Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Дополнительные главы дискретной математики

(Конспект лекций (часть II))

Лектор – доц. Селезнева С.Н.

Составитель – Коноводов В.А. (vkon16@mail.ru)

2010 г.

Глава 1

Ограниченно-детерминированные функции

§1 Основные определения и способы задания

Пусть, по-прежнему, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Обозначим

$$\tilde{x}_i^\infty = x_i(1)x_i(2)\dots x_i(t)\dots$$

– бесконечная последовательность, где $x_i(t) \in E_k$, $t = 1, 2, \dots$, и рассмотрим набор таких последовательностей $\tilde{x}_i$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим функции вида

$$f : (E_k^\infty)^n \to E_k^\infty, \;\; n \geq 0,$$

то есть функции, переводящие бесконечные последовательности в бесконечные последовательности.

Пусть $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ для всех $t = 1, 2, \dots$. Тогда можно считать, что у функции f один аргумент – $X(t)$, только с условием, что $X(t) \in E_{k^n} = \{0, 1, \dots, k^n - 1\}$. Поэтому далее в этом параграфе будем рассматривать функции, переводящие одну последовательность в другую.

Определение. Функция $f : E_k^\infty \to E_k^\infty$ называется *детерминированной,* если для всех $t = 1, 2, \dots$ результирующая последовательность $y(t)$ может быть представлена в виде $y(t) = F_t(x(1), \dots, x(t))$, то есть зависит только от $x(1), \dots, x(t)$.

Пример 1. Пусть $k = 2$. Покажем, что функция

$$f(\tilde{x}^\infty) = \begin{cases} \tilde{0}^\infty, & \text{если } \tilde{x}^\infty = \tilde{0}^\infty \\ \tilde{1}^\infty, & \text{если } \tilde{x}^\infty \neq \tilde{0}^\infty \end{cases}$$

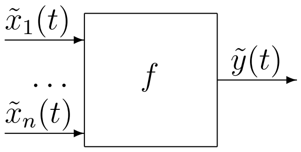
не является детерминированной. Действительно, пусть это не так. Тогда существует функция F_1 такая, что $y(1) = F_1(x(1))$. Но описанной функции нет, так как по тому, чему равно $x(1)$, не всегда возможно определить, чему равно $y(1)$. Например, если $x(1) = 0$, то $y(1)$ может быть как 0, так и 1.

Пример 2. Пусть $k = 2$. Функция

$$f(\tilde{x}^\infty) = \begin{cases} \tilde{0}^\infty, & \text{если } \tilde{x}^\infty = \tilde{1}^\infty \\ \overline{x}(1)\ \ \overline{x}(2)\ldots, & \text{если } \tilde{x}^\infty \neq \tilde{1}^\infty \end{cases}$$

является детерминированной, так как справедливо, что $y(t) = \overline{x}(t)$.

Детерминированные функции можно рассматривать как дискретный преобразователь, который в каждый момент времени $t = 1, 2, \ldots$ получает на вход значения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, а выдает значение $y(t)$:



Пусть $P_{\text{д},k}$– множество всех детерминированных k-значных функций.

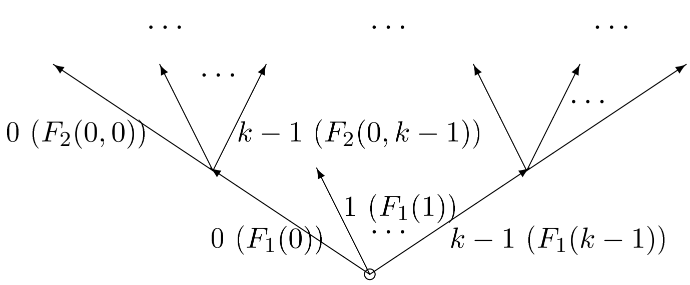
Теорема 1. *Мощность множества $P_{\text{д},k}$ равна континуум.*

