Vorlesungsskript

LinA II* SoSe 24

Inhaltsverzeichnis

Definitionen

1 .

2 .

3 .

Wiederholung:

K sei ein beliebiger Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum,

$$L(V,V) = \{f : V \to V \mid f \text{ lin. Abbildung}\}$$

$f \in L(V,V)$ heißt Endomorphismus. Ist $f \in L(V,V)$, so läßt sich f bezüglich einer Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von V eindeutig durch eine Matrix

$$A_f^{B,B} = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n}$$

Es gilt

$$f\left(v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \qquad 1 \leq j \leq n$$

Abbildung

$$F : L(V,V) \to K^{n,n}$$

ist ein Isomorphismus.

Basiswechsel? Basen B, C von V

Bezüglich Basis B

Bezüglich Basis C

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[rr, "?"] \arrow[dr, "\Phi_B"'] & & K^n \arrow[dl, "\Phi_C"] \\ & V & \end{tikzcd} \qquad \Rightarrow ? = \Phi_{BC} = \Phi_C^{-1} \circ \Phi_B$$

(siehe Lem. 5.27, LinA I*)

Eine zentrale Frage: Sei $f \in L(V,V)$, existiert eine Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine möglichst einfache Form besitzt?

z.B. Diagonalmatrix:

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir werden:

- Endomorphismen charakterisieren, die sich durch eine Diagonalmatrix beschreiben lassen.

  Wenn ja: Dann gilt $f\left(v_j\right) = \lambda_j v_j$

  $\Longrightarrow f$ ist eine Streckung von v_j um den Faktor λ_j.
- Die Jordan-Normalform herleiten.

1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte charakterisieren zentrale Eigenschaften linearer Abbildungen. Z.B.

- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Eigenschaften von physikalischen Systemen

  $\rightarrow$ gewöhnliche Differentialgleichungen

  $\rightarrow$ Eigenschwingungen / Resonanzkatastrophe

  Zerstörung einer Brücke über dem Fluß Maine / Milleanium-Bridge London

1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 1.1: Eigenwert und Eigenvektor (Endomorphismus)

Sei V ein K-Vektorraum. Ein Vektor $v \in V, v \neq 0_V$, heißt **Eigenvektor** von $f \in L(V,V)$, falls $\lambda \in K$ mit

$$f(v) = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der **Eigenwert** zum Eigenvektor $v \in V$.

Definition 1.2: Eigenwert und Eigenvektor (Matrix)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Ein Vektor $v \in K^n$, $v \neq 0_{K^n}$, heißt Eigenvektor von $A \in K^{n,n}$, falls $\lambda \in K$ mit

$$Av = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der Eigenwert zum Eigenvektor $v \in V$.

Bemerkungen:

- In Def 1.1 kann $\dim(V) = \infty$ sein. Dies ist für viele Definitionen/Aussagen in denen wir Endomorphismen betrachten, der Fall.
- Für $\dim(V) < \infty$ kann man jedes $f \in L(V,V)$ eindeutig mit einer Matrix A identifizieren. Dann: Def 1.2 ist Spezialfall von Def 1.1.

- **Achtung:** $0 \in K$ kann ein Eigenwert sein:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
  Der Nullvektor $0 \in V$ ist **nie** ein Eigenvektor.

  Für $\dim(V) = 0$ besitzt f keinen Eigenvektor für $f \in L(V, V)$.
- Ist v Eigenvektor zum Eigenwert λ, so ist auch αv für jedes $\alpha \in K \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor
  $$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Zentrale Frage dieses Kapitels:

Existens von Eigenwerten? Wenn sie existieren: Weitere Eigenschaften?

Beispiel 1.3: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und V der unendlichdimensionale Vektorraum der auf I beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Ein Endomorphismus $f \in L(V, V)$ ist gegeben durch

$$f(\varphi) = \varphi' \qquad \forall \varphi \in V$$

Die Abbildung f hat jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ als Eigenwert, da für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Funktion

$$\varphi(x) := c \cdot e^{\lambda x} \neq 0_V \qquad \forall x \in I$$

gilt

$$f(\varphi(x)) = f\left(c \cdot e^{\lambda x}\right) = \lambda\left(c e^{\lambda x}\right) = \lambda \varphi(x)$$

Hier: $\varphi'(x) = f(\varphi)$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Beispiel 1.4: Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Sei x ein Eigenvektor, dann gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\iff x_2 = \lambda x_1 \quad \text{und} \quad -x_1 = \lambda x_2$$

O.B.d.A: $x_2 \neq 0$

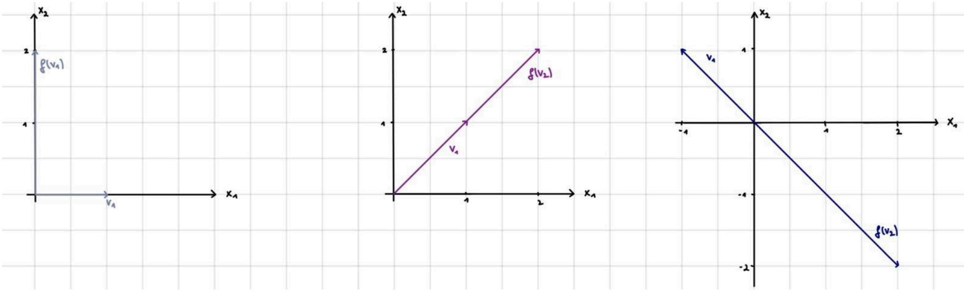
$$\implies x_2 = \lambda(-\lambda x_2) = -\lambda^2 x_2 \implies -\lambda^2 = 1, \ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda^2 \geq 0 \implies -\lambda^2 \leq 0 \ ↯$$

D.h. f besitzt keinen Eigenwert/-vektor. Für $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ändert sich dies! $\implies$ Die Wahl von K entscheidet!

Beispiel 1.5: Wieder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, diesmal

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für $v_1 = \binom{1}{0}, v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = (-1, 1)$ dass $f(v_1) = \binom{0}{2}, f(v_2) = \binom{2}{2} = 2 \cdot v_2$ und $f(v_3) = \binom{2}{-2} = (-2) \cdot v_3$.



Beobachtung: $\dim(V) = 2$

zwei Eigenwerte: $2, -2$, es existieren keine Weiteren,

zwei Eigenvektoren: $v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = \binom{-1}{1}$, sind linear unabhängig

Lemma 1.6: Es sei $f \in L(V, V)$ ein Endomorphismus. Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von f sind linear unabhängig.

Beweis: Es seien $v_1, ..., v_m$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$ von f. Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: $m = 1, \lambda_1, v_1 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ lin. unabh.

Induktionsschritt: $m - 1 \to m$

Induktionsvorraussetzung: Behauptung gelte für $m - 1$

Betrachte

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0 \ (*) \quad \alpha_m \in K \\ &\overset{\text{EV, f()}}{\Longrightarrow} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_m \lambda_m v_m = 0 \\ &\overset{(*) \cdot \lambda_m}{\Longrightarrow} \lambda_m \alpha_a v_1 + \lambda_m \alpha_2 v_2 + ... + \lambda_m \alpha_m v_m = 0 \end{aligned}$$

Wir bilden die Differenz aus Zeile 1 und 2

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_1 v_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_2 v_2 + ... + \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_{m-1} v_{m-1} = 0$$

$v_1, ..., v_{m-1}$ lin. unabh. $\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{m-1} = 0$ Einsetzen in (*) liefert

$$\alpha_m \underbrace{v_m}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$$

$\Longrightarrow v_1, ..., v_m$ lin unabh.

□

Folgerung: Es gibt höchstens $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte für $n = \dim(V) < \infty$.

Definition 1.7: Eigenraum

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$, so heißt

$$\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

der **Eigenraum** von f bezüglich λ.

Es gilt:

- $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \subseteq V$ ist ein Untervektorraum
- λ ist Eigenwert von $f \Longleftrightarrow \operatorname{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$
- $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.
- $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})$
- $\dim(\operatorname{Eig}(f, \lambda)) = \dim(V) - \operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id})$
- Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschiedene Eigenwerte, so ist $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$

Die letzte Aussage kann verallgemeinert werden zu:

Lemma 1.8: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m, m \leq n$, paarweise verschiedene Eigenwerte von f, so gilt

$$\operatorname{Eig}(f, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_j) = \{0\} \qquad \forall i = 1, ..., m$$

Beweis: Summe von Vektorräumen, vgl. Def 3.32 LinA I.

Sei $i \in \{1, ..., m\}$ fest gewählt.

$$v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_j)$$

Also ist

$$v = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j \quad \text{für } v_j \in \operatorname{Eig}(f, \lambda_j) \quad \text{für} \quad j \neq i$$

$\Longrightarrow -v + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j = 0$ Aus Lemma 1.6 folgt damit $v = 0$.

□

Über die Identifikation von Endomorphismen und Matrizen für $\dim(V) < \infty$ erhält man:

Korollar 1.9: Für ein $n \in \mathbb{N}$ und einem Körper K sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt für jedes $\lambda \in K$, dass

$$\dim(\operatorname{Eig}(A, \lambda)) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$$

Insbesondere ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, wenn $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$ ist.

Definition 1.10: Geometrische Vielfachheit

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so heißt

$$g(f, \lambda) := \dim(\operatorname{Eig}(f, \lambda)) \qquad (> 0)$$

die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ.

1.2. Das charakteristische Polynom

Wir bestimmt man Eigenwerte?

Lemma 1.11: Seien $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann ist

$$\det(A - \lambda I_n)$$

ein Polynom n-ten Grades in λ.

Beweis: Mit der Leibniz-Formel folgt,

$$\begin{aligned} \det(\underbrace{A - \lambda I_n}_{\tilde{a}_{ij}}) &= \sum_{\sigma \in S_1} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \tilde{a}_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{n\sigma(n)} \\ &= \underbrace{\underbrace{(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)}_{\sigma = \mathrm{Id}}}_{\in \mathcal{P}_n \text{ in } \lambda} + \underbrace{\underbrace{S}_{\sigma \neq \mathrm{Id}}}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda} \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + \ldots + a_{nn}) + \underbrace{S_1}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}$$

Insgesamt: Es existieren Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in K$ mit

$$\det(A - \lambda I_n) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$
$$a_n = (-1)^n$$
$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})$$

man kann zeigen: $a_0 = \det(A)$

□

Man nennt $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ auch die **Spur** von A.

Definition 1.12: Charakteristisches Polynom

Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann heißt das Polynom n-ten Grades

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

das charakteristische Polynom zu A.

Lemma 1.13: Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Der Skalar λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn

$$P_A(\lambda) = 0$$

gilt.

Beweis: Die Gleichung

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I_n)v = 0$$

hat genau eine Lösung $v \in V, v \neq 0$, wenn $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$, vgl. Satz 6.3 aus LinA I. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0, \text{vlg. D10 aus LinA I}$$

□

Beispiel 1.14: Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus liefert

$$P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 8 & 16 \\ 0 & 7-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(-35-7\lambda+5\lambda+\lambda^2+32)$$
$$= (3-\lambda)[(7-\lambda)(-5-\lambda)-8(-4)] - 8(0-0) + 16(0-0)$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$\implies$ Eigenwerte sind $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

Zugehörige Eigenvektoren?

$\lambda = -1$:

$$Av = -v \iff (A+I_3)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen: $\implies v_2 = -v_3, v_1 = -2v_3$

Damit ist z.B.: $w_1 = (2,1,-1)^\top$ Eigenvektor.

$\lambda = 3$:

$$(A-3I_3)v = 0 \iff$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^3 \iff v_2 + 2v_3 = 0$$

Damit sind z.B.: $w_2 = (1,2,-1)^\top, w_3 = (-1,2,-1)$ Eigenvektoren.

$\lambda = -1$: einfache Nullstelle und $\dim(\mathrm{Span}(w_1)) = 1$ passt zu $\mathrm{rg}(A-(-1)I_n) = 2$ und $\dim(\mathrm{Eig}(A_1 - 1)) = 3-2 = 1$.

$\lambda = -3$: doppelte Nullstelle und $\dim(\mathrm{Span}(w_2, w_3)) = 2$ passt zu $\mathrm{rg}(A-3I_n) = 1$ und $\dim(\mathrm{Eig}(A,3)) = 3-1 = 2$

Lemma 1.15: Sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt

$$p_A(.) = p_{A^\top}(.)$$

D.h. eine Matrix und ihre Transponierte haben die gleichen Eigenwerte.

