

Vorlesungsskript

LinA I* WiSe 23/24

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation und mathematische Grundlagen	1
1.1. Mengen	1
1.2. Relationen	6

1. Motivation und mathematische Grundlagen

Was ist lineare Algebra bzw. analytische Geometrie?

- analytische Geometrie:
Beschreibung von geometrischen Fragen mit Hilfe von Gleichungen, Geraden, Ebenen sowie die Lösungen von Gleichungen als geometrische Form
- lineare Algebra:
die Wissenschaft der linearen Gleichungssysteme bzw der Vektorräume und der linearen Abbildungen zwischen ihnen

Wozu braucht man das?

- mathematische Grundlage für viele mathematische Forschung z.B. in der algebraischen Geometrie, Numerik, Optimierung
- viele Anwendungen z.B. Page-Rank-Algorithmus, lineare Regression
- oder Optimierung:
linear: Beschreibung zulässiger Punkte als Lösung von (Un)-Gleichungen
nichtlinear: notwendige Optimalitätsbedingungen

1.1. Mengen

Der Mengenbegriff wurde von Georg Cantor (dt. Mathematiker, 1845-1918) eingeführt.

Definition 1.1: Mengen

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten x unsere Anschauung oder unseres Denkens, welche **Elemente** von M genannt werden, zu einem Ganzen.

Bemerkungen:

Für jedes Objekt x kann man eindeutig feststellen, ob es zu einer Menge M gehört oder nicht.

$$\begin{aligned}x \in M &\rightarrow x \text{ ist Element von } M \\x \notin M &\rightarrow x \text{ ist nicht Element von } M\end{aligned}$$

Beispiel 1.2: Beispiel für Mengen

- {rot, gelb, grün}
- {1, 2, 3, 4}
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl}\}$
- \emptyset bzw. $\{\} \hat{=}$ leere Menge

Definition 1.3: Teilmenge

Seien M, N Mengen.

1. M heißt **Teilmenge** von N , wenn jedes Element von M auch Element von N ist.

Notation: $M \subseteq N$

2. M und N heißen gleich, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.

Notation $M = N$

Falls das nicht gilt, schreiben wir $M \neq N$

M heißt **echte Teilmenge** von N , wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gilt.

Notation: $M \subset N$

Nutzt man die Aussagenlogik, kann man diese Definitionen Umformulieren zu:

- $M \subseteq N \iff (\forall x : x \in M \implies x \in N)$
- $M = N \iff (M \subseteq N \wedge N \subseteq M)$
- $M \subset N \iff (M \subseteq N \wedge M \neq N)$

Kommentare:

- \iff heißt "genau dann, wenn"
- \forall heißt "für alle"
- \wedge heißt "und"
- $:$ heißt "mit der Eigenschaft"

Satz 1.4: Für jede Menge M gilt:

$$1) M \subseteq M$$

$$2) \emptyset \subseteq M$$

$$3) M \subseteq \emptyset \implies M = \emptyset$$

Beweis:

zu 1) Direkter Beweis (verwenden der Definitionen um Aussage zu folgern). Die Aussage:

$$x \in M \implies x \in M$$

folgt aus Def. 1.1. Daraus folgt aus Def 1.3, 1, dass $M \subseteq M$.

zu 2) Widerspruchsbeweis

Beweis der Aussage durch Annahme des Gegenteils und Herleitung eines Widerspruchs. Annahme: Es existiert eine Menge M , sodass $\emptyset \not\subseteq M$. Dann gilt: es existiert ein $x \in \emptyset$ mit $x \notin M$.

