ЛЕКЦИЯ 14.2 МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТЫ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Методы Рунге-Кутты

1.1. Общая вычислительная схема методов Рунге-Кутты

В первой части мы сформулировали вычислительную задачу Коши для ОДУ первого порядка и получили расчётные формулы самого простого метода её решения – метода Эйлера. Идея была очень проста: интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

получается формула для расчёта следующего сеточного значения

$$y(x_{i+1}) = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx. \qquad (1)$$

Интеграл в (1) вычисляется приближённо по какой-либо квадратурной формуле. Таким способом мы вывели метод Эйлера, и так же выводится вычислительная схема целого семейства весьма распространённых методов. Это методы Рунге-Кутты. Они объединены общим происхождением и общей параметризованной расчётной формулой. Далее мы увидим, что метод Эйлера и его модификации - представители этого семейства.

В методах Рунге-Кутты интеграл заменяется квадратурной суммой:

$$y(x_{i+1}) = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \approx y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{m} c_j f\left(x_i^{(j)}, y\left(x_i^{(j)}\right)\right), \qquad (2)$$

где $x_i^{(j)} = x_i + \alpha_j h, j = 1, \dots, m$, параметры α_j удовлетворяют условиям

$$0 = \alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_m \le 1. \qquad (3)$$

Здесь $x_i^{(j)}$ – узлы квадратуры, $j = 1, \dots, m$, всего m узлов. Причём первый $x_i^{(1)}$ равен x_i, среди узлов могут быть совпадающие (см. условия (3)); c_j (вернее, hc_j) – веса квадратуры.

Для расчёта y_{i+1} по этой формуле надо вычислять значения $y\left(x_i^{(j)}\right)$ решения y в узлах квадратуры. Это, в свою очередь, делается также по квадратурным формулам

$$y\left(x_i^{(1)}\right) = y_i,$$

$$y\left(x_i^{(2)}\right) = y_i + h\beta_{21} f\left(x_i^{(1)}, y\left(x_i^{(1)}\right)\right),$$

$$y\left(x_i^{(3)}\right) = y_i + h\left(\beta_{31} f\left(x_i^{(1)}, y\left(x_i^{(1)}\right)\right) + \beta_{32} f\left(x_i^{(2)}, y\left(x_i^{(2)}\right)\right)\right),$$

$$\vdots$$

$$y\left(x_i^{(j)}\right) = y_i + h\sum_{k=1}^{j-1} \beta_{jk} f\left(x_i^{(k)}, y\left(x_i^{(k)}\right)\right),$$

$$\vdots$$

$$y\left(x_i^{(m)}\right) = y_i + h\sum_{k=1}^{m-1} \beta_{mk} f\left(x_i^{(k)}, y\left(x_i^{(k)}\right)\right). \tag{4}$$

Формулы (4) рекуррентные: каждое значение $y\left(x_i^{(j)}\right)$ вычисляется по предыдущим $y\left(x_i^{(1)}\right), \dots, y\left(x_i^{(j-1)}\right)$. Начальное значение $y\left(x_i^{(1)}\right) = y_i$. Это и есть общая вычислительная схема методов Рунге-Кутты. Она задаётся следующими параметрами:

1) коэффициенты, определяющие узлы, $\{\alpha_j\}_{j=1}^{m}$, причём $\alpha_1 = 0$;
2) число узлов m;
3) веса квадратуры (2) $\{c_j\}_{j=1}^{m}$;
4) веса вспомогательных квадратур $\{\beta_{jk}\}_{j=2,\dots,m}^{k=1,\dots,j-1}$.

