

# Vorlesungsskript

LinA II\* SoSe 24

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Eigenwerte und Eigenvektoren .....</b>	<b>3</b>
1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften .....	3
1.2. Das charakteristische Polynom .....	7
<b>2. Diagonalisierbarkeit und Normalform .....</b>	<b>16</b>
2.1. Diagonalisierbarkeit .....	16
2.2. Dualräume .....	22
2.3. Zyklische $f$ -invariant Unterräume .....	26
2.4. Die Jordan-Normalform .....	30

# Definitionen

## 1 .

---

- 1.1:** Eigenwert und Eigenvektor
- 1.2:** Eigenwert und Eigenvektor
- 1.7:** Eigenraum
- 1.10:** Geometrische Vielfachheit
- 1.12:** Charakteristisches Polynom
- 1.17:** ähnliche Matrizen
- 1.20:** Algebraische Vielfachheit

## 2 .

---

- 2.1:** Diagonalisierbar
- 2.8:** Jordan
- 2.9:** Linearform, Dualraum
- 2.12:** duale Abbildung
- 2.15:** nilpotent vom Grad
- 2.16:** equation
- 2.17:** Bilinearform
- 2.19:** Grad von
- 2.20:** Krylov

## Wiederholung:

$K$  sei ein beliebiger Körper,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum,

$$L(V, V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ lin. Abbildung}\}$$

$f \in L(V, V)$  heißt Endomorphismus. Ist  $f \in L(V, V)$ , so läßt sich  $f$  bezüglich einer Basis  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  eindeutig durch eine Matrix

$$A_f^{B,B} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n,n}$$

Es gilt

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \quad 1 \leq j \leq n$$

Abbildung

$$F : L(V, V) \rightarrow K^{n,n}$$

ist ein Isomorphismus.

Basiswechsel? Basen  $B, C$  von  $V$



(siehe Lem. 5.27, LinA I\*)

Eine zentrale Frage: Sei  $f \in L(V, V)$ , existiert eine Basis  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ , so dass  $A_f^{B,B}$  eine möglichst einfache Form besitzt?

z.B. Diagonalmatrix:

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir werden:

- Endomorphismen charakterisieren, die sich durch eine Diagonalmatrix beschreiben lassen.

Wenn ja: Dann gilt  $f(v_j) = \lambda_j v_j$

$\Rightarrow f$  ist eine Streckung von  $v_j$  um den Faktor  $\lambda_j$ .

- Die Jordan-Normalform herleiten.

# 1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte charakterisieren zentrale Eigenschaften linearer Abbildungen. Z.B.

- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
  - Eigenschaften von physikalischen Systemen
    - gewöhnliche Differentialgleichungen
    - Eigenschwingungen / Resonanzkatastrophe
- Zerstörung einer Brücke über dem Fluß Maine / Millenium-Bridge London

## 1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

### Definition 1.1: Eigenwert und Eigenvektor (Endomorphismus)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Ein Vektor  $v \in V, v \neq 0_V$ , heißt **Eigenvektor** von  $f \in L(V, V)$ , falls  $\lambda \in K$  mit

$$f(v) = \lambda v$$

existiert. Der Skalar  $\lambda \in K$  heißt der **Eigenwert** zum Eigenvektor  $v \in V$ .

### Definition 1.2: Eigenwert und Eigenvektor (Matrix)

Sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Ein Vektor  $v \in K^n, v \neq 0_{K^n}$ , heißt Eigenvektor von  $A \in K^{n,n}$ , falls  $\lambda \in K$  mit

$$Av = \lambda v$$

existiert. Der Skalar  $\lambda \in K$  heißt der Eigenwert zum Eigenvektor  $v \in V$ .

### Bemerkungen:

- In Def 1.1 kann  $\dim(V) = \infty$  sein. Dies ist für viele Definitionen/Aussagen in denen wir Endomorphismen betrachten, der Fall.
- Für  $\dim(V) < \infty$  kann man jedes  $f \in L(V, V)$  eindeutig mit einer Matrix  $A$  identifizieren. Dann: Def 1.2 ist Spezialfall von Def 1.1.

- **Achtung:**  $0 \in K$  kann ein Eigenwert sein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor  $0 \in V$  ist **nie** ein Eigenvektor.

Für  $\dim(V) = 0$  besitzt  $f$  keinen Eigenvektor für  $f \in L(V, V)$ .

- Ist  $v$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , so ist auch  $\alpha v$  für jedes  $\alpha \in K \setminus \{0\}$  ein Eigenvektor

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Zentrale Frage dieses Kapitels:

Existenz von Eigenwerten? Wenn sie existieren: Weitere Eigenschaften?

**Beispiel 1.3:** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $V$  der unendlichdimensionale Vektorraum der auf  $I$  beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Ein Endomorphismus  $f \in L(V, V)$  ist gegeben durch

$$f(\varphi) = \varphi' \quad \forall \varphi \in V$$

Die Abbildung  $f$  hat jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  als Eigenwert, da für  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und die Funktion

$$\varphi(x) := c \cdot e^{\lambda x} \neq 0_V \quad \forall x \in I$$

gilt

$$f(\varphi(x)) = f(c \cdot e^{\lambda x}) = \lambda(c e^{\lambda x}) = \lambda \varphi(x)$$

Hier:  $\varphi'(x) = f(\varphi)$  ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

**Beispiel 1.4:** Wir betrachten die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Sei  $x$  ein Eigenvektor, dann gilt

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \lambda x_1 \quad \text{und} \quad -x_1 = \lambda x_2 \end{aligned}$$

O.B.d.A:  $x_2 \neq 0$

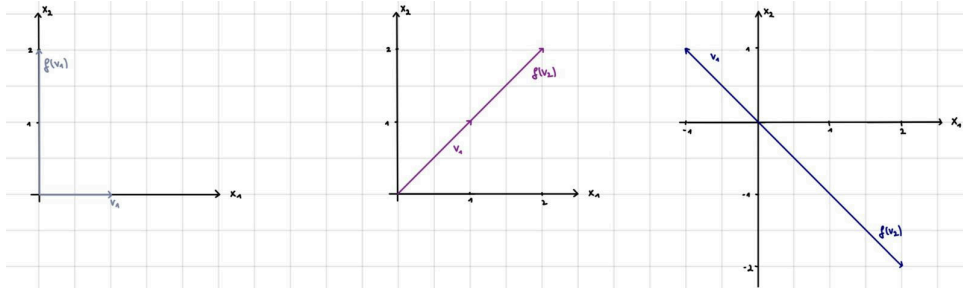
$$\Rightarrow x_2 = \lambda(-\lambda x_2) = -\lambda^2 x_2 \Rightarrow -\lambda^2 = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda^2 \geq 0 \Rightarrow -\lambda^2 \leq 0 \quad \nexists$$

D.h.  $f$  besitzt keinen Eigenwert/-vektor. Für  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  ändert sich dies!  $\Rightarrow$  Die Wahl von  $K$  entscheidet!

**Beispiel 1.5:** Wieder  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , diesmal

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = (-1, 1)$  dass  $f(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_2$  und  $f(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot v_3$ .



Beobachtung:  $\dim(V) = 2$

zwei Eigenwerte:  $2, -2$ , es existieren keine Weiteren,

zwei Eigenvektoren:  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , sind linear unabhängig

**Lemma 1.6:** Es sei  $f \in L(V, V)$  ein Endomorphismus. Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von  $f$  sind linear unabhängig.

*Beweis:* Es seien  $v_1, \dots, v_m$  Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  von  $f$ . Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:  $m = 1$ ,  $\lambda_1, v_1 \neq 0 \Rightarrow v_1$  lin. unabh.

Induktionsschritt:  $m - 1 \rightarrow m$

Induktionsvoraussetzung: Behauptung gelte für  $m - 1$

Betrachte

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m &= 0 \quad (*) \quad \alpha_m \in K \\ \xRightarrow{\text{EV, } f(\cdot)} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m &= 0 \\ \xRightarrow{(*) \cdot \lambda_m} \lambda_m \alpha_1 v_1 + \lambda_m \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m v_m &= 0 \end{aligned}$$

Wir bilden die Differenz aus Zeile 1 und 2

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_1 v_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_2 v_2 + \dots + \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_{m-1} v_{m-1} = 0$$

$v_1, \dots, v_{m-1}$  lin. unabh.  $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$  Einsetzen in  $(*)$  liefert

$$\alpha_m \underbrace{v_m}_{\neq 0} = 0 \implies \alpha_m = 0$$

$\implies v_1, \dots, v_m$  lin unabh.

