Vorlesungsskript

LinA I* WiSe 23/24

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation und mathematische Grundlagen

Was ist lineare Algebra bzw. analytische Geometrie?

- analytische Geometrie:
  Beschreibung von geometrischen Fragen mit Hilfe von Gleichungen, Geraden, Ebenen sowie die Lösungen von Gleichungen als geometrische Form
- lineare Algebra:
  die Wissenschaft der linearen Gleichungssysteme bzw der Vektorräume und der linearen Abbildungen zwischen ihnen

Wozu braucht man das?

- mathematische Grundlage für viele mathematische Forschung z.B. in der algebraischen Geometrie, Numerik, Optimierung
- viele Anwendungen z.B. Page-Rank-Algorithmus, lineare Regression
- oder Optimierung:
  linear: Beschreibung zulässiger Punkte als Lösung von (Un)-Gleichungen
  nichtlinear: notwendige Optimalitätsbedingungen

1.1. Mengen

Der Mengenbegriff wurde von Georg Cantor (dt. Mathematiker, 1845-1918) eingeführt.

Definition 1.1: Mengen
Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten x unsere Anschauung order unseres Denkens, welche **Elemente** von M genannt werden, zu einem Ganzen.

Bemerkungen:

Für jedes Objekt x kann man eindeutig feststellen, ob es zu einer Menge M gehört oder nicht.

$$x \in M \to x \text{ ist Element von } M$$
$$x \notin M \to x \text{ ist nicht Element von } M$$

Beispiel 1.2: Beispiel für Mengen

- {rot, gelb, grün}
- {1, 2, 3, 4}
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}\right\}$
- $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl}\}$
- $\emptyset$ bzw. $\{\} \mathrel{\widehat{=}}$ leere Menge

Definition 1.3: Teilmenge

Seien M, N Mengen.

1. M heißt **Teilmenge** von N, wenn jedes Element von M auch Element von N ist.
   Notation: $M \subseteq N$
2. M und N heißen gleich, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.
   Notation $M = N$
   Falls das nicht gilt, schreiben wir $M \neq N$

M heißt **echte Teilmenge** von N, wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gilt.
Notation: $M \subset N$

Nutzt man die Aussagenlogik, kann man diese Definitionen Umformulieren zu:

- $M \subseteq N \iff (\forall x : x \in M \implies x \in N)$
- $M = N \iff (M \subseteq N \land N \subseteq M)$
- $M \subset N \iff (M \subseteq N \land M \neq N)$

Kommentare:

- $\iff$ heißt "genau dann, wenn"
- $\forall$ heißt "für alle"
- $\land$ heißt "und"
- : heißt "mit der Eigenschaft"

Satz 1.4: Für jede Menge M gilt:

1) $M \subseteq M$ 2) $\emptyset \subseteq M$ 3) $M \subseteq \emptyset \implies M = \emptyset$

Beweis:

zu 1) Direkter Beweis (verwenden der Definitionen um Aussage zu folgern). Die Aussage:

$$x \in M \implies x \in M$$

folgt aus Def. 1.1. Daraus folgt aus Def 1.3, 1, dass $M \subseteq M$.

zu 2) Widerspruchsbeweis
Beweis der Aussage durch Annahme des Gegenteils und Herleitung eines Widerspruchs. Annahme: Es existiert eine Menge M, sodass $\emptyset \nsubseteq M$. Dann gilt: es existiert ein $x \in \emptyset$ mit $x \notin M$.

Aber: Die leere Menge enthält keine Elemente $\Longrightarrow \lightning \Longrightarrow$ Es existiert keine Menge M mit $\emptyset \not\subseteq M \Longrightarrow$ Behauptung

zu 3) Nach 2. $\emptyset \subseteq M$, wir wissen $M \subseteq \emptyset$. Nach Def. 1.3, 2 $\Longrightarrow M = \emptyset$

□

Beispiel 1.5: Ob ein Objekt ein Element oder eine Teilmenge einer Mengen ist, ist vom Kontext abhängig. Betrachten wir folgende Menge:

$$M := \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$$

D.h. die Elemente dieser Menge M sind die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Damit gilt $\mathbb{N} \in M$ aber $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

Definition 1.6: Mengenoperationen

Seien M, N Mengen.

1. Man bezeichnet dei Menge der Elemente, die sowhol in M als auch in N enthalten sind, als **Durchschnitt** von M und N
$$M \cap N = \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N)\}$$
2. Man bezeichnet die Menge der Elemente, die entweder in M oder in N enthalten sind oder in beiden enthalten sind, als **Vereinigung** von M und N
$$M \cup N = \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$$
3. Man bezeichnet die Menge der Elemente, die in M aber nicht in N enthalten sind, als **Differenz** von M und N
$$\begin{aligned} M \setminus N &= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin N)\} \\ &= \{x \in M \mid x \notin N\} \end{aligned}$$

Beispiel 1.7:

Für $-\mathbb{N} := \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt:

- $\mathbb{N} \cup -\mathbb{N} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \emptyset$

Wichtiges Beispiel für Mengen sind Intervalle reeller Zahlen

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

Dies nennt man ein abgeschlossenes Intervall (die Grenzen sind enthalten). Sei jetzt $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$\begin{aligned} [a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ oder} \\ ]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}$$

Diese Intervalle nennt man halboffene Intervalle (genau eine der Grenzen ist enthalten). Das Intervall

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

heißt offenes Intervall (keine der Grenzen ist enthalten).

Für $M := \{4, 6, 8\}$ und $N := \{8, 10\}$ gilt:

- $M \cup N = \{4, 6, 8, 10\}$
- $M \cap N = \{8\}$
- $M \setminus N = \{4, 6\}$
- $N \setminus M = \{10\}$

Satz 1.8: Für zwei Mengen M, N gelte $M \subseteq N$. Dann sind folgende Aussagen Äquivalent:

1) $M \subset N$ 2) $N \setminus M \neq \emptyset$

Beweis:

Behauptung: 1) $\iff$ 2)

zu zeigen: 1) $\implies$ 2) und 2) $\implies$ 1)

1) $\implies$ 2): Es gilt: $M \neq N$. Dann existiert $x \in N$ mit $x \notin M$. Dann gilt $x \in N \setminus M$. Also $N \setminus M \neq \emptyset$.

2) $\implies$ 1): Es gilt $N \setminus M \neq \emptyset$. Dann existiert ein $x \in N$ mit $x \notin M$. Daher gilt $N \neq M$. Es gilt außerdem: $M \subseteq N$. Daraus folgt $M \subset N$.

□