Vorlesungsskript

LinA II* SoSe 24

Inhaltsverzeichnis

Definitionen

1 .

2 .

Wiederholung:

K sei ein beliebiger Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum,

$$L(V, V) = \{f : V \to V \mid f \text{ lin. Abbildung}\}$$

$f \in L(V, V)$ heißt Endomorphismus. Ist $f \in L(V, V)$, so läßt sich f bezüglich einer Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von V eindeutig durch eine Matrix

$$A_f^{B,B} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n}$$

Es gilt

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \qquad 1 \leq j \leq n$$

Abbildung

$$F : L(V, V) \to K^{n,n}$$

ist ein Isomorphismus.

Basiswechsel? Basen B, C von V

Bezüglich Basis B   Bezüglich Basis C

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rr, "?"] \arrow[dr, "\Phi_B"'] & & K^n \arrow[dl, "\Phi_C"] \\
& V &
\end{tikzcd}
\qquad \Rightarrow \; ? = \Phi_{B,C} = \Phi_C^{-1} \circ \Phi_B$$

(siehe Lem. 5.27, LinA I*)

Eine zentrale Frage: Sei $f \in L(V, V)$, existiert eine Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine möglichst einfache Form besitzt?

z.B. Diagonalmatrix:

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wir werden:

- Endomorphismen charakterisieren, die sich durch eine Diagonalmatrix beschreiben lassen.

  Wenn ja: Dann gilt $f(v_j) = \lambda_j v_j$

  $\Longrightarrow$ f ist eine Streckung von v_j um den Faktor λ_j.
- Die Jordan-Normalform herleiten.

1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte charakterisieren zentrale Eigenschaften linearer Abbildungen. Z.B.

- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Eigenschaften von physikalischen Systemen

  $\rightarrow$ gewöhnliche Differentialgleichungen

  $\rightarrow$ Eigenschwingungen / Resonanzkatastrophe

  Zerstörung einer Brücke über dem Fluß Maine / Milleanium-Bridge London

1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 1.1: Eigenwert und Eigenvektor (Endomorphismus)

Sei V ein K-Vektorraum. Ein Vektor $v \in V, v \neq 0_V$, heißt **Eigenvektor** von $f \in L(V, V)$, falls $\lambda \in K$ mit

$$f(v) = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der **Eigenwert** zum Eigenvektor $v \in V$.

Definition 1.2: Eigenwert und Eigenvektor (Matrix)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Ein Vektor $v \in K^n$, $v \neq 0_{K^n}$, heißt Eigenvektor von $A \in K^{n,n}$, falls $\lambda \in K$ mit

$$Av = \lambda v$$

existiert. Der Skalar $\lambda \in K$ heißt der Eigenwert zum Eigenvektor $v \in V$.

Bemerkungen:

- In Def 1.1 kann $\dim(V) = \infty$ sein. Dies ist für viele Definitionen/Aussagen in denen wir Endomorphismen betrachten, der Fall.
- Für $\dim(V) < \infty$ kann man jedes $f \in L(V, V)$ eindeutig mit einer Matrix A identifizieren. Dann: Def 1.2 ist Spezialfall von Def 1.1.

- **Achtung:** $0 \in K$ kann ein Eigenwert sein:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Der Nullvektor $0 \in V$ ist **nie** ein Eigenvektor.

  Für $\dim(V) = 0$ besitzt f keinen Eigenvektor für $f \in L(V, V)$.
- Ist v Eigenvektor zum Eigenwert λ, so ist auch αv für jedes $\alpha \in K \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor

  $$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Zentrale Frage dieses Kapitels:

Existens von Eigenwerten? Wenn sie existieren: Weitere Eigenschaften?

Beispiel 1.3: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und V der unendlichdimensionale Vektorraum der auf I beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Ein Endomorphismus $f \in L(V, V)$ ist gegeben durch

$$f(\varphi) = \varphi' \qquad \forall \varphi \in V$$

Die Abbildung f hat jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ als Eigenwert, da für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Funktion

$$\varphi(x) := c \cdot e^{\lambda x} \; \neq \; 0_V \qquad \forall x \in I$$

gilt

$$f(\varphi(x)) = f\left(c \cdot e^{\lambda x}\right) = \lambda\left(c e^{\lambda x}\right) = \lambda \varphi(x)$$

Hier: $\varphi'(x) = f(\varphi)$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Beispiel 1.4: Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Sei x ein Eigenvektor, dann gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\iff x_2 = \lambda x_1 \;\text{ und }\; -x_1 = \lambda x_2$$

O.B.d.A: $x_2 \neq 0$

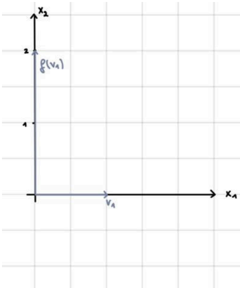
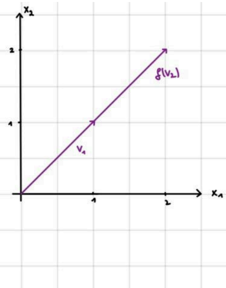
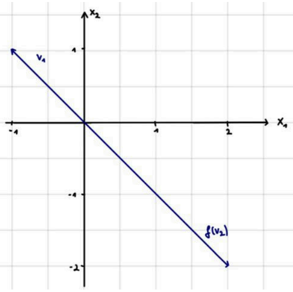
$$\implies x_2 = \lambda(-\lambda x_2) = -\lambda^2 x_2 \implies -\lambda^2 = 1,\; \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda^2 \geq 0 \implies -\lambda^2 \leq 0 \;\lightning$$

D.h. f besitzt keinen Eigenwert/-vektor. Für $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ändert sich dies! $\implies$ Die Wahl von K entscheidet!

Beispiel 1.5: Wieder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, diesmal

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für $v_1 = \binom{1}{0}, v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = (-1, 1)$ dass $f(v_1) = \binom{0}{2}, f(v_2) = \binom{2}{2} = 2 \cdot v_2$ und $f(v_3) = \binom{2}{-2} = (-2) \cdot v_3$.

Beobachtung: $\dim(V) = 2$

zwei Eigenwerte: $2, -2$, es existieren keine Weiteren,

zwei Eigenvektoren: $v_2 = \binom{1}{1}, v_3 = \binom{-1}{1}$, sind linear unabhängig

Lemma 1.6: Es sei $f \in L(V, V)$ ein Endomorphismus. Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von f sind linear unabhängig.