□

**Folgerung:** Es gibt höchstens  $n = \dim(V)$  verschiedene Eigenwerte für  $n = \dim(V) < \infty$ .

### Definition 1.7: Eigenraum

Ist  $f \in L(V, V)$  und  $\lambda \in K$ , so heißt

$$\text{Eig}(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

der **Eigenraum** von  $f$  bezüglich  $\lambda$ .

Es gilt:

- $\text{Eig}(f, \lambda) \subseteq V$  ist ein Untervektorraum
- $\lambda$  ist Eigenwert von  $f \iff \text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$
- $\text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$  ist die Menge der zu  $\lambda$  gehörenden Eigenvektoren von  $f$ .
- $\text{Eig}(f, \lambda) = \ker(f - \lambda \text{Id})$
- $\dim(\text{Eig}(f, \lambda)) = \dim(V) - \text{rg}(f - \lambda \text{Id})$
- Sind  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  verschiedene Eigenwerte, so ist  $\text{Eig}(f, \lambda_1) \cap \text{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$

Die letzte Aussage kann verallgemeinert werden zu:

**Lemma 1.8:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$  und  $f \in L(V, V)$ . Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, m \leq n$ , paarweise verschiedene Eigenwerte von  $f$ , so gilt

$$\text{Eig}(f, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \text{Eig}(f, \lambda_j) = \{0\} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

*Beweis:* Summe von Vektorräumen, vgl. Def 3.32 LinA I.

Sei  $i \in \{1, \dots, m\}$  fest gewählt.

$$v \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \text{Eig}(f, \lambda_j)$$

Also ist

$$v = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m v_j \quad \text{für } v_j \in \text{Eig}(f, \lambda_j) \quad \text{für } j \neq i$$



$\Rightarrow -v + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m v_j = 0$  Aus Lemma 1.6 folgt damit  $v = 0$ .

□

Über die Identifikation von Endomorphismen und Matrizen für  $\dim(V) < \infty$  erhält man:

**Korollar 1.9:** Für ein  $n \in \mathbb{N}$  und einem Körper  $K$  sei  $A \in K^{n,n}$ . Dann gilt für jedes  $\lambda \in K$ , dass

$$\dim(\text{Eig}(A, \lambda)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$$

Insbesondere ist  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $A$ , wenn  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$  ist.

### Definition 1.10: Geometrische Vielfachheit

Ist  $f \in L(V, V)$  und  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $f$ , so heißt

$$g(f, \lambda) := \dim(\text{Eig}(f, \lambda)) \quad (> 0)$$

die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda$ .

## 1.2. Das charakteristische Polynom

Wir bestimmt man Eigenwerte?

**Lemma 1.11:** Seien  $A \in K^{n,n}$  und  $\lambda \in K$ . Dann ist

$$\det(A - \lambda I_n)$$

ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\lambda$ .

*Beweis:* Mit der Leibniz-Formel folgt,

$$\begin{aligned} \det(\underbrace{A - \lambda I_n}_{\tilde{a}_{ij}}) &= \sum_{\sigma \in S_1} \text{sgn}(\sigma) \cdot \tilde{a}_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{n\sigma(n)} \\ &= \underbrace{(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda)}_{\substack{\sigma = \text{Id} \\ \in \mathcal{P}_n \text{ in } \lambda}} + \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \neq \text{Id} \\ \in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}}}_{S} \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) + \underbrace{S_1}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}$$

Insgesamt: Es existieren Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in K$  mit

$$\det(A - \lambda I_n) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn})$$

man kann zeigen:  $a_0 = \det(A)$

□

Man nennt  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$  auch die **Spur** von  $A$ .

### Definition 1.12: Charakteristisches Polynom

Sei  $A \in K^{n,n}$  und  $\lambda \in K$ . Dann heißt das Polynom  $n$ -ten Grades

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

das charakteristische Polynom zu  $A$ .

**Lemma 1.13:** Sei  $A \in K^{n,n}$  und  $\lambda \in K$ . Der Skalar  $\lambda$  ist genau dann Eigenwert von  $A$ , wenn

$$P_A(\lambda) = 0$$

gilt.

*Beweis:* Die Gleichung

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I_n)v = 0$$

hat genau eine Lösung  $v \in V, v \neq 0$ , wenn  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ , vgl. Satz 6.3 aus LinA I. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0, \text{ vgl. D10 aus LinA I}$$

□

**Beispiel 1.14:** Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus liefert

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 8 & 16 \\ 0 & 7-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)(-35-7\lambda+5\lambda+\lambda^2+32) \\
&= (3-\lambda)[(7-\lambda)(-5-\lambda)-8(-4)]-8(0-0)+16(0-0) \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Eigenwerte sind  $\lambda = 3$  und  $\lambda = -1$

Zugehörige Eigenvektoren?

$\lambda = -1$ :

$$\begin{aligned}
Av &= -v \Leftrightarrow (A + I_3)v = 0 \\
\begin{pmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

LGS lösen:  $\Rightarrow v_2 = -v_3, v_1 = -2v_3$

Damit ist z.B.:  $w_1 = (2, 1, -1)^\top$  Eigenvektor.

$\lambda = 3$ :

$$\begin{aligned}
(A - 3I_3)v &= 0 \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= 0 \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow v_2 + 2v_3 = 0
\end{aligned}$$

Damit sind z.B.:  $w_2 = (1, 2, -1)^\top, w_3 = (-1, 2, -1)$  Eigenvektoren.

$\lambda = -1$ : einfache Nullstelle und  $\dim(\text{Span}(w_1)) = 1$  passt zu  $\text{rg}(A - (-1)I_n) = 2$  und  $\dim(\text{Eig}(A, -1)) = 3 - 2 = 1$ .

$\lambda = -3$ : doppelte Nullstelle und  $\dim(\text{Span}(w_2, w_3)) = 2$  passt zu  $\text{rg}(A - 3I_n) = 1$  und  $\dim(\text{Eig}(A, 3)) = 3 - 1 = 2$

**Lemma 1.15:** Sei  $A \in K^{n,n}$ . Dann gilt

$$p_A(\cdot) = p_{A^\top}(\cdot)$$

D.h. eine Matrix und ihre Transponierte haben die gleichen Eigenwerte.

*Beweis:*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \stackrel{\text{D12}}{=} \det((A - \lambda I_n)^\top) = \det(A^\top - \lambda I_n) = p_{A^\top}(\lambda)$$

□

**Achtung:** Die Eigenwerte bleiben gleich, aber nicht die Eigenvektoren.

**Beispiel 1.16:** Für die Matrix  $A$  aus Bsp. 1.14 gilt

$$A^\top = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix} \implies \det(A^\top - \lambda I_n) = (3 - \lambda)[(7 - \lambda)(-5 - \lambda) + 4 \cdot 8] \\ = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

Aber

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 27 \\ 45 \end{pmatrix} \neq (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Man kann ausrechnen:

$$\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ EV zu EW } -1, \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{w}_3 \text{ EV zu EW } 3$$

Übertragung auf Endomorphismen?

$$p_f(\lambda) \quad f \in L(V, V), B \text{ Basis} \implies \exists! A_f^{B,B}, C \text{ Basis} \implies \exists! A_f^{C,C}$$

$$p_{A_f^{B,B}}(\lambda) \stackrel{?}{=} p_{A_f^{C,C}}(\lambda)$$

### Definition 1.17: ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen  $A, B \in K^{n,n}$  heißen **ähnlich**, wenn es eine Matrix  $T \in \text{GL}_n(K)$  gibt, so dass  $A = TBT^{-1}$  gilt.

Man kann leicht beweisen, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Matrizen ist.

