Vorlesungsskript

LinA II* SoSe 24

LinA II* SoSe 24 Konrad Rösler

Inhaltsverzeichnis

1. Eigenwerte und Eigenvektoren	3
1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften	
1.2. Das charakteristische Polynom	
2. Diagonalisierbarkeit und Normalform	
2.1. Diagonalisierbarkeit	16
2.2. Dualräume	22
2.3. Zyklische f -invariant Unterräume	26
2.4. Die Iordan-Normalform	

Definitionen

1.

1.1:	Eigenwert und Eigenvektor
1.2:	Eigenwert und Eigenvektor
1.7:	Eigenraum
1.10:	Geometrische Vielfachheit
1.12:	Charakteristisches Polynom
1.17:	ähnliche Matrizen
1.20:	Algebraische Vielfachheit

2 .

Diagonalisierbar
Jordan
Linearform, Dualraum
duale Abbildung
nilpotent vom Grad
equation
Bilinearform
Grad von
Krylov

Wiederholung:

K sei ein beliebiger Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum,

$$L(V, V) = \{ f : V \to V \mid f \text{ lin. Abbildung} \}$$

 $f\in L(V,V)$ heißt Endomorphismus. Ist $f\in L(V,V)$, so läßt sich f bezüglich einer Basis $B=\{v_1,...,v_n\}$ von V eindeutig durch eine Matrix

$$A_f^{B,B} = \left(a_{ij}\right)_{1 < i,j < n} \in K^{n,n}$$

Es gilt

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \qquad 1 \le j \le n$$

Abbildung

$$F:L(V,V)\to K^{n,n}$$

ist ein Isomorphismus.

Basiswechsel? Basen B, C von V



(siehe Lem. 5.27, LinA I*)

Eine zentrale Frage: Sei $f\in L(V,V)$, existiert eine Basis $B=\{v_1,...,v_n\}$ von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine möglichst einfache Form besitzt?

z.B. Diagonalmatrix:

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir werden:

• Endomorphismen charakterisieren, die sich durch eine Diagonalmatrix beschreiben lassen.

Wenn ja: Dann gilt $f(v_j) = \lambda_j v_j$

 $\Longrightarrow f$ ist eine Streckung von v_i um den Faktor λ_i .

• Die Jordan-Normalform herleiten.

LINA II* SOSE 24 Konrad Rösler

1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte charakterisieren zentrale Eigenschaften linearer Abbildungen. Z.B.

- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Eigenschaften von physikalischen Systemen
 - ightarrow gewöhnliche Differentialgleichungen
 - → Eigenschwingungen / Resonanzkatastrophe

Zerstörung einer Brücke über dem Fluß Maine / Milleanium-Bridge London

1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 1.1: Eigenwert und Eigenvektor (Endomorphismus)

Sei V ein K-Vektorraum. Ein Vektor $v \in V, v \neq 0_V$, heißt **Eigenvektor** von $f \in L(V,V)$, falls $\lambda \in K$ mit

$$f(v) = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der **Eigenwert** zum Eigenvektor $v \in V$.

Definition 1.2: Eigenwert und Eigenvektor (Matrix)

Sei K ein Körper und $n\in\mathbb{N}$. Ein Vektor $v\in K^n$, $v\neq 0_{K^n}$, heißt Eigenvektor von $A\in K^{n,n}$, falls $\lambda\in K$ mit

$$Av = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der Eigenwert zum Eigenvektor $v \in V$.

Bemerkungen:

- In Def 1.1 kann $\dim(V)=\infty$ sein. Dies ist für viele Definitionen/Aussagen in denen wir Endomorphismen betrachten, der Fall.
- Für $\dim(V) < \infty$ kann man jedes $f \in L(V, V)$ eindeutig mit einer Matrix A identifizieren. Dann: Def 1.2 ist Spezialfall von Def 1.1.

• Achtung: $0 \in K$ kann ein Eigenwert sein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor $0 \in V$ ist **nie** ein Eigenvektor.

Für $\dim(V) = 0$ besitzt f keinen Eigenvektor für $f \in L(V, V)$.

• Ist v Eigenvektor zum Eigenwert λ , so ist auch αv für jedes $\alpha \in K \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Zentrale Frage dieses Kapitels:

Existens von Eigenwerten? Wenn sie existieren: Weitere Eigenschaften?

Beispiel 1.3: Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein offenes Intervall und V der unendlichdimensionale Vektorraum der auf I beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Ein Endomorphismus $f\in L(V,V)$ ist gegeben durch

$$f(\varphi) = \varphi' \qquad \forall \varphi \in V$$

Die Abbildung f hat jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ als Eigenwert, da für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Funktion

$$\varphi(x) \coloneqq c \cdot e^{\lambda x} \ \neq \ 0_V \qquad \forall x \in I$$

gilt

$$f(\varphi(x)) = f(c \cdot e^{\lambda x}) = \lambda(ce^{\lambda x}) = \lambda \varphi(x)$$

Hier: $\varphi'(x) = f(\varphi)$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Beispiel 1.4: Wir betrachten die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f\binom{x_1}{x_2} = \binom{x_2}{-x_1} = \binom{0}{-1} \binom{x_1}{x_2}$$

definiert ist. Sei x ein Eigenvektor, dann gilt

$$f\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff x_2 = \lambda x_1 \text{ und } -x_1 = \lambda x_2$$

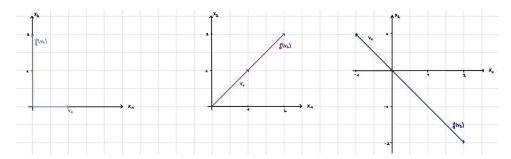
O.B.d.A: $x_2 \neq 0$

D.h. f besitzt keinen Eigenwert/-vektor. Für $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ ändert sich dies! \Longrightarrow Die Wahl von K entscheidet!

Beispiel 1.5: Wieder $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, diesmal

$$f\bigg(\binom{x_1}{x_2}\bigg) = \binom{2x_2}{2x_1} = \underbrace{\binom{0}{2} \binom{2}{2}}_{-:A} \binom{x_1}{x_2}$$

Dann gilt für $v_1 = \binom{1}{0}, v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = (-1,1)$ dass $f(v_1) = \binom{0}{2}, f(v_2) = \binom{2}{2} = 2 \cdot v_2$ und $f(v_3) = \binom{2}{-2} = (-2) \cdot v_3$.



Beobachtung: $\dim(V) = 2$

zwei Eigenwerte: 2, -2, es existieren keine Weiteren,

zwei Eigenvektoren: $v_2 = {1 \choose 1}, v_3 = {-1 \choose 1}$, sind linear unabhängig

Lemma 1.6: Es sei $f \in L(V,V)$ ein Endomorphismus. Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von f sind linear unabhängig.

Beweis: Es seien $v_1,...,v_m$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,...,\lambda_m$ von f. Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: m=1, $\lambda_1,v_1\neq 0\Longrightarrow v_1$ lin. unabh.

Induktionsschritt: $m-1 \rightarrow m$

Induktionsvorraussetzung: Behauptung gelte für m-1

Betrachte

$$\begin{split} &\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0 \ (*) \quad \alpha_m \in K \\ &\overset{\mathrm{EV, \ f}()}{\Longrightarrow} \ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0 \\ &\overset{(*) \cdot \lambda_m}{\Longrightarrow} \ \lambda_m \alpha_a v_1 + \lambda_m \alpha_2 v_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m v_m = 0 \end{split}$$

Wir bilden die Differenz aus Zeile 1 und 2

$$\underbrace{(\lambda_1-\lambda_m)}_{\neq 0}\alpha_1v_1+\underbrace{(\lambda_2-\lambda_m)}_{\neq 0}\alpha_2v_2+\ldots+\underbrace{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)}_{\neq 0}\alpha_{m-1}v_{m-1}=0$$

 $v_1,...,v_{m-1}$ lin. unabh. $\Longrightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_{m-1}=0$ Einsetzen in (*) liefert

$$\alpha_m \underbrace{v_m}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$$

 $\Longrightarrow v_1,...,v_m$ lin unabh.

Folgerung: Es gibt höchstens $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte für $n = \dim(V) < \infty$.

Definition 1.7: Eigenraum

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$, so heißt

$$\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$$

der **Eigenraum** von f bezüglich λ .

Es gilt:

- $\operatorname{Eig}(f,\lambda) \subseteq V$ ist ein Untervektorraum
- λ ist Eigenwert von $f \iff \text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$
- Eig $(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.
- $\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \ker(f \lambda \operatorname{Id})$
- $\dim(\operatorname{Eig}(f,\lambda)) = \dim(V) \operatorname{rg}(f \lambda \operatorname{Id})$
- Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschiedene Eigenwerte, so ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$

Die letzte Aussage kann verallgemeinert werden zu:

Lemma 1.8: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)=n<\infty$ und $f\in L(V,V)$. Sind $\lambda_1,...,\lambda_m,m\leq n$, paarweise verschiedene Eigenwerte von f, so gilt

$$\mathrm{Eig}(f,\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^m \mathrm{Eig}\big(f,\lambda_j\big) = \{0\} \qquad \forall i=1,...,m$$

Beweis: Summe von Vektorräumen, vgl. Def 3.32 LinA I.

