Vorlesungsskript

Elektrodynamik

Inhaltsverzeichnis

1. Worum geht es in der Elektrodynamik?

In der klassischen Mechanik:

fundamentale Konzepte: Länge, Zeit, Masse

$\longrightarrow$ Trägheit + Gravitation

Newtonsche Bew. gl.: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$ wobei $\underbrace{\vec{r}}_{\text{Ort}} \underbrace{(t)}_{\text{Zeit}} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

(Abbildung eines Massepunktes in 2D)

Lagrange-Funktion:

$\longrightarrow$ Wirkung

$$S = \int dt L\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)$$

N Teilchen $\vec{r}_i(t), i = 1, ..., N$

$$L\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2 - V(\vec{r}_i)$$

$$V(\vec{r}_i) = -\frac{G}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$

Neue fundamentale Größe:

- elektrische Ladung q (positiv oder negativ)
- gequantelt mit Elementarladung e

$$\begin{aligned} & q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z} \\ & q > 0 \ \text{(Proton, Positron, } n = +1) \\ & q < 0 \ \text{(Elektron, } n = -1) \end{aligned}$$

Coulomb-Gesetz: Kraft zwischen elektrisch geladenen Teilchen

$$\vec{F}_1 = k \cdot q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} = -\vec{F}_2$$

(Abbildung Coloumbgesetz zwischen zwei Teilchen)

$q_1 q_2 > 0$ (Ladungen haben dasselbe Vorzeichen) $\Longrightarrow$ abstoßend

$q_1 q_2 < 0$ (Ladungen haben verschiedene Vorzeichen) $\Longrightarrow$ anziehend

Was ist k? (Einheitensysteme)

1) Gausssche System: $k = 1$

2) SI System: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

3) Heavyside-Lorentz-System: $k = \frac{1}{4\pi}$

Umrechnen: SI $\to$ Gauss: $e_0 = \frac{1}{4\pi}$, SI $\to$ Heavyside: $\varepsilon_0 = 1$

Zusätzliche Realität:

magenetische Felder, elektromagnetische Wellen

$$\longrightarrow \textbf{Feldtheorie} \text{ (Maxwell's Theorie, erstes Beispiel)}$$

$\vec{x}_i(t), \quad i = 1, ..., N \quad$ diskrete Zahl an freiheitsgrade $= 3N$

$\longrightarrow$ Elektrodynamik $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x})$

Betrachte ein Kraftfeld, erzeugt durch N Punktladungen $q_i, 1 = 1, ..., N$ wirkend auf eine Testladung $|q| \ll |q_i|$

$$\Longrightarrow \vec{F} = q\vec{E}(\vec{x}), \quad \underbrace{\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}}_{\text{das Elektrische Feld}}$$

eine fixierte Ladung an $\vec{x}_1$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|^3}$$

(Abbildung einer Ladung als Punktteilchen)

Diese (naive) Zeitabhängigkeit ist empirisch falsch und im Widerspruch zur (speziellen) Relativitätstheorie (SR)

$\longrightarrow$ Maxwell's Theorie, kompatibel mit SR

1.1. Plan der Vorlesung

1. Wiederholung
   - Euklidische Geometrie im $\mathbb{R}^3$, Vektoranalysis (Differentialformen)
2. Spezielle Relativitätstheorie
   - (Psuedo-) Euklidische Geometrie des Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$
3. Maxwell's Theorie
4. Anwendungen
   1. Elektrostatik
   2. Magnetostatik
   3. Elektro- und Magnetostatik in Materie

2. Wiederholung: Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

Der euklidische $\mathbb{R}^3$: $\vec{x} = \vec{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x^i), \quad i = 1,2,3$

<u>Metrik:</u>

$$\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_1^i - x_2^i)(x_1^i - x_2^i)$$

Geometrie invariant unter Rotationen

$$x^i \longrightarrow x'^i = \sum_{j=1}^{3} R_j^i x^j \underbrace{=}_{\text{Einstein Konvention}} R_j^i x^j$$

$$|\vec{x}|^2 = \delta_{ij} x^i x^j \quad \text{wobei } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}'|^2 &= \delta_{ij} x'^i x'^j = \delta_{ij} R_k^i x^k R_l^j x^l \\ &= \left(\delta_{ij} R_k^i R_l^j\right) x^k x^l = |\vec{x}|^2 = \delta_{kl} x^k x^l \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \delta_{ij} R_k^i R_l^j = \delta_{kl}$$

Matrix-Notation: $R = \left(R_j^i\right), \mathbb{1} = \left(\delta_{ij}\right)$

$$\begin{aligned} \delta_{kl} = R_k^i \delta_{ij} R_l^j &\Longrightarrow \mathbb{1} = R^T R \\ &\Longrightarrow \det(R) = \pm 1 \end{aligned}$$

Rotationsgruppe: $\mathrm{SO}(3) : \det(R) = +1$

—

Im $\mathbb{R}^3$ hat man das **Kreuz-Produkt**

Epsilon-Tensor / Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk} : \quad \varepsilon^{123} = -\varepsilon^{213} = \varepsilon^{231} = 1$$

total antisymmetrisch, da $\varepsilon^{112} = 0 = -\varepsilon^{112}$

$\Longrightarrow$ invariant unter Rotation / $\mathrm{SO}(3)$

$$\varepsilon^{ijk} \longrightarrow R_m^i R_n^j R_l^K \varepsilon^{mnl} \underbrace{=}_{\det(R)=1} \varepsilon^{ijk}$$

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ darf man nur folgende Objekte benutzen:

$$\delta_{ij}, \delta^{ij}, \varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}$$

Skalarprodukt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \delta_{ij} x^i y^j$

Kreuzprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, $(\vec{u} \times \vec{v})^i := \delta^{il} \varepsilon_{ljk} u^j v^k$

Skalare/Funktionen auf $\mathbb{R}^3$: $F = F(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

Vektorfeld auf RR^3: $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$

Gradient: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, Skalar $\longrightarrow$ Vektor

$$\vec{\nabla} F = \text{grad } F, \quad (\text{grad } F)^i = \delta^{ij} \partial_j F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \frac{\partial F}{\partial x^3} \right)$$

Divergenz: Vektor $\longrightarrow$ Skalar

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \nabla \cdot \vec{V} = \partial_i V^i \\ &= \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \end{aligned}$$

Rotation: Vektor $\longrightarrow$ Vektor

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} \Longrightarrow (\text{rot } V)^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j V_k$$

$$\text{Skalare} \xrightarrow{\text{grad}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{rot}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{div}} \text{Skalare}$$

Identitäten (Kettenkomplex):

$$\begin{aligned} \text{rot} \circ \text{grad} &= 0 \\ \text{div} \circ \text{rot} &= 0 \end{aligned}$$

Differentialformen im $\mathbb{R}^3$:

- 0-Formen: Skalar
- 1-Formen: "dual" zu Vektoren, $A_i(\vec{x})$

$$[\text{Im Euklidischen:} \quad V_i(\vec{x}) = \delta_{ij} V^j(\vec{x})]$$

- 2-Formen: Antisymmetrischer Tensor

$$B_{ij}(\vec{x}) = -B_{ij}(\vec{x})$$

- 3-Formen: $C_{ijk}(\vec{x}) = -C_{ikj}(\vec{x}) = \dots$ (wie Levi-Civita)

Effiziente indexfreie Notation: Basis-Elemente dx^i

- 1-Form: $A = A_i \, \mathrm{d}x^i$
- 2-Form: $B = \frac{1}{2} B_{ij} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$
- 3-Form: $C = \frac{1}{3!} C_{ijk} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$

wobei $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$

Wedge Product:

$$A \wedge B = (A_i \,\mathrm{d}x^i) \wedge \left(\frac{1}{2} B_{jk} \,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\right) = \frac{1}{2} A_i B_{jk} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \text{ (3-Form)}$$

p-Form A, q-Form B

$$\begin{gathered} \Longrightarrow A \wedge B \text{ ist } (p+q) - \text{Form} \\ A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A \text{ (gradiert Kommutativ)} \\ (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \text{ (assoziativ)} \end{gathered}$$

<u>deRham Differential:</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : \Omega^k &\to \Omega^{k+1} \\ A &\mapsto \mathrm{d}A \coloneqq \partial_i \,\mathrm{d}x^i \wedge A \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \mathrm{d}A_j dx^j \\ &= \partial_i dx^i \wedge \left(A_j \,\mathrm{d}x^j\right) \\ &= \partial_i A_j \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) \underbrace{\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j}_{-\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i} \end{aligned}$$

Ω^p : p-Formen, $\mathrm{d} : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$, $\mathrm{d}^2 = 0$ (Übungsaufgabe)

<u>Hodge Operator:</u>

$$\begin{gathered} \star : \Omega^p \longleftrightarrow \Omega^{3-p} \\ \star : \Omega^1 \longleftrightarrow \Omega^2 \\ \star : \Omega^3 \longleftrightarrow \Omega^0 \end{gathered}$$

A ist 1-Form, B ist 2-Form, C ist 3-Form

$$\begin{aligned} \star\, A &= \frac{1}{2} \varepsilon^k_{ij} A_k \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ \star\, B &= \frac{1}{2} \varepsilon^{jk}_i B_{jk} \,\mathrm{d}x^i \\ \star\, C &= \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk} \end{aligned}$$

Wir erweitern das Diagramm von vorher:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Skalare} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] & \text{Vektoren} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\delta_{ij}"] & \text{Vektoren} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\star \circ \heartsuit"] & \text{Skalare} \arrow[d, leftrightarrow, "\star"] \\
\Omega^0 \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^1 \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^2 \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^3
\end{tikzcd}
$$

Dieses Diagramm kommutiert. (Alle Pfade, die zwei Punkte verbinden, sind äquivalent.)

$$\mathrm{d}^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0, \mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$$

Wiederholung

Beim letzten Mal: $\vec{x} = (x^i) \in \mathbb{R}^3,\ i, j = 1, 2, 3$

Invarianten der euklidischen Geometrie

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \pm 1$$

Skalarprodukt/Euklidische Metrik:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = \delta_{ij} v^i w^j \in \mathbb{R}$$
$$\equiv v^i w_i = v_i w^i$$

Kreuzprodukt:

$$(\vec{v} \times \vec{w})^i := \varepsilon^{ijk} v_j w_k = \varepsilon^{ijk} \delta_{jn} \delta_{kl} v^n w^l$$

Skalare und Vektoren im $\mathbb{R}^3 \longleftrightarrow$ Differentialformen im $\mathbb{R}^3$

<u>1-Form:</u> $(A_i), A = A_i \,\mathrm{d}x^i, A_i = \delta_{ij} A^j$ ($\longleftrightarrow$ <u>Vektor</u>)

<u>2-Form:</u> $B = \frac{1}{2} B_{ij} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, B_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$ ($\longleftrightarrow$ <u>Vektor</u>)

<u>3-Form:</u> $C = \frac{1}{3!} C_{ijk} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$

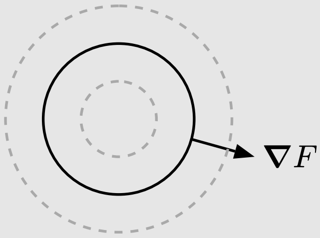
Hodge-dual zu Skalar: $F(\vec{x}) = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk}(\vec{x})$

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, dann ist $\boldsymbol{\nabla} F$ senkrecht auf der Fläche $F^{-1}(\{0\})$.

Beispiel: $F(\vec{x}) := |\vec{x}|^2 - R^2, R = \text{const}$

$F^{-1}(\{0\}) =: S^2_R$ (2-Sphäre) $\qquad (\boldsymbol{\nabla} F)^i = \delta^{ij} \partial_j F$

$$\begin{aligned}\partial_j F(\vec{x}) &= \partial_j\left(|\vec{x}|^2\right) = \partial_j\left(\delta_{kl} x^k x^l\right)\\ &= \delta_{kl}\left(\partial_j x^k\right)x^l + \delta_{kl} x^k\left(\partial_j x^l\right)\\ &= 2\delta_{kl}\left(\partial_j x^k\right)x^l\\ &= 2\delta_{jl} x^l\end{aligned}$$



$$\Longrightarrow (\nabla F)^i = \delta^{ij} 2\delta_{jl} x^l = 2\cdot x^i$$

$$\nabla F = 2\cdot\vec{x}$$

Beweis:

Parametrisierung der Fläche $F = 0$, Parameter $\sigma^\alpha, \alpha = 1, 2 \Longleftrightarrow F(\vec{x}(\sigma)) = 0$

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial\sigma^1} \text{ Tangentialvektor entlang } \sigma^1$$