Эту схему можно записать с помощью вспомогательных величин. Пусть

$$K_i^{(j)} = f\left(x_i^{(j)}, y\left(x_i^{(j)}\right)\right).$$

Тогда расчётные формулы принимают такой вид:

$$y_{i+1} = y_i + hK_i,$$

$$K_i = \sum_{j=1}^{m} c_j K_i^{(j)};$$

$$K_i^{(1)} = f\left(x_i^{(1)}, y\left(x_i^{(1)}\right)\right), x_i^{(1)} = x_i, y\left(x_i^{(1)}\right) = y_i;$$

$$K_i^{(2)} = f\left(x_i^{(2)}, y\left(x_i^{(2)}\right)\right), x_i^{(2)} = x_i + \alpha_2 h, y\left(x_i^{(2)}\right) = y_i + h\beta_{21}K_i^{(1)};$$

$$\vdots$$

$$K_i^{(j)} = f\left(x_i^{(j)}, y\left(x_i^{(j)}\right)\right), x_i^{(j)} = x_i + \alpha_j h, y\left(x_i^{(j)}\right) = y_i + h\sum_{k=1}^{j-1}\beta_{jk}K_i^{(k)};$$

$$\vdots$$

$$K_i^{(m)} = f\left(x_i^{(m)}, y\left(x_i^{(m)}\right)\right), x_i^{(m)} = x_i + \alpha_m h, y\left(x_i^{(m)}\right) = y_i + h\sum_{k=1}^{m-1}\beta_{mk}K_i^{(k)}. \qquad (5)$$

Сначала вычисляется $K_i^{(1)} = f(x_i, y_i)$, потом по $K_i^{(1)}$ находится $K_i^{(2)}$ и т.д. По рекуррентным формулам вычисляются все $K_i^{(j)}, j = 2, \dots, m$; затем вычисляется K_i и, наконец, очередное сеточное значение y_{i+1}. Параметры выбираются так, чтобы обеспечить максимальный порядок точности решения.

Таким образом, методы Рунге-Кутты характеризуются следующим:

1. Это явные одношаговые методы, т.е. очередное сеточное значение вычисляется по явной формуле с использованием одного предыдущего.
2. На каждом шаге вычисляются значения решения и правой части уравнения в m вспомогательных точках.

Замечание 1. Существуют также неявные методы Рунге-Кутты. Их отличие от классических явных в том, что значения $y\left(x_i^{(j)}\right)$ во вспомогательных точках находятся не рекуррентно, а как решение нелинейной системы уравнений. Они имеют некоторые преимущества, но при этом алгоритм существенно усложняется.

Замечание 2. Увеличивая число m вспомогательных точек, можно получить методы Рунге-Кутты любого порядка точности. Однако методы выше четвёртого порядка используется редко из-за громоздкости формул. А также из-за того, что методы Рунге-Кутты высокого порядка менее эффективны по сравнению с другими того же порядка точности.

Нетрудно установить связь изученных нами в лекции 14.1 методов Эйлера с семейством методов Рунге-Кутты. Если сравнить формулы этих методов с общей схемой Рунге-Кутты, то выводятся значения параметров, приведённые в таблице 1.

Метод Эйлера и его модификации – частные случаи методов Рунге-Кутты.

Табл. 1. Параметры методов Рунге-Кутты

Параметр	Метод Эйлера	Метод Эйлера-Коши	Усовершенствованный метод Эйлера
m	1	2	2
α_1	0	0	0
α_2	-	1	$\frac{1}{2}$
c_1	1	$\frac{1}{2}$	0
c_2	-	$\frac{1}{2}$	1
β_{21}	-	1	$\frac{1}{2}$

1.2. Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка

Самым популярным методом из семейства Рунге-Кутты является метод четвёртого порядка. Он считается классическим и даже называется просто *методом Рунге-Кутты*. Вычислительная схема (5) для него принимает вид:

$$y_{i+1} = y_i + hK_i,$$

$$K_i = \frac{1}{6}\left(K_i^{(1)} + 2K_i^{(2)} + 2K_i^{(3)} + K_i^{(4)}\right),$$

$$K_i^{(1)} = f(x_i, y_i),$$

$$K_i^{(2)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_i^{(1)}\right),$$

$$K_i^{(3)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_i^{(2)}\right),$$

$$K_i^{(4)} = f\left(x_{i+1}, y_i + hK_i^{(3)}\right),$$

$$y(x_0) = y_0,$$

$i = 0, \dots, n-1$. Его параметры приведены в таблице 2. Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что локальная погрешность равна $O(h^5)$, а глобальная накопленная погрешность - $O(h^4)$.

