Σκοπός αυτής της άσκησης είναι η μελέτη των λεγόμενων θ-μεθόδων για προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας. Συγκεκριμένα, αναζητούμε μια αρκετά ομαλή συνάρτηση $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$
\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t), & t \in [0,T], \end{cases} \tag{1}
$$

όπου $T > 0$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$ από $J+2$ ισαπέχοντα σημεία

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J < x_{J+1} = 1,$$

με $h = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, \ldots, J$. Θεωρούμε επίσης μια διαμέριση του διαστήματος $[0,T]$ με βήμα $k = T/N$ για $N > 1$, ακέραιο και συμβολίζουμε τα σημεία της ως

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T, \qquad t_{n+1} - t_n = k,\ n = 0, \ldots, N-1.$$

Ορίζουμε τις προσεγγίσεις $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$ για $j = 0, \ldots, J+1$ και $n = 0, \ldots, M$, από τις σχέσεις

$$
\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \theta\, \frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta)\, \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2}, \tag{2}
$$

όπου $U_0^n = U_{J+1}^n = 0$ για $n = 0, \ldots, M$ και $U_j^0 = g(x_j)$, $j = 0, \ldots, J+1$. Υποθέτουμε ότι $0 \le \theta \le 1$.

1. Δείξτε κατ' αρχήν ότι το αριθμητικό σχήμα (2) είναι καλά ορισμένο. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι αν $\theta \neq 0$ το αριθμητικό σχήμα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα ο πίνακας του οποίου έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο. Τι συμβαίνει όταν $\theta = 0$;

2. Δείξτε ότι αν $\mu(1-\theta) \le \frac{1}{2}$, το αριθμητικό σχήμα (2) είναι ευσταθές. Εδώ $\mu = k/h^2$. (Υπόδειξη: δείτε την απόδειξη ευστάθειας για τη μέθοδο Crank–Nicolson.)

3. Θα λύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (1) με την αρχική συνθήκη $g(x) = x(1-x)$, $x \in [0,1]$. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει το πρόβλημα (1) για οποιοδήποτε $\theta \neq 0$.

4. Η συνάρτηση
$$\tilde{u}(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t},\ x \in [0,1],\ t > 0,$$
είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης του προβλήματος (1). Υπολογίστε τα σφάλματα
$$E = \max\{|U_j^n - \tilde{u}(x_j, 0.1)|,\ 1 \le j \le J]\},$$
για $\theta = 1/2,\ 3/4,\ 1$. Πάρτε $h^{-1} = \{10, 20\}$ και k τέτοιο ώστε $\mu = 1/2$ ή $\mu = 5$.

Παράδοση και εξέταση της άσκησης. Η ημερομηνία παράδοσης της άσκησης είναι η **Τετάρτη, 25 Οκτωβρίου 2017, 23:59.** Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την Πέμπτη 26 Οκτωβρίου, κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου. Στείλτε τόσο το θεωρητικό μέρος όσο και το πρόγραμμα που χρησιμοποιήσατε για να παράξετε αποτελέσματα, ηλεκτρονικά, στη διεύθυνση `plex@uoc.gr`, μέχρι την παραπάνω ημερομηνία. Μπορείτε να δουλέψετε σε ομάδες των δύο ατόμων, αν θέλετε.