Курсовая работа
Численное решение напряженно-деформированного состояния упругого основания с покрытием

Выполнил: студент группы ФН2–62Б
Кононенко А. А.

Руководитель курсовой работы: к.ф.-м.н., доцент кафедры ФН-2
Казаков К. Е.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Постановка задачи из теории упругости

В упругий слой, лежащий на недеформируемом основании, вдавливается кольцевой жесткий штамп с плоским основанием. Необходимо определить напряжения, деформации и перемещения точек слоя в предположении, что деформации малы. Исследовать напряженно-деформированное состояние слоя в зависимости от его линейных размеров.

В силу симметрии относительно центральной вертикальной оси, для исследования изменения положения частиц слоёв достаточно рассмотреть одно сечение (рис. 1).

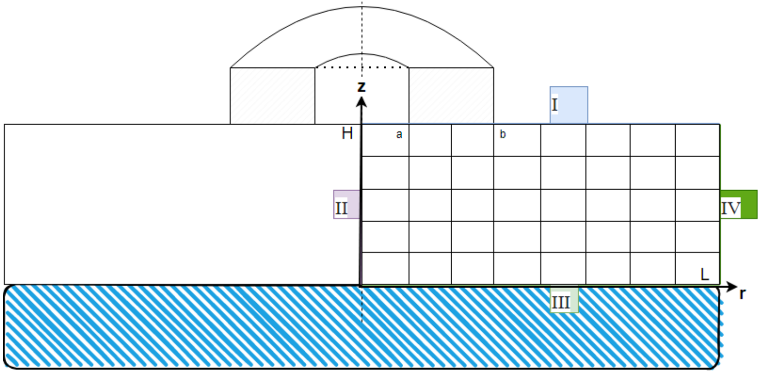

Рис. 1: Вертикальный разрез.

Зададим граничные условия

На верхней грани (I) в области взаимодействия штампа и слоя известны вертикальные перемещения грани:

$$(I):\ \begin{cases} w\big|_{z=H} = -\delta, & r \in [a,\ b], \\ \sigma_r\big|_{z=H} = 0, & r \notin [a,\ b], \\ \tau_{rz}\big|_{z=H} = 0, & r \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

В силу симметрии на оси z выполняются условия

$$(II):\ \begin{cases} \tau_{rz}\big|_{r=0} = 0, & z \in [0,\ H], \\ u\big|_{r=0} = 0, & z \in [0,\ H]. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть снизу (III) задан идеальный контакт, то есть

$$(III):\ \begin{cases} u\big|_{z=0} = 0, & r \geq 0, \\ w\big|_{z=0} = 0, & r \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

На достаточном удалении от области взаимодействия

$$(IV):\ u, w \to 0 \text{ при } r \to \infty, \quad z \in [0,\ H]. \tag{4}$$

Запишем уравнения равновесия в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Деформации задаются кинематическими соотношениями:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Компоненты напряжений определяются соотношениями:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E(1-2\nu)}{1+\nu}((1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)), \\ \sigma_\theta = \frac{E(1-2\nu)}{1+\nu}((1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)), \\ \sigma_z = \frac{E(1-2\nu)}{1+\nu}((1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r)), \\ \tau_{rz} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{rz}. \end{cases} \tag{7}$$

Подставляя относительные удлинения из системы (6) в систему (7), а затем подставляя компоненты напряжений из соотношений (7) в соотношения (5), получаем систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) + \dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}\right) + \\ +(1-2\nu)\left[(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{1}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial z}\right)\right] = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z}\right) + (1-2\nu)\left[\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + (1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{\partial u}{r \partial r} - \dfrac{u}{r^2}\right)\right] = 0, \\ w|_{z=H} = -\delta, \quad r \in [a,\ b], \\ \sigma_z|_{z=H} = 0, \quad r \notin [a,\ b], \\ \tau_{rz}|_{z=H} = 0, \quad r \geq 0, \\ \tau_{rz}|_{r=0} = u|_{r=0} = 0, \quad z \in [0,\ H], \\ u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0, \quad r \geq 0, \\ \lim\limits_{r\to\infty} u = 0, \ \lim\limits_{r\to\infty} w = 0, \quad z \in [0,\ H]. \end{cases} \tag{8}$$

Преобразуем систему (8), построив для каждого дифференциального уравнения разностную схему; выразим граничные условия через функции $u(r, z)$, $w(r, z)$, а также упростим граничные условия.

Для упрощения последних граничных условий системы (8) допустимо применить принцип Сен-Венана.

Область:

$$(r,\, z) \in \Omega = [0,\, L] \times [0,\, H].$$

Сетка:

$$\Omega_h = \left\{(r_i,\, z_j) \mid r_i = ih_r,\, z_j = jh_z,\, i = \overline{0, N},\, j = \overline{0, M}\right\},$$

$$\text{где} \quad h_r = \frac{L}{N}, \quad h_z = \frac{H}{M}.$$

Переход к сеточным функциям:

$$u_{ij} = u(r_i,\, z_j), \quad w_{ij} = w(r_i,\, z_j).$$

Аппроксимация производных, девятиточечный шаблон

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_r}, \ \dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h_r}, \ i = \overline{1, N-1}, \ j = \overline{0, M}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_z}, \ \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2h_z}, \ i = \overline{0, N}, \ j = \overline{1, M-1}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_r}, \ \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \dfrac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h_r}, \ i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_z}, \ \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_z}, \ i = \overline{0, N}, \\ j = \overline{1, M-1}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} = \dfrac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h_z h_r}, \ i = \overline{1, N-1}, \ j = \overline{1, M-1}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \dfrac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4h_z h_r}, \ i = \overline{1, N-1}, \ j = \overline{1, M-1}. \end{cases}$$