Для оценки погрешности методов Рунге-Кутты рекомендуется применять правило двойного пересчёта (*правило Рунге*). Согласно нему погрешность сеточного решения в точке x_{i+1} грубо оценивается по формуле

Табл. 2. Параметры метода Рунге-Кутты четвёртого порядка

Параметр	Значения			
m	4			
c_i	$c_1 = \frac{1}{6}$	$c_2 = \frac{1}{3}$	$c_3 = \frac{1}{3}$	$c_4 = \frac{1}{6}$
α_i	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = \frac{1}{2}$	$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	$\alpha_4 = 1$
β_{2k}	$\beta_{21} = \frac{1}{2}$	-	-	-
β_{3k}	$\beta_{31} = 0$	$\beta_{32} = \frac{1}{2}$	-	-
β_{4k}	$\beta_{41} = 0$	$\beta_{42} = 0$	$\beta_{43} = 1$	-

$$\Delta y_{i+1}^{\left(\frac{h}{2}\right)} = \left| y(x_{i+1}) - y_{i+1}^{\left(\frac{h}{2}\right)} \right| \approx \frac{\left| y_{i+1}^{(h)} - y_{i+1}^{\left(\frac{h}{2}\right)} \right|}{2^s - 1},$$

где $y(x_{i+1})$ – значение точного решения в точке x_{i+1}, $y_{i+1}^{\left(\frac{h}{2}\right)}$ – сеточное решение в этой точке с шагом $\frac{h}{2}$, $y_{i+1}^{(h)}$ - то же самое с шагом h, s – порядок точности метода. Тогда при $s = 4$ получаем оценку метода четвёртого порядка:

$$\Delta y_{i+1}^{\left(\frac{h}{2}\right)} \approx \frac{\left| y_{i+1}^{(h)} - y_{i+1}^{\left(\frac{h}{2}\right)} \right|}{15}.$$

Это же правило можно применять для метода Эйлера ($s = 1$) и его модификаций ($s = 2$).

Порядок применения правила следующий. По значению y_i вычисляется $y_{i+1}^{(h)}$ с шагом интегрирования h и $y_{i+1}^{\left(\frac{h}{2}\right)}$ с шагом $\frac{h}{2}$. Для последнего надо выполнить два расчётных шага метода. Затем находится оценка погрешности. Если она укладывается в заданную точность, то шаг оставляется, значение $y_{i+1}^{\left(\frac{h}{2}\right)}$ принимается за сеточное решение в точке x_{i+1}. В противном случае шаг уменьшается. На этом правиле основаны программы решения задачи Коши методом Рунге-Кутта с адаптивным шагом. Они оценивают погрешность в каждом узле сетки и принимают решение об изменении шага для следующего узла.

Пример. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2^{x-y}, \\ y(-3) = -5 \end{cases}$$

на отрезке $[-3;\ -2]$ с шагом $h = 0{,}1$ тремя методами: явным методом Эйлера, модифицированным метод Эйлера, методом Рунге-Кутты.

Аналитически можно найти точное решение:

$$y = \log_2\left(2^x - \frac{3}{32}\right).$$

Узлы сетки рассчитываются по формулам $x_i = -3 + hi$, $i = 0{,}1, \dots, 10$.

Расчетные формулы явного метода Эйлера для данного примера получаются следующие:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot 2^{x_i - y_i}, \\ y_0 = -5, \end{cases}$$

$i = 0{,}1, \dots, 9.$

Расчетные формулы модифицированного метода Эйлера:

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot 2^{x_i - y_i}, \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left(2^{x_i - y_i} + 2^{x_i - \tilde{y}_i}\right), \\ y_0 = -5, \end{cases}$$

$i = 0{,}1, \dots, 9.$

Расчетные формулы метода Рунге – Кутты:

$$\begin{cases} k_1 = 2^{x_i - y_i}, \\ k_2 = 2^{x_i + \frac{h}{2} - y_i - \frac{hk_1}{2}}, \\ k_3 = 2^{x_i + \frac{h}{2} - y_i - \frac{hk_2}{2}}, \\ k_4 = 2^{x_i + h - y_i - hk_3}, \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ y_0 = -5, \end{cases}$$

$i = 0,1, \ldots ,9$.

