# Vorlesungsskript

LinA II* SoSe 24

# Inhaltsverzeichnis

# Definitionen

## 1 .

**Wiederholung:**

$K$ sei ein beliebiger Körper, $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum,

$$L(V,V) = \{f : V \to V \mid f \text{ lin. Abbildung}\}$$

$f \in L(V,V)$ heißt Endomorphismus. Ist $f \in L(V,V)$, so läßt sich $f$ bezüglich einer Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von $V$ eindeutig durch eine Matrix

$$A_f^{B,B} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n,n}$$

Es gilt

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \qquad 1 \le j \le n$$

Abbildung

$$F : L(V,V) \to K^{n,n}$$

ist ein Isomorphismus.

Basiswechsel? Basen $B, C$ von $V$

Bezüglich Basis B    Bezüglich Basis C

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[rr, "?"] \arrow[dr, "\Phi_B"'] & & K^n \arrow[dl, "\Phi_C"] \\ & V & \end{tikzcd} \qquad \Rightarrow \; ? = \Phi_{BC} = \Phi_C^{-1} \circ \Phi_B$$

(siehe Lem. 5.27, LinA I*)

Eine zentrale Frage: Sei $f \in L(V,V)$, existiert eine Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von $V$, so dass $A_f^{B,B}$ eine möglichst einfache Form besitzt?

z.B. Diagonalmatrix:

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir werden:

- Endomorphismen charakterisieren, die sich durch eine Diagonalmatrix beschreiben lassen.

  Wenn ja: Dann gilt $f(v_j) = \lambda_j v_j$

  $\Longrightarrow f$ ist eine Streckung von $v_j$ um den Faktor $\lambda_j$.
- Die Jordan-Normalform herleiten.

# 1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte charakterisieren zentrale Eigenschaften linearer Abbildungen. Z.B.

- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Eigenschaften von physikalischen Systemen

  $\rightarrow$ gewöhnliche Differentialgleichungen

  $\rightarrow$ Eigenschwingungen / Resonanzkatastrophe

  Zerstörung einer Brücke über dem Fluß Maine / Milleanium-Bridge London

## 1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

**Definition 1.1: Eigenwert und Eigenvektor (Endomorphismus)**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Ein Vektor $v \in V, v \neq 0_V$, heißt **Eigenvektor** von $f \in L(V, V)$, falls $\lambda \in K$ mit

$$f(v) = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der **Eigenwert** zum Eigenvektor $v \in V$.

**Definition 1.2: Eigenwert und Eigenvektor (Matrix)**

Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Ein Vektor $v \in K^n$, $v \neq 0_{K^n}$, heißt Eigenvektor von $A \in K^{n,n}$, falls $\lambda \in K$ mit

$$Av = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der Eigenwert zum Eigenvektor $v \in V$.

**Bemerkungen:**

- In Def 1.1 kann $\dim(V) = \infty$ sein. Dies ist für viele Definitionen/Aussagen in denen wir Endomorphismen betrachten, der Fall.
- Für $\dim(V) < \infty$ kann man jedes $f \in L(V, V)$ eindeutig mit einer Matrix $A$ identifizieren. Dann: Def 1.2 ist Spezialfall von Def 1.1.

- **Achtung:** $0 \in K$ kann ein Eigenwert sein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Der Nullvektor $0 \in V$ ist **nie** ein Eigenvektor.

  Für $\dim(V) = 0$ besitzt $f$ keinen Eigenvektor für $f \in L(V, V)$.
- Ist $v$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$, so ist auch $\alpha v$ für jedes $\alpha \in K \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Zentrale Frage dieses Kapitels:

Existens von Eigenwerten? Wenn sie existieren: Weitere Eigenschaften?

**Beispiel 1.3:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $V$ der unendlichdimensionale Vektorraum der auf $I$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Ein Endomorphismus $f \in L(V, V)$ ist gegeben durch

$$f(\varphi) = \varphi' \qquad \forall \varphi \in V$$

Die Abbildung $f$ hat jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ als Eigenwert, da für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Funktion

$$\varphi(x) := c \cdot e^{\lambda x} \neq 0_V \qquad \forall x \in I$$

gilt

$$f(\varphi(x)) = f\left(c \cdot e^{\lambda x}\right) = \lambda\left(ce^{\lambda x}\right) = \lambda \varphi(x)$$

Hier: $\varphi'(x) = f(\varphi)$ ist eine gewöhnlihce Differentialgleichung.