Доказательство. Пусть $f \in P_{\text{д},k}$. Тогда выходная последовательность

$$y(t) = F_t(x(1), \ldots, x(t)) \in P_k^t,\ \forall t = 1, 2, \ldots,$$

то есть детерминированная функция однозначно определяется последовательностью k-значных функций $\{F_1, F_2, \ldots, F_t, \ldots\}$, $F_t \in P_k\ \forall t = 1, 2, \ldots$. Так как мощность множества всех бесконечных последовательностей над конечным множеством равна континуум, то и мощность $P_{\text{д},k}$ равна континуум. □

Рассмотрим задание детерминированных функций нагруженными деревьями. Будем строить бесконечное корневое дерево. Из каждой вершины исходит k дуг, каждая дуга помечена символом алфавита E_k, при этом любые две исходящие из одной вершины дуги помечены разными символами. Область определения детерминированной функции f взаимно-однозначно переносится на дерево. Любой дуге, являющейся концом ветки $x(1)\ldots x(t)$, поставим дополнительно в соответствие пометку $(F_t(x(1), \ldots, x(t))$.



Определение. Пусть $f \in P_{\text{д},k}$. Тогда *остаточной функцией* для функции f по слову $(a_1, \ldots, a_m) \in E_k^m$ называется функция

$$f_{a_1 \ldots a_m}(x(1), x(2), \ldots) = f(a_1, \ldots, a_m, x(1), x(2), \ldots).$$

Остаточная функция соответствует дереву, растущему из вершины, к которому можно прийти по слову $(a_1, \ldots, a_m)$. При этом $f_{a_1 \ldots a_m} \in P_{\text{д},k}$, а $f_\varnothing = f$.

У любой детерминированной функции количество остаточных функций не более, чем счетно.

Определение. Детерминированная функция, у которой число различных остаточных функций конечно, называется *ограниченно-детерминированной.* При этом число остаточных функций называется ее *весом.*

Рассмотрим нагруженное дерево для ограниченно-детерминированной функции f. Будем говорить, что два поддерева эквивалентны, если им соответствуют равные остаточные функции. Поэтому в исходном дереве все поддеревья можно разбить на классы эквивалентности, количество которых будет равно весу функции f. Пронумеровав эти классы эквивалентности, можно присвоить каждой вершине дерева номер класса эквивалентности, которому принадлежит растущее из нее поддерево. Теперь возьмем произвольную ветвь дерева и будем идти по ней от корня. При первом повторении номера вершины вдоль этой ветви усечем эту ветвь, то есть удалим все поддерево, растущее из вершины с первым по этой ветви повтором номера. Проделав такую операцию для всех ветвей исходного дерева, получим *усеченное дерево* для ограниченно-детерминированной функции f. Если в этом дереве отождествить вершины с одинаковыми номерами и соответствующим образом перенаправить ребра, то в результате получится *диаграмма Мура.*

Определение. *Диаграмма Мура* для ограниченно-детерминированной функции f веса r – это:

- ориентированный конечный псевдограф с r вершинами.
- из любой вершины графа исходят k дуг с пометками вида

  $$0(\alpha_0), 1(\alpha_1), \ldots, k-1(\alpha_{k-1}),$$

  $\alpha_i \in E_k$ – сохранившаяся пометка вида $F_t(x(1), \ldots, x(t))$.
- одна вершина выделена и помечена $*$.

Согласно построению, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Любая ограниченно-детерминированная функция может быть задана диаграммой Мура, и обратно, любая диаграмма Мура задает некоторую ограниченно-детерминированную функцию.*

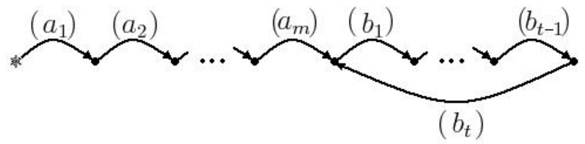
Пусть $P_{\text{о-д},k}$ – множество всех ограниченно-детерминированных k-значных функций.

Теорема 2. *Мощность множества $P_{\text{о-д},k}$ счетна.*

Доказательство.

1. Занумеруем функции из $P_{\text{о-д},k}$ по весу. Сначала рассмотрим ограниченно-детерминированные функции веса 1. Их конечное число. Занумеруем их числами от 1 до n_1. Затем рассмотрим функции веса 2 и занумеруем их – $n_1 + 1, \ldots, n_2$. И так далее. Возможность такого занумерования означает, что мощность $P_{\text{о-д},k}$ не более, чем счетна.