Beweis:

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_n) \overset{\text{D12}}{=} \det\left((A-\lambda I_n)^\top\right) = \det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^\top}(\lambda)$$

$\square$

Achtung: Die Eigenwerte bleiben gleich, aber nicht die Eigenvektoren.

Beispiel 1.16: Für die Matrix A aus Bsp. 1.14 gilt

$$A^\top = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A^\top - \lambda I_n) = (3-\lambda)[(7-\lambda)(-5-\lambda) + 4 \cdot 8]$$
$$= -(\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

Aber

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 27 \\ 45 \end{pmatrix} \neq (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Man kann ausrechnen:

$$\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ EV zu EW} - 1, \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{w}_3 \text{ EV zu EW 3}$$

Übertragung auf Endomorphismen?

$p_f(\lambda)$ $f \in L(V, V)$, B Basis $\Rightarrow \exists! A_f^{B,B}$, C Basis $\Longrightarrow \exists! A_f^{C,C}$

$$p_{A_f^{B,B}}(\lambda) \stackrel{?}{=} p_{A_f^{C,C}}(\lambda)$$

Definition 1.17: ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n,n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass $A = TBT^{-1}$ gilt.

Man kann leicht beweisen, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Matrizen ist.

Mit $\det(A^{-1}) \stackrel{\text{D11}}{=} (\det(A))^{-1}$ folgta für zwei ähnliche Matrizen A und B, dass

$$\det(A) = \det(TBT^{-1}) = \det(T)\det(B)\det(T^{-1}) = \det(B)$$

Beispiel 1.18: Sei $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, d.h. $V = \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten für den $\mathbb{R}^3$ die Basen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für darstellende Matrix von f bezüglich der Standardmatrix E erhalten wir aus Satz 5.18, LinA I,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} e_i \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

dass

$$A_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige kommutative Diagramm ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & V = \mathbb{R}^3 \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id} = \phi_E"] \arrow[r, "A_f^{E,E}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\phi_E = \mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}$$

Für die Basis B erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-7) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-8) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -7 & -5 & -8 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Herleitung bezüglich Matrizen?

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "A_f^{B,B}"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\Phi_B"] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "A_f^{E,E}"] \arrow[u, "\mathrm{Id}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}
$$

Koordinatenabbildung Φ_B?

Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ + Standardbasis E in den $V(= \mathbb{R}^3)$ + Basis B.

$$\Phi_B = (e_i) = v_i \quad \text{für} \quad B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\implies A_{\Phi_B}^{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt insgesamt:

$$A_f^{B,B} = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B} = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A_f^{E,E} \underbrace{A_{\Phi_B}^{E,B}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

$$\implies A_f^{B,B} \text{ und } A_f^{E,E} \text{ sind ähnlich}$$

Für die Basis C erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Darstellungsmatrix erhält man

$$A_f^{C,C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Als Matrizenmultiplikation

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "A_f^{B,B}"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\Phi_B"] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, "A_f^{E,E}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id}"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\Phi_C"] \arrow[r, "A_f^{C,C}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\Phi_C"']
\end{tikzcd}$$

Darstellung von Φ_C? $\Phi_C(e_i) = w_i \quad$ für $\quad C = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$A^{E,C}_{\Phi_C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_f^{C,C} = \left(A^{E,C}_{\Phi_C}\right)^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A^{E,C}_{\Phi_C} = \left(A^{E}_{\Phi_C}, C\right)^{-1} A_f^{E,E} A^{E,C}_{\Phi_C}$$

Also auch: $A_f^{C,C}$ ist ähnlich zu $A_f^{E,E}$.

Alternativ:

$$\begin{aligned} A_f^{C,C} &= \left(A^{E,C}_{\Phi_C}\right)^{-1} I_n I_n^{-1} A^{E,B}_{\Phi_B} A_f^{B,B} \left(A^{E,B}_{\Phi_B}\right)^{-1} I_n A^{E,C}_{\Phi_C} \\ &= \underbrace{\left(A^{E,C}_{\Phi_C}\right)^{-1} A^{E,B}_{\Phi_B}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} A_f^{B,B} \left(A^{E,B}_{\Phi_B}\right)^{-1} A^{E,C}_{\Phi_C} \end{aligned}$$

Jetzt allgemein: $f \in L(V, V)$, $\dim(V) < \infty$, B, C seien Basen von $V \Longrightarrow$

$$A := A_f^{B,B} \qquad \tilde{A} := A_f^{C,C}$$

und es existiert $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ als Basistransformationsmatrix, so dass

$$\tilde{A} = TAT^{-1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det\left(\tilde{A} - \lambda I_n\right) = \det(TAT^{-1} - \lambda TT^{-1}) \\ &= \det(T(A - \lambda I_n)T^{-1}) \\ &= \det(T)\det(A - \lambda I_n)\det(T^{-1}) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

D.h. für einen Endomorphismus ist das charakteristische Polynom der zugehörigen Darstellungsmatrix unabhängig von der Wahl der Basis!

Damit ist es sinnvoll, für $f \in L(V,V)$, $\dim(V) < \infty$,

$$p_f(.) := p_A(.)$$

für A als Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ für eine Basis B.

Lemma 1.19: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V,V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
2. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert der Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ für eine gewählte B von V.

Des weiteren gilt auch. Für zwei ähnliche A und B gilt $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

$$A, B \text{ ähnlich} \Longrightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 = p_B(\lambda), \text{aber für jedes } T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ gilt}$$
$$TBT^{-1} = TT^{-1} = I \neq A \text{ also } A, B \text{ nicht ähnlich}$$

Weitere Beobachtung: Aus Lemma 1.13 und Lemma 1.19 folgt, dass die Eigenwerte von $f \in L(V,V)$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix $A_f^{B,B}$ für eine Basis B ist. Dies gilt **nicht** i.a. für Darstellungsmatrizen $A_f^{B,C}$ für $B \neq C$.

Definition 1.20: Algebraische Vielfachheit

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Ist $f \in L(V,V)$ und $\tilde{\lambda}$ ist Eigenwert von f hat das charakteristische Polynom $p_f(\lambda)$ die Form

$$p_f(\lambda) = \left(\lambda - \tilde{\lambda}\right)^d \cdot \tilde{p}(\lambda)$$

für ein $\tilde{p}(.) \in \mathbb{K}[\lambda]$ mit $\tilde{p}\left(\tilde{\lambda}\right) \neq 0$, so nennt man d die **algebraische Vielfachheit** von $\tilde{\lambda}$ und bezeichnet sie $a\left(f, \tilde{\lambda}\right)$.

Lemma 1.21: Seien V ein K-Vektorraum, $\dim(V) = n < \infty$, und $f \in L(V,V)$. Für Eigenwert $\tilde{\lambda}$ von f gilt

$$g\left(f, \tilde{\lambda}\right) \leq a\left(f, \tilde{\lambda}\right)$$

Beweis: Ist $\tilde{\lambda}$ EW von f mit der geometrischen Vielfachheit $m := g\left(f, \tilde{\lambda}\right)$, so gibt es nach Def. 1.10 zu $\tilde{\lambda}$ m linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, ..., v_m \in V$.

Gilt $m = n = \dim(V)$ sind $\{v_1, ..., v_m\}$ schon Basis von V.

Gilt $m < n$, so folgt aus dem Basisergänzungssatz (Satz 3.21, LinA I), dass man $\{v_1, ..., v_m\}$ zu einer Basis $\left\{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\right\} =: B$ ergänzen. Wegen $f\left(v_j\right) = \tilde{\lambda} v_j, 1 \leq j \leq m$, gilt

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} I_n & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

für zwei Matrizen $A_1 \in K^{m,n-m}$, $A_2 \in K^{n-m,n-m}$.

Mit D9 aus LinA I folgt

$$p_f(\lambda) = \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)^m \cdot \det\left(A_2 - \lambda I_{n-m,n-m}\right)$$

$\Longrightarrow$ EW $\tilde{\lambda}$ ist mindestens m-fache Nullstelle von $p_f(\lambda)$. Für $m = n \Longrightarrow A_f^{B,B} = \tilde{\lambda} I_n \Longrightarrow p_f(\lambda) = \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)^m$

□

2. Diagonalisierbarkeit und Normalform

2.1. Diagonalisierbarkeit

Definition 2.1: Diagonalisierbar

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Ein $f \in L(V, V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass $A_f^{B,B}$ eine Diagonalmatrix ist. D.h. es existieren $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

Entsprechend nennen wir eine Matrix $A \in K^{n,n}$ **diagonalisierbar**, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in K^{n,n}$ gibt mit

$$A = TDT^{-1}$$

D.h. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Satz 2.2: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist diagonalisierbar
2. Es gibt eine Basis B von V bestehend aus Eigenvektoren von f.
3. Das charakteristische Polynom $p_f(.)$ zerfällt in n Linearfaktoren über K, d.h.

   $$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

   mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ für f und für jeden Eigenwert $\tilde{\lambda}$ gilt $a\left(f, \tilde{\lambda}\right) = g\left(f, \tilde{\lambda}\right)$.

Beweis:

"1 $\Longrightarrow$ 2": f diagonalisierbar $\Longrightarrow \exists \{v_1, ..., v_n\} = B$ Basis von $V, \lambda_1, .., \lambda_n \in K$:

$$\tilde{A} := A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$\Longrightarrow f(v_j) = \lambda_i v_i, 1 \leq i \leq n, v_i \neq 0. \Longrightarrow$ Damit sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ Eigenwerte von f mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$. $\Longrightarrow 2$.

"$2 \Longrightarrow 1$": Ist $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren, so gibt es zugehörige Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ mit $f(v_j) = \lambda_j v_j$, $1 \leq j \leq n \Longrightarrow$

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

"$2 \Longrightarrow 3$": Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ seien die zugehörigen Eigenwerte $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= p_{A_f^{B,B}}(\lambda) = \det\left(A_f^{B,B} - \lambda I_n\right) \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren. Verschiedene Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k, k \leq n$. Der Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$ besitzt die algebraische Vielfachheit $m_j := a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$ genau dann, wenn er m_j-mal auf den Diagnolen von $A_f^{B,B}$ steht. Dies ist genau dann der Fall, wenn m_j Eigenvektoren zu $\tilde{\lambda}_j$ in B enthalten sind. Diese sind linear unabhängig $\Longrightarrow$

1. $\dim\left(\operatorname{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)\right) = g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \geq m_j = a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$
2. Lemma 1.21: $g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \leq a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$

$$1 \wedge 2 \Longrightarrow g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$$

"$3 \Longrightarrow 2$": Seien $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k, k \leq n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Wir wissen: $\mathcal{P}_n \in p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren, $a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right), 1 \leq j \leq n$.

$$\dim(V) = n = \sum_{j=1}^{k} a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \dim\left(\operatorname{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)\right)$$

Es gilt (Lemma 1.8):

$$\operatorname{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \cap \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_i\right) = 0 \quad \forall j = 1, ..., k$$

Dann folgt (Lemma 3.31, (2), Lemma 3.35, Satz 3.14) (direkte Summe, $U \subset V$ UVR $\Longrightarrow$ $\dim(U) \leq \dim(V)$, $U = V$ $\dim(U) = \dim(V)$, Basis $\Longleftrightarrow$ eindeutige Darstelltung), dass die zu $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_n$ linear unabhängigen Eigenvektoren, die jeweils eine Basis von $\operatorname{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$, $1 \leq j \leq k$, eine Basis von V bilden.

$\square$

In Verbindung mit Lemma 1.6 folgt unmittelbar:

Korollar 2.3: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V,V)$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten, dann ist f diagonalisierbar.

Bemerkung: Das Kriterium der n paarweise verschiedenen Eigenwerte ist nicht notwendig z.B. $V = K^n$, $B = E$ Standardbasis

$$f : \mathrm{Id} : K^n \to K^n, \Longrightarrow A_f^{E,E} = I_n \Longrightarrow 1n\text{-facher Eigenwert}$$

Beispiel 2.4: Fortsetzung von Bsp. 1.14

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \text{EW:} -1, 3$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu} -1,\ w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } 3$$

$\Longrightarrow \exists$ Basis von Eigenvektoren $\overset{\text{Satz 2.2}}{\Longrightarrow}$ A ist diagonalisierbar

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)$$
$$a(f,-1) = 1 = g(f,-1)$$
$$a(f,3) = 2 = g(f,3)$$

$T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so, dass $T^{-1}AT = D$?