Mit  $\det(A^{-1}) \stackrel{\text{D11}}{=} (\det(A))^{-1}$  folgte für zwei ähnliche Matrizen  $A$  und  $B$ , dass

$$\det(A) = \det(TBT^{-1}) = \det(T) \det(B) \det(T^{-1}) = \det(B)$$

**Beispiel 1.18:** Sei  $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , d.h.  $V = \mathbb{R}^3$ , gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten für den  $\mathbb{R}^3$  die Basen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

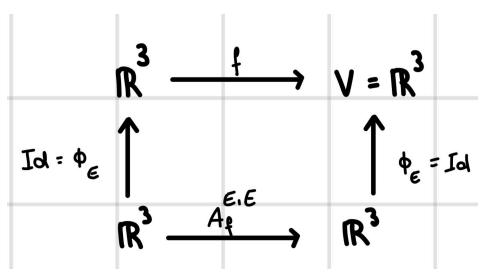
Für darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der Standardmatrix  $E$  erhalten wir aus Satz 5.18, LinA I,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} e_i \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

dass

$$A_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige kommutative Diagramm ist gegeben durch



Für die Basis  $B$  erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-7)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-8)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -7 & -5 & -8 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Herleitung bezüglich Matrizen?



Koordinatenabbildung  $\Phi_B$ ?

Abbildung vom  $\mathbb{R}^3$  + Standardbasis  $E$  in den  $V (= \mathbb{R}^3)$  + Basis  $B$ .

$$\Phi_B = (e_i) = v_i \quad \text{für} \quad B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\Rightarrow A_{\Phi_B}^{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt insgesamt:

$$A_f^{B,B} = (A_{\Phi_B}^{E,B})^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B} = (A_{\Phi_B}^{E,B})^{-1} A_f^{E,E} \underbrace{A_{\Phi_B}^{E,B}}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{R})}$$

$$\Rightarrow A_f^{B,B} \text{ und } A_f^{E,E} \text{ sind ähnlich}$$

Für die Basis  $C$  erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

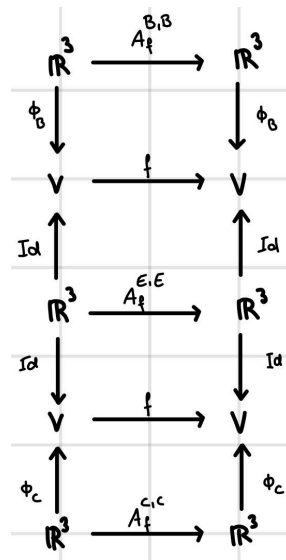
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Darstellungsmatrix erhält man

$$A_f^{C,C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Als Matrizenmultiplikation



Darstellung von  $\Phi_C$ ?  $\Phi_C(e_i) = w_i$  für  $C = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$A_{\Phi_C}^{E,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_f^{C,C} = (A_{\Phi_C}^{E,C})^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A_{\Phi_C}^{E,C} = (A_{\Phi_C}^{E,C})^{-1} A_f^{E,E} A_{\Phi_C}^{E,C}$$

Also auch:  $A_f^{C,C}$  ist ähnlich zu  $A_f^{E,E}$ .

Alternativ:

$$\begin{aligned} A_f^{C,C} &= (A_{\Phi_C}^{E,C})^{-1} I_n I_n^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B} A_f^{B,B} (A_{\Phi_B}^{E,B})^{-1} I_n A_{\Phi_C}^{E,C} \\ &= \underbrace{(A_{\Phi_C}^{E,C})^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B} A_f^{B,B} (A_{\Phi_B}^{E,B})^{-1}}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{R})} A_{\Phi_C}^{E,C} \end{aligned}$$

Jetzt allgemein:  $f \in L(V, V)$ ,  $\dim(V) < \infty$ ,  $B, C$  seien Basen von  $V \Rightarrow$

$$A := A_f^{B,B} \quad \tilde{A} := A_f^{C,C}$$

und es existiert  $T \in \text{GL}_n(K)$  als Basistransformationsmatrix, so dass

$$\tilde{A} = T A T^{-1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det(\tilde{A} - \lambda I_n) = \det(T A T^{-1} - \lambda T T^{-1}) \\ &= \det(T(A - \lambda I_n)T^{-1}) \\ &= \det(T) \det(A - \lambda I_n) \det(T^{-1}) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

D.h. für einen Endomorphismus ist das charakteristische Polynom der zugehörigen Darstellungsmatrix unabhängig von der Wahl der Basis!

Damit ist es sinnvoll, für  $f \in L(V, V)$ ,  $\dim(V) < \infty$ ,

$$p_f(\cdot) := p_A(\cdot)$$

für  $A$  als Darstellungsmatrix  $A_f^{B,B}$  für eine Basis  $B$ .

**Lemma 1.19:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$  und  $f \in L(V, V)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\lambda \in K$  ist ein Eigenwert von  $f$ .
2.  $\lambda \in K$  ist ein Eigenwert der Darstellungsmatrix  $A_f^{B,B}$  für eine gewählte  $B$  von  $V$ .

Des weiteren gilt auch. Für zwei ähnliche  $A$  und  $B$  gilt  $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

$$A, B \text{ ähnlich} \implies p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = p_B(\lambda), \text{ aber für jedes } T \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ gilt}$$

$$TBT^{-1} = TT^{-1} = I \neq A \text{ also } A, B \text{ nicht ähnlich}$$

Weitere Beobachtung: Aus Lemma 1.13 und Lemma 1.19 folgt, dass die Eigenwerte von  $f \in L(V, V)$  die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix  $A_f^{B,B}$  für eine Basis  $B$  ist. Dies gilt **nicht** i.a. für Darstellungsmatrizen  $A_f^{B,C}$  für  $B \neq C$ .

### Definition 1.20: Algebraische Vielfachheit

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$ . Ist  $f \in L(V, V)$  und  $\tilde{\lambda}$  ist Eigenwert von  $f$  hat das charakteristische Polynom  $p_f(\lambda)$  die Form

$$p_f(\lambda) = (\lambda - \tilde{\lambda})^d \cdot \tilde{p}(\lambda)$$

für ein  $\tilde{p}(\cdot) \in \mathbb{K}[\lambda]$  mit  $\tilde{p}(\tilde{\lambda}) \neq 0$ , so nennt man  $d$  die **algebraische Vielfachheit** von  $\tilde{\lambda}$  und bezeichnet sie  $a(f, \tilde{\lambda})$ .

**Lemma 1.21:** Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\dim(V) = n < \infty$ , und  $f \in L(V, V)$ . Für Eigenwert  $\tilde{\lambda}$  von  $f$  gilt

$$g(f, \tilde{\lambda}) \leq a(f, \tilde{\lambda})$$



*Beweis:* Ist  $\tilde{\lambda}$  EW von  $f$  mit der geometrischen Vielfachheit  $m := g(f, \tilde{\lambda})$ , so gibt es nach Def. 1.10 zu  $\tilde{\lambda}$   $m$  linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Gilt  $m = n = \dim(V)$  sind  $\{v_1, \dots, v_m\}$  schon Basis von  $V$ .

Gilt  $m < n$ , so folgt aus dem Basisergänzungssatz (Satz 3.21, LinA I), dass man  $\{v_1, \dots, v_m\}$  zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\} =: B$  ergänzen. Wegen  $f(v_j) = \tilde{\lambda}v_j, 1 \leq j \leq m$ , gilt

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}I_n & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

für zwei Matrizen  $A_1 \in K^{m,n-m}, A_2 \in K^{n-m,n-m}$ .