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial\sigma^2} \text{ Tangentialvektor entlang } \sigma^2$$

$$\langle\frac{\partial\vec{x}}{\partial\sigma^\alpha}, \nabla F\rangle = \delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\sigma^\alpha}(\nabla F)^j = \delta^{jk}\partial_k F$$

$$= \delta_i{}^k\frac{\partial x^i}{\partial\sigma^\alpha}\partial_k F = \frac{\partial x^i}{\partial\sigma^\alpha}\partial_i F \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha}(F(\vec{x}(\sigma))) = 0$$

$$\Longrightarrow \nabla F \text{ senkrecht auf Tangentialvektoren}$$

Integralsätze:

Linienintegral: Kurve im $\mathbb{R}^3$: C, $\vec{x}(s) = x^i(s), s \in [s_0, s_1] \subset \mathbb{R}$

1-Form kann entlang einer Kurve integriert werden

$$\text{1-Form} \longleftrightarrow \text{Kurven}$$

1-Form:

$$A = A_i(\vec{x})\,\mathrm{d}x^i$$

$$\int_C A \equiv \int_C A_i\,\mathrm{d}x^i := \int_{s_0}^{s_1} A_i(\vec{x}(s))\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s$$

Euklidische Metrik:

$$A \longleftrightarrow \vec{A} \qquad \int A_i\,\mathrm{d}x^i = \int \delta_{ij} A^i\,\mathrm{d}x^i$$

$$\Longrightarrow \int A_i\,\mathrm{d}x^i = \int \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{x}$$

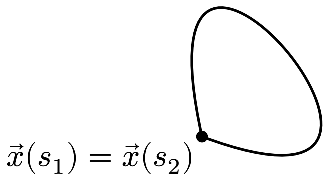
Fall A exakt $A = d\phi, A_i = \partial_i\phi$

$$\int_C A = \int_C d\phi = \int_{s_0}^{s_1} \partial_i \phi(\vec{x}(s)) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi(\vec{x}(s))\,\mathrm{d}s = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0))$$

$$\int_\phi \mathrm{d}\phi = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0))$$

$\Longrightarrow$ hängt nur von Endpunkten ab!

$\Longrightarrow$ geschlossene Kurve:



$$\oint_C \mathrm{d}\phi = 0$$

,

Für konservatives Kraftfeld $\vec{A} = \boldsymbol{\nabla}\phi$

$$\Longrightarrow \int_C \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0))$$

<u>Flächenintegral:</u>

$$\text{2-Form} \longleftrightarrow \text{Fläche}$$

Parametrisierung Σ: $\vec{\sigma} = \vec{x}(u,v), \sigma^\alpha = (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$$B = \frac{1}{2} B_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, \qquad \mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha}\,\mathrm{d}\sigma^\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x^i}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

$$\int_\Sigma B = \frac{1}{2} \cdot \int_\Sigma B_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \frac{1}{2} \int_D B_{ij}(\vec{x}(\sigma)) \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \sigma^\beta}\,\mathrm{d}\sigma^\alpha \wedge \mathrm{d}\sigma^\beta$$

$$\Longrightarrow \int_\Sigma B := \frac{1}{2} \int_D B_{ij}(\vec{x}(u,v)) \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\int_\Sigma B = \int_D B_{ij}(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_\Sigma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma}$$

wobei $\mathrm{d}\vec{\Sigma} := \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

<u>Volumenintegral:</u>

$$\text{3-Formen} \longleftrightarrow \text{Volumen}$$

$$C = \frac{1}{3!} C_{ijk}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$$

$$\int_V C = \frac{1}{3!} \int e^{ijk} C_{ijk}(\vec{x})\,\mathrm{d}x^3$$

Integralsätze/Stokes von Stokes:

Sei M eine Kurve/Fläche/Volumen und $\partial(M)$ der Rand:

- $M = C$ Kurve: ∂M sind die Endpunkte
- $M = \Sigma$ Kurve: ∂M ist die Randkurve
- $M = V$ Kurve: ∂M ist die Oberfläche von V

Stokes Theorem

Sei A eine p-Form und M $(p+1)$-dimensional. Dann gilt

$$\int_{\partial M} A = \int_M \mathrm{d}A$$

M: Kurve (1-dimensional), $A = \phi$ (0-Form)

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

$$\int_M \mathrm{d}\phi = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0)) = \int_{\partial M} \phi$$
$$\text{für } \partial M = \{\vec{x}(s_1), \vec{x}(s_0)\}$$

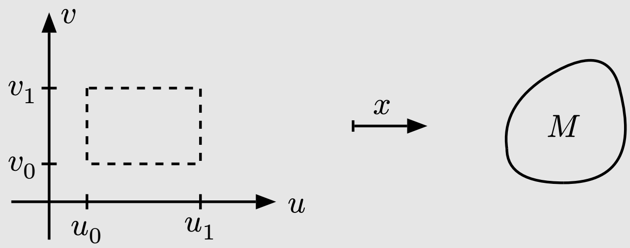
M: Fläche, 1-Form, $A = A_i \,\mathrm{d}x^i$, Parametrisierung: $\sigma^\alpha = (u, v) \in D$

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}A &= \int_D \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial u} A_j(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} A_j(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial x^i}{\partial u} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_D \frac{\partial}{\partial u} \left(A_j(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \int_D \frac{\partial}{\partial v} (\ldots)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\partial M} A \checkmark
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\int_{v_0}^{v_1} A_j(\vec{x}(u_1, v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} \,\mathrm{d}v - \int_{v_0}^{v_1} A_j(\vec{x}(u_0, v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} \,\mathrm{d}v$$



M: Volumen, B 2-Form, $B = \frac{1}{2} B_{ij}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$

$$\implies \text{3-Form} \quad \mathrm{d}B = \frac{1}{2}\partial_i B_{jk}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk}\, \mathrm{d}x^3$$

$$\implies \mathrm{d}B = \partial_i V^i\, \mathrm{d}x^3 \quad \text{mit} \quad V^i := \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} B_{jk}$$

$$\implies \int_V \mathrm{d}B = \int_V \partial_i V^i\, \mathrm{d}x^3 = \int_M \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{V}\, \mathrm{d}x^3 \overset{\text{Gauss}}{=} \oint_{\partial V} \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_{\partial M} B$$

Konsistenz mit $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0, ..., d^2 = 0$

$M = \partial M' \implies \partial M = 0 \quad [\partial\partial = 0]$

$A = \mathrm{d}C \implies \int_M \mathrm{d}A = \int_{\partial M} \mathrm{d}C = \int_{\partial(\partial M)} C = 0 \implies \mathrm{d}A = \mathrm{d}^2 C = 0 \quad [\mathrm{dd} = 0]$