Sei $i \in \{1, ..., m\}$ fest gewählt.

$$v \in \mathrm{Eig}(f,\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \mathrm{Eig}\big(f,\lambda_j\big)$$

Also ist

$$v = \sum_{\substack{j=1\\j \neq i}}^m v_j \quad \text{für } v_j \in \mathrm{Eig}\big(f,\lambda_j\big) \quad \text{für } j \neq i$$

$$\Longrightarrow -v + \sum_{\substack{j=1 \ i \neq i}}^m v_j = 0$$
 Aus Lemma 1.6 folgt damit $v = 0$.

Über die Identifikation von Endomorphismen und Matrizen für $\dim(V) < \infty$ erhält man:

Korollar 1.9: Für ein $n \in \mathbb{N}$ und einem Körper K sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt für jedes $\lambda \in K$, dass

$$\dim(\operatorname{Eig}(A,\lambda)) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$$

Insbesondere ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, wenn $\operatorname{rg}(A-\lambda I_n) < n$ ist.

Definition 1.10: Geometrische Vielfachheit

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so heißt

$$g(f,\lambda) := \dim(\operatorname{Eig}(f,\lambda))$$
 (> 0)

die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ .

1.2. Das charakteristische Polynom

Wir bestimmt man Eigenwerte?

Lemma 1.11: Seien $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann ist

$$\det(A-\lambda I_n)$$

ein Polynom n-ten Grades in λ .

Beweis: Mit der Leibniz-Formel folgt,

$$\begin{split} \det(\underbrace{A-\lambda I_n}_{\tilde{a}_{ij}}) &= \sum_{\sigma \in S_1} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \tilde{a}_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{n\sigma(n)} \\ &= \underbrace{(a_{11}-\lambda) \cdot (a_{22}-\lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn}-\lambda)}_{\sigma = \text{ Id}} + \underbrace{S}_{\substack{\sigma \neq \text{ Id} \\ \in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda} \end{split}$$

Weiter gilt:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + \ldots + a_{nn}) + \underbrace{S_1}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}$$

Insgesamt: Es existieren Koeffizienten $a_0,...,a_n \in K$ mit

$$\begin{split} \det(A-\lambda I_n) &= a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \\ a_n &= (-1)^n \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(a_{11}+\ldots + a_{nn}) \end{split}$$

man kann zeigen: $a_0 = \det(A)$

Man nennt $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ auch die **Spur** von A.

Definition 1.12: Charakteristisches Polynom

Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann heißt das Polynom n-ten Grades

$$P_A(\lambda) \coloneqq \det(A - \lambda I_n)$$

das charakteristische Polynom zu A.

Lemma 1.13: Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Der Skalar λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn

$$P_A(\lambda) = 0$$

gilt.

Beweis: Die Gleichung

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I_n)v = 0$$

hat genau eine Lösung $v \in V, v \neq 0$, wenn $\operatorname{rg}(A-\lambda I_n) < n$, vgl. Satz 6.3 aus Lin
A I. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$
, vlg. D10 aus LinA I

Beispiel 1.14: Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus liefert

$$\begin{split} P_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 8 & 16 \\ 0 & 7-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\big(-35-7\lambda+5\lambda+\lambda^2+32\big) \\ &= (3-\lambda)[(7-\lambda)(-5-\lambda)-8(-4)]-8(0-0)+16(0-0) \\ &= (3-\lambda)\big(\lambda^2-2\lambda-3\big) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3) \end{split}$$

 \Longrightarrow Eigenwerte sind $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

Zugehörige Eigenvektoren?

 $\lambda = -1$:

$$Av = -v \iff (A + I_3)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen: $\Longrightarrow v_2 = -v_3, v_1 = -2v_3$

Damit ist z.B.: $\boldsymbol{w}_1 = (2,1,-1)^\top$ Eigenvektor.

 $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} (A-3I_3)v &= 0 \Longleftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow v_2 + 2v_3 = 0 \end{aligned}$$

Damit sind z.B.: $\boldsymbol{w}_2 = (1,2,-1)^\top, \boldsymbol{w}_3 = (-1,2,-1)$ Eigenvektoren.

 $\lambda=-1$: einfache Nullstelle und $\dim(\mathrm{Span}(w_1))=1$ passt zu $\mathrm{rg}(A-(-1)I_n)=2$ und $\dim(\mathrm{Eig}(A_1-1))=3-2=1.$

 $\lambda=-3$: doppelte Nullstelle und $\dim(\mathrm{Span}(w_2,w_3))=2$ passt zu $\mathrm{rg}(A-3I_n)=1$ und $\dim(\mathrm{Eig}(A,3))=3-1=2$

Lemma 1.15: Sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt

$$p_A(.) = p_{A^\top}(.)$$

D.h. eine Matrix und ihre Transponierte haben die gleichen Eigenwerte.

Beweis:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \stackrel{\text{D12}}{=} = \det\left(\left(A - \lambda I_n\right)^\top\right) = \det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^\top}(\lambda)$$

Achtung: Die Eigenwerte bleiben gleich, aber nicht die Eigenvektoren.

Beispiel 1.16: Für die Matrix A aus Bsp. 1.14 gilt

$$\begin{split} A^\top &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A^\top - \lambda I_n) = (3 - \lambda)[(7 - \lambda)(-5 - \lambda) + 4 \cdot 8] \\ &= -(\lambda - 3)^2(\lambda + 1) \end{split}$$

Aber

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 27 \\ 45 \end{pmatrix} \neq (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Man kann ausrechnen:

$$\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \text{EV zu EW} - 1, \\ \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{w}_3 \ \text{EV zu EW 3}$$

Übertragung auf Endomorphismen?

$$p_f(\lambda)\ f\in L(V,V), B \ \text{Basis} \Rightarrow \exists ! A_f^{B,B}, C \ \text{Basis} \Longrightarrow \exists ! A_f^{C,C}$$

$$p_{A_f^{B,B}}(\lambda) \stackrel{?}{=} p_{A_f^{C,C}}(\lambda)$$

Definition 1.17: ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A,B\in K^{n,n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine Matrix $T\in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass $A=TBT^{-1}$ gilt.

Man kann leicht beweisen, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Matrizen ist.

Mit $\det(A^{-1}) \stackrel{\mathrm{D11}}{=} (\det(A))^{-1}$ folgta für zwei ähnliche Matrizen A und B, dass

$$\det(A) = \det(TBT^{-1}) = \det(T)\det(B)\det(T^{-1}) = \det(B)$$

Beispiel 1.18: Sei $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, d.h. $V = \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten für den \mathbb{R}^3 die Basen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für darstellende Matrix von f bezüglich der Standardmatrix E erhalten wir aus Satz 5.18, LinA I,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} e_i \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

dass

$$A_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige kommutative Diagramm ist gegeben durch



Für die Basis B erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1\\-4\\3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + (-7)\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1\\3\\8 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1\\3\\11 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + (-8)\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 5&-2&-2\\-7&-5&-8\\3&8&11 \end{pmatrix}$$

Herleitung bezüglich Matrizen?



Koordinatenabbildung Φ_B ?

Abbildung vom \mathbb{R}^3 + Standardbasis E in den $V(=\mathbb{R}^3)$ + Basis B.

$$\begin{split} \Phi_B = (e_i) &= v_i \quad \text{für} \quad B = \{v_1, v_2, v_3\} \\ \Longrightarrow A_{\Phi_B}^{E,B} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{split}$$

Damit folgt insgesamt:

$$\begin{split} A_f^{B,B} &= \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B} = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A_f^{E,E} \underbrace{A_{\Phi_B}^{E,B}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \end{split}$$

$$\Longrightarrow A_f^{B,B} \text{ und } A_f^{E,E} \text{ sind \"{a}hnlich}$$

Für die Basis C erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 0\\0\\-1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0\\0\\-3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0\\0\\-1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0\\-1\\0 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1\\-4\\3 \end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix} 0\\0\\-1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0\\-1\\0 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0\\-1\\0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0\\-7\\-5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0\\0\\-1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0\\-1\\0 \end{pmatrix}$$

Als Darstellungsmatrix erhält man

$$A_f^{C,C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Als Matrizenmultiplikation



Darstellung von $\Phi_C? \ \Phi_C(e_i) = w_i \quad \text{für} \quad C = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$A_{\Phi_C}^{E,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_f^{C,C} = \left(A_{\Phi_C}^{E,C}\right)^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A_{\Phi_C}^{E,C} = \left(A_{\Phi_C}^{E},C\right)^{-1} A_f^{E,E} A_{\Phi_C}^{E,C}$$

Also auch: $A_f^{C,C}$ ist ähnlich zu $A_f^{E,E}$.

