

Vorlesungsskript

Elektrodynamik

Inhaltsverzeichnis

1. Worum geht es in der Elektrodynamik?	1
1.1. Plan der Vorlesung	2
2. Wiederholung: Vektoranalysis im \mathbb{R}^3	3
3. Spezielle Relativitätstheorie	11
3.1. Lichtstrahlen und Uhren	12
3.2. Lorentz-Transformation/Symmetrie von Minkowski	14
3.3. Teilchen in SR	15
3.4. Relativistische Feldtheorie	21
3.5. Maxwell-Gleichungen	23

1. Worum geht es in der Elektrodynamik?

In der klassischen Mechanik:

fundamentale Konzepte: Länge, Zeit, Masse

—→ Trägheit + Gravitation

Newtonsche Bew. gl.: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$ wobei $\underbrace{\vec{r}(t)}_{\substack{\text{Ort} \\ \text{Zeit}}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

(Abbildung eines Massepunktes in 2D)

Lagrange-Funktion:

—→ Wirkung

$$S = \int dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

N Teilchen $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 - V(\vec{r}_i)$$

$$V(\vec{r}_i) = -\frac{G}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Neue fundamentale Größe:

- elektrische Ladung q (positiv oder negativ)
- gequantelt mit Elementarladung e

$$q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$$

$$q > 0 \text{ (Proton, Positron, } n = +1)$$

$$q < 0 \text{ (Elektron, } n = -1)$$

Coulomb-Gesetz: Kraft zwischen elektrisch geladenen Teilchen

$$\vec{F}_1 = k \cdot q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_2$$

(Abbildung Coloumbgesetz zwischen zwei Teilchen)

$q_1 q_2 > 0$ (Ladungen haben dasselbe Vorzeichen) \Rightarrow abstoßend

$q_1 q_2 < 0$ (Ladungen haben verschiedene Vorzeichen) \Rightarrow anziehend

Was ist k ? (Einheitensysteme)

1) Gauss'sche System: $k = 1$

2) SI System: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

3) Heavyside-Lorentz-System: $k = \frac{1}{4\pi}$

Umrechnen: SI \rightarrow Gauss: $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, SI \rightarrow Heavyside: $\epsilon_0 = 1$

Zusätzliche Realität:

magnetische Felder, elektromagnetische Wellen

\rightarrow **Feldtheorie** (Maxwell's Theorie, erstes Beispiel)

$\vec{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ diskrete Zahl an Freiheitsgrade $= 3N$

\rightarrow Elektrodynamik $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x})$

Betrachte ein Kraftfeld, erzeugt durch N Punktladungen q_i , $i = 1, \dots, N$ wirkend auf eine Testladung $|q| \ll |q_i|$

$$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}(\vec{x}), \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

das Elektrische Feld

eine fixierte Ladung an \vec{x}_1

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|^3}$$

(Abbildung einer Ladung als Punktteilchen)

Diese (naive) Zeitabhängigkeit ist empirisch falsch und im Widerspruch zur (speziellen) Relativitätstheorie (SR)

\rightarrow Maxwell's Theorie, kompatibel mit SR

1.1. Plan der Vorlesung

1. Wiederholung
 - Euklidische Geometrie im \mathbb{R}^3 , Vektoranalysis (Differentialformen)
2. Spezielle Relativitätstheorie
 - (Pseudo-) Euklidische Geometrie des Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$
3. Maxwell's Theorie
4. Anwendungen
 1. Elektrostatik
 2. Magnetostatik
 3. Elektro- und Magnetostatik in Materie

2. Wiederholung: Vektoranalysis im \mathbb{R}^3

Der euklidische \mathbb{R}^3 : $\vec{x} = \vec{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x^i), \quad i = 1, 2, 3$

Metrik:

$$\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = \sum_{i=1}^3 (x_1^i - x_2^i)(x_1^i - x_2^i)$$

Geometrie invariant unter Rotationen

$$x^i \longrightarrow x'^i = \sum_{j=1}^3 R_j^i x^j \quad \underbrace{\quad}_{\text{Einstein Konvention}} \quad R_j^i x^j$$

$$|\vec{x}|^2 = \delta_{ij} x^i x^j \quad \text{wobei} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}'|^2 &= \delta_{ij} x'^i x'^j = \delta_{ij} R_k^i x^k R_l^j x^l \\ &= (\delta_{ij} R_k^i R_l^j) x^k x^l = |\vec{x}|^2 = \delta_{kl} x^k x^l \end{aligned}$$

$$\implies \delta_{ij} R_k^i R_l^j = \delta_{kl}$$

Matrix-Notation: $R = (R_j^i), \mathbb{1} = (\delta_{ij})$

$$\begin{aligned} \delta_{kl} &= R_k^i \delta_{ij} R_l^j \implies \mathbb{1} = R^T R \\ &\implies \det(R) = \pm 1 \end{aligned}$$

Rotationsgruppe: $\text{SO}(3) : \det(R) = +1$

—

Im \mathbb{R}^3 hat man das **Kreuz-Produkt**

Epsilon-Tensor / Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk} : \quad \varepsilon^{123} = -\varepsilon^{213} = \varepsilon^{231} = 1$$

total antisymmetrisch, da $\varepsilon^{112} = 0 = -\varepsilon^{112}$

\implies invariant unter Rotation / $\text{SO}(3)$

$$\varepsilon^{ijk} \longrightarrow R_m^i R_n^j R_l^k \varepsilon^{mnl} \quad \underbrace{\quad}_{\det(R)=1} \quad \varepsilon^{ijk}$$

