Методы вычисленийИтерационные методы решения систем линейных алгебраических уравненийстуденты группы ФН2-51Бондарчук Виктория и

Вариант 2; 7

2016

1 Исходные данные

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида: A x=b, где A — матрица системы размера $n \times n$, $\det A \neq 0$, b — вектор правой части.

2 Описание используемых алгоритмов

Систему (**??**) можно привести к виду: x=C x+y, где C — квадратная матрица $n \times n$, y — вектор-столбец. Это можно сделать различными способами. Формула (**??**) подсказывает рекурентное соотношение вида: $\mathrm{x}^{k+1} = Cx^k + y, \qquad k = 0, 1, \ldots.$ Достаточным условием сходимости итерационного процесса является выполнение условия:

$$\|C\| \leq 1.$$

2.1 Метод простой итерации

Методом простой итерации называется явный метод $\mathrm{x}^{k+1} - x^k \frac{}{\tau + Ax^k = b, \quad k=0,1,\ldots.}$ Здесь τ — это специально выбираемый итерационный параметр.

Для метода простой итерации систему можно записать в виде: x=-$(\tau A - E)x + \tau b$. Из сравнения с (**??**) получаем, что для метода простой итерации матрица C и вектор y выражаются в виде:

$$C = -(\tau A - E), \qquad y = \tau b.$$

2.2 Метод Якоби

Представим матрицу A в виде суммы

$$A = D + L + U,$$

где L — нижняя треугольная матрица, U — верхняя треугольная матрица, $D = diag\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ — диагональ матрицы.

Из первого уравнения системы (**??**) выразим переменную x_1:

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)}{a_{11}}.$$

Из второго уравнения — переменную x_2:

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n)}{a_{22}}$$

и т.д. В результате получим систему вида

$$x = Cx + y,$$

или в покомпонентной записи $\mathrm{x}_1 = \quad c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n + y_1$
$x_2 = c_{21}x_1 + \quad c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n + y_2$
$\ldots$
$x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \ldots + y_n.$

На главной диагонали матрицы C находятся нулевые элементы, остальные коэффициенты матрицы и компоненты вектора y вычисляются по формулам $\mathrm{c}_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad y_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \, i \neq j$. Такой выбор матрицы C и вектора y соответствует методу Якоби.

$$C = -D^{-1}(L + U), \quad y = D^{-1}b.$$

2.3 Методы Зейделя и релаксации

Каноническая форма метода Зейделя имеет вид

$$(D + L)(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Метод Зейделя является частным случаем метода релаксации, задаваемого в виде $(\mathrm{D}+\omega L)\frac{x^{k+1}-x^k}{\omega} + Ax^k = b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$ Здесь $\omega > 0$ — заданный числовой параметр — параметр релаксации.

Чтобы привести систему (**??**) к виду, удобному для итераций, перепишем ее в виде

$$(E + \omega D^{-1}L)x^{k+1} = ((1 - \omega)E - \omega D^{-1}U)x^k + \omega D^{-1}b.$$

В покомпонентной записи

$$x_i^{k+1} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_i i} x_j^{k+1} = (1 - \omega)x_i^k - \omega \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \omega \frac{b_i}{a_{ii}}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда можно последовательно найти все x_i^{k+1}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.4 Критерий останова итерационного процесса

Критерием прекращения итераций, обеспечивающим достижение заданной точности ε, является выполнение неравенства

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{1 - \|C\|}{\|C\|}\varepsilon.$$

Для метода Зейделя существует так же другой критерий:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{1 - \|C\|}{\|C_U\|}\varepsilon.$$