Alternativ:

$$\begin{split} A_f^{C,C} &= \left(A_{\Phi_C}^{E,C}\right)^{-1} I_n I_n^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B} A_f^{B,B} \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} I_n A_{\Phi_C}^{E,C} \\ &= \underbrace{\left(A_{\Phi_C}^{E,C}\right)^{-1} A_{\Phi_B}^{E,B}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} A_f^{B,B} \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A_{\Phi_C}^{E,C} \end{split}$$

Jetzt allgemein: $f \in L(V,V)$, $\dim(V) < \infty$, B,C seien Basen von $V \Longrightarrow$

$$A\coloneqq A_f^{B,B} \qquad \tilde{A}\coloneqq A_f^{C,C}$$

und es existiert $T\in \mathrm{GL}_n(K)$ als Basistransformationsmatrix, so dass

$$\tilde{A} = TAT^{-1}$$

Dann gilt

$$\begin{split} p_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det \left(\tilde{A} - \lambda I_n \right) = \det \left(TAT^{-1} - \lambda TT^{-1} \right) \\ &= \det \left(T(A - \lambda I_n) T^{-1} \right) \\ &= \det (T) \det (A - \lambda I_n) \det \left(T^{-1} \right) \\ &= p_A(\lambda) \end{split}$$

D.h. für einen Endomorphismus ist das charakteristische Polynom der zugehörigen Darstellungsmatrix unabhängig von der Wahl der Basis!

Damit ist es sinnvoll, für $f \in L(V, V)$, dim $(V) < \infty$,

$$p_f(.) \coloneqq p_A(.)$$

für A als Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ für eine Basis B.

Lemma 1.19: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
- 2. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert der Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ für eine gewählte B von V.

Des weiteren gilt auch. Für zwei ähnliche A und B gilt $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

$$A, B \text{ ähnlich} \Longrightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

z.B.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda)=(1-\lambda)^2=p_B(\lambda), \text{aber für jedes } T\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ gilt}$$

$$TBT^{-1}=TT^{-1}=I\neq A \text{ also } A, B \text{ nicht \"{a}hnlich}$$

Weitere Beobachtung: Aus Lemma 1.13 und Lemma 1.19 folgt, dass die Eigenwerte von $f \in L(V,V)$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix $A_f^{B,B}$ für eine Basis B ist. Dies gilt **nicht** i.a. für Darstellungsmatrizen $A_f^{B,C}$ für $B \neq C$.

Definition 1.20: Algebraische Vielfachheit

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)=n<\infty.$ Ist $f\in L(V,V)$ und $\tilde{\lambda}$ ist Eigenwert von f hat das charakteristische Polynom $p_f(\lambda)$ die Form

$$p_f(\lambda) = \left(\lambda - \tilde{\lambda}\right)^d \cdot \tilde{p}(\lambda)$$

für ein $\tilde{p}(.) \in \mathbb{K}[\lambda]$ mit $\tilde{p}(\tilde{\lambda}) \neq 0$, so nennt man d die **algebraische Vielfachheit** von $\tilde{\lambda}$ und bezeichnet sie $a(f, \tilde{\lambda})$.

Lemma 1.21: Seien V ein K-Vektorraum, $\dim(V)=n<\infty$, und $f\in L(V,V)$. Für Eigenwert $\tilde{\lambda}$ von f gilt

$$g(f, \tilde{\lambda}) \le a(f, \tilde{\lambda})$$

Beweis: Ist $\tilde{\lambda}$ EW von f mit der geometrischen Vielfachheit $m:=g\left(f,\tilde{\lambda}\right)$, so gibt es nach Def. 1.10 zu $\tilde{\lambda}$ m linear unabhängige Eigenvektoren $v_1,...,v_m\in V$.

Gilt $m=n=\dim(V)$ sind $\{v_1,...,v_m\}$ schon Basis von V.

Gilt m < n, so folgt aus dem Basisergänzungssatz (Satz 3.21, LinA I), dass man $\{v_1,...,v_m\}$ zu einer Basis $\{v_1,...,v_m,v_{m+1},...,v_n\}$ =: B ergänzen. Wegen $f\big(v_j\big)=\tilde{\lambda}v_j, 1\leq j\leq m$, gilt

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} I_n & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

für zwei Matrizen $A_1 \in K^{m,n-m}, A_2 \in K^{n-m,n-m}.$

Mit D9 aus LinA I folgt

$$p_f(\lambda) = \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)^m \cdot \det \left(A_2 - \lambda I_{n-m,n-m}\right)$$

 \Longrightarrow EW $\tilde{\lambda}$ ist mindestens m-fache Nullstelle von $p_f(\lambda)$. Für $m=n\Longrightarrow A_f^{B,B}=\tilde{\lambda}I_n\Longrightarrow p_f(\lambda)=\left(\tilde{\lambda}-\lambda\right)^m$

LINA II* SOSE 24 Konrad Rösler

2. Diagonalisierbarkeit und Normalform

2.1. Diagonalisierbarkeit

Definition 2.1: Diagonalisierbar

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Ein $f \in L(V,V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass $A_f^{B,B}$ eine Diagonalmatrix ist. D.h. es existieren $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$ mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

Entsprechend nennen wir eine Matrix $A \in K^{n,n}$ diagonalisierbar, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in K^{n,n}$ gibt mit

$$A = TDT^{-1}$$

D.h. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Satz 2.2: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)=n<\infty$ und $f\in L(V,V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1. f ist diagonalisierbar
- 2. Es gibt eine Basis B von V bestehend aus Eigenvektoren von f.
- 3. Das charakteristische Polynom $p_f(.)$ zerfällt in n Linearfaktoren über K, d.h.

$$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

mit Eigenwerten $\lambda_1,...,\lambda_n\in K$ für f und für jeden Eigenwert $\tilde{\lambda}$ gilt $a\big(f,\tilde{\lambda}\big)=g\big(f,\tilde{\lambda}\big).$

Beweis:

"1 \Longrightarrow 2": f diagonalisierbar \Longrightarrow $\exists \{v_1,...,v_n\}=B$ Basis von $V,\lambda_1,..,\lambda_n\in K$:

$$\tilde{A} \coloneqq A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad f\big(v_j\big) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$$

 $\Longrightarrow f\big(v_j\big)=\lambda_iv_i, 1\leq i\leq n, v_i\neq 0. \Longrightarrow \text{Damit sind } \lambda_1,...,\lambda_n \text{ Eigenwerte von } f \text{ mit zugehörigen Eigenvektoren } v_1,...,v_n.\Longrightarrow 2.$

"2 \Longrightarrow 1": Ist $B=\{v_1,...,v_n\}$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren, so gibt es zugehörige Eigenwerte $\lambda_1,...,\lambda_n$ mit $f(v_j)=\lambda_j v_j, 1\leq j\leq n\Longrightarrow$

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

"2 \Longrightarrow 3": Sei $B=\{v_1,...,v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren, $\lambda_1,...,\lambda_n$ seien die zugehörigen Eigenwerte \Longrightarrow

$$\begin{split} p_f(\lambda) &= p_{A_f^{B,B}}(\lambda) = \det \left(A_f^{B,B} - \lambda I_n \right) \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) \end{split}$$

 $\Longrightarrow p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren. Verschiedene Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1,...,\tilde{\lambda}_k,k\leq n.$ Der Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$ besitzt die algebraische Vielfachheit $m_j\coloneqq a\left(f,\tilde{\lambda}_j\right)$ genau dann, wenn er m_j -mal auf den Diagnolen von $A_f^{B,B}$ steht. Dies ist genau dann der Fall, wenn m_j -Eigenvektoren zu $\tilde{\lambda}_j$ in B enthalten sind. Diese sind linear unabhängig \Longrightarrow

$$1.\dim\!\left(\mathrm{Eig}\!\left(f,\tilde{\lambda}_{j}\right)\right)=g\!\left(f,\tilde{\lambda}_{j}\right)\geq m_{j}=a\!\left(f,\tilde{\lambda}_{j}\right)$$

2. Lemma 1.21:
$$g(f, \tilde{\lambda}_j) \leq a(f, \tilde{\lambda}_j)$$

$$1 \wedge 2 \Longrightarrow g(f, \tilde{\lambda}_i) = a(f, \tilde{\lambda}_i)$$

"3 \Longrightarrow 2": Seien $\tilde{\lambda}_1,...,\tilde{\lambda}_k,k\leq n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Wir wissen: $\mathcal{P}_n\in p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren, $a\left(f,\tilde{\lambda}_j\right)=g\left(f,\tilde{\lambda}_j\right),1\leq j\leq n$.

$$\dim(V) = n = \sum_{j=1}^k a\Big(f,\tilde{\lambda}_j\Big) = \sum_{j=1}^k g\Big(f,\tilde{\lambda}_j\Big) = \sum_{j=1}^k \dim\Big(\mathrm{Eig}\Big(f,\tilde{\lambda}_j\Big)\Big)$$

Es gilt (Lemma 1.8):

$$\operatorname{Eig}ig(f, \tilde{\lambda}_jig) \cap \sum_{i=1}^k \operatorname{Eig}ig(f, \tilde{\lambda}_iig) = 0 \quad orall j = 1, ..., k$$

Dann folgt (Lemma 3.31, (2), Lemma 3.35, Satz 3.14) (direkte Summe, $U \subset V$ UVR \Longrightarrow $\dim(U) \leq \dim(V), U = V \dim(U) = \dim(V)$, Basis \Longleftrightarrow eindeutige Darstelltung), dass die zu $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_n$ linear unabhängigen Eigenvektoren, die jeweils eine Basis von $\mathrm{Eig} \left(f, \tilde{\lambda}_j \right)$, $1 \leq j \leq k$, eine Basis von V bilden.

In Verbindung mit Lemma 1.6 folgt unmittelbar:

Korollar 2.3: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)=n<\infty$ und $f\in L(V,V)$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten, dann ist f diagonalisierbar.

Bemerkung: Das Kriterium der n paarweise verschiedenen Eigenwerte ist nicht notwendig z.B. $V = K^n$, B = E Standardbasis

$$f: \mathrm{Id}: K^n \to K^n, \Longrightarrow A_f^{E,E} = I_n \Longrightarrow 1n$$
-facher Eigenwert

Beispiel 2.4: Fortsetzung von Bsp. 1.14

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \text{EW:} -1, 3$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } -1, \ w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } 3$$

 $\Longrightarrow \exists$ Basis von Eigenvektoren $\overset{\operatorname{Satz}}{\Longrightarrow} A$ ist diagonalisierbar

$$\begin{split} p_A(\lambda) &= (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)\\ a(f,-1) &= 1 = g(f,-1)\\ a(f,3) &= 2 = g(f,3) \end{split}$$

 $T\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so, dass $T^{-1}AT=D?$

Die zu $B=\{w_1,w_2,w_3\}$ gehörende Koordinatentransformation Φ_B ist gegeben durch

$$A_{\Phi_B}^{E,B} = \left(egin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}
ight)$$

Dann gilt: Für $f\in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ mit

$$A_f^{E,E} = A$$
 $A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

Mit Basiswechsel von A zu D

$$D = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A \underbrace{A_{\Phi_B}^{E,B}}_{=T}$$

Beispiel 2.5: Nicht jeder Endomorphismus bzw. jede Matrix ist diagonalisierbar. Bsp. 1.4:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f\biggl(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\biggr)=\overbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}^A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad p_f(\lambda)=\lambda^1+1$$

D.h. über \mathbb{R} zerfällt $p_f(.)$ nicht in Linearfaktoren.

Ein weiteres Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

 $\Longrightarrow p_A(\lambda)=(5-\lambda)\lambda^2\Longrightarrow p_A(.)$ zerfällt in Linearfaktoren. $a(f,\lambda_i),g(f,\lambda_i)$ für $\lambda_1=5,\lambda_2=0.$ Lemma 1.21: $g(f,\lambda_i)\le a(f,\lambda_i)\Longrightarrow g(f,5)=1=a(f,5),$ $a(f,0)=2,g(f,0)\ge 1$ Ein Eigenvektor zu $\lambda=0$ sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow g(f,0) = 1 < 2 = a(f,0)$$

 $\Longrightarrow f$ nicht diagonalisierbar.

Mit Satz 2.2 erhält man einen Algorithmus zur Überprüfung, ob ein gegebenes $f \in L(V,V)$ (bzw. $A \in K^{n,n}$) diagonalisierbar ist:

- 1. Bestimme mit einer Basis B von V die Darstellungsmatrix $A=A_f^{B,B}$
- 2. Bestimme für A das charakteristische Polynom $p_A(.)$ (Determinantenberechnung)
- 3. Zerfällt $p_A(.)$ in Linearfaktoren über K? Nein: f nicht diagonalisierbar. Ja: Seien $\lambda_i, 1 \leq i \leq k \leq n = \dim(V)$ die paarweise verschiedene Eigenwerte von f.

Für i = 1, ..., k

- 1. Bestimme eine Basis von $\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$
- 2. Prüfe, ob $a(f, \lambda_i) = g(f, \lambda_i)$

Gilt $a(f,\lambda_i)=g(f,\lambda_i)$ für alle $i\in\{1,...,k\}$. Nein: f ist nicht diagonalisierbar. Ja: f ist diagonalisierbar.

Beispiel 2.6: Fischer/Springborn

Betrachtet wird: Masse aufgehänt an einer Feder. Zur Zeit t=0 in Position $y(0)=\alpha$ und ausgelenkt in senkrechter Richtung mit Geschwindigkeit $\beta=\dot{y}(0)$

 $y(t) \cong \text{Position der Masse zum Zeitpunkt } t$



Dieses System wird durch die gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta$$

Umschreiben

$$\begin{split} &\dot{\boldsymbol{y}}_0 = \boldsymbol{y}_1 \\ &\dot{\boldsymbol{y}}_1 = -\omega^2 \boldsymbol{y}_0 - 2\mu \boldsymbol{y}_1 \end{split}$$

 $\text{mit } y_0 = y, \ddot{y}_0 = \ddot{y}, y_0(0) = \alpha, y_1(0) = \beta.$

$$\dot{\tilde{y}} \coloneqq \begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + w^2$$

mit den potentiellen Nulstellen

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - w^2}$$

Man unterscheidet drei Fälle:

- $0 \le \mu < \omega$, d.h. $\mu^2 \omega^2 < 0$ \Longrightarrow schwache Dämpfung
- $\mu = \omega$, d.h. $\mu^2 = \omega^2 \Longrightarrow$ aperiodischer Fall $\Longrightarrow a(A, -\mu) = 2$, dim $(\text{Eig}(A, -\mu)) = 1$, A nicht diagonalisierbar
- $\mu > \omega$, d.h. $\mu^2 > \omega^2$, starke Dämpfung

Eine solche Eigenwertanalyse kann auch nutzen, um das Langzeitverhalten von Lösungen von gewöhnlichen DGL zu bestimmen.



Satz 2.7: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1. Das charakteristische Polynom $p_f(.)$ zerfällt über K in Linearfaktoren.
- 2. Es gibt eine Basis B von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h.

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

und f ist damit **triangulierbar**.

Beweis: Beweis von Satz 14.18 im Liesen/Mehrmann

Nun ist das Ziel:

Bestimmung einer Basis B von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, die möglichst nah an einer Diagonalmatrix ist und von der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte abgelesen werden können.

D.h. $p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren mit den Eigenwerten $\lambda_1,...,\lambda_k$ (notwendig, Satz 2.7) und wir wollen eine Basis B bestimmen, so dass $A_f^{B,B}$ Diagonalblockgestalt hat mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

wobei jeder Diagonalblock die Form

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{d_i,d_i} \qquad (*)$$

Definition 2.8: Jordan-Block

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)=n<\infty, f\in L(V,V)$ und λ_i ein Eigenwert von f. Eine Matrix der Form (*) heißt **Jordan-Block** der Größe d_i zum Eigenwert λ_i .

Wegen der Bedeutung der Jordan-Normalform gibt es zahlreiche Herleitungen mit unterschiedlichen mathematischen Hilfsmitteln.

Hier: Beweis über die Dualitätstheorie basirend auf einer Arbeit von V. Pt \bar{a} k (1956)

2.2. Dualräume

Definition 2.9: Linearform, Dualraum

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $f \in L(V,K)$ heißt **Linearform**. Den K-Vektorraum $V^* := L(V,K)$ nennt man **Dualraum**.

Gilt $\dim(V)=n<\infty$ so folgt aus Satz 5.18 Lin
A I, dass $\dim(V^*)=n$ gilt. Ist $B=\{v_1,...,v_n\}$ eine Basis von V und $C=\{1\}$ eine Basis des K-Vektorraum K, dann gilt für

$$f(v_i) = \mu_i \in K \ \text{ für } \ f \in V^* \,, \, \text{d.h.} \, f : V \to K,$$

für i = 1, ..., n und damit

$$A_f^{B,C} = (\mu_1,...,\mu_n) \in K^{1,n}$$

Beispiel 2.10: Sei V der \mathbb{R} -Vektorraum der auf dem Intervall [0,1] stetigen, reellwertigen Funktionen und $a \in [0,1]$. Dann sind

$$g_1:V\to\mathbb{R},\quad g_1(f)\coloneqq\int_0^1f(x)dx$$

 $g_2:V\to\mathbb{R},\quad g_2(f)\coloneqq f(a)$

Linearformen auf V.

Basis des Dualraums?

Satz 2.11: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)=n<\infty$ und $B=\{v_1..,v_n\}$ eine Basis von V. Dann gibt es genau eine Basis $B^*=\{v_1^*,...,v_n^*\}$ von $V^*=L(V,K)$ für die

$$v_i^* \big(v_j \big) = \delta_{ij} \quad i,j = 1,...,n$$

gilt. Diese Basis heißt die zu B duale Basis.

