Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

Численное моделирование напряженно-деформированного состояния упругого основания с покрытием

Студент ФН2-62Б (Группа) (Подпись, дата) А. А. Кононенко (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы (Подпись, дата) К. Е. Казаков (И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

Введение

В упругий слой, лежащий на недеформируемом основании, вдавливается кольцевой жесткий штамп с плоским основанием. Необходимо определить напряжения, деформации и перемещения точек слоя в предположении, что деформации малы. Исследовать напряженно-деформированное состояние слоя при заданных параметрах.

1. Построение системы

1.1. Вывод дифференциальных уравнений

Запишем уравнения равновесия в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где τ_{rz}, σ_r, σ_z, σ_θ — компоненты напряжений.

Деформации задаются кинематическими соотношениями:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r}, \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}\right), \end{cases} \tag{2}$$

где u — горизонтальная составляющая вектора перемещений, w — вертикальная составляющая.

Компоненты напряжений определяются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E(1-2\nu)}{1+\nu}((1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)), \\ \sigma_\theta = \dfrac{E(1-2\nu)}{1+\nu}((1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)), \\ \sigma_z = \dfrac{E(1-2\nu)}{1+\nu}((1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r)), \\ \tau_{rz} = \dfrac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{rz}, \end{cases} \tag{3}$$

где E — модуль упругости при растяжении и сжатии, ν — коэффициент Пуассона.

Подставляя компоненты деформации из системы (2) в систему (3), а затем подставляя компоненты напряжений из соотношений (3) в соотношения (1), получаем систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) + \dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}\right) + \\ +(1-2\nu)\left[(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{1}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial z}\right)\right] = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z}\right) + (1-2\nu)\left[\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + (1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{\partial u}{r \partial r} - \dfrac{u}{r^2}\right)\right] = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В силу симметрии относительно центральной вертикальной оси, для исследования изменения положения частиц слоёв достаточно рассмотреть одно сечение (рис. 1).

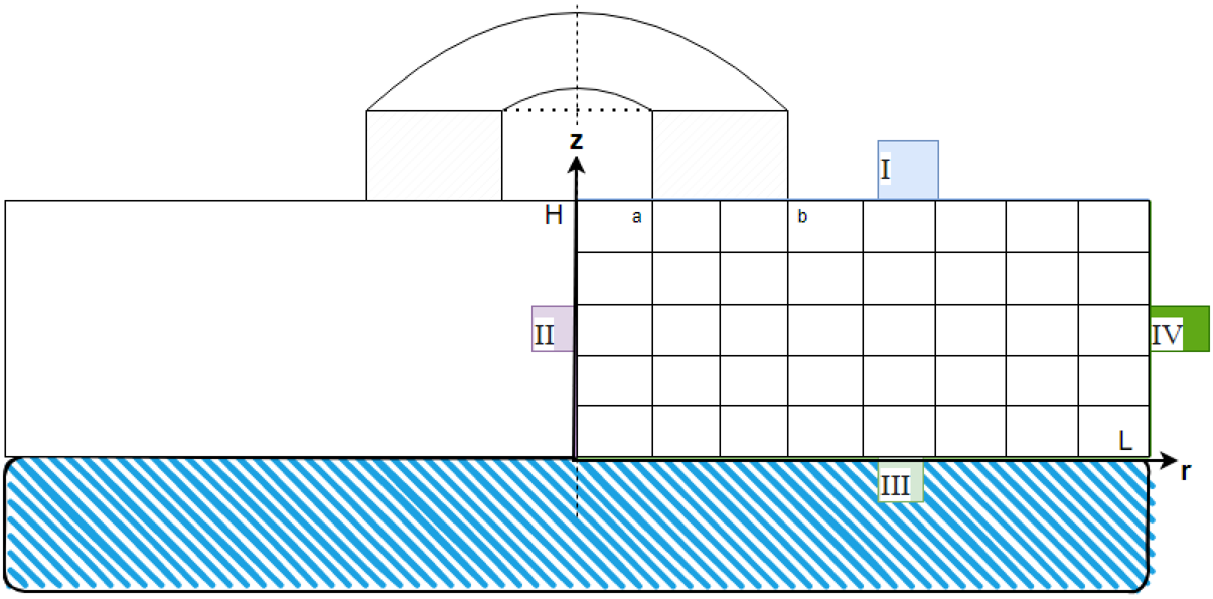

Рис. 1. Вертикальный разрез.

