Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего национально-исследовательского университета
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана»

Кафедра «Прикладная математика»

Лабораторная работа №2

по дисциплине «Методы вычислений»

Исследования обусловленности задачи решения СЛАУ.

Выполнили студенты группы ФН2-51 *Бондарчук Виктория* и *Мукова Рагнеда*

Вариант 2; 7

Москва — 2016

1. Исходные данные

Рассмотрим систему линейных алгебраический уравнений вида:

$$Ax = b, \tag{1}$$

где A — матрица системы размера $n \times n$, $\det A \neq 0$, b — вектор правой части.

2. Описание используемы алгоритмов

Будем считать, что система (1) имеет единственное решение.

В лабораторной работе заданная система решается методом QR-разложения, реализованным в лабораторной работе №1.

2.1. Число обусловленности

Пусть Δb — погрешность, с которой задана правая часть системы (1). Тогда в результате решения системы

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b \tag{2}$$

решение исходной задачи (1) будет найдено с погрешностью Δx, удовлетворяющей условию:

$$A\Delta x = \Delta b \quad \text{или} \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Учитывая неравенство:

$$\|b\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|,$$

получаем:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \tag{3}$$

Величину $\operatorname{cond} A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ называют числом обусловленности матрицы A.

2.2. Оценка числа обусловленности

Из соотношения (3) следует неравенство:

$$\operatorname{cond} A = \frac{\delta x}{\delta b},$$

где

$$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \qquad \delta b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

— относительные погрешности решения и правой части соответственно.

Для получения нижней оценки числа обусловленности, система (2) решается несколько раз с разными Δb и выбирается наибольшая величина отношения относительных погрешностей решения и правой части.

3. Результаты расчетов

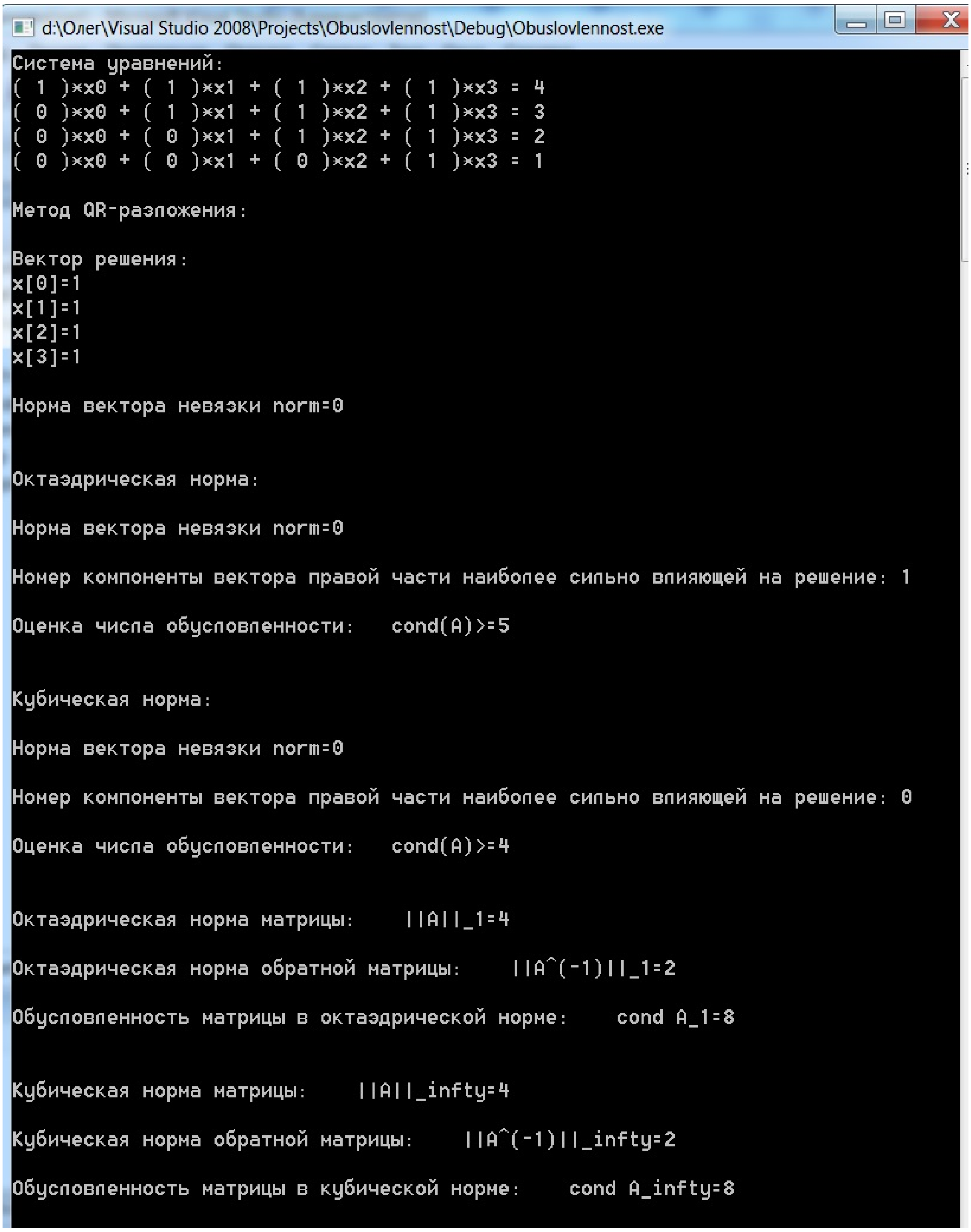


Рис. 3.1. «Тест 1». Расчет с обычной точностью.