Im euklidischen \mathbb{R}^3 darf man nur folgende Objekte benutzen:

$$\delta_{ij}, \delta^{ij}, \varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}$$

Skalarprodukt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \delta_{ij} x^i y^j$

Kreuzprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, (\vec{u} \times \vec{v})^i := \delta^{il} \varepsilon_{ljk} u^j v^k$

Skalare/Funktionen auf \mathbb{R}^3 : $F = F(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 : $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$

Gradient: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, Skalar \rightarrow Vektor

$$\vec{\nabla} F = \text{grad } F, \quad (\text{grad } F)^i = \delta^{ij} \partial_j F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \frac{\partial F}{\partial x^3} \right)$$

Divergenz: Vektor \rightarrow Skalar

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_i V^i \\ &= \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \end{aligned}$$

Rotation: Vektor \rightarrow Vektor

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \Rightarrow (\text{rot } V)^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j V_k$$

$$\text{Skalare} \xrightarrow{\text{grad}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{rot}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{div}} \text{Skalare}$$

Identitäten (Kettenkomplex):

$$\text{rot} \circ \text{grad} = 0$$

$$\text{div} \circ \text{rot} = 0$$

Differentialformen im \mathbb{R}^3 :

- 0-Formen: Skalar
- 1-Formen: “dual” zu Vektoren, $A_i(\vec{x})$

$$[\text{Im Euklidischen: } V_i(\vec{x}) = \delta_{ij} V^j(\vec{x})]$$

- 2-Formen: Antisymmetrischer Tensor

$$B_{ij}(\vec{x}) = -B_{ji}(\vec{x})$$

- 3-Formen: $C_{ijk}(\vec{x}) = -C_{ikj}(\vec{x}) = \dots$ (wie Levi-Civita)

Effiziente indexfreie Notation: Basis-Elemente dx^i

- 1-Form: $A = A_i dx^i$
- 2-Form: $B = \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j$
- 3-Form: $C = \frac{1}{3!} C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$

wobei $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$

Wedge Product:

$$A \wedge B = (A_i dx^i) \wedge \left(\frac{1}{2} B_{jk} dx^j \wedge dx^k \right) = \frac{1}{2} A_i B_{jk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \text{ (3-Form)}$$

p -Form A , q -Form B

$$\Rightarrow A \wedge B \text{ ist } (p+q) - \text{Form}$$

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A \text{ (gradiert Kommutativ)}$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \text{ (assoziativ)}$$

deRham Differential:

$$d := \partial_i dx^i \wedge$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} dA &= d(A_j dx^j) \\ &= \partial_i dx^i \wedge (A_j dx^j) \\ &= \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{-dx^j \wedge dx^i} \end{aligned}$$

$\Omega^p : p$ -Formen, $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$, $d^2 = 0$ (Übungsaufgabe)

Hodge Operator:

$$\begin{aligned} \star : \Omega^p &\leftrightarrow \Omega^{3-p} \\ \star : \Omega^1 &\leftrightarrow \Omega^2 \\ \star : \Omega^3 &\leftrightarrow \Omega^0 \end{aligned}$$

A ist 1-Form, B ist 2-Form, C ist 3-Form

$$\begin{aligned} \star A &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^k A_k dx^i \wedge dx^j \\ \star B &= \frac{1}{2} \varepsilon_i^{jk} B_{jk} dx^i \\ \star C &= \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk} \end{aligned}$$

Wir erweitern das Diagramm von vorher:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Skalare} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektoren} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektoren} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Skalare} \\ \uparrow \text{id} & & \uparrow \delta_{ij} & & \uparrow \star \circ \heartsuit & & \uparrow \star \\ \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert. (Alle Pfade, die zwei Punkte verbinden, sind äquivalent.)

$$d^2 = 0 \iff \text{rot} \circ \text{grad} = 0, \text{div} \circ \text{rot} = 0$$

Wiederholung

Beim letzten Mal: $\vec{x} = (x^i) \in \mathbb{R}^3, i, j = 1, 2, 3$

Invarianten der euklidischen Geometrie

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \pm 1$$

Skalarprodukt/Euklidische Metrik:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \vec{v} \cdot \vec{w} = \delta_{ij} v^i w^j \in \mathbb{R} \\ &\equiv v^i w_i = v_i w^i \end{aligned}$$

Kreuzprodukt:

$$(\vec{v} \times \vec{w})^i := \varepsilon^{ijk} v_j w_k = \varepsilon^{ijk} \delta_{jn} \delta_{kl} v^n w^l$$

Skalare und Vektoren im $\mathbb{R}^3 \longleftrightarrow$ Differentialformen im \mathbb{R}^3

1-Form: $(A_i), A = A_i dx^i, A_i = \delta_{ij} A^j$ (\longleftrightarrow Vektor)

2-Form: $B = \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j, B_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$ (\longleftrightarrow Vektor)

3-Form: $C = \frac{1}{3!} C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$

Hodge-dual zu Skalar: $F(\vec{x}) = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk}(\vec{x})$

Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, dann ist ∇F senkrecht auf der Fläche $F^{-1}(\{0\})$.