Результаты расчётов приведены в таблице 3: $\{y_i\}$ – точное сеточное решение, $\{y_i^1\}$ – сеточное решение, полученное методом Эйлера, $\{y_i^2\}$ - модифицированным методом Эйлера, $\{y_i^3\}$ - методом Рунге Кутты. Последний является самым точным. Погрешность метода меньше 10^{-5}. В приведенной таблице 3 не видно различия между точным и приближенным решением метода Рунге-Кутты.

Табл. 3. Точное и приближенное решения задачи Коши на с. 6

x_i	y_i	y_i^1	y_i^2	y_i^3
-3	-5	-5	-5	-5
$-2{,}9$	$-4{,}636$	$-4{,}600$	$-4{,}648$	$-4{,}636$
$-2{,}8$	$-4{,}327$	$-4{,}275$	$-4{,}312$	$-4{,}327$
$-2{,}7$	$-4{,}055$	$-3{,}997$	$-4{,}082$	$-4{,}055$
$-2{,}6$	$-3{,}812$	$-3{,}751$	$-3{,}843$	$-3{,}812$
$-2{,}5$	$-3{,}590$	$-3{,}529$	$-3{,}624$	$-3{,}590$
$-2{,}4$	$-3{,}385$	$-3{,}325$	$-3{,}421$	$-3{,}385$
$-2{,}3$	$-3{,}193$	$-3{,}315$	$-3{,}232$	$-3{,}193$
$-2{,}2$	$-3{,}013$	$-2{,}957$	$-3{,}053$	$-3{,}013$
$-2{,}1$	$-2{,}842$	$-2{,}788$	$-2{,}883$	$-2{,}842$
-2	$-2{,}678$	$-2{,}627$	$-2{,}720$	$-2{,}678$

2. Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Теперь перейдём к многомерной задаче Коши. Рассмотренные ранее методы могут быть использованы также для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим задачу в общей остановке. Надо найти частное решение системы ОДУ первого порядка

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m),\\
\dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m),\\
\qquad\qquad \vdots\\
\dfrac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m)
\end{cases}
$$

при начальных условиях в точке x_0

$$
\begin{cases}
y_1(x_0) = y_{10},\\
y_2(x_0) = y_{20},\\
\qquad \vdots\\
y_m(x_0) = y_{m0},
\end{cases}
$$

$x \in [x_0; X]$, $y_{10}, \dots, y_{m0}$ – константы. Здесь x – независимая переменная, $y_1, \dots, y_m$ – неизвестные функции, определённые на отрезке $[x_0; X]$. Эта задача записывается в векторной форме следующим образом:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dx}\bar{y}(x) = \bar{f}(x, \bar{y}),\\
\quad \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0,
\end{cases}
$$

$$
x \in [x_0; X],
$$

где

$$
\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\\ \vdots\\ y_m(x) \end{pmatrix}, \bar{f}(x, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m)\\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m)\\ \vdots\\ f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{pmatrix},
$$

$$
\bar{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10}\\ y_{20}\\ \vdots\\ y_{m0} \end{pmatrix}.
$$

Здесь $\bar{y}$ – вектор-функция от x, $\bar{f}$ – вектор-функция от x и $\bar{y}$, $\bar{y}_0$ – вектор начальных значений.

Описанные нами методы решения одномерной задачи Коши переносятся с минимальными изменениями на многомерную задачу. Надо лишь скалярные величины заменить векторными. Например, расчётные формулы метода Рунге-Кутты имеют такой вид:

$$
\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{K}_i,
$$

$$
\bar{K}_i = \frac{1}{6}\left(\bar{K}_i^{(1)} + 2\bar{K}_i^{(2)} + 2\bar{K}_i^{(3)} + \bar{K}_i^{(4)}\right),
$$

$$
\bar{K}_i^{(1)} = \bar{f}(x_i, \bar{y}_i),
$$

$$\overline{K}_i^{(2)} = \bar{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2}\overline{K}_i^{(1)}\right),$$

$$\overline{K}_i^{(3)} = \bar{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2}\overline{K}_i^{(2)}\right),$$

$$\overline{K}_i^{(4)} = \bar{f}\left(x_{i+1}, \bar{y}_i + h\overline{K}_i^{(3)}\right),$$

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0,$$

$i = 0, \dots, n-1$. Соответственно, результаты, касающиеся погрешностей, переносятся на многомерный случай. Абсолютная погрешность сеточного значения теперь – это векторная норма разности точного и сеточного значений. Оценки погрешности производятся по норме или покомпонентно.