Mit D9 aus LinA I folgt

$$p_f(\lambda) = (\tilde{\lambda} - \lambda)^m \cdot \det(A_2 - \lambda I_{n-m,n-m})$$

$\Rightarrow$  EW  $\tilde{\lambda}$  ist mindestens  $m$ -fache Nullstelle von  $p_f(\lambda)$ . Für  $m = n \Rightarrow A_f^{B,B} = \tilde{\lambda}I_n \Rightarrow p_f(\lambda) = (\tilde{\lambda} - \lambda)^n$

□

## 2. Diagonalisierbarkeit und Normalform

### 2.1. Diagonalisierbarkeit

#### Definition 2.1: Diagonalisierbar

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$ . Ein  $f \in L(V, V)$  heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis  $B$  von  $V$  gibt, so dass  $A_f^{B,B}$  eine Diagonalmatrix ist. D.h. es existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

Entsprechend nennen wir eine Matrix  $A \in K^{n,n}$  **diagonalisierbar**, wenn es eine Matrix  $T \in \text{GL}_n(K)$  und eine Diagonalmatrix  $D \in K^{n,n}$  gibt mit

$$A = TDT^{-1}$$

D.h.  $A$  ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

**Satz 2.2:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$  und  $f \in L(V, V)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist diagonalisierbar
2. Es gibt eine Basis  $B$  von  $V$  bestehend aus Eigenvektoren von  $f$ .
3. Das charakteristische Polynom  $p_f(\cdot)$  zerfällt in  $n$  Linearfaktoren über  $K$ , d.h.

$$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  für  $f$  und für jeden Eigenwert  $\tilde{\lambda}$  gilt  $a(f, \tilde{\lambda}) = g(f, \tilde{\lambda})$ .

*Beweis:*

“1  $\implies$  2”:  $f$  diagonalisierbar  $\implies \exists \{v_1, \dots, v_n\} = B$  Basis von  $V$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ :

$$\tilde{A} := A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$$

$\Rightarrow f(v_j) = \lambda_j v_j, 1 \leq j \leq n, v_j \neq 0. \Rightarrow$  Damit sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  Eigenwerte von  $f$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n. \Rightarrow 2$ .

“2  $\Rightarrow$  1”: Ist  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  bestehend aus Eigenvektoren, so gibt es zugehörige Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit  $f(v_j) = \lambda_j v_j, 1 \leq j \leq n \Rightarrow$

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

“2  $\Rightarrow$  3”: Sei  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von Eigenvektoren,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  seien die zugehörigen Eigenwerte  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= p_{A_f^{B,B}}(\lambda) = \det(A_f^{B,B} - \lambda I_n) \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

$\Rightarrow p_f(\cdot)$  zerfällt in Linearfaktoren. Verschiedene Eigenwerte  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k, k \leq n$ . Der Eigenwert  $\tilde{\lambda}_i$  besitzt die algebraische Vielfachheit  $m_j := a(f, \tilde{\lambda}_j)$  genau dann, wenn er  $m_j$ -mal auf den Diagonalen von  $A_f^{B,B}$  steht. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $m_j$  Eigenvektoren zu  $\tilde{\lambda}_j$  in  $B$  enthalten sind. Diese sind linear unabhängig  $\Rightarrow$

$$1. \dim(\text{Eig}(f, \tilde{\lambda}_j)) = g(f, \tilde{\lambda}_j) \geq m_j = a(f, \tilde{\lambda}_j)$$

$$2. \text{ Lemma 1.21: } g(f, \tilde{\lambda}_j) \leq a(f, \tilde{\lambda}_j)$$

$$1 \wedge 2 \Rightarrow g(f, \tilde{\lambda}_j) = a(f, \tilde{\lambda}_j)$$

“3  $\Rightarrow$  2”: Seien  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k, k \leq n$  die paarweise verschiedenen Eigenwerte von  $f$ . Wir wissen:  $p_f(\cdot) \in p_f(\cdot)$  zerfällt in Linearfaktoren,  $a(f, \tilde{\lambda}_j) = g(f, \tilde{\lambda}_j), 1 \leq j \leq n$ .

$$\dim(V) = n = \sum_{j=1}^k a(f, \tilde{\lambda}_j) = \sum_{j=1}^k g(f, \tilde{\lambda}_j) = \sum_{j=1}^k \dim(\text{Eig}(f, \tilde{\lambda}_j))$$

Es gilt (Lemma 1.8):

$$\text{Eig}(f, \tilde{\lambda}_j) \cap \sum_{i=1}^k \text{Eig}(f, \tilde{\lambda}_i) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Dann folgt (Lemma 3.31, (2), Lemma 3.35, Satz 3.14) (direkte Summe,  $U \subset V$  UVR  $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$ ,  $U = V \Leftrightarrow \dim(U) = \dim(V)$ , Basis  $\Leftrightarrow$  eindeutige Darstellung), dass die zu  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$  linear unabhängigen Eigenvektoren, die jeweils eine Basis von  $\text{Eig}(f, \tilde{\lambda}_j), 1 \leq j \leq k$ , eine Basis von  $V$  bilden.

□

In Verbindung mit Lemma 1.6 folgt unmittelbar:

**Korollar 2.3:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$  und  $f \in L(V, V)$  mit  $n$  paarweise verschiedenen Eigenwerten, dann ist  $f$  diagonalisierbar.

**Bemerkung:** Das Kriterium der  $n$  paarweise verschiedenen Eigenwerte ist nicht notwendig z.B.  $V = K^n$ ,  $B = E$  Standardbasis

$$f : \text{Id} : K^n \rightarrow K^n, \implies A_f^{E,E} = I_n \implies 1n\text{-facher Eigenwert}$$

**Beispiel 2.4:** Fortsetzung von Bsp. 1.14

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \text{EW: } -1, 3$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } -1, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } 3$$

$\implies \exists$  Basis von Eigenvektoren  $\xrightarrow{\text{Satz 2.2}}$   $A$  ist diagonalisierbar

$$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

$$a(f, -1) = 1 = g(f, -1)$$

$$a(f, 3) = 2 = g(f, 3)$$

$T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  so, dass  $T^{-1}AT = D$ ?

Die zu  $B = \{w_1, w_2, w_3\}$  gehörende Koordinatentransformation  $\Phi_B$  ist gegeben durch

$$A_{\Phi_B}^{E,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt: Für  $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  mit

$$A_f^{E,E} = A \quad A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Mit Basiswechsel von  $A$  zu  $D$

$$D = (A_{\Phi_B}^{E,B})^{-1} \underbrace{A A_{\Phi_B}^{E,B}}_{=T}$$

**Beispiel 2.5:** Nicht jeder Endomorphismus bzw. jede Matrix ist diagonalisierbar. Bsp. 1.4:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad p_f(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

D.h. über  $\mathbb{R}$  zerfällt  $p_f(\cdot)$  nicht in Linearfaktoren.

## Ein weiteres Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = (5 - \lambda)\lambda^2 \Rightarrow p_A(\cdot)$  zerfällt in Linearfaktoren.  $a(f, \lambda_i), g(f, \lambda_i)$  für  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$ . Lemma 1.21:  $g(f, \lambda_i) \leq a(f, \lambda_i) \Rightarrow g(f, 5) = 1 = a(f, 5)$ ,  $a(f, 0) = 2, g(f, 0) \geq 1$  Ein Eigenvektor zu  $\lambda = 0$  sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow g(f, 0) = 1 < 2 = a(f, 0)$$

$\Rightarrow f$  nicht diagonalisierbar.

Mit Satz 2.2 erhält man einen Algorithmus zur Überprüfung, ob ein gegebenes  $f \in L(V, V)$  (bzw.  $A \in K^{n,n}$ ) diagonalisierbar ist:

1. Bestimme mit einer Basis  $B$  von  $V$  die Darstellungsmatrix  $A = A_f^{B,B}$
2. Bestimme für  $A$  das charakteristische Polynom  $p_A(\cdot)$  (Determinantenberechnung)
3. Zerfällt  $p_A(\cdot)$  in Linearfaktoren über  $K$ ? Nein:  $f$  nicht diagonalisierbar. Ja: Seien  $\lambda_i, 1 \leq i \leq k \leq n = \dim(V)$  die paarweise verschiedene Eigenwerte von  $f$ .

Für  $i = 1, \dots, k$

1. Bestimme eine Basis von  $\text{Eig}(f, \lambda_i)$
2. Prüfe, ob  $a(f, \lambda_i) = g(f, \lambda_i)$

Gilt  $a(f, \lambda_i) = g(f, \lambda_i)$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Nein:  $f$  ist nicht diagonalisierbar. Ja:  $f$  ist diagonalisierbar.

