Vorlesungsskript

Elektrodynamik

Inhaltsverzeichnis

1. Worum geht es in der Elektrodynamik?

In der klassischen Mechanik:

fundamentale Konzepte: Länge, Zeit, Masse

$\longrightarrow$ Trägheit + Gravitation

Newtonsche Bew. gl.: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $\vec{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$ wobei $\underbrace{\vec{r}}_{\text{Ort}} \underbrace{(t)}_{\text{Zeit}} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

comment(Zeichung 2D system mit massepunkt, e eingezeichnet)

Lagrange-Funktion:

$\longrightarrow$ Wirkung

$$S = \int dt L\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)$$

N Teilchen $\vec{r}_i(t), i = 1, ..., N$

$$L\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2 - V(\vec{r}_i)$$

$$V(\vec{r}_i) = -\frac{G}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$

Neue fundamentale Größe:

- elektrische Ladung q (positiv oder negativ)
- gequantelt mit Elementarladung e

$$\begin{aligned} & q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z} \\ & q > 0 \ \ (\text{Proton, Positron}, n = +1) \\ & q < 0 \ \ (\text{Elektron}, n = -1) \end{aligned}$$

Coulomb-Gesetz: Kraft zwischen elektrisch geladenen Teilchen

$$\vec{F}_1 = k \cdot q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} = -\vec{F}_2$$

comment(Zeichung zweier Punktteilchen, Coloumbgesetz geometrisch

$q_1 q_2 > 0$ (Ladungen haben dasselbe Vorzeichen) $\Longrightarrow$ abstoßend

$q_1 q_2 < 0$ (Ladungen haben verschiedene Vorzeichen) $\Longrightarrow$ anziehend

Was ist k? (Einheitensysteme)

1) Gausssche System: $k = 1$

2) SI System: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

3) Heavyside-Lorentz-System: $k = \frac{1}{4\pi}$

Umrechnen: SI $\to$ Gauss: $e_0 = \frac{1}{4\pi}$, SI $\to$ Heavyside: $\varepsilon_0 = 1$

Zusätzliche Realität:

magenetische Felder, elektromagnetische Wellen

$$\longrightarrow \textbf{Feldtheorie} \text{ (Maxwell's Theorie, erstes Beispiel)}$$

$\vec{x}_i(t), \quad i = 1, ..., N$ diskrete Zahl an freiheitsgrade $= 3N$

$\longrightarrow$ Elektrodynamik $\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{B}(t, \vec{x})$

Betrachte ein Kraftfeld, erzeugt durch N Punktladungen $q_i, 1 = 1, ..., N$ wirkend auf eine Testladung $|q| \ll |q_i|$

$$\Longrightarrow \vec{F} = q\vec{E}(\vec{x}), \quad \underbrace{\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}}_{\text{das Elektrische Feld}}$$

eine fixierte Ladung an $\vec{x}_1$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \frac{\vec{x} - \vec{x}_1(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|^3}$$

comment(Zeichung Punktteilchen, Ladung)

Diese (naive) Zeitabhängigkeit ist empirisch falsch und im Widerspruch zur (speziellen) Relativitätstheorie (SR)

$\longrightarrow$ Maxwell's Theorie, kompatibel mit SR

1.1. Plan der Vorlesung

1. Wiederholung
   - Euklidische Geometrie im $\mathbb{R}^3$, Vektoranalysis (Differentialformen)
2. Spezielle Relativitätstheorie
   - (Psuedo-) Euklidische Geometrie des Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$
3. Maxwell's Theorie
4. Anwendungen
   1. Elektrostatik
   2. Magnetostatik
   3. Elektro- und Magnetostatik in Materie

2. Wiederholung: Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

Der euklidische $\mathbb{R}^3$: $\vec{x} = \vec{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x^i), \quad i = 1, 2, 3$

Metrik:

$$\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_1^i - x_2^i)(x_1^i - x_2^i)$$

Geometrie invariant unter Rotationen

$$x^i \longrightarrow x'^i = \sum_{j=1}^{3} R^i_j x^j \underbrace{=}_{\text{Einstein Konvention}} R^i_j x^j$$

$$|\vec{x}|^2 = \delta_{ij} x^i x^j \quad \text{wobei } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}'|^2 &= \delta_{ij} x'^i x'^j = \delta_{ij} R^i_k x^k R^j_l x^l \\ &= \left(\delta_{ij} R^i_k R^j_l\right) x^k x^l = |\vec{x}|^2 = \delta_{kl} x^k x^l \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{kl}$$

Matrix-Notation: $R = \left(R^i_j\right), \mathbb{1} = (\delta_{ij})$

$$\begin{aligned} \delta_{kl} = R^i_k \delta_{ij} R^j_l &\Longrightarrow \mathbb{1} = R^T R \\ &\Longrightarrow \det(R) = \pm 1 \end{aligned}$$