2. Рассмотрим константную функцию $f(x(1), x(2), \ldots) = a_1 \ldots a_m (b_1 \ldots b_t)^\infty$, $(a_i, b_j \in E_k)$. Она ограниченно-детерминированная, так как ее можно задать диаграммой Мура:



   Мощность множества функций такого вида счетна, так как различных периодических последовательностей счетное число, потому мощность множества $P_{\text{о-д},k}$ не менее, чем счетна.

□

Пусть $f \in P_{\text{о-д},k}$ – ограниченно-детерминированная функция веса r. Ее можно задать диаграммой Мура (диаграммой переходов). Рассмотрим другой способ задания таких функций, занумеровав вершины (*состояния*) числами из $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ и введя набор переменных:

· $x(t)$ – элемент входной последовательности в момент времени t.

· $y(t)$ – элемент выходной последовательности в момент времени t.

· $q(t)$ – состояние, в которое переходит ограниченно-детерминированная функция в момент времени t, $q(t) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. При этом будем считать, что выделенная вершина (помеченная $*$) – начальное состояние и имеет номер 0.

Тогда диаграмму Мура можно переписать в виде:

$$\begin{cases} y(t) = F(x(t), q(t-1)) \\ q(t) = G(x(t), q(t-1)) \\ q(0) = 0 \end{cases} , t = 1, 2, \ldots. \tag{1.1}$$

Система уравнений (1.1) представляет собой *канонические уравнения* для ограниченно-детерминированной функции f. Здесь

$$F : E_k \times \{0, 1, \dots, r-1\} \to E_k,$$

$$G : E_k \times \{0, 1, \dots, r-1\} \to \{0, 1, \dots, r-1\}.$$

Заданные так функции неудобны. Тогда пусть $m = \lceil \log_k r \rceil$, и от $q(t)$ перейдем к его k-ичной записи $q_1(t) \dots q_m(t)$, при этом $q_i(t) \in E_k$, $i = 1, \dots, m$. Тогда перепишем систему (1.1) в виде:

$$\begin{cases} y(t) = F(x(t), q_1(t-1), \dots, q_m(t-1)) & \\ q_i(t) = G_i(x(t), q_1(t-1), \dots, q_m(t-1)) & (i = 1, \dots, m)\ , \qquad t = 1, 2, \dots . \\ q_i(0) = 0 & (i = 1, \dots, m) \end{cases} \qquad (1.2)$$

При этом F, $G_i : E_k^{m+1} \to E_k$.

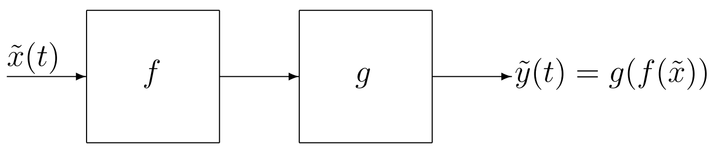
Утверждение. *Любая ограниченно-детерминированная функция задается каноническими уравнениями.*

Утверждение. *Ограниченно-детерминированная функция – то же самое, что и автоматная функция.*

§2 Операции над детерминированными функциями

Операция суперпозиции

Операция суперпозиции **C** для детерминированных функций заключается в том, что на вход одной функции подается выход другой функции



$f \in P_{д,k}$ $\qquad$ $g \in P_{д,k}$

Очевидно, что при таком определении результат суперпозиции двух детерминированных функций – детерминированная функция, то есть верно следующее утверждение.