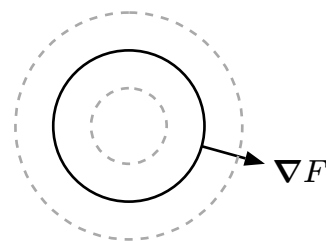
Beispiel: $F(\vec{x}) := |\vec{x}|^2 - R^2, R = \text{const}$

$$F^{-1}(\{0\}) =: S^2 \text{ (Sphäre)} \quad (\nabla F)^i = \delta^{ij} \delta_j F$$

$$\begin{aligned} \partial_j F(\vec{x}) &= \partial_j (|\vec{x}|^2) = \partial_j (\delta_{kl} x^k x^l) \\ &= \delta_{kl} (\partial_j x^k) x^l + \delta_{kl} x^k (\partial_j x^l) \\ &= 2\delta_{kl} (\partial_j x^k) x^l \\ &= 2\delta_{jl} x^l \end{aligned}$$

$$\implies (\nabla F)^i = \delta^{ij} 2\delta_{jl} x^l = 2 \cdot x^i$$

$$\nabla F = 2 \cdot \vec{x}$$



allgemeiner Beweis:

Parametrisierung der Fläche $F = 0$, Parameter $\sigma^\alpha, \alpha = 1, 2 \iff F(\vec{x}(\sigma)) = 0$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma^1} \text{ Tangentialvektor entlang } \sigma^1$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma^2} \text{ Tangentialvektor entlang } \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma^\alpha}, \nabla F \right\rangle &= \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha} (\nabla F)^j = \delta^{jk} \partial_k F \\ &= \delta_i^k \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha} \partial_k F = \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha} \partial_i F \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\partial}{\partial \sigma^\alpha} (F(\vec{x}(\sigma))) = 0 \\ &\Rightarrow \nabla F \text{ senkrecht auf Tangentialvektoren} \end{aligned}$$

Integralsätze:

Linienintegral: Kurve im \mathbb{R}^3 : $C, \vec{x}(s) = x^i(s), s \in [s_0, s_1] \subset \mathbb{R}$

1-Form kann entlang einer Kurve integriert werden

1-Form \longleftrightarrow Kurven

1-Form:

$$\begin{aligned} A &= A_i(\vec{x}) dx^i \\ \int_C A &\equiv \int_C A_i dx^i := \int_{s_0}^{s_1} A_i(\vec{x}(s)) \frac{dx^i}{ds} ds \end{aligned}$$

Euklidische Metrik:

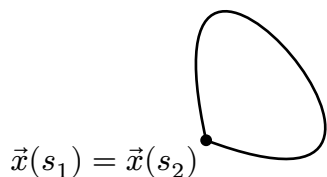
$$\begin{aligned} A \longleftrightarrow \vec{A} \quad \int A_i dx^i &= \int \delta_{ij} A^i dx^j \\ \Rightarrow \int A_i dx^i &= \int \vec{A} \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$

Fall A exakt $A = d\phi, A_i = \partial_i \phi$

$$\begin{aligned} \int_C A &= \int_C d\phi = \int_{s_0}^{s_1} \partial_i \phi(\vec{x}(s)) \frac{dx^i}{ds} ds \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds} \phi(\vec{x}(s)) ds = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0)) \\ \int_\phi d\phi &= \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0)) \end{aligned}$$

\Rightarrow hängt nur von Endpunkten ab!

\Rightarrow geschlossene Kurve:



$$\oint_C d\phi = 0$$

Für konservatives Kraftfeld $\vec{A} = \nabla \phi$

$$\Rightarrow \int_C \nabla \phi \cdot d\vec{x} = \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0))$$

Flächenintegral:

2-Form \leftrightarrow Fläche

Parametrisierung Σ : $\vec{\sigma} = \vec{x}(u, v)$, $\sigma^\alpha = (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha} d\sigma^\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u} du + \frac{\partial x^i}{\partial v} dv \\ \int_\Sigma B &= \frac{1}{2} \cdot \int_\Sigma B_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \int_D B_{ij}(\vec{x}(\sigma)) \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \sigma^\beta} d\sigma^\alpha \wedge d\sigma^\beta \\ &\Rightarrow \int_\Sigma B := \frac{1}{2} \int_D B_{ij}(\vec{x}(u, v)) \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) du dv \\ &\int_\Sigma B = \int_D B_{ij}(\vec{x}(u, v)) \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} du dv = \int_\Sigma \vec{V} \cdot d\vec{\Sigma} \end{aligned}$$

wobei $d\vec{\Sigma} := \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right) du dv$

Volumenintegral:

3-Formen \leftrightarrow Volumen

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{3!} C_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ \int_V C &= \frac{1}{3!} \int e^{ijk} C_{ijk}(\vec{x}) dx^3 \end{aligned}$$

Integralsätze/Stokes von Stokes:

Sei M eine Kurve/Fläche/Volumen und $\partial(M)$ der Rand:

- $M = C$ Kurve: ∂M sind die Endpunkte
- $M = \Sigma$ Fläche: ∂M ist die Randkurve
- $M = V$ Volumen: ∂M ist die Oberfläche von V

Stokes Theorem

Sei A eine (p) -Form und M $(p+1)$ -dimensional. Dann gilt

$$\int_{\partial M} A = \int_M dA$$

M : Kurve (1-dimensional), $A = \phi$ (0-Form)

$$\begin{aligned} \int_M d\phi &= \phi(\vec{x}(s_1)) - \phi(\vec{x}(s_0)) = \int_{\partial M} \phi \\ \text{für } \partial M &= \{\vec{x}(s_1), \vec{x}(s_0)\} \end{aligned}$$

