Дипломная работа
О периодических решениях квазилинейного уравнения колебаний балки и проводов

Работу выполнил: Кононенко А. А.

Научный руководитель: д.ф-м.н., профессор кафедры ФН-2 Рудаков И. А.
группа: ФН2-82Б

20 июня 2023 г.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о периодических колебаниях балки и проводов

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} + g(x,\ t,\ u) = f(x,\ t), x \in (0,\ \pi),\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0,\ t) = u(\pi,\ t) = 0, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,\ t) = u_{xx}(\pi,\ t) = 0 \tag{3}$$

и с периодическим по времени условием

$$u(x,\ t) = u(x,\ t + T). \tag{4}$$

Задание

1. Исследовать соответствующую задачу Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения.
2. Найти условие обратимости дифференциального оператора

$$\partial_{tt} + \partial_{xxxx} - a\partial_{xx}.$$

3. Доказать конечномерность ядра этого оператора.
4. Доказать гладкость решений задачи (1) – (4) и выполнение граничных условий в классическом смысле.

Свойства собственных значений

Уравнению (1) соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$X^{(4)} - aX'' = \lambda X, \tag{5}$$

учитывая граничные условия $X(0) = X(\pi) = 0$. Докажем, что собственное значение $\lambda > 0$.

Так как $X = X(x), x \in (0, \pi)$, то домножим правую и левую части уравнения (5) на $X(x)$ и проинтегрируем от 0 до π:

$$\int\limits_0^\pi (X'')^2 dx + a \int\limits_0^\pi (X')^2 dx = \lambda \int\limits_0^\pi X^2 dx \Rightarrow \lambda \geq 0. \tag{6}$$

Предположим, что $\lambda = 0$. Тогда:

$$a \int_0^\pi (X')^2 dx = 0 \Rightarrow X' \equiv 0 \Rightarrow X = C \xRightarrow{\text{граничные условия}} X \equiv 0.$$

Нас интересует только нетривиальный случай, а значит $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda > 0$.

Нахождение собственных значений оператора L[x]

Решим уравнение (5):

$$X^{(4)} - aX'' - \lambda X = 0, \quad a, \lambda \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Его характеристическим уравнением будет дифференциальное уравнение вида:

$$t^4 - at^2 - \lambda = 0.$$

Корнями этого уравнения будут числа:

$$\begin{cases} t_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \lambda}} = \pm b, \\ t_{3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \lambda}} = \pm i\sqrt{\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \lambda} - \dfrac{a}{2}} = \pm ic. \end{cases}$$

Нахождение собственных значений оператора L[x]

Общее решение уравнения:

$$\begin{aligned} X = y_{\text{o.o.}} &= C_1 \operatorname{ch}(bx) + C_2 \operatorname{sh}(bx) + C_3 \cos(cx) + C_4 \sin(cx), \\ X' &= C_1 b \operatorname{sh}(bx) + C_2 b \operatorname{ch}(bx) - C_3 c \sin(cx) + C_4 c \cos(cx), \\ X'' &= C_1 b^2 \operatorname{ch}(bx) + C_2 b^2 \operatorname{sh}(bx) - C_3 c^2 \cos(cx) - C_4 c^2 \sin(cx). \end{aligned}$$

Подставляя граничные условия $X(0) = X''(0) = 0$, находим константы C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_3 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Подставим вторые граничные условия $X(\pi) = X''(\pi) = 0$:

$$\begin{cases} C_2 \operatorname{sh}(\pi b) + C_4 \sin(\pi c) = 0, \\ C_2 b^2 \operatorname{sh}(\pi b) - C_4 c^2 \sin(\pi c) = 0. \end{cases}$$

Нахождение собственных значений оператора L[x]

Нас интересует нетривиальное решение системы ($C_2{}^2 + C_4{}^2 \neq 0$, где C_2, C_4 неизвестные переменные), а для этого необходимо и достаточно равенство нулю определителя матрицы системы линейных алгебраических уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{sh}(b\pi) & \sin(\pi c) \\ d^2 \operatorname{sh}(b\pi) & -c^2 \sin(\pi c) \end{vmatrix} = 0.$$