**Beispiel 2.6:** Fischer/Springborn

Betrachtet wird: Masse aufgehängt an einer Feder. Zur Zeit  $t = 0$  in Position  $y(0) = \alpha$  und ausgelenkt in senkrechter Richtung mit Geschwindigkeit  $\beta = \dot{y}(0)$

$y(t) \hat{=}$  Position der Masse zum Zeitpunkt  $t$



Dieses System wird durch die gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta$$

## Umschreiben

$$\dot{y}_0 = y_1$$

$$\dot{y}_1 = -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1$$

mit  $y_0 = y, \ddot{y}_0 = \ddot{y}, y_0(0) = \alpha, y_1(0) = \beta$ .

$$\dot{\tilde{y}} := \begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2$$

mit den potentiellen Nulstellen

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$$

Man unterscheidet drei Fälle:

- $0 \leq \mu < \omega$ , d.h.  $\mu^2 - \omega^2 < 0 \implies$  schwache Dämpfung
- $\mu = \omega$ , d.h.  $\mu^2 = \omega^2 \implies$  aperiodischer Fall  $\implies a(A, -\mu) = 2$ ,  
 $\dim(\text{Eig}(A, -\mu)) = 1$ ,  $A$  nicht diagonalisierbar
- $\mu > \omega$ , d.h.  $\mu^2 > \omega^2$ , starke Dämpfung

Eine solche Eigenwertanalyse kann auch nutzen, um das Langzeitverhalten von Lösungen von gewöhnlichen DGL zu bestimmen.



**Satz 2.7:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$  und  $f \in L(V, V)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Das charakteristische Polynom  $p_f(\cdot)$  zerfällt über  $K$  in Linearfaktoren.
2. Es gibt eine Basis  $B$  von  $V$ , so dass  $A_f^{B,B}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h.

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

und  $f$  ist damit **triangulierbar**.

*Beweis:* Beweis von Satz 14.18 im Liesen/Mehrmann

□

Nun ist das Ziel:

Bestimmung einer Basis  $B$  von  $V$ , so dass  $A_f^{B,B}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, die möglichst nah an einer Diagonalmatrix ist und von der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte abgelesen werden können.

D.h.  $p_f(\cdot)$  zerfällt in Linearfaktoren mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  (notwendig, Satz 2.7) und wir wollen eine Basis  $B$  bestimmen, so dass  $A_f^{B,B}$  Diagonalblockgestalt hat mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

wobei jeder Diagonalblock die Form

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{d_i, d_i} \quad (*)$$

### Definition 2.8: Jordan-Block

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $f \in L(V, V)$  und  $\lambda_i$  ein Eigenwert von  $f$ . Eine Matrix der Form  $(*)$  heißt **Jordan-Block** der Größe  $d_i$  zum Eigenwert  $\lambda_i$ .

Wegen der Bedeutung der Jordan-Normalform gibt es zahlreiche Herleitungen mit unterschiedlichen mathematischen Hilfsmitteln.

Hier: Beweis über die Dualitätstheorie basierend auf einer Arbeit von V. Pt  $\bar{a}$  k (1956)

## 2.2. Dualräume

### Definition 2.9: Linearform, Dualraum

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $f \in L(V, K)$  heißt **Linearform**. Den  $K$ -Vektorraum  $V^* := L(V, K)$  nennt man **Dualraum**.

Gilt  $\dim(V) = n < \infty$  so folgt aus Satz 5.18 LinA I, dass  $\dim(V^*) = n$  gilt. Ist  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $C = \{1\}$  eine Basis des  $K$ -Vektorraum  $K$ , dann gilt für

$$f(v_i) = \mu_i \in K \quad \text{für } f \in V^*, \text{ d.h. } f : V \rightarrow K,$$

für  $i = 1, \dots, n$  und damit

$$A_f^{B,C} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in K^{1,n}$$

**Beispiel 2.10:** Sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der auf dem Intervall  $[0, 1]$  stetigen, reellwertigen Funktionen und  $a \in [0, 1]$ . Dann sind

$$g_1 : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(f) := \int_0^1 f(x) dx$$

$$g_2 : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_2(f) := f(a)$$

Linearformen auf  $V$ .

Basis des Dualraums?

**Satz 2.11:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$  und  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$ . Dann gibt es genau eine Basis  $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$  von  $V^* = L(V, K)$  für die

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n$$

gilt. Diese Basis heißt die zu  $B$  duale Basis.

*Beweis:* Lemma 4.10: LinA I. Es gibt eine lineare Abbildung  $v_i^*$  für die  $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$  für  $j = 1, \dots, n$ , für  $i = 1, \dots, n$ . Noch zu zeigen:  $v_i^*$  sind Basis von  $V^*$ . Wir wissen schon:  $\dim(V^*) = n$ . Also: Es reicht zu zeigen:  $\{v_i^*\}_{i=1, \dots, n}$  linear unabhängig. Seien  $\mu_i \in K$  so, dass

$$\sum_{i=1}^n \mu_i v_i^* = 0 \in V^* = L(V, K)$$



Dann gilt:

$$0_K = 0_{V^*}(v_j) = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i^*(v_j) = \mu_j \quad j = 1, \dots, n$$

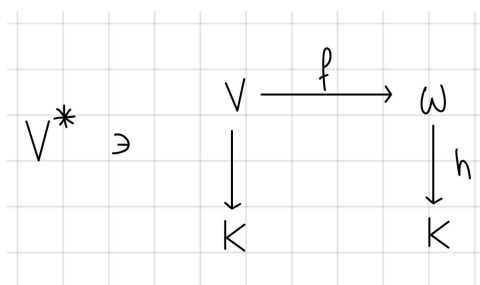
□

### Definition 2.12: duale Abbildung

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume mit den zugehörigen Dualräumen  $V^*$  und  $W^*$ . Für  $f \in L(V, W)$  heißt

$$f^* : W^* \rightarrow V^*, \quad f^*(h) = h \circ f$$

die zu  $f$  **duale Abbildung**.



Seien  $U \subseteq V$  und  $Z \subseteq V^*$  zwei Unterräume. Dann heißt die Menge

$$U^0 := \{h \in V^* \mid h(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

**Annihilator** von  $U$  und die Menge

$$Z^0 := \{v \in V \mid z(v) = 0 \text{ für alle } z \in Z\}$$

**Annihilator** von  $Z$ .

Man kann sich überlegen:

- Die Mengen  $U^0 \subseteq V^*$  und  $Z^0 \subseteq V$  sind Untervektorräume von  $V^*$  bzw  $V$
- Es gilt für  $f \in L(V, V)$

$$(f^k)^* = (f^*)^k$$

Des Weiteren besitzt die duale Abbildung folgende Eigenschaften:

**Lemma 2.13:** Sind  $V, W$  und  $X$  drei  $K$ -Vektorräume. Dann gilt

1. Ist  $f \in L(V, W)$ , dann ist die duale Abbildung  $f^*$  linear, d.h.  $f^* \in L(W^*, V^*)$
2. Ist  $f \in L(V, W)$  und  $g \in L(W, X)$ , dann ist  $(g \circ f)^* \in L(X^*, V^*)$  und es gilt  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
3. Ist  $f \in L(V, W)$  bijektiv, dann ist  $f^* \in L(W^*, V^*)$  bijektiv und es gilt  $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

Beweis: ÜB

□

**Lemma 2.14:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum,  $f \in L(V, V)$ ,  $f^* \in L(V^*, V^*)$  und  $U \subseteq V$ , sowie  $W \subseteq V^*$  zwei Vektorräume. Dann gilt:

1.  $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^0)$
2. Ist  $f$  nilpotent vom Grad  $m$ , dann ist die duale Abbildung  $f^*$  ebenfalls nilpotent vom Grad  $m$ .
3. Ist  $W \subseteq V^*$  ein  $f^*$ -invarianter Vektorraum, dann ist  $W^0$  ein  $f$ -invarianter Unterraum.