Утверждение. *Класс $P_{д,k}$ замкнут относительно операции* ***C****.*

Пусть функции $f, g \in P_{\text{о-д},k}$ заданы каноническими уравнениями:

$$f\ :\ \begin{cases} y(t) = F_1(x(t), q_1(t-1)) \\ q_1(t) = G_1(x(t), q_1(t-1)) \\ q_1(0) = 0 \end{cases}, \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

$$g\ :\ \begin{cases} v(t) = F_2(u(t), q_2(t-1)) \\ q_2(t) = G_2(u(t), q_2(t-1)) \\ q_2(0) = 0 \end{cases}, \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

Тогда для функции $g(f)$ справедливо:

$$g(f)\ :\ \begin{cases} v(t) = F_2(F_1(x(t), q_1(t-1)), q_2(t-1)) \\ q_1(t) = G_1(x(t), q_1(t-1)) \\ q_2(t) = G_2(F_1(x(t), q_1(t-1)), q_2(t-1)) \\ q_1(0) = 0 \\ q_2(0) = 0 \end{cases}, \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

а это правильно построенные канонические уравнения, то есть имеет место следующий факт.

Утверждение. *Класс $P_{\text{о-д},k}$ замкнут относительно операции **C**.*

Лемма 1. *Пусть $f \in P_{\text{о-д},k}$ – ограниченно-детерминированная функция веса r, а $\tilde{\alpha} \in E_k^\infty$ – периодическая последовательность периода p, $f(\tilde{\alpha}) = \tilde{\gamma} \in E_k^\infty$. Тогда $\tilde{\gamma}$ – периодическая последовательность с периодом $p_1 = r_1 \cdot p$, где $r_1 \leqslant r$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = a_1 a_2 \ldots a_s [b_1 b_2 \ldots b_p]^\infty$, где $a_i, b_j \in E_k$. Обозначим состояния $q_1, \ldots, q_r$, $q(0) = q_1$. Пусть

$$q(s) = q^{(1)},\ q(s+p) = q^{(2)}, \ldots,\ q(s + r\cdot p) = q^{(r+1)},$$

при этом

$$x(s+1) = x(s+p+1) = \ldots = x(s + r\cdot p + 1) = b_1.$$

Согласно принципу Дирихле, среди состояний $q^{(1)}, \ldots, q^{(r+1)}$ хотя бы два совпадают: $\exists i, j;\ i < j\ :\ q^{(i)} = q^{(j)}$. Значит,

$$q(s + (i-1)p) = q(s + (j-1)p),$$

$$x(s + (i-1)p + 1) = x(s + (j-1)p + 1) = b_1,$$

потому с моментов времени $s + (i-1)p + 1$ и $s + (j-1)p + 1$ работа функции совпадает, то есть в выходной последовательности есть период длины $(j-i)p < r\cdot p$. □

Лемма 2. *Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_m \in P_{\text{о}-\text{д},k}$ – ограниченно-детерминированные функции с весами $r_0, r_1, \ldots, r_m$ соответственно, причем $r_i \leqslant R, \forall i = 1, \ldots, m$, а $\tilde{\alpha} \in E_k^\infty$ – периодическая последовательность периода p, причем все простые множители числа p не превосходят R. Тогда $\tilde{\gamma} = f_0(f_1(\tilde{\alpha}), \ldots, f_m(\tilde{\alpha})) \in E_k^\infty$ – периодическая последовательность с периодом p_1, все простые множители которого не превосходят R.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\gamma}_i = f_i(\tilde{\alpha}) \in E_k^\infty$, $i = 1, \ldots, m$.

По лемме 1, $\tilde{\gamma}_i$ – периодическая последовательность с периодом $p^{(i)} = r_i^{(1)} \cdot p$, где $r_i^{(1)} \leqslant r_i$. Так как $r_i^{(1)} \leqslant r_i \leqslant R$, то все простые множители $r_i^{(1)}$ так же не превосходят R. То же верно и для p по условию, а потому у $p^{(i)}$ все простые множители не превосходят R.

Теперь рассмотрим набор $\tilde{\gamma}_0 = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots, \tilde{\gamma}_m) \in (E_k^m)^\infty$. Каждая последовательность $\tilde{\gamma}_i$ – периодическая с периодом $p^{(i)}$, потому последовательность $\tilde{\gamma}_0$ так же имеет период p_0, для которого справедливо $p_0 = \text{НОК}(p^{(1)}, \ldots, p^{(m)})$, а потому все простые множители p_0 не превосходят R.

