1. Θεωρούμε την εξίσωση της θερμότητας, $u_t = \kappa u_{xx}$ για $x \in [0,1]$ και $0 < t \leq 0.5$, με συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = u(1,t) = 0$ και αρχική συνθήκη $u^0(x) = e^x \sin(2\pi x)$. Τι προσέγγιση δίνει η άμεση μέθοδος του Euler στο σημείο $x = 1/2$ για τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0.125$ και $t_2 = 0.25$; Χρησιμοποιήστε $\Delta x = 1/16$ και $\Delta t = 1/512$. Πάρτε $\kappa = 0.2$, αν ο αριθμός μητρώου σας είναι άρτιος, διαφορετικά $\kappa = 0.3$. Τυπώστε τρία δεκαδικά ψηφία (με στρογγυλοποίηση).

   Λύση. Το πρόγραμμα που ακολουθεί υλοποιεί την άμεση μέθοδο του Euler και εκτυπώνει τις ζητούμενες προσεγγίσεις.

```
import numpy as np

def u0(x): np.exp(x) * np.sin( 2*np.pi*x )

J = 16;  dx = 1 / J;  dt = 1/512;  mu = dt / dx**2;  k = 0.2
x = np.linspace(0, 1, J+1)
U = u0(x);  U[0] = 0;  U[J] = 0;  V = np.zeros(J+1)

# Note: 64/512 = 0.125  and  128/512 = 0.25

for n in range(128):
    if n == 64: print("t = %f  u = %.3f" % (n*dt, U[J//2]))

    for j in range(1,J): V[j] = U[j] + k * mu * ( U[j-1] - 2*U[j] + U[j+1] )
    for j in range(1,J): U[j] = V[j]

print("t = %f  u = %.3f" % ((n+1)*dt, U[J//2]))
```

   Το παραπάνω πρόγραμμα τυπώνει, για $\kappa = 0.2$ τις προσεγγίσεις $-0.199, -0.180$ και για $\kappa = 0.3$ τις προσεγγίσεις $-0.196, -0.143$.

2. Έστω ότι η συνάρτηση u είναι τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και $h > 0$ είναι τέτοιο ώστε $\bar{x}, \bar{x}-h, \bar{x}-2h \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι αν $Du(\bar{x}) = \frac{1}{2h}\left[3u(\bar{x}) - 4u(\bar{x}-h) + u(\bar{x}-2h)\right]$, τότε
$$|Du(\bar{x}) - u'(x)| \leq h^2 \max_{x\in[a,b]} |u'''(x)|.$$

   Λύση. Από το θεώρημα του Taylor έχουμε,
$$\begin{aligned} u(\bar{x}-h) &= u(\bar{x}) - hu'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2}u''(\bar{x}) - \frac{h^3}{6}u'''(\xi_1), \qquad \xi_1 \in (\bar{x}-h, \bar{x}), \\ u(\bar{x}-2h) &= u(\bar{x}) - 2hu'(\bar{x}) + \frac{4h^2}{2}u''(\bar{x}) - \frac{8h^3}{6}u'''(\xi_2), \qquad \xi_2 \in (\bar{x}-2h, \bar{x}), \end{aligned}$$
   και επομένως, $Du(\bar{x}) = u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{3}\left[u'''(\xi_1) - 2u'''(\xi_2)\right]$. Τότε,
$$|Du(\bar{x}) - u'(x)| \leq \frac{h^2}{3}\left[\max_{a\leq x\leq b}|u'''(x)| + 2\max_{a\leq x\leq b}|u'''(x)|\right] = h^2 \max_{x\in[a,b]}|u'''(x)|.$$

3. $Du(x) = D_+D_-u(x)$ είναι προσέγγιση της $u''(x)$. Βρείτε έναν τύπο για την $Du(x)$ (δείξτε τη δουλειά σας!) και χρησιμοποιήστε τον για να προσεγγίσετε την ποσότητα $u''(1)$, για τη συνάρτηση $u(x) = \sin(2x)$. Πάρτε $h = 1/25, 1/100$ και τυπώστε τέσσερα δεκαδικά ψηφία (με στρογγυλοποίηση).

   Λύση. Από τον ορισμό των D_+ και D_- έχουμε
$$\begin{aligned} Du(x) = D_+D_-u(x) &= \frac{1}{h}\left[D_-u(x+h) - D_-u(x)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}\right] \\ &= \frac{1}{h^2}\left[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\right]. \end{aligned}$$

Αν $u(x) = \sin(2x)$ τότε $u''(x) = -4\sin(2x)$ και $u''(1) \approx -3.637$. Το πρόγραμμα Python

```
import numpy as np

def u(x): return np.sin(2*x)

x = 1;  hs = [1/25, 1/100]
for h in hs:
    print("h = %f  Du = %.3f" % (h, (u(x+h) - 2*u(x) + u(x-h) ) / h**2))
```

τυπώνει τις προσεγγίσεις -3.635 και -3.637.