Beweis: Lemma 4.10: LinA I. Es gibt eine lineare Abbildung v_i^* für die $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ für j=1,...,n, für i=1,...,n. Noch zu zeigen: v_i^* sind Basis von V^* . Wir wissen schon: $\dim(V^*)=n$. Also: Es reicht zu zeigen: $\left\{v_i^*\right\}_{i=1,...,n}$ linear unabhängig. Seien $\mu_i\in K$ so, dass

$$\sum_{i=1}^n \mu_i v_i^* = 0 \in V^* = L(V,K)$$

Dann gilt:

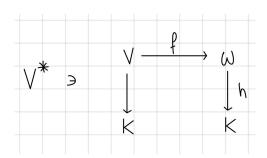
$$0_K = 0_{V^*} (v_j) = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i^* (v_j) = \mu_j \quad j = 1, ..., n$$

Definition 2.12: duale Abbildung

Seien V und W zwei K-Vektorräume mit den zugehörigen Dualräumen V^* und W^* . Für $f \in L(V,W)$ heißt

$$f^*: W^* \to V^*, \quad f^*(h) = h \circ f$$

die zu f duale Abbildung.



Seien $U\subseteq V$ und $Z\subseteq V^*$ zwei Unterräume. Dann heißt die Menge

$$U^0 \coloneqq \{h \in V^* \mid h(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

Annihilator von U und die Menge

$$Z^0 \coloneqq \{v \in V \mid z(v) = 0 \text{ für alle } z \in Z\}$$

Annihilator von Z.

Man kann sich überlegen:

- Die Mengen $U^0 \subseteq V^*$ und $Z^0 \subseteq V$ sind Untervektorräume von V^* bzw V
- Es gilt für $f \in L(V, V)$

$$\left(f^k\right)^* = \left(f^*\right)^k$$

Des Weiteren besitzt die duale Abbildung folgende Eigenschaften:

Lemma 2.13: Sind V, W und X drei K-Vektorräume. Dann gilt

- 1. Ist $f \in L(V, W)$, dann ist die duale Abbildung f^* linear, d.h. $f^* \in L(W^*, V^*)$
- 2. Ist $f \in L(V,W)$ und $g \in L(W,X)$, dann ist $(g \circ f)^* \in L(X^*,V^*)$ und es gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- 3. Ist $f \in L(V,W)$ bijektiv, dann ist $f^* \in L(W^*,V^*)$ bijektiv und es gilt ${(f^*)}^{-1} = {(f^{-1})}^*$

Beweis: ÜB

Lemma 2.14: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f \in L(V, V)$, $f^* \in L(V^*, V^*)$ und $U \subseteq V$, sowie $W \subseteq V^*$ zwei Vektorräume. Dann gilt:

- 1. $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^0)$
- 2. Ist f nilpotent vom Grad m, dann ist die duale Abbildung f^* ebenfalls nitpotent vom Grad m.
- 3. Ist $W \subseteq V^*$ ein f^* -invarianter Vektorraum, dann ist W^0 ein f-invarianter Unterraum.

Beweis: ÜA

Definition 2.15: nilpotent vom Grad m

Sei $\{0\} \neq V$ ein K-Vektorraum. Man nennt $f \in L(V,V)$ **nilpotent**, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f^m = 0 \in L(V,V)$ gilt. Gilt für dieses m, dass $f^{m-1} \neq 0 \in L(V,V)$, so heißt f **nilpotent vom Grad m** und m is der **Nilpotenzindex** von f.

Definition 2.16: *f*-invarianter Unterraum

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)=n<\infty, U\subseteq V$ ein Unterraum und $f\in L(V,V)$. Gilt $f(U)\subseteq U$, d.h. ist $f(u)\in U$ für alle $u\in U$, so nennt man U einen f-invarianten Unterraum von V.

Definition 2.17: Bilinearform

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $a:V\times W\to K$ heißt Bilinearform, wenn

1. $a(\cdot, w): V \to K$ für alle $w \in W$ eine lineare Abbildung ist und

2. $a(v,\cdot):W\to K$ für alle $v\in V$ eine lineare Abbildung ist

Eine Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ heißt **nicht ausgeartet** in der ersten Variable, wenn aus

$$a(v, w) = 0$$
 für alle $w \in W$

folgt, dass v=0 ist. Eine Bilinearform heißt nicht ausgeartet in der zweiten Variable, wenn aus

$$a(v, w) = 0$$
 für alle $v \in V$

folgt, dass w=0 ist. Falls $a(\cdot,\cdot)$ in beiden Variablen nicht ausgeartet ist, so nennt man $a(\cdot,\cdot)$ eine **nicht ausgeartete Bilinearform** und die Räume V,W ein **duales Paar von Räumen** oder **duales Raumpaar** bezüglich $a(\cdot,\cdot)$. Ist V=W, so heißt $a(\cdot,\cdot)$ eine **Bilinearform auf** V. Eine Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ auf V heißt **symmetrisch**, wenn a(v,w)=a(w,v) für alle $v,w\in V$, ansonsten heißt $a(\cdot,\cdot)$ unsymmetrisch.

Bemerkung: Damit V, W ein duales Raumpaar für eine nicht ausgeartete Bilinearform bilden können, muss $\dim(V) = \dim(W)$ gelten.

Lemma 2.18: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in L(V, V)$, $f^* \in L(V^*, V^*)$ die duale Abbildung zu $f, U \subseteq V$ und $W \subseteq V^*$ zwei Untervektorräume. Ist die Bilinearform

$$a: U \times W \to K, (v, h) \mapsto h(v)$$

nicht ausgeartet ist, d.h. sind U und W ein duales Raumpaar bezüglich dieser Bilinearform, so ist

$$V=U\oplus W^0$$

Beweis: Sei $u \in U \cap W^0$. Dann gilt h(u) = 0 für alle $h \in W$. Weil U, W ein duales Raumpaar bzgl. $a(\cdot, \cdot)$ bilden, folgt u = 0. Außerdem $\dim(U) = \dim(W)$ gelten. Damit folgt aus Lemam 2.14, 1., dass

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{0})$$
$$= \dim(U) + \dim(W^{0})$$

$$\Longrightarrow V = W \oplus W^0$$

2.3. Zyklische *f*-invariant Unterräume

Jetzr: Genauere Analyse der Struktur von Eigenräumen

Beispiel: Ist V ein K-Vektorraum, $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so ist $\text{Eig}(f, \lambda)$ ein f-invarianter Unterraum, da: Für $v \in \text{Eig}(f, \lambda)$ gilt $f(v) = \lambda v \in \text{Eig}(f, \lambda)$.

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so existiert ein eindeutig definiertes $m = m(f, v) \in \mathbb{N}$, sodass die Vektoren

$$v, f(v), f(f(v)), ..., f^{m-1}(v)$$

linear unabhängig, die Vektoren

$$v, f(v), ..., f^m(v)$$

jedoch linear abhängig sind. Wegen $\dim(V) = n$, muss $m \le n$ gelten!

Definition 2.19: Grad von v

Die eindeutig definiert Zahl $m(f, v) \in \mathbb{N}$ heißt Grad von v bezüglich f.

$$0 \neq v, f(v), f^2(v), ..., f^{m-1}(v) \mbox{ lin. unabh.}$$

$$v, f(v), ..., f^m(v) \mbox{ lin. abh.}$$

 \Longrightarrow Grad m von $v, m \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

- Der Vektor $v=0\in V$ ist lin. abhängig. Deswegen muss man $v\neq 0$ fordern oder $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$
- Der Grad von $0 \neq v \in V$ ist gleich 1, genau dann wenn v, f(v) linear abhängig sind. Das ist genau dann der Fall wenn v ein Eigenvektor von f ist. Damit folgt auch: Ist $v \in V$ kein Eigenvektor von f und $v \neq 0$, so ist der Grad von v also $m(v, f) \geq 2$.

Definition 2.20: Krylov-Raum

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)=n<\infty,$ $f\in L(V,V),$ $v\in V$ und $j\in\mathbb{N}.$ Der Unterraum

$$\mathcal{K}_j(f,v)\coloneqq \mathrm{Span}\big\{v,f(v),f^2(v),...,f^{j-1}(v)\big\}\subseteq V$$

heißt j-ter Krylov-Raum von f und v.

Alexei Krylov (russischer Schiffsbauingeneur und Mathematiker, 1863-1945). Krylov-Räume spielen auch eine wichtige Rolle für das CG-Verfahren (Conjugate Gradients).

Lemma 2.21: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann gilt:

1. Hat $0 \neq v \in V$ den Grad m bzgl. f, so ist $\mathcal{K}_m(f,v)$ ein f-invarianter Unterraum und es gilt:

Span
$$\{v\} = \mathcal{K}_1(f,v) \subset \mathcal{K}_2(f,v) \subset \ldots \subset \mathcal{K}_m(f,v) = \mathcal{K}_{m+i}(f,v)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

2. Hat $0 \neq v \in V$ den Grad m bzgl. f und ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, so dass $v \in U$, so ist

$$\mathcal{K}_m(f,v) \subseteq U$$

D.h. betrachtet man alle f-invarianten Unterräume von V, die v enthalten, so ist $\mathcal{K}_m(f,v)$ derjenige mit der kleinsten Dimension.