M : Fläche, 1-Form, $A = A_i dx^i$, Parametrisierung: $\sigma^\alpha = (u, v) \in D$

$$dA = \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^i \wedge dx^j$$

$$\begin{aligned} \int_M dA &= \int_D (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} du dv \\ &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial u} A_j(\vec{x}(u, v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} A_j(\vec{x}(u, v)) \frac{\partial x^i}{\partial u} \right) du dv \\ &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(A_j(\vec{x}(u, v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(A_j(\vec{x}(u, v)) \frac{\partial x^i}{\partial u} \right) \right) du dv \\ \int_D \frac{\partial}{\partial u} (A_j(\vec{x}(u, v)) \frac{\partial x^j}{\partial v}) du dv &= \int_{v_0}^{v_1} A_j(\vec{x}(u, v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} dv - \int_{v_0}^{v_1} A_j(\vec{x}(u, v)) \frac{\partial x^j}{\partial v} dv \end{aligned}$$

(Abbildung parametrisierter Fläche in 2D-Koordinaten)

M : Volumen, B 2-Form, $B = B_{ij} \wedge x^i \wedge x^j$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{3-Form } dB &= \partial_i B_{jk} \wedge x^i \wedge x^j \wedge x^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial_i B_{jk} dx^3 \\ \Rightarrow dB &= \partial_i V^i dx^3, V^i := \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} B_{kj} \\ \Rightarrow \int_V dB &= \int_V \partial_i V^i dx^3 = \int_M \nabla \cdot (\vec{V}) dx^3 \stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{\partial V} \vec{V} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\partial M} B \end{aligned}$$

Konsistenz mit $\text{div} \circ \text{rot} = 0, \dots, \text{differential}^2 = 0$

$$M = \partial M' \Rightarrow \partial M = 0 \quad [\partial \partial = 0]$$

$$A = dC \Rightarrow 0 = \int_M dA = \int_{\partial M} dC \Rightarrow dA = d^2(A)$$

Koordinatenwechsel:

$$\int_V F(\vec{x}) dx^3 = \frac{1}{3!} \int_V F(\vec{x}) \varepsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

→ neue Koordinaten $\vec{w} : \vec{x} = \vec{x}(\vec{w})$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(w_1, w_2, w_3), w_1 = w_1(x_1, x_2, x_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es gilt

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial w^j} dw^j$$

$$\int_V F(\vec{x}) dx^3 = \int_V F(\vec{x}(\vec{w})) \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial w^l} \frac{\partial x^j}{\partial w^m} \frac{\partial x^k}{\partial w^n} \underbrace{dw^l \wedge dw^m \wedge dw^n}_{=\varepsilon^{lmn} dw^1 \wedge dw^2 \wedge dw^3}$$

$$= \det(J)$$

Jacobi-Matrix:

$$J_i^j = \left(\frac{\partial x^j}{\partial w^i} \right)$$

$$\Rightarrow dx^3 = |\det(J)| dw^3$$

3. Spezielle Relativitätstheorie

Raumzeit: Raum und Zeit vereingit in einem vierdimensionalen Raum

Punkt der Raumzeit: **Ereignis** (etwas, das zu einem festen Zeitpunkt an einem Ort stattfindet)

Literaturempfehlung: Robert Geroch, General Relativity from A to B

Abbildung der Raumzeit in 3D

Struktur der Raumzeit?

Aristotelische Raumzeit:

Folgende fragen sind bedeutungsvoll

1. Finden zwei Ereignisse am selben Ort statt?
2. Finden zwei Ereignisse zur selben Zeit statt?

Abbildung der Aristotelischen Raumzeit

Antworten:

1. Ereignisse liegen in der selben senkrechten Ebene
1. Ereignisse liegen in der selben 3D-Ebene

Es gilt das Prinzip der “absoluten Ruhe”.

Galileische Raumzeit:

Abbildung der Galileischen Raumzeit

“Zwei Ereigniss finden zur selben Zeit statt.” hat eine absolute Bedeutung, das Prinzip der absoluten Ruhe gilt jedoch nicht.

Im Allgemeinen macht es keinen Sinn zu fragen was der räumliche Abstand zwischen zwei Ereignissen p und q ist.

Aber: Der räumliche Abstand zur selben Zeit ist absolut.

⇒ Newtonsches Gravitationsgesetz ist kompatibel mit Galilei [$V(r) \sim r$: Distanz zu festem Punkt]

Minkowski Raum:

$\mathbb{R}^4 : x^\mu = (ct, x, y, z), \mu = 0, 1, 2, 3 \equiv (x^0, x^i), i = 1, 2, 3$. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit [$c = 1$ in bestimmten Einheiten, z.B. räumliche Koordinaten in Lichtjahren und t in Jahren]

Minkowski-Metrik: “pseudo-euklidische Metrik”

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu}$$

Raumzeit-Intervall/Abstand zwischen zwei Punkten mit Koordinatendifferenz Δx^μ

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &:= \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \\ &= (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 \\ &= c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 \end{aligned}$$

Infinitesimal: $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2$

Vektoren im Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$:

V^μ : 4er-Vektor/"kontravarianter" Vektor

Minkowski-Norm: $V^2 = \langle V, V \rangle = \eta_{\mu,\nu} V^\mu V^\nu \equiv V_\mu V^\mu$ wobei "index herunter gezogen" zum "kontravarianten" Vektor ("co-Vektor")

$$V_\mu := \eta_{\mu\nu} V^\nu = (v^0, -v^1, -v^2, -v^3)$$

Hochziehen von Indizes: $V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$

Notationsoptionen:

$$\langle V, W \rangle = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V_\mu W^\mu = V^\mu W_\mu$$

Abbildung des Lichtkegels in 3D

$x^\mu x_\mu = 0$ heißt **lichtartig**

$x^\mu x_\mu > 0$ heißt **zeitartig**

$x^\mu x_\mu < 0$ heißt **raumartig**

Dies ist eine Klassifizierung von Punkten im Minkowski-Raum.