Beweis: Es seien $v_1, ..., v_m$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$ von f. Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: $m = 1$, $\lambda_1, v_1 \neq 0 \Longrightarrow v_1$ lin. unabh.

Induktionsschritt: $m - 1 \to m$

Induktionsvorraussetzung: Behauptung gelte für $m - 1$

Betrachte

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0 \ (*) \quad \alpha_m \in K$$
$$\overset{\text{EV, f()}}{\Longrightarrow} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$
$$\overset{(*)\cdot\lambda_m}{\Longrightarrow} \lambda_m \alpha_a v_1 + \lambda_m \alpha_2 v_2 + ... + \lambda_m \alpha_m v_m = 0$$

Wir bilden die Differenz aus Zeile 1 und 2

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_1 v_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_2 v_2 + ... + \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} \alpha_{m-1} v_{m-1} = 0$$

$v_1, ..., v_{m-1}$ lin. unabh. $\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{m-1} = 0$ Einsetzen in (*) liefert

$$\alpha_m \underbrace{v_m}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$$

$\Longrightarrow v_1, ..., v_m$ lin unabh.

□

Folgerung: Es gibt höchstens $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte für $n = \dim(V) < \infty$.

Definition 1.7: Eigenraum

Ist $f \in L(V,V)$ und $\lambda \in K$, so heißt

$$\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

der **Eigenraum** von f bezüglich λ.

Es gilt:

- $\operatorname{Eig}(f,\lambda) \subseteq V$ ist ein Untervektorraum
- λ ist Eigenwert von $f \Longleftrightarrow \operatorname{Eig}(f,\lambda) \neq \{0\}$
- $\operatorname{Eig}(f,\lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.
- $\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})$
- $\dim(\operatorname{Eig}(f,\lambda)) = \dim(V) - \operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id})$
- Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschiedene Eigenwerte, so ist $\operatorname{Eig}(f,\lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(f,\lambda_2) = \{0\}$

Die letzte Aussage kann verallgemeinert werden zu:

Lemma 1.8: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V,V)$. Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m, m \leq n$, paarweise verschiedene Eigenwerte von f, so gilt

$$\operatorname{Eig}(f,\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \operatorname{Eig}(f,\lambda_j) = \{0\} \qquad \forall i = 1, ..., m$$

Beweis: Summe von Vektorräumen, vgl. Def 3.32 LinA I.

Sei $i \in \{1, ..., m\}$ fest gewählt.

$$v \in \operatorname{Eig}(f,\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \operatorname{Eig}(f,\lambda_j)$$

Also ist

$$v = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j \quad \text{für } v_j \in \operatorname{Eig}(f,\lambda_j) \quad \text{für} \quad j \neq i$$

$\Longrightarrow -v + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} v_j = 0$ Aus Lemma 1.6 folgt damit $v = 0$.

□

Über die Identifikation von Endomorphismen und Matrizen für $\dim(V) < \infty$ erhält man:

Korollar 1.9: Für ein $n \in \mathbb{N}$ und einem Körper K sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt für jedes $\lambda \in K$, dass

$$\dim(\operatorname{Eig}(A, \lambda)) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$$

Insbesondere ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, wenn $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$ ist.

Definition 1.10: Geometrische Vielfachheit

Ist $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so heißt

$$g(f, \lambda) := \dim(\operatorname{Eig}(f, \lambda)) \qquad (> 0)$$

die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ.

1.2. Das charakteristische Polynom

Wir bestimmt man Eigenwerte?

Lemma 1.11: Seien $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann ist

$$\det(A - \lambda I_n)$$

ein Polynom n-ten Grades in λ.

Beweis: Mit der Leibniz-Formel folgt,

$$\det(\underbrace{A - \lambda I_n}_{\tilde{a}_{ij}}) = \sum_{\sigma \in S_1} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \tilde{a}_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{n\sigma(n)}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)}_{\sigma = \mathrm{Id}}}_{\in \mathcal{P}_n \text{ in } \lambda} + \underbrace{\underbrace{S}_{\sigma \neq \mathrm{Id}}}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}$$

Weiter gilt:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + \ldots + a_{nn}) + \underbrace{S_1}_{\in \mathcal{P}_{n-2} \text{ in } \lambda}$$

Insgesamt: Es existieren Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in K$ mit

$$\det(A - \lambda I_n) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$
$$a_n = (-1)^n$$
$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} (a_{11} + \ldots + a_{nn})$$

man kann zeigen: $a_0 = \det(A)$

□

Man nennt $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ auch die **Spur** von A.

Definition 1.12: Charakteristisches Polynom

Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Dann heißt das Polynom n-ten Grades

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

das charakteristische Polynom zu A.

Lemma 1.13: Sei $A \in K^{n,n}$ und $\lambda \in K$. Der Skalar λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn

$$P_A(\lambda) = 0$$

gilt.

Beweis: Die Gleichung

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I_n) v = 0$$

hat genau eine Lösung $v \in V, v \neq 0$, wenn $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$, vgl. Satz 6.3 aus LinA I. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0, \text{vlg. D10 aus LinA I}$$

□

Beispiel 1.14: Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus liefert

$$P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 8 & 16 \\ 0 & 7-\lambda & 8 \\ 0 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(-35 - 7\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 32)$$
$$= (3-\lambda)[(7-\lambda)(-5-\lambda) - 8(-4)] - 8(0-0) + 16(0-0)$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$\Longrightarrow$ Eigenwerte sind $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

Zugehörige Eigenvektoren?

$\lambda = -1$:

$$Av = -v \Longleftrightarrow (A + I_3)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen: $\Longrightarrow v_2 = -v_3, v_1 = -2v_3$

Damit ist z.B.: $w_1 = (2, 1, -1)^\top$ Eigenvektor.

$\lambda = 3$:

$$(A - 3I_3)v = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow v_2 + 2v_3 = 0$$

Damit sind z.B.: $w_2 = (1, 2, -1)^\top, w_3 = (-1, 2, -1)$ Eigenvektoren.

$\lambda = -1$: einfache Nullstelle und $\dim(\mathrm{Span}(w_1)) = 1$ passt zu $\mathrm{rg}(A - (-1)I_n) = 2$ und $\dim(\mathrm{Eig}(A_1 - 1)) = 3 - 2 = 1$.

$\lambda = -3$: doppelte Nullstelle und $\dim(\mathrm{Span}(w_2, w_3)) = 2$ passt zu $\mathrm{rg}(A - 3I_n) = 1$ und $\dim(\mathrm{Eig}(A, 3)) = 3 - 1 = 2$

Lemma 1.15: Sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt

$$p_A(.) = p_{A^\top}(.)$$

D.h. eine Matrix und ihre Transponierte haben die gleichen Eigenwerte.

