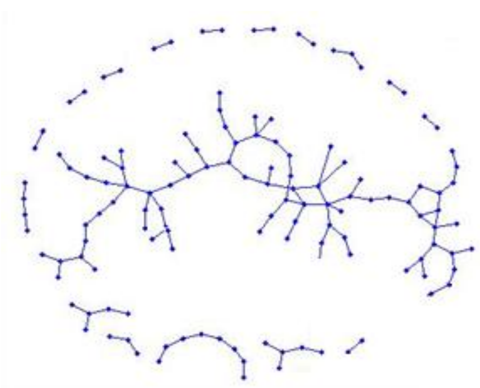
Κεφαλαιο 4

Συνεκτικοτητα Γραφηματων



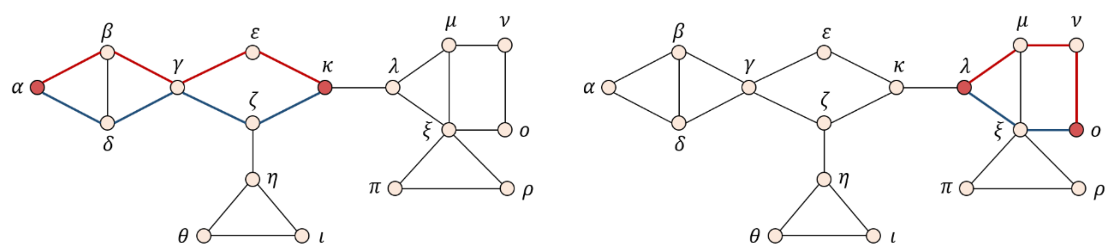
Προαπαιτούμενη Γνώση

Πολύ καλή γνώση των εννοιών και των θεμάτων των Κεφαλαίων 1 και 2 του συγγράμματος. Βασικές γνώσεις διακριτών μαθηματικών. Καλή γνώση δομών δεδομένων και αλγοριθμικών τεχνικών.

4.1 Τοπική και Ολική Συνεκτικότητα Γραφημάτων

Η συνεκτικότητα ενός γραφήματος ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός ξένων μεταξύ τους μονοπατιών που συνδέουν οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του γραφήματος. Τα μονοπάτια είναι ξένα μεταξύ τους ως προς τις ακμές ή ως προς τους κόμβους, ανάλογα με τον τύπο συνεκτικότητας που μας ενδιαφέρει. Η συνεκτικότητα είναι μία από τις βασικότερες παραμέτρους ενός γραφήματος και, ως εκ τούτου, ο υπολογισμός της αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα, το οποίο έχει μελετηθεί εκτενώς στη σχετική βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, η συνεκτικότητα ενός οδικού ή τηλεπικοινωνιακού δικτύου παρέχει πληροφορίες για την αντοχή του δικτύου σε βλάβες των κόμβων ή των συνδέσεων του δικτύου.

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ (κατευθυνόμενο ή μη) και δύο κόμβοι του u και v. Δύο μονοπάτια P_1 και P_2 από τον u στον v είναι *ακμικά ξένα μεταξύ τους*, *εάν* δεν περιέχουν κάποια κοινή ακμή. Τα μονοπάτια P_1 και P_2 είναι *κομβικά ξένα μεταξύ τους*, *εάν* δεν περιέχουν κάποιο κοινό ενδιάμεσο κόμβο (βλέπε Σχήμα 4.1). Προφανώς, δύο κομβικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια είναι και ακμικά ξένα μεταξύ τους. Οι προηγούμενοι ορισμοί μπορούν να γενικευθούν για περισσότερα μονοπάτια. Έστω ένα σύνολο k μονοπατιών $P_1, P_2, \ldots, P_k$ από τον u στον v. Τα μονοπάτια αυτά είναι ακμικά ξένα μεταξύ τους, εάν δεν περιέχουν κάποια κοινή ακμή, ενώ είναι κομβικά ξένα μεταξύ τους, εάν δεν περιέχουν κάποιο κοινό ενδιάμεσο κόμβο.



Σχήμα 4.1 Τα δύο μονοπάτια που συνδέουν το κόμβο α με τον κόμβο κ είναι ακμικά ξένα μεταξύ τους, ενώ τα δύο μονοπάτια που συνδέουν τον κόμβο λ με τον κόμβο o είναι κομβικά ξένα μεταξύ τους.

Έστω δύο κόμβοι u και v. Η τοπική ακμική συνεκτικότητα των u και v, την οποία συμβολίζουμε με $\lambda(u, v)$, ορίζεται ως το μέγιστο πλήθος ακμικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον u στον v. Τότε, η (ολική) ακμική συνεκτικότητα του γραφήματος, $\lambda(G)$, είναι ίση με την ελάχιστη τοπική ακμική συνεκτικότητα οποιουδήποτε ζεύγους κόμβων, δηλαδή:

$$\lambda(G) = \min\{\lambda(u, v) : u, v \in V\}$$

Αντίστοιχα, η τοπική κομβική συνεκτικότητα των u και v, την οποία συμβολίζουμε με $\kappa(u, v)$, ορίζεται ως το μέγιστο πλήθος κομβικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον u στον v. Στον ορισμό αυτό υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει η ακμή (u, v). Διαφορετικά, εάν το γράφημα περιέχει την ακμή (u, v), θεωρούμε ότι η τοπική κομβική συνεκτικότητα είναι άπειρη. Εάν το G δεν είναι πλήρες γράφημα, τότε η (ολική) κομβική συνεκτικότητά του $\kappa(G)$ είναι ίση με την ελάχιστη τοπική κομβική συνεκτικότητα οποιουδήποτε ζεύγους κόμβων, δηλαδή:

$$\kappa(G) = \min\{\kappa(u,v)\colon\ u,v\ \in V\}$$

Σε ένα πλήρες γράφημα G με n κόμβους έχουμε $\kappa(G) = n - 1$. Προφανώς σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα ισχύει $\lambda(u,v) = \lambda(v,u)$ και $\kappa(u,v) = \kappa(v,u)$ για κάθε ζεύγος κόμβων u και v. Οι ισότητες αυτές μπορεί να μην ισχύουν σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, το οποίο σημαίνει ότι στους ορισμούς της ολικής συνεκτικότητας λαμβάνουμε υπόψη όλα τα διατεταγμένα ζεύγη κόμβων.

Έστω τώρα ένα υποσύνολο S των ακμών του G ($S \subseteq E$). Λέμε ότι το S αποσυνδέει τον κόμβο u από τον κόμβο v, εάν με τη διαγραφή των ακμών του S καταστρέφονται όλα τα μονοπάτια από τον u στον v. Ομοίως, έστω ένα υποσύνολο X των κόμβων του G το οποίο δεν περιέχει τους u και v ($X \subseteq V - \{u,v\}$). Εάν με τη διαγραφή των κόμβων του X καταστρέφονται όλα τα μονοπάτια από τον u στον v, τότε λέμε ότι το X αποσυνδέει τον u από τον v. Η τοπική ακμική ή κομβική συνεκτικότητα δύο κόμβων μπορεί να χαρακτηρισθεί από το πλήθος των ακμών ή των κόμβων η διαγραφή των οποίων αποσυνδέει τους δύο κόμβους. Η σχέση αυτή δίνεται από το Θεώρημα του Menger, το οποίο έχει δύο εκδοχές, μία για την ακμική και μία για την κομβική συνεκτικότητα, και ισχύει τόσο σε κατευθυνόμενα όσο και σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

Θεώρημα Ακμικής Συνεκτικότητας του Menger. Έστω s και t δύο κόμβοι ενός γραφήματος $G = (V,E)$. Το μέγιστο πλήθος ακμικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον s στον t είναι ίσο με το ελάχιστο πλήθος ακμών η διαγραφή των οποίων αποσυνδέει τον s από τον t.

Θεώρημα Κομβικής Συνεκτικότητας του Menger. Έστω s και t δύο κόμβοι ενός γραφήματος $G = (V,E)$ για τους οποίους δεν υπάρχει η ακμή (s,t). Το μέγιστο πλήθος κομβικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον s στον t είναι ίσο με το ελάχιστο πλήθος κόμβων του $V - \{s,t\}$ η διαγραφή των οποίων αποσυνδέει τον s από τον t.

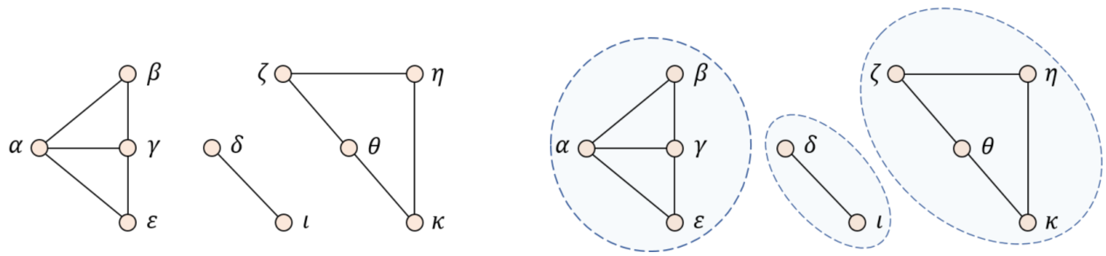
Θα δώσουμε μία απόδειξη και των δύο εκδοχών του Θεωρήματος του Menger στην Ενότητα 4.5, αφού ορίσουμε δύο χρήσιμα εργαλεία, τις ροές και τις τομές ενός δικτύου. Αρχικά όμως, θα αναφερθούμε σε κάποια ακόμα βασικά θέματα συνεκτικότητας σε μη κατευθυνόμενα και σε κατευθυνόμενα γραφήματα.

4.2 Συνεκτικότητα Μη-κατευθυνόμενων Γραφημάτων

Ένα γράφημα $G = (V,E)$ είναι συνεκτικό, εάν κάθε ζεύγος κόμβων $u,v \in V$ συνδέεται με κάποιο μονοπάτι. Οι *συνεκτικές συνιστώσες* του G είναι τα μείζονα συνεκτικά υπογραφήματα του G, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.

Χρησιμοποιώντας την κατά-πλάτος (bfs) ή την κατά-βάθος διερεύνηση (dfs) που είδαμε στο Κεφάλαιο 2, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τις συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος σε γραμμικό χρόνο $O(m+n)$, όπου m το πλήθος των ακμών και n το πλήθος των κόμβων.

Από το θεώρημα του Menger προκύπτει ότι η *ακμική συνεκτικότητα* $\lambda(G)$ του G μπορεί να ορισθεί ως το ελάχιστο πλήθος ακμών που, εάν αφαιρεθούν από το G, δίνουν μη συνεκτικό γράφημα. Για παράδειγμα, $\lambda(G) = 1$, εάν το G είναι δένδρο, και $\lambda(G) = 2$, εάν το G είναι ένας απλός κύκλος. Όμοια, η *συνεκτικότητα κόμβων* $\kappa(G)$ του G είναι ίση με το ελάχιστο πλήθος κόμβων που, εάν αφαιρεθούν από το G, δίνουν μη συνεκτικό γράφημα.

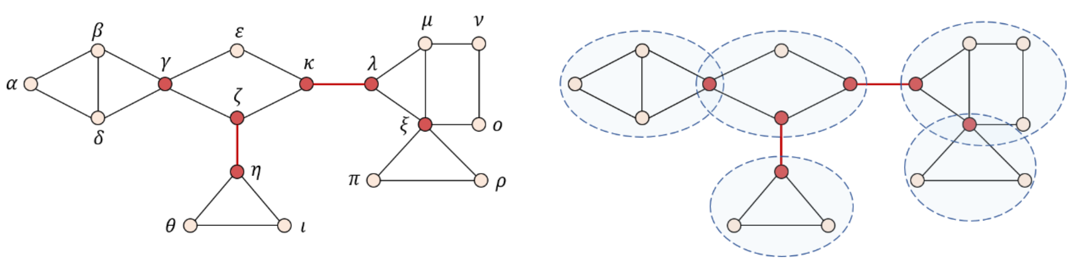


Σχήμα 4.2 Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα και οι συνεκτικές του συνιστώσες.

4.2.1 Κόμβοι άρθρωσης και γέφυρες

Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφημα. Ένας κόμβος $x \in V$ αποτελεί *άρθρωση* (ή κόμβο τομής) του G, εάν η διαγραφή του αποσυνδέει το γράφημα. Ομοίως, μία ακμή $e \in E$ αποτελεί *γέφυρα* (ή ακμή τομής) του G, εάν η διαγραφή της αποσυνδέει το γράφημα. Ένα γράφημα χωρίς αρθρώσεις ονομάζεται *δισυνεκτικό*. Ένα μείζον δισυνεκτικό υπογράφημα του G αποτελεί μία *δισυνεκτική συνιστώσα* (βλέπε Σχήμα 4.3).