Die zu $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ gehörende Koordinatentransformation Φ_B ist gegeben durch

$$A_{\Phi_B}^{E,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt: Für $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit

$$A_f^{E,E} = A \qquad A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Mit Basiswechsel von A zu D

$$D = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A \underbrace{A_{\Phi_B}^{E,B}}_{=T}$$

Beispiel 2.5: Nicht jeder Endomorphismus bzw. jede Matrix ist diagonalisierbar. Bsp. 1.4:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad p_f(\lambda) = \lambda^1 + 1$$

D.h. über $\mathbb{R}$ zerfällt $p_f(.)$ nicht in Linearfaktoren.

Ein weiteres Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow p_A(\lambda) = (5-\lambda)\lambda^2 \Longrightarrow p_A(.)$ zerfällt in Linearfaktoren. $a(f,\lambda_i), g(f,\lambda_i)$ für $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$. Lemma 1.21: $g(f,\lambda_i) \leq a(f,\lambda_i) \Longrightarrow g(f,5) = 1 = a(f,5)$, $a(f,0) = 2, g(f,0) \geq 1$ Ein Eigenvektor zu $\lambda = 0$ sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow g(f,0) = 1 < 2 = a(f,0)$$

$\Longrightarrow f$ nicht diagonalisierbar.

Mit Satz 2.2 erhält man einen Algorithmus zur Überprüfung, ob ein gegebenes $f \in L(V,V)$ (bzw. $A \in K^{n,n}$) diagonalisierbar ist:

1. Bestimme mit einer Basis B von V die Darstellungsmatrix $A = A_f^{B,B}$
2. Bestimme für A das charakteristische Polynom $p_A(.)$ (Determinantenberechnung)
3. Zerfällt $p_A(.)$ in Linearfaktoren über K? Nein: f nicht diagonalisierbar. Ja: Seien $\lambda_i, 1 \leq i \leq k \leq n = \dim(V)$ die paarweise verschiedene Eigenwerte von f.

   Für $i = 1, ..., k$

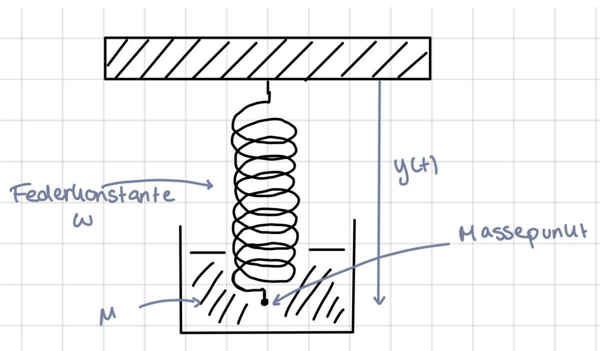
   1. Bestimme eine Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$
   2. Prüfe, ob $a(f,\lambda_i) = g(f,\lambda_i)$

   Gilt $a(f,\lambda_i) = g(f,\lambda_i)$ für alle $i \in \{1, ..., k\}$. Nein: f ist nicht diagonalisierbar. Ja: f ist diagonalisierbar.

Beispiel 2.6: Fischer/Springborn

Betrachtet wird: Masse aufgehänt an einer Feder. Zur Zeit $t = 0$ in Position $y(0) = \alpha$ und ausgelenkt in senkrechter Richtung mit Geschwindigkeit $\beta = \dot{y}(0)$

$y(t) \mathrel{\widehat{=}}$ Position der Masse zum Zeitpunkt t



Dieses System wird durch die gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta$$

Umschreiben

$$\begin{aligned}\dot{y}_0 &= y_1\\ \dot{y}_1 &= -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1\end{aligned}$$

mit $y_0 = y, \ddot{y}_0 = \ddot{y}, y_0(0) = \alpha, y_1(0) = \beta$.

$$\dot{\vec{y}} := \begin{pmatrix}\dot{y}_0\\ \dot{y}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -2\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + w^2$$

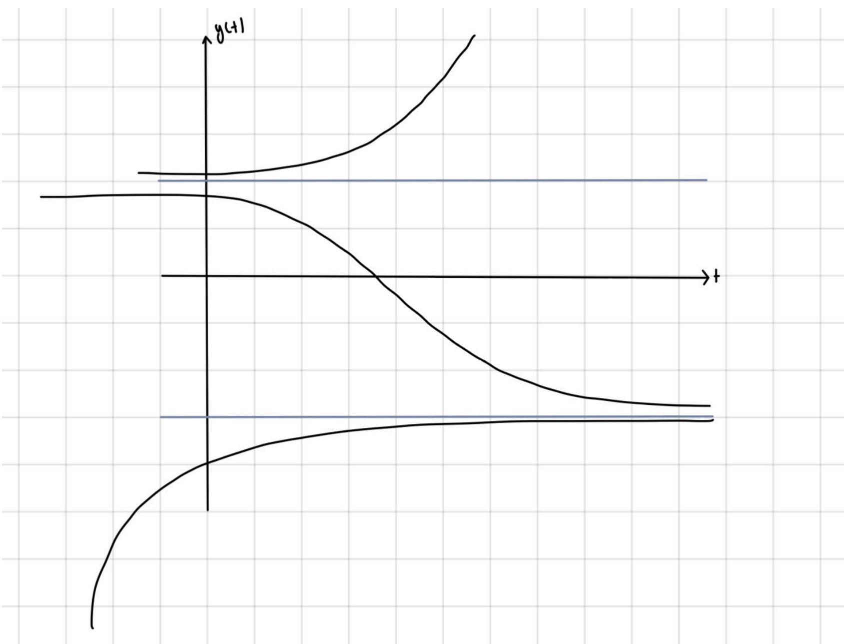
mit den potentiellen Nulstellen

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - w^2}$$

Man unterscheidet drei Fälle:

- $0 \leq \mu < \omega$, d.h. $\mu^2 - \omega^2 < 0 \Longrightarrow$ schwache Dämpfung
- $\mu = \omega$, d.h. $\mu^2 = \omega^2 \Longrightarrow$ aperiodischer Fall $\Longrightarrow a(A, -\mu) = 2$, $\dim(\mathrm{Eig}(A, -\mu)) = 1$, A nicht diagonalisierbar
- $\mu > \omega$, d.h. $\mu^2 > \omega^2$, starke Dämpfung

Eine solche Eigenwertanalyse kann auch nutzen, um das Langzeitverhalten von Lösungen von gewöhnlichen DGL zu bestimmen.



Satz 2.7: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Das charakteristische Polynom $p_f(.)$ zerfällt über K in Linearfaktoren.
2. Es gibt eine Basis B von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h.

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

und f ist damit **triangulierbar**.

Beweis: Beweis von Satz 14.18 im Liesen/Mehrmann

□

Nun ist das Ziel:

Bestimmung einer Basis B von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, die möglichst nah an einer Diagonalmatrix ist und von der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte abgelesen werden können.

D.h. $p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (notwendig, Satz 2.7) und wir wollen eine Basis B bestimmen, so dass $A_f^{B,B}$ Diagonalblockgestalt hat mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

wobei jeder Diagonalblock die Form

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{d_i, d_i} \qquad (*)$$

Definition 2.8: Jordan-Block

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$, $f \in L(V, V)$ und λ_i ein Eigenwert von f. Eine Matrix der Form $(*)$ heißt **Jordan-Block** der Größe d_i zum Eigenwert λ_i.

Wegen der Bedeutung der Jordan-Normalform gibt es zahlreiche Herleitungen mit unterschiedlichen mathematischen Hilfsmitteln.

Hier: Beweis über die Dualitätstheorie basierend auf einer Arbeit von V. Pt $\bar{a}$ k (1956)

2.2. Dualräume

Definition 2.9: Linearform, Dualraum

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $f \in L(V, K)$ heißt **Linearform**. Den K-Vektorraum $V^* := L(V, K)$ nennt man **Dualraum**.

Gilt $\dim(V) = n < \infty$ so folgt aus Satz 5.18 LinA I, dass $\dim(V^*) = n$ gilt. Ist $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V und $C = \{1\}$ eine Basis des K-Vektorraum K, dann gilt für

$$f(v_i) = \mu_i \in K \quad \text{für} \quad f \in V^*, \text{ d.h. } f : V \to K,$$

für $i = 1, ..., n$ und damit

$$A_f^{B,C} = (\mu_1, ..., \mu_n) \in K^{1,n}$$

Beispiel 2.10: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen und $a \in [0, 1]$. Dann sind

$$g_1 : V \to \mathbb{R}, \quad g_1(f) := \int_0^1 f(x)dx$$
$$g_2 : V \to \mathbb{R}, \quad g_2(f) := f(a)$$

Linearformen auf V.

Basis des Dualraums?

Satz 2.11: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $B = \{v_1 .., v_n\}$ eine Basis von V. Dann gibt es genau eine Basis $B^* = \{v_1^*, ..., v_n^*\}$ von $V^* = L(V, K)$ für die

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, ..., n$$

gilt. Diese Basis heißt die zu B duale Basis.

Beweis: Lemma 4.10: LinA I. Es gibt eine lineare Abbildung v_i^* für die $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ für $j = 1, ..., n$, für $i = 1, ..., n$. Noch zu zeigen: v_i^* sind Basis von V^*. Wir wissen schon: $\dim(V^*) = n$. Also: Es reicht zu zeigen: $\{v_i^*\}_{i=1,...,n}$ linear unabhängig. Seien $\mu_i \in K$ so, dass

$$\sum_{i=1}^n \mu_i v_i^* = 0 \in V^* = L(V, K)$$

Dann gilt:

$$0_K = 0_{V^*}(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i^*(v_j) = \mu_j \quad j = 1, ..., n$$

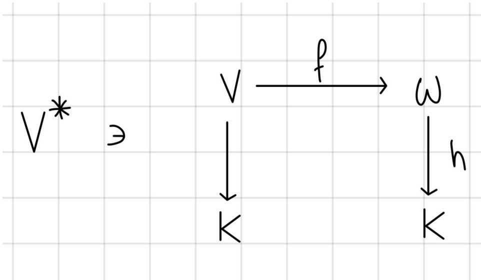
□

Definition 2.12: duale Abbildung

Seien V und W zwei K-Vektorräume mit den zugehörigen Dualräumen V^* und W^*. Für $f \in L(V, W)$ heißt

$$f^* : W^* \to V^*, \quad f^*(h) = h \circ f$$

die zu f **duale Abbildung**.



Seien $U \subseteq V$ und $Z \subseteq V^*$ zwei Unterräume. Dann heißt die Menge

$$U^0 := \{h \in V^* \mid h(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

Annihilator von U und die Menge

$$Z^0 := \{v \in V \mid z(v) = 0 \text{ für alle } z \in Z\}$$

Annihilator von Z.

Man kann sich überlegen:

- Die Mengen $U^0 \subseteq V^*$ und $Z^0 \subseteq V$ sind Untervektorräume von V^* bzw V
- Es gilt für $f \in L(V, V)$

$$\left(f^k\right)^* = \left(f^*\right)^k$$

Des Weiteren besitzt die duale Abbildung folgende Eigenschaften:

Lemma 2.13: Sind V, W und X drei K-Vektorräume. Dann gilt

1. Ist $f \in L(V, W)$, dann ist die duale Abbildung f^* linear, d.h. $f^* \in L(W^*, V^*)$
2. Ist $f \in L(V, W)$ und $g \in L(W, X)$, dann ist $(g \circ f)^* \in L(X^*, V^*)$ und es gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
3. Ist $f \in L(V, W)$ bijektiv, dann ist $f^* \in L(W^*, V^*)$ bijektiv und es gilt $(f^*)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$

Beweis: ÜB

□

Lemma 2.14: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f \in L(V, V)$, $f^* \in L(V^*, V^*)$ und $U \subseteq V$, sowie $W \subseteq V^*$ zwei Vektorräume. Dann gilt:

1. $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^0)$
2. Ist f nilpotent vom Grad m, dann ist die duale Abbildung f^* ebenfalls nitpotent vom Grad m.
3. Ist $W \subseteq V^*$ ein f^*-invarianter Vektorraum, dann ist W^0 ein f-invarianter Unterraum.

