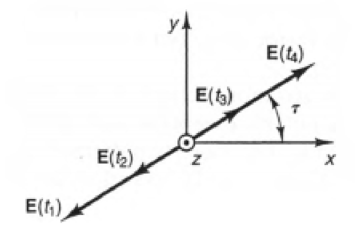

FIGURE 1.4 – Polarisation linéaire

1.4.2 Polarisation circulaire

La polarisation circulaire apparaît quand le composant orthogonal **E** est d'amplitude égal, mais que sa phase diffère de $\pm 90^o$.
Dans ce cas, on a :

$$\mathbf{E} = E_o(\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} \pm j\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y})e^{-j\beta z} \tag{1.26}$$
$$\mathbf{E} = E_o(\cos(\omega t - \beta z)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} \pm \sin(\omega t - \beta z)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}) \tag{1.27}$$

La figure de gauche de 1.5 montre la valeur de **E** pour différente valeur de t, à z=0 quand E_y devance E_x de 90^o (le signe positif dans (1.27)). La magnitude de **E** reste constante, mais sa direction tourne autour de z tous les $2\pi/\omega$. Comme **E** tourne vers la gauche, on appel cette polarisation **Polarisation circulaire gauche** ou *left-hand polarization (LHP).*

La figure de droite dans 1.5 représente le cas où $\theta_y = -90^o$, soit le signe négatif dans (1.27). Comme **E** tourne vers la droite, on appel cette polarisation, **Polarisation circulaire droite** ou *right-hand polarisation (RHP).*

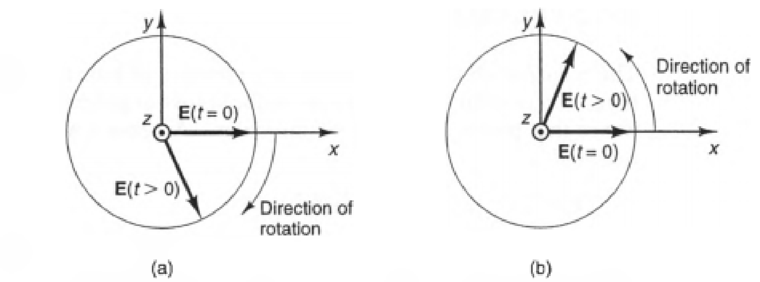

Figure 12-5 E-field rotation of $+z$ propagating, circularly polarized plane waves: a) Left hand polarization. b) Right-hand polarization.

FIGURE 1.5 – Polarisation circulaire

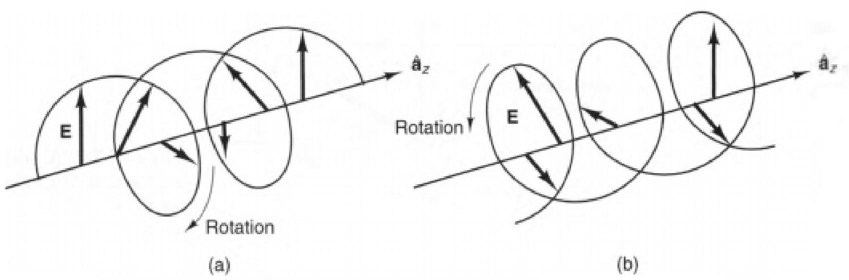

Figure 12-6 The helical paths traced by circularly polarized waves at fixed instants in time: a) Left-hand polarization. b) Right-hand polarization.

FIGURE 1.6 – Polarisation circulaire se propageant dans le temps

1.4.3 Polarisation elliptique

Pour la polarisation elliptique, il faut que $\theta_x - \theta_y \neq 0$.

En supposant

$$\theta_x = 0 \qquad \theta_y \neq 0$$
$$|A_x| = a \qquad |A_y| = b$$

On a, dans le plan z=0

$$E_x = a\cos(\omega t) \tag{1.28}$$
$$E_y = b\cos(\omega t + \theta) = b(\underbrace{\cos(\omega t)\cos(\theta)}_{E_x/a} - \underbrace{\sin(\omega t)\sin(\theta)}_{\sqrt{1-E_x/a}}) \tag{1.29}$$

Ce qui donne :

$$\frac{E_x^2}{a^2\sin^2\theta} + \frac{E_y^2}{b^2\sin^2\theta} - \frac{2E_xE_y\cos(\theta)}{ab\sin(\theta)} = 1 \tag{1.30}$$

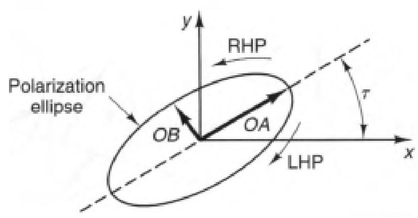

Figure 1.7 – Polarisation elliptique

1.5 Ondes planes dans un média avec perte

Le *wave-number* est donné par

$$k = \sqrt{-j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad [m^{-1}] \tag{1.31}$$

Quand k est réel, on a que le milieu est sans-perte tandis que s'il est complexe, le milieu est avec-perte.

