

Analiza Numeryczna M - Pracownia 3

Konrad Werbliński - 291878

28 stycznia 2018

1 Wstęp

W moim zadaniu na pracownię zajmowałem się zaimplementowaniem algorytmu Remeza oraz sprawdzeniem różnicy w działaniu tego algorytmu dla dwóch rodzajów punktów startowych: punktów równoodległych oraz ekstremów wielomianu Czebyszewa.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Ważnym elementem algorytmu Remeza jest aproksymacja jednostajna na zbiorze dyskretnym. Niech s będzie dowolną funkcją określoną na zbiorze $T = \{x_0, x_1, \dots, x_{k+1}\}$, taką że $s(x^k) = (-1)^k$. Wtedy wielomian optymalny aproksymacji na zbiorze T wyraża się wzorem:

$$w_n = d(x_0) + d[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + d[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

gdzie $d(x) = f(x) - \epsilon s(x)$, $\epsilon = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]}{s[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]}$

Algorytm Remeza konstruuje kolejne zbiory punktów $\{x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}\}$, na których przeprowadza aproksymację jednostajną. Konstrukcja kolejnego zbioru polega na przesunięciu pewnego punktu $x_i^{(k)}$ w taki sposób aby $|w_n^{(k)}(x_i^{(k+1)}) - f(x_i^{(k+1)})| = \|f - w_n^{(k)}\|_\infty$.

Niech w_n^* będzie wielomianem optymalnym aproksymacji jednostajnej. Zauważmy, że $\max_i |w_n^{(k)}(x_i^{(k+1)}) - f(x_i^{(k+1)})| \leq \max_i |w_n^*(x_i^{(k+1)}) - f(x_i^{(k+1)})| \leq \|f - w_n^*\|_\infty$. Czyli ciąg błędów aproksymacji na zbiorze dyskretnym jest ograniczony od góry przez $\|f - w_n^*\|_\infty$.

Niech $\epsilon_k = \max_i |w_n^{(k)}(x_i^{(k+1)}) - f(x_i^{(k+1)})|$, wtedy można pokazać, że $\epsilon_k \leq \epsilon_{k+1}$ oraz, że gdy $\epsilon_k = \epsilon_{k+1}$, to również $\epsilon_k = \|f - w_n^{(k)}\|_\infty = \|f - w_n^*\|_\infty$ i algorytm Remeza kończy działanie w k -tym kroku. Jeżeli dla wszystkich k : $\epsilon_k < \epsilon_{k+1}$ to wtedy $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = \|f - w_n^*\|_\infty$.

Zatem algorytm Remeza albo zwraca wielomian optymalny interpolacji jednostajnej, albo zwraca wielomian należący do ciągu wielomianów zbieżnych do wielomianu optymalnego.

3 Wykonane doświadczenia

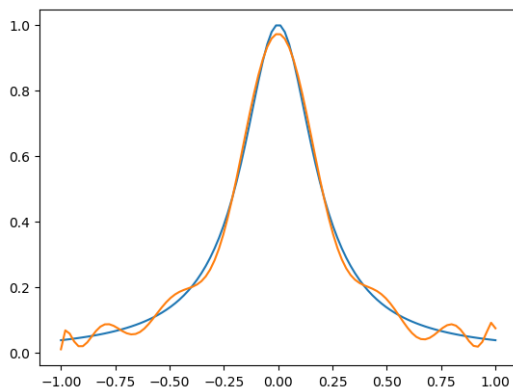
3.1 Funkcja Rungego

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

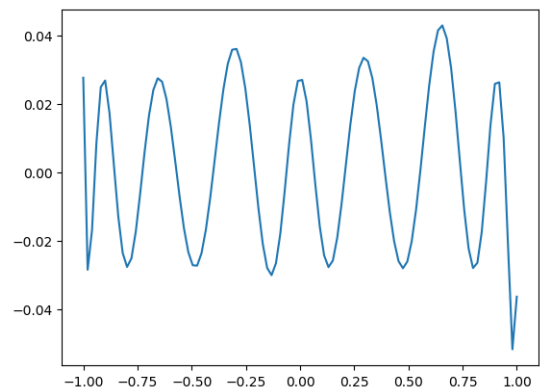
lewy kraniec przedziału	-1
prawy kraniec przedziału	1
stopień wielomianu	14
liczba iteracji algorytmu	21

Możemy zaobserwować większy błąd dla punktów startowych równoodległych. Warto zauważyć, że wykres błędu dla punktów startowych Czebyszewa jest bardzo bliski alternansowi. Możemy również zauważyć, że alternans pomimo wybrania 14 punktów startowych jest 17 punktowy. Jest to związane z parzystością funkcji Rungego, która implikuje, że wielomian optymalny $w_{14}^* \in \Pi_{14}$ jest również wielomianem optymalnym wśród wielomianów stopnia nie większego niż 15.

Punkty startowe równoodległe

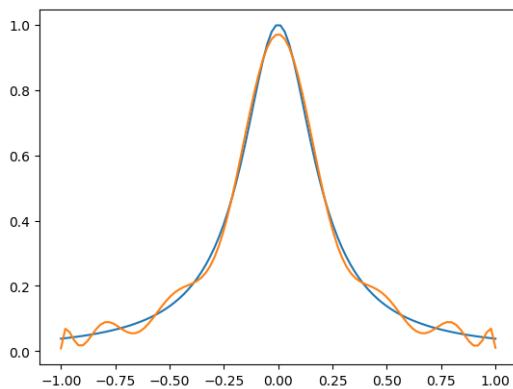


Rysunek 1: Aproxymacja funkcji Rungego w przedziale $[-1, 1]$ dla punktów startowych równoodległych.

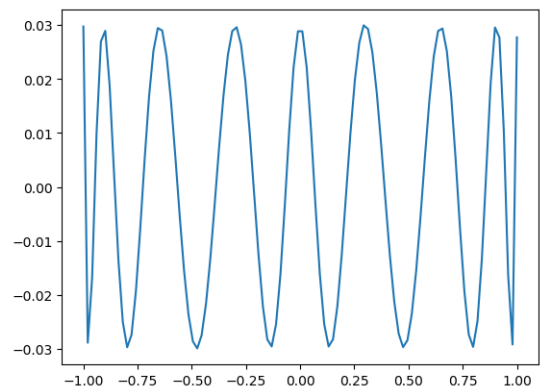


Rysunek 2: Błąd aproksymacji funkcji Rungego w przedziale $[-1, 1]$ dla punktów startowych równoodległych.

Punkty startowe Czebyszewa



Rysunek 3: Aproxymacja funkcji Rungego w przedziale $[-1, 1]$ dla punktów startowych, będących ekstremami wielomianu Czebyszewa.



Rysunek 4: Błąd aproksymacji funkcji Rungego w przedziale $[-1, 1]$ dla punktów startowych, będących ekstremami wielomianu Czebyszewa.

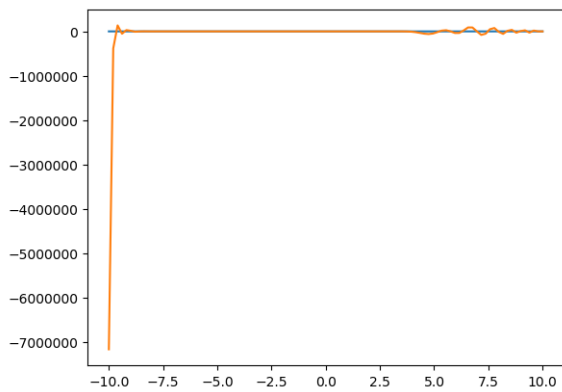
3.2 Funkcja kawałkami liniowa

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 10, & \text{gdy } x < -2 \\ 0, & \text{gdy } x \in [-2, 0) \\ 3x, & \text{gdy } x \in [0, 4) \\ -14x + 68, & \text{gdy } x > 4 \end{cases}$$

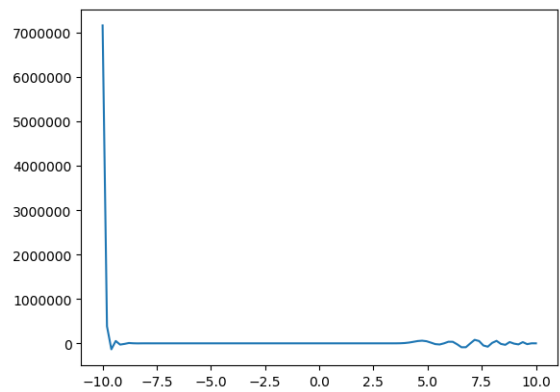
lewy kraniec przedziału	-10
prawy kraniec przedziału	10
stopień wielomianu	54
liczba iteracji algorytmu	55

Dla funkcji kawałkami liniowej możemy zauważyć ogromny błąd dla punktów startowych równoodległych oraz bardzo mały błąd dla punktów startowych Czebyszewa. Jest to bardzo mocny argument, za wyborem punktów startowych Czebyszewa.

Punkty startowe równoodległe

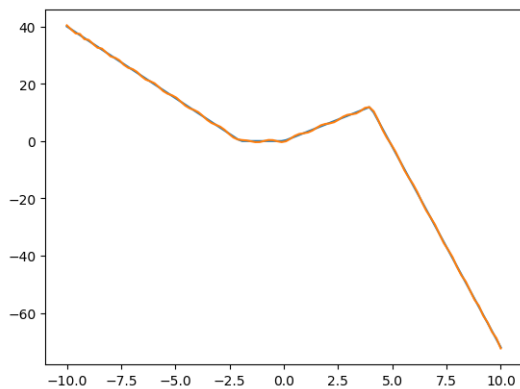


Rysunek 5: Aproxymacja funkcji kawałkami liniowej w przedziale $[-10, 10]$ dla punktów startowych równoodległych.

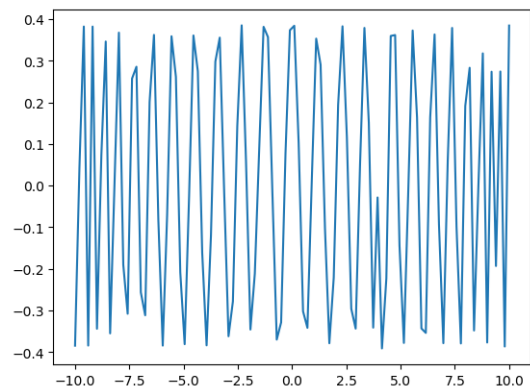


Rysunek 6: Błąd aproxymacji funkcji kawałkami liniowej w przedziale $[-10, 10]$ dla punktów startowych równoodległych.

Punkty startowe Czebyszewa



Rysunek 7: Aproxymacja funkcji kawałkami liniowej w przedziale $[-10, 10]$ dla punktów startowych Czebyszewa.



Rysunek 8: Błąd aproxymacji funkcji kawałkami liniowej w przedziale $[-10, 10]$ dla punktów startowych Czebyszewa.

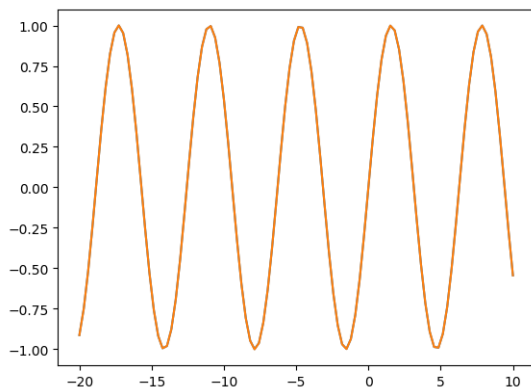
3.3 Sinus

$$f(x) = \sin(x)$$

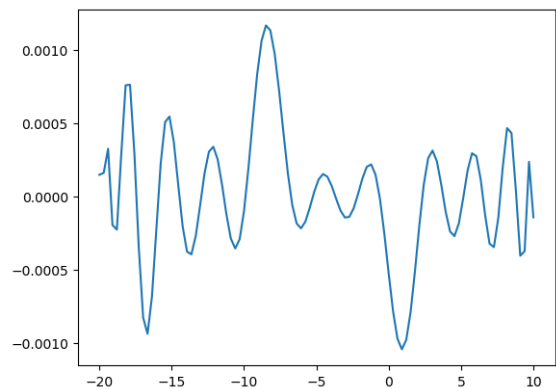
lewy kraniec przedziału	-20
prawy kraniec przedziału	10
stopień wielomianu	22
liczba iteracji algorytmu	25

Dla funkcji *sinus*, znowu możemy zaobserwować znacznie mniejszy błąd punktów startowych Czebyszewa.

Punkty startowe równoodległe

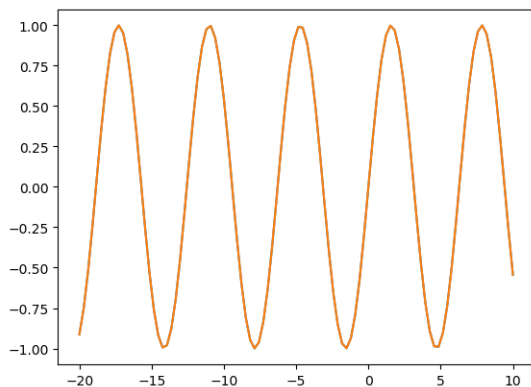


Rysunek 9: Aproxymacja funkcji *sinus* w przedziale $[-20, 10]$ dla punktów startowych równoodległych.

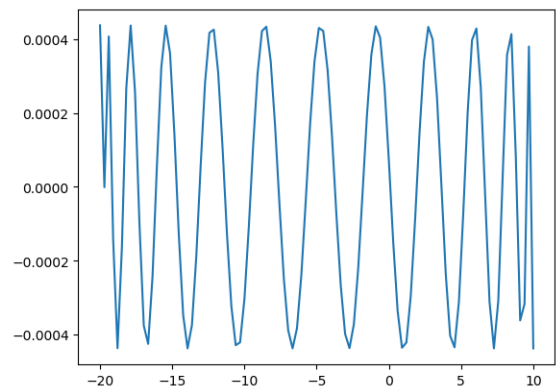


Rysunek 10: Błąd aproksymacji funkcji *sinus* w przedziale $[-20, 10]$ dla punktów startowych równoodległych.

Punkty startowe Czebyszewa



Rysunek 11: Aproxymacja funkcji *sinus* w przedziale $[-20, 10]$ dla punktów startowych Czebyszewa.



Rysunek 12: Błąd aproksymacji funkcji *sinus* w przedziale $[-20, 10]$ dla punktów startowych Czebyszewa.

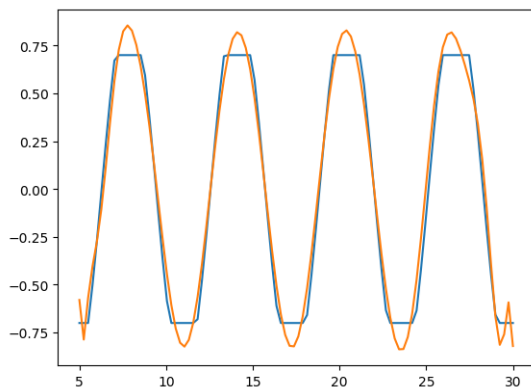
3.4 Przesterowany sinus

$$f(x) = \text{overdrive}(x) = \begin{cases} \min(\sin(x), 0.7), & \text{gdy } \sin(x) \geq 0 \\ \max(\sin(x), -0.7), & \text{gdy } \sin(x) < 0 \end{cases}$$

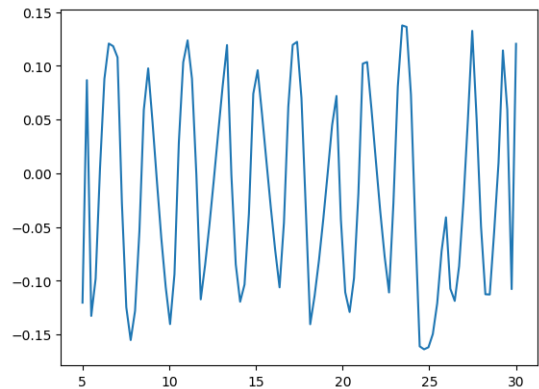
lewy kraniec przedziału	5
prawy kraniec przedziału	30
stopień wielomianu	22
liczba iteracji algorytmu	70

W przypadku tego eksperymentu, punkty startowe Czebyszewa, znowu charakteryzowały się mniejszym błędem, jednak różnica pomiędzy błędami obydwu przybliżeń była stosunkowo niewielka.

Punkty startowe równoodległe

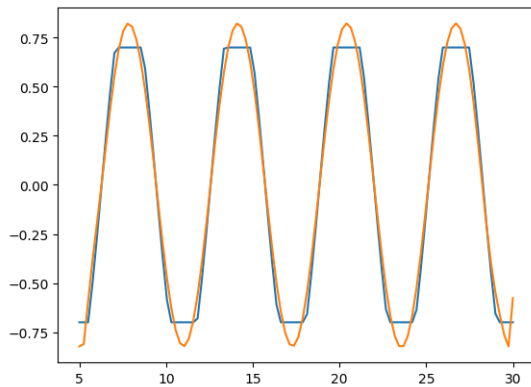


Rysunek 13: Aproksymacja funkcji *overdrive* w przedziale $[5, 30]$ dla punktów startowych równoodległych.

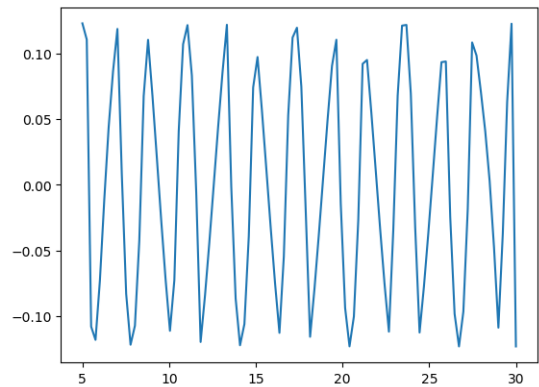


Rysunek 14: Błąd aproksymacji funkcji *overdrive* w przedziale $[5, 30]$ dla punktów startowych równoodległych.

Punkty startowe Czebyszewa



Rysunek 15: Aproksymacja funkcji *overdrive* w przedziale $[5, 30]$ dla punktów startowych Czebyszewa.



Rysunek 16: Błąd aproksymacji funkcji *overdrive* w przedziale $[5, 30]$ dla punktów startowych Czebyszewa.