Ένας αποδοτικός αλγόριθμος που να ανακαλύπτει τις αρθρώσεις, τις γέφυρες και τις δισυνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος G βασίζεται στην κατά-βάθος διερεύνηση. Έστω T ένα δένδρο κατά-βάθος διερεύνησης του G με ριζικό κόμβο r.

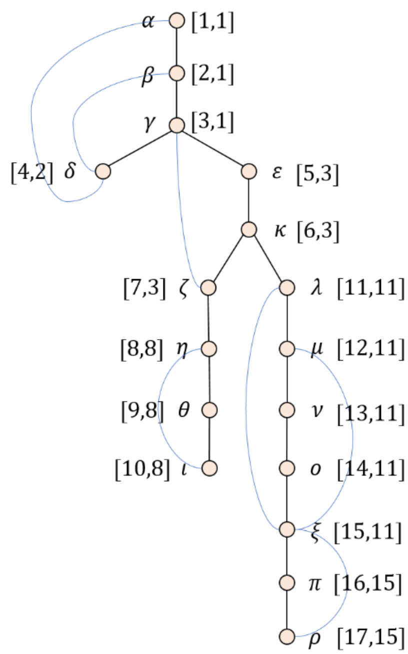


Σχήμα 4.3 Ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα και οι δισυνεκτικές του συνιστώσες. Οι κόμβοι γ, ζ, η, κ, λ και ξ είναι αρθρώσεις, ενώ οι ακμές (ζ, η) και (κ, λ) είναι γέφυρες.

Ιδιότητα 4.1 Ο κόμβος r είναι άρθρωση, εάν και μόνο εάν έχει δύο ή περισσότερα παιδιά στο T. Ένας κόμβος $x \neq r$ είναι άρθρωση, εάν και μόνο εάν έχει παιδί z στο T, έτσι ώστε να μην υπάρχει ανιούσα ακμή από το z ή από απόγονο του z προς γνήσιο πρόγονο του x.

Έστω $s[x]$ ο χρόνος εντοπισμού του κόμβου x κατά την κατά-βάθος διερεύνηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $low[x]$ ως εξής:

$$low[x] = \min \begin{cases} s[x], & \\ s[w], & (y, w) \text{ ανιούσα ακμή και } y \text{ απόγονος του } x \end{cases}$$



Σχήμα 4.4 Ένα δένδρο μιας κατά-βάθους διερεύνησης του γραφήματος του Σχήματος 4.3 (μαύρες ακμές) και οι ανιούσες ακμές σε σχέση με αυτό το δένδρο (μπλε ακμές). Δίπλα σε κάθε κόμβο x σημειώνουμε σε μορφή ζεύγους $[s[x], low[x]]$ το χρόνο εντοπισμού $s[x]$ και την τιμή $low[x]$.

Η προηγούμενη συνάρτηση μπορεί να υπολογισθεί για όλους τους κόμβους του γραφήματος σε χρόνο $O(n+m)$, κατά τη διάρκεια της κατά-βάθος διερεύνησης (βλέπε Άσκηση 1). Με τη βοήθεια της συνάρτησης $low[x]$ μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις αρθρώσεις επίσης σε χρόνο $O(n+m)$. Πράγματι, από την Ιδιότητα 4.1 συνεπάγεται άμεσα το εξής πόρισμα.

Ιδιότητα 4.2 Ένας κόμβος $x \neq r$ είναι άρθρωση, εάν και μόνο εάν έχει κάποιο παιδί z στο T, τέτοιο ώστε $low[z] \geq s[x]$.

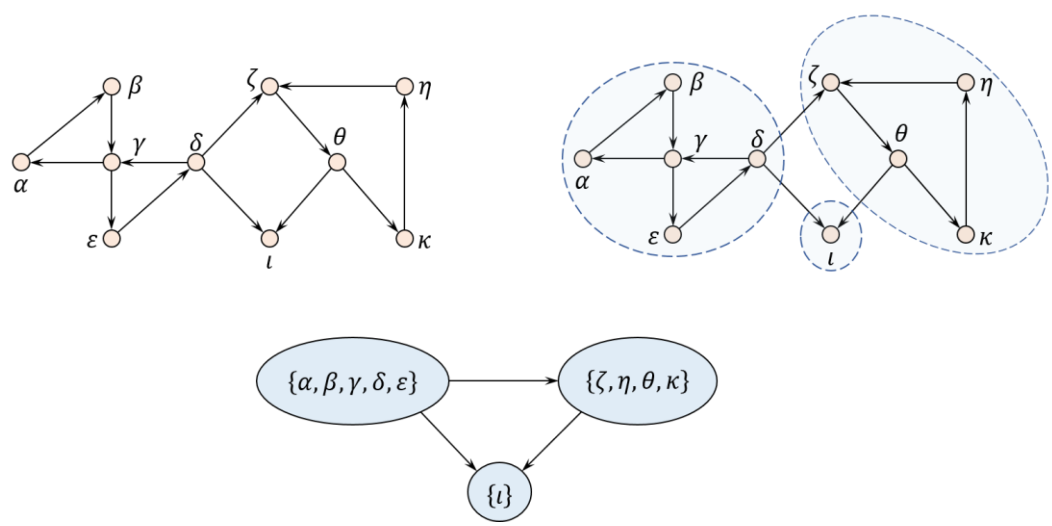
Ο προηγούμενος αλγόριθμος μπορεί επεκταθεί, έτσι ώστε να υπολογίζει και τις γέφυρες και τις δισυνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος σε συνολικό χρόνο $O(n+m)$. Αυτό αποτελεί αντικείμενο της Άσκησης 2.

4.3 Συνεκτικότητα Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

Σε αυτήν την ενότητα εξετάζουμε τη συνεκτικότητα κατευθυνόμενων γραφημάτων. Θα ορίσουμε αντίστοιχες έννοιες συνεκτικότητας, όπως αυτές που εξετάσαμε στην Ενότητα 4.2 για τα μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

4.3.1 Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Δύο κόμβοι v και u είναι *ισχυρά συνδεδεμένοι*, εάν υπάρχει μονοπάτι από τον v προς τον u και μονοπάτι από τον u προς τον v. Το γράφημα G είναι *ισχυρά συνεκτικό*, εάν για κάθε κόμβο $v \in V$ υπάρχει μονοπάτι από τον v προς κάθε άλλο κόμβο, δηλαδή όταν οποιοιδήποτε δύο κόμβοι του είναι ισχυρά συνδεδεμένοι. Οι *ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες* του G είναι τα μείζονα ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα του G. Όμοια με τις συνεκτικές συνιστώσες ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος, οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_k = (V_k, E_k)$ ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G δεν έχουν κοινούς κόμβους, δηλαδή $V_i \cap V_j = \emptyset$ για $i \neq j$ (βλέπε Άσκηση 3). Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε το γράφημα $G_{SCC} = (V_{SCC}, E_{SCC})$ των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του G, το οποίο λαμβάνουμε από το G με τη συρρίκνωση κάθε συνιστώσας G_i σε ένα κόμβο v_i. Με άλλα λόγια, το G_{SCC} περιέχει ένα κόμβο $v_i \in V_{SCC}$ για κάθε συνιστώσα G_i. Επιπλέον, το G_{SCC} περιλαμβάνει την ακμή (v_i, v_j), εάν υπάρχει ακμή (u, w) στο G, όπου $u \in V_i$ και $w \in V_j$. Οι προηγούμενες έννοιες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.5. Μία απλή αλλά και χρήσιμη ιδιότητα του G_{SCC} είναι ότι δεν περιέχει (κατευθυνόμενους) κύκλους. Πράγματι, εάν υπήρχε κύκλος C στο G_{SCC} που να περιλαμβάνει δύο κόμβους v_i και v_j, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες G_i και G_j, τότε οι κόμβοι των συνόλων V_i και V_j είναι ισχυρά συνδεδεμένοι, κάτι το οποίο είναι άτοπο.



Σχήμα 4.5 Ένα κατευθυνόμενο γράφημα, οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του και το γράφημα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών.

Για να ανακαλύψουμε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες, θα χρησιμοποιήσουμε ξανά την κατά-βάθος διερεύνηση ενός γραφήματος, αλλά με κάπως πιο περίτεχνο τρόπο. Για αρχή, ας στραφούμε στο απλούστερο πρόβλημα του υπολογισμού της ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας G_i, η οποία περιέχει ένα δεδομένο κόμβο v. Εάν εκτελέσουμε μία κατά-πλάτος ή κατά-βάθος διερεύνηση με αφετηρία τον v θα ανακαλύψουμε ένα σύνολο κόμβων ΑΠΟ(v) για τους οποίους υπάρχει μονοπάτι από τον v. Οι κόμβοι της συνιστώσας G_i είναι ακριβώς οι κόμβοι του συνόλου ΑΠΟ(v) για τους οποίους υπάρχει μονοπάτι προς τον v. Η εύρεση αυτών των κόμβων μπορεί να γίνει αποδοτικά με την εκτέλεση μίας κατά-πλάτος ή κατά-βάθος διερεύνησης με αφετηρία τον κόμβο v στο *ανάστροφο γράφημα* $G^R = (V, E^R)$, όπου $E^R = \{(w,u) : (u,w) \in E\}$. Δηλαδή το ανάστροφο γράφημα G^R προκύπτει από το G αντιστρέφοντας την κατεύθυνση κάθε ακμής. Οι κόμβοι που επισκεπτόμαστε κατά την εκτέλεση αυτής της διερεύνησης ανήκουν στο σύνολο των κόμβων ΠΡΟΣ(v) για τους οποίους υπάρχει μονοπάτι προς τον v στο αρχικό γράφημα G. Επομένως, η ζητούμενη ισχυρά συνεκτική συνιστώσα $G_i = (V_i, E_i)$ ορίζεται από τους κόμβους του συνόλου $V_i = $ ΑΠΟ$(v) \cap$ ΠΡΟΣ(v).

Η προηγούμενη μέθοδος δίνει έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για τον υπολογισμό της ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας, η οποία περιέχει ένα δεδομένο κόμβο v. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για κάθε κόμβο $v \in V$, μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες σε συνολικό χρόνο $O(n(m+n)) = O(nm + n^2)$ για ένα γράφημα με n κόμβους και m ακμές.

Με λίγη περισσότερη προσπάθεια, όμως, μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου. Η βασική παρατήρηση είναι ότι μία κατά-βάθος διεύρυνση στο γράφημα G και στο ανάστροφο γράφημα G^R παρέχουν αρκετές πληροφορίες για τον καθορισμό όλων των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών. Για το σκοπό αυτό, είναι χρήσιμο να μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες του γραφήματος των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών G_{SCC}. Έστω $v_1, v_2, \dots, v_k$ οι κόμβοι του G_{SCC} σε τοπολογική διάταξη, όπου ο κόμβος v_i αντιστοιχεί στην ισχυρά συνεκτική συνιστώσα $G_i = (V_i, E_i)$ του G. Αυτό σημαίνει ότι ο κόμβος v_k είναι τερματικός, δηλαδή δεν έχει εξερχόμενες ακμές στο G_{SCC} και, επομένως, στο G όλες οι ακμές που εξέρχονται από τους κόμβους του V_k καταλήγουν επίσης στο V_k. Το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο τερματικό κόμβο v_i στο G_{SCC}. Συνεπώς, εάν εκτελέσουμε μία κατά-πλάτος ή κατά-βάθος διεύρυνση στο G με αφετηρία ένα κόμβο $v \in V_k$, θα επισκεφθούμε μόνο τους κόμβους της συνιστώσας G_k. Στη συνέχεια, μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία για κάθε συνιστώσα σε αντίστροφη σειρά ως προς την τοπολογική διάταξη του G_{SCC}. Το πρόβλημα με αυτή τη στρατηγική είναι ότι δεν γνωρίζουμε πώς μπορούμε να επιλέξουμε έναν κόμβο που να ανήκει σε μία τερματική ισχυρά συνεκτική συνιστώσα G_i, δηλαδή σε συνιστώσα που να αντιστοιχεί σε τερματικό κόμβο του G_{SCC}. Μπορούμε, όμως, να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι είναι εύκολο να βρούμε μέσω μίας κατά-βάθος διερεύνησης του G έναν κόμβο v που να ανήκει σε μία αφετηριακή ισχυρά συνεκτική συνιστώσα. Πράγματι, ένας κατάλληλος κόμβος v είναι αυτός που έχει τη μέγιστη σειρά στη μεταδιάταξη που δίνει η κατά-βάθος διερεύνηση. Η επόμενη σημαντική παρατήρηση είναι ότι το ανάστροφο γράφημα G^R έχει τις ίδιες ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες με το G αλλά με αντίστροφη τοπολογική διάταξη. Έτσι, εάν εκτελέσουμε μία κατά-πλάτος ή κατά-βάθος διερεύνηση στο G^R με αφετηρία τον v, θα ανακαλύψουμε ακριβώς τους κόμβους της ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας G_i, η οποία περιέχει τον v. Μπορούμε να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία, επιλέγοντας ως αφετηρία τον επόμενο κόμβο του γραφήματος $G - G_i$ με τη μέγιστη σειρά στη μεταδιάταξη.