Koordinatenwechsel:

$$\int_V F(\vec{x})\, \mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3!}\int_V F(\vec{x})\varepsilon_{ijk}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$$

$\longrightarrow$ neue Koordinaten $\vec{w} : \vec{x} = \vec{x}(\vec{w})$

$$x_1 = x_1(w_1, w_2, w_3), w_1 = w_1(x_1, x_2, x_3)$$
$$\vdots$$

Es gilt

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial w^j}\, \mathrm{d}w^j$$

$$\int_V F(\vec{x})\, \mathrm{d}x^3 = \int_V F(\vec{x}(\vec{w}))\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial w^l}\frac{\partial x^j}{\partial w^m}\frac{\partial x^k}{\partial w^n}\underbrace{\mathrm{d}w^l \wedge \mathrm{d}w^m \wedge \mathrm{d}w^n}_{=\varepsilon^{lmn}\, \mathrm{d}w^1 \wedge \mathrm{d}w^2 \wedge \mathrm{d}w^3}$$

$= \det(J)$

Jacobi-Matrix:

$$J_i^{\ j} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial w^i}\right)$$

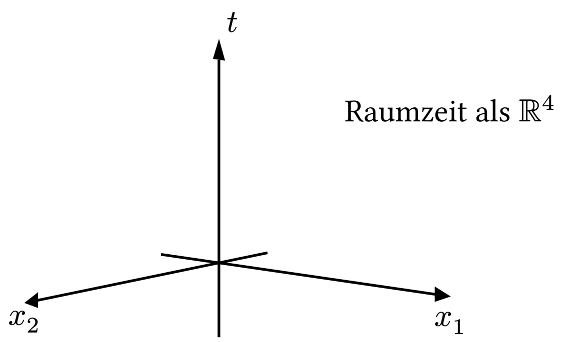
$$\implies \mathrm{d}x^3 = |\det(J)|\, \mathrm{d}x^3$$

3. Spezielle Relativitätstheorie

Raumzeit: Raum und Zeit vereinigt in einem vierdimensionalen Raum

Punkt der Raumzeit: **Ereignis** (etwas, das zu einem festen Zeitpunkt an einem Ort stattfindet)

Literaturempfehlung: Robert Geroch, General Relativity from A to B



Struktur der Raumzeit?

Aristotelische Raumzeit:

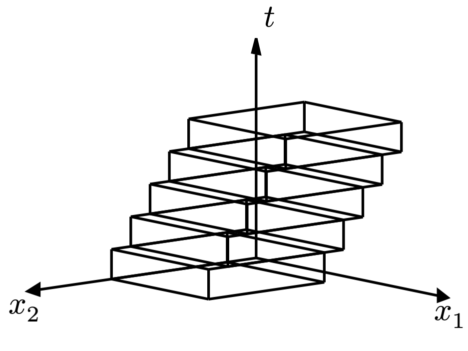
Folgende Fragen sind bedeutungsvoll
1. Finden zwei Ereignisse am selben Ort statt?
2. Finden zwei Ereignisse zur selben Zeit statt?

Abbildung der Aristotelischen Raumzeit

Antworten:
1. Ereignisse liegen in der selben senkrechten Ebene
1. Ereignisse liegen in der selben 3D-Ebene

Es gilt das Prinzip der "absoluten Ruhe".

Galileische Raumzeit:



Galileitransformation
ist Scheerung in x_1-x_2-x_3 Ebene

"Zwei Ereigniss finden zur selben Zeit statt." hat eine absolute Bedeutung, das Prinzip der absoluten Ruhe gilt jedoch nicht.

Im Allgemeinen macht es keinen Sinn zu fragen was der räumliche Abstand zwischen zwei Ereignissen p und q ist.

Aber: Der räumliche Abstand zur selben Zeit (in der x_1-x_2-x_3-Ebene) ist absolut.

$\Longrightarrow$ Newtonsches Gravitationsgesetz ist kompatibel mit Galilei [$V(r) \sim r$: Distanz zu festem Punkt]

Minkowski Raum:

$\mathbb{R}^4 : x^\mu = (ct, x, y, z), \mu = 0, 1, 2, 3 \equiv (x^0, x^i), i = 1, 2, 3$. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit [$c = 1$ in bestimmen Einheiten, z.B. räumliche Koordinaten in Lichtjahren und t in Jahren]

Minkowski-Metrik: "pseudo-euklidische Metrik"

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu}$$

Raumzeit-Intervall/Abstand zwischen zwei Punkten mit Koordinatendifferenz Δx^μ

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &:= \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^v \\ &= \left(\Delta x^0\right)^2 - \left(\Delta x^1\right)^2 - \left(\Delta x^2\right)^2 - \left(\Delta x^3\right)^2 \\ &= c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 \end{aligned}$$

Infinitesimal: $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu} \,\mathrm{d}x^\mu \,\mathrm{d}x^\nu = c^2 \,\mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}\vec{x})^2$

Vektoren im Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$:

V^μ: 4er-Vektor/"kontravarianter" Vektor

Minkowski-Norm: $V^2 = \langle V, V \rangle = \eta_{\mu,\nu} V^\mu V^\nu \equiv V_\mu V^\mu$ wobei "index herunter gezogen" zum "kontravarianten" Vektor ("co-Vektor")

$$V_\mu := \eta_{\mu\nu} V^\nu = \left(v^0, -v^1, -v^2, -v^3\right)$$

Hochziehen von Indizes: $V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$

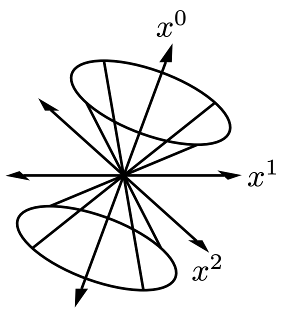
Notationsoptionen:

$$\langle V, W \rangle = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V_\mu W^\mu = V^\mu W_\mu$$

$x^\mu x_\mu = 0$ heißt **lichtartig**

$x^\mu x_\mu > 0$ heißt **zeitartig**

$x^\mu x_\mu < 0$ heißt **raumartig**



Dies ist eine Klassifizierung von Punkten im Minkowski-Raum.

