Αναζητούμε μια αρκετά ομαλή συνάρτηση $u : [0, 1] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,T], \end{cases}$$

όπου $T > 0$ και $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0, 1]$ από $J + 2$ ισαπέχοντα σημεία

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J < x_{J+1} = 1,$$

με $h = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, \ldots, J$. Θεωρούμε επίσης μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$ με βήμα $k = T/N$ για $N > 1$, ακέραιο και συμβολίζουμε τα σημεία της ως

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T, \qquad t_{n+1} - t_n = k,\ n = 0, \ldots, N-1.$$

Ορίζουμε τις προσεγγίσεις $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$ για $j = 0, \ldots, J+1$ και $n = 0, \ldots, N$, από τις σχέσεις

$$(2) \qquad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \theta\, \frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta)\, \frac{U_{j-1}^{n} - 2U_j^{n} + U_{j+1}^{n}}{h^2},$$

όπου $U_0^n = U_{J+1}^n = 0$ για $n = 0, \ldots, N$ και $U_j^0 = g(x_j)$, $j = 0, \ldots, J+1$. Υποθέτουμε ότι $0 \le \theta \le 1$.

1. Δείξτε κατ' αρχήν ότι το αριθμητικό σχήμα (2) είναι καλά ορισμένο. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι αν $\theta \neq 0$ το αριθμητικό σχήμα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα ο πίνακας του οποίου έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο. Τι συμβαίνει όταν $\theta = 0$;

   Γράφουμε την εξίσωση (2) στη μορφή

   $$\begin{aligned}(3) \quad & -\mu\theta U_{j-1}^{n+1} + (1+2\mu\theta)U_j^{n+1} - \mu\theta U_{j+1}^{n+1} = \\ & \mu(1-\theta)U_{j-1}^{n} + (1-2\mu(1-\theta))U_j^{n} + \mu(1-\theta)U_{j+1}^{n}, \qquad j = 1, \ldots, J,\ n = 0, \ldots, N-1,\end{aligned}$$

   με $\mu = k/h^2$, ή, ισοδύναμα,

   $$\begin{pmatrix} 1+2\mu\theta & -\mu\theta & 0 & & 0 \\ -\mu\theta & 1+2\mu\theta & -\mu\theta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\mu\theta & 1+2\mu\theta & -\mu\theta \\ 0 & & & -\mu\theta & 1+2\mu\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{J-1}^{n+1} \\ U_J^{n+1} \end{pmatrix} =$$

   $$\begin{pmatrix} 1-2\mu(1-\theta) & \mu(1-\theta) & 0 & & 0 \\ \mu(1-\theta) & 1-2\mu(1-\theta) & \mu(1-\theta) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu(1-\theta) & 1-2\mu(1-\theta) & \mu(1-\theta) \\ 0 & & & \mu(1-\theta) & 1-2\mu(1-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n} \\ U_2^{n} \\ \vdots \\ U_{J-1}^{n} \\ U_J^{n} \end{pmatrix},$$

   για n = 0, 1,...,N-1. Ο πίνακας του συστήματος έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο και είναι συνεπώς αντιστρέψιμος. Άρα οι θ-μέθοδοι είναι καλά ορισμένες για οποιοδήποτε $0 \le \theta \le 1$. Προφανώς, στην περίπτωση που $\theta = 0$ η μέθοδος εκφυλίζεται στην άμεση μέθοδο του Euler. Παρατηρήστε ότι τότε, ο πίνακας του συστήματος είναι ίσος με τον $J \times J$ μοναδιαίο πίνακας και επομένως δεν είναι αναγκαία η επίλυση γραμμικού συστήματος.

2. Δείξτε ότι αν $\mu(1-\theta) \le \frac{1}{2}$, το αριθμητικό σχήμα (2) είναι ευσταθές. Εδώ $\mu = k/h^2$. (Υπόδειξη: δείτε την απόδειξη ευστάθειας για τη μέθοδο Crank–Nicolson.)