$\tilde{\gamma} = f_0(\tilde{\gamma}_0)$. По лемме 1, последовательность $\tilde{\gamma}$ – периодическая с периодом $p_1 = r_0^{(1)} \cdot p_0$, $r_0^{(1)} \leqslant r_0 \leqslant R$. Это означает, что у p_1 все простые множители не превосходят R. □

Теорема 3. *Функциональная система $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C)$ не имеет конечных полных систем.*[1]

Доказательство. Проведем доказательство от противного.

Пусть существует система $A = \{f_1, \ldots, f_s\}$, которая полна в $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C)$. Пусть веса функций $f_1, \ldots, f_s$ равны соответственно $r_1, \ldots, r_s$, и $r = \max\{r_1, \ldots, r_s\}$. Тогда выберем такое простое число p, что $p > r$, и рассмотрим функцию

$$g(\tilde{x}^\infty) = [\underbrace{00\ldots01}_{p}]^\infty \in P_{\text{о}-\text{д},k}.$$

В силу полноты системы A, функцию g можно получить в виде

$$g = f_i(f_{j_1}, \ldots, f_{j_q}). \tag{1.3}$$

Подставим вместо аргумента последовательность $\tilde{\alpha} = [0]^\infty$ в обе части равенства (1.3). По лемме 2, период последовательности, полученной таким образом в правой части равен некоторому числу p_1, все простые множители которого не превосходят r. А в левой части получим последовательность $[\underbrace{00\ldots01}_{p}]^\infty$, период которой равен простому числу $p > r$, противоречие. □

Итак, в функциональной системе (P_k, C) конечные полные системы (КПС) существуют. В $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C)$ – нет. Это можно объяснить тем, что операция суперпозиции "грубая"для дискретного преобразователя и не учитывает дискретность, а оперирует с последовательностями как с одним целым.

[1]Этот факт был доказан О.Б.Лупановым

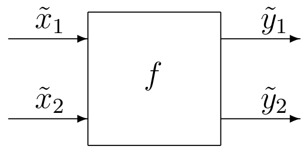
Операция обратной связи

Определение. Пусть функция $\vec{f} \in P_{\text{д},k}$, $\vec{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)$. Переменная y_j (выход y_j) *зависит с запаздыванием* от переменной x_i (входа x_i), если $\forall t = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} y_j(t) = F_t(&x_1(1), \ldots, x_n(1),\\ &x_1(2), \ldots, x_n(2),\\ &\ldots,\\ &x_1(t-1), \ldots, x_n(t-1),\\ &x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t)). \end{aligned}$$

Другими словами, при всех t, $y_j(t)$ не зависит от $x_i(t)$.

Пример 3. Пусть $\vec{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, а y_2 зависит с запаздыванием от x_1.

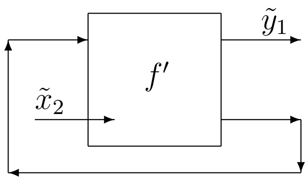


$$\begin{aligned} y_1(1) &= F_1^{(1)}(x_1(1), x_2(1));\\ y_2(1) &= F_2^{(1)}(x_2(1));\\ y_1(2) &= F_1^{(2)}(x_1(1), x_2(1), x_1(2), x_2(2));\\ y_2(2) &= F_2^{(2)}(x_1(1), x_2(1), x_2(2));\\ &\cdots \end{aligned}$$

Определение. Пусть в функции $\vec{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)$ выход y_j зависит с запаздыванием от входа x_i. Тогда по паре переменных (x_i, y_j) можно ввести *обратную связь* – подавать значение y_j на вход x_i.

В результате операции введения обратной связи **O** по переменным (x_i, y_j) получится функция $\vec{f'}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_{i+1}, \ldots, \tilde{x}_n) = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_{j+1}, \ldots, \tilde{y}_m)$.

Пример 4. Пусть $\vec{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, а y_2 зависит с запаздыванием от x_1. Пусть функция $f'(\tilde{x}_2) = \tilde{y}_1$ – результат применения операции **O** к функции $\vec{f}$ по паре переменных (x_1, y_2).



