

ПРЕДПОЛНЫЕ КЛАССЫ

- Класс M . Функции f , для любых двух наборов $\alpha \leq \beta$ (поразрядно) $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Все конъюнкции и дизъюнкции переменных без отрицаний, их суперпозиции — монотонны.
- Класс L . Функции, представимые в виде $\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \dots \alpha_n x_n \oplus \alpha_0$. Полином Жегалкина единственен, поэтому если функция представима полиномом степени выше, чем 1, то она нелинейна.
- Класс S . Функции, для которых $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Пример самодвойственной функции от трех переменных — медиана $x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_3$.
- Классы T_σ , $\sigma \in 0, 1$. Функции, сохраняющие константы — $f(\sigma, \dots, \sigma) = \sigma$.

ПРОВЕРКА ПО СТОЛБЦУ ЗНАЧЕНИЙ

- Класс M . Рекурсивная проверка. Делим столбец пополам, левая половина должна быть поразрядно не больше правой. Каждая половина проверяется таким же образом.
Пример: (0000 0101 0001 0111)
– Делим пополам, (0000 0101) \leq (0001 0111) — верно
– Проверяем отдельно (0000 0101) и (0001 0111): (0000) \leq (0101) и (0001) \leq (0111) — верно.
– Проверяем отдельно (0000), (0101), (0001), (0111): (00) \leq (00), (01) \leq (01), (00) \leq (01), (01) \leq (11).
– Проверяем отдельно двойки (00), (00), (01), (01), (00), (01), (01), (11), каждая из них монотонна (немонотонна была бы только (10)).
- Класс L . Рекурсивная проверка. Делим столбец пополам, левая половина либо должна быть отрицанием правой, либо совпадать с правой.
Пример: (0110 1001 0110 1001)
– Делим пополам, (0110 1001) = (0110 1001) — верно
– Проверяем (0110 1001) (правая половина такая же). (0110) = \neg (1001) — верно.
– Проверяем (0110), правая половина не требует проверки, потому что является отрицанием левой. (01) = \neg (10).
– (01) : 0 = $\bar{1}$.
- Класс S . Столбец значений этой функции имеет симметрично-противоположный вид относительно центра:

$$(\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2^n-1-1} \quad \bar{\alpha}_{2^n-1-1} \dots \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_0).$$

Например, (0110 1001).

ВАЖНЫЕ ФАКТЫ

- $x \vee xy = x$ (тождество поглощения).
- $x \vee \bar{x}y = x \vee y$.
- $x \oplus y = (0110)$, $x \sim y = \neg(x \oplus y)$.
- $x|y = \bar{x}\bar{y}$, $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$. Эти функции Шефферовы.
- $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$.
- $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.
- Если функция задается ДНФ без отрицаний — она монотонна (т.к. это суперпозиция монотонных xy , $x \vee y$). Например, факт монотонности функции $x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_4$ очевиден без проверки по столбцу значений.
- $|S| = 2^{2^n-1}$, $|L| = 2^{n+1}$.
- Дизъюнкции $x \vee y$, $x \vee y \vee z, \dots$: монотонны, не линейны, не самодвойственны.
- Линейные функции более чем одной переменной $x \oplus y$, $x \oplus y \oplus z, \dots$ немонотонны.
- $L \cap M = \{0, 1, x_1, x_2, \dots\}$.
- $L \cap S$ — это линейные функции от нечётного числа переменных. Это половина всех линейных — 2^n .
- $L \cap T_1$ — это линейные функции с нечётным числом слагаемых. Например, $x_1 \oplus x_3 \oplus 1$ или x_4 .
- $L \cap T_0$ — это линейные функции с чётным числом слагаемых. Например, $x_5 \oplus x_2$ или $x_4 \oplus 1$.
- Самодвойственных функций, существенно зависящих от двух переменных, не бывает.
- $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$ — полная система.