

Analiza Numeryczna M - Pracownia 2

Konrad Werbliński - 291878

17 grudnia 2017

1 Wstęp

Interpolując funkcję zależy nam, aby otrzymany w wyniku wielomian był możliwie bliski wejściowej funkcji. Kluczowym czynnikiem do zminimalizowania błędu interpolacji jest odpowiedni wybór węzłów. W moim zadaniu na pracownię, zajmowałem się wyznaczeniem wskaźnika uwarunkowania zadania obliczania wielomianu interpolacyjnego, dla różnych węzłów interpolacji oraz porównanie tych wyników z błędem interpolacji w tych węzłach dla przykładowych funkcji.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a $L_n \in \Pi_n$ jest dany wzorem:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \lambda_i(x)$$

gdzie

$$\lambda_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Niech:

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)|$$

jest to tak zwana funkcja Lebesgue'a, wtedy:

$$K_n := \max_{-1 \leq x \leq 1} \sigma(x) = \max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)|$$

to tak zwana stała Lebesgue'a. Ważną własnością stałej Lebesgue'a jest fakt, że ogranicza ona błąd względny interpolacji Lagrange'a. Niech $p^* \in \Pi_n$ będzie wielomianem optymalnym w sensie normy nieskończoność, niech dane będą węzły interpolacji x_0, x_1, \dots, x_n oraz niech L_n będzie funkcją, która dla danej funkcji f , zwraca wielomian interpolujący f w punktach x_0, x_1, \dots, x_n . Wtedy:

$$\|f - L_n(f)\|_\infty = \|(f - p^*) + (p^* - L_n(f))\|_\infty \leq \|f - p^*\|_\infty + \|p^* - L_n(f)\|_\infty$$

Zauważmy, że skoro $p^* \in \Pi_n$ to $p^* = L_n(p^*)$, zatem:

$$\begin{aligned} \|p^* - L_n(f)\|_\infty &= \|L_n(p^*) - L_n(f)\|_\infty = \left\| \sum_{i=0}^n p^*(x_i) \lambda_i(x) - \sum_{i=0}^n f(x_i) \lambda_i(x) \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| (p^*(x_i) - f(x_i)) \right\|_\infty \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| (\|p^* - f\|_\infty) \right\|_\infty = \left\| (\|p^* - f\|_\infty) \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| \right\|_\infty = (\|p^* - f\|_\infty) \left\| \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| \right\|_\infty = \\ &= (\|p^* - f\|_\infty) \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| \right) = K_n \|p^* - f\|_\infty = K_n \|f - p^*\|_\infty \end{aligned}$$

Zatem podstawiając powyższy wynik do wcześniejszej nierówności otrzymujemy:

$$\|f - p^*\|_\infty + \|p^* - L_n(f)\|_\infty \leq \|f - p^*\|_\infty + K_n \|f - p^*\|_\infty = (1 + K_n) \|f - p^*\|_\infty$$

Zatem ostatecznie otrzymujemy:

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + K_n)\|f - p^*\|_\infty$$

Stała Lebesgue'a może być również traktowana jako wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wielomianu interpolacyjnego. Niech $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ będzie wektorem wartości w węzłach interpolacji $x_0, x_1, \dots, x_n \in [-1, 1]$ oraz niech $\hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \dots, \hat{v}_n)$ będzie wektorem zaburzonych wartości w tych węzłach. Niech $p \in \Pi_n$ oraz $\hat{p} \in \Pi_n$ będą wielomianami interpolacyjnymi Lagrange'a, takimi że $p(x_i) = v_i$ oraz $\hat{p}(x_i) = \hat{v}_i$. Wtedy:

$$\frac{\|p - \hat{p}\|_\infty^{[-1,1]}}{\|p\|_\infty^{[-1,1]}} = \frac{\|\sum_{i=0}^n v_i \lambda_i(x) - \sum_{i=0}^n \hat{v}_i \lambda_i(x)\|_\infty^{[-1,1]}}{\|p\|_\infty^{[-1,1]}} = \frac{\|\sum_{i=0}^n (v_i - \hat{v}_i) \lambda_i(x)\|_\infty^{[-1,1]}}{\|p\|_\infty^{[-1,1]}}$$