Beweis: ÜA

□

### Definition 2.15: nilpotent vom Grad $m$

Sei  $\{0\} \neq V$  ein  $K$ -Vektorraum. Man nennt  $f \in L(V, V)$  **nilpotent**, wenn ein  $m \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $f^m = 0 \in L(V, V)$  gilt. Gilt für dieses  $m$ , dass  $f^{m-1} \neq 0 \in L(V, V)$ , so heißt  $f$  **nilpotent vom Grad  $m$**  und  $m$  ist der **Nilpotenzindex** von  $f$ .

### Definition 2.16: $f$ -invarianter Unterraum

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $U \subseteq V$  ein Unterraum und  $f \in L(V, V)$ . Gilt  $f(U) \subseteq U$ , d.h. ist  $f(u) \in U$  für alle  $u \in U$ , so nennt man  $U$  einen  $f$ -invarianten Unterraum von  $V$ .

**Definition 2.17: Bilinearform**

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $a : V \times W \rightarrow K$  heißt Bilinearform, wenn

1.  $a(\cdot, w) : V \rightarrow K$  für alle  $w \in W$  eine lineare Abbildung ist und
2.  $a(v, \cdot) : W \rightarrow K$  für alle  $v \in V$  eine lineare Abbildung ist

Eine Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  heißt **nicht ausgeartet** in der ersten Variable, wenn aus

$$a(v, w) = 0 \quad \text{für alle } w \in W$$

folgt, dass  $v = 0$  ist. Eine Bilinearform heißt nicht ausgeartet in der zweiten Variable, wenn aus

$$a(v, w) = 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

folgt, dass  $w = 0$  ist. Falls  $a(\cdot, \cdot)$  in beiden Variablen nicht ausgeartet ist, so nennt man  $a(\cdot, \cdot)$  eine **nicht ausgeartete Bilinearform** und die Räume  $V, W$  ein **duales Paar von Räumen** oder **duales Raumpaar** bezüglich  $a(\cdot, \cdot)$ . Ist  $V = W$ , so heißt  $a(\cdot, \cdot)$  eine **Bilinearform auf  $V$** . Eine Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $V$  heißt **symmetrisch**, wenn  $a(v, w) = a(w, v)$  für alle  $v, w \in V$ , ansonsten heißt  $a(\cdot, \cdot)$  unsymmetrisch.

**Bemerkung:** Damit  $V, W$  ein duales Raumpaar für eine nicht ausgeartete Bilinearform bilden können, muss  $\dim(V) = \dim(W)$  gelten.

**Lemma 2.18:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $f \in L(V, V)$ ,  $f^* \in L(V^*, V^*)$  die duale Abbildung zu  $f$ ,  $U \subseteq V$  und  $W \subseteq V^*$  zwei Untervektorräume. Ist die Bilinearform

$$a : U \times W \rightarrow K, (v, h) \mapsto h(v)$$

nicht ausgeartet ist, d.h. sind  $U$  und  $W$  ein duales Raumpaar bezüglich dieser Bilinearform, so ist

$$V = U \oplus W^0$$

*Beweis:* Sei  $u \in U \cap W^0$ . Dann gilt  $h(u) = 0$  für alle  $h \in W$ . Weil  $U, W$  ein duales Raumpaar bzgl.  $a(\cdot, \cdot)$  bilden, folgt  $u = 0$ . Außerdem  $\dim(U) = \dim(W)$  gelten. Damit folgt aus Lemma 2.14, 1., dass

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(W) + \dim(W^0) \\ &= \dim(U) + \dim(W^0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = W \oplus W^0$$

□

## 2.3. Zyklische $f$ -invariant Unterräume

Jetzt: Genauere Analyse der Struktur von Eigenräumen

**Beispiel:** Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $f \in L(V, V)$  und  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $f$ , so ist  $\text{Eig}(f, \lambda)$  ein  $f$ -invarianter Unterraum, da: Für  $v \in \text{Eig}(f, \lambda)$  gilt  $f(v) = \lambda v \in \text{Eig}(f, \lambda)$ .

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$  und  $f \in L(V, V)$ . Ist  $v \in V \setminus \{0\}$ , so existiert ein eindeutig definiertes  $m = m(f, v) \in \mathbb{N}$ , sodass die Vektoren

$$v, f(v), f(f(v)), \dots, f^{m-1}(v)$$

linear unabhängig, die Vektoren

$$v, f(v), \dots, f^m(v)$$

jedoch linear abhängig sind. Wegen  $\dim(V) = n$ , muss  $m \leq n$  gelten!

### Definition 2.19: Grad von $v$

Die eindeutig definiert Zahl  $m(f, v) \in \mathbb{N}$  heißt Grad von  $v$  bezüglich  $f$ .

$$0 \neq v, f(v), f^2(v), \dots, f^{m-1}(v) \text{ lin. unabh.}$$

$$v, f(v), \dots, f^m(v) \text{ lin. abh.}$$

$\implies$  Grad  $m$  von  $v$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

### Bemerkungen:

- Der Vektor  $v = 0 \in V$  ist lin. abhängig. Deswegen muss man  $v \neq 0$  fordern oder  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .
- Der Grad von  $0 \neq v \in V$  ist gleich 1, genau dann wenn  $v, f(v)$  linear abhängig sind. Das ist genau dann der Fall wenn  $v$  ein Eigenvektor von  $f$  ist. Damit folgt auch: Ist  $v \in V$  kein Eigenvektor von  $f$  und  $v \neq 0$ , so ist der Grad von  $v$  also  $m(v, f) \geq 2$ .

### Definition 2.20: Krylov-Raum

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $f \in L(V, V)$ ,  $v \in V$  und  $j \in \mathbb{N}$ . Der Unterraum

$$\mathcal{K}_j(f, v) := \text{Span}\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{j-1}(v)\} \subseteq V$$

heißt **j-ter Krylov-Raum** von  $f$  und  $v$ .

Alexei Krylov (russischer Schiffsbauingenieur und Mathematiker, 1863-1945). Krylov-Räume spielen auch eine wichtige Rolle für das CG-Verfahren (Conjugate Gradients).

**Lemma 2.21:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n < \infty$  und  $f \in L(V, V)$ . Dann gilt:

1. Hat  $0 \neq v \in V$  den Grad  $m$  bzgl.  $f$ , so ist  $\mathcal{K}_m(f, v)$  ein  $f$ -invarianter Unterraum und es gilt:

$$\text{Span} \{v\} = \mathcal{K}_1(f, v) \subset \mathcal{K}_2(f, v) \subset \dots \subset \mathcal{K}_m(f, v) = \mathcal{K}_{m+j}(f, v)$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

2. Hat  $0 \neq v \in V$  den Grad  $m$  bzgl.  $f$  und ist  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Unterraum, so dass  $v \in U$ , so ist

$$\mathcal{K}_m(f, v) \subseteq U$$

D.h. betrachtet man alle  $f$ -invarianten Unterräume von  $V$ , die  $v$  enthalten, so ist  $\mathcal{K}_m(f, v)$  derjenige mit der kleinsten Dimension.

3. Gilt für  $v \in V$ , dass  $f^{m-1}(v) \neq 0$  und  $f^m(v) = 0$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , dann ist

$$\dim(\mathcal{K}_j(f, v)) = j \quad \text{für } j = 1, \dots, m$$

*Beweis:*

1. ÜA
2. Sei  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Unterraum mit  $v \in U$ . Dann gilt  $f^j(v) \in U$  für  $j = 1, \dots, m-1$ . Da  $v$  den Grad  $m$  hat, sind  $v, f(v), \dots, f^{m-1}(v)$  linear unabhängig.  $\implies \mathcal{K}_m(f, v) \subseteq U$  und  $\dim(\mathcal{K}_m(f, v)) = m \leq \dim(U)$
3. Seien  $\mu_0, \dots, \mu_{m-1} \in K$  so gewählt, dass

$$0 = \mu_0 v + \mu_1 f(v) + \dots + \mu_{m-1} f^{m-1}(v)$$

gilt. Anwendung  $f^{m-1}$

$$0 = \mu_0 f^{m-1}(v) + \mu_1 f^m(v) = \underbrace{\mu_0 f^{m-1}(v)}_{\neq 0}$$

$$\implies \mu_0 = 0$$

Für  $m > 1$  kann man dieses Argument induktiv für  $f^{m-j}$ ,  $j = 2, \dots, m$ , anwenden und erhält damit

$$\mu_1 = \dots = \mu_{m-1} = 0$$

$\implies$  Beh.

