Решения некоторых задач по курсу "Дополнительные главы кибернетики и теории управляющих систем" [1]

E-mail: `horseHolder@yandex.ru`

Часть I

Асимптотически оптимальные методы синтеза и оценки высокой степени точности для ряда функций Шеннона. Синтез схем для функций из специальных классов.

Задача 1. *Установить асимптотическое поведение функции Шеннона* $L^{\mathrm{C}}(Q(n))$, $n = 1, 2, \ldots,$ *где* $Q(n)$ *– множество ФАЛ, монотонных по БП* x_1, x_2.

Решение.

1. *Нижняя оценка.* Найдем мощность класса $Q(n)$. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ монотонна по x_1 и x_2 в том и только том случае, когда для каждого набора $\sigma' = (\sigma_3, \ldots, \sigma_n)$ функция $f(x_1, x_2, \sigma')$ является монотонной. Всего существует 6 монотонных функций от двух перменных: 0, 1, x_1, x_2, $x_1 \vee x_2$, $x_1 x_2$. Потому любая подфункция $f(x_1, x_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q(n)$ равна одной из этих шести функций. Наборов вида $\sigma' \in B^{n-2}$ всего 2^{n-2}, потому число функций $f \in Q(n)$ равно числу способов задать на каждом из 2^{n-2} таких наборов одну из шести подфункций. То есть $|Q(n)| = 6^{2^{n-2}}$.

   Класс $Q(n)$ является невырожденным, так как

   $$J(|Q(n)|) = \frac{\log |Q(n)|}{\log \log |Q(n)|} \gg n + 1,$$

   а значит (по соответствующему утверждению из лекций) $L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \gtrsim J(|Q(n)|)$, то есть

   $$L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \gtrsim \frac{\log 6}{4} \cdot \frac{2^n}{n}$$

2. *Верхняя оценка.* Для получения верхней оценки воспользуемся принципом локального кодирования О. Б. Лупанова. Пусть $1 \leqslant q \leqslant n$. Функции вида $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q, \sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n)$, где $f \in Q(n)$, лежат в классе $Q(q)$, $|Q(q)| = 6^{2^{q-2}}$. Закодируем все функции из этого класса двоичными наборами длины $\lambda = \lceil \log |Q(n)| \rceil = \lceil 2^{q-2} \log 6 \rceil$. Схему Σ_f для реализации произвольной функции $f \in Q(n)$ построим следующим образом. Пусть оператор **O** по набору $(\sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n)$ получает код функции $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q, \sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n) \in Q(q)$, а

[1] Рассмотренные задачи предлагались на контрольных. В решениях возможны ошибки.

оператор $\mathbf{A}^{(2)}$ по набору $(\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$ и этому коду получает значение $f(\sigma)$. То есть, $\mathbf{O} \in P_2^{\lambda}(n-q)$, $\mathbf{A}^{(2)} \in P_2(q+\lambda)$, следовательно,

$$L(\mathbf{O}) \lesssim \lambda \cdot \frac{2^{n-q}}{n-q},$$

$$L(\mathbf{A}^{(2)}) \lesssim \frac{2^{q+\lambda}}{q+\lambda}.$$

Положим $q = \lfloor \log n \rfloor$, тогда $L(\mathbf{O}) \lesssim \dfrac{\log 6}{4} \cdot \dfrac{2^n}{n}$, $L(\mathbf{A}^{(2)}) = O(2^{\frac{3}{4}n}) = o\left(\dfrac{2^n}{n}\right)$. Таким образом, $L(\Sigma_f) \lesssim \dfrac{\log 6}{4} \cdot \dfrac{2^n}{n}$.

Окончательно, с учетом полученных оценок, имеем:

$$L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \sim \frac{\log 6}{4} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

□

Задача 2. *Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(Q(n))$, $n = 1, 2, \ldots$, где $Q(n)$ – множество всех тех ФАЛ из $P_2(n)$, которые обращаются в 0 на наборах, содержащих не более $\frac{n}{2}$ единиц.*

Решение.

