Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Сведение задач из теории игр к задаче линейного программирования с применением надстройки “поиск решения” MS EXCEL

Студент ФН2-52Б (Группа) ________ (Подпись, дата) А. А. Кононенко (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ________ (Подпись, дата) И. А. Рудаков (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

Введение

В данной курсовой работе рассматривается задача из теории игр, которая сводится к задаче линейного программирования с помощью приложения MS EXCEL.

Конфликтом (конфликтной ситуацией) называется процесс столкновения интересов нескольких участвующих сторон.

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой. Таким образом, теория игр — это математическая теория принятия решений в условиях конфликта. Основной задачей игр является не описание, а разрешение конфликтов, т.е. построение компромиссных взаимовыгодных решений, которые полностью или хотя бы частично согласовывают интересы всех взаимодействующих сторон. Если удается формализовать (смоделировать) конфликт и определить принцип оптимальности, т.е. принцип выбора оптимального решения в игре, то получается математическая задача, которую можно решать математическими методами, без учета ее содержательной постановки. Методы теории игр позволяют планировать экономические процессы, оптимально распределять ресурсы, выбирать наилучшие варианты при принятии решений, решать другие задачи оптимизации.

Стороны, участвующие в конфликте, называются игроками. Если в игре участвуют только две стороны, то игра называется парной. Исход игры называется выигрышем (или проигрышем) игроков. Пусть игрок может выбрать в качестве действий одну из n альтернатив: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Эти альтернативы в теории игр принято называть **чистыми стратегиями**. Аналогично, игрок B может принять одну из m стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Предположим, что известны выигрыши (проигрыши) игрока A при любой выбранной им стратегии A_i и любом ответе ему игроком B – стратегии B_j . Пусть этот результат выражен числом a_{ij} (которое может быть и отрицательным в случае проигрыша A). Величины a_{ij} образуют матрицу:

A_i \ B_j	B_1	B_2	…	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}
…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

Рис. 1. Платёжная матрица размерности $m \times n$

Данная матрица называется платёжной. Чистой стратегией игрока A является выбор одной из n строк A_i матрицы выигрышей, а чистой стратегией игрока B является выбор одного из столбцов этой же матрицы.

1. Постановка задачи

Дана платёжная матрица размерности $m \times n$ для игр без седловой точки. Это значит, что нижняя цена игры $\alpha = \underset{i}{max}\,\underset{j}{min}\,a_{ij}$ меньше верхней цены игры $\beta = \underset{j}{min}\,\underset{i}{max}\,a_{ij}$. Поэтому решений в чистых стратегиях не будет. В данной курсовой работе необходимо:

1. Обосновать метод сведения задачи из теории игр к задаче линейного программирования.
2. Научиться программировать задачу линейного программирования в EXCEL.
3. Посчитать в EXCEL несколько задач для учебного процесса.

2. Задача линейного программирования

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности. К математическим задачам линейного программирования относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

Если в задаче линейного программирования на поиск максимума все ограничения являются неравенствами типа $\leqslant$, а на все переменные наложено условие положительности, то такая задача называется стандартной задачей максимизации:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to max \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \ i = \overline{1, m}, \\ x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (2)$$

Если в задаче линейного программирования на поиск минимума все ограничения являются неравенствами типа $\geqslant$, а на все переменные наложено условие положительности, то такая задача называется стандартной задачей минимизации:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geqslant b_i, \ i = \overline{1, m}, \\ x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (3)$$

Линейная функция (1) называется целевой функцией. В задаче нужно найти такие значения переменных , которые удовлетворяют системе ограничений (2)(или (3)), и при которых целевая функция $F(x)$ имеет наибольшее (или наименьшее) значение.

С каждой задачей линейного программирования вида

$$\begin{cases} F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_kx_k \to max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_k \geqslant 0, \ k = \overline{1, n}, \end{cases} \qquad (4)$$

можно связать другую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} G(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_iy_i \to min; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}y_i \geqslant c_k, \quad k = \overline{1, n}, \\ y_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, m}, \end{cases} \qquad (5)$$

Задачу (5) называют двойственной задачей линейного программирования по отношению к задаче (4).

