Сети и потоки. Алгоритм Диница

Кононов Николай

Математико-Механический факультет СПбГУ

2019

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи

Сеть

- **Определение:** Пусть есть множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (вход или исток) и t (выход или сток). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\forall x, y \in V \quad c(x,y) \geq 0, c(x,s) = 0, c(t,y) = 0$$

Тогда $G = (V, s, t, c)$ - сеть, функция c - пропускная способность.

Сеть

- **Определение:** Пусть есть множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (вход или исток) и t (выход или сток). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\forall x, y \in V \quad c(x, y) \geq 0, c(x, s) = 0, c(t, y) = 0$$

  Тогда $G = (V, s, t, c)$ - сеть, функция c - пропускная способность.
- $A(G) = (x, y) : c(x, y) > 0$ - множество стрелок сети G

Поток в сети

- **Определение:** Пусть $G-$ сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:
  1) $\forall x, y \in V \quad f(x, y) \leq c(x, y)$
  2) $\forall x, y \in V \quad f(x, y) = -f(y, x)$
  3) $\forall v \in V \backslash t, q$ выполняется условие:

  $$\sum_{v \in V} f(v, x) = 0$$

  f **- поток в сети** G

Поток в сети

- **Определение:** Пусть $G-$ сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:
  1) $\forall x, y \in V \quad f(x, y) \leq c(x, y)$
  2) $\forall x, y \in V \quad f(x, y) = -f(y, x)$
  3) $\forall v \in V \backslash t, q$ выполняется условие:

  $$\sum_{v \in V} f(v, x) = 0$$

  f - **поток в сети** G
- $|f| = \sum_{v \in V} f(s, x)$ - величина потока
  Поток с максимальной величиной - **максимальный**

Разрез сети

- **Определение:** пусть G - сеть, а множество ее вершин V разбито на два дизъюнктых множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) - разрез сети G

Разрез сети

- **Определение:** пусть G - сеть, а множество ее вершин V разбито на два дизъюнктых множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) - разрез сети G
- Величина $c(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*.
  Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.
- Для любого потока f величина $f(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез*.

Разрез сети

- **Определение:** пусть G - сеть, а множество ее вершин V разбито на два дизъюнктых множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) - разрез сети G
- Величина $c(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*.
  Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.
- Для любого потока f величина $f(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез*.

Лемма

Лемма: Для любого потока f, и разреза (S, T) сети G выполняется $|f| = f(S, T)$

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи

Остаточная сеть

Определение

Остаточной сетью G_f по отношению к сети G и потоку f в ней называется сеть, в которой каждому ребру $(u, v) \in G$ с пропускной способностью c^{uv} и потоком f^{uv} соответствует два ребра:
1) (u, v) с пропускной способностью $c_f^{uv} = c^{uv} - f^{uv}$
2) (v, u) с пропускной способностью $c_f^{vu} = f^{vu}$

Остаточная сеть

Определение

Остаточной сетью G_f по отношению к сети G и потоку f в ней называется сеть, в которой каждому ребру $(u, v) \in G$ с пропускной способностью c^{uv} и потоком f^{uv} соответствует два ребра:
1) (u, v) с пропускной способностью $c_f^{uv} = c^{uv} - f^{uv}$
2) (v, u) с пропускной способностью $c_f^{vu} = f^{vu}$

Еще одно определение

Остаточной сетью G_f по отношению к сети $G = \{V, s, t, c\}$ и потоку f в ней называется сеть $G_f = \{V, s, t, c_f\}$, где

$$c_f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if y = s or x = t} \\ c(x, y) - f(x, y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Остаточная сеть

Остаточное ребро можно интуитивно понимать как меру того, насколько еще можно увеличить поток вдоль какого-то ребра: если по ребру (u, v) с пропускной способностью c_{uv} протекает поток f_{uv}, то по нему можно пустить еще $c_{uv} - f_{uv}$ единиц потока, а в обратную сторону до f_{uv} единиц потока.

Определение

Простой st-путь в G_f называется **дополняющим путем**

Блокирующий поток. Теорема Форда-Фалкерсона

Определение

Блокирующим потоком f в сети $G = (V, s, t, c)$ называется такой поток, что $\forall st$-путь содержит насыщенное этим потоком ребро. То есть в данной сети любой путь из истока в сток нельзя беспрепятственно увеличить.

Блокирующий поток. Теорема Форда-Фалкерсона

Определение

Блокирующим потоком f в сети $G = (V, s, t, c)$ называется такой поток, что $\forall st$-путь содержит насыщенное этим потоком ребро. То есть в данной сети любой путь из истока в сток нельзя беспрепятственно увеличить.

Theorem

Ford-Fulkerson: *В сети G с пропускной способностью c задан поток f, тогда следующие три утверждения равносильны:*
1) Поток f максимален
2) $\exists (S, T)$ такой, что $|f| = c(S, T)$
3) В остаточной сети G_f нет дополняющего пути

- **Замечание:** блокирующий поток не всегда максимален

Слоистая сеть

для данной сети строится следующим образом. Сначала определяются длины кратчайших путей из истока s до всех остальных вершин; назовём уровнем $\mathrm{level}[v]$ вершины её расстояние от истока. Тогда в слоистую сеть включают все те рёбра (u, v) исходной сети, которые ведут с одного уровня на какой-либо другой, более поздний, уровень, т.е. $\mathrm{level}[u] + 1 = \mathrm{level}[v]$ (почему в этом случае разница расстояний не может превосходить единицы, следует из свойства кратчайших расстояний). Таким образом, удаляются все рёбра, расположенные целиком внутри уровней, а также рёбра, ведущие назад, к предыдущим уровням.

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Алгоритм состоит из нескольких **фаз**.

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Алгоритм состоит из нескольких **фаз**.
- На каждой фазе строится остаточная сеть G_f, затем по отношению к G_f строится слоистая сеть(**BFS**)

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Алгоритм состоит из нескольких **фаз**.
- На каждой фазе строится остаточная сеть G_f, затем по отношению к G_f строится слоистая сеть(**BFS**)
- В построенной слоистой сети находим блокирующий поток(любой)

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Алгоритм состоит из нескольких **фаз**.
- На каждой фазе строится остаточная сеть G_f, затем по отношению к G_f строится слоистая сеть(**BFS**)
- В построенной слоистой сети находим блокирующий поток(любой)
- Прибавляем блокирующий поток к текущему потоку

Корректность алгоритма

Summary

- he first main message of your talk in one or two lines.
- The second main message of your talk in one or two lines.
- Perhaps a third message, but not more than that.
- Outlook
  - Something you haven't solved.
  - Something else you haven't solved.

For Further Reading I

A. Author.
Handbook of Everything.
Some Press, 1990.

S. Someone.
On this and that.
Journal of This and That, 2(1):50–100, 2000.