Σε αυτή την εργαστηριακή άσκηση θα ασχοληθούμε με την επίλυση του περιοδικού προβλήματος για την εξίσωση του κύματος. Θεωρούμε την εξίσωση του κύματος

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \qquad x \in [0, L] \times (0, \infty)$$

για $\alpha > 0$, με αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = g(x)$ και $u_t(x, 0) = g_1(x)$, για $x \in [0, L]$. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις g, g_1 μπορούν να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ ως συνεχείς συναρτήσεις με περίοδο L, ότι ισχύει δηλαδή $g(L) = g(0)$ και $g_1(L) = g_1(0)$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το ακόλουθο *περιοδικό* πρόβλημα: ζητείται περιοδική συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R})$ με περίοδο L, τέτοια ώστε

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{1}$$

και $u(x, 0) = g(x)$, $u_t(x, 0) = g_1(x)$, για $x \in \mathbb{R}$.

Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε αριθμητικά το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ο εξής: για $J \geq 1$, ακέραιο, θέτουμε $h = L/(J + 1)$ και ορίζουμε $x_i = ih$, $i \in \mathbb{Z}$. Επίσης, για $T > 0$ και $N \geq 1$, ακέραιο, θεωρούμε μια διαμέριση του $[0, T]$ από $N + 1$ ισαπέχοντα σημεία $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, με $k = t_{n+1} - t_n$, $n = 0, \ldots, N - 1$. Ορίζουμε τον χώρο

$$\mathbb{R}^{J+1}_{\text{per}} = \{(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} : v_i \in \mathbb{R} \text{ και } v_{i+J+1} = v_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$$

και προσεγγίζουμε τις τιμές $(u(x_i, t_n))_{i\in\mathbb{Z}}$ με τις $U^n \in \mathbb{R}^{J+1}_{\text{per}}$ από το σχήμα

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}, \qquad j = 0, \ldots, J, \quad n = 1, \ldots, N - 1, \tag{2}$$

δείτε το Κεφ. 8 των σημειώσεων για τις λεπτομέρειες. Οι άγνωστοι φαίνονται, εκ πρώτης όψεως, να είναι τα $U_{-1}^{n+1}, U_0^{n+1}, \ldots, U_{J+1}^{n+1}$, αλλά λόγω των περιοδικών συνθηκών, $U_{-1}^{n+1} = U_J^{n+1}$ και $U_{J+1}^{n+1} = U_0^{n+1}$, άρα οι άγνωστοι είναι στην πραγματικότητα $J + 1$.

1. Γράψτε προσεκτικά το σχήμα που προτείνεται για τη λύση αυτού του περιοδικού προβλήματος, καθώς και την υλοποίηση των αρχικών συνθηκών, κατ' αναλογία με το Κεφ. 8 των σημειώσεων.

   Απάντηση. Λόγω των περιοδικών συνοριακών συνθηκών, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις $U_0^n, \ldots, U_J^n$, για $n \geq 1$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $U_{-1}^n = U_J^n$ και $U_{J+1}^n = U_0^n$ έχουμε από την (2)

$$\frac{U_0^{n+1} - 2U_0^n + U_0^{n-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{U_1^n - 2U_0^n + U_J^n}{h^2}, \qquad j = 0, \tag{3}$$

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}, \qquad j = 1, \ldots, J - 1, \tag{4}$$

$$\frac{U_J^{n+1} - 2U_J^n + U_J^{n-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{U_0^n - 2U_J^n + U_{J-1}^n}{h^2}, \qquad j = J, \tag{5}$$

   για $n = 1, \ldots, N - 1$. Αν θέσουμε $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ τότε, το σύστημα εξισώσεων (3)-(5) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$U_0^{n+1} = \lambda^2 U_J^n + 2(1 - \lambda^2) U_0^n + \lambda^2 U_1^n - U_0^{n-1}, \qquad j = 0, \tag{6}$$

$$U_j^{n+1} = \lambda^2 U_{j-1}^n + 2(1 - \lambda^2) U_j^n + \lambda^2 U_{j+1}^n - U_j^{n-1}, \qquad j = 1, \ldots, J - 1, \tag{7}$$

$$U_J^{n+1} = \lambda^2 U_{J-1}^n + 2(1 - \lambda^2) U_J^n + \lambda^2 U_0^n - U_J^{n-1}, \qquad j = J, \tag{8}$$

   για $n = 1, \ldots, N - 1$.

