Ονοματεπώνυμο..**Α.Μ.**...........

1. Θεωρούμε την εξίσωση της θερμότητας, $u_t = \kappa u_{xx}$ για $x \in [0,1]$ και $0 < t \leq 0.5$, με συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = u(1,t) = 0$ και αρχική συνθήκη $u^0(x) = e^x \sin(2\pi x)$. Τι προσέγγιση δίνει η άμεση μέθοδος του Euler στο σημείο $x = 1/2$ για τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0.125$ και $t_2 = 0.25$; Χρησιμοποιήστε $\Delta x = 1/16$ και $\Delta t = 1/512$. Πάρτε $\kappa = 0.2$, αν ο αριθμός μητρώου σας είναι άρτιος, διαφορετικά $\kappa = 0.3$. Τυπώστε τρία δεκαδικά ψηφία (με στρογγυλοποίηση).

$u(\frac{1}{2}, 0.125) =$	$u(\frac{1}{2}, 0.25) =$

2. Έστω ότι η συνάρτηση u είναι τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και $h > 0$ είναι τέτοιο ώστε $\bar{x}, \bar{x}-h, \bar{x}-2h \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι αν $Du(\bar{x}) = \frac{1}{2h}\left[3u(\bar{x}) - 4u(\bar{x}-h) + u(\bar{x}-2h)\right]$, τότε

$$|Du(\bar{x}) - u'(x)| \leq h^2 \max_{x\in[a,b]} |u'''(x)|.$$

3. $Du(x) = D_+D_-u(x)$ είναι προσέγγιση της $u''(x)$. Βρείτε έναν τύπο για την $Du(x)$ (δείξτε τη δουλειά σας!) και χρησιμοποιήστε τον για να προσεγγίσετε την ποσότητα $u''(1)$, για τη συνάρτηση $u(x) = \sin(2x)$. Πάρτε $h = 1/25, 1/100$ και τυπώστε τέσσερα δεκαδικά ψηφία (με στρογγυλοποίηση).

$h = \frac{1}{25}, \quad u''(1) =$	$h = \frac{1}{100}, \quad u''(1) =$