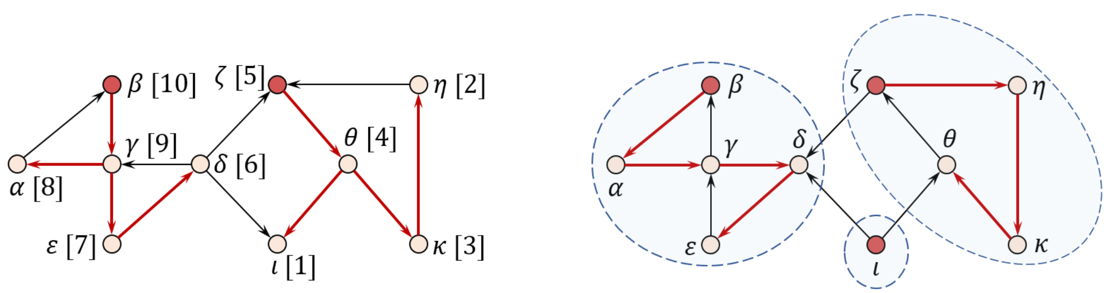
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στον αλγόριθμο 4.1 που ονομάζουμε Connected_Components.

Αλγόριθμος 4.1: Connected_Components

1. Εκτελούμε κατά-βάθος διερεύνηση, επιλέγοντας αυθαίρετα τις αφετηρίες, και υπολογίζουμε τη σειρά μεταδιάταξης των κόμβων;
2. Υπολογίζουμε το ανάστροφο γράφημα G^R;
3. Εκτελούμε κατά-βάθος διερεύνηση, επιλέγοντας τις αφετηρίες κατά φθίνουσα σειρά μεταδιάταξης των κόμβων;
4. Επιστρέφουμε τους κόμβους του κάθε δένδρου του δάσους της κατά-βάθος διερεύνησης ως μία ξεχωριστή συνεκτική συνιστώσα.

Ένα παράδειγμα της εκτέλεσης αυτού του αλγόριθμου δίνεται στο Σχήμα 4.6. Αρχικά εκτελούμε κατά-βάθος διερεύνηση στο γράφημα G με αφετηρία τους κόμβους ζ και β και σημειώνουμε τη σειρά μεταδιάταξης των κόμβων. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το ανάστροφο γράφημα G^R και εκτελούμε κατά-βάθος διερεύνηση με αφετηρία τον κόμβο β που είναι ο τελευταίος ως προς τη μεταδιάταξη του G. Έτσι, ανακαλύπτουμε την πρώτη ισχυρά συνεκτική συνιστώσα που περιλαμβάνει τους κόμβους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και ε. Στη συνέχεια, επιλέγουμε ως αφετηρία τον κόμβο ζ με τη μέγιστη τιμή μεταδιάταξης μεταξύ των υπόλοιπων κόμβων και ανακαλύπτουμε τη δεύτερη ισχυρά συνεκτική συνιστώσα, που σχηματίζεται από τους κόμβους ζ, η, θ και κ. Η τελευταία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα περιλαμβάνει το μοναδικό κόμβο που απομένει, δηλαδή τον κόμβο ι.

Τα πρώτα τρία βήματα του αλγόριθμου εκτελούνται σε $O(n+m)$ χρόνο, ενώ το τελευταίο βήμα σε $O(n)$ χρόνο. Έτσι, συνολικά, ο αλγόριθμος έχει γραμμικό χρόνο εκτέλεσης.

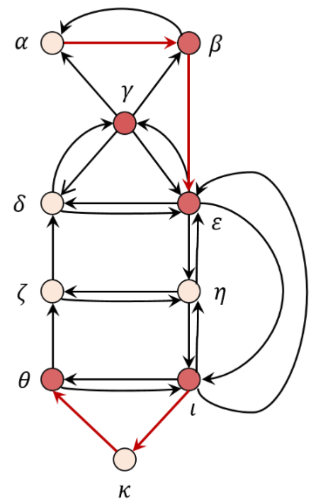


Σχήμα 4.6 Υπολογισμός των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος του Σχήματος 4.5.

4.3.2 Ισχυρές αρθρώσεις και ισχυρές γέφυρες

Ένας κόμβος $x \in V$ αποτελεί *ισχυρή άρθρωση* του G, εάν η διαγραφή του αυξάνει το πλήθος των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του. Ομοίως, μία ακμή $e \in E$ αποτελεί *ισχυρή γέφυρα* του G, εάν η διαγραφή της αυξάνει το πλήθος των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του. Οι έννοιες αυτές απεικονίζονται στο Σχήμα 4.7. Ένα γράφημα χωρίς αρθρώσεις ονομάζεται *δισυνεκτικό*. Ένα μείζον δισυνεκτικό υπογράφημα του G αποτελεί μία *δισυνεκτική συνιστώσα*.

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι, για να βρούμε όλες τις ισχυρές αρθρώσεις και ισχυρές γέφυρες ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G, αρκεί να θεωρήσουμε κάθε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G ξεχωριστά. Έτσι, στο υπόλοιπο της ενότητας θα υποθέσουμε ότι το G είναι ισχυρά συνεκτικό.

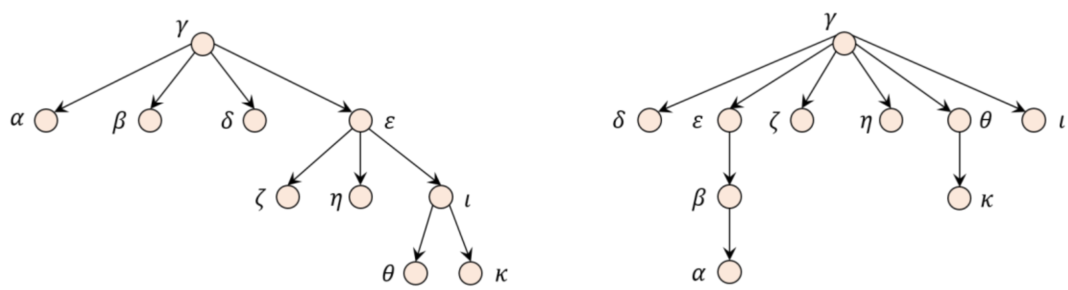


Σχήμα 4.7 Ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα. Οι κόμβοι $\beta, \gamma, \varepsilon, \theta$ και ι είναι ισχυρές αρθρώσεις, ενώ οι ακμές (β, ε), (ι, κ) και (κ, θ) είναι ισχυρές γέφυρες.

Ένας απλός τρόπος προσδιοριμού εάν ένας κόμβος v αποτελεί ισχυρή άρθρωση ενός ισχυρά συνεκτικού γραφήματος G είναι να υπολογίσουμε εάν το γράφημα παραμένει ισχυρά συνεκτικό μετά τη διαγραφή του v ή όχι. Ομοίως, για να ελέγξουμε εάν μία ακμή e αποτελεί ισχυρή γέφυρα του G, μπορούμε να υπολογίσουμε εάν το γράφημα παραμένει ισχυρά συνεκτικό μετά τη διαγραφή της e. Αυτή η ιδέα δίνει έναν αλγόριθμο υπολογισμού των ισχυρών αρθρώσεων σε $O(mn)$ χρόνο σε ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα με n κόμβους και m ακμές. (Παρατηρήστε ότι $\geq n$, αφού το γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό.) Αντίστοιχα, ο εντοπισμός των ισχυρών γεφυρών γίνεται σε $O(m^2)$ χρόνο. Μπορούμε να βελτιώσουμε το χρόνο για τις ισχυρές γέφυρες σε $O(mn)$ με την εξής παρατήρηση. Έστω ότι επιλέγουμε έναν αυθαίρετο κόμβο s του γραφήματος G ως αφετηρία και υπολογίζουμε ένα γεννητικό δένδρο T με αφετηρία τον s. Κάνουμε το ίδιο στο ανάστροφο γράφημα G^R και υπολογίζουμε ένα γεννητικό δένδρο T^R με αφετηρία τον s. Αφού το G είναι ισχυρά συνεκτικό, για κάθε κόμβο v υπάρχει κάποιο μονοπάτι από τον s στον v και κάποιο μονοπάτι από τον v στον s. Αυτό σημαίνει ότι τα δένδρα T και T^R υπάρχουν και μπορούν να υπολογισθούν σε $O(m)$ χρόνο, π.χ. με κατά-βάθος διερεύνηση από τον s. Παρατηρούμε τώρα ότι το γράφημα που προκύπτει από την ένωση των δύο δένδρων είναι ένα ισχυρά συνεκτικό υπογράφημα του G. Πράγματι, για κάθε ζεύγος κόμβων u και v υπάρχει ένα μονοπάτι από τον u στον v, μέσω του μονοπατιού από τον u στον s από τις ακμές του T^R και του μονοπατιού από τον s στον v από τις ακμές του T. Αυτό σημαίνει ότι μόνο οι ακμές των δύο δένδρων μπορεί να είναι ισχυρές γέφυρες. Έτσι, αφού ένα δένδρο με n κόμβους έχει $n-1$ ακμές, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον προηγούμενο απλοϊκό αλγόριθμο μόνο για $2(n-1)$ ακμές αντί για όλες τις m ακμές.

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε έναν αποτελεσματικότερο αλγόριθμο που βασίζεται σε δύο έννοιες που έχουν και ανεξάρτητο ενδιαφέρον: τα γραφήματα ροής και τους κυρίαρχους κόμβους.

Ένα *γράφημα ροής* $G_s = (V, E, s)$ είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα με αφετηριακό κόμβο s. Ένας κόμβος w είναι *κυρίαρχος ενός κόμβου* v, όταν κάθε διαδρομή από τον s στον v περιλαμβάνει τον w. Ο υπολογισμός των κυρίαρχων κόμβων αποτελεί ένα βασικό εργαλείο που χρησιμοποιούν οι μεταγλωττιστές για τη βελτιστοποίηση προγραμμάτων και την παραγωγή κώδικα. Επιπλέον, έχει εφαρμογές σε διάφορες περιοχές, όπως ο έλεγχος κυκλωμάτων, η ανάλυση δικτύων, η βιολογία κ.α. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι αυτή η σχέση κυριαρχίας είναι αυτοπαθής (κάθε κόμβος είναι κυρίαρχος του εαυτού του), αντισυμμετρική (αν ο w είναι κυρίαρχος ενός κόμβου v, τότε ο v δεν είναι κυρίαρχος του w) και μεταβατική (αν ο u είναι κυρίαρχος του w και ο w είναι κυρίαρχος του v, τότε και ο u είναι κυρίαρχος του v). Επιπλέον, προκύπτει ότι η σχέση κυριαρχίας μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα δένδρο με ρίζα τον αφετηριακό κόμβο s, το οποίο ονομάζουμε *δένδρο κυριαρχίας*. Το δένδρο κυριαρχίας έχει την ακόλουθη ιδιότητα για κάθε δύο κόμβους u και v: Ο κόμβος u είναι κυρίαρχος του v, εάν και μόνο εάν ο u είναι πρόγονος του v στο δένδρο κυριαρχίας (βλέπε Σχήμα 4.8). Η απόδειξη της προηγούμενης πρόταση αποτελεί αντικείμενο της Άσκησης 5.



Σχήμα 4.8 Το δένδρο κυριαρχίας του γραφήματος ροής G_γ, με αφετηρία τον κόμβο γ, που αντιστοιχεί στο ισχυρά συνεκτικό γράφημα G του Σχήματος 4.7, καθώς και το δένδρο κυριαρχίας του ανάστροφου γραφήματος ροής G_γ^R.

Το δένδρο κυριαρχίας ενός γραφήματος ροής με m ακμές και n κόμβους μπορεί να υπολογισθεί σε $O(m)$ χρόνο. Εδώ θα αρκεστούμε να περιγράψουμε πως τα δένδρα κυριαρχίας μάς επιτρέπουν να ανακαλύψουμε τις ισχυρές αρθρώσεις και τις ισχυρές γέφυρες ενός ισχυρά συνεκτικού γραφήματος.

Ιδιότητα 4.3 Ένας κόμβος $x \neq s$ είναι ισχυρή άρθρωση, εάν-ν δεν είναι φύλλο στο δένδρο κυριαρχίας D του γραφήματος ροής $G_s = (V, E, s)$ ή στο δένδρο κυριαρχίας D^R του ανάστροφου γραφήματος ροής $G_s^R = (V, E^R, s)$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι, εάν ο κόμβος x δεν είναι φύλλο στο δένδρο κυριαρχίας D του γραφήματος ροής $G_s = (V, E, s)$, τότε είναι ισχυρή άρθρωση. Έστω y ένα παιδί του x στο D. Από τον ορισμό της κυριαρχίας έχουμε ότι ο κόμβος x βρίσκεται σε όλα τα μονοπάτια από τον s στον y. Άρα, η διαγραφή του x καταστρέφει όλα αυτά τα μονοπάτια, με αποτέλεσμα ο s και ο y να βρίσκονται σε διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες στο $G - x$. Άρα, ο κόμβος x είναι ισχυρή άρθρωση. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι, εάν ο κόμβος x δεν είναι φύλλο στο δένδρο κυριαρχίας D^R του αντίστροφου γραφήματος ροής $G_s^R = (V, E^R, s)$, τότε είναι ισχυρή άρθρωση.