La constante de propagation γ est donnée par :

$$\gamma = jk = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad [m^{-1}] \tag{1.32}$$

Quand il y a des pertes, γ est complexe et peut être exprimé comme :

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{1.33}$$

où α et β sont l'atténuation et la constante de phase respectivement et sont données par :

$$\alpha = \mathrm{Re}[\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}] \quad [Np/m] \tag{1.34}$$
$$\beta = \mathrm{Im}[\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}] \quad [m^{-1}] \tag{1.35}$$

On peut donc écrire :

$$k = \beta - j\alpha \tag{1.36}$$

Le champ électrique peut donc s'écrire :

$$\mathbf{E} = E_{xo}^{+}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\hat{\mathbf{a_x}} + E_{xo}^{-}e^{\alpha z}e^{j\beta z}\hat{\mathbf{a_x}} \tag{1.37}$$
$$\mathbf{E} = |E_{xo}^{+}|e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \theta^{+})\hat{\mathbf{a_x}} + |E_{xo}^{-}|e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \theta^{-})\hat{\mathbf{a_x}} \tag{1.38}$$

Il est possible de convertir α en $[dB/m]$ en utilisant cette formule :

$$\alpha[Np/m] = 0.1151 \times \alpha[dB/m] \tag{1.39}$$

Tout comme dans le cas sans perte, il est possible d'écrire la longueur d'onde λ et la vélocité de phase u_p

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{1.40}$$

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{1.41}$$

On a donc, pour le champ magnétique :

$$\mathbf{H} = \frac{E_{xo}^+}{\eta} e^{-\gamma z} \hat{\mathbf{a_y}} - \frac{E_{xo}^-}{\eta} e^{\gamma z} \hat{\mathbf{a_y}} \tag{1.42}$$

où l'impédance intrinsèque est donnée par :

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad [\Omega] \tag{1.43}$$

En exprimant η sous force de phaseur, $\eta = |\eta|\underline{/\theta_\eta}$, **H** peut aussi s'exprimer sous cette forme :

$$\mathbf{H} = \frac{|E_{xo}^+|}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+ - \theta_\eta) \hat{\mathbf{a_y}} - \frac{|E_{xo}^-|}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta^- - \theta_\eta) \hat{\mathbf{a_y}} \tag{1.44}$$

1.6 Ondes planes à incidence obliques

1.6.1 Polarisation perpendiculaire

La figure suivante représente la polarisation perpendiculaire.

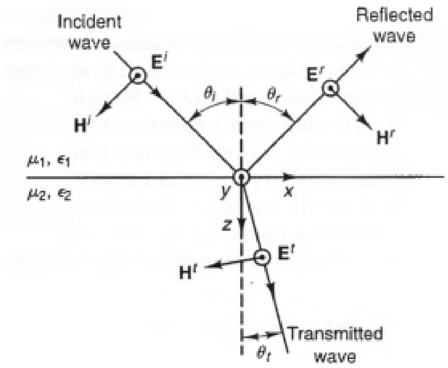

FIGURE 1.8 – Polarisation perpendiculaire

θ_i est l'angle entre la surface normale et la direction de la propagation.

Dans ce cas, le champ électrique **E** est perpendiculaire au plan contenant la surface normale et le vecteur de propagation du champ incident.

Les équations des champs électriques et magnétiques sont représentées ci-dessous.

$$\mathbf{E^i} = E^i \hat{\mathbf{a_y}} e^{-jk_1(z\cos\theta_i + x\sin\theta_i)} \tag{1.45}$$

$$\mathbf{H^i} = \frac{E^i}{\eta_1}(-\cos\theta_i \hat{\mathbf{a_x}} + \sin\theta_i \hat{\mathbf{a_z}}) e^{-jk_1(z\cos\theta_i + x\sin\theta_i)} \tag{1.46}$$

$$\mathbf{E^r} = \Gamma_\perp E^i \hat{\mathbf{a_y}} e^{-jk_1(z\cos\theta_r + x\sin\theta_r)} \tag{1.47}$$

$$\mathbf{H^r} = \frac{\Gamma_\perp E^i}{\eta_1}(\cos\theta_r \hat{\mathbf{a_x}} + \sin\theta_r \hat{\mathbf{a_z}}) e^{-jk_1(z\cos\theta_r + x\sin\theta_r)} \tag{1.48}$$

$$\mathbf{E^t} = T_\perp E^{-i} \hat{\mathbf{a_y}} e^{-jk_2(z\cos\theta_t + x\sin\theta_t)} \tag{1.49}$$

$$\mathbf{H^t} = \frac{T_\perp E^i}{\eta_2}(-\cos\theta_t \hat{\mathbf{a_x}} + \sin\theta_t \hat{\mathbf{a_z}}) e^{-jk_2(z\cos\theta_t + x\sin\theta_t)} \tag{1.50}$$

où $\Gamma_\perp$ et $T_\perp$ sont respectivement les coefficients de réflexion perpendiculaire et de transmission perpendiculaire.

La **Loi de Snell de la réfraction** cite que l'angle d'incidence et l'angle de réflection sont égales

$$\theta_i = \theta_r \tag{1.51}$$

Toujours selon cette loi, on a

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \tag{1.52}$$

où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction des deux milieux. L'indice de réfraction d'un milieu est définie comme suit :

$$n \equiv \frac{c}{u_p} \tag{1.53}$$

$$n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \tag{1.54}$$

Dans un milieu sans perte et non magnétique, $u_p = 1/\sqrt{\mu_o\epsilon}$, ce qui signifie que :

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \tag{1.55}$$

En ce qui concerne les coefficients perpendiculaires de réflexions et transmissions, on a

$$1 + \Gamma_\perp = T_\perp \tag{1.56}$$

et

$$1 - \Gamma_\perp = T_\perp \frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i} \tag{1.57}$$

En résolvant pour $\Gamma_\perp$ et $T_\perp$ on obtient :

$$\Gamma_\perp = \frac{E^r_\perp}{E^i_\perp} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{1.58}$$

$$T_\perp = \frac{E^t_\perp}{E^i_\perp} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{1.59}$$

Dans le cas ou le second milieu est un conducteur parfait, c-à-d $\eta_2 = 0$, on a :

$$\Gamma_\perp = -1 \tag{1.60}$$

$$T_\perp = 0 \tag{1.61}$$

1.6.2 Polarisation parallèle

La polarisation parallèle survient quand le champ électrique incident réside dans la plan d'incidence. Ce phénomène s'illustre à la figure 1.9