Многомерная задача Коши имеет свои особенности. Например, появляется такое явление, как жёсткость. Но мы не рассматриваем её в нашем курсе. В целом теория численного решения многомерной задачи мало отличается от скалярной задачи.

В заключение для примера приведём расчётные формулы изученных методов для двумерной задачи Коши. Надо найти частное решение системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varphi(x; y; z), \\ \dfrac{dz}{dx} = \psi(x; y; z), \end{cases}$$

определённое на отрезке $[x_0; X]$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0. \end{cases}$$

Пусть задана сетка $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Шаг сетки

$$h = \frac{X - x_0}{n}.$$

Сеточное решение рассчитывается явным методом Эйлера по формулам

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i; y_i; z_i), \\ z_{i+1} = z_i + h\psi(x_i; y_i; z_i), \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$.

Расчётные формулы модифицированного метода Эйлера имеют вид

$$
\begin{cases}
\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i; y_i; z_i),\\
\tilde{z}_{i+1} = z_i + h\psi(x_i; y_i; z_i),\\
y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\big(\varphi(x_i; y_i; z_i) + \varphi(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1}; \tilde{z}_{i+1})\big),\\
z_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\big(\psi(x_i; y_i; z_i) + \psi(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1}; \tilde{z}_{i+1})\big),\\
y(x_0) = y_0,\\
z(x_0) = z_0,
\end{cases}
$$

$i = 0, 1, \dots, n-1.$

Схема метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности такова:

$$
\begin{cases}
k_1 = \varphi(x_i; y_i; z_i), l_1 = \psi(x_i; y_i; z_i),\\
k_2 = \varphi\left(x_i + \dfrac{h}{2}; y_i + \dfrac{h}{2}k_1; z_i + \dfrac{h}{2}l_1\right), l_2 = \psi\left(x_i + \dfrac{h}{2}; y_i + \dfrac{h}{2}k_1; z_i + \dfrac{h}{2}l_1\right),\\
k_3 = \varphi\left(x_i + \dfrac{h}{2}; y_i + \dfrac{h}{2}k_2; z_i + \dfrac{h}{2}l_2\right), l_3 = \psi\left(x_i + \dfrac{h}{2}; y_i + \dfrac{h}{2}k_2; z_i + \dfrac{h}{2}l_2\right),\\
k_4 = \varphi(x_i + h; y_i + hk_3; z_i + hl_3), l_4 = \psi(x_i + h; y_i + hk_3; z_i + hl_3),\\
y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\\
z_{i+1} = z_i + \dfrac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),\\
y(x_0) = y_0,\\
z(x_0) = z_0,
\end{cases}
$$

$i = 0, 1, \dots, n-1.$

Этот метод имеет четвёртый порядок точности, т.е. ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

В заключение посмотрим, как решается задача Коши для уравнения высшего порядка. Она состоит в нахождении частного решения ОДУ p-го порядка

$$
y^{(p)} = F\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}\big),
$$

определённого на отрезке $[x_0; X]$ и удовлетворяющего при $x = x_0$ начальным условиям

$$
\begin{cases}
y(x_0) = y_0,\\
y'(x_0) = y'_0,\\
\vdots\\
y^{(p-1)}(x_0) = y_0^{(p-1)}.
\end{cases}
$$

Здесь $y_0, y_0', \dots, y_0^{(p-1)}$ –константы.

Известно, что уравнение высшего порядка сводится к системе ОДУ первого порядка с помощью замен

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x), \\ y_2(x) = y'(x), \\ \vdots \\ y_p(x) = y^{(p-1)}(x). \end{cases}$$

Тогда вместо уравнения p-го порядка получаем систему p уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3(x), \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{p-1}}{dx} = y_p(x), \\ \dfrac{dy_p}{dx} = F(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \end{cases}$$

и начальные условия

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_0, \\ y_2(x_0) = y_0', \\ \vdots \\ y_p(x_0) = y_0^{(p-1)}, \end{cases}$$

$x \in [x_0; X]$. Пришли к многомерной задаче Коши первого порядка, которая решается теми же методами, что и одномерная.