Για να δείξουμε το αντίστροφο, υποθέτουμε τώρα ότι ο κόμβος x είναι ισχυρή άρθρωση. Εξ ορισμού προκύπτει ότι το γράφημα $G - x$ δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Άρα, υπάρχει κάποιος κόμβος v που δεν βρίσκεται στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα με τον s στο $G - x$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα $G - x$ δεν περιέχει μονοπάτι από τον s στον u ή από τον u στον s. Ισοδύναμα έχουμε ότι στο γράφημα G όλα τα μονοπάτια από τον s στον u περιλαμβάνουν τον x ή όλα τα μονοπάτια από τον u στον s περιλαμβάνουν τον x. Στην πρώτη περίπτωση ο κόμβος x είναι κυρίαρχος του u στο G_s, ενώ στη δεύτερη ο x είναι κυρίαρχος του u στο G_s^R.

Από την Ιδιότητα 4.3 λαμβάνουμε άμεσα τον Αλγόριθμο 4.2 που ονομάζουμε Strong_Cut.

Αλγόριθμος 4.2: Strong_Cut

1. Επιλέγουμε έναν αυθαίρετο κόμβο $s \in V$ ως αφετηρία και υπολογίζουμε το δένδρο κυριαρχίας D του γραφήματος ροής $G_s = (V, E, s)$;
2. Βρίσκουμε το σύνολο A των κόμβων $x \neq s$ που δεν είναι φύλλα στο D;
3. Υπολογίζουμε το ανάστροφο γράφημα G^R;
4. Υπολογίζουμε το δένδρο κυριαρχίας D^R του ανάστροφου γραφήματος ροής $G_s^R = (V, E^R, s)$;
5. Βρίσκουμε το σύνολο A^R των κόμβων $x \neq s$ που δεν είναι φύλλα στο D^R;
6. Ελέγχουμε εάν ο κόμβος s είναι ισχυρή άρθρωση υπολογίζοντας εάν το $G - s$ είναι ισχυρά συνεκτικό;
7. Εάν ο κόμβος s είναι ισχυρή άρθρωση, τότε επιστρέφουμε τους κόμβους του συνόλου $A \cup A^R \cup \{s\}$, διαφορετικά επιστρέφουμε τους κόμβους του συνόλου $A \cup A^R$.

Με τη βοήθεια των δένδρων κυριαρχίας μπορούμε να υπολογίσουμε και τις ισχυρές γέφυρες. Λέμε ότι μία ακμή (u, v) είναι *γέφυρα* του γραφήματος ροής $G_s = (V, E, s)$, εάν περιλαμβάνεται σε όλα τα μονοπάτια από τον s στον v. Παραθέτουμε την επόμενη ιδιότητα χωρίς απόδειξη, η οποία είναι το ζητούμενο της Άσκησης 6.

Ιδιότητα 4.4 Μία ακμή $(x, y) \in E$ είναι ισχυρή γέφυρα ενός ισχυρά συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$, εάν-ν είναι γέφυρα του αντίστοιχου γραφήματος ροής G_s ή του ανάστροφου του G_s^R, όπου s ένας αυθαίρετος αφετηριακός κόμβος.

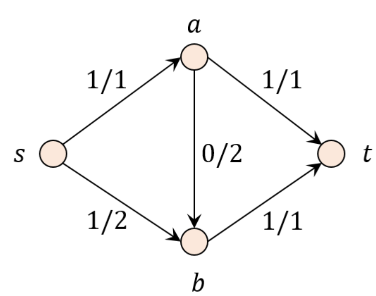
4.4 Ροές και Τομές Δικτύων

Ένα δίκτυο είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, με αφετηριακό κόμβο $s \in V$ και τερματικό κόμβο $t \in V$, όπου κάθε ακμή έχει χωρητικότητα που δίνεται από τη συνάρτηση $c : (u, v) \in E \to \mathbb{R}$.

Μία ροή του δικτύου G είναι μία συνάρτηση $f : (u, v) \in E \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- **Περιορισμός χωρητικότητας:** $f(u, v) \leq c(u, v)$, για κάθε ακμή $(u, v) \in E$.
- **Διατήρηση ροής:** $\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,w)\in E} f(v, w)$, για κάθε κόμβο $v \in V - \{s, t\}$.

Ο περιορισμός χωρητικότητας σημαίνει ότι η ροή μίας ακμής δεν μπορεί να ξεπερνά τη χωρητικότητα της, ενώ η διατήρηση ροής σημαίνει ότι για κάθε ενδιάμεσο κόμβο v $(\neq s, t)$ η συνολική ροή που εισέρχεται στον v είναι ίση με τη συνολική ροή που εξέρχεται από τον v. Άρα, οι ενδιάμεσοι κόμβοι δεν παράγουν, αλλά ούτε και καταναλώνουν ροή. Στο Σχήμα 4.9 δίνεται ένα παράδειγμα αυτών των εννοιών.



Σχήμα 4.9 Ένα δίκτυο G και μία ροή του f με τιμή 2. Η ετικέτα $f(u, v)/c(u, v)$ δίπλα σε κάθε ακμή (u, v) δίνει τη ροή $f(u, v)$ και τη χωρητικότητα $c(u, v)$ της ακμής.

Μία τομή (S, T) του δικτύου G είναι μία διαμέριση του συνόλου των κόμβων V σε σύνολα S και T με $s \in S$ και $t \in T$. Η χωρητικότητα της τομής (S, T), την οποία συμβολίζουμε με $c(S, T)$, ορίζεται ως το άθροισμα της χωρητικότητας των ακμών που κατευθύνονται από το S προς το T, δηλαδή $c(S, T) = \sum_{(v,w)\, \in\, E(S,T)} c(v, w)$, όπου $E(S, T) = \{(v, w) \in E : v \in S, w \in T\}$. Μία τομή (S, T) είναι μία *ελάχιστη τομή του δικτύου* G, εάν έχει ελάχιστη χωρητικότητα $c(S, T)$ μεταξύ όλων των τομών του δικτύου.

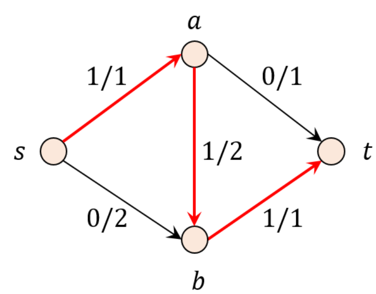
Ιδιότητα Τομής. Για οποιαδήποτε ροή f και τομή (S, T) ισχύει $|f| \leq c(S, T)$.

Θεώρημα Μέγιστης Ροής-Ελάχιστης Τομής. Έστω f^* μία μέγιστη ροή και (S^*, T^*) μία ελάχιστη τομή του δικτύου. Τότε $|f^*| = c(S^*, T^*)$.

4.4.1 Αυξητικές διαδρομές και υπολειπόμενο δίκτυο

Μία πρώτη απόπειρα υπολογισμού της μέγιστης ροής ενός δικτύου είναι μέσω ενός επαναληπτικού αλγόριθμου εύρεσης *αυξητικών διαδρομών*. Μία αυξητική διαδρομή είναι ένα μονοπάτι από τον s στον t, το οποίο μπορεί να δεχθεί επιπλέον ροή (βλέπε Σχήμα 4.10). Σε κάθε επανάληψη του αλγόριθμου, βρίσκουμε μία αυξητική διαδρομή P και αυξάνουμε την τρέχουσα ροή f κατά δ μονάδες κατά μήκος της P, όπου δ η μέγιστη δυνατή αύξηση της ροής κατά μήκος της P. Οι επαναλήψεις συνεχίζονται, μέχρι να μην υπάρχει άλλη αυξητική διαδρομή στο δίκτυο.

Αν η αναζήτηση των αυξητικών διαδρομών γίνεται στο δίκτυο G, τότε είναι δυνατό ο αλγόριθμος να τερματίσει χωρίς να έχει υπολογίσει τη μέγιστη ροή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10 Η αύξηση της ροής κατά μία μονάδα κατά μήκος του μονοπατιού s, a, b, c έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει άλλη αυξητική διαδρομή στο δίκτυο.

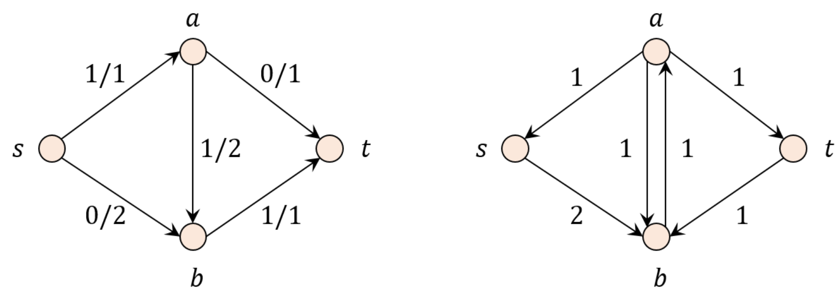
Για να εξασφαλίσουμε ότι η προηγούμενη μέθοδος θα υπολογίσει τη μέγιστη ροή, πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα να ανακαλέσουμε μέρος της ροής που έχουμε διοχετεύσει μέσω κάποιων ακμών. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε εάν η αναζήτηση των αυξητικών διαδρομών γίνει σε ένα βοηθητικό δίκτυο, που ονομάζουμε υπολειπόμενο δίκτυο G_f και εξαρτάται από την τρέχουσα ροή f.

Το *υπολειπόμενο δίκτυο* $G_f = (V, E_f)$ έχει τους ίδιους κόμβους με το αρχικό δίκτυο G, ενώ οι ακμές του και η χωρητικότητά τους καθορίζονται από τη ροή f ως εξής. Μία ακμή (u, v) ανήκει στο G_f και έχει χωρητικότητα $c_f(u, v)$, όταν συμβαίνει ένα από τα εξής:

- Η (u, v) είναι ακμή του G και έχει ροή $f(u, v) < c(u, v)$. Τότε $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.
- Η (v, u) είναι ακμή του G και έχει ροή $f(u, v) > 0$. Τότε $c_f(u, v) = f(v, u)$.

Δείτε το Σχήμα 4.11. Στην πρώτη περίπτωση καλούμε την ακμή (u, v) του G_f *ευθύδρομη* (γιατί η ίδια είναι ακμή του δικτύου G), ενώ στη δεύτερη περίπτωση την καλούμε *ανάδρομη* (γιατί η αντίστροφη της είναι ακμή του δικτύου G).

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το υπολειπόμενο δίκτυο έχει το πολύ τις διπλάσιες ακμές από το αρχικό δίκτυο. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, εάν η αναζήτηση των αυξητικών διαδρομών γίνεται στο υπολειπόμενο δίκτυο, τότε η μέθοδος αυτή θα υπολογίσει τη μέγιστη ροή.



Σχήμα 4.11 Το δίκτυο G του Σχήματος 4.9 και η τρέχουσα ροή του f με τιμή 1. Το αντίστοιχο υπολειπόμενο δίκτυο G_f.

4.4.2 Αλγόριθμος των Ford-Fulkerson

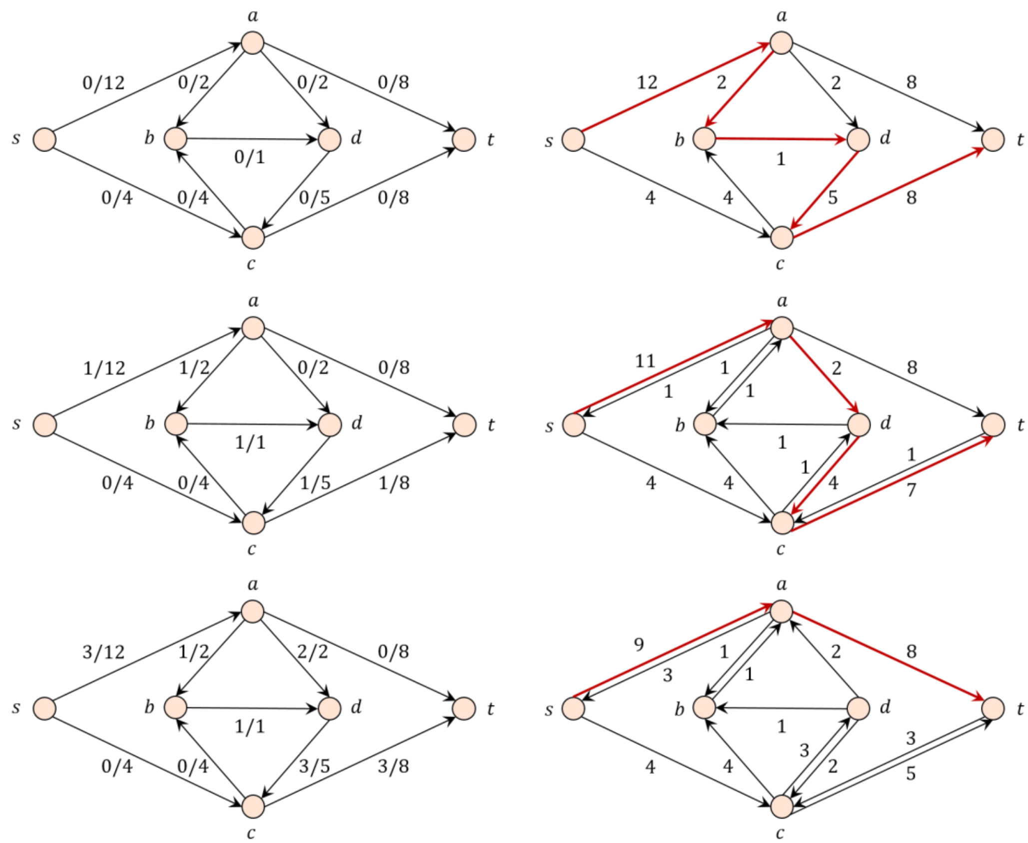
Ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson βασίζεται στον επαναληπτικό υπολογισμό αυξητικών διαδρομών στο υπολειπόμενο δίκτυο G_f (βλέπε Αλγόριθμο 4.3).

