Vorlesungsskript

LinA II* SoSe 24

Inhaltsverzeichnis

Definitionen

1 .

Wiederholung:

K sei ein beliebiger Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum,

$$L(V,V) = \{f : V \to V \mid f \text{ lin. Abbildung}\}$$

$f \in L(V,V)$ heißt Endomorphismus. Ist $f \in L(V,V)$, so läßt sich f bezüglich einer Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von V eindeutig durch eine Matrix

$$A_f^{B,B} = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n} \in K^{n,n}$$

Es gilt

$$f\left(v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \qquad 1 \le j \le n$$

Abbildung

$$F : L(V,V) \to K^{n,n}$$

ist ein Isomorphismus.

Basiswechsel? Basen B, C von V

Bezüglich Basis B Bezüglich Basis C

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[rr, "?"] \arrow[dr, "\Phi_B"'] & & K^n \arrow[dl, "\Phi_C"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow ? = \Phi_{BC} = \Phi_C^{-1} \circ \Phi_B$$

(siehe Lem. 5.27, LinA I*)

Eine zentrale Frage: Sei $f \in L(V,V)$, existiert eine Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine möglichst einfache Form besitzt?

z.B. Diagonalmatrix:

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir werden:

- Endomorphismen charakterisieren, die sich durch eine Diagonalmatrix beschreiben lassen.

  Wenn ja: Dann gilt $f\left(v_j\right) = \lambda_j v_j$

  $\Longrightarrow f$ ist eine Streckung von v_j um den Faktor λ_j.
- Die Jordan-Normalform herleiten.

1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte charakterisieren zentrale Eigenschaften linearer Abbildungen. Z.B.

- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Eigenschaften von physikalischen Systemen

  $\to$ gewöhnliche Differentialgleichungen

  $\to$ Eigenschwingungen / Resonanzkatastrophe

  Zerstörung einer Brücke über dem Fluß Maine / Milleanium-Bridge London

1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 1.1: Eigenwert und Eigenvektor (Endomorphismus)
Sei V ein K-Vektorraum. Ein Vektor $v \in V, v \neq 0_V$, heißt **Eigenvektor** von $f \in L(V, V)$, falls $\lambda \in K$ mit

$$f(v) = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der **Eigenwert** zum Eigenvektor $v \in V$.

Definition 1.2: Eigenwert und Eigenvektor (Matrix)
Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Ein Vektor $v \in K^n$, $v \neq 0_{K^n}$, heißt Eigenvektor von $A \in K^{n,n}$, falls $\lambda \in K$ mit

$$Av = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der Eigenwert zum Eigenvektor $v \in V$.

Bemerkungen:

- In Def 1.1 kann $\dim(V) = \infty$ sein. Dies ist für viele Definitionen/Aussagen in denen wir Endomorphismen betrachten, der Fall.
- Für $\dim(V) < \infty$ kann man jedes $f \in L(V, V)$ eindeutig mit einer Matrix A identifizieren. Dann: Def 1.2 ist Spezialfall von Def 1.1.

- **Achtung:** $0 \in K$ kann ein Eigenwert sein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Der Nullvektor $0 \in V$ ist **nie** ein Eigenvektor.

  Für $\dim(V) = 0$ besitzt f keinen Eigenvektor für $f \in L(V, V)$.
- Ist v Eigenvektor zum Eigenwert λ, so ist auch αv für jedes $\alpha \in K \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Zentrale Frage dieses Kapitels:

Existens von Eigenwerten? Wenn sie existieren: Weitere Eigenschaften?

Beispiel 1.3: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und V der unendlichdimensionale Vektorraum der auf I beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Ein Endomorphismus $f \in L(V, V)$ ist gegeben durch

$$f(\varphi) = \varphi' \qquad \forall \varphi \in V$$

Die Abbildung f hat jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ als Eigenwert, da für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Funktion

$$\varphi(x) := c \cdot e^{\lambda x} \; \neq \; 0_V \qquad \forall x \in I$$

gilt

$$f(\varphi(x)) = f\left(c \cdot e^{\lambda x}\right) = \lambda\left(c e^{\lambda x}\right) = \lambda \varphi(x)$$

Hier: $\varphi'(x) = f(\varphi)$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Beispiel 1.4: Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Sei x ein Eigenvektor, dann gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow x_2 = \lambda x_1 \;\text{ und }\; -x_1 = \lambda x_2$$

O.B.d.A: $x_2 \neq 0$

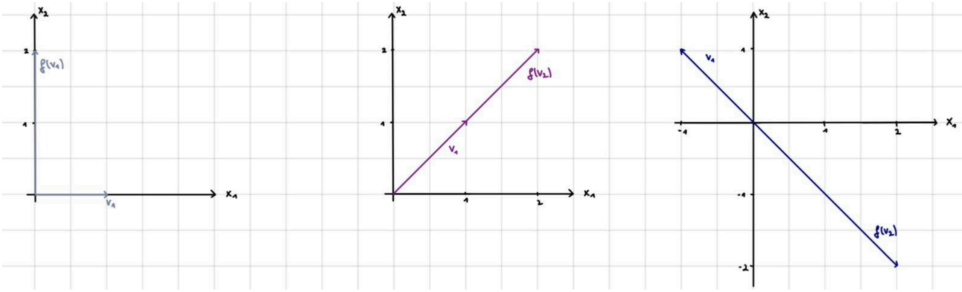
$$\Longrightarrow x_2 = \lambda(-\lambda x_2) = -\lambda^2 x_2 \Longrightarrow -\lambda^2 = 1,\; \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda^2 \geq 0 \Longrightarrow -\lambda^2 \leq 0 \;\lightning$$

D.h. f besitzt keinen Eigenwert/-vektor. Für $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ändert sich dies! $\Longrightarrow$ Die Wahl von K entscheidet!

Beispiel 1.5: Wieder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, diesmal

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für $v_1 = \binom{1}{0}, v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = (-1, 1)$ dass $f(v_1) = \binom{0}{2}, f(v_2) = \binom{2}{2} = 2 \cdot v_2$ und $f(v_3) = \binom{2}{-2} = (-2) \cdot v_3$.



Beobachtung: $\dim(V) = 2$

zwei Eigenwerte: $2, -2$, es existieren keine Weiteren,

zwei Eigenvektoren: $v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = \binom{-1}{1}$, sind linear unabhängig

Lemma 1.6: Es sei $f \in L(V, V)$ ein Endomorphismus. Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von f sind linear unabhängig.

Beweis: Es seien $v_1, ..., v_m$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$ von f. Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: $m = 1$, $\lambda_1, v_1 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ lin. unabh.

Induktionsschritt: $m - 1 \to m$

Induktionsvorraussetzung: Behauptung gelte für $m - 1$

Betrachte

$$\begin{aligned} & \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0 \ (*) \quad \alpha_m \in K \\ & \overset{\text{EV, f()}}{\Longrightarrow} \ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_m \lambda_m v_m = 0 \\ & \overset{(*) \cdot \lambda_m}{\Longrightarrow} \ \lambda_m \alpha_a v_1 + \lambda_m \alpha_2 v_2 + ... + \lambda_m \alpha_m v_m = 0 \end{aligned}$$

Wir bilden die Differenz aus Zeile 1 und 2

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_1 v_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_2 v_2 + ... + \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_{m-1} v_{m-1} = 0$$

$v_1, ..., v_{m-1}$ lin. unabh. $\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{m-1} = 0$ Einsetzen in (*) liefert

$$\alpha_m \underbrace{v_m}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$$

$\Longrightarrow v_1, ..., v_m$ lin unabh.

□

Folgerung: Es gibt höchstens $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte für $n = \dim(V) < \infty$.

Definition 1.7: Eigenraum

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$, so heißt

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

der **Eigenraum** von f bezüglich λ.

Es gilt:

- $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \subseteq V$ ist ein Untervektorraum
- λ ist Eigenwert von $f \Longleftrightarrow \mathrm{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$
- $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.
- $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \ker(f - \lambda\ \mathrm{Id})$
- $\dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) = \dim(V) - \mathrm{rg}(f - \lambda\ \mathrm{Id})$
- Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschiedene Eigenwerte, so ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$

Die letzte Aussage kann verallgemeinert werden zu:

Lemma 1.8: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m, m \leq n$, paarweise verschiedene Eigenwerte von f, so gilt

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \mathrm{Eig}(f, \lambda_j) = \{0\} \qquad \forall i = 1, ..., m$$

Beweis: Summe von Vektorräumen, vgl. Def 3.32 LinA I.

Sei $i \in \{1, ..., m\}$ fest gewählt.

$$v \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \mathrm{Eig}(f, \lambda_j)$$

Also ist

$$v = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j \quad \text{für } v_j \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_j) \quad \text{für} \quad j \neq i$$

$\Longrightarrow -v + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j = 0$ Aus Lemma 1.6 folgt damit $v = 0$.