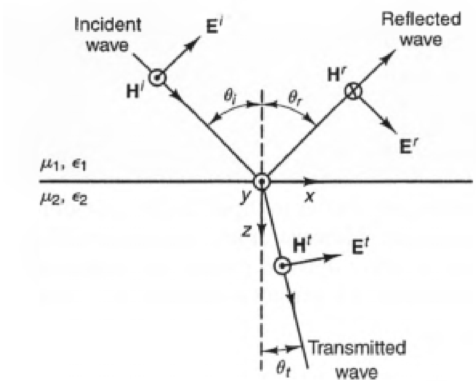

FIGURE 1.9 – Polarisation parallèle

Les équations correspondantes des champs sont représentées comme suit :

$$\mathbf{E^i} = E^i(\cos\theta_i\hat{\mathbf{a_x}} - \sin\theta_i\hat{\mathbf{a_z}})e^{-jk_1(z\cos\theta_i + x\sin\theta_i)} \quad (1.62)$$

$$\mathbf{H^i} = \frac{E^i}{\eta_1}\hat{\mathbf{a_y}}e^{-jk_1(z\cos\theta_i + x\sin\theta_i)} \quad (1.63)$$

$$\mathbf{E^r} = \Gamma_\parallel E^i(\cos\theta_r\hat{\mathbf{a_x}} + \sin\theta_r\hat{\mathbf{a_z}})e^{-jk_1(-z\cos\theta_r + x\sin\theta_r)} \quad (1.64)$$

$$\mathbf{H^r} = -\frac{\Gamma_\parallel E^i}{\eta_1}\hat{\mathbf{a_y}}e^{-jk_1(-z\cos\theta_r + x\sin\theta_r)} \quad (1.65)$$

$$\mathbf{E^t} = T_\parallel E^i(\cos\theta_t\hat{\mathbf{a_x}} - \sin\theta_t\hat{\mathbf{a_z}})e^{-jk_2(z\cos\theta_t + x\sin\theta_t)} \quad (1.66)$$

$$\mathbf{H^t} = \frac{T_\parallel E^i}{\eta_2}\hat{\mathbf{a_y}}e^{-jk_2(z\cos\theta_t + x\sin\theta_t)} \quad (1.67)$$

Tout comme le cas de la polarisation perpendiculaire, la **Loi de Snell** dicte :

$$\theta_i = \theta_r \quad (1.68)$$

$$\sin\theta_t = \frac{k_1}{k_2}\sin\theta_i = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \quad (1.69)$$

On a aussi, pour les coefficients de réflexions et transmissions parallèle :

$$1 + \Gamma_\parallel = T_\parallel\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \quad (1.70)$$

$$1 - \Gamma_\parallel = T_\parallel\frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (1.71)$$

Ce qui donne :

$$\Gamma_\parallel = \frac{E^r_\parallel}{E^i_\parallel} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \quad (1.72)$$

$$T_\parallel = \frac{E^t_\parallel}{E^i_\parallel} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \quad (1.73)$$

Dans le cas ou le second milieu est un conducteur parfait, c-à-d $\eta_2 = 0$, on a :

$$\Gamma_\parallel = -1 \quad (1.74)$$

$$T_\parallel = 0 \quad (1.75)$$

1.6.3 Angle de Brewster

La figure 1.10 montre $\Gamma_\perp$ et $\Gamma_\parallel$ en fonction de θ_i. Comme il est possible de voir, $\Gamma_\perp$ et $\Gamma_\parallel$ sont égaux quand $\theta_i = 0$, mais quand $\theta_i \to 90^o$, ils tendent vers +1 et -1, respectivement. L'angle θ_i où $\Gamma_\parallel = 0$ est notée **L'angle de Brewster** et est noté θ_B. Cette angle est aussi appelé **l'angle de polarisation**, car à cet angle, le champ réfléchi est toujours linéairement polarisé, avec le champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence.

$$\theta_B = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{1}{1+\epsilon_1/\epsilon_2}}\right] = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right) \quad (1.76)$$

Ce qui correspond, pour un milieu sans perte et non magnétique :

$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (1.77)$$

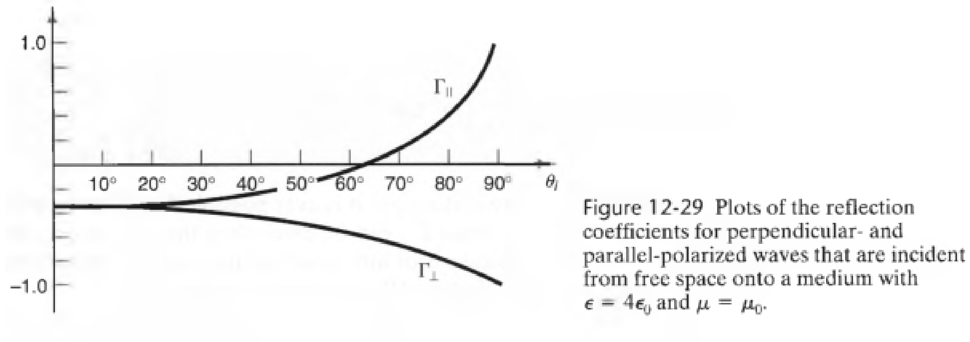

FIGURE 1.10 – Angle de Brewster

L'angle de Brewster est utilisé pour les lunettes polarisées. En effet, la lumière du Soleil est non-polarisée, ce qui veut dire que l'état de polarisation est aléatoire et fluctue rapidement. La réflection des rayons lumineux sur la plupart des surfaces contient plus de puissance dans le composant perpendiculaire que dans le composant parallèle, si l'angle d'incidence est près de l'angle de Brewster. Cette situation est exposée à la figure 1.11. Quand l'angle d'incidence est près de l'angle de Brewster, la plupart de la puissance de l'onde réfléchie est polarisée parallèle à la terre. Si ces réflexions sont vues aux travers de lentilles qui laissent seulement passer la lumière polarisée perpendiculairement à la terre, très peu de réflexion sera perçue. C'est ce qu'on appel des lentilles de polarisation.