Αλγόριθμος 4.3: Ford_Fulkerson

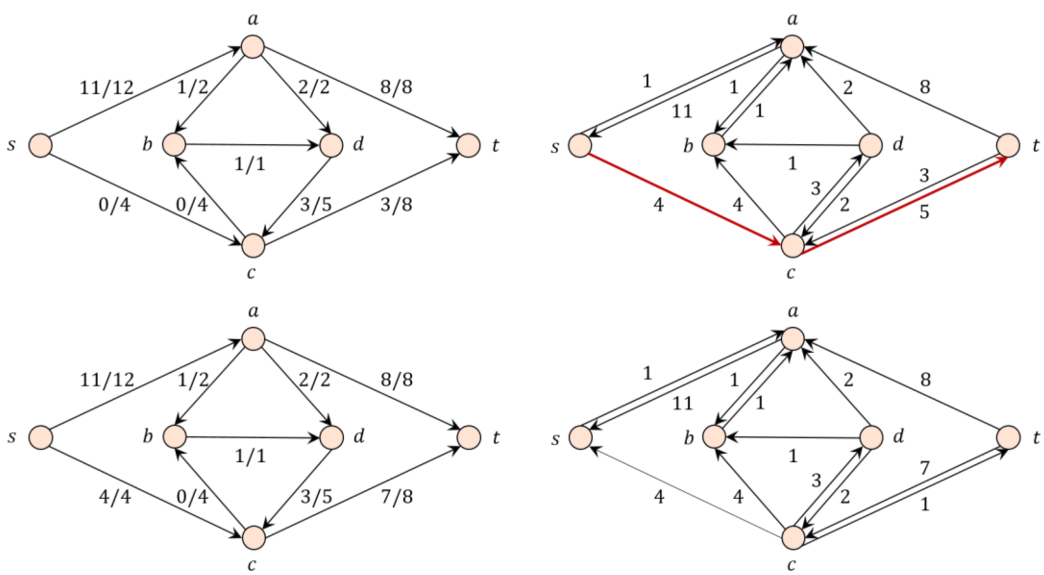
1. Θέτουμε ως αρχική ροή $f \leftarrow 0$ και υπολειπόμενο δίκτυο $G_f \leftarrow G$;
2. **όσο** υπάρχει μονοπάτι P από τον s στον t στο G_f, επανάλαβε
   $\delta = \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in P\}$; // ελάχιστη χωρητικότητα ακμής του P
   αυξάνουμε τη ροή f κατά δ μονάδες κατά μήκος του P;
   υπολογίζουμε το νέο υπολειπόμενο δίκτυο G_f;
3. **επίστρεψε** τη ροή f.

Η διαδικασία λειτουργίας του αλγορίθμου των Ford-Fulkerson απεικονίζεται στα Σχήματα 4.12 και 4.13.

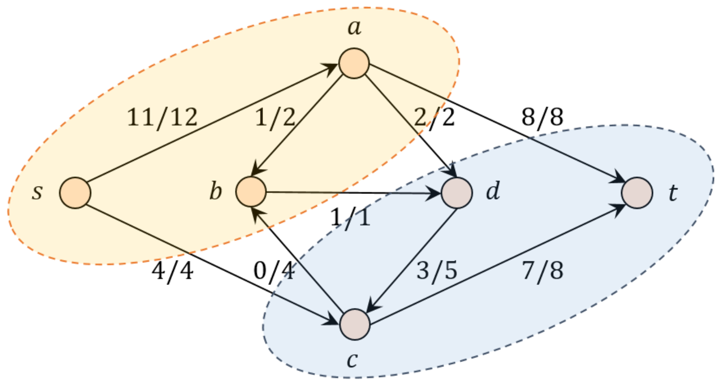
Για την ανάλυση του αλγόριθμου αυτού, συμβολίζουμε με f την τρέχουσα ροή στο G και με f' τη ροή που λαμβάνουμε μετά από το βήμα επαύξησης κατά μήκος ενός μονοπατιού P από τον s στον t στο G_f. Η αύξηση της ροής κατά μήκος του P γίνεται ως εξής. Για κάθε ακμή (u,v) του μονοπατιού P, θέτουμε $f'(u,v) = f(u,v) + \delta$, εάν η (u,v) είναι ευθύδρομη (δηλαδή ακμή του αρχικού δικτύου G), και $f'(v,u) = f(v,u) - \delta$, εάν η (u,v) είναι ανάδρομη (δηλαδή ακμή του υπολειπόμενου δικτύου G_f με αντίστοιχη ακμή (v,u) στο G).



Σχήμα 4.12 Παράδειγμα εκτέλεσης του αλγόριθμου Ford-Fulkerson. Η αυξητική διαδρομή που επιλέγουμε κάθε φορά στο υπολειπόμενο δίκτυο είναι αυτή που προηγείται λεξικογραφικά με βάση τα ονόματα των κόμβων.



Σχήμα 4.13 Συνέχεια του παραδείγματος εκτέλεσης του αλγόριθμου Ford-Fulkerson του Σχήματος 4.12.



Σχήμα 4.14 Μία ελάχιστη τομή του δικτύου του Σχήματος 4.9.

Ιδιότητα 4.5 Η f' είναι έγκυρη ροή του G με τιμή $|f'| > |f|$.

Δείχνουμε ότι η f' ικανοποιεί τις συνθήκες περιορισμού χωρητικότητας και διατήρησης της ροής. Καθώς η ροή των ακμών που δεν ανήκουν στο αυξητικό μονοπάτι δεν μεταβάλλεται, αρκεί να εξετάσουμε τις ακμές και τους κόμβους του P. Έστω (u, v) μία ακμή του P. Εάν η ακμή αυτή είναι ευθύδρομη, τότε η ροή της αυξάνεται σε $f'(u, v) = f(u, v) + \delta \leq f(u, v) + c_f(u, v) = c(u, v)$. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου η (u, v) είναι ανάδρομη, η ακμή (v, u) ανήκει στο αρχικό δίκτυο G και η ροή της μειώνεται σε $f'(v, u) = f(v, u) - \delta \geq f(v, u) - c_f(u, v) \geq 0$. Άρα, και στις δύο περιπτώσεις ικανοποιείται ο περιορισμός χωρητικότητας. Απομένει να δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη διατήρησης της ροής για κάθε κόμβο του $P - \{s, t\}$. Θεωρούμε έναν τέτοιο κόμβο u. Έστω (w, u) η ακμή του P η οποία εισέρχεται στον u και (u, v) η ακμή του P η οποία εξέρχεται από τον u. Εξετάζουμε τέσσερις περιπτώσεις, ανάλογα με το ποιές από τις δύο αυτές ακμές ανήκουν στο αρχικό δίκτυο:

1. Οι ακμές (w, u) και (u, v), ανήκουν και οι δύο στο G. Τόσο η ολική εισερχόμενη ροή στο u, όσο και η ολική εξερχόμενη ροή από τον u αυξάνονται κατά δ μονάδες.
2. Μόνο η ακμή (w, u) ανήκει στο G. Η ολική εισερχόμενη ροή στον u δεν μεταβάλλεται.
3. Μόνο η ακμή (u, v) ανήκει στο G. Συμμετρική περίπτωση της (β). Η ολική εξερχόμενη ροή στον u δεν μεταβάλλεται.
4. Οι ακμές (w, u) και (u, v) δεν ανήκουν στο G. Τόσο η ολική εισερχόμενη ροή στο u, όσο και η ολική εξερχόμενη ροή από τον u μειώνονται κατά δ μονάδες.

Άρα, σε κάθε περίπτωση η συνθήκη διατήρησης της ροής ικανοποιείται στον u.

Τώρα, μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα το δεύτερο μέρος της ιδιότητας, δηλαδή ότι η νέα ροή f' έχει μεγαλύτερη τιμή από την f. Η πρώτη ακμή του αυξητικού μονοπατιού P ανήκει στο G, αφού ο αφετηριακός κόμβος δεν έχει εισερχόμενες ακμές. Άρα, η συνολική ροή που εξέρχεται από τον s αυξάνεται κατά δ μονάδες, δηλαδή $|f'| = |f| + \delta > |f|$, αφού $\delta > 0$.

Ιδιότητα 4.6 Ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson επιστρέφει μία μέγιστη ροή του G.

Θα δείξουμε ότι η συνθήκη τερματισμού του αλγόριθμου ορίζει μία τομή (S, T) χωρητικότητας $c(S, T) = |f|$. Τότε, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ροή f είναι μέγιστη, γιατί διαφορετικά θα υπήρχε ροή f' με τιμή $|f'| > |f| = c(S, T)$, κάτι που είναι αδύνατο, καθώς παραβιάζει την Ιδιότητα Τομής.

Θέτουμε ως S το σύνολο των κόμβων προς τους οποίους υπάρχει μονοπάτι από τον s στο G_f. Επίσης, θέτουμε $T = V - S$. Τα σύνολα S και T ορίζουν μία διαμέριση των κόμβων του δικτύου, ενώ από τη συνθήκη τερματισμού του αλγόριθμου έχουμε $s \in S$ και $t \in T$. Επομένως, λαμβάνουμε μία τομή του δικτύου G. Θεωρούμε τώρα μία ακμή (u, v), που ενώνει κόμβους σε διαφορετικά σύνολα της τομής. Ισχυριζόμαστε, πρώτα, ότι, εάν $u \in S$ και $v \in T$, τότε $f(u, v) = c(u, v)$. Πράγματι, εάν $f(u, v) < c(u, v)$, τότε η ακμή (u, v) εμφανίζεται στο υπολειπόμενο δίκτυο G_f. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι στο G_f υπάρχει μονοπάτι από τον s στον v μέσω του u, κάτι το οποίο είναι αδύνατο, αφού αντιβαίνει το γεγονός ότι ο v ανήκει στο T. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $u \in T$ και $v \in S$. Σε αυτήν την περίπτωση, ισχυριζόμαστε ότι $f(u, v) = 0$. Όμοια με πριν, εάν έχουμε $f(u, v) > 0$, τότε η ακμή (v, u) εμφανίζεται στο υπολειπόμενο δίκτυο G_f, γεγονός το οποίο αντιβαίνει το γεγονός ότι ο u ανήκει στο T.

Συνοψίζοντας, από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι κάθε ακμή από το S στο T είναι κορεσμένη, ενώ κάθε ακμή από το T στο S φέρει μηδενική ροή. Έτσι, έχουμε $|f| = f(S, T) = c(S, T)$.

Ιδιότητα 4.7 Έστω ότι οι χωρητικότητες των ακμών του δικτύου είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε η ροή κάθε ακμής είναι ακέραιος αριθμός σε όλη τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγόριθμου.

Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο πλήθος των επαναλήψεων του αλγόριθμου. Αρχικά, $f(u, v) = 0$ για κάθε ακμή (u, v) του G. Κάθε επανάληψη αυξάνει τη ροή κατά δ μονάδες κατά μήκος ενός μονοπατιού στο υπολειπόμενο γράφημα, όπου δ είναι η υπολειπόμενη χωρητικότητα του μονοπατιού. Από την επαγωγική υπόθεση, η ροή κάθε ακμής είναι ακέραιος αριθμός και, επομένως, και η υπολειπόμενη χωρητικότητα δ είναι ακέραια.

Ιδιότητα 4.8 Έστω ότι οι χωρητικότητες των ακμών του δικτύου είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson τερματίζει σε $O(|f^*|)$ επαναλήψεις και συνολικά σε $O(m|f^*|)$ χρόνο.