Для уравнений второго порядка существуют также специальные методы решения. Одним из самых популярных считается метод Нумерова четвёртого порядка точности. Имеем задачу Коши второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

$x \in [x_0; X]$. Правая часть уравнения не содержит первую производную. Заменяем дифференциальное уравнение конечной разностной схемой. Вторую производную аппроксимируем второй центральной разностной производной, а функцию f в правой части - величиной

$$\frac{1}{12}\big(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 10f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\big).$$

Получаем расчётную формулу метода Нумерова:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{12}\big(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 10f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\big),$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$. Это неявный двухшаговый метод: y_{i+1} находится по двум предыдущим y_i и y_{i-1} решением нелинейного уравнения (y_{i+1} присутствует в обеих частях). Для запуска метода нужны два начальных значения y_0, y_1. Первое задано, а второе находится каким-либо одношаговым методом либо разностной аппроксимацией второго начального условия:

$$y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h} = y_0'$$

(здесь применена правая разностная производная).

Пример. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

на отрезке $[0;\ 1]$. В правую часть уравнения переменная t не входит явно.

Аналитически можно найти точное решение:

$$\begin{cases} x(t) = e^t - 1, \\ y(t) = e^t + e^{2t} + 1. \end{cases}$$

Решим задачу явным и модифицированным методами Эйлера и методом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0{,}1$.

На рисунке 1 приведен фрагмент решения задачи в Mathcad модифицированным методом Эйлера: рассчитывается первое сеточное значение $(x_1^1;\ y_1^1)$. Все расчёты сделаны в Mathcad, результаты даны в таблице 4. Точки $(x_i;\ y_i)$ – это точное сеточное решение, $(x_i^1;\ y_i^1)$ – это сеточное решение по методу Эйлера, $(x_i^2;\ y_i^2)$ – по модифицированному методу Эйлера, точки $(x_i^3;\ y_i^3)$ – по методу Рунге-Кутты.

$$f1(x,y) := x-1$$

$$f2(x,y) := x+2\ y-3$$

$$t0 := 0 \quad y0 := 3 \quad x0 := 0 \quad y11 := y0 + h \cdot f2(x0, y0) = 3.3$$

$$x11 := x0 + h \cdot f1(x0, y0) = -0.1$$

$$y1 := y0 + \frac{h}{2} \cdot (f2(x0, y0) + f2(x11, y11)) = 3.325$$

$$x1 := x0 + \frac{h}{2} \cdot (f1(x0, y0) + f1(x11, y11)) = -0.105$$

$$x0 := x1 \quad y0 := y1$$

Рис. 1. Фрагмент решения задачи на с. 12 в Mathcad модифицированным методом Эйлера

Табл. 4. Решение задачи на с. 12

t_i	$(x_i;\ y_i)$	$(x_i^1;\ y_i^1)$	$(x_i^2;\ y_i^2)$	$(x_i^3;\ y_i^3)$
0	(0; 3)	(0; 3)	(0; 3)	(0; 3)
0,1	(−0,105; 3,327)	(−0,100; 3,300)	(−0,105; 3,325)	(−0,105; 3,327)
0,2	(−0,221; 3,713)	(−0,210; 3,650)	(−0,221; 3,709)	(−0,221; 3,713)
0,3	(−0,350; 4,172)	(−0,331; 4,059)	(−0,349; 4,165)	(−0,350; 4,172)
0,4	(−0,492; 4,717)	(−0,464; 4,538)	(−0,491; 4,796)	(−0,492; 4,717)
0,5	(−0,649; 5,367)	(−0,611; 5,099)	(−0,647; 5,350)	(−0,649; 5,367)
0,6	(−0,822; 6,142)	(−0,772; 5,758)	(−0,820; 6,118)	(−0,822; 6,142)
0,7	(−1,014; 7,069)	(−0,949; 6,532)	(−1,102; 7,034)	(−1,014; 7,069)
0,8	(−1,226; 8,179)	(−1,144; 7,443)	(−1,223; 8,130)	(−1,226; 8,178)
0,9	(−1,460; 9,509)	(−1,358; 8,518)	(−1,456; 9,444)	(−1,460; 9,509)
1,0	(−1,718; 11,107)	(−1,594; 9,785)	(−1,714; 11,019)	(−1,718; 11,107)