Aber: Die leere Menge enthält keine Elemente $\Rightarrow \nexists \Rightarrow$ Es existiert keine Menge M mit $\emptyset \subsetneq M \Rightarrow$ Behauptung

zu 3) Nach 2. $\emptyset \subseteq M$, wir wissen $M \subseteq \emptyset$. Nach Def. 1.3, 2 $\Rightarrow M = \emptyset$

□

Beispiel 1.5: Ob ein Objekt ein Element oder eine Teilmenge einer Mengen ist, ist vom Kontext abhängig. Betrachten wir folgende Menge:

$$M := \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$$

D.h. die Elemente dieser Menge M sind die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Damit gilt $\mathbb{N} \in M$ aber $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

Definition 1.6: Mengenoperationen

Seien M, N Mengen.

1. Man bezeichnet die Menge der Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind, als **Durchschnitt** von M und N

$$M \cap N = \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N)\}$$

2. Man bezeichnet die Menge der Elemente, die entweder in M oder in N enthalten sind oder in beiden enthalten sind, als **Vereinigung** von M und N

$$M \cup N = \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$$

3. Man bezeichnet die Menge der Elemente, die in M aber nicht in N enthalten sind, als **Differenz** von M und N

$$\begin{aligned} M \setminus N &= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin N)\} \\ &= \{x \in M \mid x \notin N\} \end{aligned}$$

Beispiel 1.7:

Für $-\mathbb{N} := \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt:

- $\mathbb{N} \cup -\mathbb{N} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \emptyset$

Wichtiges Beispiel für Mengen sind Intervalle reeller Zahlen

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

Dies nennt man ein abgeschlossenes Intervall (die Grenzen sind enthalten). Sei jetzt $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ oder }]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Diese Intervalle nennt man halboffene Intervalle (genau eine der Grenzen ist enthalten). Das Intervall

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

heißt offenes Intervall (keine der Grenzen ist enthalten).

Für $M := \{4, 6, 8\}$ und $N := \{8, 10\}$ gilt:

- $M \cup N = \{4, 6, 8, 10\}$
- $M \cap N = \{8\}$
- $M \setminus N = \{4, 6\}$
- $N \setminus M = \{10\}$

Satz 1.8: Für zwei Mengen M, N gelte $M \subseteq N$. Dann sind folgende Aussagen Äquivalent:

$$1) M \subset N$$

$$2) N \setminus M \neq \emptyset$$

Beweis:

Behauptung: 1) \Leftrightarrow 2)

zu zeigen: $1) \implies 2)$ und $2) \implies 1)$

1) \Rightarrow 2): Es gilt: $M \neq N$. Dann existiert $x \in N$ mit $x \notin M$. Dann gilt $x \in N \setminus M$. Also $N \setminus M \neq \emptyset$.

2) \Rightarrow 1): Es gilt $N \setminus M \neq \emptyset$. Dann existiert ein $x \in N$ mit $x \notin M$. Daher gilt $N \neq M$. Es gilt außerdem: $M \subseteq N$. Daraus folgt $M \subset N$.

Satz 1.9: Seien M, N, L Mengen. Dann gelten Folgende Aussagen:

1. $M \cap N \subseteq M$ und $M \subseteq M \cup N$
2. $M \setminus N \subseteq M$
3. Kommutativgesetze:

$$M \cap N = N \cap M \text{ und } M \cup N = N \cup M$$

- #### 4. Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} M \cap (N \cup L) &= (M \cap N) \cup (M \cap L) \\ M \cup (N \cap L) &= (M \cup N) \cap (M \cup L) \end{aligned}$$

- ### 5. Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} M \cup (N \cap L) &= (M \cup N) \cap (M \cup L) \\ M \cap (N \cup L) &= (M \cap N) \cup (M \cap L) \\ M \setminus (N \cap L) &= (M \setminus N) \cup (M \setminus L) \\ M \setminus (N \cup L) &= (M \setminus N) \cap (M \setminus L) \end{aligned}$$

Beweis: Es gilt $x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M \wedge x \in N$. Die Konjunktion zweier Aussagen ist symmetrisch bezüglich der Aussage. D.h. $A \wedge B \iff B \wedge A$. Es gilt also

$$(x \in M) \wedge (x \in N) \iff (x \in N) \wedge (x \in M)$$

Verwenden wir die Definition der Schnittmenge (1.6) so erhalten wir

$$(x \in N) \wedge (x \in M) \iff x \in N \cap M$$

Aus der Kette der Äquivalenzumformungen folgt $M \cap N = N \cap M$.

