vkonovodov@gmail.com

Предполные классы

- Класс M. Функции f, для любых двух наборов $\alpha \leqslant \beta$ (поразрядно) $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$. Все конъюнкции и дизъюнкции переменных без отрицаний, их суперпозиции — монотонны.
- Класс L. Функции, представимые в виде $\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \dots \alpha_n x_n \oplus \alpha_0$. Полином Жегалкина единственен, поэтому если функция представима полиномом степени выше, чем 1, то она нелинейна.
- Класс S. Функции, для которых $f(x_1, \dots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$. Пример самодвойственной функции от трех переменных — медиана $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$.
- Классы T_σ, $\sigma \in 0, 1$. Функции, сохраняющие константы — $f(\sigma, \dots, \sigma) = \sigma$.

Проверка по столбцу значений

- Класс M. Рекурсивная проверка. Делим столбец пополам, левая половина должна быть поразрядно не больше правой. Каждая половина проверяется таким же образом.
  Пример: $(0000\,0101\,0001\,0111)$
  - Делим пополам, $(0000\,0101) \leqslant (0001\,0111)$ — верно
  - Проверяем отдельно $(0000\,0101)$ и $(0001\,0111)$: $(0000) \leqslant (0101)$ и $(0001) \leqslant (0111)$ — верно.
  - Проверяем отдельно $(0000), (0101), (0001), (0111)$: $(00) \leqslant (00)$, $(01) \leqslant (01)$, $(00) \leqslant (01)$, $(01) \leqslant (11)$.
  - Проверяем отдельно двойки $(00), (00), (01), (01), (00), (01), (01), (11)$, каждая из них монотонна (немонотонна была бы только (10)).
- Класс L. Рекурсивная проверка. Делим столбец пополам, левая половина либо должна быть отрицанием правой, либо совпадать с правой.
  Пример: $(0110\,1001\,0110\,1001)$
  - Делим пополам, $(0110\,1001) = (0110\,1001)$ — верно
  - Проверяем $(0110\,1001)$ (правая половина такая же). $(0110) = \neg(1001)$ — верно.
  - Проверяем (0110), правая половина не требует проверки, потому что является отрицанием левой. $(01) = \neg(10)$.
  - $(01) : 0 = \overline{1}$.
- Класс S. Столбец значений этой функции имеет симметрично-противоположный вид относительно центра:
  $$(\alpha_0\, \alpha_1\, \alpha_2\, \dots\, \alpha_{2^{n-1}-1} \quad \overline{\alpha}_{2^{n-1}-1}\, \dots\, \overline{\alpha}_2\, \overline{\alpha}_1\, \overline{\alpha}_0).$$
  Например, $(0110\,1001)$.

Важные факты

- $x \vee xy = x$ (тождество поглощения).
- $x \vee \overline{x}y = x \vee y$.
- $x \oplus y = (0110)$, $x \sim y = \neg(x \oplus y)$.
- $x | y = \overline{xy}$, $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$. Эти функции Шефферовы.
- $x \to y = x \vee \overline{y}$.
- $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.
- Если функция задается ДНФ без отрицаний — она монотонна (т. к. это суперпозиция монотонных xy, $x \vee y$). Например, факт монотонности функции $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_4$ очевиден без проверки по столбцу значений.
- $|S| = 2^{2^{n-1}}$, $|L| = 2^{n+1}$.
- Дизъюнкции $x \vee y$, $x \vee y \vee z, \dots$: монотонны, не линейны, не самодвойственны.
- Линейные функции более чем одной переменной $x \oplus y$, $x \oplus y \oplus z, \dots$ немонотонны.
- $L \cap M = \{0, 1, x_1, x_2, \dots\}$.
- $L \cap S$ — это линейные функции от нечётного числа переменных. Это половина всех линейных — 2^n.
- $L \cap T_1$ — это линейные функции с нечётным числом слагаемых. Например, $x_1 \oplus x_3 \oplus 1$ или x_4.
- $L \cap T_0$ — это линейные функции с чётным числом слагаемых. Например, $x_5 \oplus x_2$ или $x_4 \oplus 1$.
- Самодвойственных функций, существенно зависящих от двух переменных, не бывает.
- $\{x \to y, \overline{x}\}$ — полная система.