3.1. Lichtstrahlen und Uhren

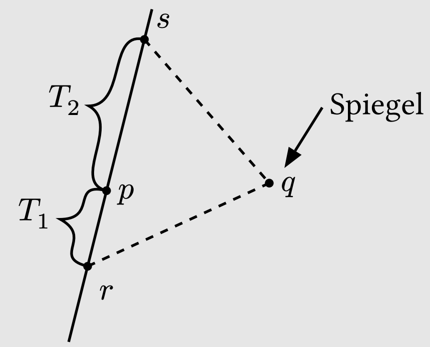
Postulat 1: Weltlinien von Lichtstrahlen sind Kurven (= Geraden) auf der Oberfläche des Lichtkegels.

Postulat 2: Weltlinien von massiven Objekten/Beobachtern sind zeitartige Kurven

Postulat 3: Die Zeit, die ein Beobachter entlang seiner Weltlinie "misst", ist

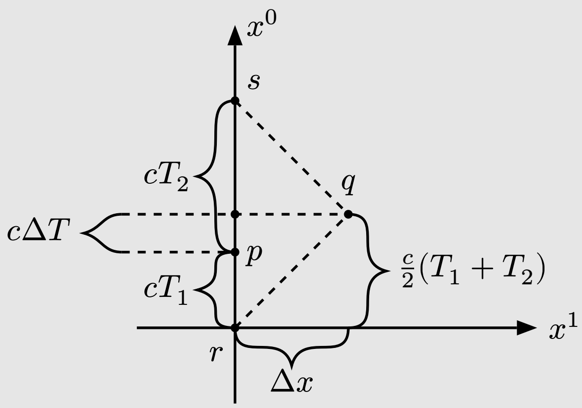
$$T = \frac{1}{c}\sqrt{(\Delta s)^2} = \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{(\Delta \vec{x})^2}{c^2}}$$

Physikalische Interpretation von zwei Ereignissen p und q mit raumartigen Intervall?



<u>Behauptung:</u> $\Delta s^2 = -c^2 T_1 T_2 < 0$, Δs^2 : Intervall/Abstand zwischen p und q

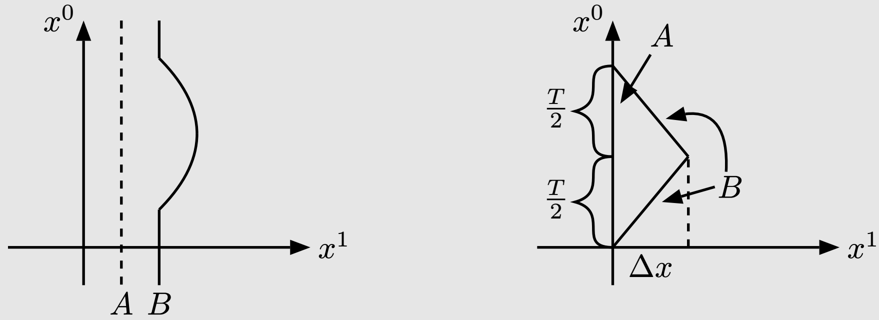
Beweis: Wähle Ruhesystem des Beobachters.



$$\Delta x = \frac{c}{2}(T_1 + T_2), \quad c\Delta t = -\frac{c}{2}(T_1 - T_2)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \Delta s^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \\ &= \frac{c^2}{4}(T_1 - T_2)^2 - \frac{c^2}{4}(T_1 + T_2)^2 \\ &= -c^2 T_1 T_2 \end{aligned}$$

<u>**Zwillings-Paradoxon:**</u>



Zeit von A: $T_A = T$.

Zeit von B: $cT_B = 2\sqrt{c^2\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \Delta x^2}$

$$\Longrightarrow T_B^2 = 4\left(\frac{T^2}{4} - \frac{\Delta x^2}{c^2}\right) = T_A^2 - 4\frac{\Delta x^2}{c^2}$$

$$\boxed{\Longrightarrow T_B < T_A}$$

⇒ Die Eigenzeit entlang von Geraden ist maximal.

3.2. Lorentz-Transformation/Symmetrie von Minkowski

$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \cdot x^\nu$

4-Vektoren: $V^\mu \longrightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \cdot V^\nu$ ("kontravarianter Vektor")

co-Vektor: $W_\mu \longrightarrow W'_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu W_\nu$ ("kovarianter Vektor")

$$\begin{aligned} V^\mu W_\mu \longrightarrow V'^\mu W'_\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu W_\rho \\ &= \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu W_\rho \\ &= \underbrace{\left(\Lambda^{-1} \cdot \Lambda\right)^\rho{}_\nu}_{\delta^\rho{}_\nu} \cdot V^\nu W_\delta \\ &= V^\nu W_\nu \end{aligned}$$

Analog für höhere Tensoren

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &\longrightarrow T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma} \\ L^\mu{}_\nu &\longrightarrow L'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \left(\Lambda^{-1}\right)^\sigma{}_\nu L^\rho{}_\sigma \text{ etc.} \end{aligned}$$

Lorentz-Gruppe:

Symmetrie von Minkowski = Invarianz von $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta'_{\mu\nu} := \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho}{}_{\mu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\sigma}{}_{\nu}\eta_{\rho\sigma} \stackrel{!}{=} \eta_{\mu\nu} \Longleftrightarrow \eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\eta_{\mu\nu}$$
$$\Longleftrightarrow \eta = \Lambda^{T}\eta\Lambda$$

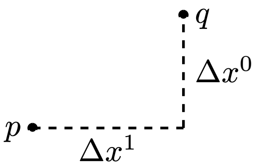
$$\Longrightarrow \det(\eta) = \det(\Lambda^T)\det(\eta)\det(\Lambda)$$
$$\Longleftrightarrow 1 = \det(\Lambda)^2 \Longleftrightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$SO(1,3) := \left\{1 \in GL(4) \mid \eta = \Lambda^T\eta\Lambda, \det(\Lambda) = \pm 1\right\}$$

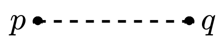
Beispiele: $x^2 = x^3 = 0 \quad x^\mu \longrightarrow x'^\mu = (ct', x', 0, 0)$

Bestimme alle Transformationen, so dass $\left(ct'\right)^2 - \left(x'\right)^2 = (ct)^2 - x^2$

$\longrightarrow$ Übungsaufgabe



Welche Transformationen sind möglich?