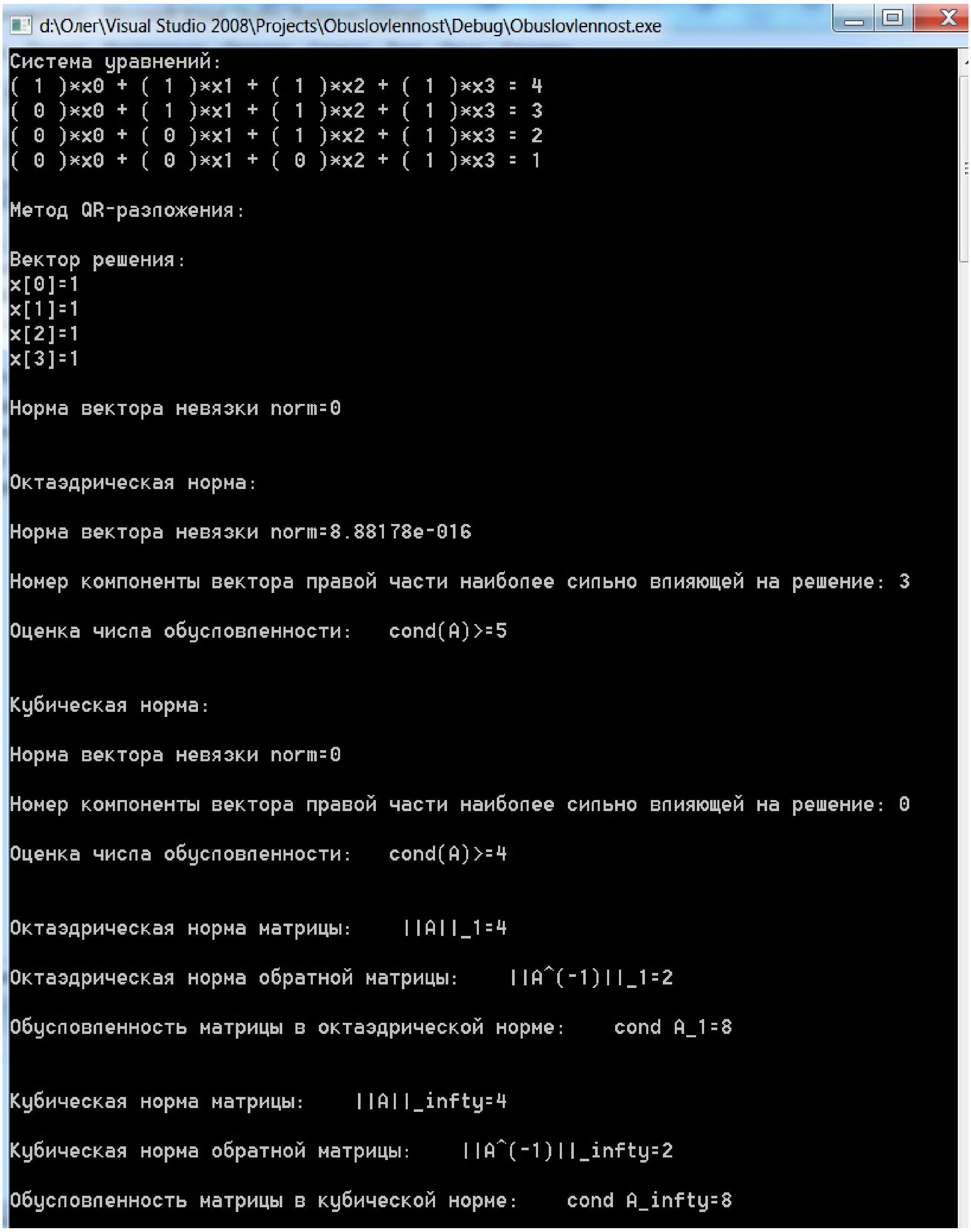


Рис. 3.2. «Тест 1». Расчет с повышенной точностью.

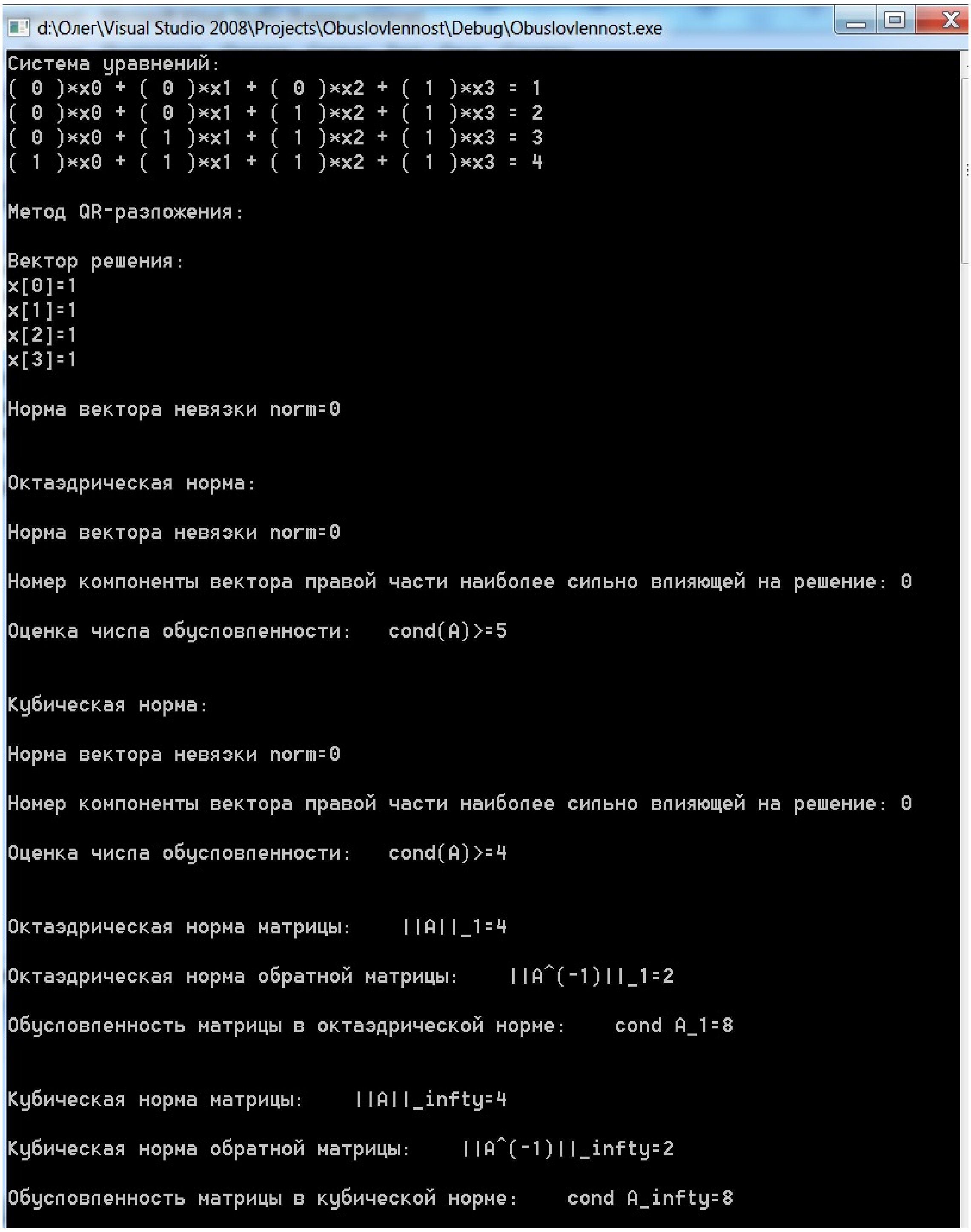


Рис. 3.3. «Тест 2». Расчет с обчной точностью.

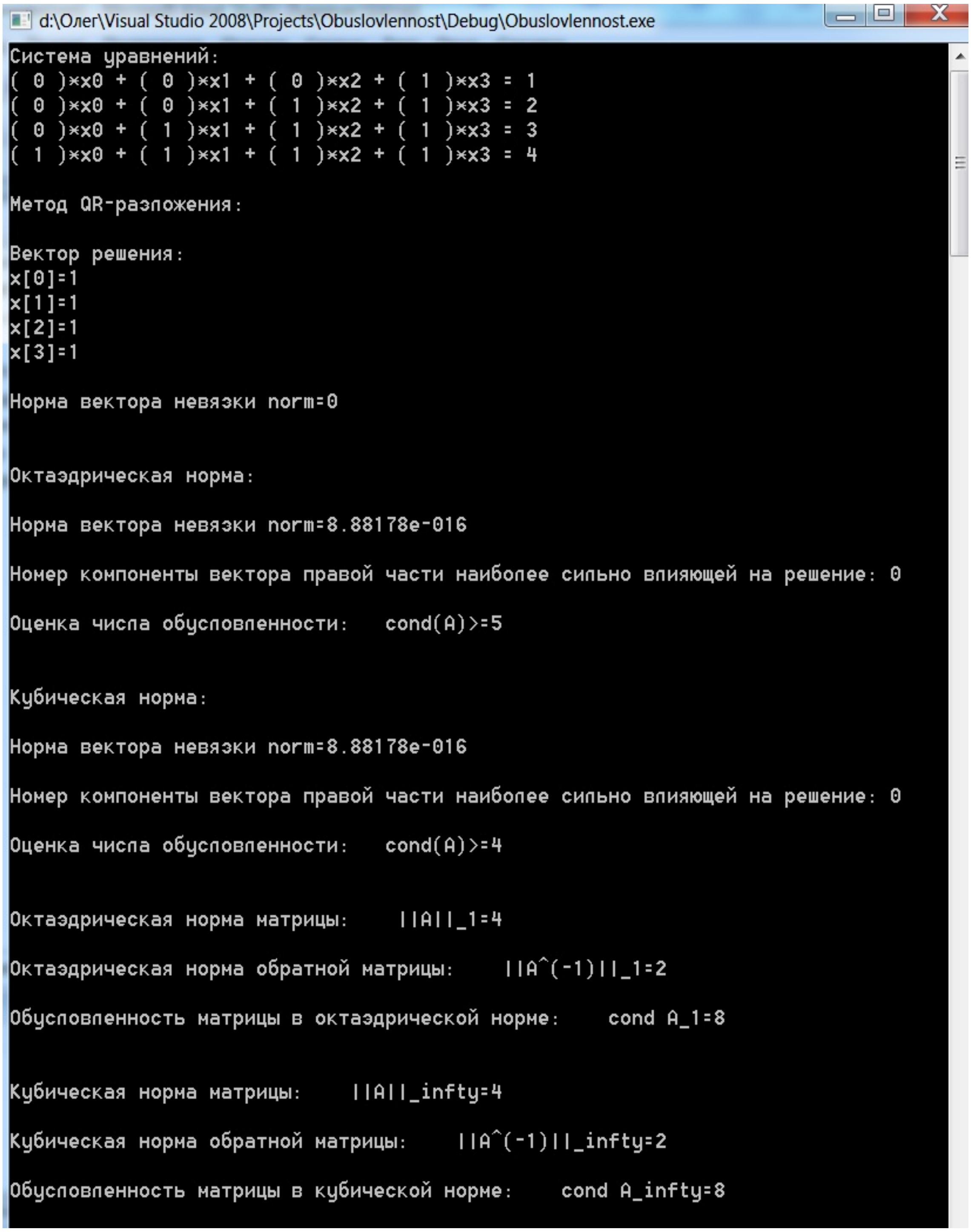


Рис. 3.4. «Тест 2». Расчет с повышенной точностью.

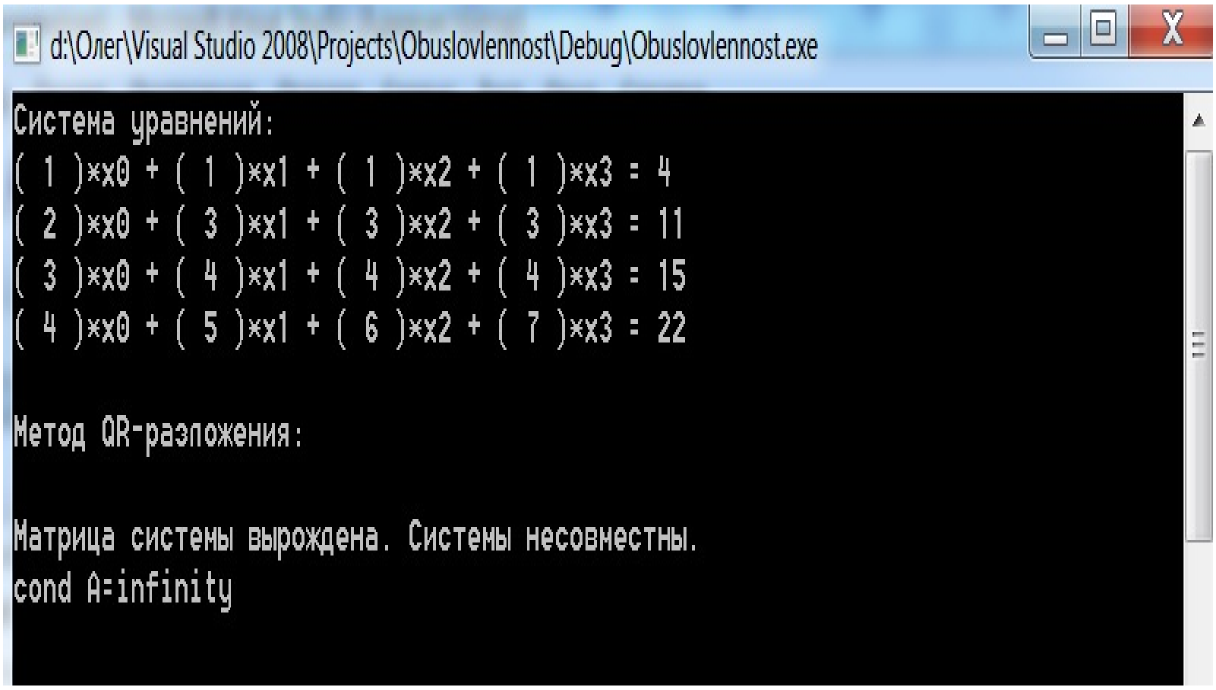


Рис. 3.5. «Тест 3». Расчет с обычной точностью.

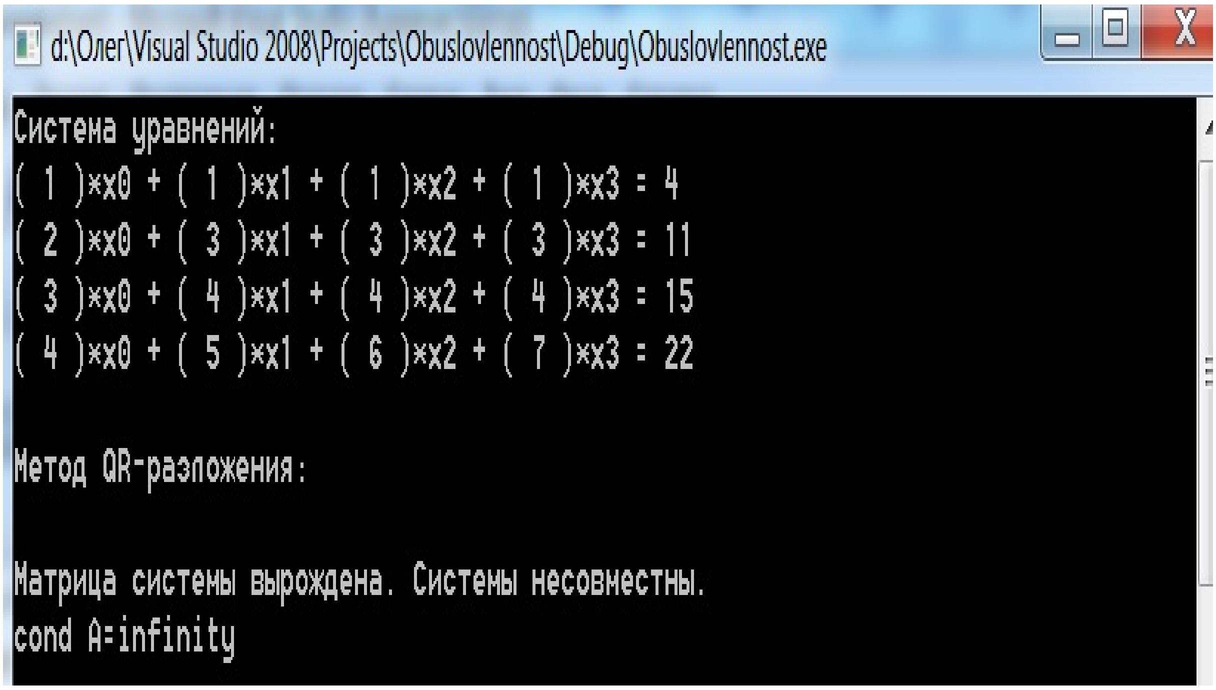


Рис. 3.6. «Тест 3». Расчет с повышенной точностью.