Αυτό το φράγμα στο χρόνο εκτέλεσης ίσως να φαντάζει απαισιόδοξο, εντούτοις μπορεί να συμβεί σε παθολογικές περιπτώσεις.

4.4.3 Αλγόριθμος των Edmonds-Karp

Μπορούμε να λάβουμε πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης, εάν ακολουθήσουμε κάποιες συγκεκριμένες τακτικές επιλογής των αυξητικών μονοπατιών. Μία από αυτές είναι η επιλογή ενός συντομότερου μονοπατιού (βλέπε Αλγόριθμο 4.4 των Edmonds-Karp).

Αλγόριθμος 4.4: Edmonds_Karp

1. Θέτουμε ως αρχική ροή $f = 0$ και υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = G$;
2. **όσο** υπάρχει μονοπάτι από τον s στον t στο G_f, επανάλαβε
   P = συντομότερο μονοπάτι από τον s στον t στο G_f;
   $\delta = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in P\}$, // ελάχιστη χωρητικότητα ακμής του P;
   αυξάνουμε τη ροή f κατά δ μονάδες κατά μήκος του P;
   υπολογίζουμε το νέο υπολειπόμενο δίκτυο G_f;
3. **επίστρεψε** τη ροή f.

Για οποιουσδήποτε κόμβους u και v, συμβολίζουμε με $d(u,v)$ την απόσταση του u από τον v στο G_f, δηλαδή το μήκος του συντομότερου μονοπατιού στο G_f από τον u στον v. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η επιλογή του συντομότερου αυξητικού μονοπατιού έχει ως αποτέλεσμα οι αποστάσεις των κόμβων από τον κόμβο s να είναι μονότονα αύξουσες. Από το γεγονός αυτό μπορούμε να λάβουμε ένα πολυωνυμικό άνω φράγμα για το πλήθος των αυξητικών διαδρομών.

Ιδιότητα 4.9 Σε κάθε επανάληψη του αλγόριθμου Edmonds-Karp, η απόσταση $d(s,v)$ αυξάνεται μονότονα για κάθε κόμβο $v \in V - \{s,t\}$.

Θα αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή με απαγωγή σε άτοπο. Θεωρούμε μία επανάληψη του αλγόριθμου. Έστω f η ροή στην αρχή της επανάληψης και f' η ροή μετά την επαύξηση κατά μήκος του αυξητικού μονοπατιού P. Επίσης, συμβολίζουμε με d και d' τις αποστάσεις στο υπολειπόμενο δίκτυο πριν και μετά την επαύξηση. (Δηλαδή η συνάρτηση d δίνει τις αποστάσεις των κόμβων στο G_f και η d' δίνει τις αποστάσεις των κόμβων στο $G_{f'}$.)

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος κόμβος $v \in V - \{s,t\}$ για τον οποίο η απόσταση του s από τον v στο υπολειπόμενο δίκτυο μειώθηκε. Επιλέγουμε τον v να είναι ο κόμβος με την ελάχιστη απόσταση $d'(s,v)$, για τον οποίο να ισχύει $d'(s,v) < d(s,v)$. Θεωρούμε το συντομότερο μονοπάτι στο $G_{f'}$ από τον s στον v. Έστω u ο κόμβος πριν τον v στο μονοπάτι αυτό. Τότε $d'(s,v) = d'(s,u) + 1$. Επίσης, από την επιλογή του v συνεπάγεται ότι $d'(s,u) \geq d(s,u)$. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι η ακμή (u,v) δεν υπάρχει στο G_f, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $d(s,v) \leq d(s,u) + 1 \leq d'(s,u) + 1 = d'(s,v)$, το οποίο αντιβαίνει την υπόθεση ότι $d'(s,v) < d(s,v)$. Άρα, η ακμή (u,v) δεν υπάρχει στο υπολειπόμενο δίκτυο στην αρχή της επανάληψης και εμφανίζεται μετά την επαύξηση. Ο μόνος τρόπος, για να συμβεί αυτό, είναι να έχουμε μία από τις δύο περιπτώσεις:

1. Η (u,v) να υπάρχει στο αρχικό δίκτυο G, $f(u,v) = c(u,v)$ και $f'(u,v) < c(u,v)$.
2. Η (u,v) να μην υπάρχει στο αρχικό δίκτυο G, $f(v,u) = 0$ και $f'(v,u) > 0$.

Και στις δύο περιπτώσεις πρέπει η ακμή (v,u) να ανήκει στο αυξητικό μονοπάτι P του γραφήματος G_f. Αφού, όμως, το P είναι συντομότερο μονοπάτι, έχουμε $d(s,u) = d(s,v) + 1$. Άρα

$d(s,v) = d(s,u) - 1 = (d'(s,v) - 1) - 1 = d'(s,v) - 2$, κάτι το οποίο είναι αδύνατο, αφού υποθέσαμε ότι $d'(s,v) < d(s,v)$.

Με βάση την ιδιότητα αυτή, μπορούμε να δώσουμε ένα άνω φράγμα για το πλήθος των επαναλήψεων του αλγόριθμου. Η αύξηση της ροής κατά μήκος του αυξητικού μονοπατιού P έχει ως αποτέλεσμα την απαλοιφή των ακμών (u,v) του P με υπολειπόμενη χωρητικότητα $c_f(u,v) = \delta$. Καλούμε μία τέτοια ακμή *κρίσιμη*. Κάθε κρίσιμη ακμή δεν περιλαμβάνεται στο νέο υπολειπόμενο γράφημα $G_{f'}$.

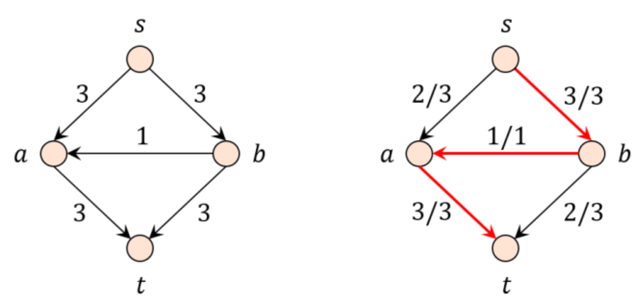
Ιδιότητα 4.10 Μία ακμή (u,v) μπορεί να καταστεί κρίσιμη το πολύ $n/2$ φορές.

Όταν η ακμή (u,v) γίνει κρίσιμη, τότε $d(s,v) = d(s,u) + 1$. Για να εμφανισθεί ξανά στο υπολειπόμενο δίκτυο, θα πρέπει προηγουμένως η αντίστροφη ακμή (v,u) να περιληφθεί σε ένα αυξητικό μονοπάτι. Έστω η τρέχουσα ροή, όταν συμβεί αυτό. Τότε $d'(s,u) = d'(s,v) + 1 \geq d(s,v) + 1 = d(s,u) + 2$.

Ιδιότητα 4.11 Έστω ότι οι χωρητικότητες των ακμών του δικτύου είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο αλγόριθμος Edmonds-Karp τερματίζει σε $O(mn)$ επαναλήψεις και συνολικά σε $O(m^2 n)$ χρόνο.

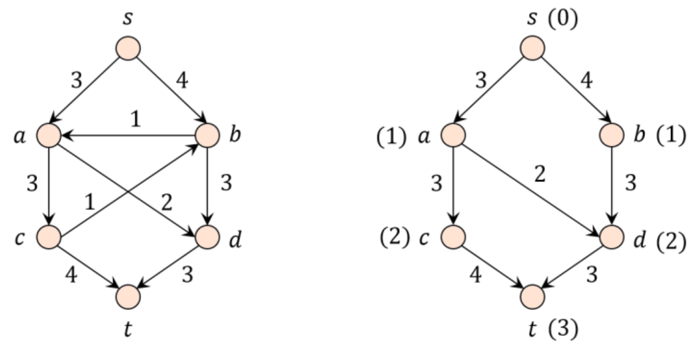
4.4.2 Αλγόριθμος του Dinic

Έστω f μία ροή ενός δικτύου G. Αποκαλούμε την f *ροή φραγής*, εάν κάθε μονοπάτι από τον αφετηριακό κόμβο s στον τερματικό κόμβο t περιέχει τουλάχιστον μία κορεσμένη ακμή (βλέπε Σχήμα 4.15).



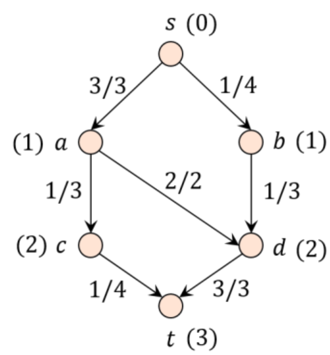
Σχήμα 4.15 Ένα δίκτυο ροής G και μία ροή φραγής του f. Οι κόκκινες ακμές είναι κορεσμένες και κάθε μονοπάτι από τον s στον t περιλαμβάνει τουλάχιστον μία τέτοια ακμή.

Ο αλγόριθμος του Dinic βασίζεται σε μία αποδοτική μέθοδο υπολογισμού ροής φραγής σε ένα υπογράφημα του υπολειπόμενου δικτύου το οποίο ονομάζουμε *δίκτυο επιπέδων*. Το επίπεδο $l(v)$ ενός κόμβου v στο υπολειπόμενο δίκτυο G_f ορίζεται ως το μήκος της συντομότερης διαδρομής (δηλαδή το ελάχιστο πλήθος των ακμών σε μία διαδρομή) από τον s στον v στο G_f. Το δίκτυο επιπέδων L του G_f είναι το γεννητικό υπογράφημα του G_f, το οποίο περιέχει τις ακμές (u,v), για τις οποίες ισχύει $l(v) = l(u) + 1$, δηλαδή κάθε ακμή του L κατευθύνεται από ένα επίπεδο στο αμέσως επόμενο. Επομένως, το L είναι ένα άκυκλο γράφημα που περιέχει τις συντομότερες διαδρομές από τον s (δείτε στο Σχήμα 4.16).



Σχήμα 4.16 Ένα δίκτυο ροής και το αντίστοιχο δίκτυο επιπέδων, όπου οι αριθμοί στις παρενθέσεις δίνουν το επίπεδο του κάθε κόμβου.

Παρότι ο υπολογισμός μίας ροής φραγής σε ένα γενικό δίκτυο φαίνεται δύσκολη, μπορεί να γίνει πολύ αποδοτικά στο δίκτυο επιπέδων L, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Το Σχήμα 4.17 δίνει ένα παράδειγμα μίας τέτοιας ροής φραγής f_L στο δίκτυο επιπέδων του Σχήματος 4.16.



Σχήμα 4.17 Μία ροή φραγής του δικτύου επιπέδων του Σχήματος 4.16.

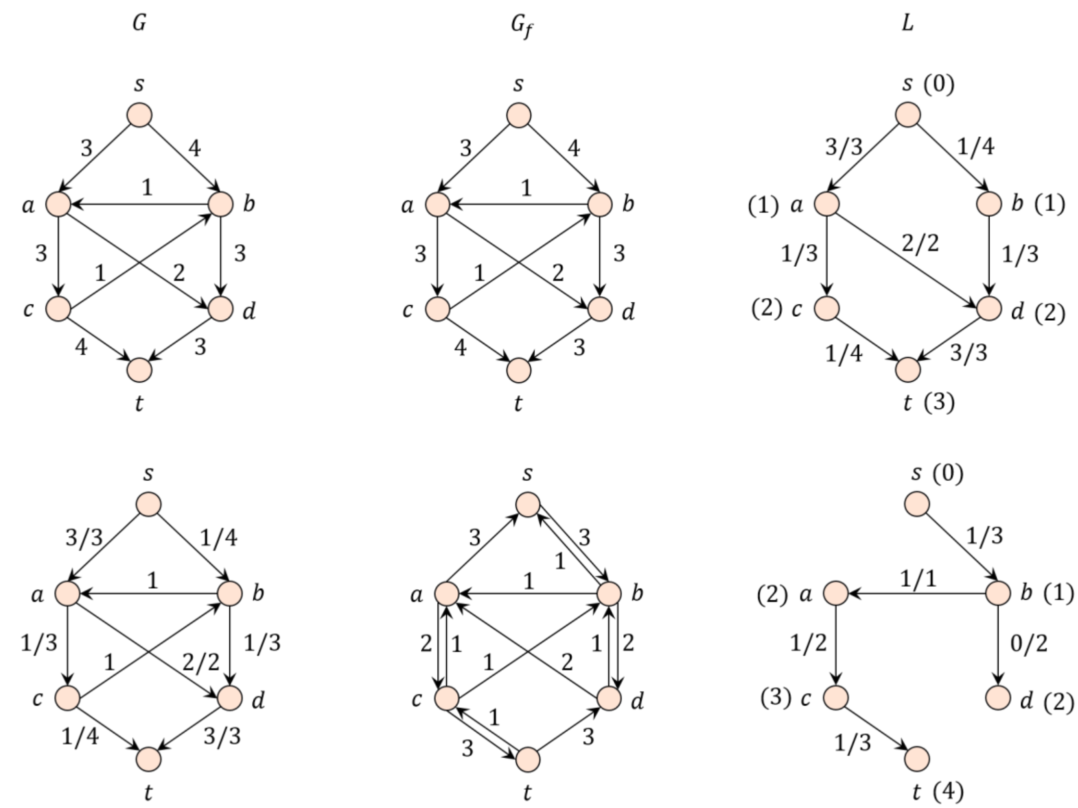
Το επόμενο βήμα μετά τον υπολογισμό της f_L είναι αυξήσουμε την τρέχουσα ροή f του G προσθέτοντας σε αυτή τη ροή f_L, όπως κάναμε και στον αλγόριθμο Ford-Fulkerson με τη ροή του αυξητικού μονοπατιού. Αυτή η πράξη αύξησης της ροής, την οποία συμβολίζουμε $f + f_L$, πραγματοποιείται ως εξής. Εξετάζουμε κάθε ακμή (u, v) του L με $f_L(u, v) > 0$. Εάν η (u, v) είναι ευθύδρομη, τότε θέτουμε $f(u, v) = f(u, v) + f_L(u, v)$. Διαφορετικά, εάν η (u, v) είναι ανάδρομη, τότε θέτουμε $f(v, u) = f(v, u) - f_L(u, v)$.

