ΜΕΜ 253: Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ
4^n Εργαστηριακή Άσκηση

Παράδοση: 30/11/2017

Κωνσταντίνος Ψαρουλάκης (AM: 1850) psaroulakis.kon@gmail.com login: tem1850

Στόχος αυτής της άσκησης είναι η επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, & x \in [0, L] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = g_1(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

όπου $\alpha > 0$ και $g_0, g_1 \in C[0, L]$.

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις g, g_1 μπορούν να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ ως συνεχείς συναρτήσεις με περίοδο L, ότι ισχύει δηλαδή $g(L) = g(0)$ και $g_1(L) = g_1(0)$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το ακόλουθο περιοδικό πρόβλημα: ζητείται περιοδική συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R})$ με περίοδο L, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t), & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g_1(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Για να λύσω αριθμητικά το συγκεκριμένο πρόβλημα:
Για $J \geq 1$ ($J \in \mathbb{N}$) έχουμε

- $h = L/(J + 1)$
- $x_i = ih, i \in \mathbb{Z}$

Για $T > 0$ και $N \geq 1$ ($N \in \mathbb{N}$)

- $k = T/(N + 1) = t_{n+1} - t_n \; n = 0, ..., N - 1$
- $t_n = nk, \qquad n = 0, ..., N$

Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα:

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \tag{1}$$

για να προσεγγίσουμε τις τιμές $(u(x_i, t_n))_{i \in \mathbb{Z}}$, με $U^n \in \mathbb{R}^{J+1}_{per} = \{(v_i)_{i \in \mathbb{Z}} : v_i \in \mathbb{R} \text{ και } v_{i+J+1} = v_i, i \in \mathbb{Z}\}$.
Δηλαδή, γνωρίζουμε ότι $U_0^n = U_{J+1}^n$, $U_{-1}^n = U_J^n$, κ.ο.κ

Ερώτημα 1.

Με πράξεις έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \\
\Rightarrow\ & U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1} = \frac{\alpha^2 k^2}{h^2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n), \qquad \text{θέτω} \quad \lambda = \frac{\alpha k}{h} \\
\Rightarrow\ & U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1} = \lambda^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \\
\Rightarrow\ & U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \lambda^2 U_{j+1}^n - 2\lambda^2 U_j^n + \lambda^2 U_{j-1}^n \\
\Rightarrow\ & U_j^{n+1} = \lambda^2 U_{j+1}^n + 2(1-\lambda^2) U_j^n + \lambda^2 U_{j-1}^n - U_j^{n-1} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $U_0^n = U_{J+1}^n$, $U_{-1}^n = U_J^n$, . Επομένως έχουμε το παρακάτω αριθμητικό σχήμα (με αρχικές συνθήκες):

$$
\begin{aligned}
& U_j^{n+1} = \lambda^2 U_{j+1}^n + 2(1-\lambda^2) U_j^n + \lambda^2 U_{j-1}^n - U_j^{n-1}, \qquad n = 1, ..., N-1,\ j = 0, ..., J \qquad (3) \\
& U_{-1}^{n+1} = U_J^{n+1} \ \text{και}\ U_{J+1}^{n+1} = U_0^{n+1} \qquad n = 1, ..., N-1
\end{aligned}
$$

Ερώτημα 2.

Αναλύοντας το σχήμα (3) για όλα τα j έχουμε ότι:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
U_0^{n+1} = & \lambda^2 U_{-1}^n & +2(1-\lambda^2)U_0^n & +\lambda^2 U_1^n & +0 & +\dots & +\dots & +0 & -U_0^{n-1} \\
U_1^{n+1} = & 0 & +\lambda^2 U_0^n & +2(1-\lambda^2)U_1^n & +\lambda^2 U_2^n & +0 & +\dots & +0 & -U_1^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
U_{J-1}^{n+1} = & 0 & +\dots & +0 & +\lambda^2 U_{J-2}^n & +2(1-\lambda^2)U_{J-1}^n & +\lambda^2 U_J^n & +0 & -U_{J-1}^{n-1} \\
U_J^{n+1} = & 0 & +\dots & +\dots & +0 & +\lambda^2 U_{J-1}^n & +2(1-\lambda^2)U_J^n & +\lambda^2 U_{J+1}^n & -U_J^{n-1}
\end{array}
$$