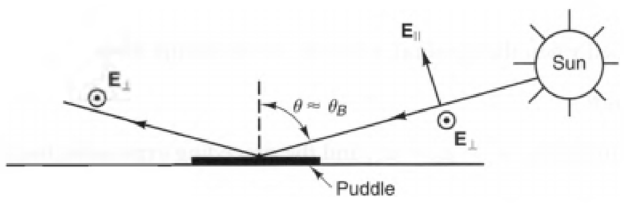

FIGURE 1.11 – Lumière provenant du soleil et angle de Brewster

1.6.4 Transmission totale

On a une transmission totale si

$$\Gamma = 0 \qquad \text{donc} \tag{1.78}$$

$$Z_{01} = Z_{02} \tag{1.79}$$

(1) Cas de $E^i_{\|}$

On a la transmission totale si

$$\tan\theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \tag{1.80}$$

où $\theta_1 = \theta_B \rightarrow$ angle de Brewster

(2) Cas de $E^i_{\perp}$

Il est impossible dans ce cas d'avoir $\Gamma_\perp = 0$ car on a toujours $\eta_1 \cos\theta_2 > \eta_2 \cos\theta_1$

1.6.5 Réflexion totale et angle critique

La loi de Snell impose que l'angle de transmission θ_t soit plus grand que l'angle d'incidence θ_i. L'angle d'incidence qui produit $\theta_t = 90^o$ se nomme **l'angle critique** θ_c.

$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{1.81}$$

Pour un milieu non magnétique, on a :

$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right) \tag{1.82}$$

Dans le cas où θ_i est plus grand que l'angle critique, la loi de Snell prédit que $\sin\theta_t > 1$

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \quad (\theta_i > \theta_c) \tag{1.83}$$

Ce qui veux dire que $\cos\theta_t$ est un nombre imaginaire quand $\theta_i > \theta_c$. On peut donc écrire

$$\cos\theta_t = -jA \tag{1.84}$$

où A est un nombre réel positif, définit par :

$$A = \sqrt{\sin^2\theta_t - 1} = \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1} \tag{1.85}$$

On a donc, pour le coefficient de réflexion perpendiculaire :

$$\Gamma_\perp = 1\underline{/\phi_\perp} \quad (\theta_i > \theta_c) \tag{1.86}$$

Où $\phi_\perp$ est définit par :

$$\phi_\perp = 2\tan^{-1}\left[\frac{\eta_1\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1}}{\eta_2\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\right] \tag{1.87}$$

Quand les deux milieux sont non-magnétiques, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $n_1^2 = \epsilon_1/\epsilon_o$ et $n_2^2 = \epsilon_2/\epsilon_o$, on a :

$$\phi_\perp = 2\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - \epsilon_2/\epsilon_1}}{\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\right] \quad \text{(Milieux non-magnétiques)} \tag{1.88}$$

Les équations des champs magnétiques et électriques transmis sont :

$$\mathbf{E^t} = T_\perp E^i \hat{\mathbf{a_y}} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_{2z}x} \tag{1.89}$$

$$\mathbf{H^t} = \frac{T_\perp E^i}{\eta_2}(jA\hat{\mathbf{a_x}} + \sin\theta_t \hat{\mathbf{a_z}}) e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_{2z}x} \tag{1.90}$$

Avec

$$T_\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i - j\eta_1 A} \tag{1.91}$$

$$\alpha_2 = k_2 A = k_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1} \quad [Np/m] \tag{1.92}$$

$$\beta_{2z} = k_2\sin\theta_t = k_2\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \quad [m^{-1}] \tag{1.93}$$

Pour la polarisation parallèle, on a

$$\Gamma_\parallel = 1\underline{/\phi_\parallel} \quad (\theta_i > \theta_c) \tag{1.94}$$

Avec :

$$\phi_\parallel = -180^o + 2\tan^{-1}\left[\frac{\eta_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1}}{\eta_1\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\right] \tag{1.95}$$

Quand les deux milieux sont non-magnétiques, on obtient :

$$\phi_\parallel = -180^o + 2\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2}\sin^2\theta_i - \epsilon_1/\epsilon_2}}{\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\right] \quad \text{(Milieux non-magnétiques)} \tag{1.96}$$

Le coefficient de transmission parallèle est alors :

$$T_\parallel = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{-jA\eta_2 + \eta_1\cos\theta_i} \tag{1.97}$$

2 Guides d'ondes

Cette section devrait être utilisée en complément avec les notes de cours du professeur Jean-Jacques Laurin sur les guides d'ondes, soit

- Champs_Ez_Hz.pdf
- Equations_de_maxwell_guides.pdf
- Guides_circulaires.pdf
- Guides_dielectriques.pdf

2.1 Modes de guides d'ondes

Mode TEM Dans ce mode, on a $E_z = H_z = 0$ et $h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0$. Les ondes planes et les lignes de transmission sont des exemples de ce mode. Il faut au moins deux conducteurs séparés pour contenir se mode, comme les câbles coaxiaux.