Zauważmy, że:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} p(x) \geq \max(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \iff \|p\|_\infty^{[-1,1]} \geq \|v\|_\infty$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \frac{\|\sum_{i=0}^n (v_i - \hat{v}_i) \lambda_i(x)\|_\infty^{[-1,1]}}{\|p\|_\infty^{[-1,1]}} &\leq \frac{\|\sum_{i=0}^n |v_i - \hat{v}_i| \lambda_i(x)\|_\infty^{[-1,1]}}{\|v\|_\infty} \leq \frac{\|\sum_{i=0}^n (\|v - \hat{v}\|_\infty) |\lambda_i(x)|\|_\infty^{[-1,1]}}{\|v\|_\infty} = \\ &= \frac{(\|v - \hat{v}\|_\infty) \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)|\|_\infty^{[-1,1]}}{\|v\|_\infty} = \frac{(\|v - \hat{v}\|_\infty) \|\sum_{i=0}^n \lambda_i(x)\|_\infty^{[-1,1]}}{\|v\|_\infty} = \\ &= \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)| \right) \frac{\|v - \hat{v}\|_\infty}{\|v\|_\infty} = K_n \frac{\|v - \hat{v}\|_\infty}{\|v\|_\infty} \end{aligned}$$

Czyli ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{\|p - \hat{p}\|_\infty^{[-1,1]}}{\|p\|_\infty^{[-1,1]}} \leq K_n \frac{\|v - \hat{v}\|_\infty}{\|v\|_\infty}$$

Zatem wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wielomianu interpolacyjnego dany jest wzorem:

$$K_n := \max_{-1 \leq x \leq 1} \sum_{i=0}^n |\lambda_i(x)|$$

Zatem jak widać z dwóch powyższych własności, kluczowe przy wyborze węzłów interpolacji jest zminimalizowanie stałej Lebesgue'a.

3 Wykonane doświadczenia

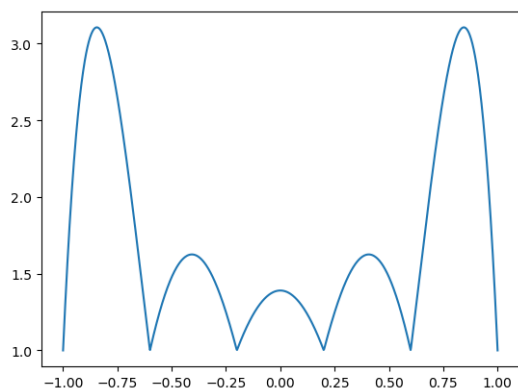
W przeprowadzonych doświadczeniach zbadałem trzy rodzaje węzłów interpolacji:

1. Węzły równoodległe
2. Węzły będące zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju
3. Węzły wybrane losowo

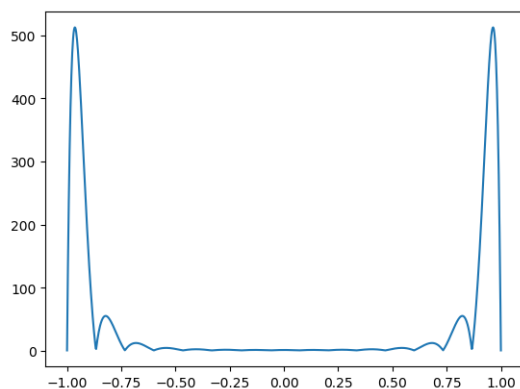
3.1 Wyznaczenie wartości stałej Lebesgue'a dla poszczególnych węzłów

3.1.1 Węzły równoodległe

Liczba węzłów	Wartości stałej Lebesgue'a dla węzłów równoodległych
6	3.106262343309961
11	29.89775881601561
16	512.3496345042895
21	10978.795044663142
31	6.592136042064592e6



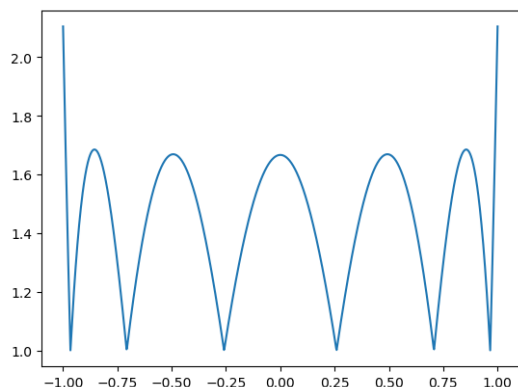
Rysunek 1: Funkcja Lebesgue'a w przedziale $[-1, 1]$ dla 6 węzłów równoodległych.