1. *Нижняя оценка.* Любая функция $f \in Q(n)$ полностью определяется значениями на наборах, содержащих более $\frac{n}{2}$ единиц. Таких наборов при нечётном n в точности 2^{n-1}. При четном же n их $2^{n-1} - \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^{n/2}$. Это означает, что

   $$|Q(n)| = \begin{cases} 2^{2^{n-1}}, \text{при нечетном } n, \\ 2^{2^{n-1} - \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^{n/2}}, \text{при четном } n. \end{cases}$$

   Класс $Q(n)$ является невырожденным, так как

   $$J(|Q(n)|) = \frac{\log |Q(n)|}{\log \log |Q(n)|} \gtrsim \frac{2^{n-1}}{n} \gg n+1$$

   (с учетом того, что $\mathrm{C}_n^{n/2} = \mathrm{o}(2^{n-1})$, то есть $|Q(n)| \sim 2^{2^{n-1}}$), а значит (по соответствующему утверждению из лекций),

   $$L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \gtrsim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}$$

2. *Верхняя оценка (1ый способ).* Для получения верхней оценки воспользуемся принципом локального кодирования О. Б. Лупанова. Занумеруем произвольным образом наборы куба B^n, на которых функция не обязана принимать значение 0. Количество таких наборов есть $\lambda \sim 2^{n-1}$, двоичная длина номера есть $\lceil \log \lambda \rceil$. Для любой функции f, $f \in Q(n)$, ее кодом будем считать столбец из ее значений на этих наборах в соответствии со введенной нумерацией, т.е. столбец длины λ, который можно рассматривать как столбец значений функции g от $\lceil \log \lambda \rceil$ переменных. Кусок кода, достаточный для вычисления $f(\sigma)$ – это значение функции g на номере набора σ, если в этом наборе больше $\frac{n}{2}$ единиц, и произвольное значение иначе.

   Таким образом, оператор $\mathbf{A}^{(1)}$ по набору определяет, верно ли, что в этом наборе больше $\frac{n}{2}$ единиц, и если верно, то возвращает номер σ – набор длины $\lceil \log \lambda \rceil$, иначе возвращает произвольный набор. Основной оператор $\mathbf{O}$ вычисляет значение функции g на этом наборе, при этом это и будет $f(\sigma)$, если в σ больше $\frac{n}{2}$ единиц. Оператор $\mathbf{A}^{(2)}$ по куску кода, полученному от $\mathbf{O}$, и по набору σ получает $f(\sigma)$, то есть выдает либо 0, либо полученный кусок кода.

   Основная сложность – в операторе $\mathbf{O}$. Он реализует функцию g от $\lceil \log \lambda \rceil$ переменных, поэтому $L(\mathbf{O}) \sim \dfrac{2^{n-1}}{n}$. Операторы $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ можно реализовать за $O(n)$. Таким образом, $L(Q(n)) \lesssim \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2^n}{n}$.

2′. *Верхняя оценка (2ой способ).* Верхнюю оценку можно получить и более "красиво". Пусть g – ФАЛ, равная 0 на наборах, содержащих не более $\frac{n}{2}$ единиц, и равная 1 в остальных случаях, то есть g – характеристическая ФАЛ множества тех наборов, на которых функции из $Q(n)$ не обязаны обращаться в 0 (эту функцию можно реализовать в СФЭ со сложностью $o(\frac{2^n}{n})$). Тогда любая ФАЛ f, $f \in Q(n)$, может быть представлена в виде: $f = g \cdot h$, где h – частичная булева функция, область определенности которой есть множество тех наборов, на которых $g = 1$, $|\delta(h)| \sim 2^{n-1}$, $h \in \widehat{P}_2(n, |\delta(h)|)$, потому, согласно утверждению о схемной сложности частичных ФАЛ,