Ο αλγόριθμος Dinic, τον οποίο περιγράφουμε στον Αλγόριθμο 4.5, επαναλαμβάνει το βήμα υπολογισμού μίας ροής φραγής στο δίκτυο επιπέδων του τρέχοντος υπολειπόμενου δικτύου G_f, μέχρι να παύσουν να υπάρχουν αυξητικές διαδρομές από τον s στον t.

Αλγόριθμος 4.5: Dinic

1. Θέτουμε ως αρχική ροή $f = 0$ και υπολειπόμενο δίκτυο $G_f = G$;
2. **όσο** υπάρχει μονοπάτι από τον s στον t στο G_f, επανάλαβε
   L = δίκτυο επιπέδων του G_f;
   υπολογίζουμε μία ροή φραγής f_L στο L;
   αυξάνουμε τη ροή στο G θέτοντας $f = f + f_L$;
   υπολογίζουμε το νέο υπολειπόμενο δίκτυο G_f;
3. **επίστρεψε** τη ροή f.

Τα Σχήματα 4.18 και 4.19 δίνουν ένα παράδειγμα εκτέλεσης του αλγόριθμου.

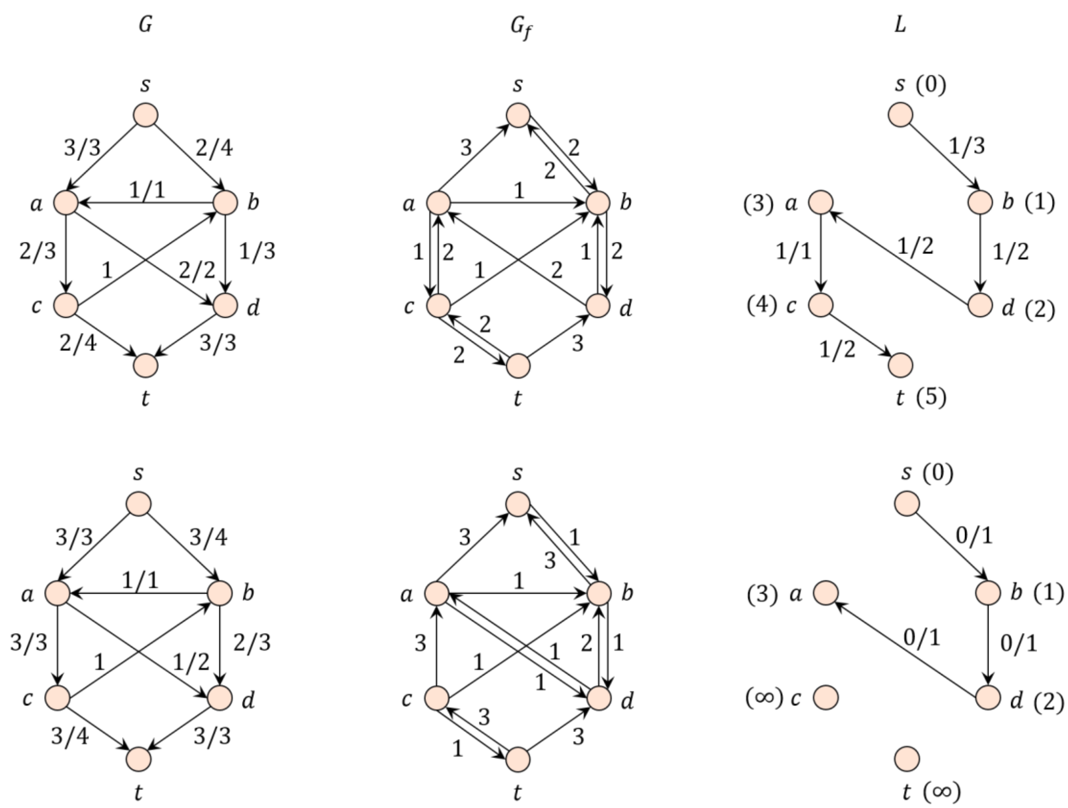


Σχήμα 4.18 Παράδειγμα εκτέλεσης του αλγόριθμου Dinic. Στην πρώτη στήλη φαίνεται το δίκτυο G με την τρέχουσα ροή του f. Στη δεύτερη στήλη έχουμε το εκάστοτε υπολειπόμενο δίκτυο G_f, ενώ στην τελευταία στήλη το αντίστοιχο δίκτυο επιπέδων L και μία ροή φραγής του f_L.

Ιδιότητα 4.12 Ο αλγόριθμος Dinic τερματίζει σε $n - 1$ το πολύ επαναλήψεις.

Θα δείξουμε ότι μετά από κάθε επανάληψη το επίπεδο του t αυξάνει τουλάχιστον κατά ένα. Τότε η ζητούμενη ιδιότητα συνεπάγεται άμεσα από το γεγονός ότι για κάθε κόμβο $v \in V - \{s\}$ για τον οποίο υπάρχει μονοπάτι στο G_f ισχύει $1 \le l(v) \le n - 1$.

Ας θεωρήσουμε μία επανάληψη του αλγόριθμου, η οποία υπολογίζει μία ροή φραγής f_L και αυξάνει τη ροή στο G από f σε $f' = f + f_L$. Έστω $G_{f'}$ υπολειπόμενο δίκτυο του G για τη ροή f'. Συμβολίζουμε με $l'(v)$ το επίπεδο ενός κόμβου στο $G_{f'}$. Για μία ακμή (u, v) του G_f ισχύει $l(v) \leq l(u) + 1$. Μία ακμή (x, y) του $G_{f'}$ είτε υπήρχε ήδη στο G_f είτε δημιουργήθηκε μετά την αύξηση της ροής. Στην πρώτη περίπτωση ισχύει $l(y) \leq l(x) + 1$. Στη δεύτερη περίπτωση η ακμή (y, x) θα πρέπει να βρίσκεται στο δίκτυο επιπέδων L του G_f, επομένως $l(y) = l(x) - 1 \leq l(x) + 1$. Αυτό σημαίνει ότι οι αποστάσεις στο $G_{f'}$ δεν μπορούν να έχουν μειωθεί και, επομένως, $l'(t) \geq l(t)$. Έστω P ένα συντομότερο μονοπάτι του G_f από τον s στον t. Το L περιλαμβάνει κάθε ακμή (u, v) του P, αφού $l(v) = l(u) + 1$. Όμως, μετά τον υπολογισμό μίας ροής φραγής τουλάχιστον μία από τις ακμές του P θα έχει κορεστεί, με αποτέλεσμα να μην εμφανίζεται στο $G_{f'}$. Αυτό ισχύει για κάθε συντομότερο μονοπάτι από τον s στον t στο G_f, άρα $l'(t) > l(t)$.



Σχήμα 4.19 Συνέχεια του παραδείγματος εκτέλεσης του αλγόριθμου Dinic του Σχήματος 4.18.

Στη σημαντική ειδική περίπτωση όπου όλες οι χωρητικότητες είναι ίσες με ένα, έχει αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος του Dinic τερματίζει σε λιγότερες επαναλήψεις, συγκεκριμένα σε $O(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\})$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, την περίπτωση αυτή τη συναντάμε στον υπολογισμό της συνεκτικότητας ενός γραφήματος.

Για να ολοκληρώσουμε την περιγραφή του αλγόριθμου του Dinic, απομένει να περιγράψουμε τη ρουτίνα Blocking_flow υπολογισμού μίας ροής φραγής στο L. Η περιγραφή δίδεται στον Αλγόριθμο 4.6.

Αλγόριθμος 4.6: Blocking_flow

1. Θέτουμε ως αρχική ροή $f_L = 0$;
2. **όσο** υπάρχει μονοπάτι από τον s στον t στο L, επανάλαβε
   - βρίσκουμε ένα μονοπάτι P από s τον στον t στο L;
   - αυξάνουμε τη ροή στο P, μέχρι να κορεσθεί κάποια ακμή του;
   - σβήνουμε κάθε κορεσμένη ακμή του P;
3. **επίστρεψε** τη ροή f.

Μία αποδοτική υλοποίηση της ρουτίνας αυτής μπορεί να γίνει μέσω της κατά-βάθος διερεύνησης. Συγκεκριμένα, υλοποιούμε τις ακόλουθες μεθόδους που χειρίζονται το τρέχον μονοπάτι P, που ξεκινά από τον αφετηριακό κόμβο s και καταλήγει σε έναν κόμβο v:

αρχικοποίηση: Θέτουμε $P = \langle s \rangle$ και $v = s$. Εκτελούμε τη μέθοδο προώθηση.

προώθηση: Εάν δεν υπάρχει εξερχόμενη ακμή (v, w) στο L, τότε εκτελούμε τη μέθοδο υποχώρηση. Διαφορετικά προσθέτουμε τον κόμβο w στο τέλος του μονοπατιού P και θέτουμε $v = w$. Εάν $w = t$, τότε εκτελούμε τη μέθοδο επαύξηση. Διαφορετικά, εάν $w \neq t$, επαναλαμβάνουμε τη μέθοδο προώθηση.

επαύξηση: Έστω δ η ελάχιστη υπολειπόμενη χωρητικότητα των ακμών του P, δηλαδή $\delta = \min\{c(u, v) - f(u, v) : (u, v) \in P\}$. Προσθέτουμε δ μονάδες ροής σε κάθε ακμή του P και αφαιρούμε τις κορεσμένες ακμές του. Εκτελούμε τη μέθοδο αρχικοποίηση.

υποχώρηση: Εάν $v = s$, τερμάτισε. Διαφορετικά, έστω (u, v) η τελευταία ακμή του P. Αφαιρούμε την ακμή (u, v) από το L και τον κόμβο v από το P. Θέτουμε $v = u$ και εκτελούμε τη μέθοδο προώθηση.

Ιδιότητα 4.13 Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει μία ροή φραγής στο δίκτυο επιπέδων L.

Παρατηρούμε ποιες είναι οι περιπτώσεις στις οποίες ο αλγόριθμος αφαιρεί μία ακμή (u, v) από το L. Αυτό συμβαίνει, είτε όταν η (u, v) κορεστεί, είτε όταν όλα τα μονοπάτια από τον w στον t περιέχουν κορεσμένες ακμές και, επομένως, καλείται η μέθοδος υποχώρηση. Συνεπάγεται ότι με τον τερματισμό του αλγόριθμου, κάθε μονοπάτι από τον s στον t περιέχει κάποια κορεσμένη ακμή. Άρα, η ροή στον L είναι ροή φραγής.

Ιδιότητα 4.14 Ο αλγόριθμος υπολογισμού μίας ροής φραγής στο δίκτυο επιπέδων L τερματίζει σε χρόνο $O(mn)$. Επομένως, ο αλγόριθμος του Dinic εκτελείται σε χρόνο $O(mn^2)$.

Υπολογίζουμε το συνολικό χρόνο εκτέλεσης κάθε μίας από τις μεθόδους που καλεί ο αλγόριθμος. Κάθε κλήση των μεθόδων αρχικοποίηση, προώθηση και υποχώρηση εκτελείται σε σταθερό χρόνο. Επιπλέον, κάθε κλήση των μεθόδων επαύξηση και υποχώρηση διαγράφει μία ακμή, επομένως μπορούμε να έχουμε $O(m)$ τέτοιες κλήσεις. Αυτό σημαίνει ότι και η μέθοδος αρχικοποίηση εκτελείται το πολύ $O(m)$ φορές. Αυτό συμβαίνει γιατί, εκτός από την αρχική κλήση της μεθόδου αρχικοποίηση, κάθε άλλη κλήση αυτής της μεθόδου πραγματοποιείται μέσω της μεθόδου επαύξηση. Τέλος, πριν από την κάθε εκτέλεση των μεθόδων επαύξηση και υποχώρηση μπορούμε να έχουμε το πολύ $n-1$ κλήσεις της μεθόδου προώθηση. Δηλαδή η μέθοδος προώθηση εκτελείται συνολικά $O(mn)$ φορές, ενώ οι $O(m)$ κλήσεις της μεθόδου επαύξηση απαιτούν $O(mn)$ χρόνο. Καταλήγουμε, έτσι, στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός της ροής φραγής γίνεται σε χρόνο $O(mn)$. Από την Ιδιότητα 4.12 γνωρίζουμε ότι ο αλγόριθμος Dinic χρειάζεται το πολύ $n-1$ επαναλήψεις, άρα εκτελείται σε χρόνο $O(mn^2)$.