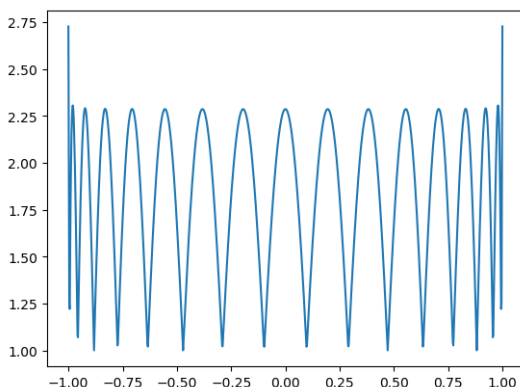
Rysunek 2: Funkcja Lebesgue'a w przedziale $[-1, 1]$ dla 16 węzłów równoodległych.

3.1.2 Węzły będące zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju

Liczba węzłów	Wartości stałej Lebesgue'a dla węzłów będących zerami wielomianu Czebyszewa
6	2.1043976826464865
11	2.489430376881975
16	2.7277779364183505
21	2.9008249044468988
31	3.148712373665145



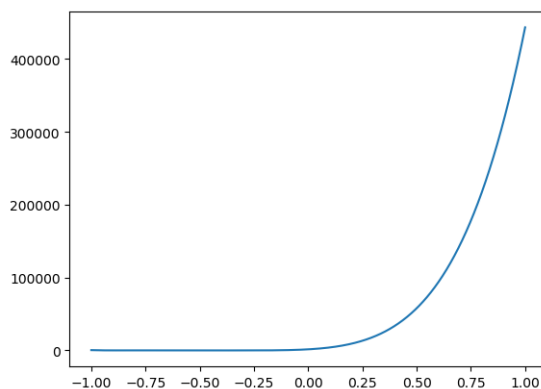
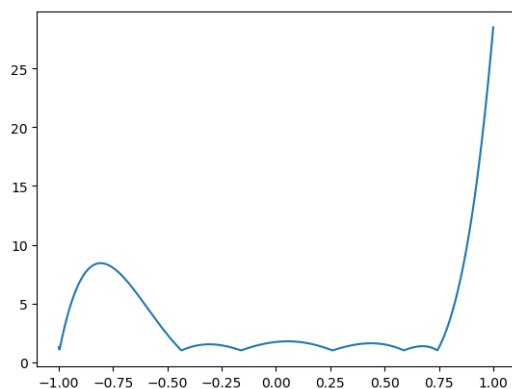
Rysunek 3: Funkcja Lebesgue'a w przedziale $[-1, 1]$ dla 6 węzłów będących zerami wielomianu Czebyszewa.



Rysunek 4: Funkcja Lebesgue'a w przedziale $[-1, 1]$ dla 16 węzłów będących zerami wielomianu Czebyszewa.

3.1.3 Węzły wybrane losowo

Ze względu na losowość węzłów, wartość stałej Lebesgue'a dla dwóch różnych zestawów n węzłów może znacznie się różnić. Poniższe wykresy przedstawiają funkcję Lebesgue'a w przedziale $[-1, 1]$ dla dwóch różnych zestawów 6 losowych węzłów:



Z tego powodu wartości stałej Lebesgue'a w poniższej tabeli zostały obliczone jako średnia arytmetyczna z 20 pomiarów.

Liczba węzłów	Wartości stałej Lebesgue'a dla węzłów wybranych losowo
6	19146.193586569167
11	2.9664228612345233e9
16	9.768266018584996e11
21	1.2693437540085867e14
31	4.0023468715559076e18

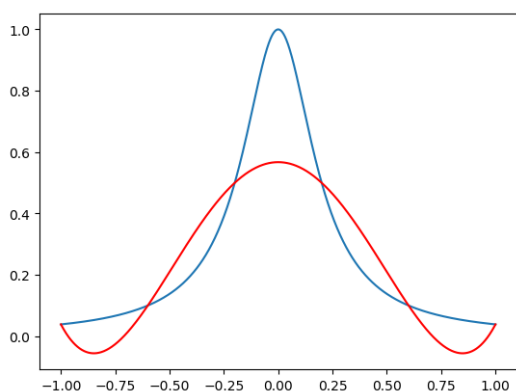
3.2 Badanie dokładności przybliżenia funkcji dla poszczególnych węzłów

