Сети и потоки. Алгоритм Диница

Кононов Николай

Математико-Механический факультет СПбГУ

2019

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи
   - Корректность
   - Асимптотика и оценка числа фаз

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи
   - Корректность
   - Асимптотика и оценка числа фаз

Сеть

- **Определение:** Пусть есть множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (вход или исток) и t (выход или сток). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\forall x, y \in V \quad c(x, y) \geq 0, c(x, s) = 0, c(t, y) = 0$$

Тогда $G = (V, s, t, c)$ - сеть, функция c - пропускная способность.

Сеть

- **Определение:** Пусть есть множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (вход или исток) и t (выход или сток). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\forall x, y \in V \quad c(x, y) \geq 0, c(x, s) = 0, c(t, y) = 0$$

  Тогда $G = (V, s, t, c)$ - сеть, функция c - пропускная способность.
- $A(G) = (x, y) : c(x, y) > 0$ - множество стрелок сети G

Поток в сети

- **Определение:** Пусть $G-$ сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:
  1) $\forall x, y \in V \quad f(x,y) \leq c(x,y)$
  2) $\forall x, y \in V \quad f(x,y) = -f(y,x)$
  3) $\forall v \in V \backslash t, q$ выполняется условие:

$$\sum_{v \in V} f(v,x) = 0$$

  f **- поток в сети** G

Поток в сети

- **Определение:** Пусть $G-$ сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:
  1) $\forall x, y \in V \quad f(x,y) \leq c(x,y)$
  2) $\forall x, y \in V \quad f(x,y) = -f(y,x)$
  3) $\forall v \in V \backslash t, q$ выполняется условие:

  $$\sum_{v \in V} f(v,x) = 0$$

  f - **поток в сети** G
- $|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$ - величина потока
  Поток с максимальной величиной - **максимальный**

Разрез сети

- **Определение:** пусть G - сеть, а множество ее вершин V разбито на два дизъюнктых множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) - разрез сети G

Разрез сети

- **Определение:** пусть G - сеть, а множество ее вершин V разбито на два дизъюнктых множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) - разрез сети G
- Величина $c(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*.
  Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.
- Для любого потока f величина $f(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез*.

Разрез сети

- **Определение:** пусть G - сеть, а множество ее вершин V разбито на два дизъюнктых множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) - разрез сети G
- Величина $c(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*.
  Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.
- Для любого потока f величина $f(S, T) = \sum\limits_{x \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез*.

Лемма

Лемма: Для любого потока f, и разреза (S, T) сети G выполняется $|f| = f(S, T)$

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи
   - Корректность
   - Асимптотика и оценка числа фаз

Остаточная сеть

Определение

Остаточной сетью G_f по отношению к сети G и потоку f в ней называется сеть, в которой каждому ребру $(u, v) \in G$ с пропускной способностью c^{uv} и потоком f^{uv} соответствует два ребра:
1) (u, v) с пропускной способностью $c_f^{uv} = c^{uv} - f^{uv}$
2) (v, u) с пропускной способностью $c_f^{vu} = f^{uv}$

Остаточная сеть

Определение

Остаточной сетью G_f по отношению к сети G и потоку f в ней называется сеть, в которой каждому ребру $(u, v) \in G$ с пропускной способностью c^{uv} и потоком f^{uv} соответствует два ребра:
1) (u, v) с пропускной способностью $c_f^{uv} = c^{uv} - f^{uv}$
2) (v, u) с пропускной способностью $c_f^{vu} = f^{uv}$

Еще одно определение

Остаточной сетью G_f по отношению к сети $G = \{(V, E), s, t, c\}$ и потоку f в ней называется сеть $G_f = \{(V, E), s, t, c_f\}$, где

$$c_f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if y = s or x = t} \\ c(x, y) - f(x, y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

то есть, если $(x, y) \notin E \to c_f(x, y) = c(x, y) = 0$

Остаточная сеть

Остаточное ребро можно интуитивно понимать как меру того, насколько еще можно увеличить поток вдоль какого-то ребра: если по ребру (u, v) с пропускной способностью c_{uv} протекает поток f_{uv}, то по нему можно пустить еще $c_{uv} - f_{uv}$ единиц потока, а в обратную сторону до f_{uv} единиц потока.

Определение

Простой st-путь в G_f называется **дополняющим путем**

Блокирующий поток. Теорема Форда-Фалкерсона

Определение

Блокирующим потоком f в сети $G = (V, s, t, c)$ называется такой поток, что $\forall st$-путь содержит насыщенное этим потоком ребро. То есть в данной сети любой путь из истока в сток нельзя беспрепятственно увеличить.

Блокирующий поток. Теорема Форда-Фалкерсона

Определение

Блокирующим потоком f в сети $G = (V, s, t, c)$ называется такой поток, что $\forall st$-путь содержит насыщенное этим потоком ребро. То есть в данной сети любой путь из истока в сток нельзя беспрепятственно увеличить.