Mode TE *Transverse-electric modes*, parfois appelé mode-H possède la caractéristique $E_z = 0$ à tous les points du guide d'onde, ce qui signifie que le vecteur du champ électrique est toujours perpendiculaire à l'axe du guide d'onde. Ces modes sont toujours possibles dans les guides métalliques avec des diélectriques uniformes

Mode TM *Transverse-magnetic modes*, parfois appelés modes-E, sont représentés par $H_z = 0$ à tous les points du guide d'onde, ce qui signifie que le vecteur du champ magnétique est perpendiculaire à l'axe du guide d'onde. Ces modes sont aussi possible dans les mêmes conditions que le mode TE

Mode EH Dans ces modes hybrides, E_z et H_z ne sont pas égal à 0, mais les caractéristiques des champs transversaux sont contrôlées plus par E_z que par H_z. Ces modes sont possibles dans les guides métalliques avec un diélectriques non-homogène ainsi que dans la fibre optique.

Mode HE Dans ces modes hybrides, E_z et H_z ne sont pas égal à 0, mais les caractéristiques des champs transversaux sont contrôlées plus par H_z que par E_z. Ces modes sont possibles dans les guides métalliques avec un diélectriques non-homogène ainsi que dans la fibre optique.

Tel que mentionné, les modes TEM ont déjà été étudiés dans la partie des ondes planes ainsi que les lignes de transmission. Ces modes ont des propriétés intéressantes tel qu'ils peuvent se propager sans aucune atténuation, à n'importe quelle fréquence, quand les pertes du matériel sont nulles. Pour comprendre pourquoi ces modes ont cette caractéristique, on note que $h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0$, ce qui donne :

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \qquad \text{(Modes TEM)} \tag{2.1}$$

La vélocité de phase pour un mode TEM dans un milieu sans perte est toujours donné par :

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad \text{(Modes TEM)} \tag{2.2}$$

2.2 Guides métalliques

Dans les guides métalliques, on a

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon \tag{2.3}$$

Si les parois du guide métallique sont parfaitement conducteurs (ce qui est une bonne approximation des guides métalliques) on a

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{h^2 - \omega^2\mu\epsilon} = jk\sqrt{1 - (f_c/f)^2} \qquad [m^{-1}] \tag{2.4}$$

où

$$f_c = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad [Hz] \tag{2.5}$$

est appelé la **fréquence de coupure du mode** tandis que k est le *wave number* du diélectrique. Quand $f > f_c$, la constante de propagation γ est imaginaire et le mode est appelé **propagating mode**. D'autre part, lorsque $f < f_c$, γ est réel, ce qui signifie que les champs diminuent exponentiellement lorsque z augmente. Quand les guides d'ondes opèrent sous leurs fréquences de coupure, ils sont appelés **evanescent modes** ou **nonpropagating modes**

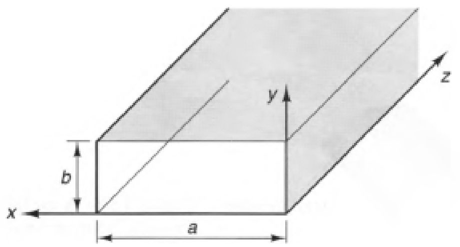

FIGURE 2.1 – Géométrie pour les guides d'ondes rectangulaires

2.2.1 Modes TM dans un guide rectangulaire

Pour ce mode, on a

$$h_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{2.6}$$

La constante de propagation est donnée par :

$$\gamma_{mn} = \alpha_{mn} + j\beta_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} = jk\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2} \tag{2.7}$$

où la fréquence de coupure pour chaque mode est :

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \tag{2.8}$$

Les champs électriques et magnétiques pour le mode TM sont donnés par :

$$E_x = -E_o\frac{\gamma_{mn}}{h_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.9}$$

$$E_y = -E_o\frac{\gamma_{mn}}{h_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.10}$$

$$E_z = E_o\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.11}$$

$$H_x = E_o\frac{j\omega\epsilon}{h_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.12}$$

$$H_y = -E_o\frac{j\omega\epsilon}{h_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.13}$$

$$H_z = 0 \tag{2.14}$$

2.2.2 Modes TE dans un guide rectangulaire

Pour ce mode, on a

$$h_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{2.15}$$

La constante d'atténuation ainsi que la fréquence de coupure est la même que pour les modes TM.

$$\gamma_{mn} = \alpha_{mn} + j\beta_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} = jk\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2} \tag{2.16}$$

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \tag{2.17}$$

Cependant, contrairement aux modes TM où m ou n ne peuvent être égals à 0, H_z pour les modes TE disparaît seulement quand $m = n = 0$. Ce qui signifie que soit m ou soit n (mais pas les deux) peuvent être égals à 0 pour les modes TE.

Les équations de champs pour les modes TE sont donnés par :

$$E_x = H_o \frac{j\omega\mu}{h_{mn}^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.18}$$

$$E_y = -H_o \frac{j\omega\mu}{h_{mn}^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.19}$$

$$E_z = 0 \tag{2.20}$$

$$H_x = H_o \frac{\gamma_{mn}}{h_{mn}^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.21}$$

$$H_y = H_o \frac{\gamma_{mn}}{h_{mn}^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.22}$$

$$H_z = H_o \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma_{mn}z} \tag{2.23}$$

2.2.3 Fréquence dominante

Pour les guides rectangulaires, le mode dominant est le mode TE_{10} qui possède les équations de champs suivantes :

$$E_y = -H_o j\omega\mu \left(\frac{a}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\gamma_{10}z} \tag{2.24}$$

$$H_x = H_o \gamma_{10} \left(\frac{a}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\gamma_{10}z} \tag{2.25}$$

$$H_z = H_o \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-\gamma_{10}z} \tag{2.26}$$

Aussi,

$$f_{c_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{u_{TEM}}{2a} \tag{2.27}$$

et

$$\gamma_{10} = j\beta_{10} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2} \tag{2.28}$$

où $u_{TEM} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ est la vélocité de phase d'une onde TEM (comme une onde plane) dans le même diélectrique.