**Beispiel 1.4:** Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Sei $x$ ein Eigenvektor, dann gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow x_2 = \lambda x_1 \quad \text{und} \quad -x_1 = \lambda x_2$$

O.B.d.A: $x_2 \neq 0$

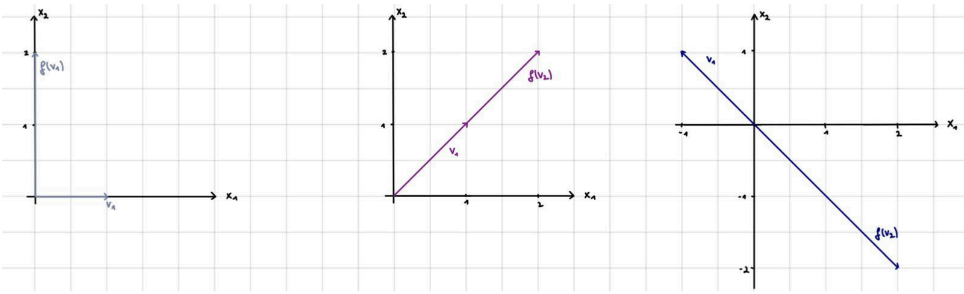
$$\Longrightarrow x_2 = \lambda(-\lambda x_2) = -\lambda^2 x_2 \Longrightarrow -\lambda^2 = 1,\ \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda^2 \geq 0 \Longrightarrow -\lambda^2 \leq 0 \ \lightning$$

D.h. $f$ besitzt keinen Eigenwert/-vektor. Für $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ändert sich dies! $\Longrightarrow$ Die Wahl von $K$ entscheidet!

**Beispiel 1.5:** Wieder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, diesmal

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für $v_1 = \binom{1}{0}, v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = (-1, 1)$ dass $f(v_1) = \binom{0}{2}, f(v_2) = \binom{2}{2} = 2 \cdot v_2$ und $f(v_3) = \binom{2}{-2} = (-2) \cdot v_3$.



Beobachtung: $\dim(V) = 2$

zwei Eigenwerte: $2, -2$, es existieren keine Weiteren,

zwei Eigenvektoren: $v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = \binom{-1}{1}$, sind linear unabhängig

**Lemma 1.6:** Es sei $f \in L(V, V)$ ein Endomorphismus. Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von $f$ sind linear unabhängig.

*Beweis:* Es seien $v_1, \ldots, v_m$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von $f$. Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: $m = 1$, $\lambda_1, v_1 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ lin. unabh.

Induktionsschritt: $m - 1 \to m$

Induktionsvorraussetzung: Beh. gelte für $m - 1$

Betrachte

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0 \ (*) \quad \alpha_m \in K \\ &\overset{\text{EV, f()}}{\Longrightarrow} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0 \\ &\overset{(*)\cdot\lambda_m}{\Longrightarrow} \lambda_m \alpha_a v_1 + \lambda_m \alpha_2 v_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m v_m = 0 \end{aligned}$$

Wir bilden die Differenz aus Zeile 1 und 2

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_1 v_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_2 v_2 + \ldots + \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_{m-1} v_{m-1} = 0$$

$v_1, \ldots, v_{m-1}$ lin. unabh. $\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$ Einsetzen in (*) liefert

$$\alpha_m \underbrace{v_m}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$$

$\Longrightarrow v_1, \ldots, v_m$ lin unabh.

$\square$

**Folgerung:** Es gibt höchstens $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte für $n = \dim(V) < \infty$.

**Definition 1.7: Eigenraum**

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$, so heißt

$$\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

der **Eigenraum** von $f$ bezüglich $\lambda$.