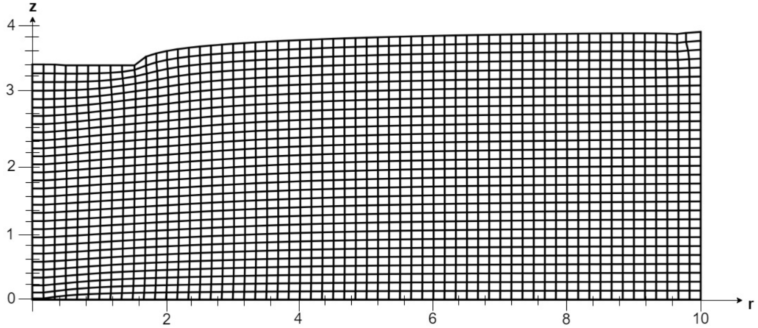

Рис. 2: График нового положения частиц при $h_r = 1/6, h_z = 2/15$.

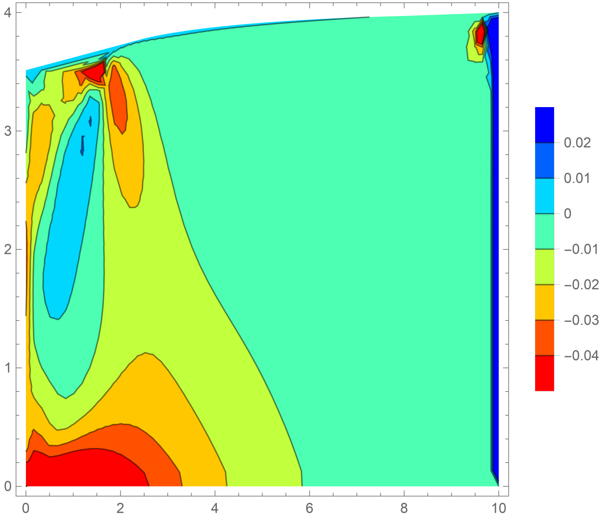

Рис. 3: Графики напряжений σ_r.

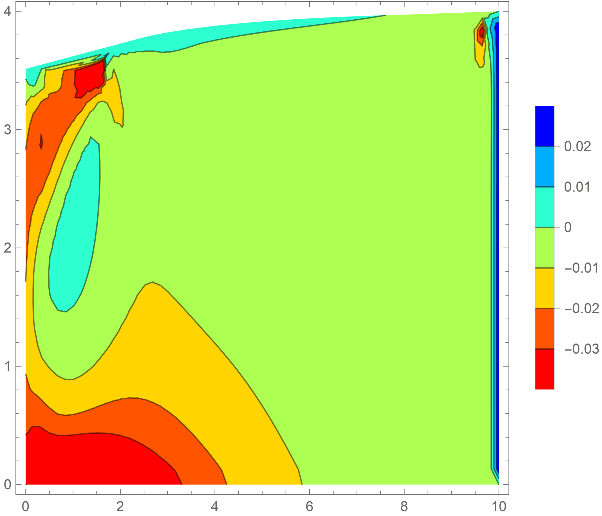

Рис. 4: Графики напряжений σ_θ.

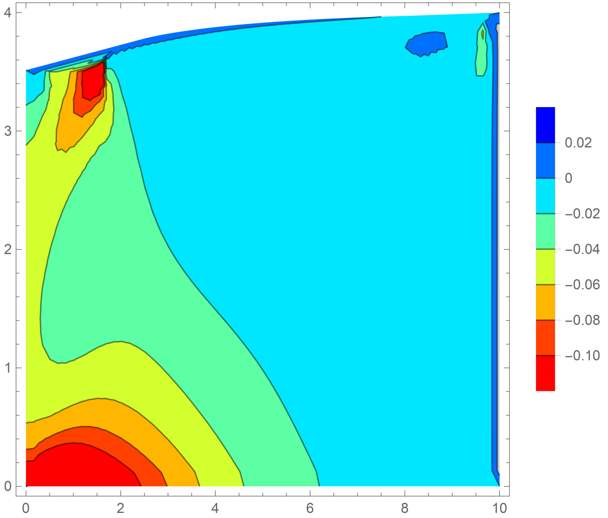

Рис. 5: Графики напряжений σ_z.

Вывод

В данной курсовой работе была рассмотрена задача о напряжённо-деформированном состоянии упругого слоя при воздействии на него жёсткого штампа с плоским основанием. Из визуализации полученного решения системы можно сделать вывод, что деформации вблизи места приложения нагрузки наибольшие, а при отдалении от места приложения нагрузки деформации уменьшаются, а значит при отдалении от штампа уменьшаются перемещения и напряжения.

Список использованных источников

- Тимошенко С. П., Гудьер Дж., Теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 560 с.
- М. П. Галанин, Е. Б. Савенков. Методы численного анализа математических моделей (2-е изд., исправленное). М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018, 592 с.