Przeprowadziłem testy dokładności dla 4 przykładowych funkcji:

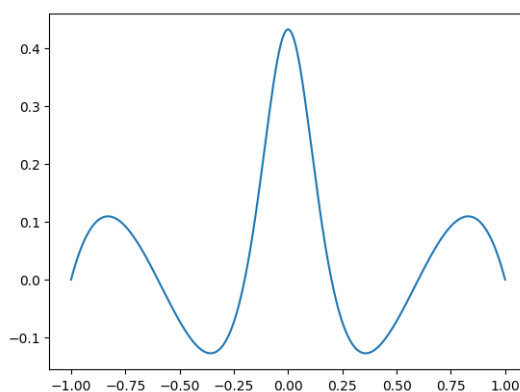
1. Funkcja Rungego: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$
2. Arcus tangens
3. $f(x) = \max(0, 1 - 4x)$
4. $f(x) = -|x| + 1$

3.2.1 Funkcja Rungego

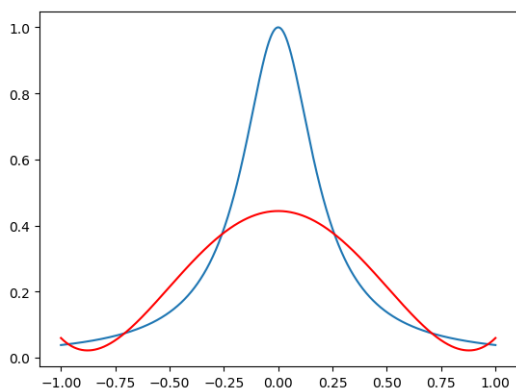
Przjrzyjmy się dokładnie interpolacji funkcji Rungego w 6 oraz 16 węzłach. Możemy zaobserwować, że zwiększenie ilości węzłów Czebyszewa zmniejsza błąd interpolacji. W przypadku węzłów równoodległych oraz losowych możemy zaobserwować znaczne zwiększenie błędu przy krańcach przedziału $[-1, 1]$ (bardzo znaczne dla węzłów losowych).



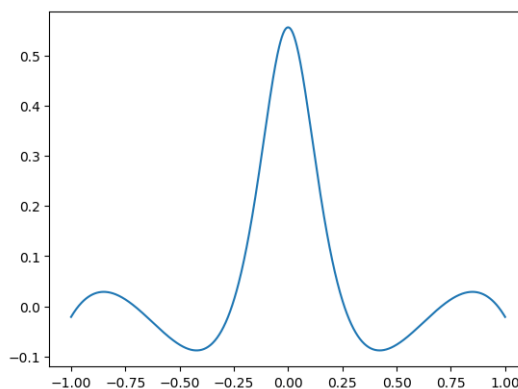
Rysunek 5: Funkcja Rungego (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 6 równoodległych węzłach (czerwony).



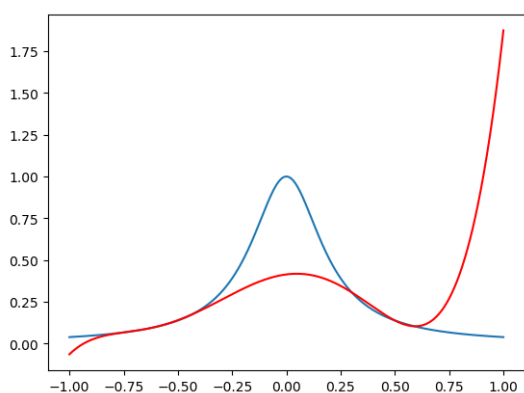
Rysunek 6: Wykres błędów $f - L_n$ interpolacji Lagrange'a funkcji Rungego w 6 równoodległych węzłach.



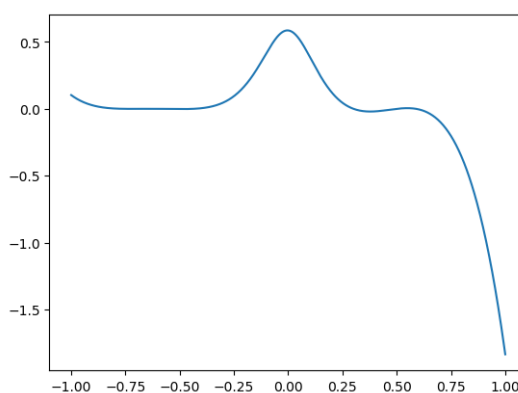
Rysunek 7: Funkcja Rungego (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 6 węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa (czerwony).