Beweis:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \overset{\text{D12}}{=} \det\left((A - \lambda I_n)^\top\right) = \det\left(A^T - \lambda I_n\right) = p_{A^\top}(\lambda)$$

□

Achtung: Die Eigenwerte bleiben gleich, aber nicht die Eigenvektoren.

Beispiel 1.16: Für die Matrix A aus Bsp. 1.14 gilt

$$A^\top = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A^\top - \lambda I_n) = (3-\lambda)[(7-\lambda)(-5-\lambda) + 4 \cdot 8]$$
$$= -(\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

Aber

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 16 & 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 27 \\ 45 \end{pmatrix} \neq (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Man kann ausrechnen:

$$\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ EV zu EW} - 1, \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{w}_3 \text{ EV zu EW } 3$$

Übertragung auf Endomorphismen?

$p_f(\lambda)$ $f \in L(V, V)$, B Basis $\Rightarrow \exists! A_f^{B,B}$, C Basis $\Longrightarrow \exists! A_f^{C,C}$

$$p_{A_f^{B,B}}(\lambda) \stackrel{?}{=} p_{A_f^{C,C}}(\lambda)$$

Definition 1.17: ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n,n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so dass $A = TBT^{-1}$ gilt.

Man kann leicht beweisen, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Matrizen ist.

Mit $\det(A^{-1}) \stackrel{\text{D11}}{=} (\det(A))^{-1}$ folgta für zwei ähnliche Matrizen A und B, dass

$$\det(A) = \det(TBT^{-1}) = \det(T)\det(B)\det(T^{-1}) = \det(B)$$

Beispiel 1.18: Sei $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, d.h. $V = \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten für den $\mathbb{R}^3$ die Basen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für darstellende Matrix von f bezüglich der Standardmatrix E erhalten wir aus Satz 5.18, LinA I,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} e_i \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

dass

$$A_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige kommutative Diagramm ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & V = \mathbb{R}^3 \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "Id = \phi_E"] \arrow[r, "A_f^{E,E}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\phi_E = Id"']
\end{tikzcd}$$

Für die Basis B erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-7) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-8) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -7 & -5 & -8 \\ 3 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Herleitung bezüglich Matrizen?

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "A_f^{B,B}"] \arrow[d, "\phi_B"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\phi_B"] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "A_f^{E,E}"] \arrow[u, "\mathrm{Id}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}$$

Koordinatenabbildung Φ_B?

Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ + Standardbasis E in den $V(= \mathbb{R}^3)$ + Basis B.

$$\Phi_B = (e_i) = v_i \quad \text{für} \quad B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\Longrightarrow A^{E,B}_{\Phi_B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt insgesamt:

$$A_f^{B,B} = \left(A^{E,B}_{\Phi_B}\right)^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A^{E,B}_{\Phi_B} = \left(A^{E,B}_{\Phi_B}\right)^{-1} A_f^{E,E} \underbrace{A^{E,B}_{\Phi_B}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

$$\Longrightarrow A_f^{B,B} \text{ und } A_f^{E,E} \text{ sind ähnlich}$$

Für die Basis C erhalten wir

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Darstellungsmatrix erhält man

$$A_f^{C,C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Als Matrizenmultiplikation

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "A_f^{B,B}"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\Phi_B"] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, "A_f^{E,E}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{Id}"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "\Phi_C"] \arrow[r, "A_f^{C,C}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\Phi_C"']
\end{tikzcd}$$

Darstellung von Φ_C? $\Phi_C(e_i) = w_i \quad$ für $\quad C = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$A^{E,C}_{\Phi_C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_f^{C,C} = \left(A^{E,C}_{\Phi_C}\right)^{-1} I_n A_f^{E,E} I_n^{-1} A^{E,C}_{\Phi_C} = \left(A^{E}_{\Phi_C}, C\right)^{-1} A_f^{E,E} A^{E,C}_{\Phi_C}$$

Also auch: $A_f^{C,C}$ ist ähnlich zu $A_f^{E,E}$.

Alternativ:

$$\begin{aligned} A_f^{C,C} &= \left(A^{E,C}_{\Phi_C}\right)^{-1} I_n I_n^{-1} A^{E,B}_{\Phi_B} A_f^{B,B} \left(A^{E,B}_{\Phi_B}\right)^{-1} I_n A^{E,C}_{\Phi_C} \\ &= \underbrace{\left(A^{E,C}_{\Phi_C}\right)^{-1} A^{E,B}_{\Phi_B}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} A_f^{B,B} \left(A^{E,B}_{\Phi_B}\right)^{-1} A^{E,C}_{\Phi_C} \end{aligned}$$

Jetzt allgemein: $f \in L(V, V)$, $\dim(V) < \infty$, B, C seien Basen von $V \Longrightarrow$

$$A := A_f^{B,B} \qquad \tilde{A} := A_f^{C,C}$$

und es existiert $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ als Basistransformationsmatrix, so dass

$$\tilde{A} = TAT^{-1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det\left(\tilde{A} - \lambda I_n\right) = \det(TAT^{-1} - \lambda TT^{-1}) \\ &= \det(T(A - \lambda I_n)T^{-1}) \\ &= \det(T)\det(A - \lambda I_n)\det(T^{-1}) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

D.h. für einen Endomorphismus ist das charakteristische Polynom der zugehörigen Darstellungsmatrix unabhängig von der Wahl der Basis!

Damit ist es sinnvoll, für $f \in L(V, V)$, $\dim(V) < \infty$,

$$p_f(.) := p_A(.)$$

für A als Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ für eine Basis B.

Lemma 1.19: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
2. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert der Darstellungsmatrix $A_f^{B,B}$ für eine gewählte B von V.

Des weiteren gilt auch. Für zwei ähnliche A und B gilt $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

$$A, B \text{ ähnlich} \Longrightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = p_B(\lambda), \text{aber für jedes } T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ gilt}$$
$$TBT^{-1} = TT^{-1} = I \neq A \text{ also } A, B \text{ nicht ähnlich}$$

Weitere Beobachtung: Aus Lemma 1.13 und Lemma 1.19 folgt, dass die Eigenwerte von $f \in L(V, V)$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix $A_f^{B,B}$ für eine Basis B ist. Dies gilt **nicht** i.a. für Darstellungsmatrizen $A_f^{B,C}$ für $B \neq C$.

