vkonovodov@gmail.com

## Количественные характеристики

- Максимальное число рёбер в неориентированном графе без петель и кратных рёбер на $n$ вершинах — $\mathrm{C}_n^2$.
- Сумма всех степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу рёбер, $\sum\limits_{v \in V} \deg v = 2q$.

## Изоморфизм

- Если два графа изоморфны, то у них
  - число вершин совпадает,
  - число рёбер совпадает,
  - множества степеней вершин совпадают.

  Обратное неверно — указанных фактов недостаточно для обоснования изоморфизма.
- При изоморфизме смежные вершины степеней $d_1$ и $d_2$ переходят в смежные вершины степеней $d_1$ и $d_2$.
- Два графа изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнения. Иногда при проверке на изоморфизм полезно проверить дополнения графов.
- Число попарно неизоморфных графов на $n$ вершинах с $k$ рёбрами совпадает с числом попарно неизоморфных графов на $n$ вершинах с $\mathrm{C}_n^2 - k$ рёбрами.

## Планарность

- Если граф планарен и связен, то $p - q + r = 2$ (формула Эйлера), $p$ — число вершин, $q$ — число рёбер, $r$ — число граней.
- Внешняя грань — тоже грань.
- Граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарен. Поэтому формула Эйлера справедлива и для графов на сфере, у которых ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин.
- Важный результат получается, если просуммировать число рёбер (или вершин), входящих в каждую грань, по всем граням:

$$\sum_{\text{грань } \Gamma} \#\text{рёбер в } \Gamma = 2 \cdot q$$

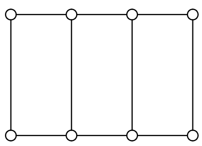
  (поскольку каждое ребро будет подсчитано таким образом дважды).
- Из предыдущей формулы следует, что если $k$ — минимальная длина цикла в планарном графе, то $2 \cdot q \geqslant k \cdot r$

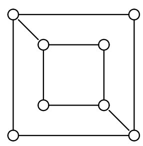
## Раскраска

- Хроматическое число $\chi(G)$ — минимальное число цветов, в которые можно правильно раскрасить вершины (нет смежных вершин одного цвета).
- $\chi(G) \geqslant \omega(G)$, где $\omega(G)$ — размер наибольшего полного подграфа в $G$ (кликовое число).
- Жадным алгоритмом раскраски легко проверить, что $\chi(G) \leqslant \max\limits_{v \in V(G)} \deg v + 1$.
- Любой цикл нечётной длины нельзя раскрасить в 2 цвета правильно.

## Примеры задач

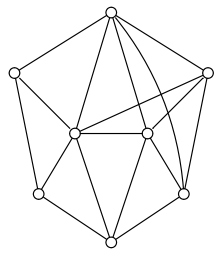
1. Изоморфны ли графы $G$ и $H$, изображенные на рисунке? Объясните, почему.


G


H

2. Построить все попарно неизоморфные деревья с 6 рёбрами, у которых в точности четыре вершины имеют степень 1.

3. В планарном графе каждая грань представляет собой треугольник, при этом три вершины имеют степень 70, остальные – степень 5. Найдите число рёбер в этом графе.
4. Планарен ли граф:

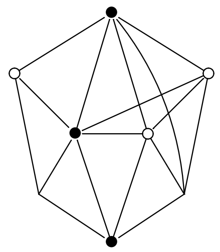


   Объясните, почему.
5. Какое наименьшее число рёбер нужно удалить из графа $K_5$, чтобы его вершины можно было правильно раскрасить в 3 цвета? Объясните, почему.

Ответы на следующем листе.

## Ответы для задач

1. Графы не изоморфны — в графе $G$ вершины степени 3 образуют цикл, в графе $H$ — нет.
2. 4 дерева.
3. 615 рёбер.
4. Граф не планарен, т. к. содержит гомеоморфный $K_{3,3}$ подграф:



5. Если удалить 1 ребро, то граф будет содержать подграф $K_4$, который нельзя раскрасить в три цвета. При удалении двух рёбер раскраска возможна: