Σε αυτή την εργαστηριακή άσκηση θα ασχοληθούμε με την επίλυση του περιοδικού προβλήματος για την εξίσωση του κύματος. Θεωρούμε την εξίσωση του κύματος

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \qquad x \in [0, L] \times (0, \infty)$$

για $\alpha > 0$, με αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = g(x)$ και $u_t(x, 0) = g_1(x)$, για $x \in [0, L]$. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις g, g_1 μπορούν να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ ως συνεχείς συναρτήσεις με περίοδο L, ότι ισχύει δηλαδή $g(L) = g(0)$ και $g_1(L) = g_1(0)$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το ακόλουθο *περιοδικό* πρόβλημα: ζητείται περιοδική συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R})$ με περίοδο L, τέτοια ώστε

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{1}$$

και $u(x, 0) = g(x)$, $u_t(x, 0) = g_1(x)$, για $x \in \mathbb{R}$.

Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε αριθμητικά το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ο εξής: για $J \geq 1$, ακέραιο, θέτουμε $h = L/(J+1)$ και ορίζουμε $x_i = ih$, $i \in \mathbb{Z}$. Επίσης, για $T > 0$ και $N \geq 1$, ακέραιο, θεωρούμε μια διαμέριση του $[0, T]$ από $N + 1$ ισαπέχοντα σημεία $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, με $k = t_{n+1} - t_n$, $n = 0, \ldots, N-1$. Ορίζουμε τον χώρο

$$\mathbb{R}^{J+1}_{\text{per}} = \{(v_i)_{i \in \mathbb{Z}} : v_i \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ v_{i+J+1} = v_i, \, i \in \mathbb{Z}\}$$

και προσεγγίζουμε τις τιμές $(u(x_i, t_n))_{i \in \mathbb{Z}}$ με τις $U^n \in \mathbb{R}^{J+1}_{\text{per}}$ από το σχήμα

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} = \alpha^2 \, \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}, \qquad j = 0, \ldots, J, \quad n = 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

δείτε το Κεφ. 8 των σημειώσεων για τις λεπτομέρειες. Οι άγνωστοι φαίνονται, εκ πρώτης όψεως, να είναι τα $U_{-1}^{n+1}, U_0^{n+1}, \ldots, U_{J+1}^{n+1}$, αλλά λόγω των περιοδικών συνθηκών, $U_{-1}^{n+1} = U_J^{n+1}$ και $U_{J+1}^{n+1} = U_0^{n+1}$, άρα οι άγνωστοι είναι στην πραγματικότητα $J + 1$.

1. Γράψτε προσεκτικά το σχήμα που προτείνεται για τη λύση αυτού του περιοδικού προβλήματος, καθώς και την υλοποίηση των αρχικών συνθηκών, κατ' αναλογία με το Κεφ. 8 των σημειώσεων.

2. Δείξτε ότι για $n \geq 1$ έχουμε
$$U^{n+1} = AU^n - U^{n-1}$$
για κατάλληλο $(J+1) \times (J+1)$ πίνακα. Πως υπολογίζουμε το U^1;

3. Υλοποιήστε την προτεινόμενη μέθοδο και χρησιμοποιήστε την για να λύσετε την εξίσωση του κύματος (1) με $\alpha = 1$ και αρχικές συνθήκες
$$g(x) = e^{-5(x-2)^2}, \qquad g_1(x) = 0,$$
και $L = 4$. Χρησιμοποιήστε $h = 1/100$, $T = 1$ και χρονικό βήμα k τέτοιο ώστε $\lambda = \frac{\alpha k}{h} = 0.8$.

4. Σχεδιάστε τη γραφική παραστάσεις της λύσης στις χρονικές στιγμές $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

Παραδώστε την εργαστηριακή άσκηση (κείμενο, πρόγραμμα Python) μέχρι την **Πέμπτη, 30 Νοεμβρίου 2017, ώρα 23.59**, με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο στη διεύθυνση `plex@uoc.gr`. Μπορείτε, αν θέλετε, να εργαστείτε σε ομάδες των δύο ατόμων.