□

Über die Identifikation von Endomorphismen und Matrizen für $\dim(V) < \infty$ erhält man:

Korollar 1.9: Für ein $n \in \mathbb{N}$ und einem Körper K sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt für jedes $\lambda \in K$, dass

$$\dim(\operatorname{Eig}(A, \lambda)) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$$

Insbesondere ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, wenn $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$ ist.

Definition 1.10: Geometrische Vielfachheit

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so heißt

$$g(f, \lambda) := \dim(\operatorname{Eig}(f, \lambda)) \qquad (> 0)$$

die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ.

1.2. Das charakteristische Polynom

Wir bestimmt man Eigenwerte?

Lemma 1.11: Seien $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann ist

$$\det(A - \lambda I_n)$$

ein Polynom n-ten Grades in λ.

Beweis: Mit der Leibniz-Formel folgt,

$$\begin{aligned}\det(\underbrace{A - \lambda I_n}_{\tilde{a}_{ij}}) &= \sum_{\sigma \in S_1} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \tilde{a}_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{n\sigma(n)} \\ &= \underbrace{\underbrace{(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)}_{\sigma = \operatorname{Id}}}_{\in \mathcal{P}_n \text{ in } \lambda} + \underbrace{\underbrace{S}_{\sigma \neq \operatorname{Id}}}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + \ldots + a_{nn}) + \underbrace{S_1}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}$$

Insgesamt: Es existieren Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in K$ mit

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_n) &= a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \\ a_n &= (-1)^n \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1} (a_{11} + \ldots + a_{nn})\end{aligned}$$

man kann zeigen: $a_0 = \det(A)$

□

Man nennt $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ auch die **Spur** von A.

Definition 1.12: Charakteristisches Polynom

Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann heißt das Polynom n-ten Grades

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

das charakteristische Polynom zu A.

Lemma 1.13: Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Der Skalar λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn

$$P_A(\lambda) = 0$$

gilt.

Beweis: Die Gleichung

$$Av = \lambda v \Longleftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0$$

hat genau eine Lösung $v \in V, v \neq 0$, wenn $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$, vgl. Satz 6.3 aus LinA I. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0, \text{vlg. D10 aus LinA I}$$

□

Beispiel 1.14: Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus liefert

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = &\begin{pmatrix} 3-\lambda & 8 & 16 \\ 0 & 7-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-35 - 7\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 32) \\ &= (3-\lambda)[(7-\lambda)(-5-\lambda) - 8(-4)] - 8(0-0) + 16(0-0) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Eigenwerte sind $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

Zugehörige Eigenvektoren?

$\lambda = -1$:

$$Av = -v \iff (A + I_3)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen: $\implies v_2 = -v_3, v_1 = -2v_3$

Damit ist z.B.: $w_1 = (2, 1, -1)^\top$ Eigenvektor.

$\lambda = 3$:

$$(A - 3I_3)v = 0 \iff$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^3 \iff v_2 + 2v_3 = 0$$

Damit sind z.B.: $w_2 = (1, 2, -1)^\top, w_3 = (-1, 2, -1)$ Eigenvektoren.

$\lambda = -1$: einfache Nullstelle und $\dim(\operatorname{Span}(w_1)) = 1$ passt zu $\operatorname{rg}(A - (-1)I_n) = 2$ und $\dim(\operatorname{Eig}(A_1 - 1)) = 3 - 2 = 1$.

$\lambda = -3$: doppelte Nullstelle und $\dim(\operatorname{Span}(w_2, w_3)) = 2$ passt zu $\operatorname{rg}(A - 3I_n) = 1$ und $\dim(\operatorname{Eig}(A, 3)) = 3 - 1 = 2$

Lemma 1.15: Sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt

$$p_A(.) = p_{A^\top}(.)$$

D.h. eine Matrix und ihre Transponierte haben die gleichen Eigenwerte.

Beweis:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \overset{\text{D12}}{=} \det\left((A - \lambda I_n)^\top\right) = \det\left(A^T - \lambda I_n\right) = p_{A^\top}(\lambda)$$

□

Achtung: Die Eigenwerte bleiben gleich, aber nicht die Eigenvektoren.

Beispiel 1.16: Für die Matrix A aus Bsp. 1.14 gilt

$$A^\top = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix} \implies \det\left(A^\top - \lambda I_n\right) = (3 - \lambda)[(7 - \lambda)(-5 - \lambda) + 4 \cdot 8]$$
$$= -(\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

Aber

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 27 \\ 45 \end{pmatrix} \neq (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Man kann ausrechnen:

$$\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ EV zu EW } -1, \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{w}_3 \text{ EV zu EW } 3$$

Übertragung auf Endomorphismen?