□

Etwas kompakter für das erste Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}
 x \in M \cup (N \cap L) &\iff (x \in M) \vee (x \in N \cap L) \\
 &\iff (x \in M) \vee ((x \in N) \wedge (x \in L)) \\
 &\iff (x \in M \vee x \in N) \wedge (x \in M \vee x \in L) \\
 &\iff (x \in M \cup N) \wedge (x \in M \cup L) \\
 &\iff x \in (M \cup N) \cap (M \cup L)
 \end{aligned}$$

Damit ist $M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$.

□

Die übrigen Aussagen zeigt man analog. *Übung*

Damit ist $M \cup N \cup L$ für die Mengen M, N, L wohldefiniert. Dies kann auf “viele” Mengen verallgemeinert werden:

Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge und ist für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gegeben, dann sind:

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{i \in I} M_i &:= \{x \mid \exists i \in I \text{ mit } x \in M_i\} \\
 \bigcap_{i \in I} M_i &:= \{x \mid \forall i \in I \text{ mit } x \in M_i\}
 \end{aligned}$$

Die Menge I heißt auch **Indexmenge**. Für $I = \{1, \dots, n\}$ verwendet man auch die Notation

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{i=1}^n M_i &:= \{x \mid \exists i \in I \text{ mit } x \in M_i\} \\
 \bigcap_{i=1}^n M_i &:= \{x \mid \forall i \in I \text{ mit } x \in M_i\}
 \end{aligned}$$

Definition 1.10: Kardinalität, Potenzmenge

Sei M eine endliche Menge, d.h. M enthält endlich viele Elemente.

Die **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** von M , bezeichnet mit $|M|$ oder $\#M$ ist die Anzahl von Elementen in M .

Die **Potenzmenge** von M , bezeichnet mit $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M . D.h.

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

Beispiel 1.11:

Die leere Menge \emptyset hat die Kardinalität Null. Es gilt $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$.

Für $M = \{2, 4, 6\}$ gilt $|M| = 3$. $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$.

Man kann zeigen: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$. Deswegen wird auch die Notation 2^M für die Potenzmenge von M verwendet.

1.2. Relationen

Definition 1.12: Kartesisches Produkt

Sind M und N zwei Mengen, so heißt die Menge

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$$

das **kartesische Produkt** von M und N .

Sind n Mengen M_1, \dots, M_n gegeben, so ist deren kartesisches Produkt gegeben durch:

$$M_1 \times \dots \times M_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in M_1 \wedge \dots \wedge x_n \in M_n\}$$

Das n -fache kartesische Produkt einer Menge von M ist:

$$M^n := M \times \dots \times M := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

Ein Element $(x, y) \in M \times N$ heißt geordnetes Paar und ein Element

$(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \dots \times M_n$ heißt **(geordnetes) n -Tupel**.

Ist mindestens eine der auftretenden Mengen leer, so ist auch das resultierende kartesische Produkt leer, d.h. die leere Menge. Das kartesische Produkt wurde nach Rene Decartes benannt. Rene Decartes war ein französische Mathematiker (1596-1650) und ein Begründer der analytischen Geometrie.

Beispiel 1.13: Das kartesische Produkt zweier Intervalle.

Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $[c, d] \subset \mathbb{R}$ zwei abgeschlossene Intervalle von reellen Zahlen. Dann ist das kartesische Produkt beider Intervalle gegeben durch:

$$[a, b] \times [c, d] := \{(x, y) \mid x \in [a, b] \wedge y \in [c, d]\}$$

Das kartesische Produkt ist nicht kommutativ. Beweis durch Gegenbeispiel.

Definition 1.14: Relationen

Seien M und N nichtleere Mengen. Eine Menge $R \subseteq M \times N$ heißt **Relation** zwischen M und N . Ist $M = N$, so nennt man R **Relation auf M** . Für $(x, y) \in R$ schreibt man $x \sim_R y$ oder $x \sim y$, wenn die Relation aus dem Kontext klar ist. Ist mindestens eine der beiden Mengen leer, dann ist auch jede Relation zwischen den beiden Mengen die leere Menge.

Beispiel 1.15: Sei $M = \mathbb{N}$ und $N = \mathbb{Z}$. Dann ist

$$R := \{(x, y) \in M \times N \mid x + y = 1\}$$

eine Relation zwischen M und N . Es gilt

$$R = \{(1, 0), (2, -1), (3, -2), \dots\} = \{(n, -n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Definition 1.16: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv

Es sei M eine nicht leere Menge. Eine Relation auf M heißt:

1. reflexiv:

$$\forall x \in M : x \sim x$$

2. symmetrisch:

$$\forall x, y \in M : x \sim y \implies y \sim x$$

3. antisymmetrisch:

$$\forall x, y \in M : x \sim y \wedge y \sim x \implies x = y$$

4. transitiv:

$$\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$$

Falls die Relation R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, so nennt man R eine **Äquivalenzrelation** auf M . Ist R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, so nennt man R eine **partielle Ordnung** auf M .

Beispiel 1.17: $M = \mathbb{R}$

- Die Relation $<$ auf $M = \mathbb{R}$ ist transitiv, aber weder reflexiv noch symmetrisch und auch nicht antisymmetrisch.
- Die Relation \leq auf $M = \mathbb{R}$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. Sie ist nicht symmetrisch. \leq ist somit eine partielle Ordnung.
- Die Relation $=$ auf \mathbb{R} ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Also ist $=$ eine Äquivalenzrelation. (Äquivalenzrelationen können auch antisymmetrisch sein)

Beispiel 1.18: Interpretiert man “Pfeile” als Objekte mit gleicher Orientierung und Länge, erhält man die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\iff x \text{ und } y \text{ haben die gleiche Länge und Orientierung}$$

Auf Grund der Transitivität sind somit alle Pfeile einer vorgegebenen Orientierung und Länge äquivalent zu dem Pfeil, der im Koordinatenursprung startet und die gleiche Länge sowie Orientierung besitzt. Somit können wir Vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Repräsentant einer ganzen Klasse von Pfeilen interpretieren. Alle zueinander äquivalente Pfeile haben gemeinsam, dass die Differenz zwischen End- und Anfangspunkt genau den Vektor x ergeben.

Als Formalisierung erhält man:

Definition 1.19: Äquivalenzklassen, Quotientenmenge

Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge M . Die Äquivalenzklasse eines Element $\bar{a} \in M$ ist definiert durch:

$$[\bar{a}] := \{a \in M \mid a \sim \bar{a}\}$$

Ist die Relation nicht aus dem Kontext klar, schreibt man $[\bar{a}]_{\sim}$.

Elemente einer Äquivalenzklasse werden als **Vertreter** oder **Repräsentanten** der Äquivalenzklasse bezeichnet. Die Menge aller Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation \sim in einer Menge M , d.h.

$$M / \sim := \{[a]_{\sim} \mid a \in M\}$$

wird als **Faktormenge** oder **Quotientenmenge** bezeichnet.

Beispiel 1.20: (Vortsetzung von Beispiel 1.18)

Die Menge aller Pfeile gleicher Länge und Orientierung bilden eine solche Äquivalenzklasse, welche durch den Vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ repräsentiert wird. Die Menge der Vektoren $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bilden die Quotientenklasse.