Beweis: ÜA

□

Definition 2.15: nilpotent vom Grad m

Sei $\{0\} \neq V$ ein K-Vektorraum. Man nennt $f \in L(V, V)$ **nilpotent**, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f^m = 0 \in L(V, V)$ gilt. Gilt für dieses m, dass $f^{m-1} \neq 0 \in L(V, V)$, so heißt f **nilpotent vom Grad m** und m is der **Nilpotenzindex** von f.

Definition 2.16: f-invarianter Unterraum

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $f \in L(V, V)$. Gilt $f(U) \subseteq U$, d.h. ist $f(u) \in U$ für alle $u \in U$, so nennt man U einen f-invarianten Unterraum von V.

Definition 2.17: Bilinearform

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $a : V \times W \to K$ heißt Bilinearform, wenn

1. $a(\cdot, w) : V \to K$ für alle $w \in W$ eine lineare Abbildung ist und
2. $a(v, \cdot) : W \to K$ für alle $v \in V$ eine lineare Abbildung ist

Eine Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ heißt **nicht ausgeartet** in der ersten Variable, wenn aus

$$a(v, w) = 0 \quad \text{für alle } w \in W$$

folgt, dass $v = 0$ ist. Eine Bilinearform heißt nicht ausgeartet in der zweiten Variable, wenn aus

$$a(v, w) = 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

folgt, dass $w = 0$ ist. Falls $a(\cdot, \cdot)$ in beiden Variablen nicht ausgeartet ist, so nennt man $a(\cdot, \cdot)$ eine **nicht ausgeartete Bilinearform** und die Räume V, W ein **duales Paar von Räumen** oder **duales Raumpaar** bezüglich $a(\cdot, \cdot)$. Ist $V = W$, so heißt $a(\cdot, \cdot)$ eine **Bilinearform auf** V. Eine Bilinearform $a(., .)$ auf V heißt **symmetrisch**, wenn $a(v, w) = a(w, v)$ für alle $v, w \in V$, ansonsten heißt $a(\cdot, \cdot)$ unsymmetrisch.

Bemerkung: Damit V, W ein duales Raumpaar für eine nicht ausgeartete Bilinearform bilden können, muss $\dim(V) = \dim(W)$ gelten.

Lemma 2.18: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in L(V, V)$, $f^* \in L(V^*, V^*)$ die duale Abbildung zu f, $U \subseteq V$ und $W \subseteq V^*$ zwei Untervektorräume. Ist die Bilinearform

$$a : U \times W \to K, (v, h) \mapsto h(v)$$

nicht ausgeartet ist, d.h. sind U und W ein duales Raumpaar bezüglich dieser Bilinearform, so ist

$$V = U \oplus W^0$$

Beweis: Sei $u \in U \cap W^0$. Dann gilt $h(u) = 0$ für alle $h \in W$. Weil U, W ein duales Raumpaar bzgl. $a(\cdot, \cdot)$ bilden, folgt $u = 0$. Außerdem $\dim(U) = \dim(W)$ gelten. Damit folgt aus Lemam 2.14, 1., dass

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(W) + \dim(W^0) \\ &= \dim(U) + \dim(W^0) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow V = U \oplus W^0$

□

2.3. Zyklische f-invariant Unterräume

Jetzr: Genauere Analyse der Struktur von Eigenräumen

Beispiel: Ist V ein K-Vektorraum, $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so ist $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$ ein f-invarianter Unterraum, da: Für $v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ gilt $f(v) = \lambda v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda)$.

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so existiert ein eindeutig definiertes $m = m(f, v) \in \mathbb{N}$, sodass die Vektoren

$$v, f(v), f(f(v)), ..., f^{m-1}(v)$$

linear unabhängig, die Vektoren

$$v, f(v), ..., f^m(v)$$

jedoch linear abhängig sind. Wegen $\dim(V) = n$, muss $m \leq n$ gelten!

Definition 2.19: Grad von v

Die eindeutig definiert Zahl $m(f, v) \in \mathbb{N}$ heißt Grad von v bezüglich f.

$$0 \neq v, f(v), f^2(v), ..., f^{m-1}(v) \text{ lin. unabh.}$$
$$v, f(v), ..., f^m(v) \text{ lin. abh.}$$

$\Longrightarrow$ Grad m von v, $m \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

- Der Vektor $v = 0 \in V$ ist lin. abhängig. Deswegen muss man $v \neq 0$ fordern oder $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Der Grad von $0 \neq v \in V$ ist gleich 1, genau dann wenn $v, f(v)$ linear abhängig sind. Das ist genau dann der Fall wenn v ein Eigenvektor von f ist. Damit folgt auch: Ist $v \in V$ kein Eigenvektor von f und $v \neq 0$, so ist der Grad von v also $m(v, f) \geq 2$.

Definition 2.20: Krylov-Raum

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$, $f \in L(V, V)$, $v \in V$ und $j \in \mathbb{N}$. Der Unterraum

$$\mathcal{K}_j(f, v) := \operatorname{Span}\{v, f(v), f^2(v), ..., f^{j-1}(v)\} \subseteq V$$

heißt **j-ter Krylov-Raum** von f und v.

Alexei Krylov (russischer Schiffsbauingeneur und Mathematiker, 1863-1945). Krylov-Räume spielen auch eine wichtige Rolle für das CG-Verfahren (Conjugate Gradients).

Lemma 2.21: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V,V)$. Dann gilt:

1. Hat $0 \neq v \in V$ den Grad m bzgl. f, so ist $\mathcal{K}_m(f,v)$ ein f-invarianter Unterraum und es gilt:
$$\operatorname{Span}\{v\} = \mathcal{K}_1(f,v) \subset \mathcal{K}_2(f,v) \subset \ldots \subset \mathcal{K}_m(f,v) = \mathcal{K}_{m+j}(f,v)$$
für alle $j \in \mathbb{N}$.
2. Hat $0 \neq v \in V$ den Grad m bzgl. f und ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, so dass $v \in U$, so ist
$$\mathcal{K}_m(f,v) \subseteq U$$
D.h. betrachtet man alle f-invarianten Unterräume von V, die v enthalten, so ist $\mathcal{K}_m(f,v)$ derjenige mit der kleinsten Dimension.
3. Gilt für $v \in V$, dass $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $f^m(v) = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, dann ist
$$\dim\big(\mathcal{K}_j(f,v)\big) = j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, m$$

Beweis:

1. ÜA
2. Sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum mit $v \in U$. Dann gilt $f^j(v) \in U$ für $j = 1, \ldots, m-1$. Da v den Grad m hat, sind $v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v)$ linear unabhängig. $\Longrightarrow$ $\mathcal{K}_m(f,v) \subseteq U \quad \text{und} \quad \dim(\mathcal{K}_m(f,v)) = m \leq \dim(U)$
3. Seien $\mu_0, \ldots., \mu_{m-1} \in K$ so gewählt, dass
$$0 = \mu_0 v + \mu_1 f(v) + \ldots + \mu_{m-1} f^{m-1}(v)$$
gilt. Anwendung f^{m-1}
$$0 = \mu_0 f^{m-1}(v) + \mu_1 f^m(v) = \mu_0 \underbrace{f^{m-1}(v)}_{\neq 0}$$
$$\Longrightarrow \mu_0 = 0$$
Für $m > 1$ kann man dieses Argument induktiv für f^{m-j}, $j = 2, \ldots, m$, anwenden und erhält damit
$$\mu_1 = \ldots = \mu_{m-1} = 0$$
$\Longrightarrow$ Beh.

□

Beobachtungen: Hat v den Grad m bzgl. f gilt

- $\mathcal{K}_j(f,v)$ ist für $j < m$ kein f-invarianter Unterraum, da $0 \neq f(f^{j-1}(v)) = f^j(v) \notin \mathcal{K}_j(f,v)$

- wie oben gezeigt, bilden die Vektoren $v, f(v), ..., f^{m-1}(v)$ eine Basis von $\mathcal{K}_m(f, v)$. Wendet man f auf ein Element dieser Basis an, d.h. $f^{k+1}(v), k = 0, ..., m-1$, so erhält man für $k = m-1$ $f^m(v)$ als Linearkombination von $v, f(v), ..., f^{m-1}(v) \Longrightarrow f^m(v) \in \mathcal{K}_m(f, v)$. Deswegen wird $\mathcal{K}_m(f, v)$ auch **zyklische invarianter Unterraum** zu v von f genannt.

Lemma 2.22: Sei $\{0\} \neq V$ ein K-Vektorraum. Ist $f \in L(V, V)$ nilpotent vom Grad m, so gilt $m \leq \dim(V)$.

Beweis: Nach Definition existiert ein $v \in V$ mit $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $f^m(v) = 0$. Lemma 2.21 sichert, dass $v, f(v), ..., f^{m-1}(v)$ linear unabhängig $\Longrightarrow m \leq \dim(V)$.

□

Beobachtung: Sei V ein K-Vektorraum und $f \in L(V, V)$. Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, so gilt für die Einschränkung von f auf $U, d.h.$

$$f|_U : U \to U, \quad u \to f(u),$$

dass $f|_U \in L(U, U)$.

Satz 2.23: Fittingzerlegung

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V, V)$. Dann existieren f-invariante Unterräume $U \subseteq V$ und $W \subseteq V$, so dass gilt:

1. $V = U \oplus W$
2. $f|_U \in L(U, U)$ ist bijektiv
3. $f|_W \in L(W, W)$ ist nilpotent

Beweis: $v \in \ker(f)$. Dann gilt wegen der Linearität von f, sodass $f^2(v) = f(f(v)) \overset{f(v)=0}{=} 0 \Longrightarrow \ker(f) \subseteq \ker(f^2)$

Induktiv zeigt man:

$$\{0\} \subseteq \ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq ...$$

Da $\dim(V) < \infty$, muss es eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ geben, so dass $\ker(f^m) = \ker(f^{m+j})$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Damit sehen wir

$$U = \operatorname{im}(f^m) \quad \text{und} \quad W = \ker(f^m)$$

Zeige: U und W sind f-invariant. Sei $u \in U$. Dann existiert $w \in V$ mit $f^m(w) = u \Longrightarrow f(u) = f(f^m(w)) = f^m(f(w)) \in U$.

Sei $w \in W$. Dann gilt

$$f^m(f(w)) = f(f^m(w)) = 0 \Longrightarrow f(w) \in W$$

Also existieren f-invariante Unterräume $U \subseteq V$ und $W \subseteq V$.

1. Es gilt $U + W \subseteq V$. Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 4.16, LinA I) liefert für f^m, dass
$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$
Ist $v \in U \cap W \implies \exists w \in V : v = f^m(w)(v \in U)$
$$v \in W \implies 0 = f^m(v) = f^m(f^m(v)) = f^{2m}(v)$$
Es gilt $\ker(f^m) = \ker(f^{2m}) \implies v = f^m(v) = 0$

$\implies V = U \oplus W$
2. Sei $v \in \ker(f|_k) \subseteq U$. Dann existiert ein $w \in V$, so dass $f^m(w) = v$ gilt. $\implies$ $0 = f(v) = f(f^m(w)) = f^{m+1}(w)$. Mit $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1}) \implies w \in \ker(f^m) \implies v = f^m(w) = 0 \implies f$ injektiv.

   Aus der Dimensionsformel folgt, dass f surjektiv ist.
3. Sei $v \in W$. Dann gilt
$$0 = f^m(v) = (f|_W)^m(v)$$
$\implies (f|_W)^m = 0 \in L(W, W)$, d.h. $(f|_W)^m$ ist die Nullabbildung $\implies f|_W$ nilpotent.

Satz 2.24: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in L(V, V)$ nilpotent vom Grad m, $v \in V$ ein beliebiger Vektor mit $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $h \in V^*$ mit $h(f^{m-1}(v)) \neq 0$. Dann sind v und h vom Grad m bzgl. f und f^*. Die beiden Räume $\mathcal{K}_m(f, v)$ bzw. $\mathcal{K}_m(f^*, h)$ sind zyklisch f- bzw. f^*-invariante Unterräume von V bzw. V^*. Sie bilden ein duales Raumpaar bzgl. der Bilinearform
$$a : \mathcal{K}_m(f, v) \times \mathcal{K}_m(f^*, h) \to K, \quad (\bar{v}, \bar{h}) \mapsto \bar{h}(\bar{v})$$
und es gilt
$$V = \mathcal{K}_m(f, v) \oplus (\mathcal{K}_m(f^*, h))^0$$
Hierbei ist $\mathcal{K}_m(f^*, h)^0$ ein f-invarianter Unterraum von V.

