Vorlesungsskript

LinA I* WiSe 23/24

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation und mathematische Grundlagen

Was ist lineare Algebra bzw. analytische Geometrie?

- analytische Geometrie:
  Beschreibung von geometrischen Fragen mit Hilfe von Gleichungen, Geraden, Ebenen sowie die Lösungen von Gleichungen als geometrische Form
- lineare Algebra:
  die Wissenschaft der linearen Gleichungssysteme bzw der Vektorräume und der linearen Abbildungen zwischen ihnen

Wozu braucht man das?

- mathematische Grundlage für viele mathematische Forschung z.B. in der algebraischen Geometrie, Numerik, Optimierung
- viele Anwendungen z.B. Page-Rank-Algorithmus, lineare Regression
- oder Optimierung:
  linear: Beschreibung zulässiger Punkte als Lösung von (Un)-Gleichungen
  nichtlinear: notwendige Optimalitätsbedingungen

1.1. Mengen

Der Mengenbegriff wurde von Georg Cantor (dt. Mathematiker, 1845-1918) eingeführt.

Definition 1.1: Mengen

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten x unsere Anschauung order unseres Denkens, welche **Elemente** von M genannt werden, zu einem Ganzen.

Bemerkungen:

Für jedes Objekt x kann man eindeutig feststellen, ob es zu einer Menge M gehört oder nicht.

$$x \in M \to x \text{ ist Element von } M$$
$$x \notin M \to x \text{ ist nicht Element von } M$$

Beispiel 1.2: Beispiel für Mengen

- {rot, gelb, grün}
- {1, 2, 3, 4}
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Z} : \{..., -1, 0, 1, ...\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}\right\}$
- $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl}\}$
- $\emptyset$ bzw. $\{\} \mathrel{\widehat{=}}$ leere Menge

Definition 1.3: Teilmenge

Seien M, N Mengen.

1. M heißt **Teilmenge** von N, wenn jedes Element von M auch Element von N ist.
   Notation: $M \subseteq N$
2. M und N heißen gleich, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.
   Notation $M = N$
   Falls das nicht gilt, schreiben wir $M \neq N$

M heißt **echte Teilmenge** von N, wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gilt.
Notation: $M \subset N$

Nutzt man die Aussagenlogik, kann man diese Definitionen Umformulieren zu:

- $M \subseteq N \iff (\forall x : x \in M \implies x \in N)$
- $M = N \iff (M \subseteq N \land N \subseteq M)$
- $M \subset N \iff (M \subseteq N \land M \neq N)$

Kommentare:

- $\iff$ heißt “genau dann, wenn”
- $\forall$ heißt “für alle”
- $\land$ heißt “und”
- : heißt “mit der Eigenschaft”