Получим уравнение:

$$\operatorname{sh}(b\pi)\sin(\pi c) + b^2 \operatorname{sh}(b\pi)\sin(\pi c) = c^2 \operatorname{sh}(b\pi)\sin(\pi c)(c^2 + b^2) = 0 \Rightarrow \tag{8}$$

$\Rightarrow \sin(\pi c) = 0 \Rightarrow \pi c = \pi n \Rightarrow c = n$, $n \in \mathbb{N}$ (так как $b > 0$). Исследовав уравнение (8), получаем его решения: $\lambda_n = n^4 + an^2$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом рост значений корней уравнения является степенным.

Нахождение собственных функций оператора L[x]

В системе (7) мы выяснили, что константы $C_1 = C_3 = 0$. Приравняем C_4 к единице и получим значение $C_2 = -\dfrac{\sin(\pi c)}{\text{sh}(\pi b)}$. Таким образом, учитывая, что $sin(\pi c) = 0$, значение собственной функции на отрезке $[0, \pi]$ (график изменения которой представлен на рисунке (1)) равняется

$$X = C_4 \sin(nx), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

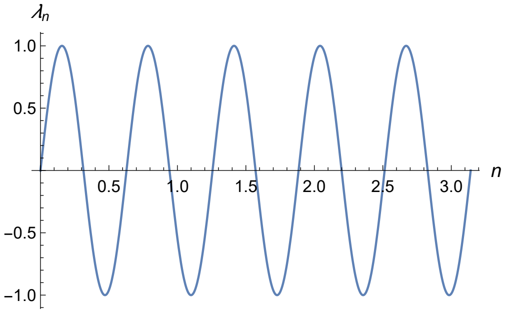

Рис. 1. График изменения собственной функции X при x=10.

Симметричность дифференциального оператора

Докажем, что дифференциальный оператор $AX = X^{(4)} - aX''$, удовлетворяющий граничным условиям, симметричен, то есть докажем, что выполняется равенство $(AX, Y) = (X, AY)$:

$$(AX,\ Y) = \int_0^{\pi} AX\, Y\, dx = \int_0^{\pi} \left(X^{(4)} - aX''\right) Y dx =$$
$$= \int_0^{\pi} X\left(Y^{(4)} - aY''\right) dx = \int_0^{\pi} X\, AY dx = (X,\ AY).$$

То есть верно равенство $(AX,\ Y) = (X,\ AY)$, а значит дифференциальный оператор $L[x]$ симметричен.

Из симметричности линейного оператора, следует, что

$$\int_0^{\pi} \lambda_n X_n\, X_m dx = \int_0^{\pi} X_n\, \lambda_m X_m dx \Rightarrow (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^{\pi} X_n\, X_m dx = 0.$$

Так как $\lambda_n \neq \lambda_m$, то $\int_0^{\pi} X_n\, X_m dx = 0$ и значит $(X_n,\ X_m) = 0$, а это равносильно тому, что собственные функции оператора $L[x]$, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными.

Согласованность λ_n с формулой Назарова

Формула Назарова для нахождения собственных значений дифференциального оператора A: $AX = X^{(4)} - aX'' = \lambda X$ имеет вид:

$$\mu_n = \left(\frac{\pi \cdot \left[n - l - 1 - \frac{\kappa}{2l} \right]}{\int_0^\pi p_{2l}^{-1/(2l)}(x)\,dx} + O\left(n^{-1}\right) \right)^{2l}, \quad n \to \infty, \text{ где} \tag{9}$$

1. A — оператор четвёртого порядка. Поэтому $2l = 4$. Тогда $l = 2$.
2. p_{2l} - коэффициент при $X^{(4)}$, поэтому $p_{2l} = 1$, $\int_0^\pi p_{2l}^{-1/(2l)}(x)\,dx = \pi$.
3. параметр $\kappa = \sum\limits_{j=1}^{2} (k_j + k_j^{'})$. С учётом граничных условий (2) - (3) получаем $k_1 = 0,\ k_2 = 2,\ k_1^{'} = 0,\ k_2^{'} = 2$ и $\kappa = 4$.
4. $O(n^{-1}) = \dfrac{1}{n} f(n)$, где $|f(n)| \leqslant C = const$.

Подставляя в (9) вычисленные коэффициенты, находим значение собственного числа: $\lambda_n = \left(n + O(n^{-1}) \right)^4$.

Согласованность λ_n с формулой Назарова

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[4]{\lambda_n} - n)n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[4]{n^4 + an^2} - n)n = \frac{a}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\sqrt[4]{\lambda_n} - n)n = \frac{a}{4} + \gamma_n, \text{ где } \gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sqrt[4]{\lambda_n} = n + \frac{a}{4n} + \gamma_n \frac{1}{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\gamma_n \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \lambda_n = \left(n + \frac{a}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4.$$

Таким образом, получен первый член ассимптотики слагаемого $O\left(\frac{1}{n}\right)$ в формуле Назарова $O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Следовательно получено улучшение ассимптотики $\lambda_n = (n + \frac{a}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right))^n$

Нормировка X_n

Осуществим нормировку в пространстве $L_2(0, \pi)$ для полученной ранее собственной функции $X_n = A_n \sin(nx)$:

$$||X_n||_{L_2(0,\,\pi)} = 1$$

$$||A_n \sin(nx)||_{L_2(0,\,\pi)} = A_n \sqrt{\int_0^\pi \sin(nx)^2 dx} = A_n \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos(2nx))dx} =$$

$$= A_n \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2nx)\Big|_0^\pi} = A_n \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad A_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Так, нормированные в $L_2(0, \pi)$ функции $X_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \ n \in \mathbb{N}$.

Оценим X_n, $X_n{}'$, $X_n{}''$: $|X_n| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $\quad |X_n{}'| \le n\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $\quad \left|X_n{}''\right| \le n^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Свойства системы

Введём систему собственных функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi T}}\sin(nx),\ \frac{2}{\sqrt{\pi T}}\sin(nx)\cos(wmt),\ \frac{2}{\sqrt{\pi T}}\sin(nx)\sin(wmt)\right\}. \quad (10)$$

Обозначим $e^c_{nm}=\dfrac{2}{\sqrt{\pi T}}\sin(nx)\cos(wmt),\ e^s_{nm}=\dfrac{2}{\sqrt{\pi T}}\sin(nx)\sin(wmt).$

Введём обозначение: $\Omega = [0;\,\pi]\times\mathbb{R}$.

Проверим ортонормированность системы (10) в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi T}}\sin(nx),\ \sqrt{\frac{2}{\pi T}}\sin(nx)\right)=\frac{2}{\pi T}\int_0^T\int_0^\pi \sin^2(nx)dxdt=$$

$$=\frac{1}{\pi T}\int_0^T\int_0^\pi(1-\cos(2nx))dxdt=\frac{1}{\pi T}\int_0^T dt=1,$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi T}}\sin(nx),\ e^c_{nm}\right)=0,\ (e^c_{nm},\ e^c_{nm})=1,\ (e^s_{nm},\ e^s_{nm})=1.$$

Обратимость оператора

Будем предполагать выполнение следующих условий:

$$T = 2\pi\frac{b}{c}, \quad b, c \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}(b, c) = 1, \tag{11}$$

$$a > 0, \quad \frac{1}{2}ab \notin \mathbb{N}. \tag{12}$$

Введём замену $w = \dfrac{2\pi}{T}$. Докажем обратимость оператора

$$L = \partial_{tt} + \partial_{xxxx} - a\partial_{xx}.$$

$$Le^c_{nm} = \frac{-(wm)^2}{\sqrt{\pi T}}2\sin(nx)\cos(wmt) + \frac{n^4}{\sqrt{\pi T}}2\sin(nx)\cos(wmt) +$$
$$+a\frac{n^2}{\sqrt{\pi T}}2\sin(nx)\cos(wmt) = e^c_{nm}(n^4 + an^2 - (wm)^2) =$$
$$= e^c_{nm}(\lambda_n - (wm)^2) = \mu_{nm}e^c_{nm}, \quad Le^s_{nm} = \mu_{nm}e^s_{nm},$$

