II вар. Алгоритмы и СД. Кононов Николай гр. 231

① Написать МНР прогр. $f(x,y)=x\cdot y$ и точно описать ее работу.

$f(x,y)=x\cdot y$

1.	$J(3,1,9)$	
2.	$J(0,2,6)$	
3.	$S(2)$	$r_2{+}{+}$
4.	$S(4)$	$r_4{+}{+}$
5.	$J(0,0,2)$	
6.	$Z(2)$	$r_2=0$
7.	$S(3)$	$r_3{+}{+}$
8.	$J(0,0,1)$	
9.	$T(4,0)$	$r_0:=r_4$

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
	x	y	0	0	0

(нач. полож.)

I. $x\neq 0,\ y\neq 0$:

N:	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
1-2)	x	y	0	0	0
3)	x	y	1	0	0
4)	x	y	1	0	1
...					
	x	y	x	0	x
6)	x	y	0	0	x
7)	x	y	0	1	x
3-4)	x	y	1	1	$x+1$
...					
2)	x	y	x	1	$2x$
6)	x	y	0	1	$2x$
7)	x	y	0	2	$2x$
...					
7)	x	y	0	3	$3x$
и т.д.					
1)	x	y	0	y	$x\cdot y$
9)	$\boxed{x\cdot y}$ ответ	y	0	y	$x\cdot y$

номер только что исполненной команды

(2) (!) НОД(x,y) я.вл. П.Р.Ф.

▷ Используем:

а) $f(x,y,z),\ k(x,y,w) \in$ ПРФ $\quad z,w \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \prod_{z<k(x,y,w)} f(x,y,z) \in \text{ПРФ}$$

б) $\varphi: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \quad \varphi(x,z) = exp_z x$ – показатель $P(z)$ („в") в разложении x на простые множители

в) $P: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad P(x) := x$-ое простое число

$P(x) \in$ ПРФ, $\varphi(x,z) \in$ ПРФ.

г) $\min(x,y) \in$ ПРФ, $x^y \in$ ПРФ

Тогда $$\text{НОД}(x,y) = \prod_{z<\min\{x,y\}+1} P(z)^{\min(\varphi(x,z),\,\varphi(y,z))}$$

$\min\{x,y\}+1 = k(x,y,w) \in$ ПРФ (композиция ПРФ),

то и $P(z)^{\min(\varphi(x,z),\,\varphi(y,z))} \in$ ПРФ (подстановка ПРФ)

$\Rightarrow$ НОД$(x,y) \in$ ПРФ

$\square$

③ $\max(x,y)$ – ч. р. $\left(\max(x,y)=\begin{cases} x, & x\geqslant y \\ y, & y\geqslant x\end{cases}\right)$

$x \dot{-} y$ – ч. р. $\left(x\dot{-}y=\begin{cases} x-y, & x\geqslant y \\ 0, & y\geqslant x\end{cases}\right)$

$\overline{sg}=\begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ 1, & x=0\end{cases}$ – ч. р.

Доказать, что если знач-я ф-ий указанного класса изменить на конечном мн-ве, то ф-я ост. в том же классе (частично-рекурсивная)

$f(x_1,\dots,x_n): \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0 \cup \{\perp\}$ – частично-рекурсивная

докажем, что если мы изменим ф-ю в одной точке, то она останется ч.р.

$f(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)$ $\qquad$ $g(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)=a\neq f(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)$

g – новая ф-я, полученная из f изменением в одной точке

(!) $g(x_1,\dots,x_n)$ – ч.р.

$h(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)+a\cdot\overline{sg}(\max(x_1\dot{-}\tilde{x}_1,\tilde{x}_1\dot{-}x_1)+\dots+\max(\tilde{x}_n\dot{-}x_n,x_n\dot{-}\tilde{x}_n))$ – ч.р.

$g(x_1,\dots,x_n)=h(x_1,\dots,x_n)\dot{-}\overline{sg}(\max(x_1\dot{-}\tilde{x}_1,\tilde{x}_1\dot{-}x_1),\dots,\max(\tilde{x}_n\dot{-}x_n,x_n\dot{-}\tilde{x}_n))\cdot f(x_1,\dots,x_n)$ – ч.р.

т.о. g – ч.р. $\square$

С конечным числом точек аналогично