Physikalische Freiheitsgrade in SR

1. Punktteilchen (elektrische Ladungen, ...)
2. Felder (elektrisches/magnetisches Feld)

Abbildung

$$\Delta s_i = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\Delta x_i^\mu \Delta x_i^\nu}$$

$$s(p,q) = \sum_i \Delta s_i = \sum_i \sqrt{\eta_{\mu\nu}\Delta x_i^\mu \Delta x_i^\nu}$$

$$s(p,q) = \int_C \mathrm{d}s := \int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda$$

Zeitartig: $\dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu > 0$

Eigenzeit: $T = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}s = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}\lambda \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}$

Bewegungsgleichung für freies Teilchen?

$\longrightarrow$ Wirkung

$$S[x(\lambda)] = -mc\int \mathrm{d}s = -mc\int \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda$$

klassische Mechanik: $S = \int \mathrm{d}t\, \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \pm ...$ und $[S] = \text{Zeit} \cdot \text{Energie}$

3.3. Teilchen in SR

Abbildung

Parametrisierung: $x^\nu(\lambda), \lambda \in [a,b]$ mit $x(a) = p$ und $x(b) = q$.

Tangentialvektor: $\dot{x}^\nu(\lambda) := \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$, zeitartig: $\dot{x}^2 := \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu > 0$

Raumzeit-Distanz/Intervall der Kurve C:

$$\int_C \mathrm{d}s := \int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2}\,\mathrm{d}\lambda$$

$\implies$ **Eigenzeit** $\tau = \frac{s}{c}$

$$\boxed{\Delta\tau := \frac{1}{c}\int \sqrt{\dot{x}^2}\,\mathrm{d}\lambda}$$

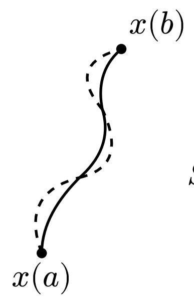
Zeit, gemessen von einer Uhr mit Weltlinie C.

Wirkung (Hamiltonisches Prinzip) für ein freies Teilchen:

$$S = -mc\int \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda = -mc^2\int \mathrm{d}\tau$$

Variation:

$$\boxed{\delta S := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}S[x(t) + \varepsilon\cdot\delta x(t)]\bigg|_{\varepsilon=0} \stackrel{!}{=} 0}$$



$S[x(\lambda)] \in \mathbb{R}$

Rechnung: Variation des Funktionals

1) δ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}$ kommutieren

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\mathrm{d}(x^\mu + \varepsilon\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\delta x^\mu)$$

2)

$$\delta\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right) \stackrel{1)}{=} \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} + \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\nu)}{\mathrm{d}\lambda} = 2\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$$

3)

$$\delta\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}^2}}\delta(\dot{x}^2) \qquad \text{wobei } \dot{x}^2 \equiv \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$\overset{2)}{=} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\delta x^\mu)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$\Longrightarrow \delta S = -mc\int \delta\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda = -mc\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\delta x_\mu)\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \overset{!}{=} 0$$

Partielle Integration davon + Annahme: $\delta x_\mu\big|_a = \delta x_\mu\big|_b = 0$

$$\delta S = mc\int \delta x_\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda \overset{!}{=} 0 \quad \forall \delta x^\mu$$

$$\boxed{\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) = 0}$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) = 0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = 0,\ u^\mu := \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}}$$

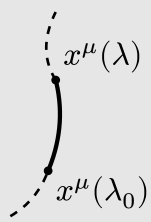
u^μ: 4er-Geschwindigkeit

$$u^2 = u^\mu u_\mu = \frac{c^2}{\dot{x}^2}\underbrace{\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu}_{\dot{x}^2} = c^2$$

Wähle zwei Parametrisierungen:

1) Eigenzeit: Wähle als Parametrisierung der Kurve die Eigenzeit

$$\tau(\lambda) := \frac{1}{c}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda$$



Bewegungsgleichungen generell:

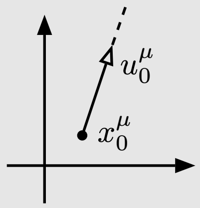
$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Betrachte u^μ:

$$\Rightarrow u^\mu = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \underset{\text{Kettenregel}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}}_{\frac{1}{c}\sqrt{\dot{x}^2}} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \qquad \boxed{\Longrightarrow u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$

$\Longrightarrow$ Bewegungsgleichung wird zu:

$$0 = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$$



Die Bewegung eines freien Teilchens wird also durch eine Gerade beschrieben:

$$\boxed{\Longrightarrow x^\mu(\tau) = u_0^\mu \cdot \tau + x_0^\mu \quad u_0^\mu, x_0^\mu = \text{const.}}$$

$$u^\mu u_\mu = u_0^\mu u_{0\mu} = c^2 > 0 \Longrightarrow \text{zeitartig}$$

2) Koordinatenzeit: Wähle als Parametrisierung der Kurve $\lambda = t$

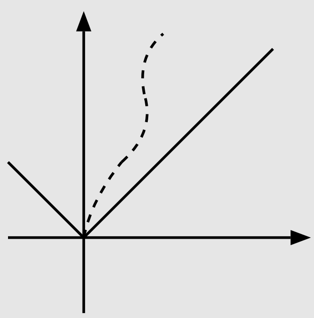
$$x^0 = ct, \quad \text{Setze } \lambda = t \Longrightarrow x^\mu(t) = (ct, x^i(t))$$

$$\Longrightarrow \dot{x}^\mu = \left(c, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) \equiv (c, v^i)$$

$$\Longrightarrow \dot{x}^2 = c^2 - |\vec{v}|^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}_{:=\gamma} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \cdot \gamma$$

Damit: $u^\mu = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}} \dot{x}^\mu = \gamma \dot{x}^\mu = \gamma(c, \vec{v})$



$$S = -mc \int \mathrm{d}s = -mc \int \mathrm{d}t \sqrt{\dot{x}^2} = -mc^2 \int \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

Lagrange-Funktion:

$$\boxed{\Longrightarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

Energie/**Hamiltonische Funktion:** $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \gamma \cdot m\dot{x}_i$

$$\implies E = H := p_i \dot{x}^2 - L = \ldots = \gamma \cdot mc^2 \approx \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \frac{p^2}{2m} + \mathcal{O}(p^4)$$

$\implies$ Ruheenergie

$$\boxed{E = mc^2}$$

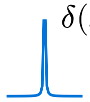
Ladungsdichte ρ und Strom $\vec{j}$

Stationärer Fall: $x^\mu(\lambda) \overset{\lambda=t}{=} x^\mu(t) = (ct, \vec{x}_0)$

Geladenes Teilchen mit Ladung e am Ort $\vec{x}_0$.

$$\rho(\vec{x}_0) = e \cdot \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad \vec{j}(\vec{x}) = 0$$

