ΜΕΜ253 - Αριθμητική Λύση ΜΔΕ

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Ον/μο: Κωνσταντίνος Ψαρουλάκης Α.Μ.: 1850 (ΤΕΜ)

Μελέτη των θ-μεθόδων για προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας.

Αναζητώ $u:[0,1]\times[0,T]\to\mathbb{R}$ αρκετά ομαλή, τ.ω.

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), && 0<x<1,\ 0<t<T \\ u(x,0) &= g(x), && x\in[0,1] \\ u(0,t) &= u(1,t), && t\in[0,T] \end{aligned}$$

όπου $T>0$ και $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής.

Διαμέριση του $[0,1]$: $0=x_0<x_1<\dots<x_J<x_{J+1}=1$,

—— // —— $[0,T]$: $0=t_0<t_1<\dots<t_{N-1}<t_N=T$, $h=x_{j+1}-x_j$, $j=0,\dots,J$.

$k=t_{n+1}-t_n$, $n=0,\dots,N-1$

Ορίζω προσεγγίσεις $U_j^n\approx u(x_j,t_n)$ για $j=0,\dots,J+1$, $n=0,\dots,N$ ως:

$$(2)\qquad \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{k}=\theta\,\frac{U_{j-1}^{n+1}-2U_j^{n+1}+U_{j+1}^{n+1}}{h^2}+(1-\theta)\frac{U_{j-1}^n-2U_j^n+U_{j+1}^n}{h^2}$$

όπου $U_0^n=U_{J+1}^n=0$, $n=0,\dots,N$ και $U_j^0=g(x_j)=g(x_j)$, $j=0,\dots,J+1$. Υποθέτω $\theta\in[0,1]$

Λύσεις:

1) Δ.ο. (2) καλά ορισμένο.

Αν $\theta=0$, η (2) γίνεται:

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{k}=\frac{U_{j-1}^n-2U_j^n+U_{j+1}^n}{h^2}\iff U_j^{n+1}-U_j^n=\frac{k}{h^2}\left(U_{j-1}^n-2U_j^n+U_{j+1}^n\right)$$

Θέτω: $\frac{k}{h^2}=\mu \rightsquigarrow U_j^{n+1}=U_j^n+\mu\left(U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n\right)$

Όμως η παραπάνω σχέση αντιστοιχεί στις προσεγγίσεις της ~~ρ~~ άμεσης μεθόδου Euler, η οποία όπως γνωρίζουμε είναι καλά ορισμένη

Αν $\vartheta \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{k} = \vartheta\,\frac{U_{j-1}^{n+1}-2U_j^{n+1}+U_{j+1}^{n+1}}{h^2} + (1-\vartheta)\,\frac{U_{j-1}^{n}-2U_j^{n}+U_{j+1}^{n}}{h^2} \xLeftrightarrow{\text{θέτω } \mu=\frac{k}{h^2}}$$

$$\Leftrightarrow U_j^{n+1}-U_j^n = \frac{k}{h^2}\vartheta\left(U_{j-1}^{n+1}-2U_j^{n+1}+U_{j+1}^{n+1}\right)+\frac{k}{h^2}(1-\vartheta)\left(U_{j-1}^{n}-2U_j^{n}+U_{j+1}^{n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_j^{n+1}-U_j^n = \vartheta\mu\left(U_{j-1}^{n+1}-2U_j^{n+1}+U_{j+1}^{n+1}\right)+(1-\vartheta)\mu\left(U_{j-1}^{n}-2U_j^{n}+U_{j+1}^{n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_j^{n+1}-U_j^n = \vartheta\mu\left(U_{j-1}^{n+1}\right)-2\vartheta\mu U_j^{n+1}+\vartheta\mu U_{j+1}^{n+1}+(1-\vartheta)\mu\left(U_{j-1}^{n}\right)-2(1-\vartheta)\mu U_j^{n}+(1-\vartheta)\mu U_{j+1}^{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\vartheta\mu U_{j-1}^{n+1}+(1+2\vartheta\mu)U_j^{n+1}-\vartheta\mu U_{j+1}^{n+1} = (1-\vartheta)\mu U_{j-1}^{n}+(1-2(1-\vartheta)\mu)U_j^{n}+(1-\vartheta)\mu U_{j+1}^{n}$$

Άρα η ϑ-μέθοδος είναι ισοδύναμη με το γραμμικό σύστημα:

$$AU^{n+1}=BU^n, \quad n=1,\dots,N$$

όπου A είναι ο $(J-1)\times(J-1)$ τριδιαγώνιος πίνακας:

$$A=\begin{bmatrix} 1-2(1-\vartheta)\mu & (1-\vartheta)\mu & 0 & \cdots & 0 \\ (1-\vartheta)\mu & 1-2(1-\vartheta)\mu & (1-\vartheta)\mu & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & (1-\vartheta)\mu & 1-2(1-\vartheta)\mu & (1-\vartheta)\mu \\ & & & (1-\vartheta)\mu & 1-2(1-\vartheta)\mu \end{bmatrix}$$

και B είναι ο $(J-1)\times(J-1)$ τριδιαγώνιος πίνακας:

$$B=\begin{bmatrix} 1+2\vartheta\mu & -\vartheta\mu & 0 & \cdots & 0 \\ -\vartheta\mu & 1+2\vartheta\mu & -\vartheta\mu & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -\vartheta\mu & 1+2\vartheta\mu & -\vartheta\mu \\ & & & -\vartheta\mu & 1+2\vartheta\mu \end{bmatrix}$$