3.1. Lichtstrahlen und Uhren

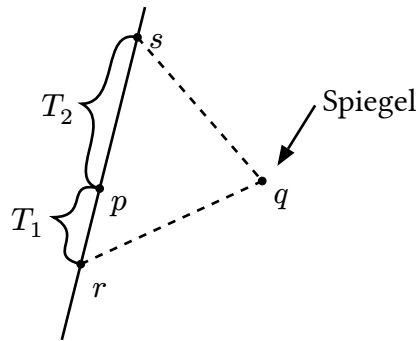
Postulat 1: Weltlinien von Lichtstrahlen sind Kurven (= Gerade) auf der Oberfläche des Lichtkegels.

Postulat 2: Weltlinien von massiven Objekten/Beobachtern sind zeitartige Kurven

Postulat 3: Die Zeit, die ein Beobachter entlang seiner Weltlinie "misst", ist

$$T = \frac{1}{c} \sqrt{(\Delta s)^2} = \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{(\Delta \vec{x})^2}{c^2}}$$

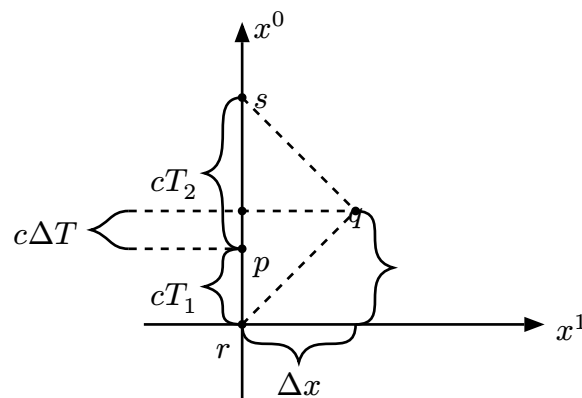
Physikalische Interpretation von zwei Ereignissen p und q mit raumartigen Intervall?



Behauptung: $\Delta s^2 = -c^2 T_1 T_2 < 0$, Δs^2 : Intervall/Abstand zwischen p und q

Beweis: Wähle Ruhesystem des Beobachters.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{c}{2}(T_1 + T_2), c\Delta t = -\frac{c}{2}(T_1 - T_2) \\ \Rightarrow \Delta s^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \\ &= \frac{c^2}{4}(T_1 - T_2)^2 - \frac{c^2}{4}(T_1 + T_2)^2 \\ &= -c^2 T_1 T_2\end{aligned}$$



Zwillingsparadox: Zeit von A: $T_A = T$. Zeit von B: $cT_B = 2\sqrt{c^2\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \Delta x^2}$

$$\Rightarrow T_B^2 = 4\left(\frac{T^2}{4} - \frac{\Delta x^2}{c^2}\right) = T_A^2 - 4\frac{\Delta x^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow T_B < T_A$$

Die Eigenzeit entlang von Geraden ist maximal.

Lorentz-Transformation/Symmetrie von Minkowski

3.2. Lorentz-Transformation/Symmetrie von Minkowski

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \cdot x^\nu$$

4-Vektoren: $V^\mu \longrightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \cdot V^\nu$ ("kontravarianter Vektor")

co-Vektor: $W_\mu \longrightarrow W'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu W_\nu$

$$\begin{aligned} V^\mu W_\mu &\longrightarrow V'^\mu W'_\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu (\Lambda^{-1})^\rho_\mu W_\rho \\ &= (\Lambda^{-1})^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu V^\nu W_\rho \\ &= (\Lambda^{-1} \cdot \Lambda)^\rho_\nu \cdot V^\nu W_\rho \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\delta^\rho_\nu} \\ &= V^\nu W_\nu \end{aligned}$$

Analog für höhere Tensoren

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &\longrightarrow T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma T^{\rho\sigma} \\ L^\mu_\nu &\longrightarrow L'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\rho (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu L^\rho_\sigma \text{ etc.} \end{aligned}$$

Lorentz-Gruppe: Symmetrie von Minkowski

$$\begin{aligned} \eta'_{\mu\nu} &:= (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma} \stackrel{!}{=} \eta_{\mu\nu} \iff \eta_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \eta_{\mu\nu} \\ &\iff \eta = \Lambda^T \eta \Lambda \end{aligned}$$

$$\implies \det(\eta) = \det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda)$$

$$\iff 1 = \det(\Lambda)^2 \iff \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$SO(1, 3) := \{1 \in GL(4) \mid \eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \det(\Lambda) = \pm 1\}$$

Beispiele: $x^2 = x^3 = 0$ $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = (ct', x', 0, 0)$

Bestimme alle Transformationen, so dass $(ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - x^2$

→ Übungsaufgabe

Welche Transformationen sind möglich?