$p_f(\lambda)$ $f \in L(V, V)$, B Basis $\Rightarrow \exists! A_f^{B,B}$, C Basis $\Longrightarrow \exists! A_f^{C,C}$

$$p_{A_f^{B,B}}(\lambda) \stackrel{?}{=} p_{A_f^{C,C}}(\lambda)$$

Definition 1.17: ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n,n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass $A = TBT^{-1}$ gilt.

Man kann leicht beweisen, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Matrizen ist.

Mit $\det(A^{-1}) \stackrel{\text{D11}}{=} (\det(A))^{-1}$ folgta für zwei ähnliche Matrizen A und B, dass

$$\det(A) = \det(TBT^{-1}) = \det(T)\det(B)\det(T^{-1}) = \det(B)$$

Beispiel 1.18: Sei $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, d.h. $V = \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten für den $\mathbb{R}^3$ die Basen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für darstellende Matrix von f bezüglich der Standardmatrix E erhalten wir aus Satz 5.18, LinA I,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} e_i \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

dass

$$A_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige kommutative Diagramm ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & V = \mathbb{R}^3 \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id} = \Phi_E"] \arrow[r, "A_f^{E,E}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\Phi_E = \mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}$$

Für die Basis B erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-7)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-8)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -7 & -5 & -8 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Herleitung bezüglich Matrizen?

Koordinatenabbildung Φ_B?

Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ + Standardbasis E in den $V(= \mathbb{R}^3)$ + Basis B.

$$\Phi_B = (e_i) = v_i \quad \text{für} \quad B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\Longrightarrow A_{\Phi_B}^{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt insgesamt:

$$A_f^{B,B} = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B} = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A_f^{E,E} \underbrace{A_{\Phi_B}^{E,B}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

$$\Longrightarrow A_f^{B,B} \text{ und}$$

A_f^(E,E)

sind ähnlich

Für die Basis C erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

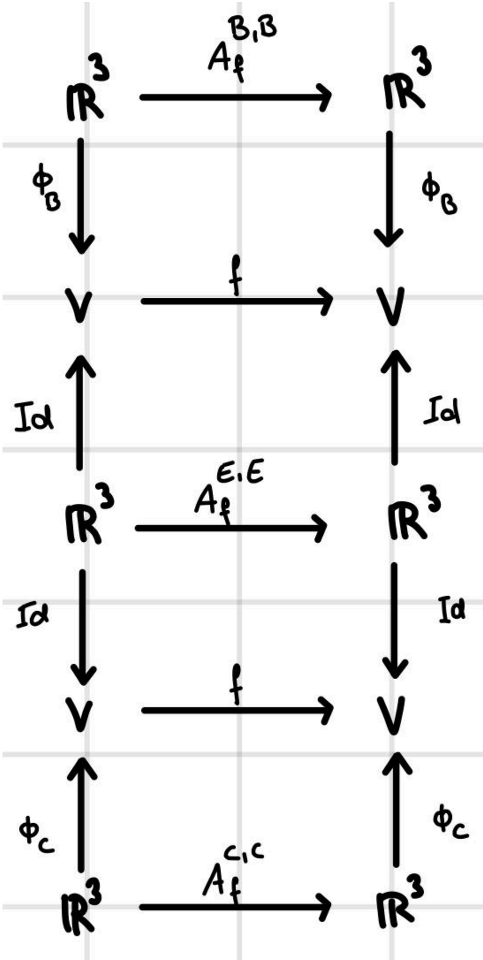
$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-7\\-5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Als Darstellungsmatrix erhält man

$$A_f^{C,C} = \begin{pmatrix}3 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

Als Matrizenmultiplikation



Darstellung von Φ_C? $\Phi_C(e_i) = w_i \quad$ für $\quad C = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$A_{\Phi_C}^{E,C} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A_f^{C,C} = \left(A_{\Phi_C}^{E,C}\right)^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A_{\Phi_C}^{E,C} = \left(A_{\Phi_C}^{E}, C\right)^{-1} A_f^{E,E} A_{\Phi_C}^{E,C}$$

Also auch: $A_f^{C,C}$ ist ähnlich zu $A_f^{E,E}$.

