

Wojskowa Akademia Techniczna

Modelowanie Matematyczne Ćwiczenia

Prowadzący: mgr. inż. Michał Kapałka

Temat: Problem optymalnego przydzielenia wątków do procesorów

Autor: Michał Konopka

Czerwiec 2020

1 Opis problemu

Istnieje zbiór wątków które procesory muszą rozwiązać w skończonym czasie. Pewne zadania wymagają specjalnych zasobów. Zasób może być używany tylko przez jeden proces. Jak największa ilość wątków powinna zostać zakończona w zadanym czasie z wykorzystaniem jak najmniejszej ilości energii. Każdy procesor ma inną szybkość i inne zużycie energii. Zużycie energii zmienia się w stanie spoczynku procesora (kiedy procesor nie wykonuje żadnej pracy). Każdy wątek może być wykonywany tylko na jednym procesorze. Każdy wątek ma ilość jednostek czasu potrzebną na wykonanie wątku.

2 Model matematyczny opisanego problemu

2.1 Matematyczny opis cech istotnych

- P - zbiór identyfikatorów procesorów $P \in 2^N$
- W - zbiór identyfikatorów wątków $W \in 2^N$
- Z - zbiór identyfikatorów zasobów $Z \in 2^N$
- τ - zadany odcinek czasu (w jednostce czasu) $\tau \in N_+$
- ω_w - odcinek czasu przeznaczony dla w-tego wątku (w jednostce czasu) $\omega \in N_+, w \in W$
- Z_w^{wy} - zbiór zasobów wymaganych przez w-ty wątek $Z^{wy} \in 2^N, w \in W$
- Wy_p - wydajność p-tego procesora w jednostkach $W_y \in N_+, p \in P$
- L_w - Ilość jednostek potrzebnych na wykonanie w-tego wątku $L \in N_+, w \in W$
- E_p - Współczynnik zużycia energii p-tego procesora $E \in N_+, p \in P$
- E_p^s - Spoczynkowy współczynnik zużycia energii p-tego procesora $E^s \in N_+, p \in P$
- M_p - Zbiór identyfikatorów wątków przypisanych p-temu procesowi $M \in 2^N, p \in P$
- Q_w - Zbiór identyfikatorów zasobów przypisanych w-temu wątkowi $Q \in 2^N, p \in P$
- K - Koszt energetyczny $K \in N$
- J - Ilość ukończonych wątków $J \in N$

3 Matematyczny opis istotnych związków między wybranymi cechami

- R_0 : Wątek może być przypisany tylko do jednego procesora

$$R_0 = \{ \langle \{M\}_{p=1}^{|P|} \rangle \in N^{|P|} : \forall_{i \in P} \forall_{j \in P} M_i \cap M_j = \emptyset \}$$

- R_1 : Zasób może być wykorzystywany tylko przez jeden wątek

$$R_1 = \{ \langle \{Q\}_{p=1}^{|W|} \rangle \in N^{|W|} : \forall_{i \in W} \forall_{j \in W} Q_i \cap Q_j = \emptyset \}$$

- R_2 : Spoczynkowe współczynnik energii procesora musi być niższy lub równy niż współczynnik w stanie aktywnym

$$R_2 = \{ \langle \{E\}_{p=1}^{|P|}, \{E^s\}_{p=1}^{|P|} \rangle \in \langle N^{2|P|} \rangle : \forall_{p \in P} (E_p^s \leq E_p) \}$$

- R_3 : Wątek może być przypisany do procesu tylko gdy ma dostępne zasoby

$$R_3 = \{ \langle \{P\}_{p=1}^{|P|}, \{ \{M\}_{w=1}^{|M|} \}_{p=1}^{|P|}, \{Z\}_{z=1}^{|Z|}, \{Z^{wy}\}_{w=1}^{|W|} \rangle \in \langle N^{|P|}, N^{|W||P|}, N^{|Z|}, N^{|W|} \rangle : \forall_{p \in P} \forall_{w \in M_p} (Z_w^{wy} \cap Z = Z_w^{wy}) \}$$