1.2. Задание граничных условий

Рассмотрим верхнюю грань (I): в области взаимодействия штампа и слоя известны вертикальные перемещения грани. Вне области контакта поверхность свободна от напряжений. Тогда граничные условия будут такие:

$$(I)\colon \begin{cases} w|_{z=h} = -\delta, \quad r \in [a,\, b], \\ \sigma_r|_{z=h} = 0, \quad r \notin [a,\, b], \\ \tau_{rz}|_{z=h} = 0, \quad r \geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

В силу симметрии на оси z выполняются следующие условия

$$(II)\colon \begin{cases} \tau_{rz}|_{r=0} = 0, \quad z \in [0,\, H], \\ u|_{r=0} = 0, \quad z \in [0,\, H]. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть снизу задан идеальный контакт. Тогда верны граничные условия

$$(III)\colon \begin{cases} u|_{z=0} = 0, \quad r \geqslant 0, \\ w|_{z=0} = 0, \quad r \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

На достаточном удалении от области взаимодействия

$$(IV)\colon u, w \to 0 \text{ при } r \to \infty, \quad z \in [0,\, H]. \tag{8}$$

Таким образом мы получили систему двух дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных (4) и восемь граничных условий (5)— (8):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) + \dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}\right) + \\ +(1-2\nu)\left[(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{1}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial z}\right)\right] = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z}\right) + (1-2\nu)\left[\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + (1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{\partial u}{r \partial r} - \dfrac{u}{r^2}\right)\right] = 0, \\ w|_{z=h} = -\delta, \quad r \in [a,\, b], \\ \sigma_z|_{z=h} = 0, \quad r \notin [a,\, b], \\ \tau_{rz}|_{z=h} = 0, \quad r \geqslant 0, \\ \tau_{rz}|_{r=0} = u|_{r=0} = 0, \qquad z \in [0,\, H], \\ u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0, \qquad r \geqslant 0, \\ \lim\limits_{r\to\infty} u = 0,\ \lim\limits_{r\to\infty} w = 0, \qquad z \in [0,\, H]. \end{cases} \tag{9}$$

2. Преобразование системы, получение разностной схемы

Преобразуем систему (9), построив для каждого дифференциального уравнения разностную схему; выразим граничные условия через функции $u(r,\, z)$, $w(r,\, z)$, а также упростим граничные условия.

Для упрощения последних граничных условий системы (9) допустимо применить принцип Сен-Венана.

Принцип Сен-Венана
Если размеры области приложения внешней нагрузки невелики по сравнению с размерами слоя, то в точках, достаточно удаленных от места взаимодействия, напряжения, деформации и перемещения мало зависят от приложенной нагрузки.

Область:

$$(r,\, z) \in \Omega = [0,\, L] \times [0,\, H].$$

Сетка:

$$\Omega_h = \left\{(r_i,\, z_j) \mid r_i = ih_r,\, z_j = jh_z,\, i = \overline{0, N},\, j = \overline{0, M}\right\},$$
$$\text{где} \quad h_r = \frac{L}{N}, \quad h_z = \frac{H}{M}.$$

Переход к сеточным функциям:

$$u_{ij} = u(r_i,\, z_j), \quad w_{ij} = w(r_i,\, z_j).$$

При создании разностной схемы для дифференциальных уравнений возьмём девятиточечный шаблон: крест с угловыми точками. Аппроксимируем первые производные центральными разностными производными, вторые производные по одной координате аппроксимируем как отношение приращения функции к приращению аргумента, где в качестве функции выступает аппроксимация первой производной, для аппроксимации смешанной производной воспользуемся угловыми точками девятиточечного шаблона.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_r}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h_r}, \quad i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{0, M}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_z}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2h_z}, \quad i = \overline{0, N},\ j = \overline{1, M-1}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_r}, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \dfrac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h_r}, \quad i = \overline{1,N-1},\ j = \overline{0, M}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_z}, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_z}, \quad i = \overline{0, N},\ j = \overline{1, M-1}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} = \dfrac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h_z h_r}, \quad i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{1, M-1}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \dfrac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4h_z h_r}, \quad i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{1, M-1}. \end{cases}$$