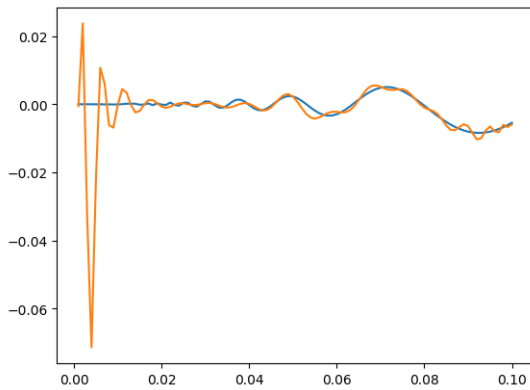
3.5 Rosnąca oscylacja

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

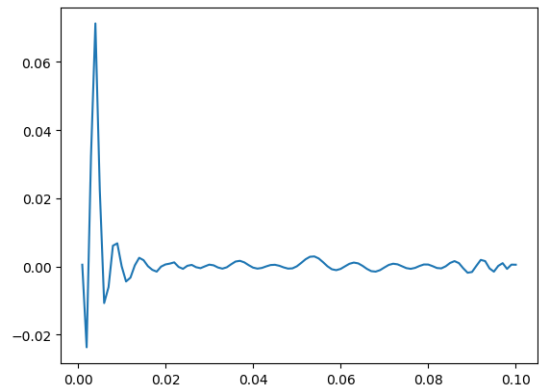
lewy kraniec przedziału	0.001
prawy kraniec przedziału	0.1
stopień wielomianu	33
liczba iteracji algorytmu	59

W przypadku funkcji $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, znowu możemy zauważyć ogromny błąd interpolacji dla punktów startowych równoodległych oraz dobre dopasowanie wielomianu uzyskanego dla punktów startowych Czebyszewa. Co jest kolejnym mocnym argumentem, za wykorzystaniem ekstremów wielomianu Czebyszewa jako punktów startowych.

Punkty startowe równoodległe

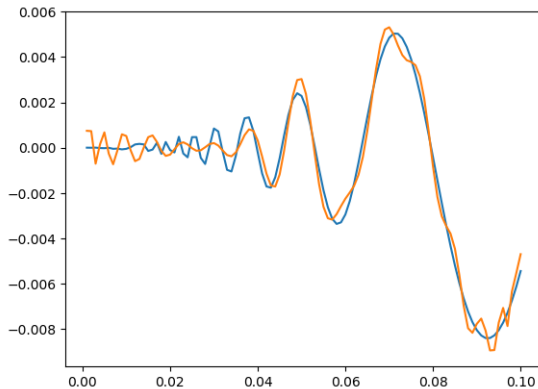


Rysunek 17: Aproxymacja funkcji $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ w przedziale $[0.001, 0.1]$ dla punktów startowych równoodległych.

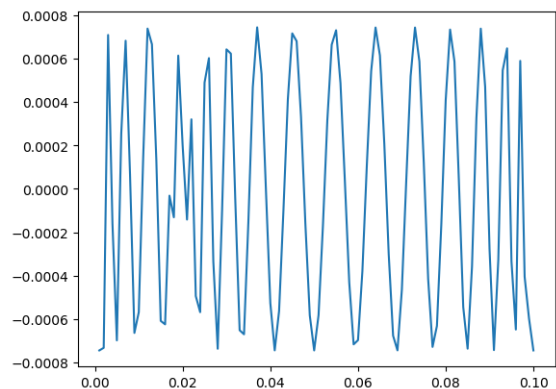


Rysunek 18: Błąd aproksymacji funkcji $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ w przedziale $[0.001, 0.1]$ dla punktów startowych równoodległych.

Punkty startowe Czebyszewa



Rysunek 19: Aproxymacja funkcji $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ w przedziale $[0.001, 0.1]$ dla punktów startowych Czebyszewa.



Rysunek 20: Błąd aproksymacji funkcji $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ w przedziale $[0.001, 0.1]$ dla punktów startowych Czebyszewa.

3.6 Analiza błędu aproksymacji w kolejnych krokach algorytmu Remeza

1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$

Wykresy można zobaczyć w Jupyterze.