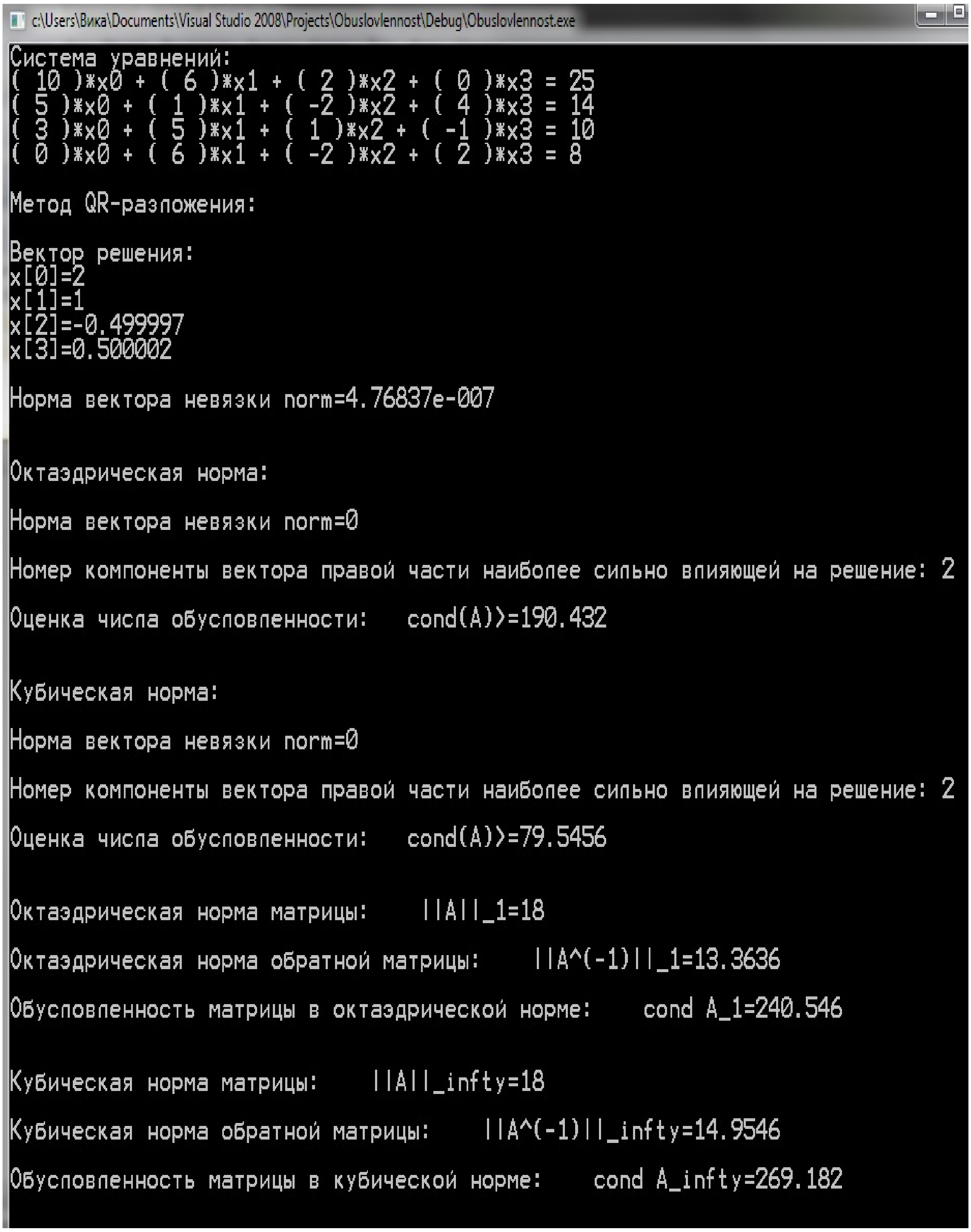


Рис. 3.7. «Тест 4». Расчет с обчной точностью.

```
c:\Users\Вика\Documents\Visual Studio 2008\Projects\Obuslovlennost\Debug\Obuslovlennost.exe
Система уравнений:
( 10 )*x0 + ( 6 )*x1 + ( 2 )*x2 + ( 0 )*x3 = 25
( 5 )*x0 + ( 1 )*x1 + ( -2 )*x2 + ( 4 )*x3 = 14
( 3 )*x0 + ( 5 )*x1 + ( 1 )*x2 + ( -1 )*x3 = 10
( 0 )*x0 + ( 6 )*x1 + ( -2 )*x2 + ( 2 )*x3 = 8

Метод QR-разложения:

Вектор решения:
x[0]=2
x[1]=1
x[2]=-0.5
x[3]=0.5

Норма вектора невязки norm=0


Октаэдрическая норма:

Норма вектора невязки norm=8.88287e-016

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 2

Оценка числа обусловленности:   cond(A))=190.432


Кубическая норма:

Норма вектора невязки norm=0

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 2

Оценка числа обусловленности:   cond(A))=79.5455


Октаэдрическая норма матрицы:    ||A||_1=18

Октаэдрическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_1=13.3636

Обусловленность матрицы в октаэдрической норме:    cond A_1=240.545


Кубическая норма матрицы:    ||A||_infty=18

Кубическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_infty=14.9545

Обусловленность матрицы в кубической норме:    cond A_infty=269.182
```

Рис. 3.8. «Тест 4». Расчет с повышенной точностью.

```
c:\Users\Вика\Documents\Visual Studio 2008\Projects\Obuslovlennost\Debug\Obuslovlennost.exe
Система уравнений:
( 28.859 )*x0 + ( -0.008 )*x1 + ( 2.406 )*x2 + ( 19.24 )*x3 = 30.459
( 14.436 )*x0 + ( -0.001 )*x1 + ( 1.203 )*x2 + ( 9.624 )*x3 = 18.248
( 120.204 )*x0 + ( -0.032 )*x1 + ( 10.024 )*x2 + ( 80.144 )*x3 = 128.156
( -57.714 )*x0 + ( 0.016 )*x1 + ( -4.812 )*x2 + ( -38.478 )*x3 = -60.908

Метод QR-разложения:

Вектор решения:
x[0]=1.47828
x[1]=1000.23
x[2]=-18.1212
x[3]=2.04776

Норма вектора невязки norm=0


Октаэдрическая норма:

Норма вектора невязки norm=0.000534058

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 0

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=115171


Кубическая норма:

Норма вектора невязки norm=0.000534058

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 0

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=33534


Октаэдрическая норма матрицы:    ||A||_1=221.213

Октаэдрическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_1=495043

Обусловленность матрицы в октаэдрической норме:    cond A_1=1.0951e+008


Кубическая норма матрицы:    ||A||_infty=210.404

Кубическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_infty=466255

Обусловленность матрицы в кубической норме:    cond A_infty=9.81019e+007
```