Beweis: Für $v \in V$ gilt $f^{m-1}(v) \neq 0$. Lemma 2.20 $\implies \mathcal{K}_m(f, v)$ m-dimensionaler zyklischer f-invarianter Unterraum von V. Für V^* gilt
$$0 \neq h(f^{m-1}(v)) = (f^*)^{m-1}(h)(v)$$
Dann ist $0 \neq (f^*)^{m-1}(h) \in L(V^*, V^*)$. f nilpotent von Grad $m \implies$ (Lemma 2.14) f^* nilpotent von Grad $m \implies$
$$(f^*)^m(h) = 0 \in L(V^*, V^*)$$
$\implies$ (Lemma 2.20) $\mathcal{K}_m(f^*, h)$ ist m-dimensionaler zyklischer f^*-invarianter Unterraum von V^*.

Nun zu zeigen: $\mathcal{K}_m(f, v), \mathcal{K}_m(f^*, h)$ sind ein duales Raumpaar. Sei

$$\bar{v} = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^i(v) \ \in \mathcal{K}_m(f, v)$$

so gewählt, dass

$$\bar{h}(\bar{v}) = a(\bar{v}, \bar{h}) = 0 \quad \forall \bar{h} \in \mathcal{K}_m(f^*, h)$$

Zeige induktiv, dass $\mu_k = 0, k = 0, ..., m-1$. Wegen $\left((f^*)^{m-1}(h)\right) \in \mathcal{K}_m(f^*, h)$ folgt

$$0 = \left((f^*)^{m-1}(h)\right)(\bar{v}) = h(f^{m-1}(\bar{v})) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i h(f^{m-1+i}(v)) = \mu_0 \underbrace{h(f^{m-1}(v))}_{\neq 0}$$

$$\Longrightarrow \mu_0 = 0$$

Sei nun $\mu_0 = ... = \mu_{k-1} = 0$ fü ein $k \in \{1, ..., m-2\}$. Wegen $(f^*)^{m-1-k}(h) \in \mathcal{K}_m(f^*, h)$ folgt aus der Darstellung von $\bar{v}$, dass

$$0^{(*)} = \left((f^*)^{m-1-k}\right)(h))\left(\bar{v} = h\left(f^{m-1-k}(\bar{v})\right)\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_I h\left(f^{m-i+i-k}(v)\right) = \mu_k \underbrace{h\left(f^{m-1}(v)\right)}_{\neq 0} = \mu_k$$

$$\Longrightarrow \bar{v} = 0$$

$\Longrightarrow a(.,.)$ ist nicht ausgeartet in der ersten Komponente. Analog zeigt man, dass $a(.,.)$ auch in der zweiten Kompontente nicht ausgeartet ist $\Longrightarrow \mathcal{K}_m(f, v)$ und $\mathcal{K}_m(f^*, h)$ sind ein duales Raumpaar.

Mit Lemma 2.18: $V = \mathcal{K}_m(f, v) \oplus (\mathcal{K}_m(f^*, h))^0$

Mit Lemma 2.14, 3: $(\mathcal{K}_m(f^*, h))^0$ ist f-invarianter UR von V.

□

(zyklisch f-invarianter UR: $v, f(v), f^2(v), ...$)

2.4. Die Jordan-Normalform

Satz 2.25: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V, V)$. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, dann gibt es f-invariante Unterräume $U \subset V$ und $\{0\} \neq W \subseteq V$, so dass

1. $V = U \oplus W$
2. die Abbildung $f|_U - \lambda \mathrm{Id}_U$ ist bijektiv und
3. die Abbildung $f|_W - \lambda \mathrm{Id}_W$ ist nilpotent

Des Weiteren ist λ kein Eigenwert von $f|_U$.

Beweis: Wir definieren

$$g := f - \lambda \mathrm{Id}_V \in L(V, V)$$

Satz 2.23: $\exists$ g-invariante UR $U \subseteq V$ und $W \subseteq V$:

$$V = U \oplus W, \; g|_U \text{ bijektiv}, \; g|_W \text{ nilpotent}$$

Annahme: $\{0\} = W \implies V = U$

$$\implies g|_U = g|_V = g \;\text{ bijektiv}$$

λ ist Eigenwert von $f \implies \exists 0 \neq v : f(v) = \lambda v$

$$\begin{aligned}
&\implies g(v) = f(v) - \lambda v = \lambda v - \lambda v = 0\\
&\implies \ker(g) \supseteq \{0, v\} \neq \{0\} \;\lightning\; g \text{ bijektiv}\\
&\implies U \subset V
\end{aligned}$$

Annahme: λ ist Eigenwert von $f|_U$

$$\begin{aligned}
&\implies \exists 0 \neq v \in U : f(v) = \lambda v\\
&\implies g|_U(v) = f(v) - \lambda v = \lambda v - \lambda v = 0 \;\lightning\; g|_U \text{ bijektiv}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.26: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^5$, die Standardbasis E und $f \in L(V,V)$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1\\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
p_f(\lambda) = p_A(\lambda) &= (\lambda - 1)^4 (\lambda - 2)^1\\
\implies \text{EW: } 1, 2 \quad & a(f,1) = 4 \quad a(f,2) = 1
\end{aligned}$$

$\implies p_A(.)$ zerfällt in Linearfaktoren

$\lambda_1 = 1$: Es gilt $\ker(g_1^3) = \ker(g_1^4)$ für $g_1 := f - \lambda_1 \mathrm{Id}_V$

$\implies m_1 = 3$

$$U_1 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}\right\} \qquad W_1 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 = 2$: Für $g_2 = f - \lambda_2 \mathrm{Id}_V$ gilt $\ker(g_2) = \ker(g_2^2)$

$\implies m_2 = 1$

$$U_2 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-5\\1\\-1\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\0\\-4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\0\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}, W_2 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Beobachtung: $\dim(W_1) = a(f, \lambda_1)$, $\dim(W_2) = a(f, \lambda_2)$

Satz 2.27: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V, V)$. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, dann existieren für den Unterraum W aus Satz 2.25 Vektoren $w_1, ..., w_k \in W$ und $d_1, ..., d_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$W = \mathcal{K}_{d_1}(f, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(f, w_2) \oplus ... \oplus \mathcal{K}_{d_k}(f, w_k)$$

Des Weiteren gibt es eine Basis B von W, so dass

$$A_{f|_W}^{B,B} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Beweis: Sei wie in Satz 2.25 $g := f - \lambda \mathrm{Id}_V$ und $g_1 := g|_W$ nilpotent vom Grad d_1. Dann gilt $1 \leq d_1 \leq \dim(W)$.

Sei $w_1 \in W$ ein Vektor mit $g_1^{d_1 - 1}(w_1) \neq 0$. Wegen $g^{d_1}(w_1) = 0$

$\Longrightarrow g_1^{d_1-1}(w_1)$ ist ein Eigenvektor von g_1 zum Eigenwert 0.

Lemma 2.21, 3, liefert, dass die d_1 Vektoren

$$\left\{w_1, g(w_1), ..., g_1^{d_1-1}(w)\right\}$$

linear unabhängig sind. Außerdem ist $W_1 := \mathcal{K}_{d_1}(g_1, w_1)$ ein d_1-dimensionaler zyklischer g_1-invarianter UR von W. Also ist

$$B_1 := \left\{g_1^{d_1-1}(w_1), g_1^{d_1-2}(w_2), ..., g_1(w_1), w_1\right\}$$

eine Basis von $\mathcal{K}_{d_1}(g_1, w_1) = W_1$ und

$$A_{g_1|_{W_1}}^{B_1,B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = J_{d_1}(0) \in K^{d_1,d_1}$$

Per Definition gilt $A_{g_1|_{W_1}}^{B_1,B_1} = A_{g|_{W_1}}^{B_1,B_1}$. Ist $d_1 = \dim(W)$: siehe unten $\therefore$.

Sei nun $d_1 < \dim(W)$. Satz 2.25 sichert, dass es für $g_1 \in L(W, W)$ einen g_1-invarianten Unterraum $\widetilde{W} \neq \{0\}$ mit $W = W_1 \oplus \widetilde{W}$ gibt.

Die Abbildung $g_2 := g_1|_{\widetilde{W}}$ ist nilpotent vom Grad λ_2 mit $1 \leq d_2 \leq d_1$.

Wiederholung der Konstruktion:

$\exists w_2 \in \widetilde{W} : g_2^{d_2-1}(w_1) \neq 0, \dots, W_2 := \mathcal{K}_{d_2}(g_2, w_2)$ ... UR von $\widetilde{W} \subseteq W$,

$$B_2 := \left\{g_2^{d_2-1}(w_2), g_2^{d_2-2}(w_2), \dots, g_2(w_2), w_2\right\}$$

$$A_{g|_{W_2}}^{B_2,B_2} = A_{g_2|_{W_2}}^{B_2,B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Nach $k \leq \dim(W)$ Schritten muss diese Konstruktion abbrechen und es gilt

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{K}_{d_1}(g_1, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(g_2, w_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{d_K}(g_k, w_k) \\ &= \mathcal{K}_{d_1}(g, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(g, w_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{d_2}(g, w_k) \end{aligned}$$

Vereinigt man die Basen $B_1, \dots, B_k$ zu einer Basis B von W (direkte Summe!), so erhält man

$$A_{g|_W}^{B,B} = \begin{pmatrix} A_{g|_{W_1}}^{B_1,B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{g|_{W_k}}^{B_k,B_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}$$

Jetzt: Übertragung auf $f = g + \lambda \mathrm{Id}_V$. Man kann sich leicht überlegen, dass jeder g-invariante Unterraum von V auch f-invariant ist und damit gilt:

$$\mathcal{K}_{d_i}(f, w_i) = \mathcal{K}_{d_i}(g, w_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

$$\overset{\text{ÜA}}{\Longrightarrow} W = \mathcal{K}_{d_1}(f, w_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{d_k}(f, w_k)$$

Für $j \in \{1, \dots k\}$ und $0 \leq l \leq d_j - 1$ ist

$$\begin{aligned} f\left(g^l(w_j)\right) &= g\left(g^l(w_j)\right) + \lambda g^l(w_j) \\ &= \lambda g^l(w_j) + \underbrace{g^{l+1}(w_j)}_{=0, l=d_j-1} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow A_{f|_W}^{B,B} = \begin{pmatrix} A_{f|_{W_1}}^{B_1,B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{f|_{W_k}}^{B_k,B_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda) \end{pmatrix}$$

□

Beispiel 2.28: Fortsetzung von Bsp 2.26

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{EW:} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1, a(f,\lambda_1) = 4 = \dim(W_1) \\ \lambda_2 = 2, a(f,\lambda_2) = 1 = \dim(W_2) \end{matrix}$$

$\lambda_1 = 1$: $g^1_{|W_1}$ nilpotent vom Grad $\lambda^1_1 = 3$ und $1 < d^1_1 < \dim(W_1)$

Erinnerung: $g^1_1 = f - \lambda_1 I_d$. Für $w^1_1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$ ist $(g^1_1)^2(w_1) = (1\ 0\ 1\ 0\ 0)^T \neq 0$ und $(g^1_1)^3(w_1) = 0 \in V = \mathbb{R}^5$.