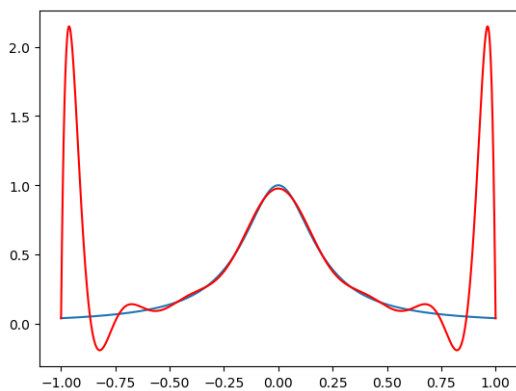
Rysunek 8: Wykres błędu $f - L_n$ interpolacji Lagrange'a funkcji Rungego w 6 węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa.



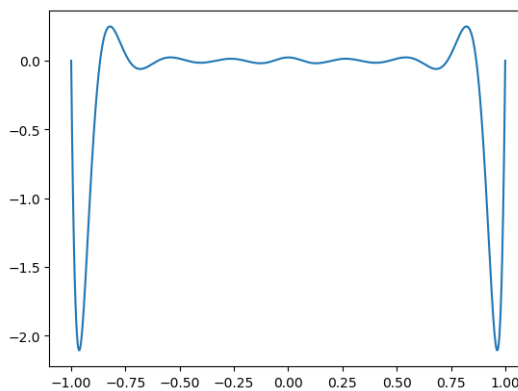
Rysunek 9: Funkcja Rungego (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 6 losowych węzłach (czerwony).



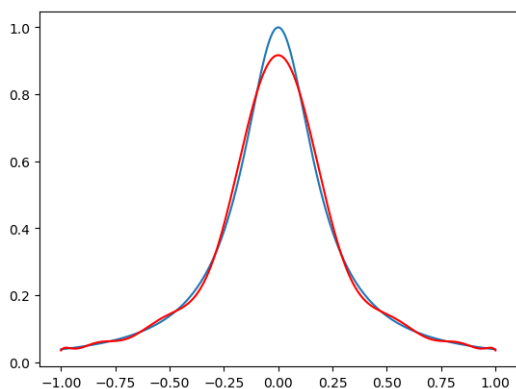
Rysunek 10: Wykres błędu $f - L_n$ interpolacji Lagrange'a funkcji Rungego w 6 wybranych losowo węzłach.



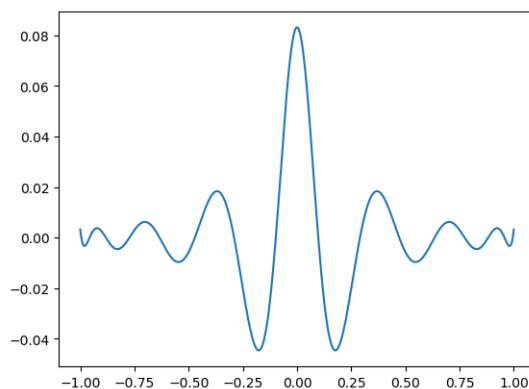
Rysunek 11: Funkcja Rungego (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 równoodległych węzłach (czerwony).



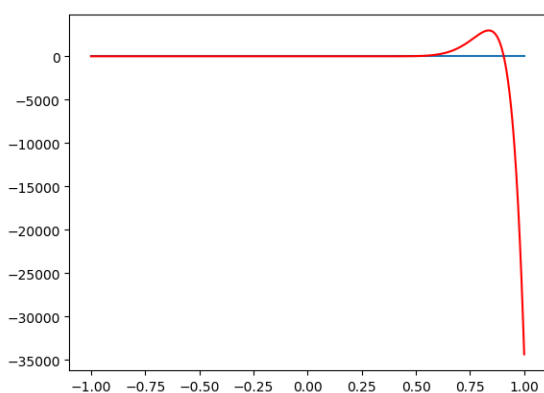
Rysunek 12: Wykres błędu $f - L_n$ interpolacji Lagrange'a funkcji Rungego w 16 równoodległych węzłach.