3. Теория игр

Пусть $S = s_1, \ldots, s_n$ — множество всех чистых стратегий игрока. Для любых вероятностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, таких что $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant 1$ и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, стратегия вида

$$\begin{cases} s_1 \text{ с вероятностью } \alpha_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n \text{ с вероятностью } \alpha_n \end{cases} \tag{6}$$

называется **смешанной стратегией**. Обозначим

$$S_A = \overrightarrow{p} = (p_1, \ldots, p_n);\ S_B = \overrightarrow{q} = (q_1, \ldots, q_m)$$

за смешанные стратегии игроков A и B. Оптимальная стратегия — это такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечит данному игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш).

Теорема Неймана

Применение оптимальных смешанных стратегий гарантирует игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш) равный цене игры

$$\nu^* = \max_{\overrightarrow{p}} \min_{\overrightarrow{q}} \overrightarrow{p} M \overrightarrow{q}^T = \min_{\overrightarrow{q}} \max_{\overrightarrow{p}} \overrightarrow{p} M \overrightarrow{q}^T = \overrightarrow{p}^* M \overrightarrow{q}^*,$$

где M — исходная платёжная матрица, которая является матрицей выигрышей игрока A; $\overrightarrow{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$, $\overrightarrow{q}^* = (q_1^*, \ldots, q_m^*)$ — оптимальные стратегии.

Оптимальные стратегии обладают следующими свойствами:

1. $\overrightarrow{p} M \overrightarrow{q}^{*T} \leqslant \nu^* \leqslant \overrightarrow{p}^* M \overrightarrow{q}^T$,
2. $\overrightarrow{p}^* M \overrightarrow{q}^{*T} = \nu^*$,
3. $\alpha \leqslant \nu^* \leqslant \beta$.

Чтобы получить $\nu^* > 0$, прибавим ко всем ячейкам a_{ij} матрицы элемент $\max\limits_{i,j} |a_{ij}| + 1$. Пусть A принименяет оптимальные смешанные стратегии $\overrightarrow{p}^*$ против чистой стратегии B_j, т.е. $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q_j} = (0, \ldots, 1^j, \ldots, 0) = B_j$. Из первого свойства оптимальных стратегий следует, что $\overrightarrow{p}^* M \overrightarrow{q_j}^T \geqslant \nu^*$ при $j = \{1, \ldots, m\}$;

$$M \overrightarrow{q_j}^T = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})^T \Rightarrow \overrightarrow{p}^* M \overrightarrow{q_j}^T = a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + \ldots + a_{nj} p_n^*.$$

Таким образом получаем систему из m уравнений и n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + \ldots + a_{n1} p_n^* \geqslant \nu^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m} p_1^* + a_{2m} p_2^* + \ldots + a_{nm} p_n^* \geqslant \nu^* \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим $x_1 = \dfrac{p_1^*}{\nu^*}, \ldots, x_n = \dfrac{p_n^*}{\nu^*}$. Данная операция правомерна в силу того, что $\nu^* > 0$, а так как и $p_i > 0$ для $\forall i = \overline{1,\, n}$, то тогда получаем следующую систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + \ldots + a_{n1}x_n^* \geqslant 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}x_1^* + a_{2m}x_2^* + \ldots + a_{nm}x_n^* \geqslant 1 \end{cases} \tag{8}$$

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_n^* = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{p_1^*}{\nu^*} + \ldots + \frac{p_n^*}{\nu^*} = \frac{1}{\nu^*} \;\Leftrightarrow\; x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{\nu^*}.$$

Игрок A хочет максимизировать выигрыш $\nu^* \to max \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{\nu^*} \to min.$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to min. \tag{9}$$

Условия (8) и (9) образуют задачу линейного программирования на минимум. Решив её, найдём $x_1, \ldots, x_n$. Теперь сможем найти оптимальную цену игры $\nu^* = \dfrac{1}{x_1, \ldots, x_n}$. Тогда оптимальные стратегии игрока A будут равны $p_1 = x_1\nu^*, \ldots, p_n = x_n\nu^*$.