Рис. 3.9. «Тест 5». Расчет с обчной точностью.

```
c:\Users\Вика\Documents\Visual Studio 2008\Projects\Obuslovlennost\Debug\Obuslovlennost.exe
Система уравнений:
( 28.859 )*x0 + ( -0.008 )*x1 + ( 2.406 )*x2 + ( 19.24 )*x3 = 30.459
( 14.436 )*x0 + ( -0.001 )*x1 + ( 1.203 )*x2 + ( 9.624 )*x3 = 18.248
( 120.204 )*x0 + ( -0.032 )*x1 + ( 10.024 )*x2 + ( 80.144 )*x3 = 128.156
( -57.714 )*x0 + ( 0.016 )*x1 + ( -4.812 )*x2 + ( -38.478 )*x3 = -60.908

Метод QR-разложения:

Вектор решения:
x[0]=1
x[1]=1000
x[2]=-20
x[3]=3

Норма вектора невязки norm=0


Октаэдрическая норма:

Норма вектора невязки norm=2.88196e-011

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 0

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=128494


Кубическая норма:

Норма вектора невязки norm=2.88196e-011

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 0

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=37517.7


Октаэдрическая норма матрицы:    ||A||_1=221.213

Октаэдрическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_1=553380

Обусловленность матрицы в октаэдрической норме:    cond A_1=1.22415e+008


Кубическая норма матрицы:    ||A||_infty=210.404

Кубическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_infty=521313

Обусловленность матрицы в кубической норме:    cond A_infty=1.09686e+008
```

Рис. 3.10. «Тест 5». Расчет с повышенной точностью.

```
c:\Users\Вика\Documents\Visual Studio 2008\Projects\Obuslovlennost\Debug\Obuslovlennost.exe
Система уравнений:
( -558.55 )*x0 + ( 2569.16 )*x1 + ( 12.6 )*x2 + ( 55.86 )*x3 = 127.31
( -139.65 )*x0 + ( 642.34 )*x1 + ( 3.15 )*x2 + ( 13.965 )*x3 = 31.815
( -19.95 )*x0 + ( 91.77 )*x1 + ( 0.4 )*x2 + ( 1.995 )*x3 = 2.045
( 838.39 )*x0 + ( -3855.99 )*x1 + ( -18.9 )*x2 + ( -83.789 )*x3 = -190.399

Метод QR-разложения:

Вектор решения:
x[0]=0.854008
x[1]=-0.0364425
x[2]=49.9948
x[3]=1.21747

Норма вектора невязки norm=4.57764e-005


Октаэдрическая норма:

Норма вектора невязки norm=0.0314178

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 1

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=1.21335e+006


Кубическая норма:

Норма вектора невязки norm=0.0314178

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 1

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=369895


Октаэдрическая норма матрицы:    ||A||_1=7159.26

Октаэдрическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_1=179816

Обусловленность матрицы в октаэдрической норме:    cond A_1=1.28735e+009


Кубическая норма матрицы:    ||A||_infty=4797.07

Кубическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_infty=120373

Обусловленность матрицы в кубической норме:    cond A_infty=5.77438e+008
```

Рис. 3.11. Вариант 2. Расчет с обчной точностью.

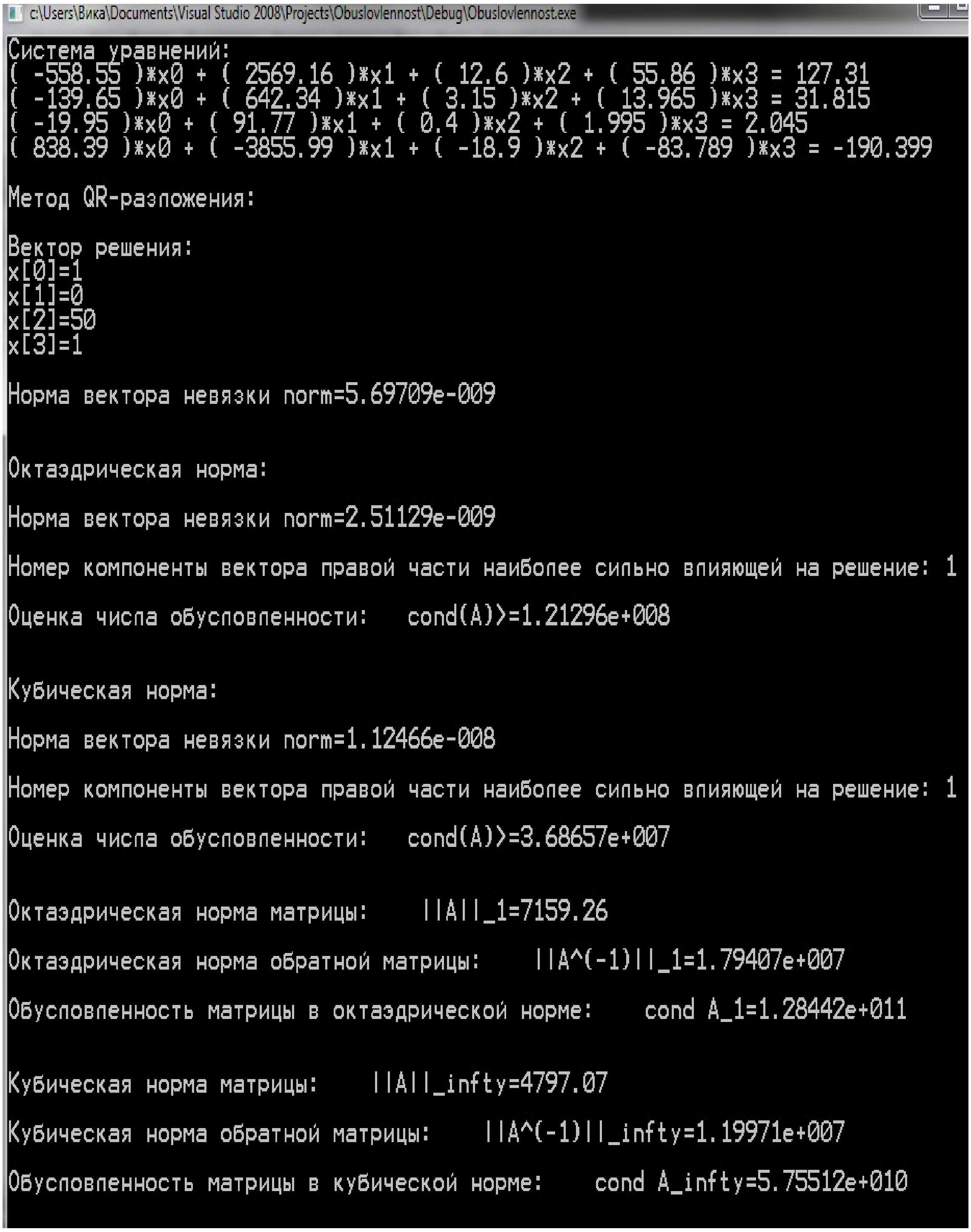


Рис. 3.12. Вариант 2. Расчет с повышенной точностью.