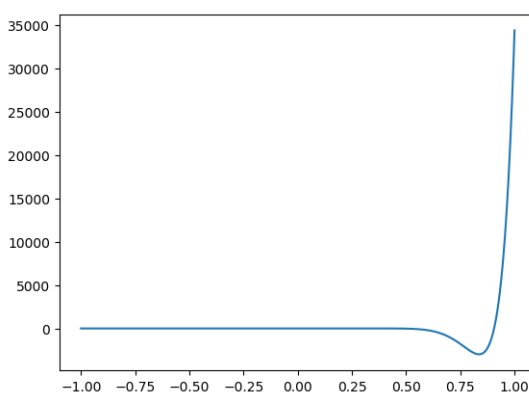
Rysunek 13: Funkcja Rungego (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa (czerwony).



Rysunek 14: Wykres błędu $f - L_n$ interpolacji Lagrange'a funkcji Rungego w 16 węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa.



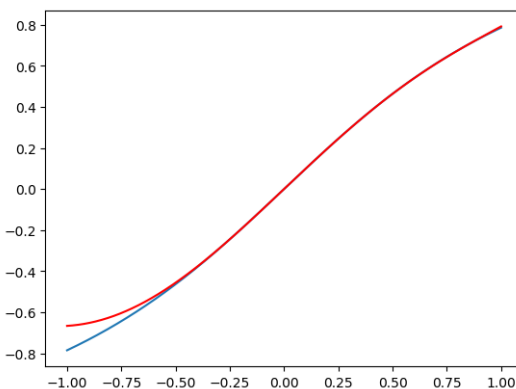
Rysunek 15: Funkcja Rungego (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 losowych węzłach (czerwony).



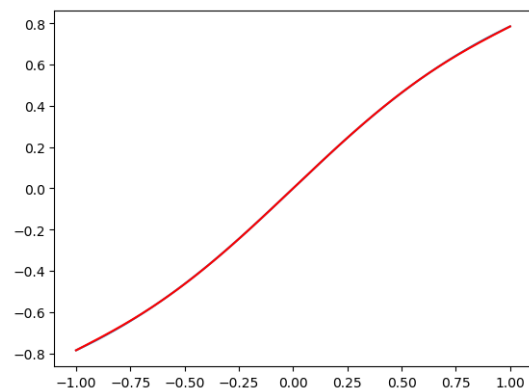
Rysunek 16: Wykres błędu $f - L_n$ interpolacji Lagrange'a funkcji Rungego w 16 wybranych losowo węzłach.

3.2.2 Arcus tangens

Dla funkcji arcus tangens, węzły równoodległe oraz węzły będące zerami wielomianu Czebyszewa dobrze przybliżały funkcję, chociaż warto zaznaczyć, że węzły Czebyszewa charakteryzowały się niższym błędem przybliżenia. Dla losowo wybranych węzłów zdarzają się przypadki, gdy błąd jest znacznie większy niż w przypadku węzłów Czebyszewa bądź równoodległych. Poniższe dwa wykresy ilustrują ten problem:



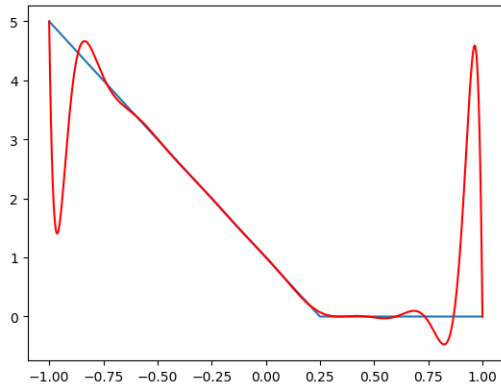
Rysunek 17: Arcus tangens (niebieski) oraz wielomian interpolujący go w 6 losowych węzłach (czerwony).



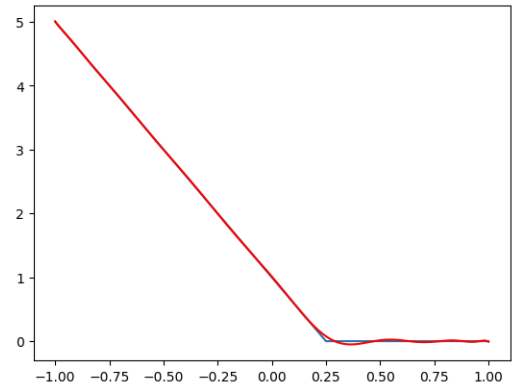
Rysunek 18: Arcus tangens (niebieski) oraz wielomian interpolujący go w 6 równoodległych węzłach (czerwony).

