

PDF Method Report

丁宣铭

July 2025

1 PDF 的引入

在前两本书中我们已经实现了一个简单的光线追踪器，通过模拟由相机发出的光线所经的光路，可以较为准确的刻画出真实的光学现象。然而，在这个光线追踪器中，当光线击中漫反射表面后，通常会在整个半球面上均匀随机地选择一条出射方向继续追踪。这种“盲目”采样带来两个致命缺陷：

1. 小光源被严重漏采：若场景中存在体积很小的光源，均匀方向击中它的概率很低，这导致均匀随机生成的大量样本贡献约为 0，图像布满难以收敛的噪点。

2. 光线贡献方差大：由蒙特卡洛积分：

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\omega \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\omega_i)}{p(\omega_i)}$$

当 $p(\omega) \equiv \text{const}$ 而 $f(\omega)$ 只在极窄区域有值时， $\frac{f}{p}$ 的数值波动巨大，过大的方差意味着降噪需要更多的样本。

由此，想要降低噪点，提高渲染速度，需要使散射时不同方向的采样占比呈一个更合理的分布，这就是我们引入 PDF，即概率密度函数（Probability Density Function）的原因。

2 概率密度函数

类似于直方图描述离散变量的分布频率，PDF 描述的是连续型随机变量的分布情况。概率密度函数 $p(x)$ 表示该随机变量取值在 x 附近的概率。显然，PDF 在区间上积分的结果即为取值落在该区间范围内的概率。

PDF 与累积分布函数 CDF 的关系为： $P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$

由定义，PDF 应满足： $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

3 Lambertian 材质的散射 PDF

当光线在某个漫反射面发生散射时，表面的颜色为：

$$\text{Color}_o(\mathbf{x}, \omega_o, \lambda) = \int_{\omega_i} A(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda) \cdot \text{pScatter}(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda) \cdot \text{Color}_i(\mathbf{x}, \omega_i, \lambda)$$

由蒙特卡洛积分，可将其转化为：

$$\text{Color}_o(\mathbf{x}, \omega_o, \lambda) \approx \sum \frac{A(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda) \cdot \text{pScatter}(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda) \cdot \text{Color}_i(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda)}{p(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda)}$$

其中 A 为材质的反照率，是一个固定的常数。 pScatter 表示的是散射发生时产生该散射光线的概率， p 表示实际采样选择该散射光线的概率。在不考虑光源的情况下，散射的 PDF 与采样的 PDF 是一致的。对于 Lambertian 类，散射光线的强度按余弦分布，我们可以依据 PDF 积分为 1 的性质求出常数。

$$\left. \begin{aligned} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} C \cdot \cos(\theta) dA &= 1 \\ dA &= \sin(\theta) d\theta d\phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = \frac{1}{\pi}$$

$$p(\omega_o) = \text{pScatter}(\omega_o) = \frac{\cos(\theta_o)}{\pi}$$

4 光源 PDF

之前我们提到，当场景中有一个体积较小的光源时，大多数光线都不会击中它，这会导致较大的噪声。那么我们可以主动让光线去“找”这个光源。

本书定义的 HitablePDF 类中，传入了一个 Hitable 类的光源，在调用 HitablePDF 的 generate 函数时，将会在光源上随机选择一个点，以该点与散射表面命中点的连线为散射方向，保证散射光线能击中光源。同时也能求得光线方向与光源法线夹角 θ 。

从点 P 到光源表面的一个小区域 dA 的立体角 $d\omega$ 可以表示为：

$$d\omega = \frac{dA \cdot \cos \theta}{d^2}$$

其中 dA 是光源表面的小区域， d 是点 P 到光源表面的距离。

对光源表面任意一点 q ，由于在光源表面选点均匀随机，有 $p_q(q) = \frac{1}{A}$ 由以上两式，加上对应关系 $p_q(q) dq = p(\omega) d\omega$ ，可以得到：

$$p(\omega) = \frac{d^2 \cdot p_q(q)}{dA \cdot \cos \theta} = \frac{d^2}{A \cdot \cos \theta}$$

5 混合 PDF

当散射发生时，我们到底该选择使用散射面上的 ScatteringPDF，还是使用光源 PDF 呢。实际我们可以通过混合使用这两种 PDF 来达成更好的效果。混合 PDF 只需要给其中的每个 PDF 加权平均即可，仍能保留 PDF 的所有性质。

而在实现随机生成函数的实现中，可以简单地随机选择其中一个 PDF 生成的方向作为混合 PDF 生成的方向。

6 总结

PDF 方法是光线追踪中的关键技术，通过重要性采样，使得采样方向更倾向于指向光源或符合材质的散射特性，从而显著降低方差，提高收敛速度。在实际应用中，我们通过混合不同的 PDF，可以进一步优化采样过程，减少噪点，提高图像质量。

参考文献

- [1] Peter Shirley, Trevor David Black, Steve Hol-
lasch (2025). Ray Tracing: The Rest of Your Life
URL:<https://raytracing.github.io/books/RayTracingTheRestOfYourLife.html>
- [2] Jack Mai (2020). 专栏: 计算机图形学
URL:https://blog.csdn.net/masilejfoaisegjiae/category_9280901.html