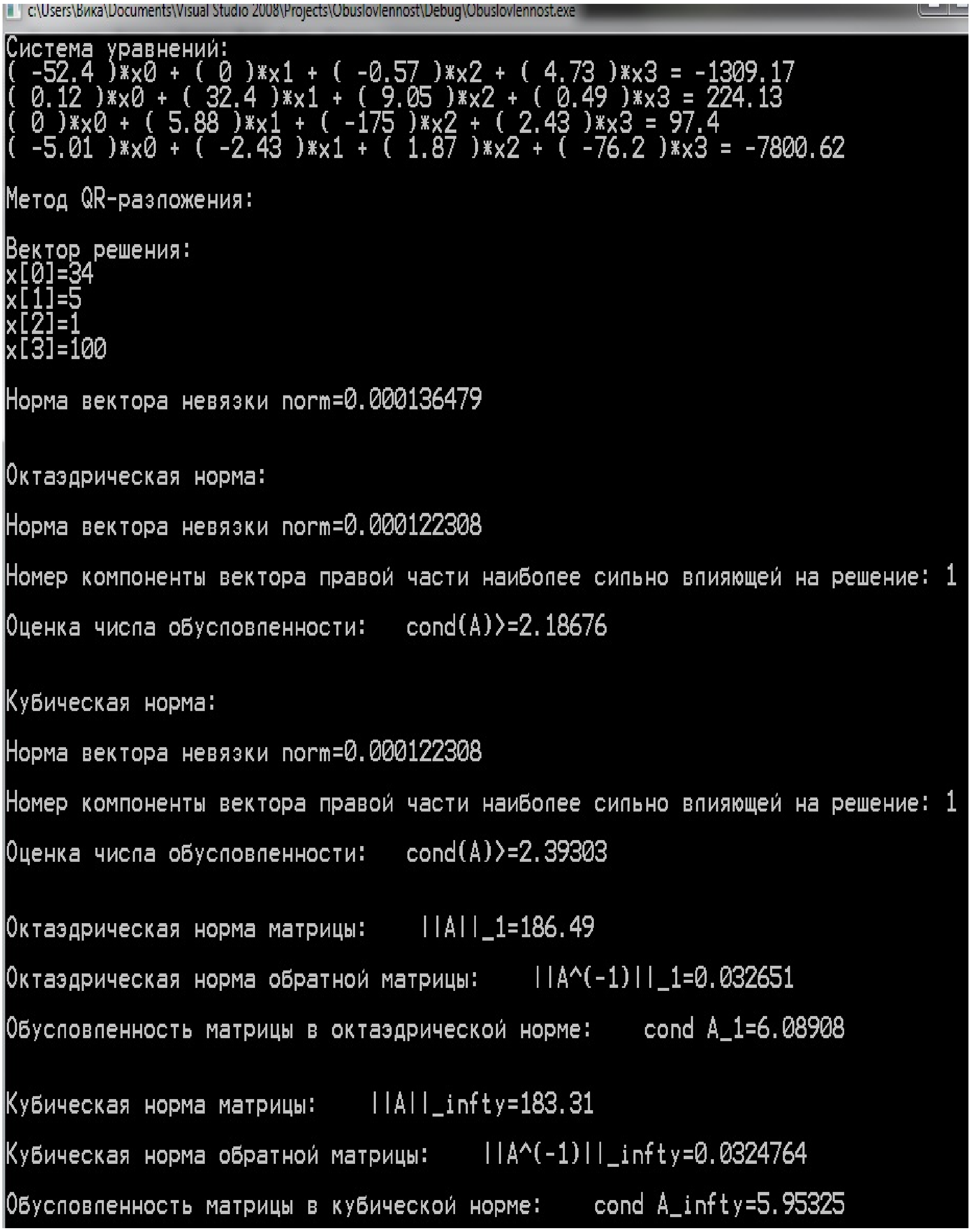


Рис. 3.13. Вариант 2. Расчет с обычной точностью.

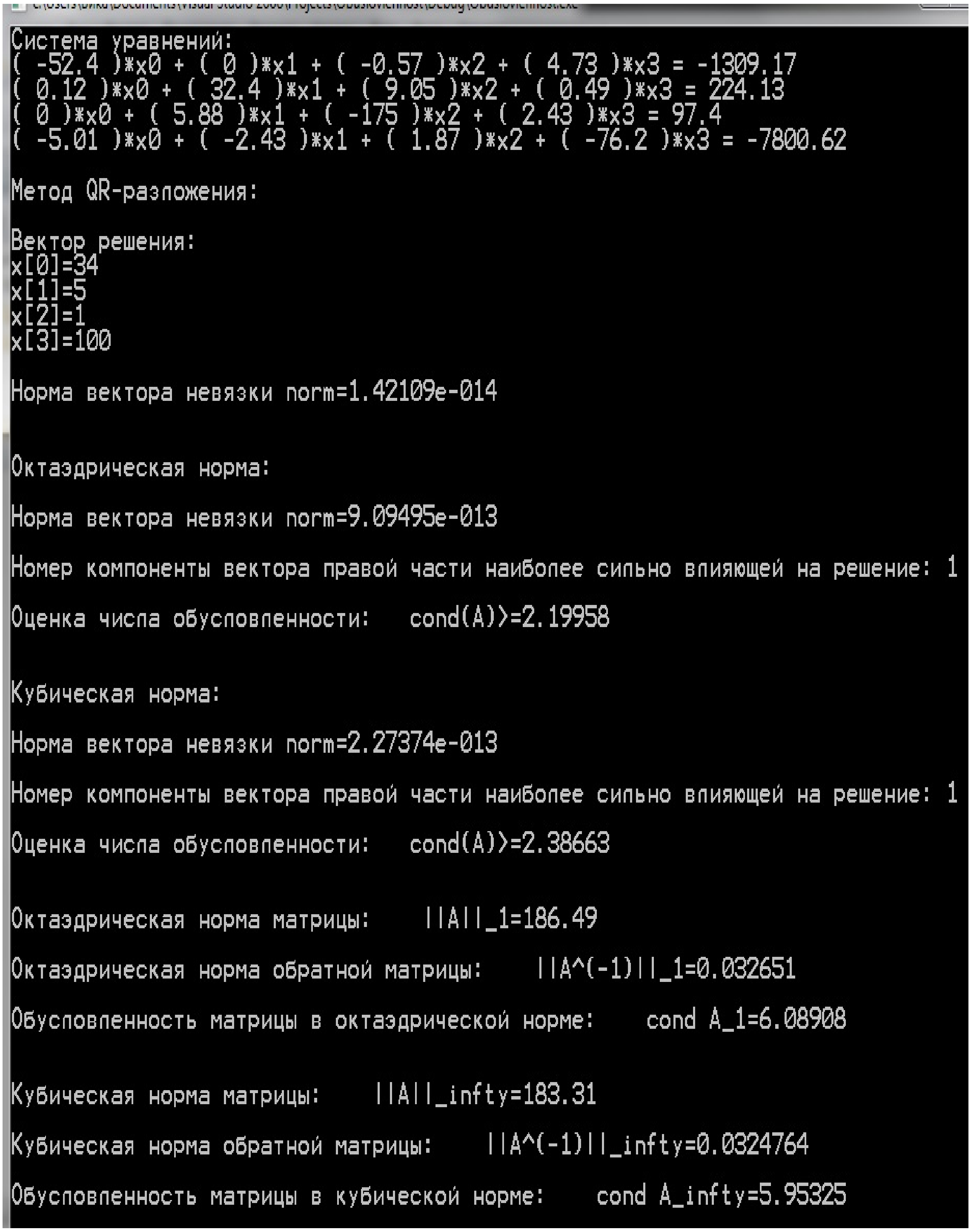
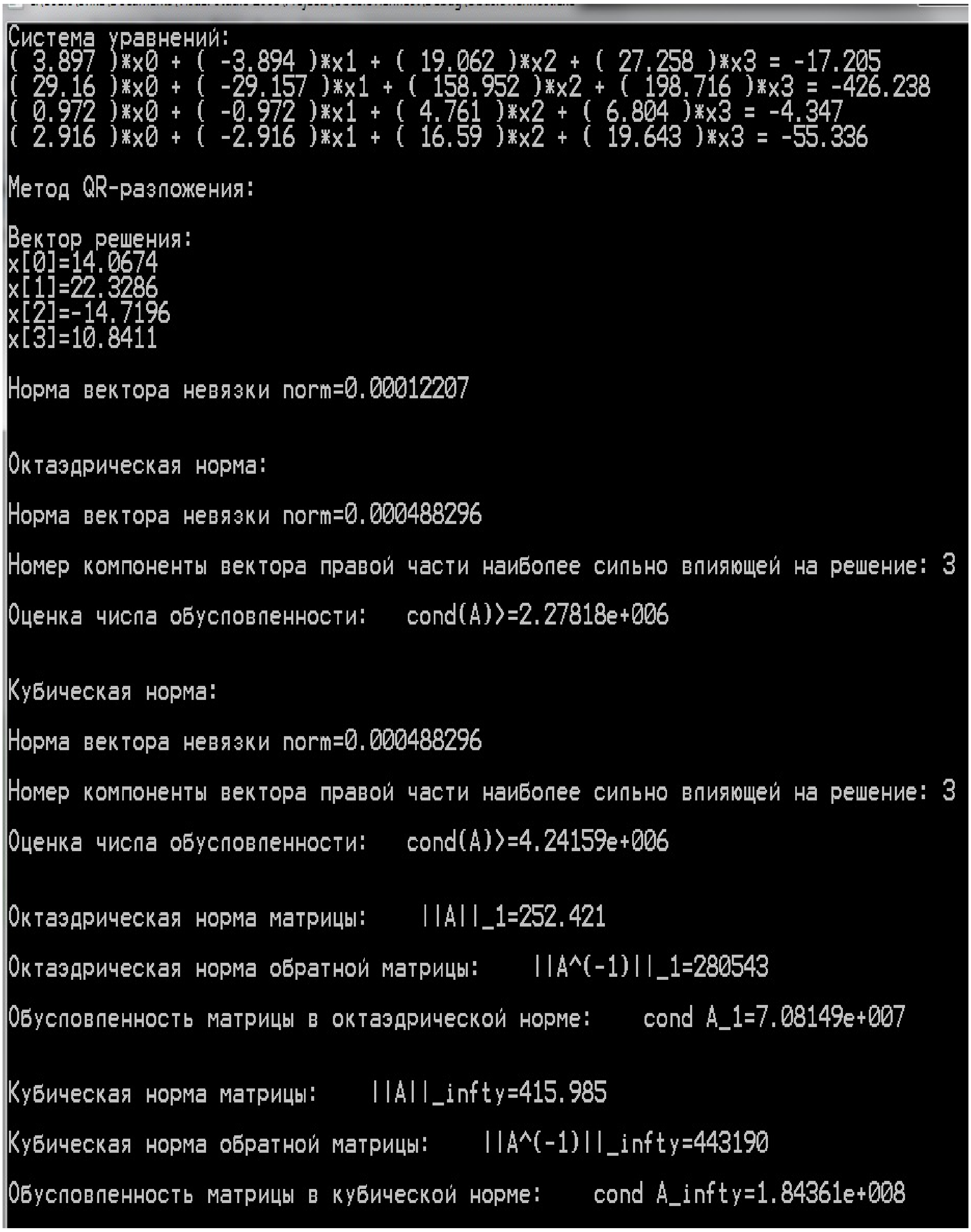


Рис. 3.14. Вариант 2. Расчет с повышенной точностью.



```
Система уравнений:
( 3.897 )*x0 + ( -3.894 )*x1 + ( 19.062 )*x2 + ( 27.258 )*x3 = -17.205
( 29.16 )*x0 + ( -29.157 )*x1 + ( 158.952 )*x2 + ( 198.716 )*x3 = -426.238
( 0.972 )*x0 + ( -0.972 )*x1 + ( 4.761 )*x2 + ( 6.804 )*x3 = -4.347
( 2.916 )*x0 + ( -2.916 )*x1 + ( 16.59 )*x2 + ( 19.643 )*x3 = -55.336

Метод QR-разложения:

Вектор решения:
x[0]=14.0674
x[1]=22.3286
x[2]=-14.7196
x[3]=10.8411

Норма вектора невязки norm=0.00012207


Октаэдрическая норма:

Норма вектора невязки norm=0.000488296

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 3

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=2.27818e+006


Кубическая норма:

Норма вектора невязки norm=0.000488296

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 3

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=4.24159e+006


Октаэдрическая норма матрицы:    ||A||_1=252.421

Октаэдрическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_1=280543

Обусловленность матрицы в октаэдрической норме:    cond A_1=7.08149e+007


Кубическая норма матрицы:    ||A||_infty=415.985

Кубическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_infty=443190

Обусловленность матрицы в кубической норме:    cond A_infty=1.84361e+008
```

Рис. 3.15. Вариант 7. Расчет с обчной точностью.

```
Система уравнений:
( 3.897 )*x0 + ( -3.894 )*x1 + ( 19.062 )*x2 + ( 27.258 )*x3 = -17.205
( 29.16 )*x0 + ( -29.157 )*x1 + ( 158.952 )*x2 + ( 198.716 )*x3 = -426.238
( 0.972 )*x0 + ( -0.972 )*x1 + ( 4.761 )*x2 + ( 6.804 )*x3 = -4.347
( 2.916 )*x0 + ( -2.916 )*x1 + ( 16.59 )*x2 + ( 19.643 )*x3 = -55.336

Метод QR-разложения:

Вектор решения:
x[0]=13
x[1]=14
x[2]=-15
x[3]=10

Норма вектора невязки norm=0


Октаэдрическая норма:

Норма вектора невязки norm=1.47796e-012

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 3

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=2.76993e+006


Кубическая норма:

Норма вектора невязки norm=1.47796e-012

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 3

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=6.44325e+006


Октаэдрическая норма матрицы:    ||A||_1=252.421

Октаэдрическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_1=286283

Обусловленность матрицы в октаэдрической норме:    cond A_1=7.22637e+007


Кубическая норма матрицы:    ||A||_infty=415.985

Кубическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_infty=452230

Обусловленность матрицы в кубической норме:    cond A_infty=1.88121e+008
```

Рис. 3.16. Вариант 7. Расчет с повышенной точностью.

```
Система уравнений:
( 127.8 )*x0 + ( 8.03 )*x1 + ( 1.4 )*x2 + ( -2.36 )*x3 = -1008.64
( 0.27 )*x0 + ( 136.4 )*x1 + ( -0.16 )*x2 + ( -4.55 )*x3 = 516.62
( -3.84 )*x0 + ( 5.37 )*x1 + ( -111 )*x2 + ( 1.56 )*x3 = 394.56
( -6.53 )*x0 + ( 6.72 )*x1 + ( 2.88 )*x2 + ( 47.2 )*x3 = 353.68

Метод QR-разложения:

Вектор решения:
x[0]=-8
x[1]=4
x[2]=-3
x[3]=6

Норма вектора невязки norm=0


Октаэдрическая норма:

Норма вектора невязки norm=0.00012207

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 3

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=2.42909


Кубическая норма:

Норма вектора невязки norm=0.00012207

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 3

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=2.66671


Октаэдрическая норма матрицы:    ||A||_1=156.52

Октаэдрическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_1=0.0224792

Обусловленность матрицы в октаэдрической норме:    cond A_1=3.51845


Кубическая норма матрицы:    ||A||_infty=141.38

Кубическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_infty=0.0239026

Обусловленность матрицы в кубической норме:    cond A_infty=3.37935
```