3.2.3 $f(x) = \max(0, 1 - 4x)$ oraz $f(x) = -|x| + 1$

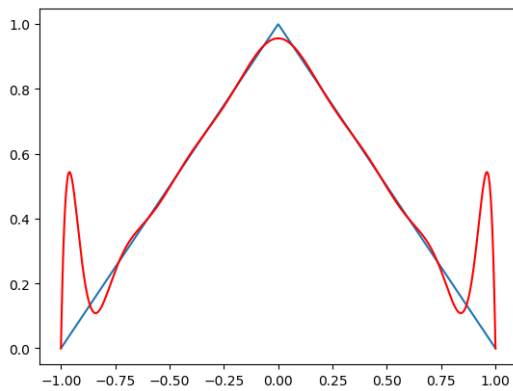
Dla obydwu funkcji w przypadku 6 węzłów interpolacja w węzłach równoodległych oraz w węzłach Czebyszewa charakteryzowała się podobnym błędem. W przypadku wykorzystania 16 węzłów równoodległych możemy zaobserwować znaczny błąd przy obydwu krańcach przedziału $[-1, 1]$, zjawisko to nie występuje dla węzłów będących zerami wielomianu Czebyszewa:



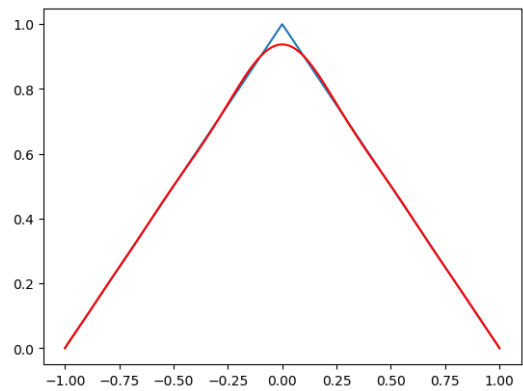
Rysunek 19: $f(x) = \max(0, 1 - 4x)$ (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 równoodległych węzłach (czerwony).



Rysunek 20: $f(x) = \max(0, 1 - 4x)$ (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa (czerwony).

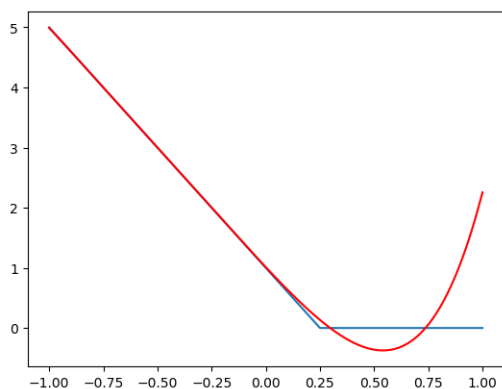


Rysunek 21: $f(x) = -|x| + 1$ (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 równoodległych węzłach (czerwony).

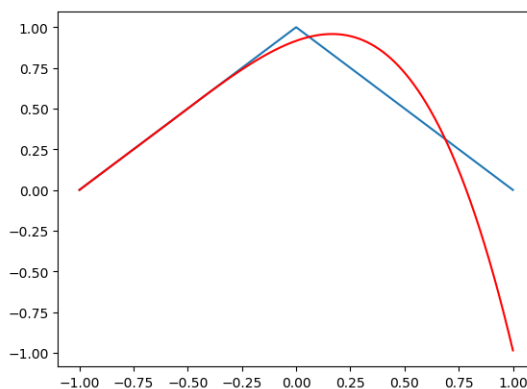


Rysunek 22: $f(x) = -|x| + 1$ (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa (czerwony).

Losowe węzły charakteryzowały się największym błędem interpolacji. Już dla 6 węzłów możemy zaobserwować znaczny błąd przy jednym z krańców przedziału $[-1, 1]$:

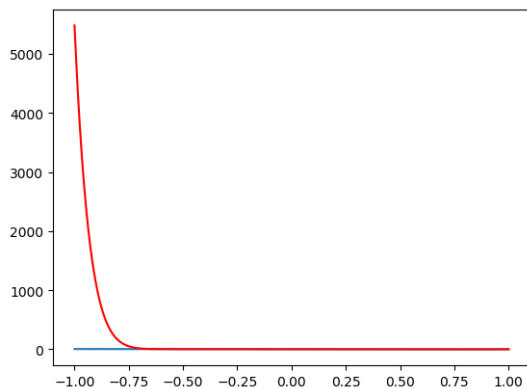


Rysunek 23: $f(x) = \max(0, 1-4x)$ (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 6 losowych węzłach (czerwony).

