

1. Βρείτε την ακριβή λύση του προβλήματος δύο σημείων

$$(1) \quad u_{xx} = e^{4x}, \quad u(-1) = u(1) = 0,$$

ολοκληρώνοντας δύο φορές τη διαφορική εξίσωση.

Απάντηση. Πράγματι, ολοκληρώνοντας δύο φορές τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος (1) έχουμε

$$u(x) = \frac{1}{16}e^{4x} + c_1x + c_2,$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Από τις συνοριακές συνθήκες $u(\pm 1) = 0$ παίρνουμε τις σχέσεις

$$\frac{1}{16}e^{-4} - c_1 + c_2 = 0, \quad \frac{1}{16}e^4 + c_1 + c_2 = 0,$$

οπότε $c_1 = -\frac{1}{16}\frac{1}{2}(e^4 - e^{-4}) = -\frac{1}{16}\sinh(4)$ και $c_2 = -\frac{1}{16}\frac{1}{2}(e^4 + e^{-4}) = -\frac{1}{16}\cosh(4)$. Τελικά,

$$u(x) = \frac{1}{16}(e^{4x} - \sinh(4)x - \cosh(4)).$$

2. Γράψτε τη μεταβολική μορφή του προβλήματος (1) πάνω στο χώρο των συνεχών και κατά τμήματα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[-1, 1]$.

Απάντηση. Έστω V ο χώρος των κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[-1, 1]$ οι οποίες μηδενίζονται στα σημεία $x = \pm 1$. Πολλαπλασιάζουμε τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος (1) με μια συνάρτηση $v \in V$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνοριακές συνθήκες καταλήγουμε στη μεταβολική μορφή

$$-(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

3. Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα fem.py για να λύσετε το πρόβλημα δύο σημείων (1) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Απάντηση. Στο πρόγραμμα fem.py ορίζουμε τη συνάρτηση q να είναι ταυτοτικά μηδέν ενώ θέτουμε το δεξί μέλος ίσο με $-e^{4x}$ (προσέξτε το πρόσημο).

(α') Χρησιμοποιήστε $h = 1/16$ και τυπώστε την ακριβή και την υπολογιστική λύση στο σημείο $x = 0.5$. Τι παρατηρείτε;

Σύμφωνα με την ονομασία των μεταβλητών του προγράμματος fem.py, πρέπει $\frac{1-(-1)}{N+1} = \frac{1}{16}$, δηλαδή $N = 31$. Οι εσωτερικοί κόμβοι της διαμέρισης που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα είναι οι $x_j = -1 + jh$, $j = 1, \dots, N$. Έχουμε $x_j = 0.5$ αν και μόνο αν $j = 24$. Τόσο η ακριβής λύση όσο και η υπολογιστική εκτυπώνονται από το πρόγραμμα ως -2.09775845974 , με άλλα λόγια $u(0.5) = u_h(0.5)$. Για την ερμηνεία αυτού του γεγονότος, δείτε τις σημειώσεις του μαθήματος.

(β') Κάντε το ίδιο όταν $h = 1/25$. Ποιό είναι το σφάλμα $\epsilon_h(0.5) = |u(0.5) - u_h(0.5)|$; Εδώ, με u_h συμβολίζουμε τη λύση πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος (1). Στρογγυλοποιήστε τις απαντήσεις σας στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο.

Όπως και πριν, πρέπει τώρα $\frac{1-(-1)}{N+1} = \frac{1}{25}$, δηλαδή $N = 49$. Αυτή τη φορά όμως το σημείο 0.5 δεν είναι κόμβος της διαμέρισης. Όμως, $x_{37} = -1 + \frac{37}{25} = 0.48 < 0.5 < x_{38} = -1 + \frac{38}{25} = 0.52$, άρα $u_h(0.5) = \frac{1}{2}(U_{37} + U_{38})$, όπου U είναι το διάνυσμα των συνιστωσών της λύσης πεπερασμένων στοιχείων. Από το πρόγραμμα fem.py έχουμε

$$u(0.5) = -2.0978$$

$$u_h(0.5) = -2.0963$$

$$\epsilon_h(0.5) = 0.0015$$