Пусть игрок B принимает оптимальную стратегию $q^* = (q_1, \ldots, q_m)$ против чистой стратегии A_i, т.е. $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_i} = (0, \ldots, 1^i, \ldots, 0) = A_i$. Из первого свойства оптимальных стратегий следует, что

$$\overrightarrow{p_i} M \overrightarrow{q}^{*T} \leqslant \nu^* \text{ при } i = \{1, \ldots, n\}; \tag{10}$$

$$\overrightarrow{p_i} M = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})^T \Rightarrow \overrightarrow{p_i} M \overrightarrow{q}^{*T} = a_{i1}p_1^* + a_{i2}p_2^* + \ldots + a_{im}p_m^*. \tag{11}$$

Учитывая (10), (11), получаем систему из n уравнений и m неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* + \ldots + a_{1m}q_m^* \leqslant \nu^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}q_1^* + a_{n2}q_2^* + \ldots + a_{nm}q_m^* \leqslant \nu^* \end{cases} \tag{12}$$

Произведём замену:

$$y_1 = \frac{q_1^*}{\nu^*}, \ldots, y_m = \frac{q_m^*}{\nu^*}.\; y_j \geqslant 0 \text{ для } j = \overline{1,\, m}. \tag{13}$$

Поделив на ν^* левую и правую часть каждого из уравнений системы (12) и учитывая замену (13), получаем систему

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m \leqslant 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m \leqslant 1 \end{cases} \tag{14}$$

$$q_1^* + q_2^* + \ldots + q_m^* = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{q_1^*}{\nu^*} + \ldots + \frac{q_m^*}{\nu^*} = \frac{1}{\nu^*} \;\Leftrightarrow\; y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \frac{1}{\nu^*}.$$

Игрок B хочет уменьшить проигрыш $\nu^* \to min \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{\nu^*} \to max.$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to max. \tag{15}$$

Условия (14), (15) образуют ЗЛП на максимум в стандартной форме. Решив её, найдём $y_1, \ldots, y_m$, затем вычислим $\dfrac{1}{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}$, потом получим значения $q_1^* = y_1\nu^*, \ldots, q_n^* = y_n\nu^*$.

(9),(8) и (15),(14) - взаимнодвойственные ЗЛП.

Любую матричную игру можно свести к задаче линейного программирования, вернее, к паре двойственных друг другу задач линейного программирования и наоборот, любой ЗЛП соответствует некоторая игра.

4. Решение задачи линейного программирования с помощью надстройки «Поиск решения»

Шаг 1

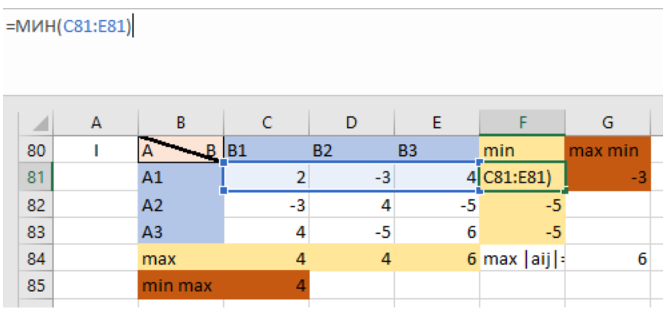
Ввод платёжной матрицы игрока A с исходными данными.

A \ B	B1	B2	B3
A1	2	-3	4
A2	-3	4	-5
A3	4	-5	6

Рис. 2. Ввод матрицы

Шаг 2

Строим функции для вычисления минимумов по строкам A_i и максимумов по столбцам B_j. Затем вычисляем максимум из минимумов и минимум из максимумов.


=МИН(C81:E81)

	A	B	C	D	E	F	G
80	I	A \ B	B1	B2	B3	min	max min
81		A1	2	-3	4	C81:E81)	-3
82		A2	-3	4	-5	-5	
83		A3	4	-5	6	-5	
84		max	4	4	6	max |aij|=	6
85		min max	4				

Рис. 3. Поиск минимумов по строкам и максимумов по столбцам

Шаг 3

Вычисляем максимальный по модулю элемент в матрице.

=МАКС(ABS(F81);ABS(F82);ABS(F83);ABS(C84);ABS(D84);ABS(E84))

	A	B	C	D	E	F	G
80	I	A \ B	B1	B2	B3	min	max min
81		A1	2	-3	4	-3	-3
82		A2	-3	4	-5	-5	
83		A3	4	-5	6	-5	
84		max	4	4	6	max |aij| =	ABS(E84))
85		min max	4				

Рис. 4. Нахождение максимального по модулю элемента в матрице

Шаг 4

Для того, чтобы цена ν^* была положительной, необходимо, чтобы для всех ячеек матрицы выполнялось неравенство $a_{ij} \geqslant 0$, а для этого добавляем к каждой ячейке $\max\limits_{i,j}|a_{ij}| + 1$ (добавляем число 7).

