ABDILLAHI Bouh
Matricule : 1940646
ELE6701A : Projet

Partie 1 :

a) On envoie $\vec{s} = \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(9) \end{bmatrix}$

avec $s(i) = \pm 1$

On observe $\vec{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(9) \end{bmatrix}$

$$\overset{\pm 1}{s(i)} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ n(i)}}{\oplus} \longrightarrow y(i)$$

$n(i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

Puis nous utilisons un détecteur ML :

$$y(i) \longrightarrow \boxed{\text{Détecteur ML}} \longrightarrow \hat{s}(i)$$

Nous transmettons 10 symoles ± 1,
on a donc $M = 2^{10}$ possibilités

$\Rightarrow$ M hypothèses H_i avec $i = 1, \ldots, M$

$k = 10$ observations $\vec{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(9) \end{bmatrix}$

$\vec{y} = \vec{s_i} + \vec{n}$, $\quad i = 0, \ldots, M-1$

S_i est le signal associé à l'hypothèse H_i

On a R_i régions de décisions $(i = 0, \ldots, M-1)$

Le critère de décision devient de choisir

H_j si : $\|\vec{y} - \vec{s_j}\|^2 < \|y - s_l\|^2 \quad \forall\, l \neq j$ (1)

Pour chaque paire d'hypothèse H_j et H_l avec $j \neq l$ dans les 2^{10} hypothèses possibles.

Trouvons la relation équivalente de (1).

$$\vec{y} = \vec{s_i} + \vec{n}$$

Pour chaque paire $\{H_j ; H_l\}$ on a :

$$s_i = x_i(\vec{s_j} - \vec{s_l}) + \frac{1}{2}(\vec{s_j} + \vec{s_l})$$

$$x_i = \begin{cases} 1/2 & \text{si } H_j \\ -1/2 & \text{si } H_l \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{y'} = \vec{y} - \frac{1}{2}(\vec{s_j} + \vec{s_l}) = x_i(\vec{s_j} - \vec{s_l}) + \vec{n}$$

Soit $\vec{v}$ le vecteur directeur tel que :

$$\vec{v} = \frac{\vec{s_j} - \vec{s_l}}{\|\vec{s_j} - \vec{s_l}\|}$$

Nous avons $N = 10$ observations, on pose

$$O = [\vec{v}\ \vec{\sigma_1}\ \vec{\sigma_2} \dots \vec{\sigma_9}]$$

tel que $\vec{\sigma_1}^* \vec{v} = 0$ et $\vec{\sigma_i} \vec{\sigma_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$O O^* = I \Rightarrow O$ est orthonormale

$$O^* \vec{y'} = \begin{bmatrix} \vec{v}^* \\ \vec{\sigma_1}^* \\ \vdots \\ \vec{\sigma_9}^* \end{bmatrix} (x_i(\vec{s_j} - \vec{s_l}) + \vec{n})$$

$$= \begin{bmatrix} x_i \|\vec{s_j} - \vec{s_\ell}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{10\times 1} + \theta^* \vec{n}$$

$$\theta^* \vec{n} \sim \mathcal{CN}(0, N_0 I)$$

avec $N_0 = \sigma_n^2$ ici

On pose ainsi

$$\tilde{y} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{(\vec{s_j} - \vec{s_\ell})^*}{\|\vec{s_j} - \vec{s_\ell}\|} \left(\vec{y} - \frac{1}{2}(\vec{s_j} + \vec{s_\ell}) \right) \right\}$$

$$= \underbrace{x_i \|\vec{s_j} - \vec{s_\ell}\| + \vec{n}}_{\text{statistique suffisante}}$$

avec $\vec{n} \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$

On décide alors

$$\tilde{y} \underset{H_\ell}{\overset{H_j}{\gtrless}} 0$$

$$\Rightarrow \tilde{y} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\|\vec{s_j} - \vec{s_\ell}\|} \left(\vec{s_j}^* \vec{y} - \vec{s_\ell}^* \vec{y} - \frac{1}{2}\left(\vec{s_j}^* \vec{s_j} + \cancel{\vec{s_j}^* \vec{s_\ell}} - \cancel{\vec{s_\ell}^* \vec{s_j}} + \vec{s_\ell}^* \vec{s_\ell} \right) \right) \right\} \underset{H_\ell}{\overset{H_j}{\gtrless}} 0$$