□

**Beobachtungen:** Hat  $v$  den Grad  $m$  bzgl.  $f$  gilt

- $\mathcal{K}_j(f, v)$  ist für  $j < m$  kein  $f$ -invarianter Unterraum, da  $0 \neq f(f^{j-1}(v)) = f^j(v) \notin \mathcal{K}_j(f, v)$

- wie oben gezeigt, bilden die Vektoren  $v, f(v), \dots, f^{m-1}(v)$  eine Basis von  $\mathcal{K}_m(f, v)$ .  
Wendet man  $f$  auf ein Element dieser Basis an, d.h.  $f^{k+1}(v)$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ , so erhält man für  $k = m-1$   $f^m(v)$  als Linearkombination von  $v, f(v), \dots, f^{m-1}(v) \Rightarrow f^m(v) \in \mathcal{K}_m(f, v)$ . Deswegen wird  $\mathcal{K}_m(f, v)$  auch **zyklische invarianter Unterraum** zu  $v$  von  $f$  genannt.

**Lemma 2.22:** Sei  $\{0\} \neq V$  ein  $K$ -Vektorraum. Ist  $f \in L(V, V)$  nilpotent vom Grad  $m$ , so gilt  
 $m \leq \dim(V)$ .

*Beweis:* Nach Definition existiert ein  $v \in V$  mit  $f^{m-1}(v) \neq 0$  und  $f^m(v) = 0$ . Lemma 2.21 sichert, dass  $v, f(v), \dots, f^{m-1}(v)$  linear unabhängig  $\Rightarrow m \leq \dim(V)$ . □

**Beobachtung:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f \in L(V, V)$ . Ist  $U \subseteq V$  ein  $f$ -invarianter Unterraum, so gilt für die Einschränkung von  $f$  auf  $U$ , d.h.

$$f|_U : U \rightarrow U, \quad u \mapsto f(u),$$

dass  $f|_U \in L(U, U)$ .

**Satz 2.23:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f \in L(V, V)$ . Dann existieren  $f$ -invariante Unterräume  $U \subseteq V$  und  $W \subseteq V$ , so dass gilt:

1.  $V = U \oplus W$
2.  $f|_U \in L(U, U)$  ist bijektiv
3.  $f|_W \in L(W, W)$  ist nilpotent

*Beweis:*  $v \in \ker(f)$ . Dann gilt wegen der Linearität von  $f$ , sodass  
 $f^2(v) = f(f(v)) \stackrel{f(v)=0}{=} 0 \Rightarrow \ker(f) \subseteq \ker(f^2)$

Induktiv zeigt man:

$$\{0\} \subseteq \ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq \dots$$

Da  $\dim(V) < \infty$ , muss es eine kleinste Zahl  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  geben, so dass  $\ker(f^m) = \ker(f^{m-j})$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Damit sehen wir

$$U = \operatorname{im}(f^m) \quad \text{und} \quad W = \ker(f^m)$$

Zeige:  $U$  und  $W$  sind  $f$ -invariant. Sei  $u \in U$ . Dann existiert  $w \in V$  mit  $f^m(w) = u \Rightarrow f(u) = f(f^m(w)) = f^m(f(w)) \in U$ .

Sei  $w \in W$ . Dann gilt

$$f^m(f(w)) = f(f^m(w)) = 0 \Rightarrow f(w) \in W$$

Also existieren  $f$ -invariante Unterräume  $U \subseteq V$  und  $W \subseteq V$ .

1. Es gilt  $U + W \subseteq V$ . Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 4.16, LinA I) liefert für  $f^m$ , dass

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

$$\text{Ist } v \in U \cap W \implies \exists w \in V : v = f^m(w) (v \in U)$$

$$v \in W \implies 0 = f^m(v) = f^m(f^m(v)) = f^{2m}(v)$$

$$\text{Es gilt } \ker(f^m) = \ker(f^{2m}) \implies v = f^m(v) = 0$$

$$\implies V = U \oplus W$$

2. Sei  $v \in \ker(f|_U) \subseteq U$ . Dann existiert ein  $w \in V$ , so dass  $f^m(w) = v$  gilt.  $\implies$   
 $0 = f(v) = f(f^m(w)) = f^{m+1}(w)$ . Mit  
 $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1}) \implies w \in \ker(f^m) \implies v = f^m(w) = 0 \implies f$  injektiv.

Aus der Dimensionsformel folgt, dass  $f$  surjektiv ist.

3. Sei  $v \in W$ . Dann gilt

$$0 = f^m(v) = (f|_W)^m(v)$$

$$\implies (f|_W)^m = 0 \in L(W, W), \text{ d.h. } (f|_W)^m \text{ ist die Nullabbildung} \implies f|_W \text{ nilpotent.}$$

**Satz 2.24:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $f \in L(V, V)$  nilpotent vom Grad  $m$ ,  $v \in V$  ein beliebiger Vektor mit  $f^{m-1}(v) \neq 0$  und  $h \in V^*$  mit  $h(f^{m-1}(v)) \neq 0$ . Dann sind  $v$  und  $h$  vom Grad  $m$  bzgl.  $f$  und  $f^*$ . Die beiden Räume  $\mathcal{K}_m(f, v)$  bzw.  $\mathcal{K}_m(f^*, h)$  sind zyklisch  $f$ - bzw.  $f^*$ -invariante Unterräume von  $V$  bzw.  $V^*$ . Sie bilden ein duales Raumpaar bzgl. der Bilinearform

$$a : \mathcal{K}_m(f, v) \times \mathcal{K}_m(f^*, h) \rightarrow K, \quad (\bar{v}, \bar{h}) \mapsto \bar{h}(\bar{v})$$

und es gilt

$$V = \mathcal{K}_m(f, v) \oplus (\mathcal{K}_m(f^*, h))^0$$

Hierbei ist  $\mathcal{K}_m(f^*, h)^0$  ein  $f$ -invarianter Unterraum von  $V$ .

*Beweis:* Für  $v \in V$  gilt  $f^{m-1}(v) \neq 0$ . Lemma 2.20  $\implies \mathcal{K}_m(f, v)$   $m$ -dimensionaler zyklischer  $f$ -invarianter Unterraum von  $V$ . Für  $V^*$  gilt

$$0 \neq h(f^{m-1}(v)) = (f^*)^{m-1}(h)(v)$$

Dann ist  $0 \neq (f^*)^{m-1}(h) \in L(V^*, V^*)$ .  $f$  nilpotent von Grad  $m \implies$  (Lemma 2.14)  $f^*$  nilpotent von Grad  $m \implies$

$$(f^*)^m(h) = 0 \in L(V^*, V^*)$$

$\implies$  (Lemma 2.20)  $\mathcal{K}_m(f^*, h)$  ist  $m$ -dimensionaler zyklischer  $f^*$ -invarianter Unterraum von  $V^*$ .

Nun zu zeigen:  $\mathcal{K}_m(f, v), \mathcal{K}_m(f^*, h)$  sind ein duales Raumpaar. Sei

$$\bar{v} = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^i(v) \in \mathcal{K}_m(f, v)$$

so gewählt, dass

$$\bar{h}(\bar{v}) = a(\bar{v}, \bar{h}) = 0 \quad \forall \bar{h} \in \mathcal{K}_m(f^*, h)$$

Zeige induktiv, dass  $\mu_k = 0, k = 0, \dots, m-1$ . Wegen  $((f^*)^{m-1}(h)) \in \mathcal{K}_m(f^*, h)$  folgt

$$0 = ((f^*)^{m-1}(h))(\bar{v}) = h(f^{m-1}(\bar{v})) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i h(f^{m-1+i}(v)) = \underbrace{\mu_0 h(f^{m-1}(v))}_{\neq 0} \\ \Rightarrow \mu_0 = 0$$

Sei nun  $\mu_0 = \dots = \mu_{k-1} = 0$  für ein  $k \in \{1, \dots, m-2\}$ . Wegen  $(f^*)^{m-1-k}(h) \in \mathcal{K}_m(f^*, h)$  folgt aus der Darstellung von  $\bar{v}$ , dass

$$0^{(*)} = ((f^*)^{m-1-k}(h))(\bar{v}) = h(f^{m-1-k}(\bar{v})) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i h(f^{m-i+k-1}(v)) = \underbrace{\mu_k h(f^{m-1}(v))}_{\neq 0} = \mu_k \\ \Rightarrow \bar{v} = 0$$

$\Rightarrow a(., .)$  ist nicht ausgeartet in der ersten Komponente. Analog zeigt man, dass  $a(., .)$  auch in der zweiten Komponente nicht ausgeartet ist  $\Rightarrow \mathcal{K}_m(f, v)$  und  $\mathcal{K}_m(f^*, h)$  sind ein duales Raumpaar.

