

Vorlesungsskript

Elektrodynamik

Inhaltsverzeichnis

1. Worum geht es in der Elektrodynamik?	1
1.1. Plan der Vorlesung	2
2. Wiederholung: Vektoranalysis im \mathbb{R}^3	3

1. Worum geht es in der Elektrodynamik?

In der klassischen Mechanik:

fundamentale Konzepte: Länge, Zeit, Masse

→ Trägheit + Gravitation

Newtonsche Bew. gl.: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$ wobei $\underbrace{\vec{r}(t)}_{\substack{\text{Ort} \\ \text{Zeit}}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

comment(Zeichung 2D system mit massepunkt, e eingezeichnet)

Lagrange-Funktion:

→ Wirkung

$$S = \int dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

N Teilchen $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 - V(\vec{r}_i)$$

$$V(\vec{r}_i) = -\frac{G}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Neue fundamentale Größe:

- elektrische Ladung q (positiv oder negativ)
- gequantelt mit Elementarladung e

$$q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$$

$$q > 0 \text{ (Proton, Positron, } n = +1)$$

$$q < 0 \text{ (Elektron, } n = -1)$$

Coulomb-Gesetz: Kraft zwischen elektrisch geladenen Teilchen

$$\vec{F}_1 = k \cdot q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_2$$

comment(Zeichung zweier Punktteilchen, Coloumbgesetz geometrisch)

$q_1 q_2 > 0$ (Ladungen haben dasselbe Vorzeichen) \Rightarrow abstoßend

$q_1 q_2 < 0$ (Ladungen haben verschiedene Vorzeichen) \Rightarrow anziehend

Was ist k ? (Einheitensysteme)

1) Gauss'sche System: $k = 1$

2) SI System: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

3) Heavyside-Lorentz-System: $k = \frac{1}{4\pi}$

Umrechnen: SI \rightarrow Gauss: $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, SI \rightarrow Heavyside: $\epsilon_0 = 1$

Zusätzliche Realität:

magnetische Felder, elektromagnetische Wellen

\rightarrow **Feldtheorie** (Maxwell's Theorie, erstes Beispiel)

$\vec{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ diskrete Zahl an Freiheitsgrade $= 3N$

\rightarrow Elektrodynamik $\vec{E}(t, \vec{x})$, $\vec{B}(t, \vec{x})$

Betrachte ein Kraftfeld, erzeugt durch N Punktladungen q_i , $i = 1, \dots, N$ wirkend auf eine Testladung $|q| \ll |q_i|$

$$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}(\vec{x}), \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

das Elektrische Feld

eine fixierte Ladung an \vec{x}_1

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|^3}$$

comment (Zeichnung Punktteilchen, Ladung)

Diese (naive) Zeitabhängigkeit ist empirisch falsch und im Widerspruch zur (speziellen) Relativitätstheorie (SR)

\rightarrow Maxwell's Theorie, kompatibel mit SR

1.1. Plan der Vorlesung

1. Wiederholung
 - Euklidische Geometrie im \mathbb{R}^3 , Vektoranalysis (Differentialformen)
2. Spezielle Relativitätstheorie
 - (Pseudo-) Euklidische Geometrie des Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$
3. Maxwell's Theorie
4. Anwendungen
 1. Elektrostatik
 2. Magnetostatik
 3. Elektro- und Magnetostatik in Materie

2. Wiederholung: Vektoranalysis im \mathbb{R}^3

Der euklidische \mathbb{R}^3 : $\vec{x} = \vec{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x^i), \quad i = 1, 2, 3$

Metrik:

$$\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = \sum_{i=1}^3 (x_1^i - x_2^i)(x_1^i - x_2^i)$$

Geometrie invariant unter Rotationen

$$x^i \longrightarrow x'^i = \sum_{j=1}^3 R_j^i x^j \quad \underbrace{\quad}_{\text{Einstein Konvention}} \quad R_j^i x^j$$

$$|\vec{x}|^2 = \delta_{ij} x^i x^j \quad \text{wobei} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}'|^2 &= \delta_{ij} x'^i x'^j = \delta_{ij} R_k^i x^k R_l^j x^l \\ &= (\delta_{ij} R_k^i R_l^j) x^k x^l = |\vec{x}|^2 = \delta_{kl} x^k x^l \end{aligned}$$

$$\implies \delta_{ij} R_k^i R_l^j = \delta_{kl}$$

Matrix-Notation: $R = (R_j^i), \mathbb{1} = (\delta_{ij})$

$$\begin{aligned} \delta_{kl} &= R_k^i \delta_{ij} R_l^j \implies \mathbb{1} = R^T R \\ &\implies \det(R) = \pm 1 \end{aligned}$$