$$L^{\text{C}}(h) \lesssim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

   Искомая СФЭ Σ_f состоит из двух СФЭ, реализующих g и h, и конъюнктирует их выходы, таким образом,

$$L(\Sigma_f) \lesssim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Окончательно, с учетом полученных оценок, имеем:

$$L^{\text{C}}(Q(n)) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}$$

□

Задача 3. *Для произвольной ФАЛ f от БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ построить ИКС Σ_f, состоящую из обычных (неориентированных) контактов и итеративных контактов, проводимость которых задается ФАЛ вида $x_i^\sigma \cdot y_j$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $\sigma \in \{0, 1\}$, а y_j – произвольная итеративная БП, и реализующую ФАЛ f таким образом, что сложность (число контактов) ИКС Σ_f дает верхнюю АОВСТ для функции Шеннона, характеризующей сложность ИКС из рассматриваемого класса. Указать поведение данной функции Шеннона на уровне АОВСТ.*[2]

Решение. Пусть A – класс ИКС из условия задачи.

1. *Нижняя оценка.* Оценим число попарно неэквивалентных схем в A, сложности не более, чем L, и реализующих функции от n переменных:

$$\|\mathcal{U}^A(L, n)\| \leqslant (2n)^L \|\mathcal{U}^{\text{ИКС}}(L, n)\| \leqslant \left(\frac{cn(L+n)^2}{\log^3(L+n)}\right)^{L+2n}.$$

Первое из этих неравенств справедливо в силу того, что каждая схема класса A может быть получена из некоторой ИКС, состоящей только из итеративных контактов, приписыванием пометке каждого контакта $\cdot x_i^\sigma$ (т.е. для каждого из L контактов - $2n$ вариантов). Второе неравенство следует из верхней оценки числа ИКС сложности не более чем L, и реализующих ФАЛ от $x_1, \ldots, x_n$. Теперь воспользуемся тем, что

$$\|\mathcal{U}^A(L_A(n), n)\| = 2^{2^n},$$

так как любую функцию можно реализовать схемой из класса A; и тем, что $L_A(n) \asymp \dfrac{2^n}{n}$; тогда получим:

$$L_A(n) \geqslant \frac{2^{n-1}}{n}\left(1 + \frac{2\log n - O(1)}{n}\right).$$

2. *Верхняя оценка.* Для получения верхней оценки модифицируем асимптотически наилучший метод синтеза ИКС. Так же представим произвольную функцию f в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-1}} K_{\sigma''}(x'') f_{\sigma''}(x').$$

Все конъюнкции $K_{\sigma''}(x'')$ реализуются контактным деревом, функции $f_{\sigma''}(x')$ реализуются через φ-УМ G, то есть $f_{\sigma''}(x') = \varphi(g_1, \ldots, g_p)$, где $g_1, \ldots, g_p$ – функции из G. В качестве функции φ возьмем функцию $x_1 y_1 y_{t+1} \vee \ldots \vee x_t y_t y_{2t}$, $p = 3t$, реализующий которую блок показан на рис. 1.

Здесь переменные y_i, $i = 1, \ldots, t$, – управляющие. Эта функция имеет нетривиальное селекторное разбиение ее БП $D =$

---

[2]Если Вам очевидно решение этой задачи, то этот файл не для Вас.

$(\{x_1\}, \ldots, \{x_t\}, \{y_1\}, \ldots, \{y_t\}, \{y_{t+1}, \ldots, y_{2t}\})$. φ-УМ порядка q построим по утверждению из лекций, выбрав $s_1 = \ldots = s_t = \log n$, $s_{t+1} = \ldots = s_{2t} = n - 3\log n$, $s_{2t+1} = n - 2\log n$. (Тут необходимо взять целую часть, возможно увеличить/уменьшить параметры на константу). При этом должно выполняться: $t\log n + t(n - 3\log n) + t(n - 2\log n) \geqslant 2^q$, откуда следует выбор параметра t таким: $\dfrac{2^q}{2n - 4\log n}$ (с необходимой целой частью).