La figure suivante montre les fréquences de coupures croissantes pour un guide d'onde rectangulaire avec $a/b = 2.1$

$f_c / f_{c_{10}}$	Modes
1.0	TE_{10}
2.0	TE_{20}
2.1	TE_{01}
2.326	TE_{11}, TM_{11}
2.9	TE_{21}, TM_{21}
3.0	TE_{30}
3.662	TE_{31}, TM_{31}
4.0	TE_{40}

FIGURE 2.2 – Fréquence de coupure en ordre croissant pour $a/b = 2.1$

L'intervalle dominant d'un guide d'onde est l'intervalle pour qu'il y ait seulement le mode dominant qui se propage. Pour les guides d'ondes rectangulaires avec $a/b > \sqrt{3}$, l'intervalle dominant est donné par $f_{c_{10}} < f < 2f_{c_{10}}$.

Par contre, une bonne règle pour les guides rectangulaires est d'opérer dans **l'intervalle utilisable** soit $1.25f_{c_{10}} < f < 0.95f_c$, où f_c est la fréquence de coupure du prochain mode.

2.2.4 Caractéristiques d'une ondes qui se propage dans un guide d'onde

Les modes des guides d'ondes propagent les champs quand ils opèrent au-dessus de la fréquence de coupure. Ces modes peuvent être décris en terme de longueur d'onde, vélocité de phase et de groupe et de leur impédance.

Longueur d'onde. Au-dessus de la fréquence de coupure, on peut écrire β comme

$$\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad f > f_c \tag{2.29}$$

où f_c est la fréquence de coupure du mode et $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ est le *wave number* du diélectrique. La longueur d'onde est donnée par la distance entre deux points de phase identique dans la direction de propagation.

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = 2\Delta d \tag{2.30}$$

Ce qui donne en joignant les deux équations ci-dessus

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{2.31}$$

où $\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde d'une onde TEM de la même fréquence dans le même diélectrique.

La **longueur d'onde libre** dans l'air est donnée par

$$\lambda_{libre} = \frac{u_{TEM}}{f} \tag{2.32}$$

Pour l'air, on a que $u_{TEM} = c = 3 \times 10^8$ m/s

Les **vélocités de phase et de groupe** sont données par

$$u_p = \frac{u_{TEM}}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = f \times \lambda_g \tag{2.33}$$

$$u_g = u_{TEM}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{2.34}$$

où $u_{TEM} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ est la vélocité d'une onde TEM dans le diélectrique. Le délai de propagation d'une onde est contrôlé par la vélocité de groupe

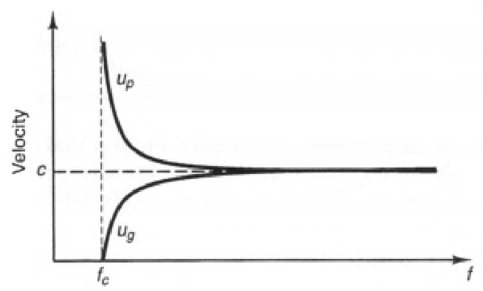

FIGURE 2.3 – Vélocité de phase et de groupe en fonction de la fréquence

L'impédance caractéristique est donné par le ratio du champ électrique sur la champ magnétique transmis.

$$Z \equiv \frac{|E_t|}{|H_t|} \tag{2.35}$$

Pour le mode TE opérant à une fréquence supérieure que la coupure, on a

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{2.36}$$

où $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ est l'impédance intrinsèque du diélectrique.

Pour le mode TM, on a

$$Z_{TM} = \eta\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{2.37}$$

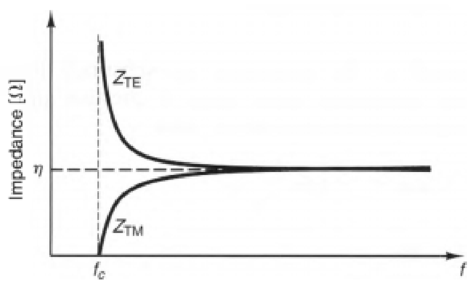

Figure 2.4 – Impédance des mode TE et TM en fonction de la fréquence

Pour la **puissance** on a

$$\overline{P} = P_z\hat{z} \tag{2.38}$$

avec la densité de puissance qui est donnée par

$$P_z = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\overline{E} \times \overline{H^*}\right\} \cdot \hat{z} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{E_x H_y^* - E_y H_x^*\right\} \tag{2.39}$$

La puissance totale est donc le résultat de l'intégrale double de la densité de puissance

$$P_{tot} = \int_0^a \int_0^b P_z \; dydx \tag{2.40}$$

(i) **Mode TE**$_{mn}$ **(**$E_z = 0$**,** $H_z \neq 0$**)**

$$P_{tot}^{TE} = \left(\frac{1}{4} \text{ ou } \frac{1}{8}\right) |H_o|^2 \eta ab \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \tag{2.41}$$

Quand $m = 0$ ou $n = 0 \rightarrow \frac{1}{4}$

Quand $m \neq 0$ ou $n \neq 0 \rightarrow \frac{1}{8}$

(ii) **Mode TM**$_{mn}$ **(**$E_z \neq 0$**,** $H_z = 0$**)**

$$P_{tot}^{TM} = \frac{1}{8}|E_o|^2 \frac{1}{\eta} ab \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \tag{2.42}$$

Voir notes de cours écrites pour la suite

3 Antennes

3.1 Potentiels Électromagnétique

Dans le domaine fréquentiel, le champ électrique **E** [V/m] et le champ magnétique **B** [T] s'exprime, selon les équations de Maxwell

$$\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega A \tag{3.1}$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times A \tag{3.2}$$

où V représente le **potentiel électrique scalaire** et A, le **potentiel magnétique scalaire**.