3. Gilt für $v \in V$, dass $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $f^m(v) = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\dim (\mathcal{K}_{j}(f,v)) = j \quad \text{für } j = 1, ..., m$$

Beweis:

1. ÜA

2. Sei $U\subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum mit $v\in U$. Dann gilt $f^j(v)\in U$ für j=1,...,m-1. Da v den Grad m hat, sind $v,f(v),...,f^{m-1}(v)$ linear unabhängig. $\Longrightarrow \mathcal{K}_m(f,v)\subseteq U$ und $\dim(\mathcal{K}_m(f,v))=m\leq \dim(U)$

3. Seien $\mu_0,, \mu_{m-1} \in K$ so gewählt, dass

$$0 = \mu_0 v + \mu_1 f(v) + \ldots + \mu_{m-1} f^{m-1}(v)$$

gilt. Anwendung f^{m-1}

$$0 = \mu_0 f^{m-1}(v) + \mu_1 f^m(v) = \mu_0 \underbrace{f^{m-1}(v)}_{\neq 0}$$

$$\Longrightarrow \mu_0 = 0$$

Für m>1 kann man dieses Argument induktiv für $f^{m-j},\,j=2,...,m$, anwenden und erhält damit

$$\mu_1 = \dots = \mu_{m-1} = 0$$

 \Longrightarrow Beh.

Beobachtungen: Hat v den Grad m bzgl. f gilt

• $\mathcal{K}_j(f,v)$ ist für j < m kein f-invarianter Unterraum, da $0 \neq f(f^{j-1}(v)) = f^j(v) \notin \mathcal{K}_j(f,v)$

• wie oben gezeigt, bilden die Vektoren $v, f(v), ..., f^{m-1}(v)$ eine Basis von $\mathcal{K}_m(f,v)$. Wendet man f auf ein Element dieser Basis an, d.h. $f^{k+1}(v), k=0, ..., m-1$, so erhält man für k=m-1 $f^m(v)$ als Linearkombination von $v, f(v), ..., f^{m-1}(v) \Longrightarrow f^m(v) \in \mathcal{K}_m(f,v)$. Deswegen wird $\mathcal{K}_m(f,v)$ auch **zyklische invarianter Unterraum** zu v von f genannt.

Lemma 2.22: Sei $\{0\} \neq V$ ein K-Vektorraum. Ist $f \in L(V,V)$ nilpotent vom Grad m, so gilt $m \leq \dim(V)$.

Beweis: Nach Definition existiert ein $v \in V$ mit $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $f^m(v) = 0$. Lemma 2.21 sichert, dass $v, f(v), ..., f^{m-1}(v)$ linear unabhängig $\Longrightarrow m \leq \dim(V)$.

Beobachtung: Sei V ein K-Vektorraum und $f \in L(V, V)$. Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, so gilt für die Einschränkung von f auf U, d.h.

$$f|_U: U \to U, \quad u \to f(u),$$

dass $f|_U \in L(U, U)$.

Satz 2.23: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V, V)$. Dann existieren f-invariante Unterräume $U \subseteq V$ und $W \subseteq V$, so dass gilt:

- 1. $V = U \oplus W$
- 2. $f|_U \in L(U, U)$ ist bijektiv
- 3. $f|_W \in L(W, W)$ ist nilpotent

Beweis: $v \in \ker(f)$. Dann gilt wegen der Linearität von f, sodass $f^2(v) = f(f(v)) \stackrel{f(v)=0}{=} 0 \Longrightarrow \ker(f) \subseteq \ker(f^2)$

Induktiv zeigt man:

$$\{0\}\subseteq \ker(f)\subseteq \ker(f^2)\subseteq \ker(f^3)\subseteq \dots$$

Da $\dim(V) < \infty$, muss es eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ geben, so dass $\ker(f^m) = \ker(f^{m+j})$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Damit sehen wir

$$U=\operatorname{im}(f^m)\quad \text{und}\quad W=\ker(f^m)$$

Zeige: U und W sind f-invariant. Sei $u \in U$. Dann existiert $w \in V$ mit $f^m(w) = u \Longrightarrow f(u) = f(f^m(w)) = f^m(f(w)) \in U$.

Sei $w \in W$. Dann gilt

$$f^m(f(w)) = f(f^m(w)) = 0 \Longrightarrow f(w) \in W$$

Also existieren f-invariante Unterräume $U \subseteq V$ und $W \subseteq V$.

1. Es gilt $U+W\subseteq V$. Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 4.16, LinA I) liefert für f^m , dass

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

Ist $v \in U \cap W \Longrightarrow \exists w \in V : v = f^m(w) (v \in U)$

$$v \in W \Longrightarrow 0 = f^m(v) = f^m(f^m(v)) = f^{2m}(v)$$

Es gilt $\ker(f^m) = \ker(f^{2m}) \Longrightarrow v = f^m(v) = 0$

$$\Longrightarrow V = U \oplus W$$

2. Sei $v \in \ker(f|_k) \subseteq U$. Dann existiert ein $w \in V$, so dass $f^m(w) = v$ gilt. $\Longrightarrow 0 = f(v) = f(f^m(w)) = f^{m+1}(w)$. Mit $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1}) \Longrightarrow w \in \ker(f^m) \Longrightarrow v = f^m(w) = 0 \Longrightarrow f$ injektiv.

Aus der Dimensionsformel folgt, dass f surjektiv ist.

3. Sei $v \in W$. Dann gilt

$$0 = f^m(v) = (f|_W)^m(v)$$

 $\Longrightarrow (f|_W)^m = 0 \in L(W,W)$, d.h. $(f|_W)^m$ ist die Nullabbildung $\Longrightarrow f|_W$ nilpotent.

Satz 2.24: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in L(V,V)$ nilpotent vom Grad $m,v \in V$ ein beliebiger Vektor mit $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $h \in V^*$ mit $h(f^{m-1}(v)) \neq 0$. Dann sind v und h vom Grad m bzgl. f und f^* . Die beiden Räume $\mathcal{K}_m(f,v)$ bzw. $\mathcal{K}_m(f^*,h)$ sind zyklisch f- bzw. f^* -invariante Unterräume von V bzw. V^* . Sie bilden ein duales Raumpaar bzgl. der Bilinearform

$$a: \mathcal{K}_m(f,v) \times \mathcal{K}_m(f^*,h) \to K, \quad \left(\bar{v},\bar{h}\right) \mapsto \bar{h}(\bar{v})$$

und es gilt

$$V = \mathcal{K}_m(f, v) \oplus \left(\mathcal{K}_m(f^*, h)\right)^0$$

Hierbei ist $\mathcal{K}_m(f^*,h)^0$ ein f-invarianter Unterraum von V.

Beweis: Für $v \in V$ gilt $f^{m-1}(v) \neq 0$. Lemma 2.20 $\Longrightarrow \mathcal{K}_m(f,v)$ m-dimensionaler zyklischer f-invarianter Unterraum von V. Für V^* gilt

$$0 \neq h(f^{m-1}(v)) = (f^*)^{m-1}(h)(v)$$

Dann ist $0 \neq (f^*)^{m-1}(h) \in L(V^*, V^*)$. f nilpotent von Grad $m \Longrightarrow$ (Lemma 2.14) f^* nilpotent von Grad $m \Longrightarrow$

$$\left(f^{*}\right)^{m}(h)=0\in L(V^{*},V^{*})$$

 \Longrightarrow (Lemma 2.20) $\mathcal{K}_m(f^*,h)$ ist m -dimensionaler zyklischer f^* -invarianter Unterraum von $V^*.$

Nun zu zeigen: $\mathcal{K}_m(f,v), \mathcal{K}_m(f^*,h)$ sind ein duales Raumpaar. Sei

$$\bar{v} = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i f^i(v) \ \in \mathcal{K}_m(f,v)$$

so gewählt, dass

$$\bar{h}(\bar{v}) = a(\bar{v}, \bar{h}) = 0 \quad \forall \bar{h} \in \mathcal{K}_m(f^*, h)$$

Zeige induktiv, dass $\mu_k=0, k=0,...,m-1.$ Wegen $\left(\left(f^*\right)^{m-1}(h)\right)\in\mathcal{K}_m(f^*,h)$ folgt

$$\begin{split} 0 &= \left((f^*)^{m-1}(h) \right) (\bar{v}) = h(f^{m-1}(\bar{v})) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i h\big(f^{m-1+i}(v) \big) = \mu_0 \underbrace{h\big(f^{m-1}(v) \big)}_{\neq 0} \\ \Longrightarrow \mu_0 = 0 \end{split}$$

Sei nun $\mu_0=...=\mu_{k-1}=0$ fü ein $k\in\{1,...,m-2\}$. Wegen $(f^*)^{m-1-k}(h)\in\mathcal{K}_m(f^*,h)$ folgt aus der Darstellung von \bar{v} , dass

$$0^{(*)} = \Big((f^*)^{m-1-k} \Big)(h) \Big) \Big(\bar{v} = h \Big(f^{m-1-k}(\bar{v}) \Big) \Big) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_I h \Big(f^{m-i+i-k}(v) \Big) = \mu_k \underbrace{h \Big(f^{m-1}(v) \Big)}_{\neq 0} = \mu_k \underbrace{h \Big(f^{m-1}(v)$$

 $\Longrightarrow a(.,.)$ ist nicht ausgeartet in der ersten Komponente. Analog zeigt man, dass a(.,.) auch in der zweiten Kompontente nicht ausgeartet ist $\Longrightarrow \mathcal{K}_m(f,v)$ und $\mathcal{K}_m(f^*,h)$ sind ein duales Raumpaar.