2. Δείξτε ότι για $n \geq 1$ έχουμε

$$U^{n+1} = AU^n - U^{n-1}$$

   για κατάλληλο $(J + 1) \times (J + 1)$ πίνακα. Πως υπολογίζουμε το U^1;

Απάντηση. Το σύστημα εξισώσεων (6)-(8) μπορεί να γραφεί στη μορφή $U^{n+1} = AU^n - U^{n-1}$, για $n = 1, \ldots, N-1$, όπου A είναι ο $(J+1) \times (J+1)$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & & & & \lambda^2 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 \\ \lambda^2 & & & & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{pmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του U^1, έχουμε από το θεώρημα του Taylor,

$$U_j^1 \approx u(x_j, t_1) \approx u(x_j, 0) + k u_t(x_j, 0) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_j, 0), \qquad j = 0, \ldots, J.$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του κύματος και τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε

$$U_j^1 \approx g(x_j) + k g_1(x_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} u_{xx}(x_j, 0), \qquad j = 0, \ldots, J.$$

Τέλος, από την προσέγγιση

$$u_{xx}(x_j, 0) \approx \frac{u(x_{j-1}, 0) - 2u(x_j, 0) + u(x_{j+1}, 0)}{h^2} = \frac{g(x_{j-1}) - 2g(x_j) + g(x_{j+1})}{h^2},$$

ορίζουμε

$$\begin{aligned} U_j^1 &= g(x_j) + k g_1(x_j) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} \frac{g(x_{j-1}) - 2g(x_j) + g(x_{j+1})}{h^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{2} g(x_{j-1}) + (1-\lambda^2) g(x_j) + \frac{\lambda^2}{2} g(x_{j+1}) + k g_1(x_j), \qquad j = 0, \ldots, J. \end{aligned} \tag{9}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις περιοδικές συνθήκες, μπορούμε να γράψουμε το σύστημα εξισώσεων (9) στη μορφή

$$U^1 = \frac{1}{2} A U^0 + k G^1,$$

όπου $U^0 = (g(x_0), \ldots, g(x_J))^T$ και $G^1 = (g_1(x_0), \ldots, g_1(x_J))^T$.

3. Υλοποιήστε την προτεινόμενη μέθοδο και χρησιμοποιήστε την για να λύσετε την εξίσωση του κύματος (1) με $\alpha = 1$ και αρχικές συνθήκες

$$g(x) = e^{-5(x-2)^2}, \qquad g_1(x) = 0,$$

και $L = 4$. Χρησιμοποιήστε $h = 1/100$, $T = 1$ και χρονικό βήμα k τέτοιο ώστε $\lambda = \frac{\alpha k}{h} = 0.8$.

```
from math import ceil
import numpy as np

# Initial position and velocity

def g0(x): return 1.0/np.exp(5*(x-2)**2)
def g1(x): return np.zeros(x.size)

# Discretization parameters

alpha = 1;  L = 4;  T = 1.0;  lam = 0.8
J = 399;  h = 1.0/(J+1);  x = np.linspace(0, L, J+2)
k = lam * h / alpha;  N = ceil(T/k)
```

```
# The matrix A

a = (lam**2)*np.ones(J);  b = (2*(1-lam**2))*np.ones(J+1);
A = np.diag(a, -1) + np.diag(b, 0) + np.diag(a, 1)

A[0,J] = lam**2;  A[J,0] = lam**2

# Compute U^0 and U^1

U = g0(x[0:J+1])
V = 0.5*A.dot(U) + k * g1(x[0:J+1])

for n in range(1,N):
    tmp = A.dot(V) - U
    for j in range(J+1): U[j] = V[j]; V[j] = tmp[j]
```

4. Σχεδιάστε τη γραφική παραστάσεις της λύσης στις χρονικές στιγμές $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

   Χρησιμοποιώντας τον κώδικα Python της ερώτησης 3 λαμβάνουμε τις γραφικές παραστάσεις