Όμως ξέρουμε ότι $U_{-1}^{n+1} = U_J^{n+1}$ και $U_{J+1}^{n+1} = U_0^{n+1}$. Επομένως έχουμε:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
U_0^{n+1} = & 2(1-\lambda^2)U_0^n & +\lambda^2 U_1^n & +0 & +\dots & +\dots & +0 & +\lambda^2 U_{-1}^n & -U_0^{n-1} \\
U_1^{n+1} = & \lambda^2 U_0^n & +2(1-\lambda^2)U_1^n & +\lambda^2 U_2^n & +0 & +\dots & +\dots & +0 & -U_J^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
U_{J-1}^{n+1} = & 0 & +\dots & +0 & +\lambda^2 U_{J-2}^n & +2(1-\lambda^2)U_{J-1}^n & +\lambda^2 U_J^n & +0 & -U_{J-1}^{n-1} \\
U_J^{n+1} = & \lambda^2 U_0^n & 0 & +\dots & +\dots & +0 & +\lambda^2 U_{J-1}^n & +2(1-\lambda^2)U_J^n & -U_J^{n-1}
\end{array}
$$

Τώρα συμβολίζω: $U^n \in \mathbb{R}^{J+1} = (U_0^n, U_1^n, U_2^n, ..., U_J^n)^T$ κι έχουμε:

$$U^{n+1} = A\, U^n - U^{n-1}, \quad n = 1, ..., N-1 \tag{4}$$

όπου A ο $(J+1) \times (J+1)$ πίνακας:

$$
A = \begin{pmatrix}
2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 & \lambda^2 \\
\lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 \\
\lambda^2 & 0 & \dots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2)
\end{pmatrix}
$$

Για τον υπολογισμό του U^{n+1} χρειαζόμαστε τις προσεγγίζεις U^n και U^{n+1}. Έτσι, ενώ ξέρουμε τις $U_j^0,\ j = 0, ..., J+1$ για να βρούμε το U^2, χρειάζεται να γνωρίζουμε και την προσέγγιση U^1, η οποία είναι άγνωστη. Παρακάτω θα προσεγγίσω την U^1 ώστε να μπορέσω να προχωρήσω στον υπολογισμό της προσέγγισης του αρχικού προβλήματος.

Θα χρησιμοποιήσω *Taylor* της u στα $(x_j, t^1), \;\; j = 0, ..., J$.

$$\begin{aligned} u(x_j, t^1) &= u(x_j, 0) + k u_t(x_j, 0) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_j, 0) + \hat{\eta}_j^0 + \tilde{\eta}_j^0 \\ &= g(x_j) + \alpha^2 k g_1(x_j) + \frac{\alpha^4 k^2}{2} u_{xx}(x_j, 0) + \hat{\eta_j^0} \end{aligned} \tag{5}$$

όπου $\eta_j^0 = \hat{\eta}_j^0 + \tilde{\eta}_j^0$ και

$$|\hat{\eta}_j^0| \le \frac{k^3}{6} \max_{t \in [0,T]} |\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t)|$$

Τώρα θα προσεγγίσω την $u_{xx}(x_j, 0)$ με τη γνωστή προσέγγιση:

$$\frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_j) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

Δηλαδή:

$$\frac{u(x_0 + h, 0) - 2u(x_0, 0) + u(x_0 - h, 0)}{h^2} = u_{xx}(x_j, 0) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(\xi, 0) \quad \xi \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Θα βάλω τώρα την παραπάνω προσέγγιση στην εξίσωση (2):

$$\begin{aligned} u(x_j, t^1) &= g(x_j) + \alpha^2 k g_1(x_j) + \frac{\lambda^2}{2} \Big(u(x_{j+1}, 0) - 2u(x_j, 0) + u(x_{j-1}, 0) \Big) + \hat{\eta}_j^0 + \tilde{\eta}_j^0 \\ &= g(x_j) + \alpha^2 k g_1(x_j) + \frac{\lambda^2}{2} \Big(g(x_{j+1}) - 2g(x_j) + g(x_{j-1}) \Big) + \hat{\eta}_j^0 + \tilde{\eta}_j^0 \\ &= g(x_j) + \alpha^2 k g_1(x_j) + \frac{\lambda^2}{2} \Big(g(x_{j+1}) - 2g(x_j) + g(x_{j-1}) \Big) + \eta_j^0 \end{aligned}$$