Mit Lemma 2.21:

$$\left\{w_1, (g^1_1)^1(w^1_1), (g^1_1)^2(w^1_1)\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Span}\left\{w_1, g^1_1(w^1_1), (g^1_1)^2(w_1)\right\} = \mathcal{K}_3(g^1_1, w^1_1)$$

$d^1_1 < \dim(W_1) \Longrightarrow$ es existiert zu $W_{11} := \mathcal{K}(g^1_1, w^1_1)$ ein $\widetilde{W}_1 \neq \{0\}$ mit $W_1 = W_{11} \oplus \widetilde{W}_1$.
Zum Beispiel: $w^1_2 = (1\ -1\ 1\ 0\ 1)^T \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &w^1_2, w^1_1, g^1_1(w^1_1), (g^1_1)^2(w^1_1) \quad \text{lin. unab.} \\ &\widetilde{W}_1 := \operatorname{Span}\{w^1_2\} \cap \mathcal{K}_3(g^1_1, w^1_1) = \{0\} \end{aligned}$$

Es gilt $g^1_2 := g^1_1|_{\widetilde{W}_1}$ nilpotent vom Grad 1

$$\Longrightarrow d^1_2 = 1 \qquad W_1 = \mathcal{K}_3(g^1_1, w^1_1) \oplus \mathcal{K}_1(g^1_2, w^1_2)$$

Weitherhin kann man nachrechnen

$$\mathcal{K}_3(f, w^1_1) = \operatorname{Span}\left\{w_1, g^1_1(w^1_1), (g^1_1)^2(w^1_1)\right\} = \mathcal{K}_3(g^1_1, w^1_1)$$
$$\mathcal{K}_1(f, w_2) = \operatorname{Span}\{w^1_2\} = \mathcal{K}_1(g^1_2, w^1_2)$$

$\lambda_2 = 2$:

$$\begin{aligned} &g^2_1|_{W_2} \text{ nilpotent vom Grad } \lambda^2_1 = 1 \\ &\lambda^2_1 = \dim(W_2) \\ &w^2_1 = (0\ 1\ 2\ 3\ -2)^T \neq 0 \\ &(g^2_1)^1(w^2_1) = 0 \in V \Longrightarrow W_2 = \mathcal{K}_1(f, w^2_1) \end{aligned}$$

$$A_{f|_{W_1}}^{B^1,B^1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f|_{W_2}}^{B^2,B^2} = (2)$$

$$\overset{\text{Ziel:}}{\Longrightarrow} A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Satz 2.29: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$ und $f \in L(V,V)$. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, dann gilt für die $d_j, 1 \leq j \leq k$ aus Satz 2.27, dass

$$\begin{aligned} a(f,\lambda) &= \dim(W) = d_1 + \ldots + d_k \\ g(f,\lambda) &= k \end{aligned}$$

Beweis: Für den Unterraum U aus Satz 2.23/2.25 ist die Abbildung $f|_U = (f - \lambda \operatorname{Id})|_U$ bijektiv $\Longrightarrow \lambda$ ist kein Eigenwert von $f|_U$. Daraus erhält man

$$a(f,\lambda) = \dim W = d_1 + \ldots + d_k$$

Zur Bestimmung von $g(f,\lambda)$ sei $v \in W$ ein beliebiger Vektor. Dann ist

$$v = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{d_j-1} \mu_{jl} g^l(w_j)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} f(v) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{d_j-1} \mu_{jl} f(g^l(w_j)) &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{d_j-1} \mu_{jl} g^l(w_j) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{d_j-1} \mu_{jl} g^{l+1}(w_j) \\ &= \lambda v + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{d_j-2} \mu_{jl} \overbrace{g^{l+1}(w_j)}^{\text{lin. unab.}}}_{=0} \end{aligned}$$

$v \in \operatorname{Eig}(f,\lambda) \Longleftrightarrow \mu_{jl} = 0, 1 \leq j \leq k, 0 \leq l \leq d_j - 2$

$$\Longleftrightarrow v = \sum_{j=1}^{k} \mu_j g^{d_j-1}(w_j)$$

Für $v \neq 0$ muss mindestens ein Koeffizient $\mu_j \neq 0, j = 1, \ldots, k$. Daraus folgt

$$\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \operatorname{Span} \underbrace{\{g^{d_1-1}(w_1), \ldots, g^{d_k-1}(w_k)\}}_{\text{lin. unab. wegen direkter Summe}}$$

Beispiel 2.30: Fortsetzung von Bsp. 2.28. Es gilt

$$\mathrm{Eig}(f,1) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow g(f,1) = 2$$

$\lambda_1 = 1$: $a(f,1) = 4 = 3 + 1 = d_1^1 + d_2^1$, $g(f,1) = 2 = k$

$\lambda_2 = 2$: $a(f,2) = 1 = d_1^2$, $g(f,2) = 1$

Fazit: Für einen Eigenwert λ zu $f \in L(V,V)$ gilt:

- Die geometrische Veilfachheit des Eigenwert λ ist gleich der Anzahl der Jordanblöcke zu diesem Eigenewrt in der entsprechenden Dartsellungsmatrix

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

- Die algebraische Vielfachheit des Eigenwert λ ist gleich der Summe der Dimensionen der zugehörigen Jordanblöcke
- In jedem Unterraum $\mathcal{K}_{d_j}(f, w_j)$ gehört genau ein Eigenvektor und seine Vielfachheiten.

Was gilt für weitere Eigenwerte?

Ist $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert von f, dann ist $\tilde{\lambda}$ auch ein Eigenwert der Einschränkung $f|_U \in L(U_\lambda, U_\lambda)$

$\Longrightarrow$ Man kann die Sätze 2.25-2.29 auf $f|U_\lambda$ anwenden. Damit erhält man

- $U_\lambda = X \oplus Y$
- $f|_X - \tilde{\lambda}\mathrm{Id}_X$ ist bijektiv
- $f|_Y - \tilde{\lambda}\mathrm{Id}_Y$ ist nilpotent
- Der UVR Y ist die direkte Summe von Krylovräumen
- Es gibt eine Darstellungsmatrix von $f|_Y$ bestehend aus Jordanblöcken

Da man dieses Argument für alle paarweise verschiedene Eigenewerte von f anwenden kann, erhält man.

Satz 2.31: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V,V)$. Zerfällt das charakteristische Polynom $p_f(.)$ in Linearfaktoren, so gibt es eine Basis B von V für welche die Darstellungsmatrix in Jordan-Normalform ist, d.h.

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

Beweis: s.o.

□

Marie Ennemond Jordan (fr. Mathematiker, 1838-1922) gab diese Form 1870 an. Zwei Jahre vor Jordan bewies Karl Weierstraß (dt. Mathematiker, 1815-1897) ein Resultat, aus dem die JNF folgt.

Beispiel 2.32:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 2 \end{pmatrix} = A_f^{B,B}$$

$B = \left\{ \left(g_1^1\right)^2 (w_1^1), g_1^1(w_1^1), w_1^1, w_2^1, w_1^2 \right\}$

Für

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

gilt $J = S^{-1}AS$. Also J ähnlich zu A.

Für $f \in L(V, V)$ hatten wir:

- f ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$
  - $p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren
  - $\forall$ EW λ von $f : a(f, \lambda) = g(f, \lambda)$
- zerfällt $p_j(.)$ in Linearfaktor $\Longrightarrow \exists$ Basis $B : A_f^{B,B}$ in JNF

Folgerung: Existiert eine Darstellungsmatrix in Jordan-Normalform: f ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow d_i = 1 \forall i \in \{1, ..., k\}$

Frage: Wann zerfällt $p_f(.)$ in Linearfaktoren?

<u>Fundamendtalsatz der Algebra:</u>

Jedes Polynom $p \in P[t]$ über $\mathbb{C}$ mit einem Grad größer 0 hat mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Liesen, Mehrmann, Kapitel 15, braucht substantiell Hilfsmittel aus der Analysis.

Damit folgt unmittelbar:

Korollar 2.33: Jedes Polynom $p \in P[t]$ über $\mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h. es gibt $a, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $n = \mathrm{grad}(p)$ und

$$p(t) = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)...(t - \lambda_n)$$

Daraus folgt direkt:

Korollar 2.34: Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann besitzt jedes $f \in L(V, V)$ eine Jordan-Normalform.

Matrix-Version:

Korollar 2.35: Sei K ein Körper und $A \in K^{n,n}$, so dass das charakteristische Polynom $p_A(.)$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix J in Jordan-Normalform.

Ist die Jordan-Nomralform eindeutig bestimmt?

Satz 2.36: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Bestizt $f \in L(V, V)$ eine Jordan-Normalform, so ist diese bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig bestimmt.

Beweis: sehr technisch, z.B. Liesen, Mehrmann Satz 16.12, Fischer/Springborn, Abschnitt 5.7.

□

Alternativer Beweis für die JNF über Hauptvektoren und Haupträume, vgl. Fischer/Spingborn, Abschnitt 5.5.

Damit: Für Bsp. 2.32 wären

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & J_3(1) & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & J_3(1) \end{pmatrix}$$

alternative JNF. Jordanblöcke bleiben gleich. D.h. Satz 2.36 rechtfertigt den Namen "Normalform".

3. Euklidische und unitäre Vektorräume

Jetzt: V Vkeotrraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $\dim(V) < \infty$.

Damit: Definition eines Skalarproduktes und Verallgemeinerung von Begriffen aus der Geometrie für $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Dies beinhaltet auch Orthogonalität und orthonormale Basen.

3.1. Skalarprodukt und Normen

Für $K = \mathbb{R}$ werden wir Bilinearformen (Def. 2.17) verwenden. Für $K = \mathbb{C}$ benötigen wir

Definition 3.1: Sesquilinearform
Seien V und W zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume. Man nennt eine Abbildung

$$s : V \times W \to \mathbb{C}, (v, w) \mapsto s(v, w)$$

Sesquilinearform auf $V \times W$, wenn für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

1. $s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w)$ und $s(\lambda v, w) = \lambda s(v, w)$

   $\widehat{=}$ $s(.,.)$ ist linear in der ersten Komponente
2. $s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2)$ und $s(v, \lambda w) = \bar{\lambda} s(v, w)$

Ist $V = W$, so heißt s Sesquilinearform auf V. Eine Sesquilinearform auf V nennt man hermitesch, wenn

$$s(v, w) = \overline{s(w, v)} \quad \forall v, w \in V$$

Definition 3.2: Skalarprodukt
Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to K, \quad (v, w) \to \langle v, w \rangle$$

nennet man **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf V, wenn gilt

1. Ist $K = \mathbb{R}$, so ist $\langle .,. \rangle$ eine symmetrische Bilinearform
2. Ist $K = \mathbb{C}$, so ist $\langle .,. \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform
3. $\langle .,. \rangle$ ist positiv definit, d.h. es gilt

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$$
$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0 \in V$$

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt nennt man **euklidischen Vektorraum** und einen $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt **unitären Vektorraum**.

Bemerkungen:

- Für alle $v \in V$ gilt $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}^+$ unabhängig von $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$
- Ein Unterraum eines euklidischen (unitären) Vektorraums ist wieder ein euklidischer (unitärer) Vektorraum.

Definition 3.3: hermitesche Matrix

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m,n}$ ist die hermitesch transponierte von A definiert als

$$A^H = (\bar{a}_{ji}) \in \mathbb{C}^{n,m}$$

Gilt $A = A^H$, so heißt A **hermitesche Matrix**.

Ist $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, so $A^H = A^T$. Für eine hermitesche Matrix A gilt $a_{ii} = \bar{a}_{ii} \implies a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.4: Man kann leicht nachrechnen:

- Für $V = \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle v, w\rangle := v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

  ein Skalarprodukt. Es ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.
- Für $V = \mathbb{C}^n$ ist

$$\langle v, w\rangle := w^H v = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i v_i$$

  ein Skalarprodukt. Es ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$.
- Für $V = K^{m,n}$ ist

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{Spur} \underbrace{(B^H A)}_{\in K^{n,n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \bar{b}_{ij} a_{ji} \right)$$

- Auf dem Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen ist

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

  ein Skalarprodukt.

Lemma 3.5: Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Ist V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, so gilt

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle \quad \forall v, w \in V$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt,, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis: Für $w = 0$ folgt die (Un-) gleichung.

Für $w \neq 0$ definiert man

$$\lambda := \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle &= \langle v, v\rangle - \bar{\lambda}\langle v, w\rangle - \lambda\langle w, v\rangle - \lambda \cdot \left(-\bar{\lambda}\right)\langle w, w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle}\langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\langle w, v\rangle + \frac{\left|\langle v, w\rangle\right|^2}{\left(\langle w, w\rangle\right)^2}\langle w, w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \frac{\left|\langle v, w\rangle\right|^2}{\langle w, w\rangle}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left|\langle v, w\rangle\right|^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle$$

"=":

$$0 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle$$
$$\Longleftrightarrow v - \lambda w = 0 \Longleftrightarrow v = \lambda w \Longleftrightarrow w = \lambda^{-1} v$$

□

$$\langle v, \lambda w\rangle = \bar{\lambda}\langle v, w\rangle$$

Deshalb:

Die Cauchy-Schwartsche Ungleichung ist ein sehr wichtiges Instrument der Analysis, z.B. für Approximationsfehler.