Схему для ФАЛ f построим так же, как и при построении АОВСТ для ИКС, но использованием других звезд – другой функции φ.

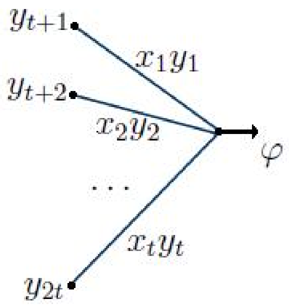

Рис. 1: Основной блок – звезды в схеме

Основная сложность и будет заключаться в этих звездах. Их 2^{n-q}, в каждой звезде t контактов. Из соображений метода для обычных ИКС выберем $q = \lceil 2\log n \rceil$, откуда $t \asymp n$, то есть (по утверждению, используемому для построения универсального множества)

$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{G}) \leqslant t \cdot 2^{\log n} + t \cdot \frac{2^n}{n^3} + \frac{2^n}{n^2} = O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

то есть подсхема для φ-УМ G не основная по сложности, так же, как и контактное дерево для конъюнкций $K_{\sigma''}(x'')$. Сложность звезд есть

$$2^{n-q} \cdot t \leqslant \frac{2^q \cdot 2^{n-q}}{2n - 4\log n - \mathrm{const}} = \frac{2^{n-1}}{n - 2\log n - \mathrm{const}} \leqslant \frac{2^{n-1}}{n}\left(1 + \frac{2\log n + O(1)}{n}\right).$$

Итак, получаем, что

$$L_A(n) = \frac{2^{n-1}}{n}\left(1 + \frac{2\log n \pm O(1)}{n}\right)$$

□

Задача 4. *Для произвольной ФАЛ f от БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ построить КС Σ_f, состоящую из ориентированных замыкающих и размыкающих контактов веса* 1 *и* 2 *соответственно, которая реализует ФАЛ f таким образом, что сложность (сумма весов контактов) КС Σ_f дает верхнюю АОВСТ для функции Шеннона, характеризующей сложность КС из рассматриваемого класса. Указать поведение данной функции Шеннона на уровне АОВСТ.*

Решение. Пусть A – класс КС из условия задачи.

1. *Нижняя оценка.* Оценим число $\|\mathcal{U}^A(\mathcal{L}, n)\|$ попарно неэквивалентных схем в A, взвешенной сложности не более, чем $\mathcal{L}$, и реализующих функции от n переменных. Обозначим за q_1 количество замыкающих контактов в схеме, а за q_2 – размыкающих. Тогда $\mathcal{L} = q_1 + 2q_2$. Число способов при фиксированном $\mathcal{L}$ выбрать такие q_1 и q_2 сверху можно оценить (очень грубо) как $e_1^{\mathcal{L}}$, здесь все $e_i = \mathrm{const}$. При этом количество рёбер в схеме $q_1 + q_2$. Число попарно не изоморфных ориентированных графов с таким числом рёбер не больше чем
$$\left(\frac{e_2(q_1+q_2)}{\log^2(q_1+q_2)}\right)^{q_1+q_2},$$
согласно соответствующему утверждению из лекций. Эту величину сверху можно ограничить выражением
$$\left(\frac{e_3\mathcal{L}}{\log^2(\mathcal{L})}\right)^{\mathcal{L}}.$$
Число способов пометок q_1 рёбер символами переменных, а q_2 рёбер – символами отрицания переменных, есть $n^{q_1+q_2} \leqslant n^{\mathcal{L}}$. В результате
$$\|\mathcal{U}^A(\mathcal{L}, n)\| \leqslant \left(\frac{e_3 e_1 n\mathcal{L}}{\log^2(\mathcal{L})}\right)^{\mathcal{L}} = \left(\frac{e_4 n\mathcal{L}}{\log^2(\mathcal{L})}\right)^{\mathcal{L}}.$$
Используя то, что $\mathcal{L}_A(n) \asymp \dfrac{2^n}{n}$ и $\|\mathcal{U}^A(\mathcal{L}_A(n), n)\| = 2^{2^n}$, где $\mathcal{L}_A(n)$ – искомая функция Шеннона, получим, что
$$\mathcal{L}_A(n) \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{2\log n - O(1)}{n}\right).$$