   Για τη μελέτη της ευστάθειας των μεθόδων αυτών γράφουμε τη σχέση (3) στη μορφή

   $$(1+2\mu\theta)U_j^{n+1} = \mu\theta\,(U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}) + \mu(1-\theta)(U_{j-1}^{n} + U_{j+1}^{n})) + (1-2\mu(1-\theta))U_j^{n},$$

και υποθέτουμε ότι $\mu(1-\theta) \leq \frac{1}{2}$. Τότε,

$$\begin{aligned}(1+2\mu\theta)|U_j^{n+1}| &\leq 2\mu\theta \max_{0\leq j\leq J+1} |U_j^{n+1}| + (\mu(1-\theta) + 1 - 2\mu(1-\theta)) \max_{0\leq j\leq J+1} |U_j^n| \\ &= 2\mu\theta \max_{0\leq j\leq J+1} |U_j^{n+1}| + (1-\mu(1-\theta)) \max_{0\leq j\leq J+1} |U_j^n| \\ &\leq 2\mu\theta \max_{0\leq j\leq J+1} |U_j^{n+1}| + \max_{0\leq j\leq J+1} |U_j^n|, \qquad j = 1, \ldots, J.\end{aligned}$$

Ειδικότερα,

$$\max_{0\leq j\leq J+1} |U_j^{n+1}| \leq \max_{0\leq j\leq J+1} |U_j^n|,$$

σχέση που αποδεικνύει την ευστάθεια των θ-μεθόδων.

3. Θα λύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (1) με την αρχική συνθήκη $g(x) = x(1-x)$, $x \in [0,1]$. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει το πρόβλημα (1) για οποιοδήποτε $\theta \neq 0$.

```
from math import ceil
import numpy as np

def u0(x): return x*(1-x)

def exact(x,t):
    return (8/np.pi**3) * np.sin(np.pi*x) / np.exp(np.pi**2*t)

theta = 0.75
J = 19;  dx = 1.0 / (J+1);  x = np.linspace(0, 1, J+2)
mu = 0.5;  dt = mu * dx**2;  T = 0.1;  N = ceil(T / dt)

Uold = u0(x[1:J+1]);  Unew = np.zeros(J)

a = (-mu*theta)*np.ones(J-1);  b = (1+2*mu*theta)*np.ones(J);
A = np.diag(a, -1) + np.diag(b, 0) + np.diag(a, 1)

a = (mu*(1-theta))*np.ones(J-1);  b = (1-2*mu*(1-theta))*np.ones(J);
B = np.diag(a, -1) + np.diag(b, 0) + np.diag(a, 1)

for n in range(N):
    Unew = np.linalg.solve(A, B.dot(Uold))
    for j in range(J): Uold[j] = Unew[j]

print("t = %f  Error = %e" % (T, max(abs(Uold-exact(x[1:J+1], T)))))
```

4. Η συνάρτηση

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sin(\pi x)e^{-\pi^2 t},\ x \in [0,1],\ t > 0,$$

είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης του προβλήματος (1). Υπολογίστε τα σφάλματα

$$E = \max\{|U_j^n - \tilde{u}(x_j, 0.1)|,\ 1 \leq j \leq J\},$$

για $\theta = 1/2,\ 3/4,\ 1$. Πάρτε $h^{-1} = \{10, 20\}$ και k τέτοιο ώστε $\mu = 1/2$ ή $\mu = 5$.

Ο παραπάνω κώδικας παράγει τα εξής αποτελέσματα:

θ	μ	h	k	n	E
$1/2$	$1/2$	$1/10$	$1/200$	20	7.5606×10^{-4}
$1/2$	$1/2$	$1/20$	$1/800$	80	1.9220×10^{-4}
$1/2$	5	$1/10$	$1/20$	2	1.7996×10^{-3}
$1/2$	5	$1/20$	$1/80$	8	7.4817×10^{-5}
$3/4$	$1/2$	$1/10$	$1/200$	20	1.9077×10^{-3}
$3/4$	$1/2$	$1/20$	$1/800$	80	4.8346×10^{-4}
$3/4$	5	$1/10$	$1/20$	2	1.0208×10^{-2}
$3/4$	5	$1/20$	$1/80$	8	2.9517×10^{-3}
1	$1/2$	$1/10$	$1/200$	20	3.0430×10^{-3}
1	$1/2$	$1/20$	$1/800$	80	7.7373×10^{-4}
1	5	$1/10$	$1/20$	2	1.9788×10^{-2}
1	5	$1/20$	$1/80$	8	5.7262×10^{-3}