Alternativ:

$$\begin{aligned} A_f^{C,C} &= \left(A_{\Phi_C}^{E,C}\right)^{-1} I_n I_n^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B} A_f^{B,B} \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} I_n A_{\Phi_C}^{E,C} \\ &= \underbrace{\left(A_{\Phi_C}^{E,C}\right)^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} A_f^{B,B} \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A_{\Phi_C}^{E,C} \end{aligned}$$

Jetzt allgemein: $f \in L(V, V)$, $\dim(V) < \infty$, B, C seien Basen von $V \Longrightarrow$

$$A := A_f^{B,B} \qquad \tilde{A} := A_f^{C,C}$$

und es existiert $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ als Basistransformationsmatrix, so dass

$$\tilde{A} = TAT^{-1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det\left(\tilde{A} - \lambda I_n\right) = \det(TAT^{-1} - \lambda TT^{-1}) \\ &= \det(T(A - \lambda I_n)T^{-1}) \\ &= \det(T)\det(A - \lambda I_n)\det(T^{-1}) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

D.h. für einen Endomorphismus ist das charakteristische Polynom der zugehörigen Darstellungsmatrix unabhängig von der Wahl der Basis!

Damit ist es sinnvoll, für $f \in L(V, V)$, $\dim(V) < \infty$,

$$p_f(.) := p_A(.)$$

für A als Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ für eine Basis B.

Lemma 1.19: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
2. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert der Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ für eine gewählte B von V.

Des weiteren gilt auch. Für zwei ähnliche A und B gilt $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

$$A, B \text{ ähnlich} \Longrightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 = p_B(\lambda), \text{aber für jedes } T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ gilt}$$

$$TBT^{-1} = TT^{-1} = I \neq A \text{ also } A, B \text{ nicht ähnlich}$$

Weitere Beobachtung: Aus Lemma 1.13 und Lemma 1.19 folgt, dass die Eigenwerte von $f \in L(V,V)$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix $A_f^{B,B}$ für eine Basis B ist. Dies gilt **nicht** i.a. für Darstellungsmatrizen $A_f^{B,C}$ für $B \neq C$.

Definition 1.20: Algebraische Vielfachheit

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Ist $f \in L(V,V)$ und $\tilde{\lambda}$ ist Eigenwert von f hat das charakteristische Polynom $p_f(\lambda)$ die Form

$$p_f(\lambda) = \left(\lambda - \tilde{\lambda}\right)^d \cdot \tilde{p}(\lambda)$$

für ein $\tilde{p}(.) \in \mathbb{K}[\lambda]$ mit $\tilde{p}\left(\tilde{\lambda}\right) \neq 0$, so nennt man d die **algebraische Vielfachheit** von $\tilde{\lambda}$ und bezeichnet sie $a\left(f, \tilde{\lambda}\right)$.

Lemma 1.21: Seien V ein K-Vektorraum, $\dim(V) = n < \infty$, und $f \in L(V,V)$. Für Eigenwert $\tilde{\lambda}$ von f gilt

$$g\left(f, \tilde{\lambda}\right) \leq a\left(f, \tilde{\lambda}\right)$$

Beweis: Ist $\tilde{\lambda}$ EW von f mit der geometrischen Vielfachheit $m := g\left(f, \tilde{\lambda}\right)$, so gibt es nach Def. 1.10 zu $\tilde{\lambda}$ m linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, ..., v_m \in V$.

Gilt $m = n = \dim(V)$ sind $\{v_1, ..., v_m\}$ schon Basis von V.

Gilt $m < n$, so folgt aus dem Basisergänzungssatz (Satz 3.21, LinA I), dass man $\{v_1, ..., v_m\}$ zu einer Basis $\{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\} =: B$ ergänzen. Wegen $f(v_j) = \tilde{\lambda} v_j, 1 \leq j \leq m$, gilt

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} I_n & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

für zwei Matrizen $A_1 \in K^{m,n-m}$, $A_2 \in K^{n-m,n-m}$.