Рис. 3.17. Вариант 7. Расчет с обчной точностью.

```
Система уравнений:
( 127.8 )*x0 + ( 8.03 )*x1 + ( 1.4 )*x2 + ( -2.36 )*x3 = -1008.64
( 0.27 )*x0 + ( 136.4 )*x1 + ( -0.16 )*x2 + ( -4.55 )*x3 = 516.62
( -3.84 )*x0 + ( 5.37 )*x1 + ( -111 )*x2 + ( 1.56 )*x3 = 394.56
( -6.53 )*x0 + ( 6.72 )*x1 + ( 2.88 )*x2 + ( 47.2 )*x3 = 353.68

Метод QR-разложения:

Вектор решения:
x[0]=-8
x[1]=4
x[2]=-3
x[3]=6

Норма вектора невязки norm=0


Октаэдрическая норма:

Норма вектора невязки norm=0

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 3

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=2.43364


Кубическая норма:

Норма вектора невязки norm=0

Номер компоненты вектора правой части наиболее сильно влияющей на решение: 3

Оценка числа обусловленности:   cond(A)>=2.66206


Октаэдрическая норма матрицы:    ||A||_1=156.52

Октаэдрическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_1=0.0224792

Обусловленность матрицы в октаэдрической норме:    cond A_1=3.51845


Кубическая норма матрицы:    ||A||_infty=141.38

Кубическая норма обратной матрицы:    ||A^(-1)||_infty=0.0239026

Обусловленность матрицы в кубической норме:    cond A_infty=3.37935
```

Рис. 3.18. Вариант 7. Расчет с повышенной точностью.

4. Анализ результатов

Число обусловленности характерезует чувствительность решения системы к малым погрешностям входных данных. Если система хорошо обусловленна, то при малых возмущениях правой части, решение изменится не сильно. Если же система плохо обусловлена, то решение изменится сильно.

Число обусловленности, в следствии своих свойств, всегда удовлетворяет неравенству: $\operatorname{cond} A \geqslant 1$, но можно посчитать более точную оценку, используя абсолютные и относительные погрешности решения и правой части системы. Оценка числа обусловленности бывает близка к самому числу обусловленности, но бывают случаи, когда они значительно отличаются.

Число обусловленности отличается для разных норм, но порядок всегда остается один и тот же, так как нормы эквивалентны.

5. Ответы на контрольные вопросы

1. *Что такое число обусловленности? Что оно характерезует?*

   Величину $\operatorname{cond} A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ называют числом обусловленности матрицы A. Число обусловленности характерезует чувствительность решения системы $Ax = b$ к малым погрешностям входных данных.

2. *Как упрощается оценка числа обусловленности, если матрица является:*
   (a) *диагональной;*
   (b) *симметричной;*
   (c) *ортогональной;*
   (d) *положительно определенной;*
   (e) *треугольной?*

   (a) Пусть матрица коэффициентов СЛАУ имеет вид:

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   Тогда коэффициенты a_{ii}, $i = \overline{1,n}$ — собственные числа матрицы A. Так как диагональная матрица — частный случай симметричной, то оценка для числа обусловленности матрицы A имеет вид:

   $$\operatorname{cond} A = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}.$$

   Учитывая, что собственные числа матрицы A — это ее элементы, получаем:

   $$\operatorname{cond} A = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|} = \frac{\max\limits_i |a_{ii}|}{\min\limits_i |a_{ii}|}$$

(b) Пусть матрица A — симметрична, то есть опрератор A — самомопряженный.
Рассмотрим пространство H с евклидовой нормой $\|x\|^2 = (x, x)$. Тогда оператор A имеет n собственных векторов, образующих ортонормированный базис, и $\forall x \in H$ можно записать:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

причем $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2$.
Тогда получаем:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i x_i, \quad \|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i^2.$$

Отсюда, $\|A\| = |\lambda_{max}|$. Таким же образом можно получить $\|A^{-1}\| = |\lambda_{min}|^{-1}$.
Следовательно, $\operatorname{cond} A = \dfrac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$, причем все собственные значения симметричной матрицы $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Пусть матрица коэффициентов СЛАУ A — ортогональная, то есть $A^{-1} = A^T$. Модуль каждого собственного значения ортогональной матрицы равен единицы, тогда:

$$\operatorname{cond} A \geqslant 1.$$

(d) Пусть матрица коэффициентов СЛАУ A — положительно определена, то есть $\forall x \neq 0$ квадратичная форма $(Ax, x) > 0$. Все собственные значения положительно определенной матрицы — положетельны, тогда:

$$\operatorname{cond} A \geqslant \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}.$$

По теореме Гершгорина: Все собственные значения матрицы A лежат в объединении кругов $S_1, S_2, \ldots, S_n$, где $S_i = \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - \lambda| \leqslant \sum\limits_{j \neq i} a_{ij}\}$. Если объединение i изолированных друг от друга кругов образует связное множество, то в этом множестве находится ровно i собственных значений.
Так как для положительно определенной матрицы $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,то достаточно рассмотреть лишь отрезки с центрами на положительноц части действительной полуоси. Обозначив точную верхнюю грань связного множества λ_{sup}, а точную нижнюю грань — λ_{inf}, получим следующую оценку обусловленности матрицы A:

$$\operatorname{cond} A \geqslant \frac{\lambda_{sup}}{\lambda_{inf}}.$$

(e) Пусть матрица коэффициентов СЛАУ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения треугольной матрицы стоят на главной диагонали. Тогда:

$$\operatorname{cond} A \geqslant \frac{\max\limits_i |a_{ii}|}{\min\limits_i |a_{ii}|}.$$

3. *Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы?*

   Обобщенным понятием вырожденной системы является плохо обусловленная система. Системы «близкие» к вырожденным скорее всего будут плохо обусловленными.
   Исключение: СЛАУ с матрицей коэффициентов вида $A = \alpha E$, где $\alpha \ll 1$, число обусловленности таких матриц $\operatorname{cond} A = 1$.

4. *Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?*

   Числа обусловленности одной и той же матрицы при выборе разных норм различны, но всегда имеют одинаковый порядок, кроме того всегда выполняется $\operatorname{cond} A \geqslant 1$.

5. *Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?*

   Пусть матрица A — вырожденная. Если матрица вырожденная, то у нее есть собственное значение $\lambda = 0$. Тогда $|\lambda_{min}| = 0$. Следовательно,

$$\operatorname{cond} A \geqslant \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|},$$

   но, так как $|\lambda_{min}| = 0$, то можно записать, что для вырожденной матрицы $\operatorname{cond} A = \infty$.

6. *Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|\cdot\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|\cdot\|_2$ — шаровой, а норму $\|\cdot\|_\infty$ — кубической.*

   Норма вектора $\|\cdot\|_1$ называется октаэдрической, потому что если откладывать все векторы от одной точки, то концы векторов, удовлетворяющих равенству $\|x\|_1 = a$ заполнят октаэдр с диагональю a в трехмерном пространстве.
   Норма вектора $\|\cdot\|_2$ называется шаровой, потому что если откладывать все векторы от одной точки, то концы векторов, удовлетворяющих равенству $\|x\|_2 = a$ заполнят шар с радиусом a в трехмерном пространстве.
   Норма вектора $\|\cdot\|_\infty$ называется кубической, потому что если откладывать все векторы от одной точки, то концы векторов, удовлетворяющих равенству $\|x\|_\infty = a$ заполнят куб со стороной a в трехмерном пространстве.