Beispiel 1.21: Für eine gegebene Zahl $x \in \mathbb{N}$ ist die Menge:

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ ist ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} , denn

- reflexiv: $a \sim a, (a, a) \in R_n : \Leftrightarrow a - a = 0 \checkmark$
- symmetrie:
 $a \sim b \Rightarrow (a, b) \in R_n \Rightarrow a - b \text{ ist ohne Rest teilbar} \Rightarrow a - b = k \cdot n$
 $\Rightarrow b - a = -k \cdot n \Rightarrow (b, a) \in R_n \Rightarrow b \sim a \checkmark$
- transitiv: zz: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$$a \sim b \Rightarrow a - b = k \cdot n$$

$$b \sim c \Rightarrow b - c = l \cdot n$$

$$\text{Gleichungen addieren: } a - c = n(k + l) \Rightarrow a \sim c \checkmark$$

Für a wird die Äquivalenzklasse $[a]$ auch die Restklasse von a modulo n genannt.

$$[a] = a + n \cdot z = \{a + nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

Die Äquivalenzrelation R_n definiert auch eine Zerlegung der Menge \mathbb{Z} in disjunkte Teilmengen, nämlich

$$[0] \cup [1] \cup \dots \cup [n-1] = \bigcup_{a=0}^{n-1} [a] = \mathbb{Z}$$

Es gilt allgemein: Ist \sim eine Äquivalenzrelation auf M , so ist M die Vereinigung aller Äquivalenzklassen.

- “ \subseteq ”:

$$M = \bigcup_{a \in M} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in M} [a] \quad \checkmark$$

- “ \supseteq ”:

$$[a] \subset M \implies \bigcup_{a \in M} [a] \subseteq M \quad \checkmark$$

□

Satz 1.22: Ist R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M und sind $a, b \in M$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$1) [a] = [b] \qquad 2) [a] \cap [b] \neq \emptyset \qquad 3) a \sim b$$

Beweis: Durch Ringschluss

zu zeigen: $1 \implies 2, 2 \implies 3, 3 \implies 1$

$1 \implies 2$:

$$\text{Wegen } a \sim a \implies a \in [a] = [b] \implies a \in [a] \cap [b] \implies [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$2 \implies 3$:

Aus $[a] \cap [b] \neq \emptyset \implies$ es existiert $c \in [a] \cap [b]$. Nach Definition gilt dann $c \sim a$ wegen der Symmetrie von $a \sim c$. Nach Definition auch $c \sim b$. Wegen der Transitivität der Relation gilt dann auch $a \sim b$

$3 \implies 1$:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } a \sim b. \text{ Sei } c \in [a] \implies c \sim a. \text{ Wegen der Transitivität folgt} \\ c \sim b \implies c \in [b] \implies [a] \subseteq [b]. \text{ Analog folgt } [b] \subseteq [a]. \end{aligned}$$

□

Aus Satz 1.22 2) folgt, dass die Äquivalenzklassen eine disjunkte Zerlegung der Menge M darstellen.

Definition 1.23:

Sei M eine Menge und sei für jedes Element $m \in M$ eine weitere Menge S_m gegeben. Für $\mathcal{S} := \{S_m \mid m \in M\}$ ist die Teilmengenrelation \subseteq eine partielle Ordnung. Die Menge \mathcal{S} heißt dann **partiell geordnet**. Eine Menge $\hat{S} \in \mathcal{S}$ heißt **maximales Element** von \mathcal{S} (bezüglich \subseteq), wenn aus $S \in \mathcal{S}$ und $\hat{S} \in \mathcal{S}$ folgt, dass $S = \hat{S}$ ist. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{S}$ heißt **Kette** (bezüglich \subseteq), wenn für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ gilt, dass $K_1 \subseteq K_2$ oder $K_2 \subseteq K_1$. Ein Element $\hat{K} \in \mathcal{S}$ heißt **obere Schranke** der Kette \mathcal{K} , wenn $K \subseteq \hat{K}$ für alle $K \in \mathcal{K}$ gilt.