Выразим компоненты касательного напряжения τ_{rz} через компоненты перемещений $\tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)$ и аппроксимируем производную по z в верхней точке $z = h$ левой разностью, производную по r в левой точке правой разностью, а остальные производные центральной разностью. Возьмём в качестве материала упругого слоя пластик. В таком случае коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, модуль упругости при расширении/сжатии $E = 17$ ГПа. Возьмём расстояния от центральной оси до краёв давления шайбы равными $a = 0.5$, $b = 1.5$ (длина отрезка $b - a = 1$ см). Исходя из принципа Сен-Венана, при достаточно большом удалении от места нагрузки (возьмём $L = 10$ см) перемещения достаточно малы, т. е. $u|_{r=10} = 0$, $w|_{r=10} = 0$ ($z \in [0,\ H]$).

Граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&\text{Слева:} && u|_{r=0} = u_{0j} = 0, \quad j = \overline{0, M},\\
& && \tau_{rz}|_{r=0} = \frac{u_{0,j+1} - u_{0,j-1}}{2h_z} + \frac{w_{1,j} - w_{0,j}}{h_r} = 0, \quad j = \overline{1, M-1},\\
&\text{Справа:} && u|_{r=L} = u|_{r=10} = u_{Nj} = 0, \quad w|_{r=L} = w|_{r=10} = w_{Nj} = 0, \quad j = \overline{0, M}\\
&\text{Снизу:} && u|_{z=0} = u_{i0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_{i0} = 0, \quad i = \overline{0, N},\\
&\text{Сверху:} && w|_{z=H} = w_{iM} = -\delta, \quad i = \overline{N_1, N_2}, \text{ где } N_1 = \frac{a}{h_r},\ N_2 = \frac{b}{h_r},\\
& && \sigma_z|_{z=H} = \frac{E(1-2\nu)}{1+\nu}\Big[(1-\nu)\frac{w_{i,M} - w_{i,M-1}}{h_z} + \nu\big(\frac{u_{i,M}}{ih_r} + \frac{u_{i+1,M} - u_{i-1,M}}{2h_r}\big)\Big] = 0,\\
& && i = \overline{1, N_1 - 1} \cup \overline{N_2 + 1, N-1}, \text{ где } N_1 = \frac{a}{h_r},\ N_2 = \frac{b}{h_r},\\
& && \tau_{rz}|_{z=H} = \frac{u_{i,M} - u_{i,M-1}}{h_z} + \frac{w_{i+1,M} - w_{i-1,M}}{2h_r} = 0, \quad i = \overline{1, N-1}.
\end{aligned}
$$

Тогда система (9) примет вид:

$$
\begin{cases}
u_{i-1,j-1}\dfrac{-0.155}{h_r h_z} + u_{i,j-1}\dfrac{-0.06}{r_i {h_z}^2} + u_{i+1,j-1}\dfrac{-0.155}{h_r h_z} +\\
+u_{i-1,j+1}\dfrac{-0.155}{h_r h_z} + u_{i,j+1}\dfrac{0.06}{r_i h_z} + u_{i+1,j+1}\dfrac{0.155}{h_r h_z} +\\
+w_{i,j-1}\left(\dfrac{-0.25}{r_i h_z} + \dfrac{0.28}{{h_z}^2}\right) + w_{i-1,j}\left(\dfrac{-0.25}{{h_z}^2} + \dfrac{0.5}{{h_r}^2}\right) + w_{i,j}\left(\dfrac{-0.56}{r_i h_r} + \dfrac{-1}{{h_r}^2}\right) +\\
+w_{i-1,j}\left(\dfrac{0.25}{r_i h_r} + \dfrac{0.5}{{h_r}^2}\right) + w_{i-1,j}\left(\dfrac{0.25}{r_i h_r} + \dfrac{0.5}{{h_r}^2}\right) = 0,\ i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{1, M-1},\\
u_{i,j-1}\dfrac{0.5}{{h_z}^2} + u_{i-1,j}\left(\dfrac{0.28}{{h_r}^2} - \dfrac{0.14}{h_r}\right) + u_{i,j}\left(\dfrac{-0.28}{r_i^2} + \dfrac{-1}{{h_z}^2} + \dfrac{-0.56}{{h_r}^2}\right) +\\
+u_{i+1,j}\left(\dfrac{0.28}{{h_r}^2} + \dfrac{0.14r}{h_r}\right) + u_{i,j+1}\dfrac{0.5}{{h_z}^2} = 0, \quad i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{1, M-1},\\
w|_{z=H} = w|_{i,M} = -\delta, \quad r \in [a,\, b],\ i = \overline{N_1, N_2},\\
\sigma_z|_{z=H} = \dfrac{E(1-2\nu)}{1+\nu}\Big[(1-\nu)\dfrac{w_{i,M} - w_{i,M-1}}{h_z} + \nu\big(\dfrac{u_{i,M}}{ih_r} + \dfrac{u_{i+1,M} - u_{i-1,M}}{2h_r}\big)\Big] = 0,\\
i = \overline{1, N_1 - 1} \cup \overline{N_2 + 1, N-1},\\
\tau_{rz}|_{z=H} = \dfrac{u_{i,M} - u_{i,M-1}}{h_z} + \dfrac{w_{i+1,M} - w_{i-1,M}}{2h_r} = 0, \quad i = \overline{1, N-1},\\
\tau_{rz}|_{r=0} = \dfrac{u_{0,j+1} - u_{0,j-1}}{2h_z} + \dfrac{w_{1,j} - w_{0,j}}{h_r} = 0, \quad j = \overline{1, M-1},\\
u|_{r=0} = u|_{0,j} = 0, \quad j = \overline{0, M},\\
u|_{z=0} = w|_{z=0} = u|_{i,0} = w|_{i,0} = 0, \quad i = \overline{0, N},\\
u|_{r=10} = w|_{r=10} = u|_{L,j} = w|_{L,j} = 0, \quad j = \overline{0, M}.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Искомые значения функции u:

$$i = \overline{0,\, N}, \quad j = \overline{0, M},$$

$$U = \big(u_{0,0},\, u_{0,1}, \ldots,\, u_{0,M}, \quad u_{1,0},\, u_{1,1}, \ldots,\, u_{1,M}, \quad \ldots,$$

$$u_{N,\,0},\, u_{N,\,1}, \ldots,\, u_{N,\,M}\big)^T,$$

$$\dim U = (N+1)(M+1).$$

Искомые значения функции w:

$$i = \overline{0,\, N}, \quad j = \overline{0,\, M},$$

$$W = \big(w_{0,0},\, w_{0,\,1}, \ldots,\, w_{0,\,M},\, \ldots,$$

$$w_{N,\,0},\, w_{N,\,1}, \ldots,\, w_{N,\,M}\big)^T,$$

$$\dim W = (N+1)(M+1).$$

Искомые значения в целом:

$$X = (U,\, W)^T;$$

$$\dim X = \dim U + \dim W = 2(N+1)(M+1) = 2 + 2M + 2N + 2MN;$$

$$X = (X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_K)^T, \text{ где } K = \dim X = 2 + 2M + 2N + 2MN.$$

Переход от обозначений u_{ij} и w_{ij} к обозначению X_k:

$$u_{ij} = X_{i(M+1)+j+1}, \quad w_{ij} = X_{(N+1)(M+1)+i(M+1)+j+1}.$$

Учитывая это, преобразуем систему (10) к такому виду:

$$
\begin{cases}
X_{(i-2)M+j-1}\dfrac{-0.155}{h_rh_z}+X_{(i-1)M+j-1}\dfrac{-0.06}{r{h_z}^2}+X_{iM+j-1}\dfrac{-0.155}{h_rh_z}+\\
+X_{(i-2)M+j+1}\dfrac{-0.155}{h_rh_z}+X_{(i-1)M+j+1}\dfrac{0.06}{rh_z}+X_{iM+j+1}\dfrac{0.155}{h_rh_z}+\\
+X_{(N-1)M+i(M-1)+j-1}\left(\dfrac{-0.25}{rh_z}+\dfrac{0.28}{{h_z}^2}\right)+\\
+X_{(N-1)M+(i-1)(M-1)+j}\left(\dfrac{-0.25}{rh_r}+\dfrac{0.5}{{h_r}^2}\right)+\\
+X_{(N-1)M+i(M-1)+j}\left(\dfrac{-0.56}{{h_z}^2}+\dfrac{-1}{{h_r}^2}\right)+X_{(N-1)M+(i+1)(M-1)+j}\left(\dfrac{0.25}{rh_r}+\dfrac{0.5}{{h_r}^2}\right)+\\
+X_{(N-1)M+i(M-1)+j+1}\left(\dfrac{0.25}{rh_z}+\dfrac{0.28}{{h_z}^2}\right)=0,\quad i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{1,M-1},\\
X_{(i-1)M+j-1}\dfrac{0.5}{{h_z}^2}+X_{(i-2)M+j}\left(\dfrac{0.28}{{h_r}^2}-\dfrac{0.14r}{h_r}\right)+\\
+X_{(i-1)M+j}\left(\dfrac{-0.28}{r^2}+\dfrac{-1}{{h_z}^2}+\dfrac{-0.56}{{h_r}^2}\right)+X_{iM+j}\left(\dfrac{0.28}{{h_r}^2}+\dfrac{0.14r}{h_r}\right)+\\
+X_{(i-1)M+j+1}\dfrac{0.5}{{h_z}^2}+0,155(X_{(N-1)M+(i-1)(M-1)+j-1}-\\
-X_{(N-1)M+(i+1)(M-1)+j-1}+X_{(N-1)M+(i+1)(M-1)+j+1}-\\
-X_{(N-1)M+(i-1)(M-1)+j+1})=0,\quad i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{1,M-1},\\
X_{NM+i(M-1)}=-\delta,\quad i=\overline{N_1,N_2},\ \text{где } N_1=\dfrac{a}{h_r},\ N_2=\dfrac{b}{h_r},\\
\dfrac{X_{iM}-X_{iM-1}}{h_z}+\dfrac{X_{NM+(i+1)(M-1)}-X_{NM+(i-1)(M-1)}}{2h_r}=0,\quad i=\overline{1,\ N-1},\\
\dfrac{X_{-M+j+1}-X_{-M+j-1}}{2h_z}+\dfrac{X_{NM-1+j}-X_{(N-1)M+j}}{h_r}=0,\quad j=\overline{1,\ M-1},\\
X_{-M+j}=0,\quad j=\overline{0,\ M},\\
X_{(i-1)M}=X_{(N-1)M+i(M-1)}=0,\quad i=\overline{0,\ N},\\
X_{(N-1)M+j}=X_{(N-1)M+N(M-1)+j}=0,\quad j=\overline{0,\ M}.
\end{cases}
\tag{11}
$$

2.1. Визуализация результатов

Результаты расчётов представлены на рис. 2— 5:

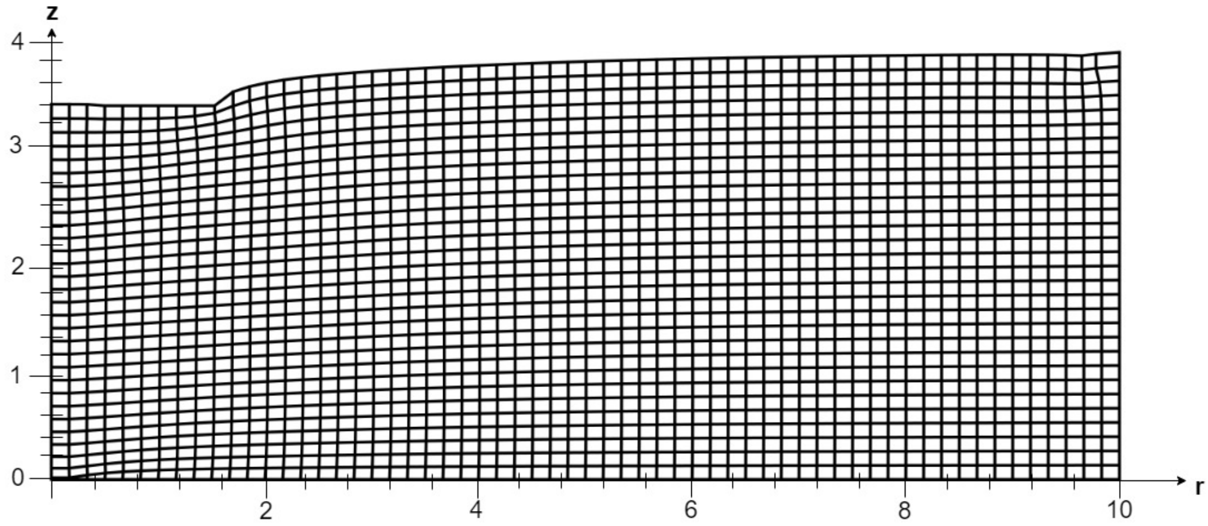

Рис. 2. График нового положения частиц при $h_r = 1/6, h_z = 2/15$.

На представленных графиках положительные напряжения являются растягивающими, а отрицательные напряжения являются сжимающими.

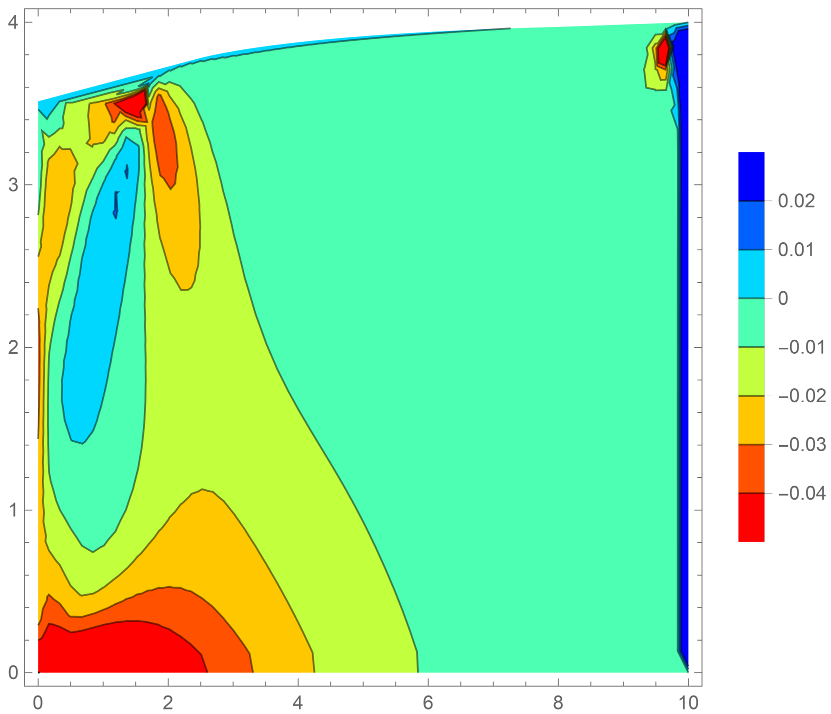

Рис. 3. Графики напряжений σ_r.