	A \ B	B1	B2	B3	min	max min
+	A1	9	4	11	4	4
7	A2	4	11	2	2	
	A3	11	2	13	2	
	max	11	11	13		
	min max	11				

Рис. 5. Преобразование матрицы

Шаг 5

В меню EXCEL водим параметры → надстройки → поиск решения

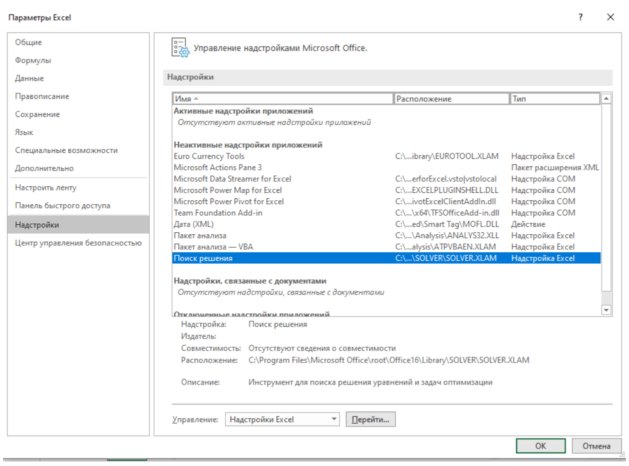


Рис. 6. Подключение надстройки «поиск решения»

Шаг 6

Введя граничные условия в надстройке «поиск решения», находим минимум целевой функции, цену игры (где ν^* — цена игры для преобразованной матрицы, а ν — цена игры для изначально заданной матрицы), значения неизвестных переменных (иксов) и коэффициентов при них (вероятностей).

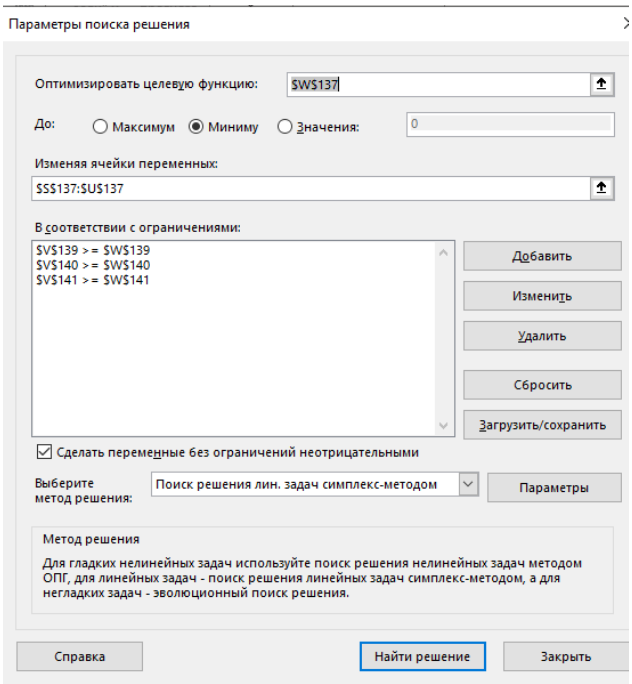


Рис. 7. Ввод типа ЗЛП (на максимум или на минимум), ограничений в надстройке

X1	X2	X3				p1*	p2*	p3*
0.035714	0.071429	0.035714	Min:	0.142857	v*: 7	0.25	0.5	0.25
1	1	1			v : 0			
9	4	11	1	1				
4	11	2	1	1				
11	2	13	1	1				

Рис. 8. Поиск минимальной цены игры, неизвестных переменных x_1, x_2, x_3 и вероятностей их «выпадения»

Шаг 7

Аналогичным образом решаем двойственную ЗЛП на поиск максимума

Y1	Y2	Y3						q1*	q2*	q3*
0,035714	0,071429	0,035714	Max:	0,142857	v*:	7		0,25	0,5	0,25
1	1	1			v:	0				
9	4	11	1	1						
4	11	2	1	1						
11	2	13	1	1						

Рис. 9. Поиск максимальной цены игры, неизвестных переменных y_1, y_2, y_3 и вероятностей их «выпадения»

5. Примеры решения задачи в EXCEL

Решить задачи в чистых или смешанных стратегиях. Найти верхнюю, нижнюю и просто цену игры. В каждом примере решаем задачу минимизации целевой функции и двойственной к ней задачи максимизации целевой функции.