En résolvant ces équations dans le domaine fréquentiel, on a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{Vol.} \frac{p_v(r')e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|}\, dv' \qquad [\text{V}] \tag{3.3}$$
$$A = \frac{\mu}{4\pi}\int_{Vol.} \frac{J(r')e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|}\, dv' \qquad [\text{Wb/m}] \text{ ou } [T \cdot m] \tag{3.4}$$

Tandis que dans le domaine temporel, on a

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{dA}{dt} \tag{3.5}$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times A \tag{3.6}$$

Ce qui donne

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{Vol.} \frac{p_v(t', r')}{|r-r'|}\, dv' \qquad [\text{V}] \tag{3.7}$$
$$A = \frac{\mu}{4\pi}\int_{Vol.} \frac{J(t', r')}{|r-r'|}\, dv' \qquad [\text{Wb/m}] \text{ ou } [T \cdot m] \tag{3.8}$$

3.2 Dipôle Infinitésimal

Dans ce cas, quand $r >> \lambda$, on peut approximer les champs électriques et magnétiques comme suit

$$\mathbf{E} \approx \frac{jkI_o\Delta l}{4\pi}\eta \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r}\hat{\mathbf{a}_\theta} \tag{3.9}$$
$$\mathbf{H} \approx \frac{jkI_o\Delta l}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r}\hat{\mathbf{a}_\phi} \tag{3.10}$$

où r représente la distance, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ et k peut être exprimé sous cette forme

$$k = \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.11}$$

3.2.1 Puissance et résistance

La puissance radiée pour un dipôle infinitésimal s'exprime

$$P_{in} = P_{rad} = 40\pi^2 I_o^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \qquad [W] \quad (\Delta l << \lambda,\ I \text{ en Ampères}) \tag{3.12}$$

Tandis que la résistance est

$$R_r = \frac{2P_{rad}}{I_o^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \qquad [\Omega] \quad (\Delta l << \lambda) \tag{3.13}$$

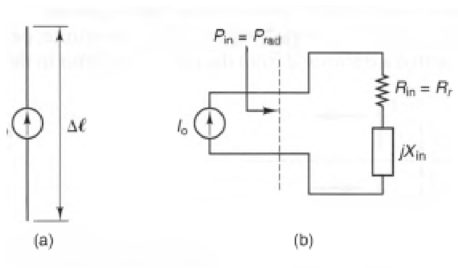

FIGURE 3.1 – Un dipôle infinitésimal avec une source de courant

3.3 Propriétés des antennes émettrices

3.3.1 Intensité de radiation

L'intensité de radiation est donnée par

$$U(\theta, \phi) = r^2 P_{ave} \qquad [W/sr] \tag{3.14}$$

où

$$P_{ave} = \frac{|E|^2}{2\eta} \tag{3.15}$$

Lorsqu'on combine les deux équations ci-dessus, on a, pour l'intensité de radiation

$$U(\theta, \phi) = r^2 \frac{|E|^2}{2\eta} \tag{3.16}$$

La puissance de radiation peut aussi s'exprimer comme suit

$$P_{rad} = \oint_S U(\theta, \phi)\ d\Omega \tag{3.17}$$

où $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$

3.3.2 Design d'antennes

Un *radiation pattern* est un graphique qui trace les caractéristiques de radiation d'un antenne. Il y a deux types de graphiques. Un graphique de la puissance radiée à un rayon constant, appelé *power pattern*. Il y a aussi un graphique du champ électrique (ou magnétique) à un rayon constant, appelé *field pattern*.

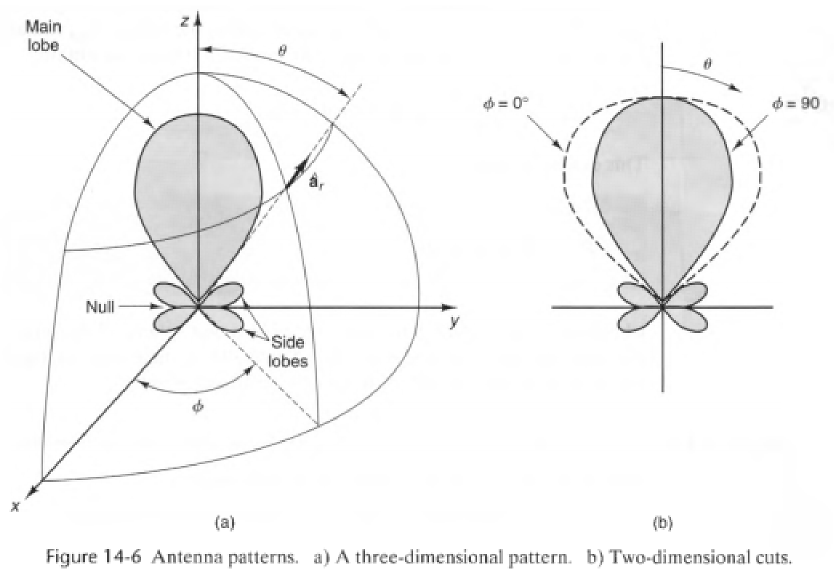

FIGURE 3.2 – Design d'antennes

3.3.3 Gain directif et directivité

Le gain directif D_g d'une antenne est la ratio de l'intensité de radiation $U(\theta, \phi)$ dans une direction donnée à l'intensité de radiation U_{ref} d'une antenne de référence qui transmet à la même puissance totale P_{rad}

$$D_g(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_{ref}(\theta, \phi)} \qquad \text{[Sans dimension]} \tag{3.18}$$

On peut aussi l'exprimer sous ces formes

$$D_g(\theta, \phi) = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{rad}} = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{\oint_S U(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{U(\theta, \phi)}{U_{ave}} \tag{3.19}$$

où $U_{ave} = 1/(4\pi) \oint_S U(\theta, \phi) d\Omega$ est l'intensité de radiation moyenne de l'antenne en considération

Le gain directif dans la direction de la radiation maximale est appelé, la directivité et est donnée par

$$D_o = D_g(\theta, \phi)|_{max} = \frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}} = \frac{U_{max}}{U_{ave}} \tag{3.20}$$

où U_{max} est l'intensité de radiation maximale dans la direction de la radiation maximale.