Definition 1.20: Algebraische Vielfachheit

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Ist $f \in L(V, V)$ und $\tilde{\lambda}$ ist Eigenwert von f hat das charakteristische Polynom $p_f(\lambda)$ die Form

$$p_f(\lambda) = \left(\lambda - \tilde{\lambda}\right)^d \cdot \tilde{p}(\lambda)$$

für ein $\tilde{p}(.) \in \mathbb{K}[\lambda]$ mit $\tilde{p}\left(\tilde{\lambda}\right) \neq 0$, so nennt man d die **algebraische Vielfachheit** von $\tilde{\lambda}$ und bezeichnet sie $a\left(f, \tilde{\lambda}\right)$.

Lemma 1.21: Seien V ein K-Vektorraum, $\dim(V) = n < \infty$, und $f \in L(V, V)$. Für Eigenwert $\tilde{\lambda}$ von f gilt

$$g\left(f, \tilde{\lambda}\right) \leq a\left(f, \tilde{\lambda}\right)$$

Beweis: Ist $\tilde{\lambda}$ EW von f mit der geometrischen Vielfachheit $m := g\left(f, \tilde{\lambda}\right)$, so gibt es nach Def. 1.10 zu $\tilde{\lambda}$ m linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, ..., v_m \in V$.

Gilt $m = n = \dim(V)$ sind $\{v_1, ..., v_m\}$ schon Basis von V.

Gilt $m < n$, so folgt aus dem Basisergänzungssatz (Satz 3.21, LinA I), dass man $\{v_1, ..., v_m\}$ zu einer Basis $\{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\} =: B$ ergänzen. Wegen $f(v_j) = \tilde{\lambda} v_j, 1 \leq j \leq m$, gilt

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} I_n & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

für zwei Matrizen $A_1 \in K^{m,n-m}$, $A_2 \in K^{n-m,n-m}$.

Mit D9 aus LinA I folgt

$$p_f(\lambda) = \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)^m \cdot \det\left(A_2 - \lambda I_{n-m,n-m}\right)$$

$\Longrightarrow$ EW $\tilde{\lambda}$ ist mindestens m-fache Nullstelle von $p_f(\lambda)$. Für $m = n \Longrightarrow A_f^{B,B} = \tilde{\lambda} I_n \Longrightarrow p_f(\lambda) = \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)^m$

$\square$

2. Diagonalisierbarkeit und Normalform

2.1. Diagonalisierbarkeit

Definition 2.1: Diagonalisierbar

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Ein $f \in L(V, V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass $A_f^{B,B}$ eine Diagonalmatrix ist. D.h. es existieren $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

Entsprechend nennen wir eine Matrix $A \in K^{n,n}$ **diagonalisierbar**, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in K^{n,n}$ gibt mit

$$A = TDT^{-1}$$

D.h. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Satz 2.2: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist diagonalisierbar
2. Es gibt eine Basis B von V bestehend aus Eigenvektoren von f.
3. Das charakteristische Polynom $p_f(.)$ zerfällt in n Linearfaktoren über K, d.h.

   $$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

   mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ für f und für jeden Eigenwert $\tilde{\lambda}$ gilt $a\big(f, \tilde{\lambda}\big) = g\big(f, \tilde{\lambda}\big)$.

Beweis:

"$1 \Longrightarrow 2$": f diagonalisierbar $\Longrightarrow \exists\{v_1, ..., v_n\} = B$ Basis von $V, \lambda_1, .., \lambda_n \in K$:

$$\tilde{A} := A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$\Longrightarrow f(v_j) = \lambda_i v_i, 1 \leq i \leq n, v_i \neq 0. \Longrightarrow$ Damit sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ Eigenwerte von f mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, ..., v_n. \Longrightarrow 2.$

"$2 \Longrightarrow 1$": Ist $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren, so gibt es zugehörige Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ mit $f(v_j) = \lambda_j v_j$, $1 \leq j \leq n \Longrightarrow$

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

"$2 \Longrightarrow 3$": Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ seien die zugehörigen Eigenwerte $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= p_{A_f^{B,B}}(\lambda) = \det\left(A_f^{B,B} - \lambda I_n\right) \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren. Verschiedene Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k, k \leq n$. Der Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$ besitzt die algebraische Vielfachheit $m_j := a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$ genau dann, wenn er m_j-mal auf den Diagnolen von $A_f^{B,B}$ steht. Dies ist genau dann der Fall, wenn m_j Eigenvektoren zu $\tilde{\lambda}_j$ in B enthalten sind. Diese sind linear unabhängig $\Longrightarrow$

1. $\dim\left(\mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)\right) = g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \geq m_j = a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$
2. Lemma 1.21: $g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \leq a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$

$$1 \wedge 2 \Longrightarrow g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$$

"$3 \Longrightarrow 2$": Seien $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_k, k \leq n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Wir wissen: $\mathcal{P}_n \in p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren, $a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right), 1 \leq j \leq n$.

$$\dim(V) = n = \sum_{j=1}^{k} a\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} g\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \dim\left(\mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)\right)$$

Es gilt (Lemma 1.8):

$$\mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right) \cap \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_i\right) = 0 \quad \forall j = 1, ..., k$$

Dann folgt (Lemma 3.31, (2), Lemma 3.35, Satz 3.14) (direkte Summe, $U \subset V$ UVR $\Longrightarrow$ $\dim(U) \leq \dim(V), U = V \dim(U) = \dim(V)$, Basis $\Longleftrightarrow$ eindeutige Darstelltung), dass die zu $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_n$ linear unabhängigen Eigenvektoren, die jeweils eine Basis von $\mathrm{Eig}\left(f, \tilde{\lambda}_j\right)$, $1 \leq j \leq k$, eine Basis von V bilden.

$\square$

In Verbindung mit Lemma 1.6 folgt unmittelbar:

Korollar 2.3: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten, dann ist f
diagonalisierbar.

Bemerkung: Das Kriterium der n paarweise verschiedenen Eigenwerte ist nicht notwendig z.B. $V = K^n$, $B = E$ Standardbasis

$$f : \mathrm{Id} : K^n \to K^n, \Longrightarrow A_f^{E,E} = I_n \Longrightarrow 1n\text{-facher Eigenwert}$$

Beispiel 2.4: Fortsetzung von Bsp. 1.14

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \text{EW:} -1, 3$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } -1, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } 3$$

$\Longrightarrow \exists$ Basis von Eigenvektoren $\overset{\text{Satz 2.2}}{\Longrightarrow}$ A ist diagonalisierbar

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 3) \\ a(f, -1) &= 1 = g(f, -1) \\ a(f, 3) &= 2 = g(f, 3) \end{aligned}$$

$T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so, dass $T^{-1}AT = D$?