Analizując błędy w kolejnych krokach algorytmu, w przypadku obydwu testowanych funkcji, możemy stwierdzić, że punkty startowe Czebyszewa zapewniają szybszą zbieżność algorytmu Remeza. Warto zauważyć, że w przypadku funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ już dla startowego zbioru punktów Czebyszewa, wykres błędu jest bardzo bliski posiadania alternansu.

4 Związek ze stałą Lebesgue'a

Wielomian optymalny aproksymacji jednostajnej pełni ważną rolę w problemie interpolacji Lagrange'a. Rozważmy stałą Lebesgue'a daną wzorem:

$$K_n = \max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)|$$

6

Stanowi ona górne ograniczenie błędu względnego interpolacji (względem normy nieskończoność wielomianu optymalnego aproksymacji jednostajnej). Niech $p^* \in \Pi_n$ będzie wielomianem optymalnym w sensie normy nieskończoność, niech dane będą węzły interpolacji x_0, x_1, \dots, x_n oraz niech L_n będzie funkcją, która dla danej funkcji f , zwraca wielomian interpolujący f w punktach x_0, x_1, \dots, x_n . Wtedy:

$$\|f - L_n(f)\|_\infty = \|(f - p^*) + (p^* - L_n(f))\|_\infty \leq \|f - p^*\|_\infty + \|p^* - L_n(f)\|_\infty$$

Zauważmy, że skoro $p^* \in \Pi_n$ to $p^* = L_n(p^*)$, zatem:

$$\begin{aligned} \|p^* - L_n(f)\|_\infty &= \|L_n(p^*) - L_n(f)\|_\infty = \left\| \sum_{i=0}^n p^*(x_i) \lambda_i(x) - \sum_{i=0}^n f(x_i) \lambda_i(x) \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)(p^*(x_i) - f(x_i))| \right\|_\infty \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| (\|p^* - f\|_\infty) \right\|_\infty = \left\| (\|p^* - f\|_\infty) \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| \right\|_\infty = (\|p^* - f\|_\infty) \left\| \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| \right\|_\infty = \\ &= (\|p^* - f\|_\infty) \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| \right) = K_n \|p^* - f\|_\infty = K_n \|f - p^*\|_\infty \end{aligned}$$

Zatem podstawiając powyższy wynik do wcześniejszej nierówności otrzymujemy:

$$\|f - p^*\|_\infty + \|p^* - L_n(f)\|_\infty \leq \|f - p^*\|_\infty + K_n \|f - p^*\|_\infty = (1 + K_n) \|f - p^*\|_\infty$$

Zatem ostatecznie otrzymujemy:

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + K_n) \|f - p^*\|_\infty$$

Korzystając ze stałej Lebesgue'a możemy ocenić, o maksymalnie jaki czynnik, interpolacja w danych n węzłach będzie gorsza od wielomianu optymalnego $p^* \in \Pi_n$ aproksymacji jednostajnej.

5 Wnioski

Wykonane doświadczenie pokazują, że wybór punktów startowych Czebyszewa, znacznie przyspiesza zbieżność algorytmu Remeza do wielomianu optymalnego aproksymacji jednostajnej. Mimo to, algorytm Remeza ma bardzo ograniczone zastosowanie praktyczne, ze względu na dużą złożoność obliczeniową i trudną do oceny szybkość zbieżności.

Jeżeli rozważymy wartości stałej Lebesgue'a dla węzłów interpolacji będących zerami wielomianami Czebyszewa (tabela poniżej), to możemy się zastanowić nad opłacalnością wykorzystania aproksymacji jednostajnej, ponieważ stosując interpolację w tych węzłach otrzymamy niewiele większy błąd niż przy aproksymacji, znacznie mniejszym kosztem obliczeń.

Liczba węzłów	Wartości stałej Lebesgue'a dla węzłów będących zerami wielomianu Czebyszewa
6	2.1043976826464865
11	2.489430376881975
16	2.7277779364183505
21	2.9008249044468988
31	3.148712373665145