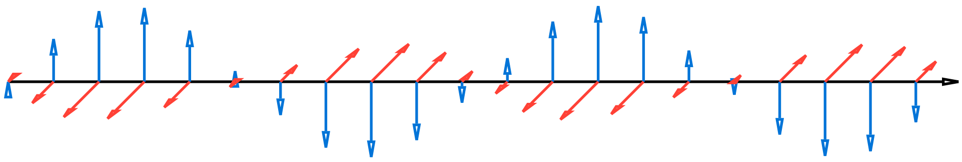
Vorlesungsskript

Elektrodynamik



Inhaltsverzeichnis

1. Worum geht es in der Elektrodynamik?

In der klassischen Mechanik:

fundamentale Konzepte: Länge, Zeit, Masse

$\longrightarrow$ Trägheit + Gravitation

Newtonsche Bew. gl.: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$ wobei $\underbrace{\vec{r}}_{\text{Ort}} \underbrace{(t)}_{\text{Zeit}} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

(Abbildung eines Massepunktes in 2D)

Lagrange-Funktion:

$\longrightarrow$ Wirkung

$$S = \int dt L\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)$$

N Teilchen $\vec{r}_i(t), i = 1, ..., N$

$$L\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2 - V(\vec{r}_i)$$
$$V(\vec{r}_i) = -\frac{G}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$

Neue fundamentale Größe:

- elektrische Ladung q (positiv oder negativ)
- gequantelt mit Elementarladung e

$$q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$$
$$q > 0 \ \ (\text{Proton, Positron}, n = +1)$$
$$q < 0 \ \ (\text{Elektron}, n = -1)$$

Coulomb-Gesetz: Kraft zwischen elektrisch geladenen Teilchen

$$\vec{F}_1 = k \cdot q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} = -\vec{F}_2$$

(Abbildung Coloumbgesetz zwischen zwei Teilchen)

$q_1 q_2 > 0$ (Ladungen haben dasselbe Vorzeichen) $\Longrightarrow$ abstoßend

$q_1 q_2 < 0$ (Ladungen haben verschiedene Vorzeichen) $\Longrightarrow$ anziehend

Was ist k? (Einheitensysteme)

1) Gausssche System: $k = 1$

2) SI System: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

3) Heavyside-Lorentz-System: $k = \frac{1}{4\pi}$

Umrechnen: SI $\rightarrow$ Gauss: $e_0 = \frac{1}{4\pi}$, SI $\rightarrow$ Heavyside: $\varepsilon_0 = 1$

Zusätzliche Realität:

magenetische Felder, elektromagnetische Wellen

$$\longrightarrow \textbf{Feldtheorie} \text{ (Maxwell's Theorie, erstes Beispiel)}$$

$\vec{x}_i(t), \quad i = 1, ..., N$ diskrete Zahl an freiheitsgrade $= 3N$

$\longrightarrow$ Elektrodynamik $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x})$

Betrachte ein Kraftfeld, erzeugt durch N Punktladungen $q_i, 1 = 1, ..., N$ wirkend auf eine Testladung $|q| \ll |q_i|$

$$\Longrightarrow \vec{F} = q\vec{E}(\vec{x}), \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$
$$\text{das Elektrische Feld}$$

eine fixierte Ladung an $\vec{x}_1$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|^3}$$

(Abbildung einer Ladung als Punktteilchen)

Diese (naive) Zeitabhängigkeit ist empirisch falsch und im Widerspruch zur (speziellen) Relativitätstheorie (SR)

$\longrightarrow$ Maxwell's Theorie, kompatibel mit SR

1.1. Plan der Vorlesung

1. Wiederholung
   - Euklidische Geometrie im $\mathbb{R}^3$, Vektoranalysis (Differentialformen)
2. Spezielle Relativitätstheorie
   - (Psuedo-) Euklidische Geometrie des Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$
3. Maxwell's Theorie
4. Anwendungen
   1. Elektrostatik
   2. Magnetostatik
   3. Elektro- und Magnetostatik in Materie

2. Wiederholung: Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

Der euklidische $\mathbb{R}^3$: $\vec{x} = \vec{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x^i), \quad i = 1, 2, 3$

<u>Metrik:</u>

$$\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_1^i - x_2^i)(x_1^i - x_2^i)$$

Geometrie invariant unter Rotationen

$$x^i \longrightarrow x'^i = \sum_{j=1}^{3} R^i_j x^j \underbrace{=}_{\text{Einstein Konvention}} R^i_j x^j$$

$$|\vec{x}|^2 = \delta_{ij} x^i x^j \quad \text{wobei } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}'|^2 &= \delta_{ij} x'^i x'^j = \delta_{ij} R^i_k x^k R^j_l x^l \\ &= \left(\delta_{ij} R^i_k R^j_l\right) x^k x^l = |\vec{x}|^2 = \delta_{kl} x^k x^l \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{kl}$$

Matrix-Notation: $R = \left(R^i_j\right), \mathbb{1} = \left(\delta_{ij}\right)$

$$\begin{aligned} \delta_{kl} = R^i_k \delta_{ij} R^j_l &\Longrightarrow \mathbb{1} = R^T R \\ &\Longrightarrow \det(R) = \pm 1 \end{aligned}$$

Rotationsgruppe: $\mathrm{SO}(3) : \det(R) = +1$

—

Im $\mathbb{R}^3$ hat man das **Kreuz-Produkt**

Epsilon-Tensor / Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk} : \quad \varepsilon^{123} = -\varepsilon^{213} = \varepsilon^{231} = 1$$

total antisymmetrisch, da $\varepsilon^{112} = 0 = -\varepsilon^{112}$

$\Longrightarrow$ invariant unter Rotation / SO(3)

$$\varepsilon^{ijk} \longrightarrow R^i_m R^j_n R^K_l \varepsilon^{mnl} \underbrace{=}_{\det(R)=1} \varepsilon^{ijk}$$

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ darf man nur folgende Objekte benutzen:

$$\delta_{ij}, \delta^{ij}, \varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}$$

Skalarprodukt: $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \delta_{ij}x^i y^j$

Kreuzprodukt: $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$, $(\vec{u}\times\vec{v})^i := \delta^{il}\varepsilon_{ljk}u^j v^k$

Skalare/Funktionen auf $\mathbb{R}^3$: $F = F(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

Vektorfeld auf RR^3: $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$

Gradient: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, Skalar $\longrightarrow$ Vektor

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}F = \text{grad }F, \quad (\text{grad }F)^i = \delta^{ij}\partial_j F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \frac{\partial F}{\partial x^3}\right)$$

Divergenz: Vektor $\longrightarrow$ Skalar

$$\begin{aligned}\text{div }\vec{V} &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{V} = \partial_i V^i \\ &= \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3}\end{aligned}$$

Rotation: Vektor $\longrightarrow$ Vektor

$$\text{rot }\vec{V} = \boldsymbol{\nabla}\times\vec{V} \Longrightarrow (\text{rot }V)^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j V_k$$

$$\text{Skalare} \xrightarrow{\text{grad}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{rot}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{div}} \text{Skalare}$$

Identitäten (Kettenkomplex):

$$\begin{aligned}\text{rot}\circ\text{grad} &= 0 \\ \text{div}\circ\text{rot} &= 0\end{aligned}$$

Differentialformen im $\mathbb{R}^3$:

- 0-Formen: Skalar
- 1-Formen: "dual" zu Vektoren, $A_i(\vec{x})$

$$[\text{Im Euklidischen:} \quad V_i(\vec{x}) = \delta_{ij}V^j(\vec{x})]$$

- 2-Formen: Antisymmetrischer Tensor

$$B_{ij}(\vec{x}) = -B_{ij}(\vec{x})$$

- 3-Formen: $C_{ijk}(\vec{x}) = -C_{ikj}(\vec{x}) = \ldots$ (wie Levi-Civita)

Effiziente indexfreie Notation: Basis-Elemente dx^i

- 1-Form: $A = A_i\,\mathrm{d}x^i$
- 2-Form: $B = \frac{1}{2}B_{ij}\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$
- 3-Form: $C = \frac{1}{3!}C_{ijk}\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k$

wobei $\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j = -\,\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i$

Wedge Product:

$$A \wedge B = (A_i \,\mathrm{d}x^i) \wedge \left(\frac{1}{2} B_{jk} \,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\right) = \frac{1}{2} A_i B_{jk} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \text{ (3-Form)}$$

p-Form A, q-Form B

$$\begin{gathered} \Longrightarrow A \wedge B \text{ ist } (p+q) - \text{Form} \\ A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A \text{ (gradiert Kommutativ)} \\ (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \text{ (assoziativ)} \end{gathered}$$

<u>deRham Differential:</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : \Omega^k &\to \Omega^{k+1} \\ A &\mapsto \mathrm{d}A := \partial_i \,\mathrm{d}x^i \wedge A \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \mathrm{d}A_j dx^j \\ &= \partial_i dx^i \wedge \left(A_j \,\mathrm{d}x^j\right) \\ &= \partial_i A_j \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) \underbrace{\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j}_{-\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i} \end{aligned}$$

Ω^p : p-Formen, $\mathrm{d} : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$, $\mathrm{d}^2 = 0$ (Übungsaufgabe)

<u>Hodge Operator:</u>

$$\begin{gathered} \star : \Omega^p \longleftrightarrow \Omega^{3-p} \\ \star : \Omega^1 \longleftrightarrow \Omega^2 \\ \star : \Omega^3 \longleftrightarrow \Omega^0 \end{gathered}$$

A ist 1-Form, B ist 2-Form, C ist 3-Form

$$\begin{aligned} \star\, A &= \frac{1}{2} \varepsilon^k_{ij} A_k \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ \star\, B &= \frac{1}{2} \varepsilon_i^{jk} B_{jk} \,\mathrm{d}x^i \\ \star\, C &= \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk} \end{aligned}$$

Wir erweitern das Diagramm von vorher:

$$\begin{tikzcd}
\text{Skalare} \arrow[r, "\text{grad}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{id}"] & \text{Vektoren} \arrow[r, "\text{rot}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\delta_{ij}"] & \text{Vektoren} \arrow[r, "\text{div}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\star \circ \heartsuit"] & \text{Skalare} \arrow[d, leftrightarrow, "\star"] \\
\Omega^0 \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^1 \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^2 \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^3
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm kommutiert. (Alle Pfade, die zwei Punkte verbinden, sind äquivalent.)

$$\mathrm{d}^2 = 0 \iff \text{rot} \circ \text{grad} = 0, \text{div} \circ \text{rot} = 0$$

Wiederholung

Beim letzten Mal: $\vec{x} = (x^i) \in \mathbb{R}^3,\ i, j = 1, 2, 3$

Invarianten der euklidischen Geometrie

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \pm 1$$

Skalarprodukt/Euklidische Metrik:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = \delta_{ij} v^i w^j \in \mathbb{R}$$
$$\equiv v^i w_i = v_i w^i$$

Kreuzprodukt:

$$(\vec{v} \times \vec{w})^i := \varepsilon^{ijk} v_j w_k = \varepsilon^{ijk} \delta_{jn} \delta_{kl} v^n w^l$$

Skalare und Vektoren im $\mathbb{R}^3 \longleftrightarrow$ Differentialformen im $\mathbb{R}^3$

<u>1-Form:</u> $(A_i), A = A_i \,\mathrm{d}x^i, A_i = \delta_{ij} A^j$ ($\longleftrightarrow$ <u>Vektor</u>)

<u>2-Form:</u> $B = \frac{1}{2} B_{ij} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, B_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$ ($\longleftrightarrow$ <u>Vektor</u>)

<u>3-Form:</u> $C = \frac{1}{3!} C_{ijk} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$

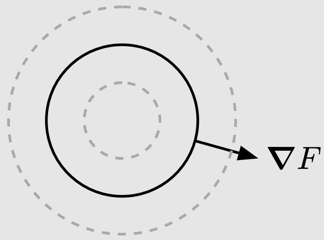
Hodge-dual zu Skalar: $F(\vec{x}) = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk}(\vec{x})$

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, dann ist $\boldsymbol{\nabla} F$ senkrecht auf der Fläche $F^{-1}(\{0\})$.

Beispiel: $F(\vec{x}) := |\vec{x}|^2 - R^2, R = \text{const}$

$$F^{-1}(\{0\}) =: S^2_R \text{ (2-Sphäre)} \qquad (\boldsymbol{\nabla} F)^i = \delta^{ij} \delta_j F$$

$$
\begin{aligned}
\partial_j F(\vec{x}) &= \partial_j(|\vec{x}|^2) = \partial_j\left(\delta_{kl}x^k x^l\right) \\
&= \delta_{kl}\left(\partial_j x^k\right)x^l + \delta_{kl}x^k\left(\partial_j x^l\right) \\
&= 2\delta_{kl}\left(\partial_j x^k\right)x^l \\
&= 2\delta_{jl}x^l
\end{aligned}
$$



$$
\implies (\nabla F)^i = \delta^{ij}2\delta_{jl}x^l = 2\cdot x^i
$$

$$
\nabla F = 2\cdot\vec{x}
$$

Beweis:

Parametrisierung der Fläche $F = 0$, Parameter $\sigma^\alpha, \alpha = 1, 2 \iff F(\vec{x}(\sigma)) = 0$

$$
\frac{\partial\vec{x}}{\partial\sigma^1} \text{ Tangentialvektor entlang } \sigma^1
$$

$$
\frac{\partial\vec{x}}{\partial\sigma^2} \text{ Tangentialvektor entlang } \sigma^2
$$

$$
\langle\frac{\partial\vec{x}}{\partial\sigma^\alpha}, \nabla F\rangle = \delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\sigma^\alpha}(\nabla F)^j = \delta^{jk}\partial_k F
$$

$$
= \delta_i{}^k\frac{\partial x^i}{\partial\sigma^\alpha}\partial_k F = \frac{\partial x^i}{\partial\sigma^\alpha}\partial_i F \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha}(F(\vec{x}(\sigma))) = 0
$$

$$
\implies \nabla F \text{ senkrecht auf Tangentialvektoren}
$$

Integralsätze:

Linienintegral: Kurve im $\mathbb{R}^3$: C, $\vec{x}(s) = x^i(s), s \in [s_0, s_1] \subset \mathbb{R}$

1-Form kann entlang einer Kurve integriert werden

$$
\text{1-Form} \longleftrightarrow \text{Kurven}
$$

1-Form:

$$
A = A_i(\vec{x})\,\mathrm{d}x^i
$$

$$
\int_C A \equiv \int_C A_i\,\mathrm{d}x^i := \int_{s_0}^{s_1} A_i(\vec{x}(s))\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s
$$

Euklidische Metrik:

$$
A \longleftrightarrow \vec{A} \qquad \int A_i\,\mathrm{d}x^i = \int \delta_{ij}A^i\,\mathrm{d}x^i
$$

$$
\implies \int A_i\,\mathrm{d}x^i = \int \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{x}
$$

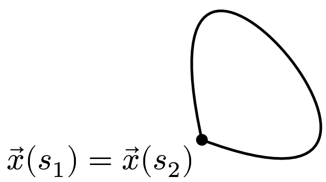
Fall A exakt $A = d\phi, A_i = \partial_i\phi$

$$\int_C A = \int_C d\phi = \int_{s_0}^{s_1} \partial_i \phi(\vec{x}(s)) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi(\vec{x}(s))\,\mathrm{d}s = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0))$$

$$\int_\phi \mathrm{d}\phi = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0))$$

$\Longrightarrow$ hängt nur von Endpunkten ab!

$\Longrightarrow$ geschlossene Kurve:



$$\oint_C \mathrm{d}\phi = 0$$

,

Für konservatives Kraftfeld $\vec{A} = \boldsymbol{\nabla}\phi$

$$\Longrightarrow \int_C \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0))$$

<u>Flächenintegral:</u>

$$\text{2-Form} \longleftrightarrow \text{Fläche}$$

Parametrisierung Σ: $\vec{\sigma} = \vec{x}(u,v), \sigma^\alpha = (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$$B = \frac{1}{2} B_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, \qquad \mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha}\,\mathrm{d}\sigma^\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x^i}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

$$\int_\Sigma B = \frac{1}{2} \cdot \int_\Sigma B_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \frac{1}{2}\int_D B_{ij}(\vec{x}(\sigma)) \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial \sigma^\beta}\,\mathrm{d}\sigma^\alpha \wedge \mathrm{d}\sigma^\beta$$

$$\Longrightarrow \int_\Sigma B := \frac{1}{2}\int_D B_{ij}(\vec{x}(u,v)) \left(\frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial x^i}{\partial v}\frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\int_\Sigma B = \int_D B_{ij}(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial x^j}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_\Sigma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma}$$

wobei $\mathrm{d}\vec{\Sigma} := \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

<u>Volumenintegral:</u>

$$\text{3-Formen} \longleftrightarrow \text{Volumen}$$

$$C = \frac{1}{3!} C_{ijk}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$$

$$\int_V C = \frac{1}{3!}\int e^{ijk} C_{ijk}(\vec{x})\,\mathrm{d}x^3$$

Integralsätze/Stokes von Stokes:

Sei M eine Kurve/Fläche/Volumen und $\partial(M)$ der Rand:

- $M = C$ Kurve: ∂M sind die Endpunkte
- $M = \Sigma$ Kurve: ∂M ist die Randkurve
- $M = V$ Kurve: ∂M ist die Oberfläche von V

Stokes Theorem

Sei A eine p-Form und M $(p+1)$-dimensional. Dann gilt

$$\int_{\partial M} A = \int_M \mathrm{d}A$$

M: Kurve (1-dimensional), $A = \phi$ (0-Form)

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

$$\int_M \mathrm{d}\phi = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0)) = \int_{\partial M} \phi$$
$$\text{für } \partial M = \{\vec{x}(s_1), \vec{x}(s_0)\}$$

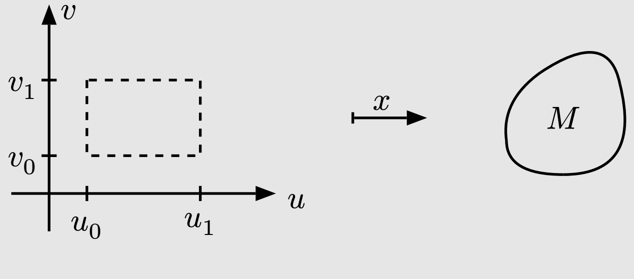
M: Fläche, 1-Form, $A = A_i \, \mathrm{d}x^i$, Parametrisierung: $\sigma^\alpha = (u, v) \in D$

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}A &= \int_D \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial u} A_j(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} A_j(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial x^i}{\partial u} \right) \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\
&= \int_D \frac{\partial}{\partial u} \left(A_j(\vec{x}(u,v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) \mathrm{d}u \,\mathrm{d}v - \int_D \frac{\partial}{\partial v} (\ldots) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \int_{\partial M} A \checkmark
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\int_{v_0}^{v_1} A_j(\vec{x}(u_1, v) \frac{\partial x^j}{\partial v} \,\mathrm{d}v - \int_{v_0}^{v_1} A_j(\vec{x}(u_0, v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} \,\mathrm{d}v$$



M: Volumen, B 2-Form, $B = \frac{1}{2} B_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$

$$\Longrightarrow \text{3-Form} \quad \mathrm{d}B = \frac{1}{2}\partial_i B_{jk}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk}\,\mathrm{d}x^3$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}B = \partial_i V^i\,\mathrm{d}x^3 \quad \text{mit} \quad V^i := \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} B_{jk}$$

$$\Longrightarrow \int_V \mathrm{d}B = \int_V \partial_i V^i\,\mathrm{d}x^3 = \int_M \nabla \cdot \vec{V}\,\mathrm{d}x^3 \overset{\text{Gauss}}{=} \oint_{\partial V} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_{\partial M} B$$

Konsistenz mit $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0, \ldots, d^2 = 0$

$M = \partial M' \Longrightarrow \partial M = 0 \quad [\partial\partial = 0]$

$A = \mathrm{d}C \Longrightarrow \int_M \mathrm{d}A = \int_{\partial M} \mathrm{d}C = \int_{\partial(\partial M)} C = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}A = \mathrm{d}^2 C = 0 \quad [\mathrm{dd} = 0]$

Koordinatenwechsel:

$$\int_V F(\vec{x})\,\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3!}\int_V F(\vec{x})\varepsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$$

$\longrightarrow$ neue Koordinaten $\vec{w} : \vec{x} = \vec{x}(\vec{w})$

$$x_1 = x_1(w_1, w_2, w_3), w_1 = w_1(x_1, x_2, x_3)$$
$$\vdots$$

Es gilt

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial w^j}\,\mathrm{d}w^j$$

$$\int_V F(\vec{x})\,\mathrm{d}x^3 = \int_V F(\vec{x}(\vec{w}))\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial w^l}\frac{\partial x^j}{\partial w^m}\frac{\partial x^k}{\partial w^n}\underbrace{\mathrm{d}w^l \wedge \mathrm{d}w^m \wedge \mathrm{d}w^n}_{=\varepsilon^{lmn}\,\mathrm{d}w^1 \wedge \mathrm{d}w^2 \wedge \mathrm{d}w^3}$$

$= \det(J)$

Jacobi-Matrix:

$$J_i^{\ j} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial w^i}\right)$$

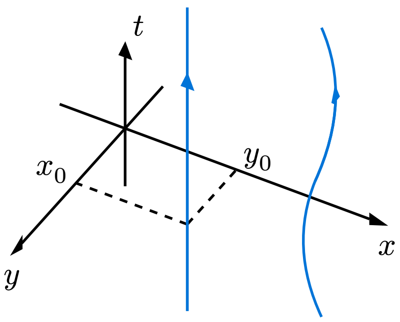
$$\Longrightarrow \mathrm{d}x^3 = |\det(J)|\,\mathrm{d}x^3$$

3. Spezielle Relativitätstheorie

Raumzeit: Raum und Zeit vereinigt in einem vierdimensionalen Raum

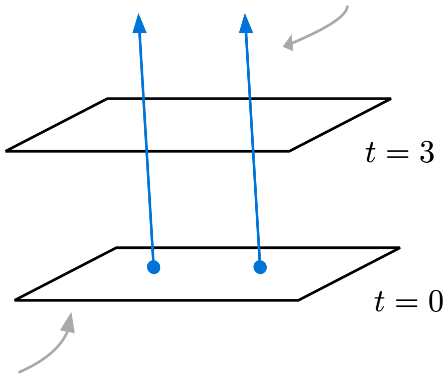
Punkt der Raumzeit: **Ereignis** (etwas, das zu einem festen Zeitpunkt an einem Ort stattfindet)

Literaturempfehlung: Robert Geroch, General Relativity from A to B



Struktur der Raumzeit?

Aristotelische Raumzeit:



Folgende Fragen sind bedeutungsvoll
1. Finden zwei Ereignisse am selben Ort statt?
2. Finden zwei Ereignisse zur selben Zeit statt?

Antworten:
1. Ereignisse liegen in der selben senkrechten Ebene
1. Ereignisse liegen in der selben 3D-Ebene

Es gilt das Prinzip der "absoluten Ruhe".

Galileische Raumzeit:

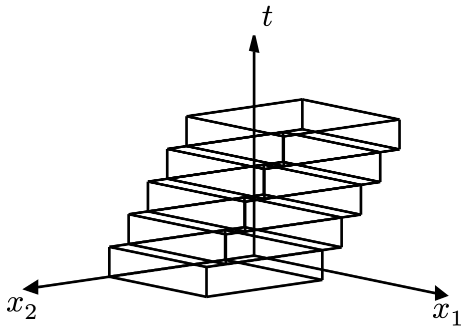
"Zwei Ereigniss finden zur selben Zeit statt." hat eine absolute Bedeutung, das Prinzip der absoluten Ruhe gilt jedoch nicht.

Im Allgemeinen macht es keinen Sinn zu fragen was der räumliche Abstand <u>zwischen zwei Ereignissen</u> p und q ist.

Aber: Der räumliche Abstand <u>zur selben Zeit</u> (in der x_1-x_2-x_3-Ebene) ist absolut.

$\Longrightarrow$ Newtonsches Gravitationsgesetz ist kompatibel mit Galilei [$V(r) \sim r$: Distanz zu festem Punkt]

Galileitransformation ist Scheerung in x_1-x_2-x_3 Ebene:



Minkowski Raum:

$\mathbb{R}^4 : x^\mu = (ct, x, y, z), \mu = 0, 1, 2, 3 \equiv (x^0, x^i), i = 1, 2, 3$. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit [$c = 1$ in bestimmen Einheiten, z.B. räumliche Koordinaten in Lichtjahren und t in Jahren]

Minkowski-Metrik: "pseudo-euklidische Metrik"

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu}$$

Raumzeit-Intervall/Abstand zwischen zwei Punkten mit Koordinatendifferenz Δx^μ

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &:= \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^v \\ &= \left(\Delta x^0\right)^2 - \left(\Delta x^1\right)^2 - \left(\Delta x^2\right)^2 - \left(\Delta x^3\right)^2 \\ &= c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 \end{aligned}$$

Infinitesimal: $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu} \,\mathrm{d}x^\mu \,\mathrm{d}x^\nu = c^2 \,\mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}\vec{x})^2$

Vektoren im Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$:

V^μ: 4er-Vektor/"kontravarianter" Vektor

Minkowski-Norm: $V^2 = \langle V, V \rangle = \eta_{\mu,\nu} V^\mu V^\nu \equiv V_\mu V^\mu$ wobei "index herunter gezogen" zum "kontravarianten" Vektor ("co-Vektor")

$$V_\mu := \eta_{\mu\nu} V^\nu = \left(v^0, -v^1, -v^2, -v^3\right)$$

Hochziehen von Indizes: $V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$

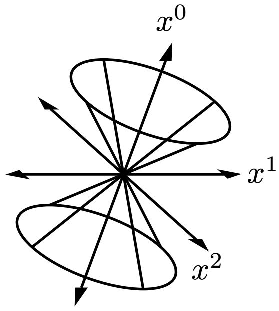
Notationsoptionen:

$$\langle V, W \rangle = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V_\mu W^\mu = V^\mu W_\mu$$

$x^\mu x_\mu = 0$ heißt **lichtartig**

$x^\mu x_\mu > 0$ heißt **zeitartig**

$x^\mu x_\mu < 0$ heißt **raumartig**



Dies ist eine Klassifizierung von Punkten im Minkowski-Raum.

3.1. Lichtstrahlen und Uhren

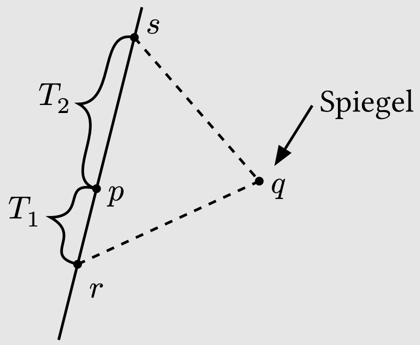
Postulat 1: Weltlinien von Lichtstrahlen sind Kurven (= Geraden) auf der Oberfläche des Lichtkegels.

Postulat 2: Weltlinien von massiven Objekten/Beobachtern sind zeitartige Kurven

Postulat 3: Die Zeit, die ein Beobachter entlang seiner Weltlinie "misst", ist

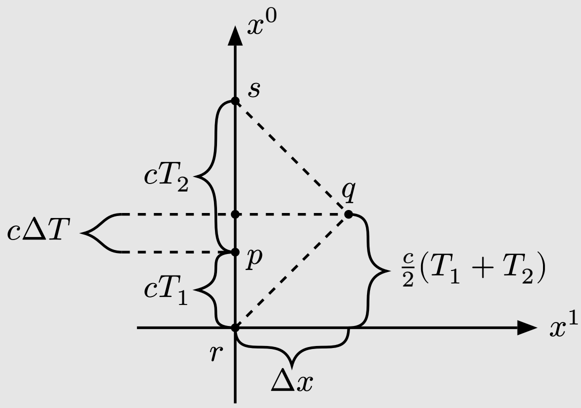
$$T = \frac{1}{c}\sqrt{(\Delta s)^2} = \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{(\Delta \vec{x})^2}{c^2}}$$

Physikalische Interpretation von zwei Ereignissen p und q mit raumartigen Intervall?



<u>Behauptung:</u> $\Delta s^2 = -c^2 T_1 T_2 < 0$, Δs^2 : Intervall/Abstand zwischen p und q

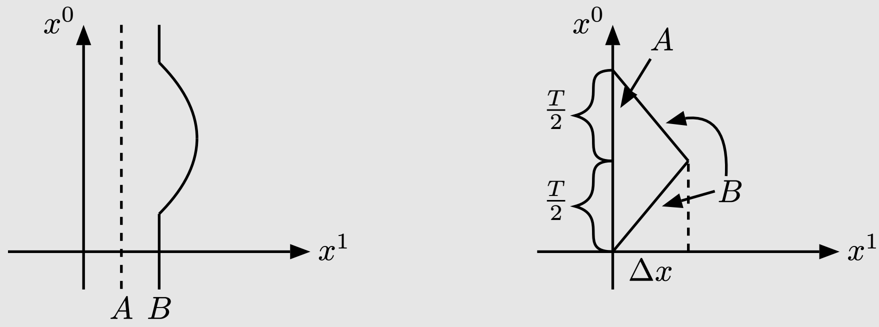
Beweis: Wähle Ruhesystem des Beobachters.



$$\Delta x = \frac{c}{2}(T_1 + T_2), \quad c\Delta t = -\frac{c}{2}(T_1 - T_2)$$

$$\begin{aligned}\implies \Delta s^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \\ &= \frac{c^2}{4}(T_1 - T_2)^2 - \frac{c^2}{4}(T_1 + T_2)^2 \\ &= -c^2 T_1 T_2\end{aligned}$$

<u>**Zwillings-Paradoxon:**</u>



Zeit von A: $T_A = T$.

Zeit von B: $cT_B = 2\sqrt{c^2\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \Delta x^2}$

$$\Longrightarrow T_B^2 = 4\left(\frac{T^2}{4} - \frac{\Delta x^2}{c^2}\right) = T_A^2 - 4\frac{\Delta x^2}{c^2}$$

$$\boxed{\Longrightarrow T_B < T_A}$$

$\Rightarrow$ Die Eigenzeit entlang von Geraden ist maximal.

3.2. Lorentz-Transformation/Symmetrie von Minkowski

$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \cdot x^\nu$

4-Vektoren: $V^\mu \longrightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \cdot V^\nu$ ("kontravarianter Vektor")

co-Vektor: $W_\mu \longrightarrow W'_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu W_\nu$ ("kovarianter Vektor")

$$\begin{aligned} V^\mu W_\mu \longrightarrow V'^\mu W'_\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu W_\rho \\ &= \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu W_\rho \\ &= \underbrace{\left(\Lambda^{-1} \cdot \Lambda\right)^\rho{}_\nu}_{\delta^\rho{}_\nu} \cdot V^\nu W_\delta \\ &= V^\nu W_\nu \end{aligned}$$

Analog für höhere Tensoren

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &\longrightarrow T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma} \\ L^\mu{}_\nu &\longrightarrow L'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \left(\Lambda^{-1}\right)^\sigma{}_\nu L^\rho{}_\sigma \text{ etc.} \end{aligned}$$

Lorentz-Gruppe:

Symmetrie von Minkowski = Invarianz von $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta'_{\mu\nu} := \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho}{}_{\mu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\sigma}{}_{\nu}\eta_{\rho\sigma} \overset{!}{=} \eta_{\mu\nu} \iff \eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\eta_{\mu\nu}$$
$$\iff \eta = \Lambda^{T}\eta\Lambda$$

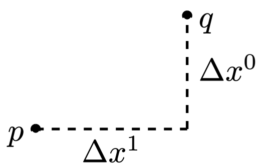
$$\implies \det(\eta) = \det\left(\Lambda^{T}\right)\det(\eta)\det(\Lambda)$$
$$\iff 1 = \det(\Lambda)^{2} \iff \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$SO(1,3) := \left\{1 \in GL(4) \mid \eta = \Lambda^{T}\eta\Lambda, \det(\Lambda) = \pm 1\right\}$$

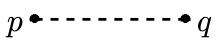
Beispiele: $x^2 = x^3 = 0 \quad x^\mu \longrightarrow x'^\mu = (ct', x', 0, 0)$

Bestimme alle Transformationen, so dass $(ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - x^2$

$\longrightarrow$ Übungsaufgabe



Welche Transformationen sind möglich?



Physikalische Freiheitsgrade in SR

1. Punktteilchen (elektrische Ladungen, ...)
2. Felder (elektrisches/magnetisches Feld)

Abbildung

$$\Delta s_i = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\Delta x_i^\mu \Delta x_i^\nu}$$

$$s(p,q) = \sum_i \Delta s_i = \sum_i \sqrt{\eta_{\mu\nu}\Delta x_i^\mu \Delta x_i^\nu}$$

$$s(p,q) = \int_C \mathrm{d}s := \int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda$$

Zeitartig: $\dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu > 0$

Eigenzeit: $T = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}s = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}\lambda \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}$

Bewegungsgleichung für freies Teilchen?

$\longrightarrow$ Wirkung

$$S[x(\lambda)] = -mc\int \mathrm{d}s = -mc\int \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda$$

klassische Mechanik: $S = \int \mathrm{d}t\, \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \pm \ldots$ und $[S] = \text{Zeit} \cdot \text{Energie}$

3.3. Teilchen in SR

Abbildung

Parametrisierung: $x^\nu(\lambda), \lambda \in [a,b]$ mit $x(a) = p$ und $x(b) = q$.

Tangentialvektor: $\dot{x}^\nu(\lambda) := \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$, zeitartig: $\dot{x}^2 := \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu > 0$

Raumzeit-Distanz/Intervall der Kurve C:

$$\int_C \mathrm{d}s := \int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2}\,\mathrm{d}\lambda$$

$\Longrightarrow$ **Eigenzeit** $\tau = \frac{s}{c}$

$$\boxed{\Delta\tau := \frac{1}{c}\int \sqrt{\dot{x}^2}\,\mathrm{d}\lambda}$$

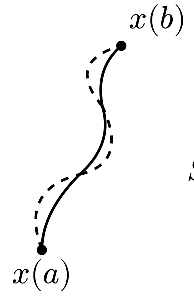
Zeit, gemessen von einer Uhr mit Weltlinie C.

Wirkung (Hamiltonisches Prinzip) für ein freies Teilchen:

$$S = -mc\int \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda = -mc^2\int \mathrm{d}\tau$$

Variation:

$$\boxed{\delta S := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} S[x(t) + \varepsilon\cdot\delta x(t)]\bigg|_{\varepsilon=0} \stackrel{!}{=} 0}$$



$S[x(\lambda)] \in \mathbb{R}$

Rechnung: Variation des Funktionals

1) δ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}$ kommutieren

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\mathrm{d}(x^\mu + \varepsilon\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\delta x^\mu)$$

2)

$$\delta\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right) \stackrel{1)}{=} \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} + \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\nu)}{\mathrm{d}\lambda} = 2\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$$

3)

$$\delta\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}^2}}\delta(\dot{x}^2) \qquad \text{wobei } \dot{x}^2 \equiv \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$\overset{2)}{=} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\delta x^\mu)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$\Longrightarrow \delta S = -mc\int \delta\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda = -mc\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\delta x_\mu)\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \overset{!}{=} 0$$

Partielle Integration davon + Annahme: $\delta x_\mu\big|_a = \delta x_\mu\big|_b = 0$

$$\delta S = mc\int \delta x_\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda \overset{!}{=} 0 \quad \forall \delta x^\mu$$

$$\boxed{\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) = 0}$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) = 0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = 0,\ u^\mu := \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}}$$

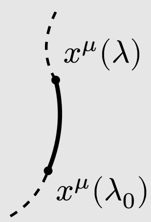
u^μ: 4er-Geschwindigkeit

$$u^2 = u^\mu u_\mu = \frac{c^2}{\dot{x}^2}\underbrace{\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu}_{\dot{x}^2} = c^2$$

Wähle zwei Parametrisierungen:

1) Eigenzeit: Wähle als Parametrisierung der Kurve die Eigenzeit

$$\tau(\lambda) := \frac{1}{c}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda$$



Bewegungsgleichungen generell:

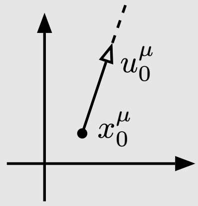
$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Betrachte u^μ:

$$\Rightarrow u^\mu = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}}_{\frac{1}{c}\sqrt{\dot{x}^2}} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \qquad \boxed{\Longrightarrow u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$

$\Longrightarrow$ Bewegungsgleichung wird zu:

$$0 = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$$



Die Bewegung eines freien Teilchens wird also durch eine Gerade beschrieben:

$$\boxed{\Longrightarrow x^\mu(\tau) = u_0^\mu \cdot \tau + x_0^\mu \quad u_0^\mu, x_0^\mu = \text{const.}}$$

$$u^\mu u_\mu = u_0^\mu u_{0\mu} = c^2 > 0 \Longrightarrow \text{zeitartig}$$

2) Koordinatenzeit: Wähle als Parametrisierung der Kurve $\lambda = t$

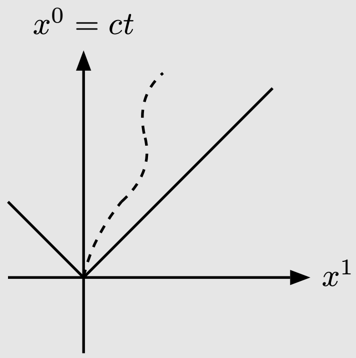
$$x^0 = ct, \quad \text{Setze } \lambda = t \Longrightarrow x^\mu(t) = (ct, x^i(t))$$

$$\Longrightarrow \dot{x}^\mu = \left(c, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) \equiv (c, v^i)$$

$$\Longrightarrow \dot{x}^2 = c^2 - |\vec{v}|^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{:=\gamma} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c}\cdot\gamma$$

Damit: $u^\mu = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\dot{x}^\mu = \gamma \dot{x}^\mu = \gamma(c, \vec{v})$



$$S = -mc\int \mathrm{d}s = -mc\int \mathrm{d}t\,\sqrt{\dot{x}^2} = -mc^2\int \mathrm{d}t\,\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

Lagrange-Funktion:

$$\boxed{\Longrightarrow L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

Energie/**Hamiltonische Funktion:** $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \gamma \cdot m\dot{x}_i$

$$\Longrightarrow E = H := p_i \dot{x}^2 - L = \ldots = \gamma \cdot mc^2 \approx \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \frac{p^2}{2m} + \mathcal{O}(p^4)$$

$\Longrightarrow$ Ruheenergie

$$\boxed{E = mc^2}$$

Ladungsdichte ρ und Strom $\vec{j}$

Stationärer Fall: $x^\mu(\lambda) \overset{\lambda=t}{=} x^\mu(t) = (ct, \vec{x}_0)$

Geladenes Teilchen mit Ladung e am Ort $\vec{x}_0$.

$$\rho(\vec{x}_0) = e \cdot \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad \vec{j}(\vec{x}) = 0$$

Wiederholung: Dirac "δ-Funktion"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta(x) = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta(x-a) f(x) = f(a)$$

Keine Funktion $\delta(x)$ hat exakt diese Eigenschaften, aber wir können sie beliebig genau annähern.

$$\Delta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \; \varepsilon > 0 \qquad \text{"}\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta_\varepsilon(x)\text{"}$$

Eigenschaften der δ-Funktion:

- $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$
- Für glatte Funktion $f(x)$ mit Nullstellen x_n, so dass $f'(x_n) \neq 0$

$$\overset{\text{ÜA}}{\Longrightarrow} \delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n)$$

$$\Longrightarrow \text{Spezialfall: } \delta(a \cdot x) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

Dirac δ-Funktion in höheren Dimensionen:

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(x^1 - y^1)\delta(x^2 - y^2)\delta(x^3 - y^3) \text{ etc.}$$

z.B.:

$$\int_V \mathrm{d}^3\vec{y} \, f(\vec{y})\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x})$$

$$\Longrightarrow \int \mathrm{d}^3\vec{x} \, \rho(\vec{x}) = e \int \mathrm{d}^3\vec{x} \, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = e \Longrightarrow Q = e \text{ Gesamtladung}$$

Kontinuitätsgleichung: Für zeitabhängige Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$ hat man eine Relation zum Strom $\vec{j}$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$$

Interpretation: Für zeitabhängige $\rho(\vec{x}, t)$ ist die Gesamtladung in V zeitabhängig.

Abbildung

$$\boxed{Q_v(t) := \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \rho(\vec{x}, t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_v(t)}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \nabla \cdot \vec{j} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\partial V} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$$
$$= \text{Gesamtstrom durch die Oberfläche}$$

Für **relativistische** Teilchen: ρ und $\vec{j}$ kombinieren sich zu relativistisch kovarianten 4-Vektoren.

$$\boxed{j^\mu := \left(c\rho, \vec{j}\right)}$$

$j^0 = c\rho, j^i = \left(\vec{j}\right)^i$

Eine Erhaltungsrelation:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \sum_{i=1}^{3} \partial_i j^i = \frac{\partial}{\partial x^0}(c\rho) + \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

4er-Strom für geladenes Punktteilchen?

Weltlinie des Teilchens mit Ladung e: $x^\mu(\lambda)$

$$\boxed{j^\mu(x) = ce \int \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \delta^4(x - x(\lambda))}$$

Beachte: $x \mathrel{\hat{=}}$ Punkt im $\mathbb{R}^{3,1}$ aber $x(\lambda) \mathrel{\hat{=}}$ 4 Funktionen der Parametrisierung

Wähle Parametrisierung nach Koordinatenzeit: $x^\mu(\lambda) = x^\mu(t') = (ct', \vec{x}(t'))$

$$\begin{aligned} j^0(ct,\vec{x}) &= ce\int \mathrm{d}t'\,\frac{\mathrm{d}x^0(t')}{\mathrm{d}t'}\underbrace{\delta(ct-ct')}_{\frac{1}{c}\delta(t-t')}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t')) \\ &= ce\int \mathrm{d}t'\,\delta(t-t')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t')) \\ &= ce\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ &= c\cdot\rho(\vec{x},t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \rho(\vec{x},t) = e\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))}$$

Konsistent mit dem stationären Fall

3er-Strom:

$$j^i(ct,\vec{x}) = ce\int \mathrm{d}t'\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^i(t')}{\mathrm{d}t'}}_{=v^i(t')}\underbrace{\delta(c(t-t'))}_{=\frac{1}{c}\delta(t-t')}\int^3(\vec{x}-\vec{x}(t'))$$

$$= e\int \mathrm{d}t'\,v^i(t')\delta(t-t')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t')) = ev^i(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))$$

$$\boxed{\begin{aligned} &j^0 = c\rho = cr\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ &\vec{j} = e\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)) \end{aligned}}$$

$$\boxed{j^\mu(x) := ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\delta^4(x-x(\lambda))}$$

Behauptung: $\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

Beweis: Test-Funktion $\varphi(x)$ (Skalar im $\mathbb{R}^3$)

Abbildung

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^4x\,\varphi(x)\partial_\mu j^\mu(x) &\overset{\text{Def.}}{=} ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}x^\mu(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\delta^4(x-x(\lambda)) \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} -ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\varphi(x)\delta^4(x-x(\lambda))\Big|_{x^\mu=x^\mu(\lambda)} \\ &= -ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}\Big|_{x=x(\lambda)} \\ &= -ce\int \mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\varphi(x(\lambda)) = 0 \end{aligned}$$

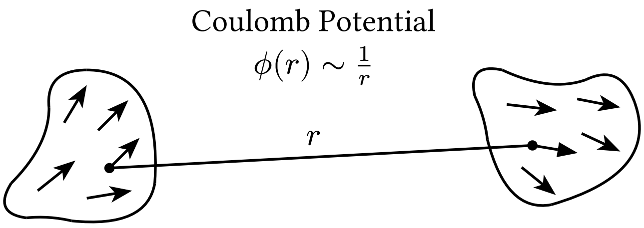
Für beliebige Testfunktionen

Resultate bisher:

- **Ladungsdichte** einer Punktladung e mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$
$$\rho(t,\vec{x}) = e\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t))$$
- **Stromdichte:**
$$\vec{j}(t,\vec{x}) = e\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(t)), \quad \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$
  Relativistisch kovariante Form $j^\mu(x) = \big(c\rho(x), \vec{j}(x)\big)$

Limes vieler Punktladungen:

Glatte Funktion $\rho(x)$, glattes Vektorfeld $\vec{j}(x)$



$\longrightarrow$ instantane Wechselwirkung (Kraft) nicht kompatibel mit SR!

$\longrightarrow$ Feldtheorie, dynamische Felder $\vec{E}(t,\vec{x}), \vec{B}(t,\vec{x})$

3.4. Relativistische Feldtheorie

Eine Feldtheorie besteht aus dynamischen Felder, die jeden Punkt des Raums $\mathbb{R}^3$ (oder der Raumzeit $\mathbb{R}^{3,1}$) eine Zahl, Vektor, Matrix etc. zuweisen.

Beispiel: Skalarfeld: $\varphi(t,\vec{x})$, Vektorfeld: $\vec{A}(t,\vec{x})$

Unterschied zu Punktteilchen:

$\longrightarrow$ Bewegungsgleichungen sind <u>gewöhnliche</u> Differentialgleichungen:

$x(t) \in \mathbb{R}^3$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

In Feldtheorie: $\longrightarrow$ <u>partielle</u> Differentialgleichungen für $\varphi(t,\vec{x})$, $\vec{A}(t,\vec{x})$

Beispiel: Kontinuitätsgleichung für $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{j}(t,\vec{x})$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

Felder auf Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}), \quad \mu = 0,1,2,3, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Skalarfeld: $\varphi = \varphi(x) = \varphi(x^\mu) = \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$

Lorentz-Transformation: $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad [x' = \Lambda \cdot x]$

$$\varphi \longrightarrow \varphi' \qquad \text{so dass} \qquad \varphi'(x') = \varphi(x)$$
$$\Longleftrightarrow \varphi'(x') = \varphi'(\Lambda x) = \varphi(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

$y := \Lambda \cdot x, x = \Lambda^{-1} y$

$$\Longrightarrow \varphi'(y) = \varphi(\Lambda^{-1} y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^{3,1}$$

Umbennen: $y \to x$:

$$\boxed{\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1} x)}$$

Vektorfelder: $A^\mu = A^\mu(x)$, $A^\mu \to A'^\mu$, wobei

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1} x)}$$

Höhere Tensoren: $F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x)$

$$F'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1} x)$$

Partielle Ableitungen/Differentialgleichungen:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Unter Lorentz-Transformationen: $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \\ &= \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_v \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \partial'_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\partial'_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \partial_\nu}$$

Beispiel:

$$\square := \partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^3}{\partial (x^0)^3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Laplace-Operator:

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla$$

Wellengleichungen:

Laplace-Operator:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi(t, \vec{x}) = 0$$

3.5. Maxwell-Gleichungen

Empirischer Input:

1. Es existieren elektrische Felder $\vec{E}(t, \vec{x})$ und magnetische Felder $\vec{B}(t, \vec{x})$
2. $\vec{B} \longleftrightarrow$ bewegte Ladungen ($\vec{j}$) für stationäre Punktladungen am Ort $\vec{x}_0$:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\left|\vec{x} - \vec{x}_0\right|^3}$$

Übungsaufgabe: $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ für $\vec{x} \neq \vec{x}_0$, ρ: Ladungsdichte

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

3. Es existieren **keine** magnetischen Ladungen

$$0 = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_V \mathrm{d}^3 x \, \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \forall V$$

$$\boxed{\implies \nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

Welches Feld im Minkowski-Raum beinhaltet $\vec{E}$ und $\vec{B}$?

Antisymmetrisch: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right), \vec{E} \sim c\rho = j^0$

Da die erste Komponente vom Viererstrom $j^0 = c\rho$, schreiben wir $\boldsymbol{E}$ in die F_{0j} Komponenten. $\boldsymbol{B}$ schreiben wir in die F_{ij} Komponenten, da es mit $j^i = \vec{j}$ assoziiert wird.

Feldstärke-Tensor:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Effizientere Notation:

$$F_{0i} = E_i, \quad i = 1, 2, 3$$
$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k$$

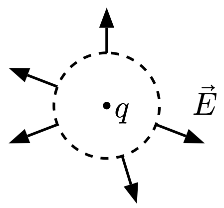
$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &:= \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \\ \implies F^{0i} &= \eta^{00}\eta^{ij} F_{0j} = -\delta^{ij} E_j = -E^i \\ F^{ij} &= \eta^{ik}\eta^{jl} F_{kl} = -\varepsilon^{ijk} B_k \end{aligned}$$

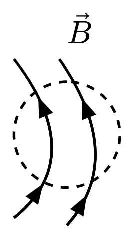
$$\implies F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell-Gleichungen:

Empirische Annahmen: (Gauss: $\varepsilon_0 \to \frac{1}{4\pi}$)

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}}$$





Motivation dessen:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = 4\pi Q \qquad\qquad 0 = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_V \mathrm{d}^3 x \, \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c} j^0$$

$$\implies \partial_i F^{io} = \frac{4\pi}{c} j^0$$

Postulat (inhomogene Maxwell Gleichungen):

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = 0 \qquad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k$$

$$\implies \varepsilon^{ijl} F_{ij} = i\varepsilon^{ijl}\varepsilon_{ijk} B^k = -2B^l$$

$$\boxed{\implies B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F_{jk} = 0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} = 0$$

4D Levi-Civita-Tensor: $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$: total antisymmetrisch, $\varepsilon^{0123} = +1$, Lorentz-invariant unter $SO(1,3)$

$$\implies \varepsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = 0$$

Postulat (homogene Maxwell Gleichungen):

$$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0}$$

$$\iff$$

$$\boxed{\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0}$$

Es bleibt die Konsequenzen dieser Theorie auszurechnen und auf Konsistenz zu prüfen.

Betrachte die inhomogenen Maxwellgleichungen.

$\nu = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \underbrace{\partial_0 F^{00}}_{=0} + \partial_i F^{i0} = \partial_i E^i = \nabla \cdot \vec{E} \\ &= \frac{4\pi}{c} j^0 = \frac{4\pi}{c} c\rho = 4\pi\rho \\ &\implies \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \end{aligned}$$

$\nu = j$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu j} &= \partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij}\\ &= \partial_0\left(-E^j\right) + \partial_i\left(-\varepsilon^{ijk} B_k\right)\\ &= -\frac{\partial E^j}{\partial x^0} + \varepsilon^{jik}\partial_i B_k\\ &\overset{x^0=ct}{=} -\frac{1}{c}\frac{\partial E^j}{\partial t} + \left(\nabla \times \vec{B}\right)^j\\ &\overset{!}{=} \frac{4\pi}{c} j^j\end{aligned}$$

$$\boxed{\Longrightarrow -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

<u>Divergenz:</u>

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\nabla \cdot \vec{E}\right)}_{=4\pi\rho} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right)}_{=0} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\rho = \nabla \cdot \vec{j} \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Kontinuitätsgleichung

Betrachte die homogene Maxwellgleichungen:

$\mu = 0$:

$$\varepsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_i B^i = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$\mu = i$:

$$\varepsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + \varepsilon^{ij0k}\partial_j F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}\partial_j F_{k0} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0}$$

Maxwell-Gleichungen

inhomogen:	**homogen:**
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$	$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Im Vakuum ($\rho = 0 = \vec{j}$), **elektrisch-magnetische Dualität**: invariant unter

$$\boxed{\vec{E} \longrightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \longrightarrow -\vec{E}}$$

Kommentar: Andere Konventionen sind oft üblich

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

SI Einheiten: $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, ε_0: Permittitivität (des leeren Raumes), μ_0: Permeabilität (des leeren Raumes)

nach obigem $\quad \vec{E} \to \frac{1}{c}\vec{E}, \quad \varepsilon \to \frac{1}{4\pi c}$

Maxwell-Gleichungen in SI Einheiten:

inhomogen:	**homogen:**
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Übersicht der Maxwell-Gleichungen in verschiedenen Formen:

	homogen	inhomogen
ursprüngliche Form	$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}$ $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}$ $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}$	$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho$ $\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j_x$ $\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j_y$ $\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j_z$
3D kovriante Form	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$
Relativistische Form	$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_v F_{\rho\sigma} = 0$	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$
Differential-Formen	$\mathrm{d}F = 0$	$\mathrm{d}^\dagger F = \frac{4\pi}{c} j$

3.6. Maxwell in Differentialformen

$\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^{1,3}$

<u>0-Form:</u> (Lorentz-) Skalar

<u>1-Form:</u> $A = A_\mu(x)\,\mathrm{d}x^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$

<u>2-Form:</u> $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ wobei $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$$\vdots$$

deRham Differential: "$d := \partial_\mu\,\mathrm{d}x^\mu \wedge$"

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \partial_\mu(\mathrm{d}x^\mu \wedge A) = \partial_\mu(\mathrm{d}x^\mu \wedge (A_v(x)\,\mathrm{d}x^\nu)) \\ &= \partial_\mu A_\nu\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2}\big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\big)\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \partial_\mu(\mathrm{d}x^\mu \wedge F) = \partial_\mu\left(\mathrm{d}x^\mu \wedge \frac{1}{2}F_{\nu\rho}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\nu\rho}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \quad [\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = -\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu] \\ &= \frac{1}{3!}\big(\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}\big)\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\mathrm{d}F = 0}$$

homogene Maxwell-Gl.

Hodge-Dualität: (p-Form) $\longleftrightarrow$ $(4-p)$-Formen

2-Form: $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$

$$\longrightarrow \star F = \frac{1}{2} (\star F)_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

wobei $(\star F)_\mu \nu := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$

Maxwell in Differentialformen

3-Form: $H = \frac{1}{3!} H_{\mu\nu\rho}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho$

$$\longrightarrow \star H = (\star H)_\mu\, \mathrm{d}x^\mu$$

wobei $(\star H)_\mu := \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} H^{\nu\rho\sigma}$

Feldstärke 2-Form $F \xrightarrow{\star}$ 2-Form $\star F \xrightarrow{\mathrm{d}}$ 3-Form $d(\star F) \xrightarrow{\star}$ 1-Form $\star\, \mathrm{d}(\star F)$

Übungsaufgabe:

$$\boxed{\star\, \mathrm{d}(\star F) = \left(\partial^\mu F_{\mu\nu}\right) \mathrm{d}x^\nu}$$

4er Strom als 1-Form $j = j_\mu\, \mathrm{d}x^\mu$ wobei $j_\mu := \eta_{\mu\nu} j^\nu \Longrightarrow \star\, \mathrm{d}(\star F) = \frac{4\pi}{c} j$

Notation:

$$\boxed{\mathrm{d}^\dagger \ := \star\, \mathrm{d} \star}$$

Diese Operator bildet eine p-Form auf eine $(p-1)$-Form ab.

$\Longrightarrow$ Maxwell-Gl.:

$$\begin{aligned} \text{inhomogen:} \quad & \mathrm{d}^\dagger F = \frac{4\pi}{c} j \\ \text{homogen:} \quad & \mathrm{d}F = 0 \end{aligned}$$

Eich-Potentiale: Die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ bzw. Die Komponenten $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind unpraktisch für diese Anwendung.

$\Longrightarrow$ **Eichpotentiale**

Homogene Gl. $\mathrm{d}F = 0$ bzw. $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$ allgemein gelöst durch

$$F = \mathrm{d}A \Longleftrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$\Longrightarrow \mathrm{d}F = \mathrm{d}^2 A = 0$ nach $\mathrm{d}^2 = 0$ oder

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_\nu F_{\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \left(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho\right) = 0$$

nach $\partial_\nu \partial_\rho = \partial_\rho \partial_\nu$ Die andere Richtung der Äquivalenz ($\mathrm{d}F = 0 \Longleftrightarrow \exists A : \mathrm{d}A = F$) gilt allgemein nur "lokal" ("Poincare-Lemma")

Ab jetzt: Die fundamentalen elektromagnetischen Felder sind die Eichpotentiale $A_\mu(x)$ und $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Maxell-Gl.: partielle Dgl. zweiter Ordnung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu\left(\partial_\mu A^\mu\right) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$\Box$: Wellenoperator (d'Alembert)

Eichinvarianz/Eich-Redundanz: Die $F_{\mu\nu}$ (bzw. $\vec{E}$ und $\vec{B}$) sind physikalisch/messbar, die A_μ im Allg. jedoch nicht.

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) := A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x)$$

Λ: beliebige Funktion/Eichparameter

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu\left(A_\mu - \partial_\mu \Lambda\right) = \partial_\mu A - \nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

In Komponenten: $A_\mu = \left(\phi, -\vec{A}\right)$

$$A'_\mu = \left(\phi', -\vec{A}'\right) = A_\mu - \partial_\mu \Lambda = \left(\phi - \partial_0 \Lambda, -\vec{A} - \nabla\Lambda\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\phi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda}$$

Wirkungsprinzip von Feldern + Materie

Geladene Punktteilchen mit Masse $m_i, i = 1, .., N$, parametrisierte Weltlinie $x_i^\mu(\lambda)$, λ: Parameter. Dann ist ist die Wirkung

$$\boxed{S = -\sum_{i=1}^N m_i c \int \mathrm{d}s_i, \quad \mathrm{d}s_i = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x_i^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x_i^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\, \mathrm{d}\lambda}$$

Kopplung an A_μ?

$$S\left[A_\mu, x_i^\mu(\lambda)\right] = -\sum_{i=1}^N m_i c \int \mathrm{d}s_i - \frac{1}{16\pi c} \int \mathrm{d}^4\lambda \left(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{16\pi}{c} A_\mu j^\mu\right)$$

Eich-Felder/Eichpotentiale

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $A_\mu(x)$ kovariantes Vektorfeld ("Eich-Potential")

$A_\mu = \left(\phi, -\vec{A}\right), A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right)$

Eich-Symmetrie:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda, F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu} \quad \text{invariant}$$

Wirkungsprinzip von Felder + Materie:

Dynamische Variablen:

- $A_\mu(x)$ Eich-Feld
- $x^\mu(\lambda)$ Weltlinie eines Punktteilchens (parametrisierte Kurve C im $\mathbb{R}^{3,1}$)

$$S = \underbrace{-mc \int_C \mathrm{d}s}_{S_{\text{Teilchen}}} + \underbrace{\int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{16\pi c} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right)}_{S_{\text{Feld}}} + \underbrace{\int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu\right)}_{S_{\text{Wechselwirkung}}}$$

Lorentz-System: $x^\mu = (ct, x^i)$

$$\int \mathrm{d}^4x = c \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x \qquad S = \int \mathrm{d}t\, L = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L} \qquad \mathcal{L}\text{: Lagrange-Dichte}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}[A_\mu] = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} A_\mu j^\mu}$$

Variation nach A_μ:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{16\pi c}\left(\delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{c^2} \delta A_\mu j^\mu\right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{8\pi c} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \delta A_\mu j^\mu\right) \end{aligned}$$

$$\left[\quad \delta F_{\mu\nu} + \delta\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = \partial_\mu(\delta A_\nu) - \partial_\nu\left(\delta A_\mu\right) \quad \right]$$

$$= \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{8\pi c} F^{\mu\nu}\left(\partial_\mu(\delta A_\nu) - \partial_\nu\left(\delta A_\mu\right)\right) - \frac{1}{c^2} \delta A_\mu j^\mu\right)$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu} \partial_\mu(\delta A_\nu) - \frac{1}{c^2} \delta A_\mu j^\mu\right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{4\pi c} \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu - \frac{1}{c^2} \delta A_\nu j^\nu\right) \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int \mathrm{d}^4x \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c} j^\nu\right) \delta A_\nu \end{aligned}$$

nach dem Hamiltonschen Prinzip

$$\stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für beliebige Varianten von } A_\mu$$

$\Longrightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c} j^\nu = 0$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

Maxwell-Gl. ist Euler-Lagrange-Gl.

Variation nach $x^\mu(\lambda)$:

$$\delta S_{\text{Teilchen}} = -mc\delta \int \mathrm{d}s = m \int \delta x_\mu \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \,\mathrm{d}\lambda$$

4er-Strom für Punktteilchen:

$$\boxed{j^\mu(x) = ce \int \mathrm{d}\lambda \, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \delta^4(x - x(\lambda))}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{Wechselwirkung}} &= -\frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}^4x \, A_\mu(x) j^\mu(x) = -\frac{e}{c} \int \mathrm{d}\lambda \, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \int \mathrm{d}^4x \, A_\mu(x) \delta^4(x - x(\lambda)) \\ &= -\frac{e}{c} \int \mathrm{d}\lambda \, A_\mu(x(\lambda)) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{e}{c} \int_C A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu \quad \text{Integral der 1-Form entlang } C \end{aligned}$$

$$A_\mu(x(\lambda) + \delta x(\lambda)) \stackrel{\text{Taylorentw.}}{=} A_\mu(x(\lambda)) + \left.\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right|_{x = x(\lambda)} \cdot \delta x^\nu + \ldots$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\delta\big(A_\mu(x(\lambda))\big) = \big(\partial_\nu A_\mu\big)(x(\lambda)) \cdot \delta x^\nu(\lambda)}$$

$$\begin{aligned} \delta\left(-\frac{e}{c} \int_C A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu\right) &= \delta\left(-\frac{e}{c} \int \mathrm{d}\lambda \, A_\mu(x(\lambda)) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) \\ &= -\frac{e}{c} \int \mathrm{d}\lambda (\delta\left(A_\mu(x(\lambda))\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + A_\mu(x(\lambda)) \delta\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\right) \\ &= \frac{e}{c} \int \mathrm{d}\lambda \left[\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right] \delta x^\nu \end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\delta\left(-mc\int \mathrm{d}s - \frac{e}{c}\int A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu\right) = \int \mathrm{d}\lambda\left(m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{e}{c}F^\mu_\nu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\delta x_\mu$$

$$\Longrightarrow m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$\boxed{\Longrightarrow ma^\mu = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_v}$$

Die “4er-Lorentz-Kraft”

Eigenzeit τ: $x^\mu(\tau)$, $\frac{c}{\sqrt{\dot{x}}} = 1$

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}(x(\tau))\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\tau}}$$

3.7. Maxwellgleichungen und Bewegungsgleichungen

elektromagnetischen Feld $A_\mu(x)$ (Eichpotential) und Weltlinie C für **geladenes Teilchen** $(x^\mu(\lambda))$

Wirkungsfunktional:

$$\boxed{S\left[A_\mu(x), x^\mu(\lambda)\right] := -mc\int_C \mathrm{d}s - \frac{3}{c}\int_C A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu - \frac{1}{16\pi c}\int \mathrm{d}^4x\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$

$$\int_C \mathrm{d}s := \int_I \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda \qquad \int_C A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu := \int_I A_\mu(x(\lambda))\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

$$\delta S = \int \mathrm{d}\lambda\,\delta x_\mu\left(m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\lambda} - \frac{e}{c}F^\mu_\nu(x(\lambda))\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right) + \frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}^4x\,\delta A_\nu\cdot\left(\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c}j^\nu\right) \overset{!}{=} 0$$

diese eine Gleichung kodiert die gesamte Theorie

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu \qquad \text{inhomogene Maxwell-Gl.}$$

$$m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$\text{4er-Geschw.: } u^\mu = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \qquad \text{4er-Beschl.: } a^\mu = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$$

$\Longrightarrow$

$$ma^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_v$$

1) Eigenzeit $\lambda := c, \dot{x}^2 = c^2$ definierende Eigenschaft der Eigenzeit

$$\Longrightarrow u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, u^\mu u_\mu = c^2, a^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$$

Koordinatenzeit: $\lambda = t$

$$\begin{aligned}
&x^\mu(t) = (ct, x^i(t)) = (ct, \vec{x}(t)) \\
&\Longrightarrow \dot{x}^\mu(t) = (c, v^i) = (c, \vec{v}) \\
&\dot{x}^2 = c^2 - |\vec{v}|^2 \equiv c^2 - v^2 = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&\Longrightarrow \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} \equiv \gamma \\
&\Longrightarrow u^m = \gamma \dot{x}^\mu = \gamma(c, \vec{v}), u_\mu = \gamma(c, -\vec{v}) \\
&\Longleftrightarrow u_0 = \gamma \cdot c, u_i = -\gamma v_i
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\mu = i}$ (räumliche Komponente):

$$\begin{aligned}
m\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma v^i) &= \frac{e}{c} F^{i\nu} u_\nu = \frac{e}{c}(F^{i0} u_0 + F^{ij} u_j) \\
&= \frac{e}{c}(E^i \gamma c - \varepsilon^{ijk} B_k(-\gamma v_i)) = \gamma \cdot \left(eE^i + \frac{e}{c} E^{ijk} v_j B_k\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma \vec{v}) = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} \vec{v}\right) = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}}$$

relativistische Impuls:

$$\boxed{\vec{p} := \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} \vec{v} \equiv m(v)\vec{v}}$$

$m(v) := \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ist die “relativistische Masse”

Damit erhalten wir

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}}$$

Nachtrag zur relativistischen Mechanik

Energie: $E = \gamma m c^2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} \Longrightarrow m = 0 : E = c|\vec{p}|$

4er Impuls: $p^\mu := m \cdot u^\mu \Longrightarrow p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2c^2$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

konstantes elektrisches Feld:

$\vec{E} = \text{const.}\ \phi(\vec{x}) = -\vec{E} \cdot \vec{x}$, wähle Koordinatensystem so dass $\vec{E} = (E, 0, 0)$, $\vec{B} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\vec{E} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_x = eE, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_z = 0$$

Bewegung in (x, y)-Ebene ($p_z(0) = 0 \Longrightarrow p_z = 0$)

$$\boxed{p_x = eE \cdot t, \quad p_y = p_{y,0} = \text{const.}}$$

$$\Longrightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(p_{y,0}\right)^2 + (ceEt)^2}$$

$$\Longrightarrow E = \sqrt{E_0^2 + (ceEt)^2}$$

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p}, \quad v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{E}p_x = \frac{c^2eEt}{\sqrt{E_0^2 + (ceEt)^2}}$$

Integration $\int \mathrm{d}t$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{eE}\sqrt{E_0^2 + (ceEt)^2}}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{E}p_y = \frac{p_{y,0} \cdot c^2}{\sqrt{E_0^2 + (ceEt)^2}}$$

$\Longrightarrow$ Integration

$$\boxed{y(t) = \frac{p_{y,0} \cdot c}{eE} \cdot \sinh^{-1}\left(\frac{ceEt}{E_0}\right)}$$

Bahnkurve in (x, y)-Ebene

$$\sinh\left(\frac{eE}{p_{y,0}c}y\right) = \frac{ceEt}{E_0} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{E_0}{eE}\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{eE}{p_{y,0}c}y\right)}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{x = \frac{E_0}{eE}\cosh\left(\frac{eE}{p_{y,0}c}y\right)}$$

"Kettenlinie"

4. Elektrostatik

Spezialfall: **stationäre Ladungsverteilung**

$\rho = \rho(\vec{x}) = \rho(x^1, x^2, x^3), \vec{j} = 0, F_{0i} = \partial_0 A - i - \partial_i A_0 = E_i$ (Elektrisches Feld)

$$\boxed{\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}}$$

$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B^k = \partial_i A_j - \partial_j A_i$

$$\boxed{\vec{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}}$$

Maxwell-Gl.:

$$\text{Annahmen:} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(x^1, x^2, x^3) \longrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} = 0$

Ausgedrückt mit den Potentialen:

1. Maxwell-Gl.:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\phi) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = 4\pi\rho$$

$\Longrightarrow \Delta\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = -4\pi\rho$

Mit Eichbedingung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\boxed{\Delta\phi = -4\pi\rho \quad \text{Poission-Gleichung}}$$

Programm: Finde ϕ für ein gegebenes ρ

Eichwahl: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda, \quad \delta\vec{A} = \nabla\Lambda \Longleftrightarrow \delta A_i = \partial_i \Lambda$$

$\Longrightarrow \delta_1(\nabla \cdot (A)) = \delta_1(\partial_i A^i) = \partial_i \partial_i \Lambda = \Delta\Lambda$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \Delta\Lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \Delta\Lambda = -\nabla \cdot \vec{A}$$

Lösung für Λ existiert

$$\Longrightarrow \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{ist eine zulässige Eichbedingung}$$

2. Maxwell-Gl.:

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)^i = 0$$

$$= \varepsilon^{ijk} \partial_j \left(\nabla \times \vec{A}\right)_k = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} \partial_j \partial^m A^k = \partial_j (\partial^i A^j - \partial^j A^j)$$

$$\Longrightarrow \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)^i = \partial^i (\partial_j A^j) - \partial_j \partial^j A^i = \left(\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A}\right)^i$$

$$\Longrightarrow \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = 0}$$

Mit der Eichwahl $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

$$\boxed{\Delta\vec{A} = 0}$$

Zusammenfassend:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Elektrostatik} \\ \Delta\phi = -4\pi\rho \;\; \text{für } \rho = \rho(\vec{x}) \\ \vec{E} = -\nabla\phi \\ \vec{B} = 0 \end{array}}$$

Integralform von $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$

$$\int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \int \mathrm{d}^3x\, \rho(x) = \underbrace{4\pi e}_{1}$$

Wähle $V =$ Kugel mit Radius R um e, $\partial V =$ Sphäre (Rand der Kugel)

$$\Longrightarrow \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \underbrace{4\pi R^2 E(R)}_{2}$$

$$\boxed{\overset{1 \text{ und } 2}{\Longrightarrow} E(R) = \frac{e}{R^2}}$$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{e}{R^2} \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|^2} = \frac{e\vec{R}}{R^3}$$

Skalarpotential: $\phi(\vec{x}) = \frac{e}{R} = \frac{e}{|\vec{x}|} = e\left(x^i x_i\right)^{-\frac{1}{2}}$

Probe: liefert ϕ das richtige E-Feld?

$$\partial_i \phi = e\partial_i \left[\left(x^i x_j\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{e}{2}\left(x^j x_j\right)^{-\frac{3}{2}} \partial_i \left(x^j x_j\right) = -e \frac{x_i}{\left(x^j x_j\right)^{\frac{3}{2}}} = -e \frac{x_i}{|\vec{x}|^3}$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi = e\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{e\vec{R}}{R^3}$$

Poisson-Gl.: $\Delta\left(\frac{e}{R}\right) = -4\pi\rho = -4\pi e \delta^3\left(\vec{R}\right) \quad \Longleftrightarrow$

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta^3\left(\vec{R}\right)}$$

N Ladungen bei $\vec{x} = \vec{x}_n, n = 1, ..., N$: $\rho(\vec{x}) = \sum_{n=1}^N e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n)$

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \sum_{n=1}^N \frac{e_n}{|\vec{x} - \vec{x}_n|}}$$

$$\Longrightarrow \Delta\phi = \sum_{n=1}^N e_n \Delta\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_n|}\right) = -4\pi \sum_{n=1}^N e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) = 4\pi\rho$$

4.1. Dipol- und Multipolentwicklung

Betrachte eine System geladener Teilchen:

exaktes Resultat:

$$\phi(\vec{x} == \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a|}$$

$\Longrightarrow$ Taylorentwicklung für $|\vec{x}| \gg |\vec{x}_a|$

$|\vec{a}| \ll 1:$

$$f(x+a) = f(\vec{x}) + a^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{a=0} + \frac{1}{2} a^i a^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\bigg|_{a=0} + \ldots$$
$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{x}) + \vec{a} \cdot \nabla f + \ldots$$

$\vec{a} = -\vec{x}_a$

$$\Longrightarrow \phi(\vec{x}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{x}|} - \sum_a e_a \vec{x}_a \cdot \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) + \ldots$$
$$\frac{\sum_a e_a}{|\vec{x}|} - \left(\sum_a e_a \cdot \vec{x}_a\right) \cdot \nabla\left(\frac{1}{|x|_i}\right) + \ldots$$

$$\boxed{\Longrightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|} - \vec{d} \cdot \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) + \ldots \quad \text{wobei } Q\text{: Gesamtladung mit} \quad d := \sum_a e_a \cdot \vec{x}_a\text{: Dipolmoment}}$$

Spezialfall: $Q = 0$

$\Longrightarrow \vec{d}$: translationsinvariant unter $\vec{x} \longrightarrow \vec{x} + \vec{a}$

$$\vec{d}' = \sum_a e_a(\vec{x} + \vec{a}) = \vec{d} + Q \cdot \vec{a} = \vec{d} \quad \checkmark$$

$$\vec{d} = \sum_a e_a^+ \vec{x}_a^+ - \sum_a e_a^- \vec{x}_a^- \equiv \left(\sum_a e_a^+\right) \vec{R}^+ - \left(\sum_a e_a^-\right) \vec{R}^-$$
$$\text{mit } \vec{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \vec{x}_a^+}{\sum_a e_a^+}, \quad \vec{R}^- = \ldots$$

$Q = 0$: $\sum_{e_a^+} = \sum_a e_a^- \equiv e \Longrightarrow$

$$\boxed{\vec{d} = e\left(\vec{R}^+ - \vec{R}^-\right)}$$

$$\Longrightarrow \phi(\vec{x}) = -\vec{d} \cdot \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \Longrightarrow \vec{E} = -\nabla\phi = \frac{3\left(\vec{d} \cdot \vec{n}\right)\vec{n} - \vec{d}}{|\vec{x}|^3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

$\vec{E} = -\nabla\phi \Longleftrightarrow E^i = 0\partial^i\phi$

Fall: $Q = 0$:

$$\partial^i\phi = \partial^i \frac{d_j x^j}{\left(x^k x_k\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d_j \delta^{ij}}{\left(x^k x_k\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\frac{d_j x^j}{\left(x^k x_k\right)^{\frac{5}{2}}} 2x^i = \frac{d^i}{|\vec{x}|^3} - 3\frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^5}\cdot x^i = \frac{\vec{d} - 3\left(\vec{d}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3\left(\vec{d}\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n} - \vec{d}}{|\vec{x}|^3}}$$

4.2. Multipolmomente

$$\phi = \underbrace{\phi^{(0)}}_{\text{durch } Q \text{ bestimmt}} + \underbrace{\phi^{(1)}}_{\text{Dipolmoment } \vec{d}} + \underbrace{\phi^{(2)}}_{\text{Quadropolmoment}} + \ldots$$

Taylor-Formel:

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_a e_a x_a^i x_a^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_a|}\right)\Bigg|_{\vec{x}_a = 0}$$

spurfrei:

$$\delta^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^j}\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_a|}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \phi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_a e_a\left(x_a^i x_a^j - \frac{1}{3}|\vec{x}|_a^2\delta^{ij}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_a|}\right)$$

Quadropolmoment:

$$\boxed{D^{ij} := \sum_a e_a\left(3x_a^i x_a^j - |\vec{x}_a|\delta^{ij}\right)}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\phi^{(2)} = \frac{1}{3!}D^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)}$$

$$\delta_{ij}D^{ij} = \sum_a e_a\left(3\delta_{ij}x_a^i x_a^j - |\vec{x}_a|^2\delta_{ij}\delta^{ij}\right) = 0$$

$\Longrightarrow$ 5 Freiheitsgrade

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = -\frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \Longrightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(-\frac{x_i}{(x^k x_k)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{\delta^{ij}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3}{2}\frac{x_i}{|\vec{x}|^5}2x_j = \frac{3x_i x_j - |\vec{x}|^2\delta_{ij}}{|\vec{x}|^5}$$

$$\Longrightarrow \phi^{(2)} = \frac{1}{3!}D_{ij}\frac{3x_i x_j - |\vec{x}|^2\delta_{ij}}{|\vec{x}|^5} = \frac{1}{2}\frac{D_{ij}x^i x^j}{|\vec{x}|^5} = \frac{1}{2}\frac{D_{ij}n^i n^j}{|\vec{x}|^3}, \quad n^i = \frac{x^i}{|\vec{x}|}$$

Gesamtresultat:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2}\frac{D_{ij}x^i x^j}{|\vec{x}|^5} + \ldots}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilung: $\rho(\vec{x})$ selbe Formel mit

Gesamtladung:

$$Q := \int_V \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})$$

Dipolmoment:

$$Q := \int_V \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x}) \cdot \vec{x}$$

Quadropolmoment:

$$Q := \int_V \mathrm{d}^3x \big(3x_i x_j - |\vec{x}|^2\delta_{ij}\big)$$

Methode zur Lösung der Poisson-Gleichung: $\Delta\phi = -4\pi\rho$

Greens Funktion: $G(\vec{x},\vec{y})$ so dass

$$\boxed{\Delta_x G(\vec{x},\vec{y}) = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{y})}$$

$\Longrightarrow$ Lösung der Poisson-Gl.:

$$\phi(\vec{x}) = \int G(\vec{x},\vec{y})\delta(\vec{y})\,\mathrm{d}^3\vec{y}$$

Beweis:

$$\Delta_x\phi(\vec{x}) = \int \Delta_x G(\vec{x},\vec{y})\delta(\vec{y})\,\mathrm{d}^3\vec{y} = -4\pi\rho(\vec{x})$$

$$\boxed{G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} + F(\vec{x},\vec{y})}$$

wobei F eine Lösung der Laplace-Gl. ist.