Die zu $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ gehörende Koordinatentransformation Φ_B ist gegeben durch

$$A_{\Phi_B}^{E,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt: Für $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit

$$A_f^{E,E} = A \qquad A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Mit Basiswechsel von A zu D

$$D = \left(A_{\Phi_B}^{E,B}\right)^{-1} A \underbrace{A_{\Phi_B}^{E,B}}_{=T}$$

Beispiel 2.5: Nicht jeder Endomorphismus bzw. jede Matrix ist diagonalisierbar. Bsp. 1.4:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad p_f(\lambda) = \lambda^1 + 1$$

D.h. über $\mathbb{R}$ zerfällt $p_f(.)$ nicht in Linearfaktoren.

Ein weiteres Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow p_A(\lambda) = (5-\lambda)\lambda^2 \Longrightarrow p_A(.)$ zerfällt in Linearfaktoren. $a(f, \lambda_i), g(f, \lambda_i)$ für $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$. Lemma 1.21: $g(f, \lambda_i) \leq a(f, \lambda_i) \Longrightarrow g(f, 5) = 1 = a(f, 5)$, $a(f, 0) = 2, g(f, 0) \geq 1$ Ein Eigenvektor zu $\lambda = 0$ sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow g(f, 0) = 1 < 2 = a(f, 0)$$

$\Longrightarrow f$ nicht diagonalisierbar.

Mit Satz 2.2 erhält man einen Algorithmus zur Überprüfung, ob ein gegebenes $f \in L(V, V)$ (bzw. $A \in K^{n,n}$) diagonalisierbar ist:

1. Bestimme mit einer Basis B von V die Darstellungsmatrix $A = A_f^{B,B}$
2. Bestimme für A das charakteristische Polynom $p_A(.)$ (Determinantenberechnung)
3. Zerfällt $p_A(.)$ in Linearfaktoren über K? Nein: f nicht diagonalisierbar. Ja: Seien $\lambda_i, 1 \leq i \leq k \leq n = \dim(V)$ die paarweise verschiedene Eigenwerte von f.

   Für $i = 1, ..., k$

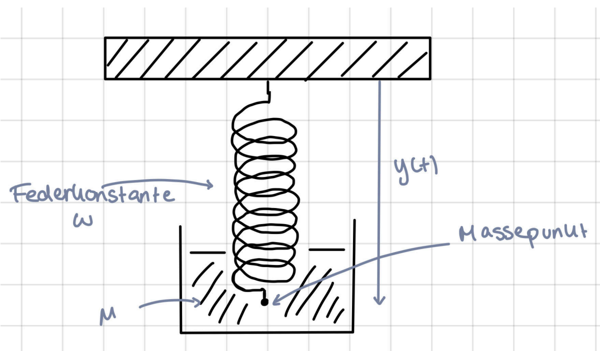
   1. Bestimme eine Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$
   2. Prüfe, ob $a(f, \lambda_i) = g(f, \lambda_i)$

   Gilt $a(f, \lambda_i) = g(f, \lambda_i)$ für alle $i \in \{1, ..., k\}$. Nein: f ist nicht diagonalisierbar. Ja: f ist diagonalisierbar.

Beispiel 2.6: Fischer/Springborn

Betrachtet wird: Masse aufgehänt an einer Feder. Zur Zeit $t = 0$ in Position $y(0) = \alpha$ und ausgelenkt in senkrechter Richtung mit Geschwindigkeit $\beta = \dot{y}(0)$

$y(t) \mathrel{\widehat{=}}$ Position der Masse zum Zeitpunkt t



Dieses System wird durch die gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta$$

Umschreiben

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1 \end{aligned}$$

mit $y_0 = y, \ddot{y}_0 = \ddot{y}, y_0(0) = \alpha, y_1(0) = \beta$.

$$\dot{\tilde{y}} := \begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + w^2$$

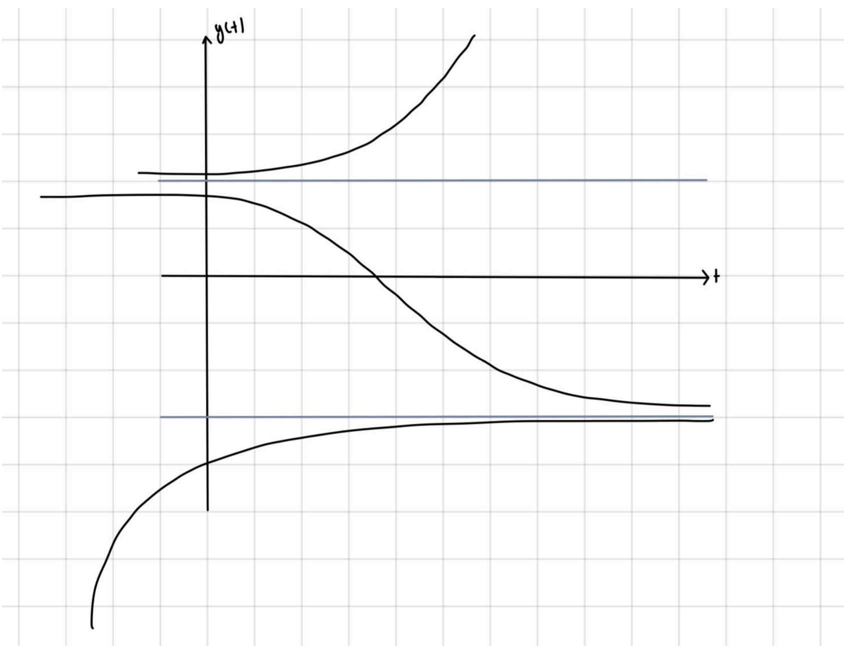
mit den potentiellen Nulstellen

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - w^2}$$

Man unterscheidet drei Fälle:

- $0 \leq \mu < \omega$, d.h. $\mu^2 - \omega^2 < 0 \Longrightarrow$ schwache Dämpfung
- $\mu = \omega$, d.h. $\mu^2 = \omega^2 \Longrightarrow$ aperiodischer Fall $\Longrightarrow a(A, -\mu) = 2$, $\dim(\mathrm{Eig}(A, -\mu)) = 1$, A nicht diagonalisierbar
- $\mu > \omega$, d.h. $\mu^2 > \omega^2$, starke Dämpfung

Eine solche Eigenwertanalyse kann auch nutzen, um das Langzeitverhalten von Lösungen von gewöhnlichen DGL zu bestimmen.