3 Результаты рассчетов

15cm19cm11obtosh[«Тест 1». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm12obtosh[«Тест 1». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm13obtosh[«Тест 1». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm5cm14obtosh[«Тест 1». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm21obtosh[«Тест 1». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm22obtosh[«Тест 1». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm23obtosh[«Тест 1». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm5cm24obtosh[«Тест 1». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm31obtosh[«Тест 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm32obtosh[«Тест 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm33obtosh[«Тест 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm5cm34obtosh[«Тест 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm41obtosh[«Тест 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm42obtosh[«Тест 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm43obtosh[«Тест 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm5cm44obtosh[«Тест 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm51obtosh[«Вариант 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm52obtosh[«Вариант 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm53obtosh[«Вариант 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm5cm54obtosh[«Вариант 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm61obtosh[«Вариант 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm62obtosh[«Вариант 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm63obtosh[«Вариант 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm5cm64obtosh[«Вариант 2». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm71obtosh[«Вариант 7». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm72obtosh[«Вариант 7». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm73obtosh[«Вариант 7». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm5cm74obtosh[«Вариант 7». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm19cm81obtosh[«Вариант 7». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm82obtosh[«Вариант 7». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm19cm83obtosh[«Вариант 7». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm5cm84obtosh[«Вариант 7». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

15cm5cmBM1obtosh[«Большая матрица». Расчет с $\varepsilon = 10^{-4}$.]

15cm5cmBM2obtosh[«Большая матрица». Расчет с $\varepsilon = 10^{-7}$.]

4 Анализ результатов

В лабораторной работе решаются системы линейных алгебраических уравнений с точностями $\varepsilon = 10^{-4}$ и $\varepsilon = 10^{-7}$. При решении системы с $\varepsilon = 10^{-7}$ вектор решения x мы получаем с точностью до седьмого знака после запятой (при критерии останова $\|x^{k+1} - x^k\| < 1 - \|C\| \|C\| \varepsilon$).

При решении СЛАУ предложенными итерационными методами, можно сделать вывод, что метод простой итерации сходится медленнее, чем остальные. Методы Зейделя и релаксации сходятся быстрее, чем методы простой итерации и метод Якоби. В пакете Wolfram Mathematica была проведена оценка количества операций: в некоторых случаях теоретическая оценка была близка к реально выполненному числу итераций, в некоторых она получилась намного меньше.

5 Ответы на контрольные вопросы

1. **Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?**

   Стационарный итерационнный метод: $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + f$ Так как $\|C\| < 1$, то оператор C является сжимающим, то есть уравнение (**??**) имеет одно решение (существует единственная неподвижная точка x, к которой «стягивается» отображение; эта точка является решением СЛАУ). Следовательно, метод сходится.

2. **Каким следует выбирать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x^0?**

   Параметр τ выбирают так, чтобы по возможности сделать минимальной величину $\|C\|$.
   Теорема Самарского: Пусть A — симметричная положительно определенная матрица, B — положительно определенная матрица. Тогда для того чтобы итерационная последовательность, определяемая соотношением

   $$B\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = b$$

   при любом выборе нулевого приближения x^0 сходилась к точному решению x системы $Ax = b$, достаточно, чтобы были выполнены условия: 2 B>τA, $\tau A > 0$. Если матрица B является симметричной, то условия (**??**) не только достаточны, но и необходимы для сходимости указанной итерационной последовательности при любом выборе нулевого приближения x^0.

   Оптимальное значение параметра $\tau_{opt} = 2|\lambda_{max}| + |\lambda_{min}|$, где $\lambda_{max}, \lambda_{min} \in C$ — максимальное и минимальное собственные значения матрицы A.
   Следовательно, если матрица A — симметричная и $A > 0, B >$

0, то параметр τ выбирается из условия $\tau \leq 2|\lambda_{max}|$ или $\tau_{opt} = 2|\lambda_{max}| + |\lambda_{min}|$.

Если матрицы A, B не удовлетворяют условиям теоремы, то параметр τ следует выбирать из условия $\tau < 2|\lambda_{max}|$. Оптимальное значение параметра τ выбирается из условия $\tau_{opt} < 2|\lambda_{max}| + |\lambda_{min}|$. По условию теоремы, начальное приближение может быть любым, следовательно можно взять за начально приближение вектор правой части $x^0 = b$.