При этом:

$$
\begin{aligned}
&y_2(1) = F_2^{(1)}(x_2(1)) = x_1(1);\\
&y_1(1) = F_1^{(1)}\left(F_2^{(1)}(x_2(1)), x_2(1)\right);\\
&y_2(2) = F_2^{(2)}(x_1(1), x_2(1), x_2(2)) = F_2^{(2)}\left(F_2^{(1)}(x_2(1)), x_2(1), x_2(2)\right) = x_1(2);\\
&y_1(2) = F_1^{(2)}\left(F_2^{(1)}(x_2(1)), x_2(1), F_2^{(2)}\left(F_2^{(1)}(x_2(1)), x_2(1), x_2(2)\right), x_2(2)\right);\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots
\end{aligned}
$$

То есть за пределы детерминированности мы не вышли.

Такими же рассуждениями можно убедиться в справедливости следующей теоремы:

Теорема 4. *Класс $P_{\text{д},k}$ замкнут отностительно операции **O**.*

Пусть $\vec{f} \in P_{\text{о−д},k}$, $\vec{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)$ – ограниченно-детерминированная функция, а потому ее можно задать каноническими уравнениями:

$$
f\ :\ \begin{cases}
y_1(t) = F_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), \vec{q}(t-1))\\
\ldots\\
y_m(t) = F_m(x_1(t), \ldots, x_n(t), \vec{q}(t-1))\\
\vec{q}(t) = G(x_1(t), \ldots, x_n(t), \vec{q}(t-1))\\
\vec{q}(0) = \vec{0}
\end{cases}, \qquad t = 1, 2, \ldots.
$$

Пусть выход y_j зависит с запаздыванием от входа x_i. Это означает, что в функции F_j переменная $x_i(t)$ – фиктивная. Применим операцию **O** по паре переменных (x_i, y_j) – подставим в канонические уравнения $F_j\left(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t), \vec{q}(t-1)\right)$ вместо $x_i(t)$.

$$
f'\ :\ \begin{cases}
y_1(t) = F_1\left(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), F_j(\ldots), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t), \vec{q}(t-1)\right)\\
\ldots\\
y_m(t) = F_m\left(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), F_j(\ldots), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t), \vec{q}(t-1)\right)\\
\vec{q}(t) = G\left(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), F_j(\ldots), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t), \vec{q}(t-1)\right)\\
\vec{q}(0) = \vec{0}
\end{cases}, \qquad t = 1, 2, \ldots,
$$

а это правильно построенные канонические уравнения, то есть $\vec{f'}$ – ограниченно-детерминированная функция. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Класс $P_{\text{о−д},k}$ замкнут отностительно операции **O**.*

§3 Полные системы в $(P_{\text{о-д},k}; C, O)$

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Будем обозначать $f_F = f_F(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = \tilde{y}$ – ограниченно-детерминированную функцию веса 1, такую, что

$$y(t) = F(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

и называть функцией, *порожденной функцией* F. Рассмотрим систему $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$.

Определение. Пусть $A \subseteq P_{\text{о}-\text{д},k}$. A – *полна* в функциональной системе $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$, если при помощи операций **C** и **O** из функций системы A можно построить любую функцию $f \in P_{\text{о}-\text{д},k}$.

Рассмотрим функцию, которая переводит последовательность $x(1)\,x(2)\,x(3)\,\ldots x(t)\,\ldots \in E_k^\infty$ в последовательность $0\,x(1)\,x(2)\,\ldots x(t-1)\,\ldots \in E_k^\infty$. Она является ограниченно-детерминированной и задается каноническими уравнениями

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1) \\ q(t) = x(t) \\ q(0) = 0 \end{cases}, \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

Эта функция называется *единичной задержкой* и обозначается $\vec{x}$.

Теорема 6. *Система*

$$\{f_0, \ldots, f_{k-1}, f_{J_0}, \ldots, f_{J_{k-1}}, f_{\max}, f_{\min}, \vec{x}\} \tag{1.4}$$

полна в $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$.