Mit Lemma 2.16: $V = \mathcal{K}_m(f,v) \oplus \left(\mathcal{K}_m(f^*,h)\right)^0$

Mit Lemma 2.14, 3: $(\mathcal{K}_m(f^*,h))^0$ ist f-invarianter UR von V.

(zyklisch f-invarianter UR: $v, f(v), f^2(v), ...$)

2.4. Die Jordan-Normalform

Satz 2.25: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V,V)$. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, dann gibt es f-invariante Unterräume $U \subset V$ und $\{0\} \neq W \subseteq V$, so dass

- 1. $V = U \oplus W$
- 2. die Abbildung $f|_U \lambda \mathrm{Id}_U$ ist bijektiv und
- 3. die Abbildung $f|_W \lambda \mathrm{Id}_W$ ist nilpotent

Des Weiteren ist λ kein Eigenwert von $f|_U$.

Beweis: Wir definieren

$$g\coloneqq f-\lambda \mathrm{Id}_V\in L(V,V)$$

Satz 2.23: $\exists g$ -invariante UR $U \subseteq V$ und $W \subseteq V$:

$$V = U \oplus W, \ g|_U$$
 bijektiv, $g|_W$ nilpotent

Annahme: $\{0\} = W \Longrightarrow V = U$

$$\Longrightarrow g|_U = g|_V = g$$
 bijektiv

 λ ist Eigenwert von $f \Longrightarrow \exists 0 \neq v : f(v) = \lambda v$

$$\implies g(v) = f(v) - \lambda v = \lambda v - \lambda v = 0$$

$$\implies \ker(g) \supseteq \{0, v\} \neq \{0\} \ \ \ \ \ g \text{ bijektiv}$$

$$\Longrightarrow U \subset V$$

Annahme: λ ist Eigenwert von $f|_U$

$$\implies \exists 0 \neq v \in U : f(v) = \lambda v$$

$$\implies g|_{U}(v) = f(v) - \lambda v = \lambda v - \lambda v = 0 \ \ \ \ \ \ \ g|_{U} \ \ \text{bijektiv}$$

Beispiel 2.26: Wie betrachten $V=\mathbb{R}^5$, die Standardbasis E und $f\in L(V,V)$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 - 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{split} p_f(\lambda) &= p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4 (\lambda - 2)^1 \\ \Longrightarrow \text{EW: } 1, 2 \quad a(f, 1) = 4 \quad a(f, 2) = 1 \end{split}$$

 $\Longrightarrow p_A(.)$ zerfällt in Linearfaktoren

$$\lambda_1=1$$
: Es gilt $\ker(g_1^3)=\ker(g_1^4)$ für $g_1\coloneqq f-\lambda_1\mathrm{Id}_V$

$$\implies m_1 = 3$$

$$U_1 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \qquad W_1 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

 $\lambda_2=2: \text{Für } g_2=f-\lambda_2 \text{Id}_V \text{ gilt } \ker(g_2)=\ker(g_2^2)$

 $\implies m_2 = 1$

$$U_2 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, W_2 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Beobachtung: $\dim(W_1) = a(f, \lambda_1), \dim(W_2) = a(f, \lambda_2)$

Satz 2.27: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V,V)$. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, dann existieren für den Unterraum W aus Satz 2.25 Vektoren $w_1,...,w_k \in W$ und $d_1,...,d_k \in \mathbb{N}$, so dass

$$W = \mathcal{K}_{d_1}(f, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(f, w_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_{d_k}(f, w_k)$$

Des Weiteren gibt es eine Basis B von W, so dass

$$A_{f|_W}^{B,B} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda) & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & J_{d_k}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Beweis: Sei wie in Satz 2.25 $g:=f-\lambda \mathrm{Id}_V$ und $g_1:=g|_W$ nilpotent vom Grad d_1 . Dann gilt $1\leq d_1\leq \dim(W)$.

Sei $w_1\in W$ ein Vektor mit $g_1^{d_1-1}(w_1)\neq 0$. Wegen $g^{d_1}(w_1)=0$ $\Longrightarrow g_1^{d_1-1}(w_1)$ ist ein Eigenvektor von g_1 zum Eigenwert 0.

Lemma 2.21, 3, liefert, dass die d_1 Vektoren

$$\left\{w_1,g(w_1),....,g_1^{d_1-1}(w)\right\}$$

linear unabhängig sind. Außerdem ist $W_1\coloneqq \mathcal{K}_{d_1}(g_1,w_1)$ ein d_1 -dimensionaler zyklischer g_1 -invarianter UR von W. Also ist

$$B_1 \coloneqq \left\{g_1^{d_1-1}(w_1), g_1^{d_1-2}(w_2), ..., g_1(w_1), w_1\right\}$$

eine Basis von $\mathcal{K}_{d_1}(g_1,w_1)=W_1$ und

$$A_{g_1|_{W_1}}^{B_1,B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = J_{d_1}(0) \in K^{d_1,d_1}$$

Per Definition gilt $A_{g_1|_{W_1}}^{B_1,B_1}=A_{g|_{W_1}}^{B_1,B_1}.$ Ist $d_1=\dim(W):$ siehe unten . . .

Sei nun $d_1<\dim(W)$. Satz 2.25 sichert, dass es für $g_1\in L(W,W)$ einen g_1 -invarianten Untteraum $\widetilde W\neq\{0\}$ mit $W=W_1\oplus\widetilde W$ gibt.

Die Abbildung $g_2 \coloneqq g_1|_{\widetilde{W}}$ ist nilpotent vom Grad λ_2 mit $1 \le d_2 \le d_1$.

Wiederholung der Konstruktion:

$$\begin{split} \exists w_2 \in \widetilde{W}: g_2^{d_2-1}(w_1) \neq 0, ..., W_2 &:= \mathcal{K}_{d_2}(g_2, w_2) \dots \text{UR von } \widetilde{W} \subseteq W, \\ B_2 &:= \left\{ g_2^{d_2-1}(w_2), g_2^{d_2-2}(w_2), ..., g_2(w_2), w_2 \right\} \\ \\ A_{g|_{W_2}}^{B_2, B_2} &= A_{g_2|_{W_2}}^{B_2, B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{split}$$

Nach $k \leq \dim(W)$ Schritten muss dies Konstruktion abbrechen und es gilt

$$\begin{split} W &= \mathcal{K}_{d_1}(g_1, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(g_2, w_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_{d_K}(g_k, w_k) \\ &= \mathcal{K}_{d_1}(g, w_1) \oplus \mathcal{K}_{d_2}(g, w_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_{d_2}(g, w_k) \end{split}$$

Vereinigt man die Basen $B_1,...,B_k$ zu einer Basis B von W (direkte Summe!), so erhält man

$$A_{g|_{W}}^{B,B} = \begin{pmatrix} A_{g|_{W_{1}}}^{B_{1},B_{1}} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & A_{g|_{W_{k}}}^{B_{k},B_{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{d_{1}}(0) & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & J_{d_{k}}(0) \end{pmatrix}$$

Jetzt: Übertragung auf $f=g+\lambda \mathrm{Id}_V$. Man kann sich leicht überlegen, dass jeder g-invariante Unterraum von V auch f-invariant ist und damit gilt:

$$\begin{split} \mathcal{K}_{d_i}(f,w_i) &= \mathcal{K}_{d_i}(g,w_i) \quad \text{für } i = 1,...,k \\ &\stackrel{\text{ÜA}}{\Longrightarrow} W = \mathcal{K}_{d_i}(f,w_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_{d_k}(f,w_k) \end{split}$$

Für $j \in \{1,...k\}$ und $0 \leq l \leq d_j - 1$ ist

$$\begin{split} f\big(g^l\big(w_j\big)\big) &= g\big(g^l\big(w_j\big)\big) + \lambda g^l\big(w_j\big) \\ &= \lambda g^l\big(w_j\big) + \underbrace{g^{l+1}\big(w_j\big)}_{=0, l = d_i - 1} \end{split}$$

$$\Longrightarrow A_{f|_{W}}^{B,B} = \begin{pmatrix} A_{f|_{W_{1}}}^{B_{1},B_{1}} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & A_{f|_{W_{k}}}^{B_{k},B_{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{d_{1}}(\lambda) & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & J_{d_{k}}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.28: Fortsetzung von Bsp 2.26

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{EW:} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 1, a(f, \lambda_1) = 4 = \dim(W_1) \\ \lambda_2 &= 2, a(f, \lambda_2) = 1 = \dim(W_2) \end{aligned}$$

 $\lambda_{1}=1$: $g^{1}_{|_{W_{1}}}$ nil
potent vom Grad $\lambda_{1}^{1}=3$ und $1< d^{1}_{1}<\dim(W_{1})$

Erinnerung: $g_1^1 = f - \lambda_1 I_d$. Für $w_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ ist $\begin{pmatrix} g_1^1 \end{pmatrix}^2 (w_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \neq 0$ und $\begin{pmatrix} g_1^1 \end{pmatrix}^3 (w_1) = 0 \in V = \mathbb{R}^5$.