$$\Rightarrow \tilde{y} = \mathrm{Re}\left\{ \right.$$

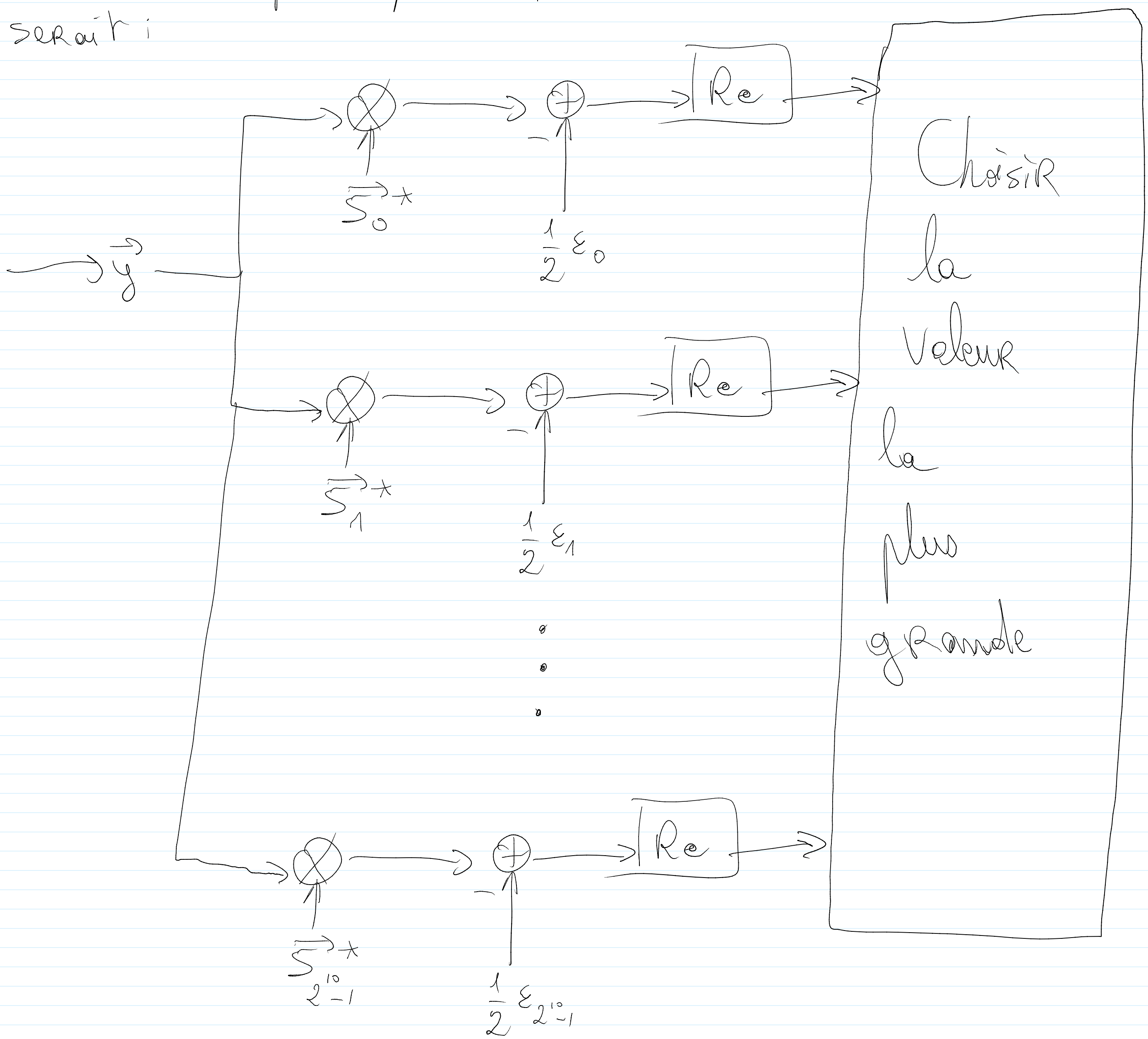
Posons $\varepsilon_i = \vec{u_i}^* \vec{u_i} = \|\vec{u_i}\|^2$

Posons $\varepsilon_i = \vec{u}_i^* \vec{u}_i = \|\vec{u}_i\|^2$

$$\Rightarrow \tilde{y} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\|\vec{s}_j - \vec{s}_\ell\|} \left(\vec{s}_j^* \vec{y} - \vec{s}_\ell^* \vec{y} - \frac{1}{2}\varepsilon_j - \frac{1}{2}\varepsilon_\ell \right) \right\} \underset{H_\ell}{\overset{H_j}{\gtrless}} 0$$

calculer toute les paires d'hypothèses serait trop coûteux.