Abbildung

Physikalische Freiheitsgrade in SR

1. Punktteilchen (elektrische Ladungen, ...)
2. Felder (elektrisches/magnetisches Feld)

Abbildung

$$\Delta s_i = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \Delta x_i^\mu \Delta x_i^\nu}$$

$$s(p, q) = \sum_i \Delta s_i = \sum_i \sqrt{\eta_{\mu\nu} \Delta x_i^\mu \Delta x_i^\nu}$$

$$s(p, q) = \int_C ds := \int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

Zeitartig: $\dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu > 0$

Eigenzeit: $T = \frac{1}{c} \int ds = \frac{1}{c} \int d\lambda \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$

Bewegungsgleichung für freies Teilchen?

→ Wirkung

$$S[x(\lambda)] = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

klassische Mechanik: $S = \int dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \pm \dots$ und $[S] = \text{Zeit} \cdot \text{Energie}$

3.3. Teilchen in SR

Abbildung

Parametrisierung: $x^\nu(\lambda)$, $\lambda \in [a, b]$ mit $x(a) = p$ und $x(b) = q$.

Tangentialvektor: $\dot{x}^\nu(\lambda) := \frac{dx^\nu}{d\lambda}$, zeitartig: $\dot{x}^2 := \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu > 0$

Raumzeit-Distanz/Intervall der Kurve C :

$$\int_C ds := \int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2} d\lambda$$

⇒ **Eigenzeit** $\tau = \frac{s}{c}$

$$\Delta\tau := \frac{1}{c} \int \sqrt{\dot{x}^2} d\lambda$$

Zeit, gemessen von einer Uhr mit Weltlinie C .

Wirkung (Hamiltonisches Prinzip) für ein freies Teilchen:

$$S = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = -mc^2 \int d\tau$$

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0$$

S : Funktional

Variation:

$$\delta S := \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[x + \varepsilon \delta x] \right|_{\varepsilon=0}$$

Rechnung: Variation des Funktional

1) δ und $\frac{d}{d\lambda}$ kommutieren

$$\delta \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \frac{dx^\mu + \varepsilon \delta x^\mu}{d\lambda} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d\delta x^\mu}{d\lambda} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\lambda} (\delta x^\mu)$$

2)

$$\delta \left(\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \stackrel{1)}{=} \eta_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} = 2\eta_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

3)

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}^2}} \delta(\dot{x}^2) = \star \quad \text{wobei} \quad \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \equiv \dot{x}^2 \\ \star &= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{d}{d\lambda} (\delta x^\mu) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \\ \Rightarrow \delta S &= -mc \int \delta \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = -mc \int \frac{d}{d\lambda} (\delta x_\mu) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\lambda} d\lambda \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Partielle Integration davon + Annahme: $\delta x_\mu|_a = \delta x_\mu|_b = 0$

$$\delta S = mc \int \delta x_\mu \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) d\lambda \stackrel{!}{=} \text{beliebige } \delta x^\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{du^\mu}{d\lambda} = 0, \quad u^\mu := \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

 u^μ : 4er-Geschwindigkeit

$$u^2 = u^\mu u_\mu = \frac{c^2}{\dot{x}^2} \underbrace{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}_{\dot{x}^2} = c^2$$

Wähle zwei Parametrisierungen:

1) Eigenzeit:

$$\tau(\lambda) := \frac{1}{c} \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

Abbildung

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{1}{c} \sqrt{\dot{x}^2} \Rightarrow u^\mu = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichung: } 0 = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Abbildung

$$\Rightarrow x^\mu(\tau) = u_0^\mu \cdot \tau + x_0^\mu \quad u_0^\mu, x_0^\mu = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \text{Gerade}$$

$$u^\mu u_\mu = u_0^\mu u_{0\mu} = c^2 > 0 \Rightarrow \text{zeitartig}$$

Koordinatenzeit: $x^0 = ct, \lambda = t \Rightarrow x^\mu(t) = (ct, x^i(t))$

$$\Rightarrow \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \left(c, \frac{dx^i}{dt} \right) \equiv (c, v^i) \Rightarrow \dot{x}^2 = c^2 - |\vec{v}|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \cdot \gamma$$

$$u^\mu = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}} \dot{x}^\mu = \gamma \dot{x}^\mu = \gamma(c, \vec{v})$$

$$S = -mc \int ds = -mc \int dt \sqrt{\dot{x}^2} = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

Lagrange-Funktion:

$$\Rightarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

Energie/**Hamiltonische Funktion:** $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \gamma \cdot m \dot{x}_i$

$$\Rightarrow H := p_i \dot{x}^2 - L = \dots = \gamma \cdot mc^2 \Rightarrow E = \gamma \cdot mc^2$$

\Rightarrow Ruheenergie

$$E = mc^2$$

Ladungsdichte ρ und Strom \vec{j}

Stationärer Fall: $x^\mu(\lambda) \stackrel{\lambda=t}{=} x^\mu(t) = (ct, \vec{x}_0)$

Geladenes Teilchen mit Ladung e am Ort \vec{x}_0 .

$$\rho(\vec{x}) = e \cdot \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad \vec{j}(\vec{x}) = 0$$

Wiederholung: Dirac “ δ -Funktion”

Abbildung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-a) f(x) = f(a)$$

Keine Funktion $\delta(x)$ hat exakt diese Eigenschaften, aber wir können sie beliebig genau annähern.

$$\Delta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \quad " \delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_\varepsilon(x) "$$

Eigenschaften der δ -Funktion:

- $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$
- Für glatte Funktion $f(x)$ mit Nullstellen x_n , so dass $f'(x_n) \neq 0$

$$\stackrel{\text{ÜA}}{\Rightarrow} \delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n)$$

$$\Rightarrow \text{Spezialfall: } \delta(a \cdot x) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

Dirac δ -Funktion in höheren Dimensionen:

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2) \delta(x^3 - y^3) \text{ etc.}$$

z.B.:

$$\int_V d^3\vec{y} f(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) = e \int d^3\vec{x} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = e \Rightarrow Q = e \text{ Gesamtladung}$$

Kontinuitätsgleichung: Für zeitabhängige Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$ hat man eine Relation zum Strom \vec{j}

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Interpretation: Für zeitabhängige $\rho(\vec{x}, t)$ ist die Gesamtladung in V zeitabhängig.