Example 14-5

Find the directivity of an infinitesimal dipole.

Solution:

The average Poynting vector for an infinitesimal dipole is given by Equation (14.43),

$$\mathscr{P}_{ave} = \frac{1}{8}\eta \sin^2\theta \left(\frac{I_o \Delta \ell}{\lambda r}\right)^2 \hat{\mathbf{a}}_r \qquad [\text{W/m}^2].$$

Hence, the radiation intensity $U(\theta, \phi)$ is of the form

$$U(\theta, \phi) = U_{max} \sin^2\theta,$$

where U_{max} is the radiation intensity along $\theta = 90°$. Substituting this into Equation (14.55), we have

$$D_o = \frac{4\pi U_{max}}{\oint_S U_{max} \sin^2\theta \, d\Omega} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi} = \frac{4\pi}{(8\pi/3)}$$

Thus,

$$D_o = 1.5.$$

We can also express this in dB:

$$D_o = 10 \log(1.5) = 1.76 \text{ [dB]}.$$

FIGURE 3.3 – Exemple de directivité

3.3.4 Gain de puissance et radiation effective

Le gain de puissance d'un antenne est donné par

$$G_g(\theta, \phi) = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{in}} \tag{3.21}$$

avec $P_{in} = 4\pi U_{ref}$

Le gain maximal de puissance est

$$G_o = \frac{4\pi U_{max}}{P_{in}} \tag{3.22}$$

La radiation effective est donc

$$\eta_r = \frac{G_o}{D_o} = \frac{P_{rad}}{P_{in}} \tag{3.23}$$

La plupart des antennes ont une efficacité de plus de 90%.

3.3.5 Résistance de radiation et impédance d'entrée

Avec

$$P_{rad} = \frac{1}{2} I_{in}^2 R_{ri} \tag{3.24}$$

On peut écrire la résistance de radiation d'entrée R_{ri} en terme du courant I_{in} et de la puissance radiée par l'antenne

$$R_{ri} = \frac{2P_{rad}}{I_{in}^2} \qquad [\Omega] \tag{3.25}$$

La radiation effective peut aussi s'écrire

$$\eta_r = \frac{P_{rad}}{P_{in}} = \frac{R_{ri}}{R_{ri} + R_L} \tag{3.26}$$

où R_L est la *input loss resistance* de l'antenne.

Un autre résistance commune est la résistance de radiation de l'antenne, qui est donnée par

$$R_{ri} = \frac{2P_{rad}}{I_{max}^2} \qquad [\Omega] \tag{3.27}$$

où I_{max} est le courant maximum sur l'antenne.

La résistance de radiation et la résistance de radiation d'entrée sont reliée par cette relation

$$R_{ri} = \left[\frac{I_{max}}{I_{in}}\right]^2 R_r \tag{3.28}$$

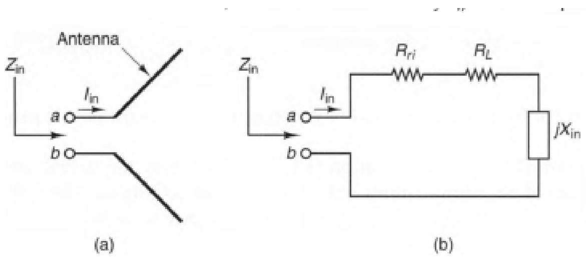

FIGURE 3.4 – Impédance d'entrée d'un antenne

3.4 Propriétés des antennes réceptrices

3.4.1 Formule de Friss

La formule de Friss indique que la quantité de puissance transférée entre 2 antennes est proportionnel au produit du gain des antennes

$$\frac{P_{rec}}{P_t} = \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 G_t G_r \tag{3.29}$$

avec

$$\lambda_{libre} = \frac{u_{TEM}}{f} \tag{3.30}$$

Pour l'air, on a que $u_{TEM} = c = 3 \times 10^8$ m/s, sinon $u_{TEM} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$,

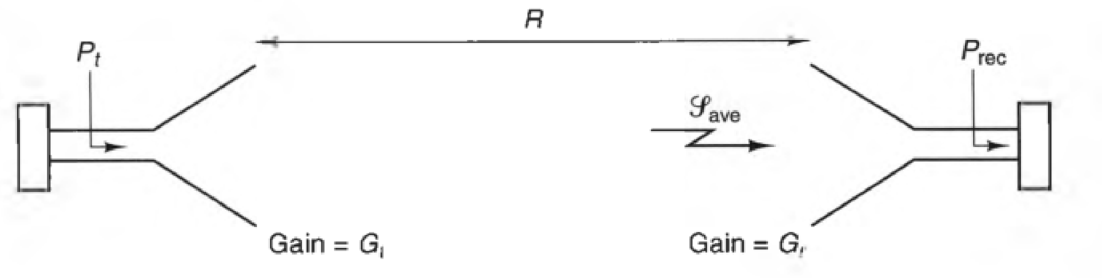

Figure 3.5 – Géométrie pour l'équation de Friss

4 Bibliographie

[1] Kenneth R. DEMAREST. *Engineering Electromagnetics*. New Jersey : Prentice Hall, Inc, 1998.