Une manière plus simple de procéder serait :



avec $\{\vec{S_0}, \vec{S_1}, \dots, \vec{S}_{2^{10}-1}\}$

étant l'ensemble des vecteurs hypothèses possibles.

b) Borne union B_u

$M = 2^{10}$

$$B_u = \sum_{i=0}^{2^{10}-1} \pi_i \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2^{10}-1} Q\left(\frac{\|\vec{S_j} - \vec{S_i}\|}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Borne distance minimale $B_{d_{min}}$

$$B_{d_{min}} = (2^{10}-1) \max_{\substack{\forall i,j = 0,\dots,2^{10}-1 \\ i\neq j}} Q\left(\frac{\|\vec{S_j} - \vec{S_i}\|}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

c)

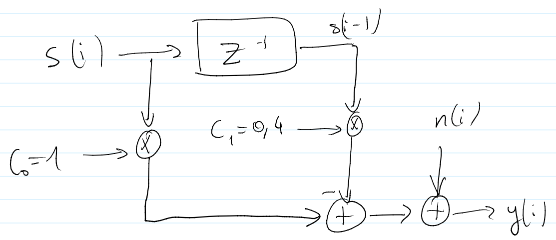
Partie II :

a) On a pour $\Delta = 0, 1, 2$:

$$\hat{S}(i-\Delta) = \alpha_0\, y(i) + \alpha_1\, y(i-1) + \alpha_2\, y(i-2)$$

Trouver $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ pour $\Delta = 0$, $\Delta = 1$, $\Delta = 2$

Nous avons le canal suivant :



Tel que $y(i) = s(i) - 0,4\, s(i-1)$

on a : $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4 \end{bmatrix}$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} y(i) \\ y(i-1) \\ y(i-2) \end{bmatrix}$

Données :

? $R_s = \sigma_x^2 I$ $\quad R_n = N_0 I = \sigma_n^2 I \quad \bar{n} = 0$

$\bar{s} = 0 \quad R_{ns} = 0$

$$\begin{bmatrix} y(i) \\ y(i-1) \\ y(i-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(i) \\ s(i-1) \\ s(i-2) \\ s(i-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n(i) \\ n(i-1) \\ n(i-2) \end{bmatrix}$$

ainsi : $\vec{y} = H \vec{s} + \vec{n}$

avec $H = \begin{bmatrix} 1 & -0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,4 \end{bmatrix}$

$$\hat{s}(i-\Delta) = w\, \vec{y}$$

où $\vec{w} R_y = R_{s(i-\Delta)\vec{y}}$

$$R_y = E(\vec{y}\,\vec{y}^*) = E\left[(H\vec{s}+\vec{n})(H\vec{s}+\vec{n})^*\right]$$

$$\Rightarrow R_y = \sigma_s^2 HH^* + \sigma_n^2 I$$

$$R_{s(i-\Delta)\vec{y}} = E\left[s(i-\Delta)\,\vec{y}^*\right]$$

$$= E\left[s(i-\Delta)(H\vec{s}+\vec{n})^*\right]$$

$$= E\left[s(i-\Delta)\,\vec{s}^*\right] H^*$$

$$= \left[\, E\left[s(i-\Delta)\,s(i)^*\right] \dots E\left[s(i-\Delta)\,s(i-3)^*\right] \right] H^*$$

Les entrées sont indépendantes

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta}}{\sigma_s^2} & \dots & 0 \end{bmatrix} H^*$$

$$\text{Soit } \vec{e}_\Delta = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \Delta \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow R_{s(i-\Delta)\vec{y}} = \sigma_s^2\, \vec{e}_\Delta^{\,*} H^*$$

$$\Rightarrow \hat{s}(i-\Delta) = R_{s(i-\Delta)\vec{y}}\, R_y^{-1}\, \vec{y}$$

$$= \underbrace{\sigma_s^2\, \vec{e}_\Delta^{\,*} H^* \left(\sigma_s^2 HH^* + \sigma_n^2 I\right)^{-1}}_{\vec{w}} \vec{y}$$

$$\vec{w} = \left[w_0 \;\; w_1 \;\; w_2\right] = \left[\alpha_0 \;\; \alpha_1 \;\; \alpha_2\right]$$

$$\text{MMSE} = R_s - K_o R_y K_o^*$$

$$= \sigma_s^2 - \vec{w} R_y \vec{w}^*$$

$$= \sigma_s^2 \left(1 - \sigma_s^2 \vec{e}_D^* H^* R_y^{-1} H \vec{e}_D\right)$$