Vorlesungsskript

Num. Lin. Algebra

Inhaltsverzeichnis

Definitionen

1. Einleitung

Wichtige Aufgabenklassen der linearen Algebra sind **lineare Gleichungssysteme**.

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

Gesucht: Ein/alle $x \in \mathbb{R}^m$ mit $Ax = b$

Herkunft:

- "direkt" aus der Anwendung, z.B. Beschreibung von Netzwerken, Tragwerk
- "indirekt" als Diskretisierung von stationären Prozessen, z.B. Belastung einer Membran
- "mittelbar" durch die Linearisierung nichtlinearer Modelle, z.B. Newton-Verfahren, Approximation von Lösungen gewöhnlicher DGL, notwendige Optimalitätsbedingungen

Klassifizierung:

- $m = n$: A quadratisch

  Generische Situation: A regulär

  $\Longrightarrow \exists!$ Lösung
- $m < n$: "Unterbestimmtes System"

  Generische Situation:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= m \ \text{(Vollrang)} \\ A &\mathrel{\widehat{=}} [A_1 A_2] \quad A_1 \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{aligned}$$

  Lösungsmenge:

  $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \{x = x^+ + h, h \in \ker(A)\}$

  $=$ $(n - m)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit

  Gesucht ist dann z.B. norm-minimale Lösung (Kap. 5)

- $m > n$: “Überbestimmtes System”

$$\text{lösbar} \iff b \in \operatorname{im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x : Ax = y\}$$

  Generisch nicht lösbar!

  Sinnvoll: Bestimme $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\|A\bar{x} - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \|Ax - b\|$$

  $\| \ \| \mathrel{\widehat{=}}$ geeignete Norm, $\bar{x} \mathrel{\widehat{=}}$ Bestapproximierender für diese Norm.

  Mögliche Ansätze:

  - $\| \ \|_\infty$: $\|Ax - b\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \left|(Ax - b)_i\right|$

    Ein nichtglattes Optimierungsproblem auch als lineares Optimierungsproblem fomulierbar, schwierig zu lösen für m bzw. n groß.
  - $\| \ \|_1$: $\|Ax - b\|_1 = \sum_{i=1}^m |Ax - b|$

    Wie bei $\| \ \|_\infty$ stückweise lineares Optimierungsproblem.

    Aber stabil gegen Ausreißer.
  - $\| \ \|_2$: $\|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left((Ax - b)_i\right)^2$

    $\widehat{=}$ lineares Quadratmittelproblem, kleinste Quadrateproblem (Kap. 5)

Verfahren zur Lösung von LGS:

Direkte Verfahren:

- Transformation der Daten (A, b) in endlich viele in ein leichter zu lösendes LGS $\tilde{A}x = \tilde{b} \mathrel{\widehat{=}}$ CG-Verfahren
- Transformationen lassen sich oftmals als Faktorisierung von A interpretieren

$$A = L \cdot R \quad \text{bzw.} \quad A = Q \cdot R$$

- Dafür i.d.R. Zugriff auf Elemente von $A \Longrightarrow$ limitiert die Größe der Matrix!

Kap. 2-5

Indirekte Verfahren:

- Ausgehend von einem Startvektor x^0 Iteration zur Berechnung von x^k mit $Ax^k \approx b$

  Hierbei wird oftmals nur das Matrix-Vektor-Produkt Av benötigt! (Kap. 6)
- Eigenwertprobleme

  Stabilitätsanalyse von Bauwerken. Verfahren dazu: numerische Optimierung

2. Das Gauß-Verfahren I

Jetzt: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^n, \quad x : Ax = b?$

Satz 2.1: Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax = b$$

Beweis: lineare Algebra

□

$\Longrightarrow$ Anwendung von Algorithmen zur Berechnung von x sinnvoll! Wie?

2.1. Gaußsche Eliminationsverfahren und LR-Zerlegung

$\widehat{=}$ direktes Verfahren für quadratische System

Erste Idee: Systeme spezieller Struktur, z.B.

$$Rx = c, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & r_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$Rx = c$

$$\begin{aligned} & r_{nn}x_n = c_n \Longrightarrow x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}, \quad r_{nn} \neq 0 \\ & r_{n-1n-1}x_{n-1} + r_{n-1n}x_n = c_{n-1} \\ & x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - r_{n-1n}x_n}{r_{n-1n-1}}, \quad r_{n-1n-1} \neq 0 \end{aligned}$$

Algorithmus 2.2: Rückwärtssubsitution

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{c_n}{r_{nn}} \quad \text{falls } r_{nn} \neq 0 \\ &\vdots \\ x_i &= \frac{c_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij} x_j}{r_{ii}} \quad \text{falls } r_{ii} \neq 0 \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{c_1 - \sum_{j=2}^{n} r_{1j} x_j}{r_{11}} \quad \text{falls } r_{11} \neq 0 \end{aligned}$$

Algo. 2.2 anwendbar, wenn $\det(R) \neq 0$ (vgl. Theo. 2.1)

Wichtiger Aspekt dieser Vorlesung: Aufwandsabschätzung

Aufwand: i-te Zeile je $n - i$ Additionen und Multiplikationen und 1 Division

insgesamt:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$$

Addition und Multiplikationen und n Divsionen.