Es gilt:

- $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \subseteq V$ ist ein Untervektorraum
- $\lambda$ ist Eigenwert von $f \iff \operatorname{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$
- $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu $\lambda$ gehörenden Eigenvektoren von $f$.
- $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})$
- $\dim(\operatorname{Eig}(f, \lambda)) = \dim(V) - \operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id})$
- Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschiedene Eigenwerte, so ist $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$

Die letzte Aussage kann verallgemeinert werden zu:

**Lemma 1.8:** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m, m \leq n$, paarweise verschiedene Eigenwerte von $f$, so gilt

$$\operatorname{Eig}(f, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_j) = \{0\} \qquad \forall i = 1, ..., m$$

*Beweis:* Summe von Vektorräumen, vgl. Def 3.32 LinA I.

Sei $i \in \{1, ..., m\}$ fest gewählt.

$$v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_j)$$

Also ist

$$v = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j \quad \text{für } v_j \in \operatorname{Eig}(f, \lambda_j) \quad \text{für} \quad j \neq i$$

$\Longrightarrow -v + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j = 0$ Aus Lemma 1.6 folgt damit $v = 0$.

$\square$

Über die Identifikation von Endomorphismen und Matrizen für $\dim(V) < \infty$ erhält man:

**Korollar 1.9:** Für ein $n \in \mathbb{N}$ und einem Körper $K$ sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt für jedes $\lambda \in K$, dass

$$\dim(\mathrm{Eig}(A, \lambda)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$$

Insbesondere ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $A$, wenn $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$ ist.

**Definition 1.10: Geometrische Vielfachheit**

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f$, so heißt

$$g(f, \lambda) := \dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) \qquad (> 0)$$

die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda$.

## 1.2. Das charakteristische Polynom

Wir bestimmt man Eigenwerte?

**Lemma 1.11:** Seien $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann ist

$$\det(A - \lambda I_n)$$

ein Polynom $n$-ten Grades in $\lambda$.

*Beweis:* Mit der Leibnitz-Formel folgt,

$$\begin{aligned}\det\left(\underbrace{A - \lambda I_n}_{\tilde{a}_{ij}}\right) &= \sum_{\sigma \in S_1} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \tilde{a}_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{n\sigma(n)} \\ &= \underbrace{\underbrace{(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)}_{\sigma = \mathrm{Id}}}_{\in \mathcal{P}_n \text{ in } \lambda} + \underbrace{\underbrace{S}_{\sigma \neq \mathrm{Id}}}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + \ldots + a_{nn}) + \underbrace{S_1}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}$$

Insgesamt: Es existieren Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in K$ mit

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_n) &= a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \\ a_n &= (-1)^n \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1} (a_{11} + \ldots + a_{nn})\end{aligned}$$

man kann zeigen: $a_0 = \det(A)$

□

Man nennt $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ auch die **Spur** von $A$.

**Definition 1.12: Charakteristisches Polynom**
Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann heißt das Polynom $n$-ten Grades

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

das charakteristische Polynom zu $A$.

**Lemma 1.13:** Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Der Skalar $\lambda$ ist genau dann Eigenwert von $A$, wenn

$$p_A(\lambda) = 0$$

gilt.

*Beweis:* Die Gleichung

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I_n)v = 0$$

hat genau eine Lösung $v \in V, v \neq 0$, wenn $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$, vgl. Satz 6.3 aus LinA I. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0, \text{vlg. D10 aus LinA I}$$

□

**Beispiel 1.14:** Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus liefert

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 8 & 16 \\ 0 & 7-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-35 - 7\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 32) \\ &= (3-\lambda)[(7-\lambda)(-5-\lambda) - 8(-4)] - 8(0-0) + 16(0-0) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Eigenwerte sind $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

Zugehörige Eigenvektoren?

$\lambda = -1$:

$$Av = -v \iff (A + I_3)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen: $\Longrightarrow v_2 = -v_3, v_1 = -2v_3$

Damit ist z.B.: $w_1 = (2, 1, -1)^\top$ Eigenvektoren.

$\lambda = 3$:

$$(A - 3I_3)v = 0 \iff$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^3 \iff v_2 + 2v_3 = 0$$

Damit sind z.B.: $w_2 = (1, 2, -1)^\top, w_3 = (-1, 2, -1)$ Eigenvektoren.