Theorem

Ford-Fulkerson: *В сети G с пропускной способностью c задан поток f, тогда следующие три утверждения равносильны:*
1) Поток f максимален
2) $\exists(S, T)$ такой, что $|f| = c(S, T)$
3) В остаточной сети G_f нет дополняющего пути

- **Замечание:** блокирующий поток не всегда максимален

Слоистая сеть

Слоистая сеть(layered network, вспомогательная сеть) строится след образом:

- Для каждой вершины v данной сети G определим длину кратчайшего sv-пути из истока и обозначим ее `d[v]` (можно сделать обходом в ширину)
- В слоистую сеть включаем только стрелки (u, v) такие, что `d[u] = d[v] + 1`
- То есть исключим из G стрелки лежащие внутри одного уровня или идущие назад
- Получившаяся сеть ациклична и любой st путь в слоистой сети является кратчайшим путем в исходной сети из свойств **BFS**
- $G = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 6\}\}; \quad s = 0, t = 6$
  тогда **слоистая сеть** $G_s = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{5\}, \{6\}\}$

План

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Изначально пусть $f(e) = 0 \quad \forall e \in E$

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Изначально пусть $f(e) = 0 \quad \forall e \in E$
- Алгоритм состоит из нескольких **фаз**.

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Изначально пусть $f(e) = 0 \quad \forall e \in E$
- Алгоритм состоит из нескольких **фаз**.
- На каждой фазе строится остаточная сеть G_f, затем по отношению к G_f строится слоистая сеть G_L(**BFS**). Если `d[v] = ` ∞ останавливаемся и выводим f

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Изначально пусть $f(e) = 0 \quad \forall e \in E$
- Алгоритм состоит из нескольких **фаз**.
- На каждой фазе строится остаточная сеть G_f, затем по отношению к G_f строится слоистая сеть G_L(**BFS**).
  Если `d[v] = ` ∞ останавливаемся и выводим f
- В построенной слоистой сети находим блокирующий поток f‘ (любой)

Алгоритм Диница. Основные идеи

Постановка задачи

Пусть дана сеть $G = (V, s, t, c)$. Как найти поток f из s в t максимальной величины?

- Алгоритм является улучшенной версией **Алгоритма Эдмонса-Карпа**
- Изначально пусть $f(e) = 0 \quad \forall e \in E$
- Алгоритм состоит из нескольких **фаз**.
- На каждой фазе строится остаточная сеть G_f, затем по отношению к G_f строится слоистая сеть G_L(**BFS**). Если `d[v] = ` ∞ останавливаемся и выводим f
- В построенной слоистой сети находим блокирующий поток f‘ (любой)
- Дополняем поток f потоком f‘ и переходим к следующей фазе

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи
   - Корректность
   - Асимптотика и оценка числа фаз

Корректность алгоритма

Theorem

Если алгоритм завершается, полученный поток является потоком максимальной длины.

Корректность алгоритма

Theorem

Если алгоритм завершается, полученный поток является потоком максимальной длины.

Доказательство.

Предположим, что в какой-то момент в слоистой сети G_L построенной для остаточной сети G_f не удалось найти блокирующий поток.

Корректность алгоритма

Theorem

Если алгоритм завершается, полученный поток является потоком максимальной длины.

Доказательство.

Предположим, что в какой-то момент в слоистой сети G_L построенной для остаточной сети G_f не удалось найти блокирующий поток.
Это означает, что `d[t] =` ∞, то есть сток t не достижим из истока s в слоистой сети.

Корректность алгоритма

Theorem

Если алгоритм завершается, полученный поток является потоком максимальной длины.

Доказательство.

Предположим, что в какой-то момент в слоистой сети G_L построенной для остаточной сети G_f не удалось найти блокирующий поток.
Это означает, что `d[t]` $= \infty$, то есть сток t не достижим из истока s в слоистой сети.
Но слоистая сеть содержит в себе все кратчайшие пути в сети G_f из истока s.

Корректность алгоритма

Theorem

Если алгоритм завершается, полученный поток является потоком максимальной длины.

Доказательство.

Предположим, что в какой-то момент в слоистой сети G_L построенной для остаточной сети G_f не удалось найти блокирующий поток.
Это означает, что `d[t] =` ∞, то есть сток t не достижим из истока s в слоистой сети.
Но слоистая сеть содержит в себе все кратчайшие пути в сети G_f из истока s.
Таким образом в остаточной сети нет $s \rightsquigarrow t$ пути

Корректность алгоритма

Theorem

Если алгоритм завершается, полученный поток является потоком максимальной длины.

Доказательство.

Предположим, что в какой-то момент в слоистой сети G_L построенной для остаточной сети G_f не удалось найти блокирующий поток.
Это означает, что `d[t]` $= \infty$, то есть сток t не достижим из истока s в слоистой сети.
Но слоистая сеть содержит в себе все кратчайшие пути в сети G_f из истока s.
Таким образом в остаточной сети нет $s \rightsquigarrow t$ пути
Применяя теорему Форда-Фалкерсона получаем, что текущий поток в самом деле максимален. $\square$

План

1. Сети и потоки
   - Простейшие понятия
   - Остаточная сеть, блокирующий поток, слоистая сеть
2. Алгоритм Диница
   - Основные идеи
   - Корректность
   - Асимптотика и оценка числа фаз

Оценка числа фаз

Theorem

Расстояние между истоком и стоком строго увеличивается после каждой фазы алгоритма: $d_n[t] > d_{n-1}[t]$

Доказательство.

От противного. Пусть длина кратчайшего $s \rightsquigarrow t$ пути останется неизменной после очередной фазы алгоритма. $\square$

Summary

- he first main message of your talk in one or two lines.
- The second main message of your talk in one or two lines.
- Perhaps a third message, but not more than that.
- Outlook
  - Something you haven't solved.
  - Something else you haven't solved.

For Further Reading I

A. Author.
Handbook of Everything.
Some Press, 1990.

S. Someone.
On this and that.
Journal of This and That, 2(1):50–100, 2000.