Mit Lemma 2.16:  $V = \mathcal{K}_m(f, v) \oplus (\mathcal{K}_m(f^*, h))^0$

Mit Lemma 2.14, 3:  $(\mathcal{K}_m(f^*, h))^0$  ist  $f$ -invarianter UR von  $V$ .

□

(zyklisch  $f$ -invarianter UR:  $v, f(v), f^2(v), \dots$ )

## 2.4. Die Jordan-Normalform

**Satz 2.25:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f \in L(V, V)$ . Ist  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $f$ , dann gibt es  $f$ -invariante Unterräume  $U \subset V$  und  $\{0\} \neq W \subseteq V$ , so dass

1.  $V = U \oplus W$
2. die Abbildung  $f|_U - \lambda \text{Id}_U$  ist bijektiv und
3. die Abbildung  $f|_W - \lambda \text{Id}_W$  ist nilpotent

Des Weiteren ist  $\lambda$  kein Eigenwert von  $f|_U$ .



*Beweis:* Wir definieren

$$g := f - \lambda \text{Id}_V \in L(V, V)$$

Satz 2.23:  $\exists g$ -invariante UR  $U \subseteq V$  und  $W \subseteq V$ :

$$V = U \oplus W, \quad g|_U \text{ bijektiv, } g|_W \text{ nilpotent}$$

Annahme:  $\{0\} = W \implies V = U$

$$\implies g|_U = g|_V = g \text{ bijektiv}$$

$\lambda$  ist Eigenwert von  $f \implies \exists 0 \neq v : f(v) = \lambda v$

$$\implies g(v) = f(v) - \lambda v = \lambda v - \lambda v = 0$$

$$\implies \ker(g) \supseteq \{0, v\} \neq \{0\} \nmid g \text{ bijektiv}$$

$$\implies U \subset V$$

Annahme:  $\lambda$  ist Eigenwert von  $f|_U$

$$\implies \exists 0 \neq v \in U : f(v) = \lambda v$$

$$\implies g|_U(v) = f(v) - \lambda v = \lambda v - \lambda v = 0 \nmid g|_U \text{ bijektiv}$$

□

**Beispiel 2.26:** Wie betrachten  $V = \mathbb{R}^5$ , die Standardbasis  $E$  und  $f \in L(V, V)$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$p_f(\lambda) = p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4(\lambda - 2)^1$$

$$\implies \text{EW: } 1, 2 \quad a(f, 1) = 4 \quad a(f, 2) = 1$$

$\implies p_A(\cdot)$  zerfällt in Linearfaktoren

$\lambda_1 = 1$  : Es gilt  $\ker(g_1^3) = \ker(g_1^4)$  für  $g_1 := f - \lambda_1 \text{Id}_V$

$$\implies m_1 = 3$$

$$U_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad W_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_2 = 2$  : Für  $g_2 = f - \lambda_2 \text{Id}_V$  gilt  $\ker(g_2) = \ker(g_2^2)$

$$\Rightarrow m_2 = 1$$

$$U_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, W_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Beobachtung:  $\dim(W_1) = a(f, \lambda_1)$ ,  $\dim(W_2) = a(f, \lambda_2)$

**Satz 2.27:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f \in L(V, V)$ . Ist  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $f$ , dann existieren für den Unterraum  $W$  aus Satz 2.25 Vektoren  $w_1, \dots, w_k \in W$  und  $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$W = \mathcal{K}_{d_1}(f, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(f, w_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{d_k}(f, w_k)$$

Des Weiteren gibt es eine Basis  $B$  von  $W$ , so dass

$$A_{f|_W}^{B,B} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda) \end{pmatrix}$$

*Beweis:* Sei wie in Satz 2.25  $g := f - \lambda \text{Id}_V$  und  $g_1 := g|_W$  nilpotent vom Grad  $d_1$ . Dann gilt  $1 \leq d_1 \leq \dim(W)$ .

Sei  $w_1 \in W$  ein Vektor mit  $g_1^{d_1-1}(w_1) \neq 0$ . Wegen  $g^{d_1}(w_1) = 0$

$\Rightarrow g_1^{d_1-1}(w_1)$  ist ein Eigenvektor von  $g_1$  zum Eigenwert 0.

Lemma 2.21, 3, liefert, dass die  $d_1$  Vektoren

$$\{w_1, g(w_1), \dots, g_1^{d_1-1}(w_1)\}$$

linear unabhängig sind. Außerdem ist  $W_1 := \mathcal{K}_{d_1}(g_1, w_1)$  ein  $d_1$ -dimensionaler zyklischer  $g_1$ -invarianter UR von  $W$ . Also ist

$$B_1 := \{g_1^{d_1-1}(w_1), g_1^{d_1-2}(w_1), \dots, g_1(w_1), w_1\}$$

eine Basis von  $\mathcal{K}_{d_1}(g_1, w_1) = W_1$  und

$$A_{g_1|_{W_1}}^{B_1, B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = J_{d_1}(0) \in K^{d_1, d_1}$$

Per Definition gilt  $A_{g_1|_{W_1}}^{B_1, B_1} = A_{g|_{W_1}}^{B_1, B_1}$ . Ist  $d_1 = \dim(W)$ : siehe unten  $\bullet \dots \bullet$ .

Sei nun  $d_1 < \dim(W)$ . Satz 2.25 sichert, dass es für  $g_1 \in L(W, W)$  einen  $g_1$ -invarianten Unterraum  $\tilde{W} \neq \{0\}$  mit  $W = W_1 \oplus \tilde{W}$  gibt.

Die Abbildung  $g_2 := g_1|_{\tilde{W}}$  ist nilpotent vom Grad  $\lambda_2$  mit  $1 \leq d_2 \leq d_1$ .

Wiederholung der Konstruktion:

$\exists w_2 \in \tilde{W} : g_2^{d_2-1}(w_2) \neq 0, \dots, W_2 := \mathcal{K}_{d_2}(g_2, w_2) \dots$  UR von  $\tilde{W} \subseteq W$ ,

$$B_2 := \{g_2^{d_2-1}(w_2), g_2^{d_2-2}(w_2), \dots, g_2(w_2), w_2\}$$

$$A_{g|_{W_2}}^{B_2, B_2} = A_{g_2|_{W_2}}^{B_2, B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Nach  $k \leq \dim(W)$  Schritten muss die Konstruktion abbrechen und es gilt

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{K}_{d_1}(g_1, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(g_2, w_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{d_k}(g_k, w_k) \\ &= \mathcal{K}_{d_1}(g, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(g, w_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{d_k}(g, w_k) \end{aligned}$$

Vereinigt man die Basen  $B_1, \dots, B_k$  zu einer Basis  $B$  von  $W$  (direkte Summe!), so erhält man

$$A_{g|_W}^{B, B} = \begin{pmatrix} A_{g|_{W_1}}^{B_1, B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{g|_{W_k}}^{B_k, B_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}$$

Jetzt: Übertragung auf  $f = g + \lambda \text{Id}_V$ . Man kann sich leicht überlegen, dass jeder  $g$ -invariante Unterraum von  $V$  auch  $f$ -invariant ist und damit gilt:

$$\mathcal{K}_{d_i}(f, w_i) = \mathcal{K}_{d_i}(g, w_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$