Abbildung

$$Q_v(t) := \int_V d^3\vec{x} \rho(\vec{x}, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_v(t)}{dt} &= \int_V d^3\vec{x} \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = - \int_V d^3\vec{x} \nabla \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} \\ &= \text{Gesamtstrom durch die Oberfläche} \end{aligned}$$

Für **relativistische** Teilchen: ρ und \vec{j} kombinieren sich zu relativistisch kovarianten 4-Vektoren.

$$j^\mu := (c\rho, \vec{j})$$

$$j^0 = c\rho, j^i = (\vec{j})^i$$

Eine Erhaltungsrelation:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \sum_{i=1}^3 \partial_i j^i = \frac{\partial}{\partial x^0}(c\rho) + \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

4er-Strom für geladenes Punktteilchen?

Weltlinie des Teilchens mit Ladung e : $x^\mu(\lambda)$

$$j^\mu(x) = ce \int d\lambda \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta^4(x - x(\lambda))$$

Beachte: $x \hat{=}$ Punkt im $\mathbb{R}^{3,1}$ aber $x(\lambda) \hat{=}$ 4 Funktionen der Parametrisierung

Wähle Parametrisierung nach Koordinatenzeit: $x^\mu(\lambda) = x^\mu(t') = (ct', \vec{x}(t'))$

$$\begin{aligned}
j^0(ct, \vec{x}) &= ce \int dt' \frac{dx^0(t')}{dt'} \underbrace{\delta(ct - ct')}_{\frac{1}{c}\delta(t-t')} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t')) \\
&= ce \int dt' \delta(t - t') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t')) \\
&= ce \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) \\
&= c \cdot \rho(\vec{x}, t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(\vec{x}, t) = e \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

Kosistent mit dem stationären Fall

3er-Strom:

$$\begin{aligned}
j^i(ct, \vec{x}) &= ce \int dt' \underbrace{\frac{dx^i(t')}{dt'}}_{=v^i(t')} \underbrace{\delta(c(t - t'))}_{=\frac{1}{c}\delta(t-t')} \int^3 (\vec{x} - \vec{x}(t')) \\
&= e \int dt' v^i(t') \delta(t - t') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t')) = ev^i(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j^0 &= c\rho = cr\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) \\
\vec{j} &= e\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))
\end{aligned}$$

$$j^\mu(x) := ce \int d\lambda \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta^4(x - x(\lambda))$$

Behauptung: $\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

Beweis: Test-Funktion $\varphi(x)$ (Skalar im \mathbb{R}^3)

Abbildung

$$\begin{aligned}
\int d^4x \varphi(x) \partial_\mu j^\mu(x) &\stackrel{\text{Def.}}{=} ce \int d\lambda \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \int d^4x \partial_\mu \delta^4(x - x(\lambda)) \\
&\stackrel{\text{part. Int.}}{=} -ce \int d\lambda \frac{dx^\mu}{d\lambda} \int d^4x \partial_\mu \varphi(x) \delta^4(x - x(\lambda)) \Big|_{x^\mu=x^\mu(\lambda)} \\
&= -ce \int d\lambda \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\mu} \Big|_{x=x(\lambda)} \\
&= -ce \int d\lambda \frac{d}{d\lambda} \varphi(x(\lambda)) = 0
\end{aligned}$$

Für beliebige Testfunktionen

Resultate bisher:

- **Ladungsdichte** einer Punktladung e mit Bahnkurve $\vec{x}(t)$

$$\rho(t, \vec{x}) = e\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

- **Stromdichte:**

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = e\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)), \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Relativistisch kovariante Form $j^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x))$

Limes vieler Punktladungen:

glatte Funktion $\rho(x)$, glattes Vektorfeld $\vec{j}(x)$

Abbildung

→ instantane Wechselwirkung (Kraft) nicht kompatibel mit SR!

→ Feldtheorie, dynamische Felder $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x})$

3.4. Relativistische Feldtheorie

Eine Feldtheorie besteht aus dynamischen Felder, die jeden Punkt des Raums \mathbb{R}^3 (aber der Raumzeit $\mathbb{R}^{3,1}$) eine Zahl, Vektor, Matrix etc. zuweisen.