2. *Верхняя оценка.* Для получения верхней оценки воспользуемся асимптотически наилучшим методом синтеза ориентированных контактных схем. Для произвольной ФАЛ f построим схему так, как это сделано в этом методе. Основная её сложность – в звёздах, реализующих функцию $\varphi = y_1 y_{t+1} \vee \ldots \vee y_t y_{2t}$. Заметим, что все контакты в них – замыкающие, то есть имеют вес 1. А это значит, что основная взвешенная сложность равна обычной сложности, а взвешенная сложность остальной части схемы не превосходит обычной сложности этой части, умноженной на 2. Тем самым,
$$\mathcal{L}_A(n) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{2\log n + O(1)}{n}\right),$$
согласно оценке для $L^{\overrightarrow{K}}(n)$.

Таким образом,

$$\mathcal{L}_A(n) = \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{2\log n \pm O(1)}{n}\right).$$

□

Часть II

Синтез схем для индивидуальных функций и оценки их сложности.

Задача 5. *Доказать, что сложность* $L^K(\overrightarrow{Q}(n))$ *асимптотически равна* $2^{2^{n-1}+2}$, *если* $Q(n)$ *– множество всех тех ФАЛ из* $P_2(n)$, *которые имеют вид*

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \oplus \alpha_n \cdot x_n,$$

где $g \in P_2(n-1)$ *и* $\alpha_n \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $|Q(n)| = 2^{2^{n-1}} \cdot 2 = 2^{2^{n-1}+1}$. Построим схему для $\overrightarrow{Q}(n)$ по методу каскадов с разложением по переменным в порядке, в котором x_n последняя (тогда в схеме будет только по одному контакту x_n и $\bar{x}_n$). На каждую из $|Q(n)|$ функций приходится по два контакта. Потому сложность такой схемы асимптотически не больше, чем $2 \cdot |Q(n)| = 2^{2^{n-1}+2}$, тем самым верхняя оценка получена.

Пусть $\widehat{Q}$ – множество тех ФАЛ f, $f \in Q(n)$, у которых есть нулевая грань размерности большей, чем $(n-r)$. Оценим мощность этого множества. Пусть $\widehat{Q}_1$ – множество тех функций f из $\widehat{Q}$, которые имеют вид $f = g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \oplus 0 \cdot x_n$, а $\widehat{Q}_2 = \widehat{Q} \setminus \widehat{Q}_1$. Тогда [3]

$$|\widehat{Q}_1| = \mathrm{C}_{n-1}^{n-r} \cdot 3^r \cdot 2^{2^{n-1}-2^{n-r}},$$

то есть $|\widehat{Q}_1| = o(2^{2^{n-1}})$ при $r = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Аналогично, $|\widehat{Q}_2| = o(2^{2^{n-1}})$, и $|\widehat{Q}| = |\widehat{Q}_1| + |\widehat{Q}_2| = o(2^{2^{n-1}})$. Согласно соответствующему утверждению из лекций,

$$L^K(\overrightarrow{Q}(n)) \geqslant 2|Q|\left(1 - \frac{5}{\sqrt{r}}\right) - 2|\widehat{Q}|,$$