- R_4 : Ilość ukończonych wątków

$$B(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a \geq b \\ 0 & \text{p.p} \end{cases}$$

$$R_4 = \{ \langle \{W_y\}_{i=1}^{|P|}, \{P\}_{i=1}^{|P|}, J, \tau, \{L\}_{i=1}^{|W|}, \{\omega\}_{i=1}^{|W|}, \{ \{M\}_{i=1}^{|M|} \}_{i=1}^{|P|} \rangle \in \langle N^{2|P|+2}, N^{2(|W|)}, N^{|M||P|} \rangle$$

$$: J = \sum_{p \in P} \sum_{w \in M_p} B(Wy_p * \omega_w, L_w) \}$$

- R_5 : Ilość zużytej energii

$$\langle \{P\}_{i=1}^{|P|}, \{ \{M\}_{i=1}^{|M|} \}_{i=1}^{|P|}, \{E\}_{p=1}^{|P|}, \{E^s\}_{p=1}^{|P|}, \tau, \{\omega\}_{i=1}^{|W|}, K \rangle \in \langle N^{|P|}, N^{|M||P|}, N^{2|P|}, N_+, N_+^{|W|}, N_+ \rangle :$$

$$K = \sum_{p \in P} \sum_{w \in M_p} \left(E_p * \omega_w + (E_p^s * (\tau - \sum_{w \in M_p} \omega_w)) \right)$$

- R_6 : Czas przeznaczony na wszystkie wątki nie może przekraczać dostępnego czasu

$$R_6 = \{ \langle \{\omega\}_{i=1}^{|W|}, \tau, P \rangle \in \langle N^{|W|+1+|P|} \rangle : \left(\sum_{t \in \omega} t \right) \leq \tau * |P| \}$$

4 Podział cech na zmienne decyzyjne, wskaźniki i dane

4.1 Zmienne decyzyjne

$$x = \langle \{M\}_{p=1}^{|P|}, \{\omega\}_{w=1}^{|W|}, \{Q\}_{i=1}^{|W|} \rangle$$

4.2 Dane

$$a = \{ \langle \{P\}_{i=1}^{|P|}, \{W\}_{i=1}^{|W|}, \{Z\}_{i=1}^{|Z|}, \{L\}_{i=1}^{|W|}, \{E_p\}_{i=1}^{|P|}, \{E^s\}_{i=1}^{|P|}, \{W^{wy}\}_{i=1}^{|P|}, \{W_y\}_{i=1}^{|P|}, \{\omega\}_{i=1}^{|W|}, \{L\}_{i=1}^{|W|}, \tau \rangle \}$$

4.3 Wskaźniki

$$W = \{ \langle K, J \rangle \}$$

5 Analiza poziomu informacyjnego

- M_p – Zbiór identyfikatorów wątków przypisanych p-temu procesowi
Zbiór ten nie jest znany podczas podejmowania decyzji ponieważ jest to zmienna decyzyjna
- Q_w - Zbiór identyfikatorów zasobów przypisanych w-temu wątkowi
Zbiór ten nie jest znany podczas podejmowania decyzji
- K – Koszt energetyczny, ponieważ jest to wskaźnik dlatego jej wartość nie jest znana w momencie podejmowania decyzji
- J - Ilość ukończonych wątków, ponieważ jest to wskaźnik dlatego jego wartość nie jest znana w momencie podejmowania decyzji
- ω - Czas przeznaczony dla w-tego wątku jest zmienną decyzyjną więc jego wartość ustala decydent, w chwili podejmowania decyzji
- P - Zbiór ten jest znany w momencie podejmowania decyzji, ponieważ jest to dana
- W - Zbiór ten jest znany w momencie podejmowania decyzji, ponieważ jest to dana
- Z - Zbiór ten jest znany w momencie podejmowania decyzji, ponieważ jest to dana
- τ - Zadany odcinek czasowy, znana wartość liczbowa
- Z_w^{wy} - Zbiór zasobów, znany w momencie podejmowania decyzji
- W_{y_p} - Wartość znana dla p-tego procesora w momencie podejmowania decyzji
- L_w – Wartość liczbowa dla danego wątku znana w momencie podejmowania decyzji
- E_p - Współczynnik zużycia energii znany w momencie podejmowania decyzji
- E_p^s - Spoczynkowy współczynnik zużycia energii znany w momencie podejmowania decyzji