Rotationsgruppe: $\text{SO}(3) : \det(R) = +1$

—

Im \mathbb{R}^3 hat man das **Kreuz-Produkt**

Epsilon-Tensor / Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk} : \quad \varepsilon^{123} = -\varepsilon^{213} = \varepsilon^{231} = 1$$

total antisymmetrisch, da $\varepsilon^{112} = 0 = -\varepsilon^{112}$

\implies invariant unter Rotation / $\text{SO}(3)$

$$\varepsilon^{ijk} \longrightarrow R_m^i R_n^j R_l^k \varepsilon^{mnl} \quad \underbrace{\quad}_{\det(R)=1} \quad \varepsilon^{ijk}$$

Im euklidischen \mathbb{R}^3 darf man nur folgende Objekte benutzen:

$$\delta_{ij}, \delta^{ij}, \varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}$$

Skalarprodukt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \delta_{ij} x^i y^j$

Kreuzprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, (\vec{u} \times \vec{v})^i := \delta^{il} \varepsilon_{ljk} u^j v^k$

Skalare/Funktionen auf \mathbb{R}^3 : $F = F(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 : $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$

Gradient: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, Skalar \rightarrow Vektor

$$\vec{\nabla} F = \text{grad } F, \quad (\text{grad } F)^i = \delta^{ij} \partial_j F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \frac{\partial F}{\partial x^3} \right)$$

Divergenz: Vektor \rightarrow Skalar

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_i V^i \\ &= \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \end{aligned}$$

Rotation: Vektor \rightarrow Vektor

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \Rightarrow (\text{rot } V)^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j V_k$$

$$\text{Skalare} \xrightarrow{\text{grad}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{rot}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{div}} \text{Skalare}$$

Identitäten (Kettenkomplex):

$$\text{rot} \circ \text{grad} = 0$$

$$\text{div} \circ \text{rot} = 0$$

Differentialformen im \mathbb{R}^3 :

- 0-Formen: Skalar
- 1-Formen: “dual” zu Vektoren, $A_i(\vec{x})$

$$[\text{Im Euklidischen: } V_i(\vec{x}) = \delta_{ij} V^j(\vec{x})]$$

- 2-Formen: Antisymmetrischer Tensor

$$B_{ij}(\vec{x}) = -B_{ji}(\vec{x})$$

- 3-Formen: $C_{ijk}(\vec{x}) = -C_{ikj}(\vec{x}) = \dots$ (wie Levi-Civita)

Effiziente indexfreie Notation: Basis-Elemente dx^i

- 1-Form: $A = A_i dx^i$
- 2-Form: $B = \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j$
- 3-Form: $C = \frac{1}{3!} C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$

wobei $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$

Wedge Product:

$$A \wedge B = (A_i dx^i) \wedge \left(\frac{1}{2} B_{jk} dx^j \wedge dx^k \right) = \frac{1}{2} A_i B_{jk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \text{ (3-Form)}$$

p -Form A , q -Form B

$$\implies A \wedge B \text{ ist } (p+q) - \text{Form}$$

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A \text{ (gradiert Kommutativ)}$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \text{ (assoziativ)}$$

deRham Differential:

$$d := \partial_i dx^i \wedge$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} dA &= d(A_j dx^j) \\ &= \partial_i dx^i \wedge (A_j dx^j) \\ &= \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{-dx^j \wedge dx^i} \end{aligned}$$

Ω^p : p -Formen, $d : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$, $d^2 = 0$ (Übungsaufgabe)

Hodge Operator:

$$\begin{aligned} \star : \Omega^p &\longleftrightarrow \Omega^{3-p} \\ \star : \Omega^1 &\longleftrightarrow \Omega^2 \\ \star : \Omega^3 &\longleftrightarrow \Omega^0 \end{aligned}$$

A ist 1-Form, B ist 2-Form, C ist 3-Form

$$\begin{aligned} \star A &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^k A_k dx^i \wedge dx^j \\ \star B &= \frac{1}{2} \varepsilon_i^{jk} B_{jk} dx^i \\ \star C &= \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk} \end{aligned}$$

Wir erweitern das Diagramm von vorher:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Skalare} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektoren} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektoren} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Skalare} \\ \updownarrow id & & \updownarrow \heartsuit & & \updownarrow \star, \heartsuit & & \updownarrow \star \\ \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert. (Alle Pfade, die zwei Punkte verbinden, sind äquivalent.)

$$d^2 = 0 \iff \text{rot} \circ \text{grad} = 0, \text{div} \circ \text{rot} = 0$$