следовательно, при $r = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,

$$L^K(\overrightarrow{Q}(n)) \gtrsim 2 \cdot 2^{2^{n-1}+1} = 2^{2^{n-1}+2}.$$

□

[3] Каждую нулевую грань куба B^{n-1} задает набор из $\{0, 1, 2\}^{n-1}$, где 2 означает, что соответствующая переменная может принимать любое значение. Грань размерности $(n-r)$ задается набором с $(n-r)$ двойками. Число способов выбрать $(n-r)$ позиций для двоек, задающих грань в $(n-1)$-мерном кубе есть C_{n-1}^{n-r}, число способов задать остальные r значений набора, соответствующего грани размерности большей $(n-r)$, есть 3^r. Выбрав так нулевую грань размерности большей $(n-r)$, задаем функцию нулем на ней. На остальных наборах значения могут быть произвольными (0 или 1), этих наборов не больше чем $2^{n-1} - 2^{n-r}$, так как количество наборов в грани размерности большей $(n-r)$ не меньше чем 2^{n-r}.

Задача 6. *Доказать, что* $L^K(s_5^{\{1,4\}}) \geqslant 16$.

Доказательство. Функция $s_5^{\{1,4\}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ не является ни монотонной, ни антимонотонной ни по одной из ее переменных. Это означает, что контакты вида x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, $\bar{x}_5$ встречаются в минимальной для $s_5^{\{1,4\}}$ схеме Σ хотя бы 1 раз.

Докажем, что все замыкающие контакты, за исключением, быть может двух, встречаются в Σ хотя бы 2 раза. Пусть это не так, и замыкающие контакты переменных[4] x_1, x_2, x_3 встречаются в Σ один раз. Рассмотрим тогда схему $\Sigma\big|_{x_4 \cdot x_5}$. Она реализует ФАЛ $s_5^{\{1,4\}}(x_1, x_2, x_3, 1, 1) = s_3^2(x_1, x_2, x_3)$ и содержит не более одно контакта каждого вида из x_1, x_2, x_3. Но s_3^2 – сферическая функция, а потому любая реализующая ее схема содержит замыкающие контакты всех, за исключением, быть может, двух, переменных хотя бы по два раза (см. утверждение о сферических ФАЛ). Противоречие. Откуда следует, что замыкающих контактов в Σ не менее, чем $5 \cdot 2 - 2 = 8$.

Аналогично, с рассмотрением схемы для функции $s_5^{\{1,4\}}(x_1, x_2, x_3, 0, 0) = s_3^1(x_1, x_2, x_3)$, являющейся (111)-сферической, доказывается, что все размыкающие контакты $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, $\bar{x}_5$, за исключением, быть может двух, встречаются в Σ хотя бы 2 раза, и что размыкающих контактов в Σ не менее, чем 8.

Из сказанного выше вытекает, что в КС Σ не менее 16 контактов, что и требовалось доказать. □

Задача 7. *Доказать, что сложность*

$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n(x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1}) \vee \mu_n(x_1, \ldots, x_n, z_0, \ldots, z_{2^n-1}))$$

асимптотически равна $3 \cdot 2^n$.

Доказательство.

1. *Нижняя оценка.* Пусть Σ – СФЭ, реализующая указанную функцию. При забивании переменной y_0 константой 0 уйдет хотя бы один элемент (это свойство СФЭ в стандартном базисе). Тогда затем забьем переменные $y_1, \ldots, y_{2^n-1}$ нулями, получим схему Σ' такую, что $L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) - 2^n$. Так как $\mu_n(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = 0$, то схема Σ' реализует $\mu_n(x_1, \ldots, x_n, z_0, \ldots, z_{2^n-1})$, то есть обычную мультиплексорную ФАЛ порядка n, а потому $L(\Sigma') \gtrsim 2^{n+1}$, следовательно $L(\Sigma) \gtrsim 3 \cdot 2^n$.