όπου $\eta_j^0 = \hat{\eta}_j^0 + \tilde{\eta}_j^0$ και $|\tilde{\eta}_j^0| \le \dfrac{\alpha^4 k^2 h^2}{24} \max\limits_{x \in [0,L]} |\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, 0)|$

Αντίστοιχα προκύπτει το U_j^1 που ψάχναμε αρχικά ώς εξής:

$$\begin{aligned}
U_j^1 &= g(x_j) + \alpha^2 k g_1(x_j) + \frac{\lambda^2}{2}\Big(g(x_{j+1}) - 2g(x_j) + g(x_{j-1})\Big) \\
&= \frac{\lambda^2}{2} g(x_j) + (1-\lambda^2) g(x_j) + \frac{\lambda^2}{2} g(x_{j-1}) + \alpha^2 k g_1(x_j) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\lambda^2 g(x_j) + 2(1-\lambda^2) g(x_j) + \lambda^2 g(x_{j-1})\Big) + \alpha^2 k g_1(x_j)
\end{aligned}$$

Οπότε τελικά χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγίσεις U_i^1, της λύσης u στα σημεία (x_i, t^1) για $j = 0, ..., J+1$, συμπληρώνω την εξίσωση (1):

$$\begin{aligned}
U_j^{n+1} &= \lambda^2 U_{j+1}^n + 2(1-\lambda^2) U_j^n + \lambda^2 U_{j-1}^n - U_j^{n-1}, && n = 1, ..., N-1, \; j = 0, ..., J \\
U_{-1}^{n+1} &= U_J^{n+1} \text{ και } U_{J+1}^{n+1} = U_0^{n+1} && n = 1, ..., N-1 \\
U_j^1 &= \frac{1}{2}\Big(\lambda^2 g(x_j) + 2(1-\lambda^2) g(x_j) + \lambda^2 g(x_{j-1})\Big) + \alpha^2 k g_1(x_j) && j = 0, ..., J
\end{aligned} \tag{6}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα A που φαίνεται παραπάνω, έχουμε το εξής αριθμητικό σχήμα με αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
&U^{n+1} = A\, U^n - U^{n-1}, \quad n = 1, ..., N-1 \\
&U^1 = \frac{1}{2} A G + \alpha^2 k G_1, \quad U^0 = G
\end{aligned} \tag{7}$$

όπου A ο παραπάνω πίνακας (σελ.3) και

$$G = \Big(g(x_0), ..., g(x_J)\Big)^T \quad \text{και} \quad G_1 = \Big(g_1(x_0), ..., g_1(x_J)\Big)^T$$

Ερώτημα 3.

Το αρχείο που χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση του αλγορίθμου που περιγράφεται από τις εξισώσεις (7) είναι το εξής:

programma.py

```
from math import ceil
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def g0(x):
  return np.exp(-5*(x-2)**2)

def g1(x):
  return np.zeros(x.size)

L=4; alpha = 1;  lam=0.8 ; T = 1;
h = 0.01; J = ceil(4/h -1); x = np.linspace(0, L, J+2)
k = lam * h / alpha;  N = ceil(T/k)

a = (lam**2)*np.ones(J);   b = (2*(1-lam**2))*np.ones(J+1);
A = np.diag(a, -1) + np.diag(b, 0) + np.diag(a, 1)
A[0][J] = lam**2; A[J][0]=lam**2

U = g0(x[0:J+1])
V = 0.5*A.dot(U) + alpha**2 * k * g1(x[0:J+1])

targetT = [0.25, 0.5, 0.75, 1]
targetN = [ceil(tn/k) for tn in targetT]
pl_num = 1 # antistoixei se poio subplot vriskomai pl_num-osto

for n in range(1,N):
    tmp = A.dot(V) - U
    for j in range(J): U[j] = V[j]; V[j] = tmp[j]

    if n+1 in targetN:
        sub = int("41"+str(pl_num))
        plt.subplot(sub)
        plt.plot(x[0:J+1], V)
        plt.title('t = %g' %targetT[targetN.index(n+1)])
        pl_num+=1

plt.tight_layout()
plt.savefig('wave.png')
plt.show()
```

Ερώτημα 4.

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που έγραψα παραπάνω, προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα για $t_n = 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$ αντίστοιχα: