

# Vorlesungsskript

Elektrodynamik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Worum geht es in der Elektrodynamik?</b> .....	<b>1</b>
1.1. Plan der Vorlesung .....	2
<b>2. Wiederholung: Vektoranalysis im <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	<b>3</b>

# 1. Worum geht es in der Elektrodynamik?

## In der klassischen Mechanik:

fundamentale Konzepte: Länge, Zeit, Masse

→ Trägheit + Gravitation

Newtonsche Bew. gl.:  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ,  $\vec{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$  wobei  $\underbrace{\vec{r}(t)}_{\substack{\text{Ort} \\ \text{Zeit}}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

comment(Zeichung 2D system mit massepunkt, e eingezeichnet)

Lagrange-Funktion:

→ Wirkung

$$S = \int dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

$N$  Teilchen  $\vec{r}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 - V(\vec{r}_i)$$

$$V(\vec{r}_i) = -\frac{G}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

## Neue fundamentale Größe:

- elektrische Ladung  $q$  (positiv oder negativ)
- gequantelt mit Elementarladung  $e$

$$q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$$

$$q > 0 \text{ (Proton, Positron, } n = +1)$$

$$q < 0 \text{ (Elektron, } n = -1)$$

**Coulomb-Gesetz:** Kraft zwischen elektrisch geladenen Teilchen

$$\vec{F}_1 = k \cdot q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_2$$

comment(Zeichung zweier Punktteilchen, Coloumbgesetz geometrisch)

$q_1 q_2 > 0$  (Ladungen haben dasselbe Vorzeichen)  $\Rightarrow$  abstoßend

$q_1 q_2 < 0$  (Ladungen haben verschiedene Vorzeichen)  $\Rightarrow$  anziehend

**Was ist  $k$ ? (Einheitensysteme)**

1) Gauss'sche System:  $k = 1$

2) SI System:  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

3) Heavyside-Lorentz-System:  $k = \frac{1}{4\pi}$

Umrechnen: SI  $\rightarrow$  Gauss:  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$ , SI  $\rightarrow$  Heavyside:  $\epsilon_0 = 1$

### Zusätzliche Realität:

magnetische Felder, elektromagnetische Wellen

$\rightarrow$  **Feldtheorie** (Maxwell's Theorie, erstes Beispiel)

$\vec{x}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$  diskrete Zahl an Freiheitsgrade  $= 3N$

$\rightarrow$  Elektrodynamik  $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x})$

Betrachte ein Kraftfeld, erzeugt durch  $N$  Punktladungen  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  wirkend auf eine Testladung  $|q| \ll |q_i|$

$$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}(\vec{x}), \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

das Elektrische Feld

eine fixierte Ladung an  $\vec{x}_1$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|^3}$$

comment (Zeichnung Punktteilchen, Ladung)

Diese (naive) Zeitabhängigkeit ist empirisch falsch und im Widerspruch zur (speziellen) Relativitätstheorie (SR)

$\rightarrow$  Maxwell's Theorie, kompatibel mit SR

## 1.1. Plan der Vorlesung

1. Wiederholung
  - Euklidische Geometrie im  $\mathbb{R}^3$ , Vektoranalysis (Differentialformen)
2. Spezielle Relativitätstheorie
  - (Pseudo-) Euklidische Geometrie des Minkowski-Raum  $\mathbb{R}^{3,1}$
3. Maxwell's Theorie
4. Anwendungen
  1. Elektrostatik
  2. Magnetostatik
  3. Elektro- und Magnetostatik in Materie

## 2. Wiederholung: Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

Der euklidische  $\mathbb{R}^3$ :  $\vec{x} = \vec{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x^i), \quad i = 1, 2, 3$

Metrik:

$$\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = \sum_{i=1}^3 (x_1^i - x_2^i)(x_1^i - x_2^i)$$

Geometrie invariant unter Rotationen

$$x^i \longrightarrow x'^i = \sum_{j=1}^3 R_j^i x^j \quad \underbrace{\quad}_{\text{Einstein Konvention}} \quad R_j^i x^j$$

$$|\vec{x}|^2 = \delta_{ij} x^i x^j \quad \text{wobei} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}'|^2 &= \delta_{ij} x'^i x'^j = \delta_{ij} R_k^i x^k R_l^j x^l \\ &= (\delta_{ij} R_k^i R_l^j) x^k x^l = |\vec{x}|^2 = \delta_{kl} x^k x^l \end{aligned}$$

$$\implies \delta_{ij} R_k^i R_l^j = \delta_{kl}$$

Matrix-Notation:  $R = (R_j^i), \mathbb{1} = (\delta_{ij})$

$$\begin{aligned} \delta_{kl} &= R_k^i \delta_{ij} R_l^j \implies \mathbb{1} = R^T R \\ &\implies \det(R) = \pm 1 \end{aligned}$$