Rotationsgruppe: $\mathrm{SO}(3) : \det(R) = +1$

—

Im $\mathbb{R}^3$ hat man das **Kreuz-Produkt**

Epsilon-Tensor / Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk} : \quad \varepsilon^{123} = -\varepsilon^{213} = \varepsilon^{231} = 1$$

total antisymmetrisch, da $\varepsilon^{112} = 0 = -\varepsilon^{112}$

$\Longrightarrow$ invariant unter Rotation / SO(3)

$$\varepsilon^{ijk} \longrightarrow R^i_m R^j_n R^K_l \varepsilon^{mnl} \underbrace{=}_{\det(R)=1} \varepsilon^{ijk}$$

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ darf man nur folgende Objekte benutzen:

$$\delta_{ij}, \delta^{ij}, \varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}$$

Skalarprodukt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \delta_{ij} x^i y^j$

Kreuzprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, (\vec{u} \times \vec{v})^i := \delta^{il} \varepsilon_{ljk} u^j v^k$

Skalare/Funktionen auf $\mathbb{R}^3$: $F = F(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

Vektorfeld auf RR^3: $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$

Gradient: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, Skalar $\longrightarrow$ Vektor

$$\vec{\nabla} F = \text{grad } F, \quad (\text{grad } F)^i = \delta^{ij} \partial_j F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \frac{\partial F}{\partial x^3} \right)$$

Divergenz: Vektor $\longrightarrow$ Skalar

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \nabla \cdot \vec{V} = \partial_i V^i \\ &= \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \end{aligned}$$

Rotation: Vektor $\longrightarrow$ Vektor

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} \Longrightarrow (\text{rot } V)^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j V_k$$

$$\text{Skalare} \xrightarrow{\text{grad}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{rot}} \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{div}} \text{Skalare}$$

Identitäten (Kettenkomplex):

$$\begin{aligned} \text{rot} \circ \text{grad} &= 0 \\ \text{div} \circ \text{rot} &= 0 \end{aligned}$$

Differentialformen im $\mathbb{R}^3$:

- 0-Formen: Skalar
- 1-Formen: "dual" zu Vektoren, $A_i(\vec{x})$

$$[\text{Im Euklidischen: } V_i(\vec{x}) = \delta_{ij} V^j(\vec{x})]$$

- 2-Formen: Antisymmetrischer Tensor

$$B_{ij}(\vec{x}) = -B_{ij}(\vec{x})$$

- 3-Formen: $C_{ijk}(\vec{x}) = -C_{ikj}(\vec{x}) = \ldots$ (wie Levi-Civita)

Effiziente indexfreie Notation: Basis-Elemente dx^i

- 1-Form: $A = A_i \, \mathrm{d}x^i$
- 2-Form: $B = \frac{1}{2} B_{ij} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$
- 3-Form: $C = \frac{1}{3!} C_{ijk} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$

wobei $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$

Wedge Product:

$$A \wedge B = \left(A_i \, \mathrm{d}x^i\right) \wedge \left(\frac{1}{2} B_{jk} \, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\right) = \frac{1}{2} A_i B_{jk} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \text{ (3-Form)}$$

p-Form A, q-Form B

$$\Longrightarrow A \wedge B \text{ ist } (p+q) - \text{Form}$$
$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A \text{ (gradiert Kommutativ)}$$
$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \text{ (assoziativ)}$$

<u>deRham Differential:</u>

$$d \coloneqq \partial_i \, \mathrm{d}x^i \wedge$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} dA &= d\left(A_j dx^j\right) \\ &= \partial_i dx^i \wedge \left(A_j dx^j\right) \\ &= \partial_i A_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{-dx^j \wedge dx^i} \end{aligned}$$

Ω^p : p-Formen, $d : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$, $d^2 = 0$ (Übungsaufgabe)

<u>Hodge Operator:</u>

$$\star : \Omega^p \longleftrightarrow \Omega^{3-p}$$
$$\star : \Omega^1 \longleftrightarrow \Omega^2$$
$$\star : \Omega^3 \longleftrightarrow \Omega^0$$

A ist 1-Form, B ist 2-Form, C ist 3-Form

$$\star \, A = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{k} A_k dx^i \wedge dx^j$$
$$\star \, B = \frac{1}{2} \varepsilon_{i}^{jk} B_{jk} dx^i$$
$$\star \, C = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} C_{ijk}$$

Wir erweitern das Diagramm von vorher:

$$\begin{array}{llll} \text{Skalare} \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektoren} \xrightarrow{\text{div}} & \text{Skalare} \\ \updownarrow id & \updownarrow \heartsuit & \updownarrow \star, \heartsuit & \updownarrow \star \\ \Omega^0 \quad \xrightarrow{d} & \Omega^1 \quad \xrightarrow{d} & \Omega^2 \quad \xrightarrow{d} & \Omega^3 \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert. (Alle Pfade, die zwei Punkte verbinden, sind äquivalent.)

$$d^2 = 0 \Longleftrightarrow \text{rot} \circ \text{grad} = 0, \text{div} \circ \text{rot} = 0$$