Пример 1 (Экономическая задача).

Условие.

Предприятие может выпускать 3 вида продукции A_1, A_2, A_3, получая прибыль, которая завсисит от спроса. Спрос может быть в одном из четырёх состояний: B_1, B_2, B_3, B_4. Дана платёжная матрица в виде таблицы. Её элементы a_{ij} равны прибыли предприятия при выпуске i-ой продукции с j-м состоянием спроса. Найти оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределённым.

A \ B	B1	B2	B3	B4
A1	3	3	6	8
A2	9	10	4	2
A3	7	7	5	4

Рис. 10. Исходная платёжная матрица

Решение.

Задача сводится к игре, в которой игра предприятия A против спроса B задана платёжной матрицей.

Сначала упростим игру, исключив из платёжной матрицы заведомо невыгодные стратегии. Такими стратегиями для $A(B)$ являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов). Так вторая стратегия B_2 (2-й столбец) является невыгодной для B, потому что по сравнению с B_1 все элементы второго столбца больше либо равны элементов первого столбца соответствующих строк. Поэтому 2-й столбец отбрасываем, то есть не будем применять стратегию B_2: $q_2 = 0$ (ведь B стремиться уменьшить выигрыш A). Получим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 4 < 6 = \beta$ нет седловой точки $\Rightarrow$ оптимальное решение ищем в смешанных стратегиях игроков:

$$S_A^* = (p_1,\, p_2,\, p_3); S_B^* = (q_1,\, q_2,\, q_3);$$

Ai \ Bj	B1	B3	B4	αj
A1	3	6	8	3
A2	9	4	2	2
A3	7	5	4	4
βi	9	6	8	6 \ 4

Рис. 11. Упрощённая платёжная матрица

Все элементы матрицы P положительны. Составим и решим ЗЛП:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geqslant 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geqslant 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geqslant 1 \end{cases}$$

X1	X2	X3						p1*	p2*	p3*
0,074074	0	0,111111	Min:	0,185185	v*:	5,4		0,4	0	0,6
1	1	1			v:	4,4				
3	9	7	1	1						
6	4	5	1	1						
8	2	4	1,037037	1						

Рис. 12. ЗЛП на поиск минимума

$$G = y_1 + y_2 + y_3 \to max$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \leqslant 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leqslant 1 \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

Y1	Y2	Y3						q1*	q2*	q3*
0,03703704	0,148148	0	Max:	0,185185	v*:	5,4		0,2	0,8	0
1	1	1			v:	4,4				
3	6	8	1	1						
9	4	2	0,925926	1						
7	5	4	1	1						

Рис. 13. ЗЛП на поиск максимума, двойственная к предыдущей задаче

Таким образом предприятие A должно выпускать 40% продукции A_1, 60% продукции A_3, а продукцию A_2 не выпускать. При этом в 20% случаях оптимальным спросом будет состояние B_1, а в 80% случаев состояние B_2.

Пример 2.

Решить игру с данной платёжной матрицей

3	-1	-3
-3	3	-1
-4	-4	3

Рис. 14. Исходная платёжная матрица

Найдём максимум из минимумов по строкам $\alpha = \underset{i}{max}\,\underset{j}{min}\,a_{ij}$, минимум из максимумов по столбцам $\beta = \underset{j}{min}\,\underset{i}{max}\,a_{ij}$ и максимум из модулей всех элементов матрицы $\underset{i,j}{max}|a_{ij}|$ (рис. 15).

I	A\B	B1	B2	B3	min	max min
	A1	3	-1	-3	-3	-3
	A2	-3	3	-1	-3	
	A3	-4	-4	3	-4	
	max	3	3	3	max |aij|	4
	min max	3				

Рис. 15. Поиск максимума и минимума

Так как $\alpha = -3 < 3 = \beta$, то нет решения в чистых стратегиях, а значит ищем решение в смешанных стратегиях. Затем после прибавления к каждой ячейке числа $(\underset{i,j}{max}|a_{ij}| + 1) = 5$ на основе изменённой матрицы решаем ЗЛП на поиск минимума (условия (16) и (17)), а далее для транспонированной матрицы решаем ЗЛП на поиск максимума (условия (18) и (19)).