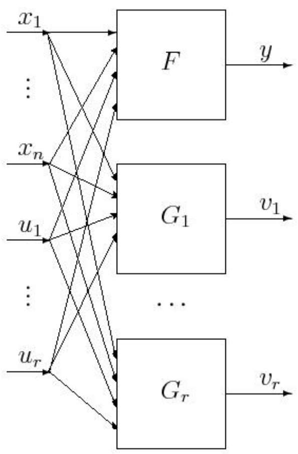
Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_{\text{о}-\text{д},k}$. Ее можно задать каноническими уравнениями:

$$g\ :\ \begin{cases} y(t) = F(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)) \\ q_j(t) = G_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)),\ j = 1, \ldots, r \\ q_j(0) = 0,\ j = 1, \ldots, r \end{cases}, \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

Функции

$$F(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)),\ G_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)) \in P_{\text{о}-\text{д},k},$$

а при каждом фиксированном t - это функции из P_k. Это означает в силу полноты системы Россера-Туркетта (**??**), что можно построить при помощи функций из системы (1.4) порожденные функции f_F, $f_{G_j} \in P_{\text{о}-\text{д},k}$. Тогда можно построить суперпозицию следующего вида.



Теперь к каждому входу u_j подсоединим задержку $\vec{u}_j$, и получим, что $v(t)$ зависит с запаздыванием от $u(t)$. Тогда нетрудно видеть, что применив соответствующим образом операцию **O** по всем парам (u_i, v_j), мы получим именно функцию g. □

Следствие. *В функциональной системе $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$ существуют КПС.*

Из доказательства теоремы 6 видно, что справедлив так же следующий факт:

Следствие. *Пусть $A = A' \cup \{\vec{x}\} \subseteq P_{\text{о}-\text{д},k}$, где A' – система, порожденная некоторой полной в P_k системой. Тогда система A полна в $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$.*

Теорема 7. *В функциональной системе $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$ существует аналог функции Шеффера, то есть функция f такая, что система $\{f\}$ полна.*

Доказательство. Пусть

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max(x_1 \cdot x_4 + x_3 \cdot (1 - x_4), x_2) + 1.$$

Рассмотрим $f_F(x_1, x_2, x_3, \vec{x}_4) \in P_{\text{о}-\text{д},k}$.

Положим в ней $x_1 = x_3$: $\max(x_1 \cdot \vec{x}_4 + x_1 \cdot (1 - \vec{x}_4), x_2) + 1 = \max(x_1, x_2) + 1$ – шефферова функция в P_k. Это означает, что можно построить все порожденные функциями из P_k функции, в том числе 0, 1, $x + (k-1)$. Положим теперь $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, получим $\max(1 \cdot \vec{x}_4 + 0 \cdot (1 - \vec{x}_4), 0) + 1 = \vec{x}_4 + 1$, при помощи которой и функции $x + (k-1)$ получим единичную задержку $\vec{x}_4$. По второму следствию к теореме 6, система $\{f_F\}$ полна в $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$. □

Следующие две теоремы примем без доказательства.

Теорема 8 (М. И. Краткó)**.** *Не существует алгоритма, который для любой конечной полной системы $A = \{f_1, \ldots, f_s\} \subseteq P_{\text{о}-\text{д},k}$ определял бы, полна ли эта система в $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$ или нет.*

Теорема 9 (В. Б. Кудрявцев)**.** *Мощность множества предполных в функциональной системе $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$ классов равна континууму.*

Рассмотрим операции **C** и **O**. И поставим следующий вопрос: а можно ли одну из этих операций выразить через другую?

В функиональной системе $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$ существуют КПС, а в $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C)$ – нет. Это означает, что операция **O** не выражается через **C**.

Рассмотрим теперь функциональную систему $(P_{\text{о}-\text{д},k}; O)$. Пусть в ней есть КПС $\{f_1, \ldots, f_s\}$, где f_i имеет n_i входов $(i = 1, \ldots, s)$. Положим $n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} n_i$. Так как операция **O** уменьшает число входных переменных, то функцию из $P_{\text{о}-\text{д},k}$, зависящую от более, чем n переменных, заведомо нельзя получить при помощи только операции **O**. Таким образом, в $(P_{\text{о}-\text{д},k}; O)$ нет КПС, в то время, как в $(P_{\text{о}-\text{д},k}; C, O)$ они есть. Потому операция **C** не выражается через операцию **O**. Таким образом, ответ на поставленный вопрос будет отрицательным.

Оглавление