2. *Верхняя оценка.* Заметим, что

$$\mu_n(x_1, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_{2^n-1}) \vee \mu_n(x_1, \ldots, x_n; z_0, \ldots, z_{2^n-1}) = \\ = \mu_n(x_1, \ldots, x_n; y_0 \vee z_0, \ldots, y_{2^n-1} \vee z_{2^n-1}).$$

Построим схему, реализующую указанную функцию, следующим способом. Сначала построим 2^n дизъюнкций $y_0 \vee z_0, \ldots, y_{2^n-1} \vee z_{2^n-1}$ (2^n ФЭ "$\vee$"), а затем их подадим на оптимальную схему для мультиплексора порядка n (сложности 2^{n+1}.) Получаем схему $\Sigma'' : L(\Sigma'') = 3 \cdot 2^n$, что доказывает верхнюю оценку.

[4] не важно каких переменных: функция симметрическая

$\square$

Задача 8. *Доказать, что* $L^\pi(s_4^{[2,4]}(x_1,x_2,x_3,x_4) \vee s_8^{\{3,5\}}(x_5,\ldots,x_{12})) \geqslant 65$.

Доказательство. Так как множества переменных функций $s_4^{[2,4]}(x_1,\ldots,x_4)$ и $s_8^{\{3,5\}}(x_5,\ldots,x_{12})$ не пересекаются, то

$$L^\pi(s_4^{[2,4]}(x_1,\ldots,x_4) \vee s_8^{\{3,5\}}(x_5,\ldots,x_{12})) = L^\pi(s_4^{[2,4]}(x_1,\ldots,x_4)) + L^\pi(s_8^{\{3,5\}}(x_5,\ldots,x_{12})).$$

Функция $s_4^{[2,4]}$ – монотонная симметрическая ФАЛ с порогом 2, а для таких функций известно точное значение сложности в классе π-схем[5], то есть $L^\pi(s_4^{[2,4]}) = r(4) = 8$.

Для получения нижней оценки величины $L^\pi(s_8^{\{3,5\}})$ воспользуемся теоремой Храпченко. Пусть $\mathcal{N}' = B_3^8 \cup B_5^8$ – на этом множестве функция принимает значение 1, здесь B_k^n – k-ый слой куба B^n. При этом $|\mathcal{N}'| = \mathrm{C}_8^3 + \mathrm{C}_8^5 = 112$. Пусть, далее, $\mathcal{N}'' = B_4^8 \cup B_2^8 \cup B_6^8$ – подмножество множества наборов, на котором функция $s_8^{\{3,5\}}$ равна 0, $|\mathcal{N}''| = \mathrm{C}_8^4 + \mathrm{C}_8^2 + \mathrm{C}_8^6 = 126$. Найдем мощность множества $\mathcal{R}(\mathcal{N}',\mathcal{N}'')$ всех ребер, соединяющих $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$ в кубе B^8. Это ребра, которые выходят из третьего слоя и из пятого слоя этого куба и только они. То есть $|\mathcal{R}(\mathcal{N}',\mathcal{N}'')| = \mathrm{C}_8^3\cdot 8 + \mathrm{C}_8^5 \cdot 8 = 896$, так как из каждой вершины куба B^n выходит n рёбер. Тогда, по теореме Храпченко,

$$L^\pi(s_8^{\{3,5\}}) \geqslant \frac{|\mathcal{R}(\mathcal{N}',\mathcal{N}'')|^2}{|\mathcal{N}'|\cdot|\mathcal{N}''|} = \frac{896^2}{112\cdot 126} \geqslant 57,$$

учитывая, что сложность – целое число.

Таким образом, $L^\pi(s_4^{[2,4]}(x_1,\ldots,x_4) \vee s_8^{\{3,5\}}(x_5,\ldots,x_{12})) \geqslant 8 + 57 = 65$. $\square$

[5] $L^\pi(s_n^{[2,n]}) = r(n) = \lfloor\log n\rfloor \cdot 2^{\lfloor\log n\rfloor} + (\lfloor\log n\rfloor + 2)(n - 2^{\lfloor\log n\rfloor})$