3. **На примере систем из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.**

   Рассмотрим систему уравнений: $\{ a_{11} x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$
   $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$

   (a) Метод Якоби:
   D$= (a)_{11}\, 0$
   $0a_{22}, \quad \tau = 1.$
   $\{ a_{11} x_1^{(k+1)} + a_{12}x_2^{(k)} = b_1,$
   $a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2.$
   Считаем, что $x^{(k)}$ известно, тогда: $\{ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)}),$
   $x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)}).$

   (b) Метод Зейделя:
   D$= (a)_{11}\, 0$
   $0a_{22}, \quad$ L$= (0)\, 0$
   $a_{21}0, \quad \tau = 1.$
   $\{ a_{11} x_1^{(k+1)} + a_{12}x_2^{(k)} = b_1,$
   $a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2.$
   Считаем, что $x^{(k)}$ известно, тогда: $\{ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)}),$
   $x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)}).$

4. Метод релаксации:
   D$= (a)_{11}\, 0$
   $0a_{22}, \quad$ L$= (0)\, 0$
   $a_{21}0, \quad$ U$= (0)\, 0$
   $0a_{22}, \quad \tau = \omega \in R.$

$\left(\frac{D}{\omega}+L\right)x^{(k+1)}+\left(U+\frac{\omega-1}{\omega}D\right)x^{(k)}=b \Longrightarrow \{\ x_1^{(k+1)}=\frac{\omega}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k)}-\frac{a_{11}(\omega-1)}{\omega}x_1^{(k)})$

$x_2^{(k+1)}=\frac{\omega}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(k+1)}-\frac{a_{22}(\omega-1)}{\omega}x_2^{(k)})$

Геометрическая интерпретация:
11cm9cmMJjacobi[Метод Якоби.]

9cm9cmMZzaidel[Метод Зейделя.]

9cm9cmMSRrelax[Метод релаксации.]

5. **При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?**

   (a) Метод простой итерации:
   Если матрица A симметричная и положительно определенная, то метод простой итерации сходится, если $\tau < \frac{2}{\lambda_{max}}$, где λ_{max} — максимальное собственное значение матрицы A.

   Достаточным условием сходимости метода простой итерации является выполнение условия $\|C\| < 1$.

   (b) Метод Якоби:
   Пусть A — симметричная положительно определенная матрица. $a_{ii} > \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|\ \forall i = \overline{1,n}$. Тогда метод Якоби сходится.

   (c) Метод релаксации:
   Пусть матрица A — симметричная положительно определенная матрица. Тогда метод релаксации сходится при $0 < \omega < 2$.

   (d) Метод Зейделя:
   Метод Зейделя является частным случаем метода релаксации ($\omega = 1$). Для того, чтобы метод Зейделя сходился необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения $\det(U + \lambda L) = 0$, где L — нижний треугольник матрицы A, U — верхний треугольник матрицы A, по модулю были меньше 1.

Матрица A называется положительно определенной, если $\forall x \in R^n\ \exists \delta > 0 : (Ax, x) \geq \delta ||x||^2$.

6. **Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.**
Для метода Зейделя матрица C имеет вид:
$C = -(D + L)^{-1}U$, где D — диагональ матрицы A, L — нижний треугольник матрицы A, U — верхний треугольник матрицы A.
Для метода релаксации матрица C имеет вид:
$C = -\left(D\omega + L\right)^{-1}\left(U + \omega - 1\omega D\right)$.

7. **Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$?**

   В случаях, когда $1 - \|C\|\|C\| \ll 1$ использование критерия $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$ приводит к существенному преждервременному окончанию итераций. Величина $\|x^k - x^{k-1}\|$ оказывается малой не потому, что приближения $x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}$ близки, а потому что метод сходится медленно.

8. **Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?**
Можно воспользоваться условием для невязки: $\mathrm{r}_{k+1} = \|Ax^{(k+1)} - f\| \leq \varepsilon$, причем итерационный процесс сходится, если $r_{k+1}r_0 < \varepsilon$.
Критериями останова так же могут служить условия:
$\left\|\frac{x^{k+1}-x^k}{|x^k|+\varepsilon_0}\right\| \leq \varepsilon$
$\|Ax^{(k+1)} - f\| \leq \varepsilon$
$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon\|x^k\| + \varepsilon_0$.