

Ονοματεπώνυμο Α.Μ.

1. Βρείτε το δεξί μέλος f έτσι ώστε η συνάρτηση $u(x) = 4x(1-x)$ να λύνει το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(1) \quad -u''(x) + u(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

Απάντηση: Έχουμε $u''(x) = -8$ και άρα $f(x) = -u''(x) + u(x) = 8 + 4x - 4x^2$.

2. Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα fem.py για να λύσετε το πρόβλημα δύο σημείων (1) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και υπολογίστε το σφάλμα

$$\|u - u_h\|^2 = \int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx,$$

για $h^{-1} = 16, 32, 48, 64$. Χρησιμοποιήστε (και συμπληρώστε) τη σχέση

$$\int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx = \sum_{i=1}^{J+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[u(x) - \sum_{j=1}^N U_j \phi_j(x) \right]^2 dx$$

Στο διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ μόνο οι συναρτήσεις βάσης ϕ_{i-1} και ϕ_i είναι μη μηδενικές

$$= \sum_{i=1}^{J+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u(x) - (U_{i-1}\phi_{i-1}(x) + U_i\phi_i(x))]^2 ds$$

Έχουμε $\phi_{i-1}(x) = (x_i - x)/h$ και $\phi_i(x) = (x - x_{i-1})/h$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = x_{i-1} + sh$

$$= h \sum_{i=1}^{J+1} \int_0^1 [u(x_{i-1} + sh) - (U_{i-1}(1-s) + U_i s)]^2 ds$$

Μικρές αλλαγές στον κώδικα fem.py παράγουν τα παρακάτω αποτελέσματα

h^{-1}	$\ u - u_h\ $
16	0.0026759
32	0.0006689
48	0.0002973
64	0.0001672