4. Примеры практических задач, приводящих к решению дифференциальных

4.1. Дифференциальные уравнения в биотехнологиях

Биотехнологии – это прикладная отрасль биологии, в которой разрабатываются методы генной инженерии и выращивания клеточных культур. Инструмент биотехнологий – хемостат - биореактор, в котором посредством культивирования клеток вырабатываются полезные вещества. Цели исследования – достичь состояния, при котором число микроорганизмов N и объем питательных веществ C были бы практически постоянными, а рост численности микроорганизмов – экспоненциальным. Следующие дифференциальные уравнения описывают процессы в хемостате:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = K(C)N - F\dfrac{N}{V}, \\ \dfrac{dC}{dt} = -\alpha K(C)N - F\dfrac{C}{V} + F\dfrac{C_0}{V}, \end{cases}$$

где N- число микроорганизмов, C- концентрация питательных веществ, F - поток ($F_{\text{вход}} = F_{\text{выход}}$), V- объем, α, $K(C)$ и C_0 - параметры модели.

4.2. Математическое изучение рака

В 1964 году исследователь Лэйрд заметил, что рост опухолей в некоторых условиях описывается функцией Гомпертца. Дифференциальное уравнение для этой функции:

$$y' = \alpha y \ln\frac{K}{y},$$

где y - размер опухоли, K- максимально возможный размер опухоли. Решением данного уравнения является функция

$$y = K\exp\left(\ln\left(\frac{y(0)}{K}\right)e^{-\alpha t}\right),$$

где $y(0)$ — начальный размер опухоли.

4.3. Модель "хищник-жертва"

Примером задачи, сводимой к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, является задача "хищник — жертва" (модель Лотки-Вольтерры). Данная модель довольно широко применяется при описании временной зависимости объема популяций в биологических системах, при моделировании экономических и физических процессов. Задача формулируется следующим образом. Пусть в системе в некоторый момент времени t имеются хищники (например, волки) в количестве $x(t)$ и жертвы (например, зайцы) в количестве $y(t)$. Согласно модель "хищник – жертва" $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) - Bx(t)y(t), \\ y'(t) = Cx(t)y(t) - Dy(t), \end{cases}$$

где A, B, C и D - некоторые числовые константы.

Действительно, если зайцы имеют достаточно травы для питания, то скорость роста популяции будет прямо пропорциональна их числу (первое слагаемое в первом уравнении). Второе слагаемое описывает гибель зайцев при встрече с хищниками, так как вероятность их встречи равна произведению $x(t)y(t)$. Второе уравнение описывает изменение популяции хищников. Скорости роста популяции способствует их хорошее питание (первое слагаемое второго уравнения пропорционально вероятности встречи хищника и жертвы $x(t)y(t)$), а избыток хищников приводит к их гибели за счет голода (второе слагаемое).

4.4. Движение тела под действием пружины

Рассмотрим некоторое материальное тело массы m, которое движется по горизонтальной поверхности (в общем случае с трением) под действием пружины. Сила упругого сжатия (растяжения) пружины описывается законом Гука и пропорциональна смещению тела от положения равновесия пружины ($x = 0$): $F_{упр} = -kx$, где k – коэффициент жесткости пружины. Сила трения направлена всегда против движения тела и пропорциональна его скорости:

$$F_{тр} = -c\frac{dx}{dt},$$

c – коэффициент трения. Баланс сил, действующих на тело в каждый момент времени можно записать так:

$$F = ma = F_{упр} + F_{тр}.$$

С учетом того, что координата тела есть функция от времени, а скорость и ускорение – это первая и вторая производная координаты во времени соответственно, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) - c\frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, изменение координаты тела от времени описывается ОДУ 2-го порядка. Начальными условиями в данной задачи являются значения координаты тела и его скорости в начальный момент времени ($t = 0$):

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0. \end{cases}$$