Satz 2.7: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Das charakteristische Polynom $p_f(.)$ zerfällt über K in Linearfaktoren.
2. Es gibt eine Basis B von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h.

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

   und f ist damit **triangulierbar**.

Beweis: Beweis von Satz 14.18 im Liesen/Mehrmann

□

Nun ist das Ziel:

Bestimmung einer Basis B von V, so dass $A_f^{B,B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, die möglichst nah an einer Diagonalmatrix ist und von der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte abgelesen werden können.

D.h. $p_f(.)$ zerfällt in Linearfaktoren mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (notwendig, Satz 2.7) und wir wollen eine Basis B bestimmen, so dass $A_f^{B,B}$ Diagonalblockgestalt hat mit

$$A_f^{B,B} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

wobei jeder Diagonalblock die Form

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{d_i, d_i} \qquad (*)$$

Definition 2.8: Jordan-Block

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$, $f \in L(V, V)$ und λ_i ein Eigenwert von f. Eine Matrix der Form $(*)$ heißt **Jordan-Block** der Größe d_i zum Eigenwert λ_i.

Wegen der Bedeutung der Jordan-Normalform gibt es zahlreiche Herleitungen mit unterschiedlichen mathematischen Hilfsmitteln.

Hier: Beweis über die Dualitätstheorie basirend auf einer Arbeit von V. Pt $\bar{a}$ k (1956)

2.2. Dualräume

Definition 2.9: Linearform, Dualraum

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $f \in L(V, K)$ heißt **Linearform**. Den K-Vektorraum $V^* := L(V, K)$ nennt man **Dualraum**.

Gilt $\dim(V) = n < \infty$ so folgt aus Satz 5.18 LinA I, dass $\dim(V^*) = n$ gilt. Ist $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V und $C = \{1\}$ eine Basis des K-Vektorraum K, dann gilt für

$$f(v_i) = \mu_i \in K \quad \text{für} \quad f \in V^*, \text{ d.h. } f : V \to K,$$

für $i = 1, ..., n$ und damit

$$A_f^{B,C} = (\mu_1, ..., \mu_n) \in K^{1,n}$$

Beispiel 2.10: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen und $a \in [0, 1]$. Dann sind

$$\begin{aligned} g_1 &: V \to \mathbb{R}, \quad g_1(f) := \int_0^1 f(x) dx \\ g_2 &: V \to \mathbb{R}, \quad g_2(f) := f(a) \end{aligned}$$

Linearformen auf V.

Basis des Dualraums?

Satz 2.11: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $B = \{v_1 .., v_n\}$ eine Basis von V. Dann gibt es genau eine Basis $B^* = \{v_1^*, ..., v_n^*\}$ von $V^* = L(V, K)$ für die

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, ..., n$$

gilt. Diese Basis heißt die zu B duale
Basis.

Beweis: Lemma 4.10: LinA I. Es gibt eine lineare Abbildung v_i^* für die $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ für $j = 1, ..., n$, für $i = 1, ..., n$. Noch zu zeigen: v_i^* sind Basis von V^*. Wir wissen schon: $\dim(V^*) = n$. Also: Es reicht zu zeigen: $\{v_i^*\}_{i=1,...,n}$ linear unabhängig. Seien $\mu_i \in K$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i^* = 0 \in V^* = L(V, K)$$

Dann gilt:

$$0_K = 0_{V^*}(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i^*(v_j) = \mu_j \quad j = 1, ..., n$$

□

Definition 2.12: duale Abbildung

Seien V und W zwei K-Vektorräume mit den zugehörigen Dualräumen V^* und W^*. Für $f \in L(V, W)$ heißt

$$f^* : W^* \to V^*, \quad f^*(h) = h \circ f$$

die zu f **duale Abbildung**.

$$\begin{tikzcd} V^* \ni & V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[d, "h"] \\ & K & K \end{tikzcd}$$

Seien $U \subseteq V$ und $Z \subseteq V^*$ zwei Unterräume. Dann heißt die Menge

$$U^0 := \{h \in V^* \mid h(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

Annihilator von U und die Menge

$$Z^0 := \{v \in V \mid z(v) = 0 \text{ für alle } z \in Z\}$$

Annihilator von Z.

Man kann sich überlegen:

- Die Mengen $U^0 \subseteq V^*$ und $Z^0 \subseteq V$ sind Untervektorräume von V^* bzw V
- Es gilt für $f \in L(V, V)$

$$\left(f^k\right)^* = (f^*)^k$$

Des Weiteren besitzt die duale Abbildung folgende Eigenschaften:

Lemma 2.13: Sind V, W und X drei K-Vektorräume. Dann gilt

1. Ist $f \in L(V, W)$, dann ist die duale Abbildung f^* linear, d.h. $f^* \in L(W^*, V^*)$
2. Ist $f \in L(V, W)$ und $g \in L(W, X)$, dann ist $(g \circ f)^* \in L(X^*, V^*)$ und es gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
3. Ist $f \in L(V, W)$ bijektiv, dann ist $f^* \in L(W^*, V^*)$ bijektiv und es gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

Beweis: ÜB

□

Lemma 2.14: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $f \in L(V, V)$, $f^* \in L(V^*, V^*)$ und $U \subseteq V$, sowie $W \subseteq V^*$ zwei Vektorräume. Dann gilt:

1. $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^0)$
2. Ist f nilpotent vom Grad m, dann ist die duale Abbildung f^* ebenfalls nitpotent vom Grad m.
3. Ist $W \subseteq V^*$ ein f^*-invarianter Vektorraum, dann ist W^0 ein f-invarianter Unterraum.

Beweis: ÜA

□

Definition 2.15: nilpotent vom Grad m

Sei $\{0\} \neq V$ ein K-Vektorraum. Man nennt $f \in L(V, V)$ **nilpotent**, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f^m = 0 \in L(V, V)$ gilt. Gilt für dieses m, dass $f^{m-1} \neq 0 \in L(V, V)$, so heißt f **nilpotent vom Grad m** und m is der **Nilpotenzindex** von f.

Definition 2.16: f-invarianter Unterraum

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $f \in L(V, V)$. Gilt $f(U) \subseteq U$, d.h. ist $f(u) \in U$ für alle $u \in U$, so nennt man U einen f-invarianten Unterraum von V.