где $|\mu_{nm}| = |\sqrt{\lambda_n} - wm|(\sqrt{\lambda_n} + wm) = M(n,\, m)(\sqrt{\lambda_n} + wm).$

Основная теорема

Будем говорить, что выполнено условие A), если либо

$$a \text{ – иррациональное, а } w \text{ – рациональное положительное числа;} \quad (13)$$

либо

$$a \text{ и } w \text{ – рациональные положительные числа, } a \notin w\mathbb{N} \text{ и в представлении числа } a = p/q \text{ в виде несократимой дроби знаменатель } q \text{ не является квадратом целого числа;} \quad (14)$$

либо

$$a \text{ – нечётное, а } w \text{ – рациональное положительное числа и в представлении числа } w = p/q \text{ в виде несократимой дроби знаменатель } q \text{ – нечётное число.} \quad (15)$$

Основная теорема

В работе 2018 года немного ослаблено условие Ямагучи 1995 г.: условия (13) - (15). В данной курсовой эти условия ещё больше ослаблены и заменены на условие (12).

Гладкость решения

Для доказательства гладкости решения покажем, что $u \in C(\Omega),\ u_x \in C(\Omega),\ u_{xx} \in C(\Omega)$.
Задачу (1) можно записать в виде: $Lu = f(x,t)$. Разложим функцию правой части f и решение u в ряд Фурье по собсвтенным функциям X_n.
Находим мажоранту (сходящийся мажорирующий ряд) для исходного ряда, после чего замечаем, что по признаку Вейерштрасса ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=0, \\ \mu_{mn} \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\mu_{mn}} (a_{nm} \cos(mt) + b_{nm} \sin(mt)) X_n$$

сходится абсолютно и равномерно, а так как все его члены непрерывны, то из равномерной сходимости следует непрерывность всего ряда и функции u соответственно. Доказательство непрерывности u_x осуществляется аналогично. Далее докажем равномерную сходимость ряда Фурье функции $|u_{xx}|$, из чего следует непрерывность u_{xx}.

Конечномерность ядра оператора L и вполне непрерывности L^{-1}

Лемма. Предположим, что выполнено условие (12). Тогда ядро $N(L)$ оператора L является конечномерным, и обратный оператор $L^{-1}: \ R(L) \to R(L)$ вполне непрерывен.

Полученные результаты

1. Решено линейное уравнение Эйлера-Бернулли.
2. Найдено условие обратимости дифференциального оператора (условие (12)).
3. Произведена нормировка собственных функций.
4. Построен ортонормированный базис из собственных функций дифференциального оператора.
5. Доказана конечномерность ядра оператора и вполне непрерывность обратного оператора.
6. Доказано существование производных по Соболеву до второго порядка включительно.
7. Доказана теорема о существовании и единственности периодического решения.

Список литературы

- Рудаков И. А. Задача о колебаниях двутавронной балки с закрепленным и шарнирно опертым концами Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2019 № 3 С. 4-21. DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-4-21
- Рудаков И.А. О существовании счётного числа периодических решений краевой задачи для уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями. Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С 1062-1072. DOI: 10.31857/S0374064122080064, EDN: CFUKPN.
- Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа — СПб.: Издательство "Лань 2015.— 400 с.
- Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004, 348 с.
- Rudakov I.A., Ji S. Infinitely many periodic solutions for the quasi-linear Euler–Bernoulli beam equation with fixed ends. Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2023. 62:66. DOI: 10.1007/s00526-022-02404-3.
- Nazarov A.I., Nikitin Y.Y., Exact L 2-small ball behavior of integrate Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems // Prob. Theory and Related Fields. 2004. V. 129. №4. P. 469-494.