Programm: Finde G und somit ϕ für **Randbedingungen**

4.3. Randwertprobleme

gegeben:

1) ρ auf V (kompakt)

2) ϕ auf ∂V (Rand von V)

gesucht: $\phi(\vec{x})$ in V sd.: $\Delta\phi = -4\pi\rho$

Greensche Identität: φ, ψ Skalarfeld

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\varphi \cdot \Delta\psi - \psi\Delta\varphi) = \int_{\partial V} \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) \mathrm{d}f$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\text{L.S.} &= \int \mathrm{d}^3x(\varphi\partial_i\partial^i\psi - \psi\partial_i\partial^i\varphi) \\
&= \int \mathrm{d}^3x(\partial_i(\varphi\partial^i\psi) - \partial_i\varphi\partial^i\psi - \partial_i(\psi\partial^i\varphi) + \partial_i\psi\partial^i\varphi) \\
&= \int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\boldsymbol{\nabla}\psi) - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\varphi)) \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} \left(\varphi\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma} - \psi\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma}\right)
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Param: $\vec{x}(u,v)$: $\mathrm{d}\vec{\Sigma} := \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\vec{\Sigma} =: \vec{n}\,\mathrm{d}f, \vec{n}$: Normalenvektorfeld auf ∂V

$$\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma} = (\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}f = \frac{\partial\psi}{\partial n}\cdot\mathrm{d}f \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial n} := \boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\vec{n}}$$

$\Longrightarrow$

$$\phi(\vec{x}) = \underbrace{\int_V \mathrm{d}\vec{x}\cdot\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{\text{Coulomb-Potential}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\left\{\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi(x')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right\}}_{\text{Randbeträge}}$$

Man kann nur $\frac{\partial\phi}{\partial n'}$ oder $\phi(x')$ am Rand frei wählen. Hieraus folgen:

Dirichlet-Randbedingung: $\phi|_{\partial V} = \varphi, \quad \varphi : \partial V \to \mathbb{R}$

Neumann-Randbedingung: $\frac{\partial\phi}{\partial n'}\Big|_{\partial V} = \chi, \quad \chi : \partial V \to \mathbb{R}$

Kommentar: Für $V = \mathbb{R}^3$ verschwinden die Randbedingungen

Kommentar zur Neumann-Randbedingung: $\vec{E}_\perp := \vec{n}\cdot\vec{E} = -\vec{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \Longrightarrow$ man fixiert $E_\perp$ auf dem Rand

Behauptung: Die Lösung der Poisson-Gleichung für Dirichlet- oder Neumann-Randbedingung ist eindeutig

Beweis: Seien ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen mit $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = -4\pi\rho$ und $(\phi_1 - \phi_2)|_{\partial V} = 0$ oder $\frac{\partial}{\partial n}(\phi_1 - \phi_2)_{\partial V} = 0$
Betrachte: $\psi := \phi_1 - \phi_2 \Longrightarrow \Delta\psi = 0$ mit $\left(\psi|_{\partial V} = 0 \text{ [Dirichlet] oder } \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0 \text{ [Neumann]}\right)$

Betrachte:

$$\int_V \mathrm{d}^3x\, |\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 = \int_V \mathrm{d}^3x\, \partial_i\psi\partial^i\psi = \int_V \mathrm{d}^3x\, \partial_i(\psi\partial^i\psi - \psi\partial_i\partial^i\psi)$$

$$= \int_V \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\psi) \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} \psi\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_{\partial V} \psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\mathrm{d}f = 0 \text{ mit Randbedingungen}$$

$$\Longrightarrow \int \mathrm{d}^3x\,|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\nabla}\psi = 0 \ \text{ auf } V \Longrightarrow \psi(\vec{x}) = \text{const.}$$

$\Longrightarrow$ Für Dirichlet-Randbedingung: $\psi(\vec{x}) = 0$, für Neumann-Randbedingung: $\phi_1(\vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) + \text{const.}$

□

Greens Funktionen mit geeigneten Randbedingungen

Def.: $\Delta_x G(\vec{x},\vec{y}) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{y})$

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} + F(\vec{x},\vec{y}), \quad \text{wobei } \Delta F = 0$$

Mit Greensche Identität für $\varphi = \phi$ und $\psi = G$:

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\phi(x')\Delta_{x'}G(\vec{x},\vec{x}') - G(\vec{x},\vec{x}')\Delta_x\phi(\vec{x}')) = -4\pi\phi(\vec{x}) + 4\pi\int_V \mathrm{d}^3x\, G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x})$$

$$= \int_{\partial V} \mathrm{d}f'\left[\phi\frac{\partial G}{\partial n'} - G\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right]$$

Beispiel: Dirichlet-Randbedingung: $\phi|_{\partial V} = \varphi$ für gegebenes $\varphi : \partial V \to \mathbb{R}$. Wähle G_0 so, dass $G_0(\vec{x},\vec{x}') = 0$ für $\vec{x}' \in \partial V$

$$\Longrightarrow \phi(\vec{x}) = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, G_0(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}f'\, \varphi(\vec{x})\frac{\partial G_0(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}$$

Halbraum: $V = H = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 > 0\right\} \Longrightarrow \partial V = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = 0\right\}$

Gesucht: $G_0(\vec{x},\vec{x}')$ mit Dirichlet-Randbedingung $\Delta_x G_0(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$, $G_0(\vec{x},\vec{x}') = 0$ für $\vec{x}' \in \partial H$

Ansatz: $G_0(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + f_0(\vec{x},\vec{x}'), \Delta f_0 = 0$ für $\vec{x}' \in \partial H$

$$0 = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + f_0(\vec{x},\vec{x}') \Longrightarrow f_0(\vec{x},\vec{x}')|_{\vec{x}'\in\partial H} = -\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3)^2}}$$

Greens Funktion kann typischerweise symmetrische gewählt werden:

$$f_0(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3+x_3')^2}}$$

Defintion: $\vec{y}_S = (y_1, y_2, -y_3)$

$$\Longrightarrow f_0(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_S|}$$

zz.: löst Laplace-Gleichung:

$$\Delta_x f_0(\vec{x},\vec{y}) = -\Delta_x\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_S|}\right) = 0$$

Resultat:

$$G_0(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_S|}$$

Anwendung: Problem: “gerade Leiterplatte” in (x,y)-Ebene $[\phi|_{\partial V} = 0]$ mit Punktladung q im Abstand $x_0^3 = z, \vec{z} = (0,0,z_0)$

$$\rho(\vec{x}) = q\cdot\delta^3(\vec{x}-\vec{z})$$

$$\Longrightarrow \phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3y\, G_0(\vec{x},\vec{y})\rho(\vec{y}) - \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}f'\,\varphi(\vec{x}')\frac{\partial G_0}{\partial n} = qG_0(\vec{x},\vec{z})$$
$$= \frac{q}{|\vec{x}-\vec{z}|} - \frac{q}{|\vec{x}-\vec{z}_S|} = q\cdot\left[\frac{1}{|\vec{x}-z_0\vec{e}_3|} - \frac{1}{|\vec{x}+z_0\vec{e}_3|}\right]$$

Dirichlet-Randbedingung: $\phi|_{\partial V} = \varphi$ für gegebenes $\varphi : \partial V \to \mathbb{R}$

Wähle Greens Funktion G_D so, dass $G_D(\vec{x},\vec{y}) = 0$ für $\vec{y} \in \partial V, \vec{x}$ beliebig

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \int_V \mathrm{d}^3x'\, G_D(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\,\varphi(\vec{x}')\frac{\partial G_D(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}}$$

eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung (Neumann- oder Dirichlet-eindeutig)

Halbraum $V = H = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$

$$\boxed{G_D(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_S|}}$$

wobei $\vec{y}_0 = (y^1, y^2, y^3)$

Problem: Wir legen auf der "Platte" unser Potential fest und wollen dann die Poisson-Gleichung lösen.

$$\rho(\vec{x} = q\delta(\vec{x}-\vec{z})), \quad \vec{z} = (0,0,z_0)$$

mit dem Resultat oben folgt

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}-\vec{z}|} - \frac{q}{|\vec{x}-\vec{z}_S|}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = q\left[\frac{\vec{x}-z_0\vec{e}_3}{|\vec{x}-z_0\vec{e}_3|^3} - \frac{\vec{x}+z_0\vec{e}_3}{|\vec{x}+z_0\vec{e}_3|^3}\right]$$

Greens Funktion mit Neumann RB:

gegeben: $\chi : \partial V \to \mathbb{R}, \frac{\partial\phi}{\partial n}_{\partial V} = \chi, E_\perp = \vec{n}\cdot\vec{E} = -n\cdot\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$

$$\phi(\vec{x}) = \int_V \mathrm{d}^3x'\, G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\left[\phi\frac{\partial G}{\partial n'} - G\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right]$$

Naiver Ansatz für Neumann RB: $\frac{\partial G_N}{\partial n'} = 0$

$$\Longrightarrow \int_{\partial V}\mathrm{d}f\,\frac{\partial G_N}{\partial n} = \int_{\partial V}\mathrm{d}f\cdot\vec{n}\cdot\nabla G_N = \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{\Sigma}\cdot\nabla G_N \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V \mathrm{d}^3x\,\underbrace{\nabla\cdot(\nabla G_N)}_{\Delta G_N = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$= -4\pi \neq 0$$

Wir können aber fordern:

$$\boxed{\left.\frac{\partial G_N(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}\right|_{\partial V} = -4\pi F(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \int_{\partial V}\mathrm{d}f\,F(\vec{x}) = 1}$$

$$\Longrightarrow \phi(\vec{x}) = \int_V \mathrm{d}^3x'\,G_N(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}) + \int_{\mathrm{d}f'}\phi\cdot F + \frac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}f'\,G_N(\vec{x},\vec{x}')\cdot\chi(\vec{x}')$$

Für Neumann RB: $\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\partial V} = \chi$

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \int_V \mathrm{d}^3x'\,G_N(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}f'\,G_N(\vec{x},\vec{x}')\chi(\vec{x}')}$$

Beispiel: Halbraum

Lösung:

$$\boxed{G_N(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}_S|}}$$

wobei $\vec{y}_S = (y^1, y^2, -y^3)$

Nachrechnen

$$\frac{\partial G_N}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla_{\vec{y}} G_N = \frac{\partial}{\partial y^3} G_N(\vec{x},\vec{y}) = \frac{x^3 - y^3}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{x^3 + y^3}{|\vec{x}-\vec{y}_S|}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial G_N}{\partial n}\right|_{y^3=0} = 0}$$

5. Magnetostatik

zeitlicher Mittelwert von $\vec{B}$: $\langle\vec{B}\rangle$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \langle\vec{B}\rangle &= \frac{4\pi}{c}\langle\vec{j}\rangle \\ \langle\vec{B}\rangle &= \nabla \times \langle\vec{A}\rangle \end{aligned}}$$

Im Folgenden sind $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{j}$ zeitunabhängig

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \text{mit } \operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \circ \operatorname{div} - \Delta$$

$$\boxed{\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

Eichwahl: $\nabla \cdot (A) = 0$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\Delta A = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}$$

für einen gegebenen Strom $\vec{j}$ ist die Lösung einfach.

$$\Longrightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x' \, \mathrm{rot}_x \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

mit $\boldsymbol{\nabla} \times (f \cdot \vec{v}) = \boldsymbol{\nabla} f \times \vec{V} + f \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \vec{V}$

$$\Longrightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x' \, \mathrm{rot}_x \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) \times \vec{j}(\vec{x}')$$

$\Longrightarrow$ **Biot-Savart-Gesetz**

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}) \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}}$$