Definition 2.17: Bilinearform

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $a : V \times W \to K$ heißt Bilinearform, wenn

1. $a(\cdot, w) : V \to K$ für alle $w \in W$ eine lineare Abbildung ist und
2. $a(v, \cdot) : W \to K$ für alle $v \in V$ eine lineare Abbildung ist

Eine Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ heißt **nicht ausgeartet** in der ersten Variable, wenn aus

$$a(v, w) = 0 \quad \text{für alle } w \in W$$

folgt, dass $v = 0$ ist. Eine Bilinearform heißt nicht ausgeartet in der zweiten Variable, wenn aus

$$a(v, w) = 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

folgt, dass $w = 0$ ist. Falls $a(\cdot,\cdot)$ in beiden Variablen nicht ausgeartet ist, so nennt man $a(\cdot,\cdot)$ eine **nicht ausgeartete Bilinearform** und die Räume V, W ein **duales Paar von Räumen** oder **duales Raumpaar** bezüglich $a(\cdot,\cdot)$. Ist $V = W$, so heißt $a(\cdot,\cdot)$ eine **Bilinearform auf** V. Eine Bilinearform $a(.,.)$ auf V heißt **symmetrisch**, wenn $a(v, w) = a(w, v)$ für alle $v, w \in V$, ansonsten heißt $a(\cdot,\cdot)$ unsymmetrisch.

Bemerkung: Damit V, W ein duales Raumpaar für eine nicht ausgeartete Bilinearform bilden können, muss $\dim(V) = \dim(W)$ gelten.

Lemma 2.18: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in L(V, V)$, $f^* \in L(V^*, V^*)$ die duale Abbildung zu f, $U \subseteq V$ und $W \subseteq V^*$ zwei Untervektorräume. Ist die Bilinearform

$$a : U \times W \to K, (v, h) \mapsto h(v)$$

nicht ausgeartet ist, d.h. sind U und W ein duales Raumpaar bezüglich dieser Bilinearform, so ist

$$V = U \oplus W^0$$

Beweis: Sei $u \in U \cap W^0$. Dann gilt $h(u) = 0$ für alle $h \in W$. Weil U, W ein duales Raumpaar bzgl. $a(\cdot,\cdot)$ bilden, folgt $u = 0$. Außerdem $\dim(U) = \dim(W)$ gelten. Damit folgt aus Lemam 2.14, 1., dass

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(W) + \dim(W^0) \\ &= \dim(U) + \dim(W^0) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow V = W \oplus W^0$

$\square$

2.3. Zyklische f-invariant Unterräume

Jetzr: Genauere Analyse der Struktur von Eigenräumen

Beispiel: Ist V ein K-Vektorraum, $f \in L(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so ist $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$ ein f-invarianter Unterraum, da: Für $v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ gilt $f(v) = \lambda v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda)$.

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so existiert ein eindeutig definiertes $m = m(f, v) \in \mathbb{N}$, sodass die Vektoren

$$v, f(v), f(f(v)), ..., f^{m-1}(v)$$

linear unabhängig, die Vektoren

$$v, f(v), ..., f^{m-1}(v)$$

jedoch linear abhängig sind. Wegen $\dim(V) = n$, muss $m \leq n$ gelten!

Definition 2.19: Grad von V

Die eindeutig definiert Zahl $m(f, v) \in \mathbb{N}$ heißt Grad von V bezüglich f.

$$0 \neq v, f(v), f^2(v), ..., f^{m-1}(v) \text{ lin. unabh.}$$
$$v, f(v), ..., f^m(v) \text{ lin. abh.}$$

$\Longrightarrow$ Grad m von v, $m \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

- Der Vektor $v = 0 \in V$ ist lin. abhängig. Deswegen muss man $v \neq 0$ fordern oder $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Der Grad von $0!0v \in V$ ist gleich 1, genau dann wenn $v, f(v)$ linear abhängig sind. Das ist genau dann der Fall wenn v ein Eigenvektor von f ist. Damit folgt auch: Ist $v \in V$ kein Eigenvektor von f und $v \neq 0$, so ist der Grad von v also $m(v, f) \geq 2$.

Definition 2.20: Krylov-Raum

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$, $f \in L(V, V)$, $v \in V$ und $j \in \mathbb{N}$. Der Unterraum

$$\mathcal{K}_j(f, v) := \operatorname{Span}\{v, f(v), f^2(v), ..., f^{j-1}(v)\} \subseteq V$$

heißt **j-ter Krylov-Raum** von f und v.

Alexei Krylov (russischer Schiffsbauingeneur und Mathematiker, 1863-1945). Krylov-Räume spielen auch eine wichtige Rolle für das CG-Verfahren (Conjugate Gradients).

Lemma 2.21: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in L(V, V)$. Dann gilt:

1. Hat $0 \neq v \in V$ den Grad m bzgl. f, so ist $\mathcal{K}_m(f, v)$ ein f-invarianter Unterraum und es gilt:
$$\text{Span}\ \{v\} = \mathcal{K}_1(f, v) \subset \mathcal{K}_2(f, v) \subset \ldots \subset \mathcal{K}_m(f, v) = \mathcal{K}_{m+j}(f, v)$$
für alle $j \in \mathbb{N}$.
2. Hat $0 \neq v \in V$ den Grad m bzgl. f und ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, so dass $v \in U$, so ist
$$\mathcal{K}_m(f, v) \subseteq U$$
D.h. betrachtet man alle f-invarianten Unterräume von V, die v enthalten, so ist $\mathcal{K}_m(f, v)$ derjenige mit der kleinsten Dimension.
3. Gilt für $v \in V$, dass $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $f^m(v) = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, dann ist
$$\dim\big(\mathcal{K}_j(f, v)\big) = j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, m$$

Beweis:

1. ÜA
2. Sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum mit $v \in U$. Dann gilt $f^j(v) \in U$ für $j = 1, \ldots, m-1$. Da v den Grad m hat, sind $v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v)$ linear unabhängig. $\Longrightarrow$ $\mathcal{K}_m(f, v) \subseteq \quad \text{und} \quad \dim(\mathcal{K}_m(f, v)) = m \leq \dim(U)$
3. Seien $\mu_0, \ldots., \mu_{m-1} \in K$ so gewählt, dass
$$0 = \mu_0 v + \mu_1 f(v) + \ldots + \mu_{m-1} f^{m-1}(v)$$
gilt. Anwendung f^{m-1}
$$0 = \mu_0 f^{m-1}(v) + \mu_1 f^m(v) = \mu_0 \underbrace{f^{m-1}(v)}_{\neq 0}$$
$$\Longrightarrow \mu_0 = 0$$
Für $m > 1$ kann man dieses Argument induktiv für f^{m-j}, $j = 2, \ldots, m$, anwenden und erhält damit
$$\mu_1 = \ldots = \mu_{m-1} = 0$$
$\Longrightarrow$ Beh.