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to min \tag{16}$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 \geqslant 1 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 \geqslant 1 \end{cases} \tag{17}$$

X1	X2	X3						p1*	p2*	p3*
0,07142857	0,052381	0,109524	Min:	0,233333	v*:	4,285714		0,306122	0,22449	0,469388
1	1	1			v:	-0,71429				
8	4	2	1	1						
2	8	4	1	1						
1	1	8	1	1						

Рис. 16. ЗЛП на поиск минимума

$$G = y_1 + y_2 + y_3 \to max \tag{18}$$

$$\begin{cases} 8y_1 + 2y_2 + 1y_3 \leqslant 1 \\ 4y_1 + 8y_2 + 1y_3 \leqslant 1 \\ 2y_1 + 4y_2 + 8y_3 \leqslant 1 \end{cases} \tag{19}$$

Y1	Y2	Y3						p1*	p2*	p3*
0,1	0,066667	0,066667	Max:	0,233333	v*:	4,285714		0,428571	0,285714	0,285714
1	1	1			v:	-0,71429				
8	2	1	1	1						
4	8	1	1	1						
2	4	8	1	1						

Рис. 17. ЗЛП на поиск максимума, двойственная к предыдущей задаче

Ответ:

Цена игры $\nu \approx -0.714$.

Оптимальные смешанные стратегии

$S_A = (0.306,\ 0.224,\ 0.469)$ и $S_B = (0.429,\ 0.286,\ 0.286)$.

Пример 3.

Решить игру с данной платёжной матрицей:

8	9	9	4
6	5	8	7
3	4	5	6

Рис. 18. Исходная платёжная матрица

Найдём максимум из минимумов по строкам $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, минимум из максимумов по столбцам $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ и максимум из модулей всех элементов матрицы $\max\limits_{i,j} |a_{ij}|$ (рис. 19).

I	A \ B	B1	B2	B3	B4	min	max min
	A1	8	9	9	4	4	5
	A2	6	5	8	7	5	
	A3	3	4	5	6	3	
	max	8	9	9	7	max |aij|	9
	min max	7					

Рис. 19. Поиск максимума и минимума

Так как $\alpha = 5 < 7 = \beta$, то нет решения в чистых стратегиях, а значит ищем решение в смешанных стратегиях. Затем после прибавления к каждой ячейке числа $(\max\limits_{i,j} |a_{ij}| + 1) = 10$ на основе изменённой матрицы решаем ЗЛП на поиск минимума (условия (20) и (21)), а далее для транспонированной матрицы решаем ЗЛП на поиск максимума (условия (22) и (23)).

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to min \tag{20}$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 19x_2 + 19x_3 + 14x_4 \geqslant 1 \\ 16x_1 + 15x_2 + 18x_3 + 17x_4 \geqslant 1 \\ 13x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 16x_4 \geqslant 1 \end{cases} \tag{21}$$

X1	X2	X3	X4						p1*	p2*	p3*	p4*
0	0	0,021277	0,042553	Min:	0,06383	v*:	15,66667		0	0	0,33333333	0,666667
1	1	1	1			v:	5,666667					
18	19	19	14	1	1							
16	15	18	17	1,106383	1							
13	14	15	16	1	1							

Рис. 20. ЗЛП на поиск минимума

$$G = y_1 + y_2 + y_3 \to max \tag{22}$$

$$\begin{cases} 18y_1 + 16y_2 + 13y_3 \leqslant 1 \\ 19y_1 + 15y_2 + 14y_3 \leqslant 1 \\ 19y_1 + 18y_2 + 15y_3 \leqslant 1 \\ 14y_1 + 17y_2 + 16y_3 \leqslant 1 \end{cases} \tag{23}$$

Y1	Y2	Y3						p1*	p2*	p3*
0,010638	0	0,053191	Max:	0,06383	v*:	15,66667		0,166667	0	0,833333
1	1	1			v:	5,666667				
18	16	13	0,882979	1						
19	15	14	0,946809	1						
19	18	15	1	1						
14	17	16	1	1						

Рис. 21. ЗЛП на поиск максимума, двойственная к предыдущей задаче

Ответ:

Цена игры $\nu \approx 5.(6)$.