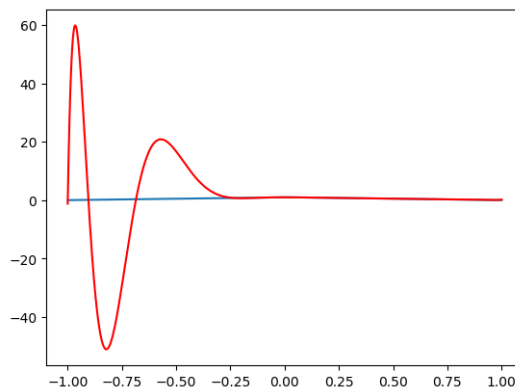


Rysunek 24: $f(x) = -|x| + 1$ (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 6 losowych węzłach (czerwony).

W przypadku wykorzystania 16 losowych węzłów, możemy zauważyć ogromny błąd interpolacji:



Rysunek 25: $f(x) = \max(0, 1-4x)$ (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 losowych węzłach (czerwony).



Rysunek 26: $f(x) = -|x| + 1$ (niebieski) oraz wielomian interpolujący ją w 16 losowych węzłach (czerwony).

4 Wnioski

W przeprowadzonych doświadczeniach możemy zauważyć korelację wartości stałej Lebesgue'a oraz maksymalnego błędu interpolacji w danych węzłach. Zauważmy, że skoro stała Lebesgue'a jest górnym oszacowaniem błędu względnego, to jej wysoka wartość nie oznacza, że dla każdej interpolowanej funkcji w tych węzłach otrzymamy duży błąd. Na przykład wartości stałej Lebesgue'a dla 6 i 16 węzłów równoodległych wynoszą odpowiednio 3.106262343309961 oraz 512.3496345042895. Interpolując funkcję *arcus tangens* w tych węzłach otrzymujemy znacznie mniejszy błąd dla 16 węzłów, pomimo wzrostu wartości stałej Lebesgue'a o dwa rzędy wielkości.

Z wyników przeprowadzonych doświadczeń można wywnioskować, że z trzech rozważanych rodzajów węzłów interpolacji najlepsze są węzły będące zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju. Dla węzłów równoodległych oraz losowych istnieje ryzyko otrzymania dużej wartości błędu przy krańcach przedziału interpolacji. W szczególności, ze względu na możliwe ogromne błędy interpolacji (na przykład funkcja Rungego interpolowana w 16 węzłach oraz funkcje $f(x) = \max(0, 1-4x)$ oraz $f(x) = -|x| + 1$ interpolowane w 16 węzłach), należy unikać wykorzystywania węzłów losowych.

Na podstawie pokazanych w sekcji 2 własności stałej Lebesgue'a oraz przeprowadzonych doświadczeń możemy wywnioskować, że stała Lebesgue'a może być dobrym wyznacznikiem „jakości” węzłów interpolacji. Na przykład posiadając zbiór wyników z jakiegoś doświadczenia fizycznego w postaci pomiaru jakiejś wielkości fizycznej w kilku punktach czasu, możemy stwierdzić czy interpolacja jest sensowną aproksymacją funkcji opisującej to zjawisko fizyczne. Stała Lebesgue'a daje nam w tym przypadku dwie bardzo cenne informacje. Po pierwsze jako wskaźnik uwarunkowania zadania wyznaczania wielomianu interpolacyjnego, mówi nam o podatności wyniku na zaburzenia wartości w węzłach interpolacji (czyli w tym przypadku błędy pomiaru naszej wielkości fizycznej). Po drugie ogranicza błąd względny interpolacji, czyli pokazuje nam o maksymalnie jaki

czynnik, interpolacja w danych n węzłach będzie gorsza od wielomianu optymalnego $w_n \in \Pi_n$ aproksymacji jednostajnej.

Zatem możemy wnioskować, że zminimalizowanie stałej Lebesgue'a jest kluczowym aspektem przy wyborze węzłów interpolacji, jeżeli mamy możliwość wyboru węzłów, oraz, że stała Lebesgue'a stanowi dobre kryterium oceny narzuconych nam odgórnie węzłów.