Dualność dla programowania liniowego:

Problem prymalny	Problem dualny
max $\quad f = \mathbf{cx}$	min $\quad g = \mathbf{by}$
s.t.: $\quad X = \{\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$	s.t.: $\quad Y = \{\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$
Funkcja celu (max $\mathbf{cx}$)	Wektor ograniczeń $\mathbf{c}$
Wektor ograniczeń $\mathbf{b}$	Funkcja celu (min $\mathbf{by}$)
$\mathbf{A}$ — macierz ograniczeń	$\mathbf{A}^T$ — macierz ograniczeń
Nieograniczony	Sprzeczny
Sprzeczny	Nieograniczny lub sprzeczny

Słaba dualność: $\forall_{\mathbf{x}\in X}\, \forall_{\mathbf{y}\in Y}\, \mathbf{cx} \leq \mathbf{by}$

Silna dualność (zasada dualności): $f^{\text{opt}} = g^{\text{opt}}$

Ograniczenia (dla problemu prymalnego, który nie jest ani sprzeczny ani nieograniczony):

∞

$g(\mathbf{y})$: dla dowolnego $\mathbf{y} \in Y$ stanowi ograniczenie górne wartości optymalnej f

$f^{\text{opt}} = g^{\text{opt}}$: $\begin{cases} \text{wartość optymalna } g \text{ dla każdego typu dualizacji jest ograniczeniem górnym wartości optymalnej } f; \\ \text{dla programowania liniowego odstęp dualności wynosi } 0 \end{cases}$

$f(\mathbf{x})$: dla dowolnego $\mathbf{x} \in X$ stanowi ograniczenie dolne wartości optymalnej f

$-\infty$

Dualność oparta na relaksacji Lagrange'a:

Problem prymalny: max $\; z = F(\mathbf{x})$, $h_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \ldots, k, g_j(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1, \ldots, m, \mathbf{x} \in X$ (X może też być zadane za pomocą równości i nierówności).

Funkcja Lagrange'a: $L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = F(\mathbf{x}) + \sum_i \mu_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_j \lambda_j g_j(\mathbf{x})$

Dualizowane ograniczenia: równościowe $h_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \ldots, k$ oraz nierównościowe $g_j(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1, \ldots, m$

Zmienne dualne (określone tak, żeby zdefiniować poprawną relaksację): $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}, \lambda_j \geq 0$

Relaksacja Lagrange'a: $\max L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, $\mathbf{x} \in X, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$

Funkcja dualna: $W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$

Dziedzina fukcji dualnej: $\mathrm{Dom}(W) = \{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \,|\, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+, W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) < \infty\}$

Problem dualny (dualizacja relaksacji Lagrange'a): $\min W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathrm{Dom}(W)$

Ograniczenia:

∞

$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$: dla dowolnych $\mathbf{x} \in X, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$ stanowi ograniczenie górne wartości optymalnej z

$W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$: dla dowolnych $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathrm{Dom}(W)$ stanowi ograniczenie górne wartości optymalnej z

$z^{\text{opt}}_{\text{rel. liniowa}}$: jeśli $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ (np. ILP), ograniczenie z dualizacji jest dokładniejsze (jak na rys.), jeśli jest wyliczone dla $\mathbf{x} \in \mathrm{conv}(X)$

W^{opt}: $\begin{cases} \text{wartość optymalna } W \text{ jest ograniczeniem górnym wartości optymalnej } z; \\ \text{gdy odstęp dualności jest zerowy, to } (\boldsymbol{\mu}^{\text{opt}}, \boldsymbol{\lambda}^{\text{opt}}) \text{ nazywamy mnożnikami Lagrange'a}; \\ \text{dla problemu wypukłego odstęp dualności wynosi } 0 \end{cases}$

odstęp dualności

z^{opt}

$-\infty$

Dla problemu wypukłego:

- X: zbiór wypukły,
- h_i: funkcje liniowe,
- g_j: funkcje wypukłe na X,
- min $\; F$ (F: funkcja wypukła na X) lub max $\; F$ ($-F$: funkcja wypukła na X).

właściwości:

- zerowy odstęp dualności,
- zachodzi twierdzenie o odstępach komplementarnych,
- istnieje punkt siodłowy: $W(\boldsymbol{\lambda}^{\text{opt}}) = L(\mathbf{x}^{\text{opt}}; \boldsymbol{\lambda}^{\text{opt}})$.