6 Określenie poprawnych zbiorów danych, wartości zmiennych decyzyjnych, wartości wskaźników

6.1 Zbiór poprawnych danych

$$A = \{ \langle \{P\}_{i=1}^{|P|}, \{W\}_{i=1}^{|W|}, \{Z\}_{i=1}^{|Z|}, \{L\}_{i=1}^{|L|}, \{E_p\}_{i=1}^{|P|}, \{E^s\}_{i=1}^{|P|}, \{W^{wy}\}_{i=1}^{|P|}, \{Wy\}_{i=1}^{|P|}, \{\omega\}_{i=1}^{|W|}, \{L\}_{i=1}^{|W|}, \tau \rangle \in \langle N^{|P|}, N^{|W|}, N^{|Z|}, N_+^{|W|}, N_+^{4|P|}, N^{2|W|}, N_+ \rangle : \forall_{p \in P} (E_p^s \leq E_p) \}$$

6.2 Zbiór dopuszczalnych zestawów wartości zmiennych decyzyjnych

$$\Omega(a) = \{ \langle \{M\}_{p=1}^{|P|}, \{\omega\}_{w=1}^{|W|}, \{Q\}_{i=1}^{|W|} \rangle \in \langle N^{0..|W||P|}, N_+^{|W|}, N^{0..|Z||W|} \rangle : \forall_{i \in P} \forall_{j \in P} M_i \cap M_j = \emptyset, \forall_{p \in P} \forall_{w \in M_p} (Z_w^{wy} \cap Z = Z_w^{wy}), \forall_{i \in W} \forall_{j \in W} Q_i \cap Q_j = \emptyset, (\sum_{t \in \omega} t) \leq \tau * |P| \}$$

6.3 Zbiór możliwych wartości wskaźników

$$B(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a \geq b \\ 0 & \text{p.p} \end{cases}$$

$$W(a, x) = \{ \langle K, J \rangle \in \langle N_+^2 \rangle : K = \sum_{p \in P} \sum_{w \in M_p} (E_p * \omega_w + (E_p^s * (\tau - \sum_{w \in M_p} \omega_w))) \rangle, J = \sum_{p \in P} \sum_{w \in M_p} B(Wy_p * \omega_w, L_w) \}$$

7 Funkcja osiągnięcia celu

$$k(x, a) = \sum_{p \in P} \sum_{w \in M_p} (E_p * \omega_w + (E_p^s * (\tau - \sum_{w \in M_p} \omega_w)))$$

$$j(x, a) = \sum_{p \in P} \sum_{w \in M_p} B(Wy_p * \omega_w, L_w)$$

$$F(x, a) = \{ \langle j(x, a), k(x, a) \rangle \in \langle N_+^2 \rangle : x \in \Omega(a), a \in A \}$$

$$\lambda_{n-1} \in R, \lambda_n \in R, \text{ gdzie } n = 2$$

Przyjmujemy, że wagi λ i wskaźniki F są znormalizowane.

$$E_a(F(x^*, a)) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sum_{i=1}^n F_i(x^*, a) * \lambda_i = \max_{x \in \Omega(a)} \sum_{i=1}^n F_i(x, a) * \lambda_i \\ 0 & \text{gdy p.p} \end{cases}$$

8 Zadanie optymalizacyjne

Dla danych

$$a \in A$$

wyznaczyć takie

$$x \in \Omega(a)$$

aby

$$E_a(F(x^*, a)) = 1$$