Wiederholung: Dirac "δ-Funktion"



$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x-a) f(x) = f(a)$$

Keine Funktion $\delta(x)$ hat exakt diese Eigenschaften, aber wir können sie beliebig genau annähern.

$$\Delta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0 \qquad \text{"}\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta_\varepsilon(x)\text{"}$$

Eigenschaften der δ-Funktion:

- $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$
- Für glatte Funktion $f(x)$ mit Nullstellen x_n, so dass $f'(x_n) \neq 0$

$$\overset{\text{ÜA}}{\implies} \delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n)$$

$$\implies \text{Spezialfall: } \delta(a \cdot x) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

Dirac δ-Funktion in höheren Dimensionen:

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(x^1 - y^1)\delta(x^2 - y^2)\delta(x^3 - y^3) \text{ etc.}$$

z.B.:

$$\int_V \mathrm{d}^3\vec{y}\, f(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x})$$

$$\implies \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \rho(\vec{x}) = e \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = e \implies Q = e \text{ Gesamtladung}$$

Kontinuitätsgleichung: Für zeitabhängige Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$ hat man eine Relation zum Strom $\vec{j}$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$

Interpretation: Für zeitabhängige $\rho(\vec{x}, t)$ ist die Gesamtladung in V zeitabhängig.

Abbildung

$$\boxed{Q_v(t) := \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \rho(\vec{x}, t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_v(t)}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{j} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\partial V} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$$
$$= \text{Gesamtstrom durch die Oberfläche}$$

Für **relativistische** Teilchen: ρ und $\vec{j}$ kombinieren sich zu relativistisch kovarianten 4-Vektoren.

$$\boxed{j^\mu := \left(c\rho, \vec{j}\right)}$$

$j^0 = c\rho, j^i = \left(\vec{j}\right)^i$

Eine Erhaltungsrelation:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \sum_{i=1}^{3} \partial_i j^i = \frac{\partial}{\partial x^0}(c\rho) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

4er-Strom für geladenes Punktteilchen?

Weltlinie des Teilchens mit Ladung e: $x^\mu(\lambda)$

$$\boxed{j^\mu(x) = ce \int \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \delta^4(x - x(\lambda))}$$

Beachte: $x \mathrel{\hat{=}}$ Punkt im $\mathbb{R}^{3,1}$ aber $x(\lambda) \mathrel{\hat{=}}$ 4 Funktionen der Parametrisierung

Wähle Parametrisierung nach Koordinatenzeit: $x^\mu(\lambda) = x^\mu(t') = (ct', \vec{x}(t'))$

$$\begin{aligned} j^0(ct,\vec{x}) &= ce\int \mathrm{d}t'\,\frac{\mathrm{d}x^0(t')}{\mathrm{d}t'}\underbrace{\delta(ct-ct')}_{\frac{1}{c}\delta(t-t')}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t')) \\ &= ce\int \mathrm{d}t'\;\delta(t-t')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t')) \\ &= ce\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ &= c\cdot\rho(\vec{x},t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \rho(\vec{x},t) = e\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))}$$

Konsistent mit dem stationären Fall

3er-Strom:

$$j^i(ct,\vec{x}) = ce\int \mathrm{d}t'\;\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^i(t')}{\mathrm{d}t'}}_{=v^i(t')}\underbrace{\delta(c(t-t'))}_{=\frac{1}{c}\delta(t-t')}\int^3(\vec{x}-\vec{x}(t'))$$

$$= e\int \mathrm{d}t'\;v^i(t')\delta(t-t')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t')) = ev^i(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))$$

$$\boxed{\begin{aligned} j^0 &= c\rho = cr\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ \vec{j} &= e\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \end{aligned}}$$

$$\boxed{j^\mu(x) := ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\delta^4(x-x(\lambda))}$$

Behauptung: $\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

Beweis: Test-Funktion $\varphi(x)$ (Skalar im $\mathbb{R}^3$)

Abbildung

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^4x\,\varphi(x)\partial_\mu j^\mu(x) &\overset{\text{Def.}}{=} ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}x^\mu(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\delta^4(x-x(\lambda)) \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} -ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\varphi(x)\delta^4(x-x(\lambda))\Big|_{x^\mu=x^\mu(\lambda)} \\ &= -ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}\Big|_{x=x(\lambda)} \\ &= -ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\varphi(x(\lambda)) = 0 \end{aligned}$$

Für beliebige Testfunktionen

Resultate bisher:

- **Ladungsdichte** einer Punktladung e mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$

$$\rho(t,\vec{x}) = e\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

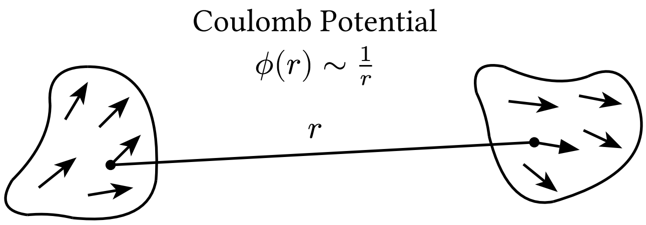
- **Stromdichte:**

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = e\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)), \quad \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

  Relativistisch kovariante Form $j^\mu(x) = \big(c\rho(x), \vec{j}(x)\big)$

Limes vieler Punktladungen:

Glatte Funktion $\rho(x)$, glattes Vektorfeld $\vec{j}(x)$



$\longrightarrow$ instantane Wechselwirkung (Kraft) nicht kompatibel mit SR!

$\longrightarrow$ Feldtheorie, dynamische Felder $\vec{E}(t,\vec{x}), \vec{B}(t,\vec{x})$

3.4. Relativistische Feldtheorie

Eine Feldtheorie besteht aus dynamischen Felder, die jeden Punkt des Raums $\mathbb{R}^3$ (oder der Raumzeit $\mathbb{R}^{3,1}$) eine Zahl, Vektor, Matrix etc. zuweisen.