Mit D9 aus LinA I folgt

$$p_f(\lambda) = \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)^m \cdot \det\left(A_2 - \lambda I_{n-m,n-m}\right)$$

$\Longrightarrow$ EW $\tilde{\lambda}$ ist mindestens m-fache Nullstelle von $p_f(\lambda)$. Für $m = n \Longrightarrow A_f^{B,B} = \tilde{\lambda} I_n \Longrightarrow p_f(\lambda) = \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)^m$

$\square$

2. Diagonalisierbarkeit und Normalform

2.1. Diagonalisierbarkeit

Definition 2.1: Diagonalisierbar

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Ein $f \in L(V,V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass $A_f^{B,B}$ eine Diagonalmatrix ist. D.h. es existieren $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

Entsprechend nennen wir eine Matrix $A \in K^{n,n}$ **diagonalisierbar**, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in K^{n,n}$ gibt mit

$$A = TDT^{-1}$$

D.h. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Satz 2.2: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V,V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist diagonalisierbar
2. Es gbit eine Basis B von V bestehend aus Eigenvektoren von f.
3. Das charakteristische Polynom $p_f(.)$ zerfällt in n Linearfaktoren über K, d.h.

$$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ für f und für jeden Eigenwert $\tilde{\lambda}$ gilt $a\left(f, \tilde{\lambda}\right) = g\left(f, \tilde{\lambda}\right)$.

Beweis:

"1 $\Longrightarrow$ 2": f diagonalisierbar $\Longrightarrow \exists\{v_1, ..., v_n\} = B$ Basis von $V, \lambda_1, .., \lambda_n \in K$:

$$\tilde{A} := A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$\Longrightarrow f(v_j) = \lambda_i v_i, 1 \leq i \leq n, v_i \neq 0. \Longrightarrow$ Damit sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ Eigenwerte von f mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$. $\Longrightarrow 2.$

"$2 \Longrightarrow 1$": Ist $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren, so gibt es zugehörige Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ mit $f(v_j) = \lambda_j v_j, 1 \leq j \leq n \Longrightarrow$

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

"$2 \Longrightarrow 3$": Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ seien die zugehörigen Eigenwerte $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= p_{A_f^{B,B}}(\lambda) = \det\left(A_f^{B,B} - \lambda I_n\right) \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren. Verschiedene Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k, k \leq n$. Der Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$ besitzt die algebraische Vielfachheit $m_j := a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$ genau dann, wenn er m_j-mal auf den Diagnolen von $A_f^{B,B}$ steht. Dies ist genau dann der Fall, wenn m_j Eigenvektoren zu $\tilde{\lambda}_j$ in B enthalten sind. Diese sind linear unabhängig $\Longrightarrow$

1. $\dim\left(\mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)\right) = g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \geq m_j = a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$
2. Lemma 1.21: $g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \leq a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$

$$1 \land 2 \Longrightarrow g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$$

"$3 \Longrightarrow 2$": Seien $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k, k \leq n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Wir wissen: $\mathcal{P}_n \in p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren, $a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right), 1 \leq j \leq n$.

$$\dim(V) = n = \sum_{j=1}^{k} a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \dim\left(\mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)\right)$$

Es gilt (Lemma 1.8):

$$\mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \cap \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_i\right) = 0 \quad \forall j = 1, ..., k$$

Dann folgt (Lemma 3.31, (2), Lemma 3.35, Satz 3.14) (direkte Summe, $U \subset V$ UVR $\Longrightarrow \dim(U) \leq \dim(V), U = V \dim(U) = \dim(V)$, Basis $\Longleftrightarrow$ eindeutige Darstelltung), dass die zu $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_n$ linear unabhängigen Eigenvektoren, die jeweils eine Basis von $\mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$, $1 \leq j \leq k$, eine Basis von V bilden.

□

In Verbindung mit Lemma 1.6 folgt unmittelbar:

Korollar 2.3: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten, dann ist f diagonalisierbar.

Bemerkung: Das Kriterium der n paarweise verschiedenen Eigenwerte ist nicht notwendig z.B. $V = K^n$, $B = E$ Standardbasis

$$f : \mathrm{Id} : K^n \to K^n, \Longrightarrow A_f^{E,E} = I_n \Longrightarrow 1n\text{-facher Eigenwert}$$

Beispiel 2.4: Fortsetzung von Bsp. 1.14

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \mathrm{EW:} -1, 3$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } -1,\ w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } 3$$

$\Longrightarrow \exists$ Basis von Eigenvektoren $\overset{\text{Satz 2.2}}{\Longrightarrow}$ A ist diagonalisierbar

$$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$
$$a(f, -1) = 1 = g(f, -1)$$
$$a(f, 3) = 2 = g(f, 3)$$

$T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so, dass $T^{-1}AT = D$?

Die zu $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ gehörende Koordinatentransformation Φ_B ist gegeben durch

$$A_{\Phi_B}^{E,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt: Für $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit

$$A_f^{E,E} = A \qquad A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Mit Basiswechsel von A zu D

$$D = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A \underbrace{A_{\Phi_B}^{E,B}}_{=T}$$