Nächstes Ziel: Vektoren $v \in V$ eine Länge zuzuordnen $\to$ Norm als Verallgemeinerung des Betrags

Für die reellen Zahlen: $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto |x|$ mit

- $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Definition 3.6: Norm

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|.\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

nennt man Norm auf V, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

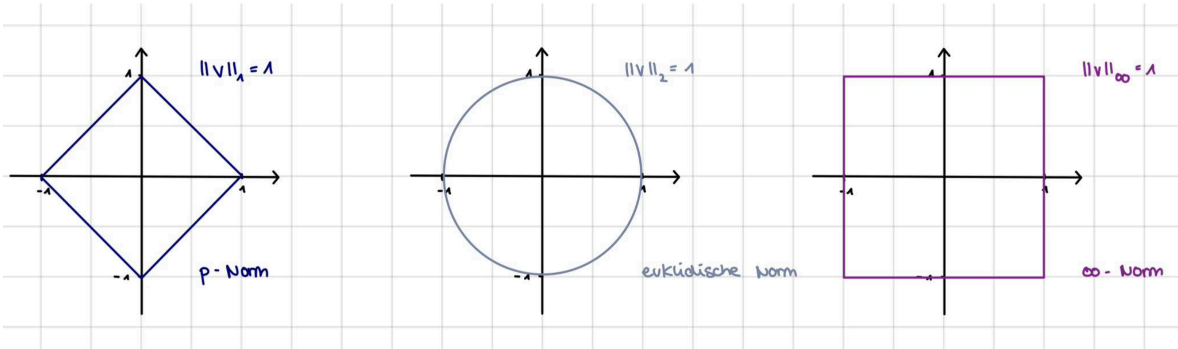
- sie ist homogen, d.h.
$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$
- sie ist positiv definit, d.h:
$$\|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0 \in V$$
- sie erfüllt die Dreiecksungleichung, d.h.
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Einen K-Vektorraum, auf dem eine Norm definierst ist, nennt man **normierten Raum**.

Beispiel 3.7: Man kann leicht nachrechnen:

- Ist $\langle ., . \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}^m$, dann definiert
$$\|v\| := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(v^T v\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{bzw.} \quad = \left(v^H v\right)^{\frac{1}{2}}$$
eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{C}^m$. Sie wird **euklidische Norm** genannt
- Für $V = K^{m,n}$ ist
$$\|A\|_F := \left(\operatorname{Spur}(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
eine Norm. Sie wird Frobeniusnorm genannt. Es gilt $\|A\|_F = \|A^H\|_F$ für alle $A \in K^{m,n}$.
- Auf dem Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen ist
$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
eine Norm. Sie wird L_2- oder L^2-Norm genannt.
- Sei $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$ und $V = K^n$. Dann definiert
$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
eine Norm im K^n. Sie wird p-Norm genannt. Für $n = 2$ erhält man die euklidische Norm. Für $p \to \infty$ erhält man die sogenannte ∞-Norm
$$\|v\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

Je nach Situation kann es einem erheblichen Unterschied bedeuten, welche Norm betrachtet wird. Für $V = \mathbb{R}^2$:



- Die p-Norm auf $K^{m,n}$ ist definiert durch

$$\|A\|_p := \sup_{0 \neq v \in \mathbb{K}^n} \frac{\|Av\|_p}{\|v\|_p}$$

$\|A\|_p$ ist die durch die p-Norm induzierte Matrix-Norm.

Man kann zeigen:

  - Supremum wird angenommen
  - $\|A\|_p = \max_{\substack{v \in K^n \\ \|v\|_p = 1}} \|Av\|_p$

Man kann zeigen:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(Spaltensummennorm)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{(Zeilensummennorm)}$$

Korollar 3.8: Sei V ein K-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Dann ist die Abbildung

$$\|.\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\| := (\langle v, v \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf V. Man nennt sie die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.

Beweis:

1. Homogenität: (Es gilt mit $\mathrm{Re}(z) \leq |z| \forall z \in \mathbb{C}$)^((*))

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda^2| \langle v, v \rangle$$

2. Positive Definitheit:

$$\begin{aligned}\langle v,v\rangle \geq 0 &\Longrightarrow \|v\| \geq 0\\ \langle v,v\rangle = 0 &\Longleftrightarrow v = 0,\\ &\Longleftrightarrow \|v\| = 0\end{aligned}$$

3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$\begin{aligned}&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle\\ &= \langle v,v\rangle + 2\ \mathrm{Re}(\langle v,w\rangle) + \langle w,w\rangle\\ &\overset{(*)}{\leq} \langle v,v\rangle + 2|\langle v,w\rangle| + \langle w,w\rangle\\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \langle v,v\rangle + 2\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle + \langle w,w\rangle\\ &= \|v\|^2 + 2\ \|v\|\ \|w\| + \|w\|^2\\ &= (\|v\| + \|w\|)^2\end{aligned}$$

$$\overset{\sqrt{}}{\Longrightarrow} \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

3.2. Winkel und Orthogonalität

In $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist der von zwei Vektoren eingeschlossene Winkel anschaulich klar. Übertragung auf allgemeine Vektorräume?

Zunächst: $V = \mathbb{R}^2$, Standardskalarprodukt $\langle v,w\rangle = w^T v$ und der damit induzierten Norm.

Aus Cauchy-Schwartz folgt:

$$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

D.h. dieser Quotient ist gleich $\cos(\theta)$ für ein $\theta \in [0,\pi]$. Diesen nennt man den zwischen v und w eingeschlossenen Winkel.

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \cos(\theta) \quad\rightarrow\quad \measuredangle(v,w) := \arccos\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

Passt das zur "üblichen" Winkeldefinition?

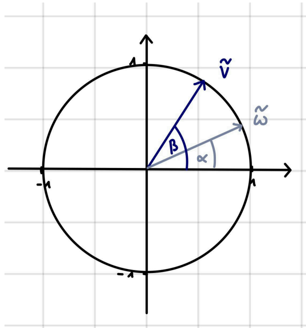
Aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts folgt

$$\measuredangle(v,w) = \measuredangle(w,v),\quad \measuredangle(\lambda v,w) = \measuredangle(v,w) = \measuredangle(v,\lambda w) \quad \forall\lambda > 0$$

Für $v \neq 0 \neq w$ und

$$\tilde{v} = \frac{1}{\|v\|} v \ (\Longrightarrow \|\tilde{v}\| = 1) \quad \text{und} \quad \tilde{w} = \frac{1}{\|w\|} \ (\Longrightarrow \|\tilde{w}\| = 1)$$

gilt $\measuredangle(v, w) = \measuredangle(\tilde{v}, \tilde{w})$. Im Einheitskreis erhält man



Also gibt es $\alpha, \beta \in [0, 2\pi$ mit

$$\tilde{v} = (\cos\beta, \sin\beta)^T \quad \tilde{w} = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$$

Gilt $\alpha, \beta \in [0, \pi$ folgt aus einem Additionstheorem für cos

$$\begin{aligned} \cos(\beta - \alpha) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle \cdot 1 \cdot 1 \\ \measuredangle(\tilde{v}, \tilde{w}) = \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Man kann den Winkel auch über die Gleichung

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\measuredangle(v, w))$$

definiere. Dann ist auch $v = 0$ und/oder $w = 0$ erlaubt. Stehen v und w senkrecht aufeinander ($v \perp w$)

$$\cos(\measuredangle(v, w)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle v, w \rangle = 0$$

Definition 3.9: orthogonal

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.

1. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißten **orthogonal** bezüglich des gegebenen Skalarproduktes $\langle ., . \rangle$, wenn gilt $\langle v, w \rangle = 0$.
2. Für dieses Skalarprodukt heißt eine Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ von V **Orthogonalbasis**, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i, j = 1, ..., n, \ \ i \neq j$$

Ist zusätzlich für die induzierte Norm

$$\langle v_i, v_i \rangle^{\frac{1}{2}} = \|v_i\| = 1 \quad i = 1, ..., n$$

so heißt $\{v_1, ..., v_n\}$ **Orthonormalbasis** von V. ($\Longleftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$)

Satz 3.10: Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\{w_1, ..., w_n\}$ von V.

Beweis: Per Induktion über n.

Induktionsanfang: $n = 1$

Sei $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$. Dann gilt für $w_1 = \|v_1\|^{-1} v_1$, $\|w_1\| = 1$ und $\mathrm{Span}\{v_1\} = \mathrm{Span}\{w_1\}$.
$\Longrightarrow \{w_1\}$ ONB

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

Die Aussage gelte für n. Sei $\dim(V) = n + 1$ und $\{v_1, ..., v_{n+1}\}$ eine Basis von V. Dann ist $U = \mathrm{Span}\{v_1, ..., v_n\}$ ein n-dimensionaler Unterraum von V. Nach Induktionsvorraussetzung existiert eine ONB $\{w_1, ..., w_n\}$ von U. D.h,

$$\mathrm{Span}\{w_1, ..., w_n\} = \mathrm{Span}\{v_1, ..., v_n\}$$

Für

$$\tilde{w}_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle v_{n+1}, w_k \rangle w_k$$

gilt wegen $v_{n+1} \notin U$, dass $\tilde{w}_{n+1} \neq 0$. Mit dem Austauschsatz von Steinitz (Satz 2.23, LinA I) folgt für $w_{n+1} = \|\tilde{w}_{n+1}\|^{-1} \tilde{w}_{n+1}$, dass

$$V = \mathrm{Span}\{v_1, ..., v_{n+1}\} = \mathrm{Span}\{w_1, ..., w_{n+1}\}$$

Für $j = 1, ..., n$ erhält man

$$\langle w_{n+1}, w_j \rangle = \langle \|\tilde{w}_{n+1}\| \ \tilde{w}_{n+1}, w_j \rangle)$$

$$\|\tilde{w}_{n+1}\|^{-1} \langle v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle v_{n+1}, w_k \rangle w_k, w_j \rangle$$

$$= \|\tilde{w}_{n+1}\|^{-1} \left(\langle v_{n+1}, w_j \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle v_{n+1}, w_k \rangle \langle w_k, w_j \rangle \right)$$

$$\|\tilde{w}_{n+1}\|^{-1} \left(\langle v_{n+1}, w_j \rangle - \langle v_{n+1}, w_j \rangle \right) = 0$$

$\Longrightarrow \{w_1, ..., w_{n+1}\}$ sind ONB.

□

Diese Orthogonalisierung ist als Gram-Schmidt-Verfahren bekannt. Jorgen Gram (dänishcer Mathematiker, 1850-1916), Erhard Schmidt (deutscher Mathematiker, 1876-1959). Das Verfahren wurde bereits vor Laplace und Cauchy verwendet.

Algorithmus 3.11: Gram-Schmidt-Verfahren

Gegeben: $\{v_1, ..., v_n\}$ als Basis eines euklidischen (unitären) Vektorraums V

1. Setze $w_1 := \|v_1\|^{-1} v_1$
2. Für $j = 2, ..., n$ setze

$$\tilde{w}_j := v_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_j, w_k \rangle w_k$$
$$w_j := \|\tilde{w}_j\|^{-1} \tilde{w}_j$$

Die ursprüngliche Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ hat dann die Darstellung

$$(v_1, ..., v_n) = (w_1, ..., w_k) \underbrace{\begin{pmatrix} \|v_1\| & \langle v_1, w_1 \rangle & \dots & \langle v_n, w_1 \rangle \\ 0 & \|\tilde{w}_2\| & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \langle v_n, w_{n-1} \rangle \\ 0 & 0 & & \|\tilde{w}_n\| \end{pmatrix}}_{=R}$$

Da alle Diagnonaleinträge von R ungleich 0 sind, ist R invertierbar. Sei nun U ein m-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt. Wir definieren eine Orthonormalbasis $\{w_1, .., w_m\}$ die Matrix

$$Q = (w_1, ..., w_m) \in K^{n,m}$$

Damit gilt im reellen Fall

$$\mathbb{R}^{m,m} \ni Q^T Q = \left(w_i^T w_j\right)_{i,j=1,...,m} = \left(\delta_{ij}\right)_{i,j=1,...,m} = I_m$$

und im komplexen Fall

$$\mathbb{C}^{m,m} \ni Q^H Q = \left(w_i^H w_j\right)_{i,j=1,...,m} = I_m$$

für $m = n$: $Q^T = Q^{-1}$ bzw. $Q^H = Q^{-1}$

Umgekehrt gilt: Ist für eine Matrix $Q \in K^{m,n}$ $Q^T Q = I_m$ bzw. $Q^H Q = I_m$, so sind die Spalten von Q eine ONB bzgl. des Standardskalarproduktes eines m-dimensionalen Unterraums von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$. Damit gilt:

Satz 3.12: Sind $v_1, ..., v_m \in K^n$ linear unabhängig, dann gibt es eine Matrix $Q \in K^{n,m}$ mit orthonormalen Spalten bezüglich des Standardskalarproduktes und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathrm{GL}_m(K)$ mit

$$K^{n,m} \ni (v_1, ..., v_m) = QR$$

als sogenannte QR-Zerlegung

$QR \to$ numerische lineare Algebra $\to$ kleinste Quadrate-Problem

Die Matrix Q ist längenerhaltend:

Lemma 3.13: Sei $Q \in K^{m,n}$ eine Matrix mit orthogonalen Spalten bzgl des Standardskalarproduktes. Dann gilt $\|v\|_2 = \|Qv\|_2$ für alle $v \in K^n$, wobei hier $\|.\|_2$ die euklidische Norm ist.