Beispiel: Skalarfeld: $\varphi(t, \vec{x})$, Vektorfeld: $\vec{A}(t, \vec{x})$

Unterschied zu Punktteilchen: $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$

→ Bewegungsgleichungen, gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \overrightarrow{F(\vec{x}(t))}$$

In Feldtheorie: partielle Differentialgleichungen für $\varphi(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})$

Beispiel: Kontinuitätsgleichung für $\rho(t, \vec{x}), \vec{j}(t, \vec{x})$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Felder auf Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Skalarfeld: $\varphi = \varphi(x) = \varphi(x^\mu) = \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$

Lorentz-Transformation: $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ [$x' = \Lambda \cdot x$]

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi' & \text{so dass} & \quad \varphi'(x') = \varphi(x) \\ \Leftrightarrow \varphi'(x') &= \varphi'(\Lambda x) = \varphi(x) & \text{für alle } x &\in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$y := \Lambda \cdot x, x = \Lambda^{-1}y$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \varphi(\Lambda^{-1}y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^{3,1}$$

Umbenennen: $y \rightarrow x$:

$$\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x)$$

Vektorfelder: $A^\mu = A^\mu(x)$, $A^\mu \rightarrow A'^\mu$, wobei

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \Leftrightarrow$$

$$A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$$

Höhere Tensoren: $F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x)$

$$F'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x)$$

Partielle Ableitungen/Differentialgleichungen:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Unter Lorentz-Transformationen: $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \\ &= \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial'_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu \Leftrightarrow$$

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$$

Beispiel:

$$\square := \partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Laplace-Operator:

$$\nabla^2 := \nabla \cdot \nabla$$

Wellengleichungen:

Laplace-Operator:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi(t, \vec{x}) = 0$$

3.5. Maxwell-Gleichungen

Empirischer Input:

1. Es existieren elektrische Felder $\vec{E}(t, \vec{x})$ und magnetische Felder $\vec{B}(t, \vec{x})$
2. $\vec{B} \longleftrightarrow$ bewegte Ladungen (\vec{j}) für stationäre Punktladungen am Ort \vec{x}_0 :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

Übungsaufgabe: $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ für $\vec{x} \neq \vec{x}_0$, ρ : Ladungsdichte

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

3. Es existieren **keine** magnetischen Ladungen

$$0 = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \forall V$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Welches Feld im Minkowski-Raum beinhaltet \vec{E} und \vec{B} ?

Antisymmetrisch: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}), \vec{E} \sim c\rho = j^0$$

Feldstärke-Tensor:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Effizientere Notation:

$$F_{0i} = E_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k$$

$$F^{\mu\nu} := \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}$$

$$\Rightarrow F^{0i} = \eta^{00} \eta^{ij} F_{0j} = -\delta^{ij} E_j = -E^i$$

$$F^{ij} = \eta^{ik} \eta^{jl} F_{kl} = -\varepsilon^{ijk} B_k$$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E^2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E^3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell-Gleichungen:Empirische Annahmen: (Gauss: $\varepsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}$)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Motivation dessen:

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 4\pi Q \qquad 0 = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c} j^0$$

$$\Rightarrow \partial_i F^{io} = \frac{4\pi}{c} j^0$$

Postulat (inhomogene Maxwell Gleichungen):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= \partial_i B^i = 0 & F_{ij} &= -\varepsilon_{ijk} B^k \\ \Rightarrow \varepsilon^{ijl} F_{ij} &= i \varepsilon^{ijl} \varepsilon_{ijk} B^k = -2B^l\end{aligned}$$

$$\Rightarrow B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial_i F_{jk} = 0$$

4D Levi-Civita-Tensor: $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$: total antisymmetrisch, $\varepsilon^{0123} = +1$, Lorentz-invariant unter $SO(1,3)$

$$\Rightarrow \varepsilon^{0ijk} \partial_i F_{jk} = 0$$

Postulat (homogene Maxwell Gleichungen):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

Es bleibt die Konsequenzen dieser Theorie auszurechnen und auf Konsistenz zu prüfen.

Betrachte die inhomogenen Maxwellgleichungen.

$\nu = 0$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= \underbrace{\partial_0 F^{00}}_{=0} + \partial_i F^{i0} = \partial_i E^i = \nabla \cdot \vec{E} \\ &= \frac{4\pi}{c} j^0 = \frac{4\pi}{c} c\rho = 4\pi\rho \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho\end{aligned}$$

$\nu = j$:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu j} &= \partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} \\
&= \partial_0(-E^j) + \partial_i(-\varepsilon^{ijk} B_k) \\
&= -\frac{\partial E^j}{\partial x^0} + \varepsilon^{jik} \partial_i B_k \\
&\stackrel{x^0 \equiv ct}{=} -\frac{1}{c} \frac{\partial E^j}{\partial t} + (\nabla \times \vec{B})^j \\
&\stackrel{!}{=} \frac{4\pi}{c} j^j
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Divergenz:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\nabla \cdot \vec{E})}_{=4\pi\rho} + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B})}_{=0} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\
\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \rho = \nabla \cdot \vec{j} &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0
\end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

Betrachte die homogene Maxwellgleichungen:

$\mu = 0$:

$$\varepsilon^{0ijk} \partial_i F_{jk} = 0 \iff \partial_i B^i = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$\mu = i$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{i0jk} \partial_0 F_{jk} + \varepsilon^{ij0k} \partial_j F_{0k} + \varepsilon^{ijk0} \partial_j F_{k0} &= 0 \\
&\iff
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0$$

Maxwell-Gleichungen

inhomogen:	homogen:
$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Im Vakuum ($\rho = 0 = \vec{j}$), **elektrisch-magnetische Dualität**: invariant unter

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E}$$

Kommentar: Andere Konventionen sind oft üblich

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

SI Einheiten: $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, ε_0 : Permittivität (des leeren Raumes), μ_0 : Permeabilität (des leeren Raumes)

nach obigem $\vec{E} \rightarrow \frac{1}{c}\vec{E}$, $\varepsilon \rightarrow \frac{1}{4\pi c}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi c}{c^2} \vec{j} \rightarrow \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j}$$

Maxwell-Gleichungen in SI Einheiten:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$