Rotationsgruppe:  $\text{SO}(3) : \det(R) = +1$

—

Im  $\mathbb{R}^3$  hat man das **Kreuz-Produkt**

Epsilon-Tensor / Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk} : \quad \varepsilon^{123} = -\varepsilon^{213} = \varepsilon^{231} = 1$$

total antisymmetrisch, da  $\varepsilon^{112} = 0 = -\varepsilon^{112}$

$\implies$  invariant unter Rotation /  $\text{SO}(3)$

$$\varepsilon^{ijk} \longrightarrow R_m^i R_n^j R_l^k \varepsilon^{mnl} \quad \underbrace{\quad}_{\det(R)=1} \quad \varepsilon^{ijk}$$

Im euklidischen  $\mathbb{R}^3$  darf man nur folgende Objekte benutzen:

$$\delta_{ij}, \delta^{ij}, \varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}$$

Skalarprodukt:  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \delta_{ij} x^i y^j$

Kreuzprodukt:  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, (\vec{u} \times \vec{v})^i := \delta^{il} \varepsilon_{ljk} u^j v^k$

Skalare/Funktionen auf  $\mathbb{R}^3$ :  $F = F(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^3$ :  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$

Gradient:  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ , Skalar  $\rightarrow$  Vektor

$$\vec{\nabla} = \text{grad } F, \quad (\text{grad } F)^i = \delta^{ij} \partial_j F = \left( \frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \frac{\partial F}{\partial x^3} \right)$$

Divergenz: Vektor  $\rightarrow$  Skalar

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{V}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_i V^i \\ &= \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \end{aligned}$$

Rotation: Vektor  $\rightarrow$  Vektor

$$\operatorname{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} \Rightarrow (\operatorname{rot} V)^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j V_k$$

$$\text{Skalare} \xrightarrow{\text{grad}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{rot}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{div}} \text{Skalare}$$

Identitäten (Kettenkomplex):

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$$

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$$

**Differentialformen im  $\mathbb{R}^3$ :**

- 0-Formen: Skalar
- 1-Formen: "dual" zu Vektoren,  $A_i(\vec{x})$

$$[\text{Im Euklidischen: } V_i(\vec{x}) = \delta_{ij} V^j(\vec{x})]$$

- 2-Formen: Antisymmetrischer Tensor

$$B_{ij}(\vec{x}) = -B_{ji}(\vec{x})$$

- 3-Formen:  $C_{ijk}(\vec{x}) = -C_{ikj}(\vec{x}) = \dots$  (wie Levi-Civita)

Effiziente indexfreie Notation: Basis-Elemente  $dx^i$

- 1-Form:  $A = A_i(x) dx^i$
- 2-Form:  $B = \frac{1}{2} B_{ij}(\vec{x}) dx^i \wedge dx^j$
- 3-Form:  $C = \frac{1}{3!} C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$

wobei  $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$

**Wedge Product:**

$$A \wedge B = (A_i dx^i) \wedge \left( \frac{1}{2} B_{jk} dx^j \wedge dx^k \right) = \frac{1}{2} A_i B_{jk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \quad (3\text{-Form})$$

$p$ -Form  $A$ ,  $q$ -Form  $B$

$$\Rightarrow A \wedge B (p+q) - \text{Form}$$

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A \quad (\text{gradiert Kommutativ})$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \quad (\text{assoziativ})$$

deRham Differential:

$$d := \partial_i dx^i \wedge$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} dA &= d(A_j dx^j) \\ &= \partial_i dx^i \wedge (A_j dx^j) \\ &= \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{-dx^j \wedge dx^i} \end{aligned}$$

$\Omega^p : p$ -Formen,  $d : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$ ,  $d^2 = 0$  (Übungsaufgabe)

Hodge Operator:

$$\star : \Omega^p \longleftrightarrow \Omega^{3-p}$$

$$\star : \Omega^1 \longleftrightarrow \Omega^2$$

$$\star : \Omega^3 \longleftrightarrow \Omega^0$$

$A$  ist 1-Form,  $B$  ist 2-Form,  $C$  ist 3-Form

$$\star A = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^k A_k dx^i \wedge dx^j$$

$$\star B = \frac{1}{2} \varepsilon_i^{jk} B_{jk} dx^i$$

$$\star C = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk}$$

Wir erweitern das Diagramm von vorher:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Skalare} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektoren} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektoren} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Skalare} \\ \updownarrow id & & \updownarrow \heartsuit & & \updownarrow \star, \heartsuit & & \updownarrow \star \\ \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert. (Alle Pfade, die zwei Punkte verbinden, sind äquivalent.)

$$d^2 = 0 \iff \operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0, \operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$$