Beweis:

$$\|v\|_2^2 = \langle v, v\rangle = v^H v = v^H I v = v^H Q^H Q v = \|Qv\|_2^2$$

□

Definition 3.14: Orthogonale und unitäre Matrizen

- Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt **orthogonal**, wenn $Q^T Q = I_n$ gilt. Wir definieren
$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) := \{Q \in \mathbb{R}^{n,n} \mid Q \text{ orthogonal}\}$$
- Eine Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt **unitär**, wenn $Q^H Q = I_n$. Wir definieren
$$U_n(\mathbb{C}) := \{Q \in \mathbb{C}^{n,n} \mid Q \text{ unitär}\}$$

Für orthogonale bzw. unitäre Matrizen gilt

$$\mathbb{R}^{n,n} \ni Q^T Q = I_n \Longrightarrow Q^T = Q^{-1}, \mathbb{C}^{n,n} \ni Q^H Q = I_n \Longrightarrow Q^H = Q^{-1}$$

D.h.

Lemma 3.15: Die Mengen $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ und $U_n(\mathbb{C})$ bilden Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Beweis: Hier nur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Für $I_n \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt $I_n^T I_n = I_n \Longrightarrow I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

zu zeigen: Gruppeneigenschaften

1. Abgeschlossenheit bzgl. der inneren Verknüpfung

   Sind $Q_1, Q_2 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt:
$$\begin{aligned}(Q_1 Q_2)^T Q_1 Q_2 &= Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = I_n \\ &\Longrightarrow Q_1 Q_2 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\end{aligned}$$
2. Neutrales Element: I_n
3. Inverses Element: $Q^{-1} = Q^T$

Jetzt: Übertragung auf Endomorphismen, auch der geometrische Aspekt

Definition 3.16: orthogonale Abbildung

Eine Abbildung $f \in L(V, V)$ heißt **orthogonal** ($U = \mathbb{R}$) bzw. unitär ($U = \mathbb{C}$) falls gilt

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Definition 3.17:

Wir definieren für einene euklidischen Vektorraum V

$$\mathcal{O} := (V) := \{f \in L(V, V) \mid f \text{ orthogonal}\}$$

bzw. für einen unitären Vektorraum V

$$U(V) := \{f \in L(V, V) \mid f \text{ unitär}\}$$

Lemma 3.18: Sei $f \in L(V, V)$ orthogonal bzw. unitär. Dann gilt:

1. $\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$ für die durch das Skalarprodukt induzierte Norm
2. $v \perp w \Longrightarrow f(v) \perp f(w)$
3. f ist ein Isomorphismus und f^{-1} ist ebenfalls orthogonal bzw. unitär.
4. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so gilt $|\lambda| = 1$

Beweis: 1 und 2 folgt direkt aus der Definition.

3 Injektivitt folgt aus 1 + pos. Definitheit der Norm. Surjektivität folgt dann aus der Dimensionsformel. Aus der Surjektivität von f und F orthogonal bzw. unitär folgt diese Eigenschaft auch für f^{-1} 4 Ist λ ein Eigenwert von f mit dem Eigenvektor $v \neq 0$, so gilt

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\|$$
$$1 = |\lambda|$$

Aus der Definition des Skalaeproduktes und orthogonal bzw. unitär folgt

Korollar 3.19: Gilt für $f \in L(V, V)$, dass

$$\|f(v)\| = \|v\|$$

für die durch das Skalarprodukt induzierte Norm, so ist f orthogonal bzw. unitär.

Aus diesen Gründen werden orthogonale bzw. unitäre Abbildungen aus Isometrien genannt.

Satz 3.20: Sei V ein euklidischer (unitärer) Vektorraum mit einer Orthonormalbasis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ und $f \in L(V, V)$. Dann gilt:

$$f \in \mathcal{O}(V) \text{ bzw. } f \in U(V) \quad \Longleftrightarrow \quad A_f^{B,B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ bzw. } A_f^{B,B} \in U_n(\mathbb{C})$$

D.h. die Abbildungen

$$\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), f \mapsto A_f^{B,B} \quad \text{bzw.} \quad U(V) \to U_n(\mathbb{C}), f \mapsto A_f^{B,B}$$

Beweis: Hier nur für $K = \mathbb{R}$

"$\Longrightarrow$": f orthogonal

Dann gilt wegen der Orthonormalität von B für $A_f^{B,B} = (a_{ij})$, dass

$$\delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle \overset{3.16}{=} \langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \langle \sum_{l=1}^n a_{li} v_l, \sum_{k=1}^n a_{kj} v_k \rangle = \sum_{l=1}^n a_{li} a_{lj}$$

Also:

$$I_n = \left(A_f^{B,B}\right)^T A_f^{B,B} \Longrightarrow A_f^{B,B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

"$\Longleftarrow$": $A_f^{B,B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Für die zugehörige lineare Abbildung f gilt wegen

$$f(v_i) = \sum_{l=1}^n a_{li} v_l,$$

dass

$$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \langle \sum_{l=1}^n a_{li} v_l, \sum_{k=1}^n a_{kj} v_k \rangle = \sum_{l=1}^n a_{li} a_{lj} \overset{A_f^{B,B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{=} \delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$
$$\Longrightarrow f \in \mathcal{O}(V)$$

□

3.3. Selbstadjungierte Abbildungen

Was ist ein adjungierter Endomorphismus?

Lemma 3.21: Sei V ein euklidischer (unitärer) Vektorraum und $f \in L(V,V)$. Dann gibt es genau ein $g \in L(V,V)$ mit

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

Ist B eine Orthonormalbasis von V, so gilt

$$A_g^{B,B} = \left(A_f^{B,B}\right)^H$$

Beweis: Hier nur für $K = \mathbb{R}$. Da B orthonormal ist gilt für $v = \Phi_B(x)$ und $w = \Phi_B(y)$, dass

$$\langle v, w\rangle = \langle A_{\Phi_B}^{E,B}, A_{\Phi_B}^{E,B}\rangle = x^T \underbrace{\left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^T A_{\Phi_B}^{E,B}}_{I} y = x^T y = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall v, w \in V$$

Dann gilt für $A_f^{B,B}$

$$\langle A_f^{B,B} x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left(A_f^{B,B} x\right)^T y = x^T \left(A_f^{B,B}\right)^T y = \langle x, \left(A_f^{B,B}\right)^T y\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Damit ist wegen der Definition des Skalarproduktes eindeutig eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix $\left(A_f^{B,B}\right)^T$ gegeben. Diese bestimmt eindeutig den gesuchten Endomorphismus g.

□

Definition 3.22: adjungierter Endorphismus

Die in Lemma 3.21 eindeutig definierte Abbildung $g \in L(V,V)$ nennt man den zu $f \in L(V,V)$ **adjungierten Endomorphismus**. Er wird mit f^{ad} bezeichnet.

Definition 3.23: selbstadjungiert

Sei V ein euklidischer (unitärer) Vektorraum und $f \in L(V,V)$. Der Enomorphismus f heißt **selbstadjungiert**, wenn

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

gilt. D.h. $f^{\mathrm{ad}} = f$.

Bemerkungen: Es folgt unmittelbar

- Ist $f \in L(V,V)$ und B eine ONB, so gilt

  $$f \text{ selbstadjungiert} \iff A_f^{B,B} \text{ ist symmetrisch bzw. hermitesch, d.h. } A = A^H$$

- Ist f orthogonal bzw. unitär, so ist $f^{\mathrm{ad}} = f^{-1}$, denn für $u, v \in V$ mit $w = f(u)$ d.h. $u = f^{-1}(w)$ gilt

  $$\langle f(v), w\rangle = \langle f(v), f(u)\rangle = \langle v, u\rangle = \langle v, f^{-1}(w)\rangle$$

Lemma 3.24: Sei V ein euklidischer (unitärer) Vektorraum und $f \in L(V, V)$ selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte von f reell und das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren.

Beweis: Sei zunächst $K = \mathbb{C}$. Sei lambda ein Eigenwert von f mit zugehörigen Eigenvektor $v \neq 0$. Dann gilt

$$\lambda \underbrace{\langle v, v \rangle}_{>0} = \langle \lambda v, v \rangle = \langle f(v), v \rangle = \langle v, f(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$\Longrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$

Fundamentalsatz der Algebra $\Longrightarrow p_f(.) = p_A(.)$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

Sei nun $K = \mathbb{R}$. B ONB $\Longrightarrow A := A_f^{B,B} = \left(A_f^{B,B}\right)^T$ ist eine spezielle komplexe Matrix $\Longrightarrow$ wie oben folgt für $p_A(.)$ betrachtet über $\mathbb{C}$, dass $p_A(.)$ in Linearfaktoren zerfällt

$$(\lambda - \lambda_i) \qquad (\lambda_i \text{ ist EW} \in \mathbb{R})$$

$\Longrightarrow p_A(.)$ zerfällt auch über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

□

Satz 3.25: Sei V ein euklidischer (unitärer) Vektorraum und $f \in L(V, V)$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V die aus Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten von f besteht.

Beweis: Sei $n = \dim(V) < \infty$.

Für $n = 1$: klar ✓

$n - 1 \to n$:

Wegen Lemma 3.24 gilt

$$p_f(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Zu λ_1 existiert ein Eigenvektor v_1 mit $\|v_1\| = 1$. Dann gilt für

$$u \in U := \{u \in V \mid \langle v_1, u \rangle = 0\},$$

dass

$$\langle v_1, f(u) \rangle = \langle f(v_1), u \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle v_1, u \rangle}_{=0} = 0$$

d.h. $f(U) \subseteq U$. Also ist U invariant unter f. Die Einschränkung $f|_U : U \to U$ ist selbstadjungiert mit

$$p_{f|_U} = \pm(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)$$

Nach Induktionsvorraussetzung ex. ONB für U. Die Vereinigung dieses ONB mit v_1 ist ONB für V.

□

Für die Matrixform erhalten wir analog:

Lemma 3.26: Sei $A \in K^{n,n}$ symmetrisch (hermitesch). Dann gibt es ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ so dass gilt

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis: Über Darstellungsmatrix eines selbstadjungierten Endomorphismus.

□

Definition 3.27: positiv definite Matrix

Eine symmetrische (hermitesche) Matrix $A \in K^{n,n}$ heißt **positiv definit**, wenn

$$v^T A v > 0 \ \text{ bzw. } v^H A v > 0 \qquad \forall v \in V \setminus \{0\}$$

Lemma 3.26 $\Longrightarrow$ A symmetrisch (hermitesch) $\Longrightarrow$ A diagonalisierbar

Des Weiteren gilt:

Satz 3.28: Sei $A \in K^{n,n}$ symmetrisch (hermitesch). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist positiv definit
2. Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ von A sind positiv.

Beweis: Vorlesung Donnerstag

□

Zur Berechnung einer solchen ONB:

Algorithmus 3.29: Gegeben: $A \in K^{n,n}$ bzw. $f \in L(V, V)$ mit $A_f^{B,B} = A$.

- Bestimme

$$p_A(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

  mit paarweise verschiedenen λ_i, $1 \leq i \leq m$. Ist dies nicht möglich: STOP
- Für jeden Eigenwert λ_i der algebraischen Vielfachheit k_i bestimme eine Basis des dazugehörigen Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$. Stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein: STOP

- Orthonormalisiere die Vereinigung der jeweiligen Basen mit dem Gram-Schmidt-Verfahren.