Beispiel: Skalarfeld: $\varphi(t,\vec{x})$, Vektorfeld: $\vec{A}(t,\vec{x})$

Unterschied zu Punktteilchen:

$\longrightarrow$ Bewegungsgleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

$x(t) \in \mathbb{R}^3$

In Feldtheorie: $\longrightarrow$ partielle Differentialgleichungen für $\varphi(t,\vec{x})$, $\vec{A}(t,\vec{x})$

Beispiel: Kontinuitätsgleichung für $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{j}(t,\vec{x})$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

Felder auf Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}), \quad \mu = 0,1,2,3, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Skalarfeld: $\varphi = \varphi(x) = \varphi(x^\mu) = \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$

Lorentz-Transformation: $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad [x' = \Lambda \cdot x]$

$$\varphi \longrightarrow \varphi' \qquad \text{so dass} \qquad \varphi'(x') = \varphi(x)$$
$$\iff \varphi'(x') = \varphi'(\Lambda x) = \varphi(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

$y := \Lambda \cdot x, x = \Lambda^{-1} y$

$$\implies \varphi'(y) = \varphi(\Lambda^{-1} y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^{3,1}$$

Umbennen: $y \to x$:

$$\boxed{\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1} x)}$$

Vektorfelder: $A^\mu = A^\mu(x)$, $A^\mu \to A'^\mu$, wobei

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \iff$$

$$\boxed{A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1} x)}$$

Höhere Tensoren: $F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x)$

$$F'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1} x)$$

Partielle Ableitungen/Differentialgleichungen:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Unter Lorentz-Transformationen: $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \\ &= \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_v \end{aligned}$$

$$\implies \partial'_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu \iff$$

$$\boxed{\partial'_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \partial_\nu}$$

Beispiel:

$$\Box := \partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^3}{\partial (x^0)^3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Laplace-Operator:

$$\Delta := \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

Wellengleichungen:

Laplace-Operator:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi(t, \vec{x}) = 0$$

3.5. Maxwell-Gleichungen

Empirischer Input:

1. Es existieren elektrische Felder $\vec{E}(t, \vec{x})$ und magnetische Felder $\vec{B}(t, \vec{x})$
2. $\vec{B} \longleftrightarrow$ bewegte Ladungen ($\vec{j}$) für stationäre Punktladungen am Ort $\vec{x}_0$:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

Übungsaufgabe: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ für $\vec{x} \neq \vec{x}_0$, ρ: Ladungsdichte

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

3. Es existieren **keine** magnetischen Ladungen

$$0 = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_V \mathrm{d}^3x \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \forall V$$

$$\boxed{\Longrightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Welches Feld im Minkowski-Raum beinhaltet $\vec{E}$ und $\vec{B}$?

Antisymmetrisch: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right), \vec{E} \sim c\rho = j^0$

Da die erste Komponente vom Viererstrom $j^0 = c\rho$, schreiben wir $\boldsymbol{E}$ in die F_{0j} Komponenten. $\boldsymbol{B}$ schreiben wir in die F_{ij} Komponenten, da es mit $j^i = \vec{j}$ assoziiert wird.

Feldstärke-Tensor:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Effizientere Notation:

$$F_{0i} = E_i, \quad i = 1, 2, 3$$
$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k$$

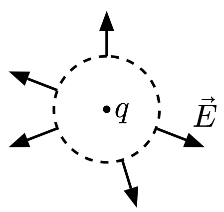
$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &:= \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma} \\ \implies F^{0i} &= \eta^{00}\eta^{ij}F_{0j} = -\delta^{ij}E_j = -E^i \\ F^{ij} &= \eta^{ik}\eta^{jl}F_{kl} = -\varepsilon^{ijk}B_k \end{aligned}$$

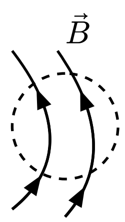
$$\implies F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell-Gleichungen:

Empirische Annahmen: (Gauss: $\varepsilon_0 \to \frac{1}{4\pi}$)

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}}$$





Motivation dessen:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = 4\pi Q \qquad 0 = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_V \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c} j^0$$

$$\Longrightarrow \partial_i F^{io} = \frac{4\pi}{c} j^0$$

Postulat (inhomogene Maxwell Gleichungen):

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = 0 \qquad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k$$

$$\Longrightarrow \varepsilon^{ijl} F_{ij} = i\varepsilon^{ijl}\varepsilon_{ijk} B^k = -2B^l$$

$$\boxed{\Longrightarrow B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F_{jk} = 0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} = 0$$

4D Levi-Civita-Tensor: $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$: total antisymmetrisch, $\varepsilon^{0123} = +1$, Lorentz-invariant unter $SO(1,3)$

$$\Longrightarrow \varepsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = 0$$

Postulat (homogene Maxwell Gleichungen):

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0}$$

Es bleibt die Konsequenzen dieser Theorie auszurechnen und auf Konsistenz zu prüfen.

Betrachte die inhomogenen Maxwellgleichungen.

$\nu = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \underbrace{\partial_0 F^{00}}_{=0} + \partial_i F^{i0} = \partial_i E^i = \nabla \cdot \vec{E} \\ &= \frac{4\pi}{c} j^0 = \frac{4\pi}{c} c\rho = 4\pi\rho \\ &\Longrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \end{aligned}$$

$\nu = j$:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu j} &= \partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} \\
&= \partial_0\left(-E^j\right) + \partial_i\left(-\varepsilon^{ijk} B_k\right) \\
&= -\frac{\partial E^j}{\partial x^0} + \varepsilon^{jik}\partial_i B_k \\
&\overset{x^0=ct}{=} -\frac{1}{c}\frac{\partial E^j}{\partial t} + \left(\nabla \times \vec{B}\right)^j \\
&\overset{!}{=} \frac{4\pi}{c} j^j
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Longrightarrow -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

<u>Divergenz:</u>

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\nabla \cdot \vec{E}\right)}_{=4\pi\rho} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right)}_{=0} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\rho = \nabla \cdot \vec{j} \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Kontinuitätsgleichung

Betrachte die homogene Maxwellgleichungen:

$\mu = 0$:

$$\varepsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_i B^i = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$\mu = i$:

$$\varepsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + \varepsilon^{ij0k}\partial_j F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}\partial_j F_{k0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0}$$

Maxwell-Gleichungen

inhomogen:	**homogen:**
$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Im Vakuum ($\rho = 0 = \vec{j}$), **elektrisch-magnetische Dualität**: invariant unter

$$\boxed{\vec{E} \longrightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \longrightarrow -\vec{E}}$$

Kommentar: Andere Konventionen sind oft üblich

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

SI Einheiten: $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, ε_0: Permittitivität (des leeren Raumes), μ_0: Permeabilität (des leeren Raumes)

nach obigem $\quad \vec{E} \to \frac{1}{c}\vec{E}, \quad \varepsilon \to \frac{1}{4\pi c}$

Maxwell-Gleichungen in SI Einheiten:

inhomogen:	**homogen:**
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$