Mit Lemma 2.21:

$$\left\{w_{1},\left(g_{1}^{\mathbf{1}}\right)^{1}\left(w_{1}^{\mathbf{1}}\right),\left(g_{1}^{\mathbf{1}}\right)^{2}\left(w_{1}^{\mathbf{1}}\right)\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Span} \Bigl\{ w_1, g_1^{\textcolor{red}{1}} \bigl(w_1^{\textcolor{red}{1}} \bigr), \bigl(g_1^{\textcolor{red}{1}} \bigr)^2 (w_1) \Bigr\} = \mathcal{K}_3 \bigl(g_1^{\textcolor{red}{1}}, w_1^{\textcolor{red}{1}} \bigr)$$

 $d_1^{\color{red} \textbf{1}} < \dim(W_1) \Longrightarrow \text{es existiert zu } W_{11} \coloneqq \mathcal{K}\big(g_1^{\color{red} \textbf{1}}, w_1^{\color{red} \textbf{1}}\big) \text{ ein } \widetilde{W}_1 \neq \{0\} \text{ mit } W_1 = W_{11} \oplus \widetilde{W}_1.$

Zum Beispiel: $w_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \Longrightarrow$

$$w_2^1, w_1^1, g_1^1(w_1^1), (g_1^1)^2(w_1^1)$$
 lin. unab.

$$\widetilde{W}_1 := \operatorname{Span}\{w_2^1\} \cap \mathcal{K}_3(g_1^1, w_1^1) = \{0\}$$

Es gilt $g_2^1 \coloneqq g_1^1|_{\widetilde{W}_1}$ nilpotent vom Grad 1

$$\Longrightarrow d_2^{\textcolor{red}{1}} = 1 \qquad W_1 = \mathcal{K}_3\big(g_1^{\textcolor{red}{1}}, w_1^{\textcolor{red}{1}}\big) \oplus \mathcal{K}_1\big(g_2^{\textcolor{red}{1}}, w_2^{\textcolor{red}{1}}\big)$$

Weitherhin kann man nachrechnen

$$\begin{split} \mathcal{K}_3(f,w_1^{\textcolor{red}{1}}) &= \mathrm{Span}\Big\{w_1,g_1^{\textcolor{red}{1}}(w_1^{\textcolor{red}{1}}), \big(g_1^{\textcolor{red}{1}}\big)^2(w_1^{\textcolor{red}{1}})\Big\} = \mathcal{K}_3\big(g_1^{\textcolor{red}{1}},w_1^{\textcolor{red}{1}}\big) \\ \mathcal{K}_1(f,w_2) &= \mathrm{Span}\big\{w_2^{\textcolor{red}{1}}\big\} = \mathcal{K}_1\big(g_2^{\textcolor{red}{1}},w_2^{\textcolor{red}{1}}\big) \end{split}$$

 $\lambda_2 = 2$:

$$g_1^2|_{W_2}$$
nil
potent vom Grad $\lambda_1^2=1$

$$\lambda_1^2 = \dim(W_2)$$

$$w_1^2 = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ -3)^T \neq 0$$

$$\left(g_1^2\right)^1\left(w_1^2\right)=0\in V\Longrightarrow W_2=\mathcal{K}_1(f,w_1^2)$$

$$A_{f|_{W_1}}^{B^1,B^1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f|_{W_2}}^{B^2,B^2} = (2)$$

$$\stackrel{\text{Ziel:}}{\Longrightarrow} A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

Satz 2.29: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V)<\infty$ und $f\in L(V,V)$. Ist $\lambda\in K$ ein Eigenwert von f, dann gilt für die $\lambda_j, 1\leq j\leq k$ aus Satz 2.27, dass

$$\begin{split} a(f,\lambda) &= \dim(W) = d_1 + \ldots + d_k \\ g(f,\lambda) &= k \end{split}$$

Beweis: Für den Unterraum U aus Satz 2.23/2.25 ist die Abbildung $f|_U=(f-\lambda \ \mathrm{Id})|_U$ bijektiv $\Longrightarrow \lambda$ ist kein Eigenwert von $f|_U$. Daraus erhält man

$$a(f,\lambda) = \dim W = d_1 + \dots + d_k$$

Zur Bestimmung von $g(f,\lambda)$ sei $v\in W$ ein beliebiger Vektor. Dann ist

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=0}^{d_j - 1} \mu_{jl} g^l(w_j)$$

und es gilt

$$\begin{split} f(v) &= \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{d_j-1} \mu_{jl} f\big(g^l\big(w_j\big)\big) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{d_j-1} \mu_{jl} g^l\big(w_j\big) + \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{d_j-1} \mu_{jl} g^{l+1}\big(w_j\big) \\ &= \lambda v + \underbrace{\sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{d_j-2} \mu_{jl} \overbrace{g^{l+1}\big(w_j\big)}^{\text{lin. unab.}}}_{=0} \end{split}$$

 $v \in \mathrm{Eig}(f,\lambda) \Longleftrightarrow \mu_{jl} = 0, 1 \leq j \leq k, 0 \leq l \leq d_j - 2$

$$\Longleftrightarrow v = \sum_{j=1}^k \mu_j g^{d_j-1} \big(w_j\big)$$

Für $v\neq 0$ muss mindestens ein Koeffizient $\mu_j\neq 0, j=1,...,k.$ Daraus folgt

$$\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Span} \ \underbrace{\left\{g^{d_1-1}(w_1),...,g^{d_k-1}(w_k)\right\}}_{\text{lin. unabh. wegen direkter Summe}}$$

Beispiel 2.30: Fortsetzung von Bsp. 2.28. Es gilt

$$\operatorname{Eig}(f,1) = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow g(f,1) = 2$$

$$\lambda_1 = 1 : a(f,1) = 4 = 3 + 1 = d_1^1 + d_2^1, g(f,1) = 2 = k$$

$$\lambda_2 = 2 : a(f,2) = 1 = d_1^2, g(f,2) = 1$$

Fazit: Für eine Eigenwert λ zu $f \in L(V, V)$ gilt:

• Die geomentrische Veilfachheit des Eigenwert λ ist gleich der Anzahl der Jordanblöcke zu dieem Eigenewrt in der entsprechenden Dartsellungsmatrix

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & J_{d_k}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

- Die abgebraishce Vielfachheit des Eigenwert λ ist gleich der SUmme der Dimensionen der zugehörigen Jordanblöcke
- In jedem Unterraum $\mathcal{K}_{d_i}\big(f,w_j\big)$ gehört genau ein Eigenvektor und seine Vielfachheit en.

Was gilt für weitere Eigenwerte?

Ist $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert von f, dann ist $\tilde{\lambda}$ auch ein Eigenwert der Einschränkung $f|_U \in L(U_\lambda,U_\lambda)$

- \Longrightarrow Man kann die Sätze 2.25-2.29 auf $f|U_{\lambda}$ anwenden. Damit erhält man
- $U_{\lambda} = X \oplus Y$
- $f|_X \tilde{\lambda} \mathrm{Id}_X$ ist bijektiv
- $f|_Y \tilde{\lambda} \mathrm{Id}_Y$ ist nilpotent
- Der UVR Y ist die direkte Summe von Krylorräumen
- Es gibt eine Darstellungsmatrix von $f|_{Y}$ bestehend aus Jordanblöcken

Da man dieses Argument für alle paarweise verschiedene Eigenewerte von f anwenden kann, erhält man.

Satz 2.31: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V,V)$. Zerfällt das charakteristische Polynom $p_f(.)$ in Linearfaktoren, so gibt es eine Basis B von V für welche die Dartsellungsmatrix in Jordan-Normalform ist, d.h.

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & J_{d_k}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

Beweis: s.o.

Marie Ennemond Jordan (fr. Mathematiker, 1838-1922) gab diese Form 1870 an. Zwei Jahre vor Jordan bewies Karl Weierstraß (dt. Mathematiker, 1815-1897) ein Resultat, aus dem die JNF folgt.