□

Beobachtungen: Hat v den Grad m bzgl. f gilt

- $\mathcal{K}_j(f, v)$ ist für $j < m$ kein f-invarianter Unterraum, da $0 \neq f(f^{j-1}(v)) = f^j(v) \notin \mathcal{K}_j(f, v)$

- wie oben gezeigt, bilden die Vektoren $v, f(v), ..., f^{m-1}(v)$ eine Basis von $\mathcal{K}_m(f, v)$. Wendet man f auf ein Element dieser Basis an, d.h. $f^{k+1}(v), k = 0, ..., m-1$, so erhält man für $k = m-1$ $f^m(v)$ als Linearkombination von $v, f(v), ..., f^{m-1}(v) \Longrightarrow f^m(v) \in \mathcal{K}_m(f, v)$. Deswegen wird $\mathcal{K}_m(f, v)$ auch **zyklische invarianter Unterraum** zu v von f genannt.

Lemma 2.22: Sei $\{0\} \neq V$ ein K-Vektorraum. Ist $f \in L(V, V)$ nilpotent vom Grad m, so gilt
$m \leq \dim(V)$.

Beweis: Nach Definition existiert ein $v \in V$ mit $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $f^m(v) = 0$. Lemma 2.21 sichert, dass $v, f(v), ..., f^{m-1}(v)$ linear unabhängig $\Longrightarrow m \leq \dim(V)$.

□

Beobachtung: Sei V ein K-Vektorraum und $f \in L(V, V)$. Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, so gilt für die Einschränkung von f auf $U, d.h.$

$$f|_U : U \to U, \quad u \to f(u),$$

dass $f|_U \in L(U, U)$.

Satz 2.23: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in L(V, V)$. Dann existieren f-invariante Unterräume und $f \in L(V, V)$. Dann existieren f-invariante Unterräume $U \subseteq V$ und $W \subseteq V$, so dass gilt:

1. $V = U \oplus W$
2. $f|_U \in L(U, U)$ ist bijektiv
3. $f|_W \in L(W, W)$ ist nilpotent

Beweis: $v \in \ker(f)$. Dann gilt wegen der Linearität von f, sodass
$f^2(v) = f(f(v)) \overset{f(v)=0}{=} 0 \Longrightarrow \ker(f) \subseteq \ker(f^2)$

Induktiv zeigt man:

$$\{0\} \subseteq \ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq f^3 \subseteq ...$$

Da $\dim(V) < \infty$, muss es eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ geben, so dass $\ker(f^m) = \ker(f^{m-j})$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Damit sehen wir

$$U = \operatorname{im}(f^m) \quad \text{und} \quad W = \ker(f^m)$$

Zeige: U und W sind f-invariant. Sei $u \in U$. Dann existiert $w \in V$ mit $f^m(w) = u \Longrightarrow$ $f(u) = f(f^m(w)) = f^m(f(w)) \in U$.

Sei $w \in W$. Dann gilt

$$f^m(f(w)) = f(f^m(w)) = 0 \Longrightarrow f(w) \in W$$

Also existieren f-invariante Unterräume $U \subseteq V$ und $W \subseteq V$.

1. Es gilt $U + W \subseteq V$. Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 4.16, LinA I) liefert für f^m, dass

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

   Ist $v \in U \cap W \Longrightarrow \exists w \in V : v = f^m(w)(v \in U)$

$$v \in W \Longrightarrow 0 = f^m(v) = f^m(f^m(v)) = f^{2m}(v)$$

   Es gilt $\ker(f^m) = \ker(f^{2m}) \Longrightarrow v = f^m(v) = 0$

   $\Longrightarrow V = U \oplus W$
2. Sei $v \in \ker(f|_k) \subseteq U$. Dann existiert ein $w \in V$, so dass $f^m(w) = v$ gilt. $\Longrightarrow$ $0 = f(v) = f(f^m(w)) = f^{m+1}(w)$. Mit $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1}) \Longrightarrow w \in \ker(f^m) \Longrightarrow v = f^m(w) = 0 \Longrightarrow f$ injektiv.

   Aus der Dimensionsformel folgt, dass f surjektiv ist.
3. Sei $v \in W$. Dann gilt

$$0 = f^m(v) = (f|_W)^m(v)$$

   $\Longrightarrow (f|_W)^m = 0 \in L(W, W)$, d.h. $(f|_W)^m$ ist die Nullabbildung $\Longrightarrow f|_W$ nilpotent.

Satz 2.24: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in L(V, V)$ nilpotent vom Grad m, $v \in V$ ein beliebiger Vektor mit $f^{m-1}(v) \neq 0$ und $h \in V^*$ mit $h(f^{m-1}(v)) \neq 0$. Dann sind v und h vom Grad m bzgl. f und f^*. Die beiden Räume $\mathcal{K}_m(f, v)$ bzw. $\mathcal{K}_M(f^*, h)$ sind zyklisch$f$- bzw. f^*-invariante Unterräume von V bzw. V^*. Sie bilden ein duales Raumpaar bzgl. der Bilinearform

$$a : V \times V^* \to K, \quad (v, h) \mapsto h(v)$$

und es gilt

$$V = \mathcal{K}_m(f, v) \oplus \left(\mathcal{K}_m(f^*, k)\right)^0$$

Hierbei ist $\mathcal{K}_m(f^*, h)^0$ ein f-invarianter Unterraum von V.

Beweis: Für $v \in V$ gilt $f^{m-1}(v) \neq 0$. Lemma 2.20 $\Longrightarrow \mathcal{K}_m(f, v)$ m-dimensionaler zyklischer f-invarianter Unterraum von V. Für V^* gilt

$$0 \neq h(f^{m-1}(v)) = \left(f^*\right)^{m-1}(h)(v)$$

Dann ist $0 \neq \left(f^*\right)^{m-1}(h) \in L(V^*, V^*)$. f nilpotent von Grad $m \Longrightarrow$ (Lemma 2.14) f^* nilpotent von Grad $m \Longrightarrow$

$$\left(f^*\right)^m(h) = 0 \in L(V^*, V^*)$$

$\Longrightarrow$ (Lemma 2.20) $\mathcal{K}_m(f^*, h)$ ist m-dimensionaler zyklischer f^*-invarianter Unterraum von V^*.