Για να δ.ο το αριθμητικό σχήμα (2) είναι καλά ορισμένο, αρκεί νδο ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος.
Για να δ.ο. ο B είναι αντιστρέψιμος αρκεί νδο έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, δηλ.

$$|b_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{J-1} |b_{ij}| \text{ , όπου } b_{ij} \text{ τα στοιχεία του } B$$

$$\forall \; i \in \{1, 2, \ldots, J-1\}$$

Αρκεί νδο $\quad |1-2\vartheta\mu| > |-\vartheta\mu|$

$$\text{και} \quad |1-2\vartheta\mu| > |-\vartheta\mu| + |-\vartheta\mu| = 2|-\vartheta\mu| = 2\vartheta\mu. \qquad (3)$$

Τριγωνική ανισότητα για το $|1-2\vartheta\mu|$:

$$|1| + |-2\vartheta\mu| \geq |1-2\vartheta\mu| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 2\vartheta\mu \geq |1-2\vartheta\mu|$$

Άρα οι σχέσεις (3) γίνονται:

$\rightarrow \; 1+2\vartheta\mu \geq |1-2\vartheta\mu| > |-\vartheta\mu| > \vartheta\mu$

ή $\; 1+2\vartheta\mu > \vartheta\mu \Rightarrow 1 > -\vartheta\mu \;$ όμως $\vartheta\mu > 0$ άρα $1 > 0 > -\vartheta\mu$.
που ισχύει.

και $\rightarrow \; 1+2\vartheta\mu \geq |1-2\vartheta\mu| > 2\vartheta\mu$

ή $\; 1+2\vartheta\mu > 2\vartheta\mu \Rightarrow 1 > 0 \;$ που ισχύει.

Άρα ο B έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, κι επομένως το αριθμητικό σχήμα (2) είναι καλά ορισμένο. □.

2) Αν $\mu(1-\vartheta) \le \frac{1}{2}$, θα δ.ο. το σχήμα (2) είναι ευσταθές.

Αρκεί να δ.ο. $\max_{0\le j\le J}|U_j^n| \le \max_{0\le j\le J}|U_j^0|$, $n=0,1,\dots,N$

Ξεκινώντας από το σχήμα (2) είχαμε φτάσει προηγουμένως στην εξίσωση:

$$-\vartheta\mu U_{j-1}^{n+1}+(1+2\vartheta\mu)U_j^{n+1}-\vartheta\mu U_{j+1}^{n+1}=(1-\vartheta)\mu U_{j-1}^n+(1-2(1-\vartheta)\mu)U_j^n+(1-\vartheta)\mu U_{j+1}^n$$

Τώρα έχουμε:

$$(1+2\vartheta\mu)U_j^{n+1}=\vartheta\mu U_{j-1}^{n+1}+\vartheta\mu U_{j+1}^{n+1}+(1-\vartheta)\mu U_{j-1}^n+(1-2(1-\vartheta)\mu)U_j^n+(1-\vartheta)\mu U_{j+1}^n$$

$$\Leftrightarrow (1+2\vartheta\mu)U_j^{n+1}=\vartheta\mu(U_{j-1}^{n+1}+U_{j+1}^{n+1})+(1-\vartheta)\mu(U_{j-1}^n+U_{j+1}^n)+(1-2(1-\vartheta)\mu)U_j^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1+2\vartheta\mu||U_j^{n+1}|=|\vartheta\mu||U_{j-1}^{n+1}+U_{j+1}^{n+1}|+|(1-\vartheta)\mu||U_{j-1}^n+U_{j+1}^n|+|1-2(1-\vartheta)\mu||U_j^n|$$

$$\le|\vartheta\mu|(|U_{j-1}^{n+1}|+|U_{j+1}^{n+1}|)+|(1-\vartheta)\mu|(|U_{j-1}^n|+|U_{j+1}^n|)+|1-2(1-\vartheta)\mu||U_j^n| \quad (4)$$

Έχουμε ότι: $\boxed{\vartheta>0,\ \mu>0 \text{ και } \mu(1-\vartheta)\le\frac{1}{2}}$ Άρα $1+2\vartheta\mu>0$

$\vartheta\mu>0$

$(1-\vartheta)\mu\le\frac{1}{2}$

$1-(2(1-\vartheta)\mu)=1-2(1-\vartheta)\mu \ge 1-2\cdot\frac{1}{2}>0$

Επίσης θέτω $\bar{U}^n=\max_{0\le j\le J}|U_j^n|$, όπου $n=0,\dots,N$

Η (4) γίνεται:

$$(1+2\vartheta\mu)\bar{U}^{n+1}\le\vartheta\mu(2\bar{U}^{n+1})+(1-\vartheta)\mu(2\bar{U}^n)+(1-2(1-\vartheta)\mu)\bar{U}^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{U}^{n+1}+\cancel{2\vartheta\mu\bar{U}^{n+1}}\le\cancel{2\vartheta\mu\bar{U}^{n+1}}+\cancel{2(1-\vartheta)\mu\bar{U}^n}+\bar{U}^n-\cancel{2(1-\vartheta)\mu\bar{U}^n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{U}^{n+1}\le\bar{U}^n \Leftrightarrow \max_{0\le j\le J}|U_j^{n+1}|\le\max_{0\le j\le J}|U_j^n|\le\dots\le\max_{0\le j\le J}|U_j^1|\le\max_{0\le j\le J}|U_j^0|$$

Έδειξα λοιπόν ότι $\max_{0\le j\le J}|U_j^{n+1}|\le\max_{0\le j\le J}|U_j^0|$

Άρα η μέθοδος (το ~~σχήμα~~ αριθμητικό σχήμα (2)) είναι ευσταθής