Оптимальные смешанные стратегии

$S_A = (0,\ 0,\ 0.(3),\ 0.(6))$ и $S_B = (0.1(6),\ 0,\ 0.8(3))$.

Пример 4.

Решить игру с данной платёжной матрицей:

2	5	3
6	4	5
3	7	6
2	3	4

Рис. 22. Исходная платёжная матрица

Найдём максимум из минимумов по строкам $\alpha = \underset{i}{max}\,\underset{j}{min}\,a_{ij}$, минимум из максимумов по столбцам $\beta = \underset{j}{min}\,\underset{i}{max}\,a_{ij}$ и максимум из модулей всех элементов матрицы $\underset{i,j}{max}|a_{ij}|$ (рис. 23).

I	A\B	B1	B2	B3	min	max min
	A1	2	5	3	2	4
	A2	6	4	5	4	
	A3	3	7	6	3	
	A4	2	3	4	2	
	max	6	7	6	max |aij|	7
	min max	6				

Рис. 23. Поиск максимума и минимума

Так как $\alpha = 4 < 6 = \beta$, то нет решения в чистых стратегиях, а значит ищем решение в смешанных стратегиях. Затем после прибавления к каждой ячейке числа $(\underset{i,j}{max}|a_{ij}| + 1) = 8$ на основе изменённой матрицы решаем ЗЛП на поиск минимума (условия (24) и (25)), а далее для транспонированной матрицы решаем ЗЛП на поиск максимума (условия (26) и (27)).

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to min \tag{24}$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 13x_2 + 11x_3 \geqslant 1 \\ 14x_1 + 12x_2 + 13x_3 \geqslant 1 \\ 11x_1 + 15x_2 + 12x_3 \geqslant 1 \\ 10x_1 + 11x_2 + 12x_3 \geqslant 1 \end{cases} \tag{25}$$

X1	X2	X3						p1*	p2*	p3*
0	0,028571	0,057143	Min:	0,085714	v*:	11,66667		0	0,333333	0,666667
1	1	1			v:	3,666667				
10	13	11	1	1						
14	12	13	1,085714	1						
11	15	14	1,228571	1						
10	11	12	1	1						

Рис. 24. ЗЛП на поиск минимума

$$G = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to max \tag{26}$$

$$\begin{cases} 10y_1 + 14y_2 + 11y_3 + 10y_4 \leqslant 1 \\ 13y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 11y_4 \leqslant 1 \\ 11y_1 + 13y_2 + 14y_3 + 12y_4 \leqslant 1 \end{cases} \tag{27}$$

Y1	Y2	Y3	Y4						p1*	p2*	p3*	p4*
0,028571	0	0	0,057143	Max:	0,085714	v*:	11,66667		0,333333	0	0	0,666667
1	1	1	1			v:	3,666667					
10	14	11	10	0,857143	1							
13	12	15	11	1	1							
11	13	14	12	1	1							

Рис. 25. ЗЛП на поиск минимума, двойственная к предыдущей задаче

Ответ:

Цена игры $\nu \approx 3.(6)$.

Оптимальные смешанные стратегии

$S_A = (0,\ 0.(3),\ 0.(6))$ и $S_B = (0.1(6),\ 0,\ 0.8(3))$.

6. Заключение

В курсовой работе проведено обоснование метода сведения задач из теории игр к задаче линейного программирования, получены навыки программирования задачи линейного программирования на платформе $MS\ EXCEL$, было решено несколько задач учебного процесса из теории игр путём их сведения к задаче линейного программирования и последующего её решения.

Список использованных источников

1. Волков И. К., Загоруйко Е. А. Исследование операций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 435 с.
2. Грешнилов А. А. Математические методы принятия решений. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 647 с.
3. Кулешова О. В. Microsoft EXCEL 2010. Анализ и Визуализация данных. Решение практических задач. М.: «Специалист» при МГТУ им Баумана, 2012. 47 с.
4. Шагин В. Л. Теория игр. М.: Изд-во Юрайт, 2015. 223 с.