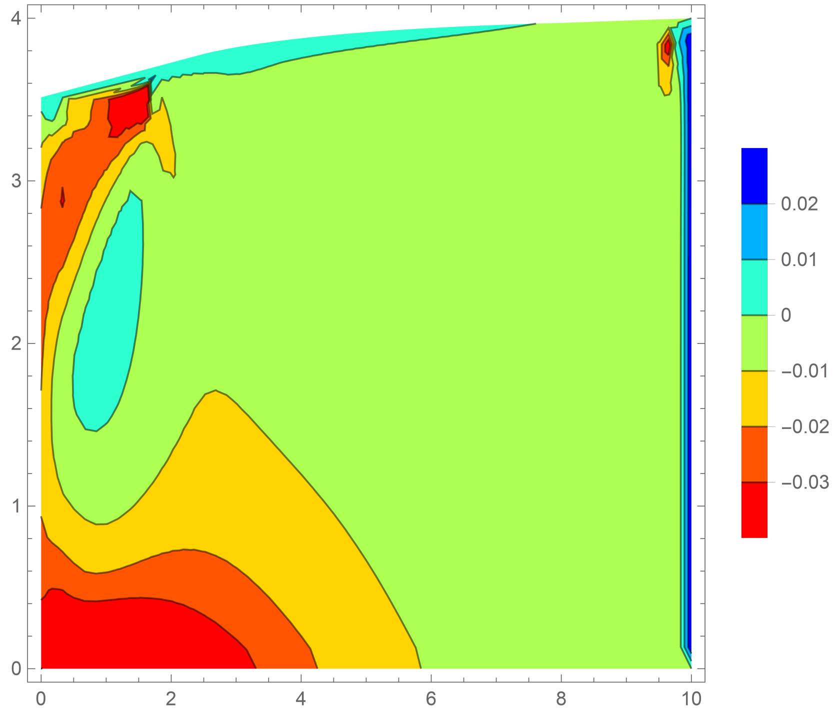

Рис. 4. Графики напряжений σ_θ.

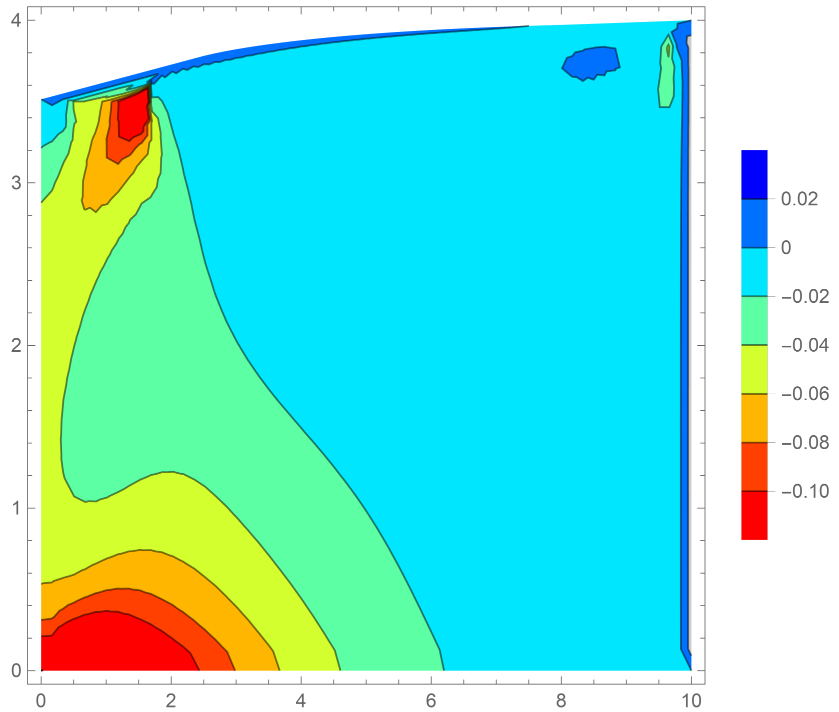

Рис. 5. Графики напряжений σ_z.

Как видно из трёх последних графиков, растягивающие напряжения наибольшие в области соприкосновения шайбы со слоем, а также в области у начала координат.

Вывод

В данной курсовой работе была рассмотрена задача о напряжённо-деформированном состоянии упругого слоя при воздействии на него жёсткого штампа с плоским основанием. Из визуализации полученного решения системы (11) можно сделать вывод, что деформации вблизи места приложения нагрузки наибольшие, а при отдалении от места приложения нагрузки деформации уменьшаются, а значит при отдалении от штампа уменьшаются перемещения и напряжения.

Список использованных источников

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж., Теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 560 с.
2. М. П. Галанин, Е. Б. Савенков. Методы численного анализа математических моделей (2-е изд., исправленное). М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2018. 592 с.