4.5 Υπολογισμός Συνεκτικότητας μέσω Ροών

Σε αυτήν την ενότητα περιγράφουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την ακμική και κομβική συνεκτικότητα ενός (κατευθυνόμενου ή μη) γραφήματος G. Για να υπολογίσουμε την ολική συνεκτικότητα, αρκεί να γνωρίζουμε την τοπική συνεκτικότητα για κάθε ζεύγος κόμβων (βλέπε Άσκηση 10). Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο υπολογισμός της τοπικής συνεκτικότητας μπορεί να γίνει μέσω του υπολογισμού της μέγιστης ροής ενός κατάλληλου δικτύου.

4.5.1 Υπολογισμός συνεκτικότητας σε κατευθυνόμενα γραφήματα

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε πώς μπορεί να υπολογισθεί η τοπική ακμική και κομβική συνεκτικότητα μέσω της μέγιστης ροής. Καθώς διατυπώσαμε το πρόβλημα της μέγιστης ροής σε κατευθυνόμενα γραφήματα, θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό της τοπικής ακμικής συνεκτικότητας $\lambda(u,v)$ ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G. Μετατρέπουμε το G σε δίκτυο ροής, επιλέγοντας $s=u$ για αφετηριακό κόμβο και $t=v$ για καταληκτικό κόμβο, ενώ διαγράφουμε τις ακμές οι οποίες εισέρχονται στον s, καθώς και τις ακμές οι οποίες εξέρχονται από τον t. Θέτουμε τώρα τη χωρητικότητα της κάθε ακμής (x,y) του δικτύου να είναι $c(x,y)=1$. Ο σκοπός μας είναι δείξουμε την εξής πρόταση.

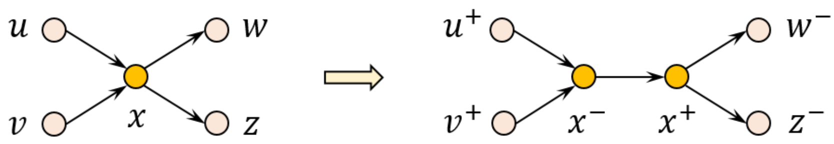
Ιδιότητα 4.15 Στο γράφημα G ισχύει ότι $\lambda(s,t)=k$, δηλαδή το μέγιστο πλήθος ακμικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον s στον t είναι k, εάν-ν η τιμή της μέγιστης ροής f του αντίστοιχου δικτύου είναι $|f|=k$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι, εάν σε ένα δίκτυο G υπάρχουν k ακμικά μη τεμνόμενα μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_k$ από τον s στον t, τότε η ροή έχει τιμή τουλάχιστον k. Ας υποθέσουμε ότι στέλνουμε μία μονάδα ροής κατά μήκος του κάθε μονοπατιού P_i. Το γεγονός ότι τα μονοπάτια δεν έχουν κάποια κοινή ακμή σημαίνει ότι για κάθε ακμή (x,y) του δικτύου έχουμε $f(x,y)=1$, εάν η ακμή βρίσκεται σε κάποιο μονοπάτι P_i, ενώ στην αντίθετη περίπτωση $f(x,y)=0$. Συνεπώς, η f είναι μία έγκυρη ροή, αφού ικανοποιεί τις συνθήκες χωρητικότητας και διατήρησης της ροής και, επιπλέον, έχει τιμή $|f|=k$.

Τώρα θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, εάν η τιμή της μέγιστης ροής f ενός δικτύου είναι τουλάχιστον k, τότε υπάρχουν k ακμικά μη τεμνόμενα μονοπάτια. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει τη μέγιστη ροή f στο δίκτυο G, π.χ. χρησιμοποιώντας έναν από τους αλγόριθμους που αναφέραμε προηγουμένως. Από την Ιδιότητα Ακεραιότητας της Ροής συνεπάγεται ότι η ροή της κάθε ακμής (x,y) του δικτύου μπορεί να λάβει μόνο δύο τιμές, μηδέν ή ένα. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι με τις ακμές που δέχονται μη μηδενική ροή μπορούμε να σχηματίσουμε k ακμικά μη τεμνόμενα μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_k$.

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με επαγωγή ως προς το k. Ως βάση της επαγωγής λαμβάνουμε την περίπτωση $k=0$, στην οποία η πρόταση μας τετριμμένα ισχύει. Η επαγωγική μας υπόθεση είναι ότι σε ένα δίκτυο με ροή τουλάχιστον k υπάρχουν k ακμικά μη τεμνόμενα μονοπάτια. Το επαγωγικό βήμα είναι να δείξουμε ότι η προηγούμενη πρόταση ισχύει και σε ένα δίκτυο με ροή $k+1$. Για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε το υπογράφημα F του G, το οποίο αποτελείται από τις ακμές που έχουν ροή ένα. Ας υποθέσουμε ότι εκτελούμε μία κατά-βάθος διερεύνηση στο F από τον s, προκειμένου να βρούμε ένα μονοπάτι P προς τον t. Ας μηδενίσουμε τώρα τη ροή των ακμών του μονοπατιού. Η πράξη αυτή δίνει μία νέα ροή f' στο F, άρα και στο G, με τιμή $|f'|=|f|-1=k$. Έστω G' το δίκτυο που προκύπτει από το G διαγράφοντας τις ακμές του P. Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση στο G' με ροή f', από την οποία λαμβάνουμε k ακμικά μη τεμνόμενα μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_k$. Από τα μονοπάτια αυτά δεν υπάρχει κάποιο με κοινή ακμή με το P, αφού είχαμε διαγράψει τις ακμές του P. Άρα, έχουμε βρει $k+1$ ακμικά μη τεμνόμενα μονοπάτια από τον s στον t.

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό της τοπικής κομβικής συνεκτικότητας $\kappa(u,v)$. Αυτό μπορεί να γίνει με μία αναγωγή στον υπολογισμό της τοπικής ακμικής συνεκτικότητας σε ένα νέο δίκτυο H, που λαμβάνουμε από το G εφαρμόζοντας μία τεχνική που καλείται *διάσπαση κόμβων*. Όπως και πριν, μετατρέπουμε το κατευθυνόμενο γράφημα G σε δίκτυο ροής, επιλέγοντας $s=u$ για αφετηριακό κόμβο και $t=v$ για καταληκτικό κόμβο και διαγράφουμε τις ακμές που εισέρχονται στον s, καθώς και τις ακμές που εξέρχονται από τον t. Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε κάθε κόμβο x, όπου $x \neq s$ και $x \neq t$, με δύο κόμβους x^- και x^+, τους οποίους συνδέουμε με την ακμή (x^-, x^+). Ο κόμβος x^- συγκεντρώνει τις ακμές του G οι οποίες εισέρχονται στον x, ενώ ο x^+ συγκεντρώνει αυτές που εξέρχονται από τον x. Δηλαδή για κάθε ακμή (w,z) του G, όπου $w \neq s$ και $z \neq t$, εισαγάγουμε στο H την ακμή (w^+, z^-) (βλέπε Σχήμα 4.20). Χειριζόμαστε τις ακμές (w,z) οι οποίες εξέρχονται από τον s ή εισέρχονται στον t ως εξής. Εάν $w \neq s$ και $z=t$, τότε εισάγουμε την ακμή (w^+, t), ενώ εάν $w=s$ και $z \neq t$, τότε εισάγουμε την ακμή (s, z^-). Τέλος, εάν $w=s$ και $z=t$, τότε εισάγουμε την ακμή (s,t). Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι δύο μονοπάτια του G από τον s στον t είναι κομβικά μη τεμνόμενα, εάν και μόνο εάν τα αντίστοιχα μονοπάτια στο H είναι ακμικά μη τεμνόμενα. Έτσι, λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα (βλέπε Άσκηση 11).



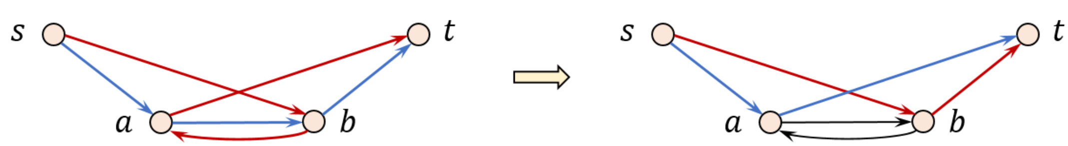
Σχήμα 4.20 Διάσπαση ενός κόμβου x.

Ιδιότητα 4.16 Έστω s και t δύο κόμβοι ενός γραφήματος G για τους οποίους δεν υπάρχει η ακμή (s,t). Στο G ισχύει ότι $\kappa(s,t) = k$, δηλαδή το μέγιστο πλήθος κομβικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον s στον t είναι k, εάν-ν η τιμή της μέγιστης ροής f στο δίκτυο H είναι $|f| = k$.

4.5.2 Υπολογισμός συνεκτικότητας σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα

Θα δώσουμε έναν τρόπο υπολογισμού της τοπικής συνεκτικότητας σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα μέσω αναγωγής στον αντίστοιχο υπολογισμό σε κατευθυνόμενα γραφήματα. Η αναγωγή είναι πολύ απλή, καθώς μετατρέπει ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G σε αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα G', αντικαθιστώντας κάθε μη κατευθυνόμενη ακμή $\{x,y\}$ με δύο αντίθετα κατευθυνόμενες ακμές (x,y) και (y,x). Έστω λ και λ' η τοπική ακμική συνεκτικότητα στο G και το G' αντίστοιχα. Όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, για οποιουσδήποτε κόμβους s και t του G ισχύει ότι $\lambda(s,t) = \lambda(t,s)$. Άρα, λόγω της συμμετρίας στην κατασκευή του G' έχουμε, επίσης, $\lambda'(s,t) = \lambda'(t,s)$. Είναι εύλογο να ισχυριστούμε ότι η τοπική ακμική συνεκτικότητα στο G είναι ίδια με αυτή στο G', δηλαδή ότι το G και το G' έχουν το ίδιο μέγιστο πλήθος ακμικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον s στον t.

Για να δικαιολογήσουμε αυτόν τον ισχυρισμό, θα πρέπει να προσέξουμε ότι στο G' οι ακμές (x,y) και (y,x) είναι διαφορετικές. Έτσι, μπορεί να έχουμε δύο ακμικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια στο G', όπου το ένα περιέχει την ακμή (x,y) και το άλλο την (y,x). Ευτυχώς, μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία, εάν παρατηρήσουμε τον τρόπο κατασκευής των ακμικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών μέσω της ροής f του αντίστοιχου δικτύου. Από τις ακμές που συμμετέχουν σε αυτά τα μονοπάτια διέρχεται μία μονάδα ροής. Έτσι, εάν δύο αντίθετες ακμές (x,y) και (y,x) επιλεγούν σε κάποια μονοπάτια, τότε $f(x,y) = f(y,x) = 1$. Μηδενίζοντας τη ροή στις δύο αυτές ακμές εξακολουθούμε να έχουμε μία έγκυρη ροή με την ίδια τιμή.



Σχήμα 4.21 Υπολογισμός δύο ακμικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον κόμβο s στον κόμβο t χωρίς αντίθετες ακμές.

Μπορούμε να επαναλάβουμε αυτό το βήμα για κάθε ζεύγος αντίθετων ακμών από τις οποίες διέρχεται μία μονάδα ροής. Με τον τρόπο αυτόν λαμβάνουμε μία μέγιστη ροή που δεν χρησιμοποιεί αντίθετες ακμές. Τώρα, ο υπολογισμός των ακμικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών με τη νέα ροή στο G' δίνει πράγματι μονοπάτια που αντιστοιχούν και σε ακμικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια στο G. Στο Σχήμα 4.21 παρατηρούμε ότι αρχικά έχουμε δύο κατευθυνόμενα μονοπάτια από τον s στον t, το κόκκινο και το μπλε, τα οποία δεν έχουν κοινές ακμές, αλλά χρησιμοποιούν δύο αντίθετες ακμές, τις (a, b) και (b, a). Μπορούμε να υπολογίσουμε δύο νέα ακμικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια που δεν χρησιμοποιούν αυτές τις αντίθετες ακμές.

Ιδιότητα 4.17 Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G ισχύει ότι $\lambda(s,t) = k$, εάν-ν η τιμή της μέγιστης ροής f του αντίστοιχου κατευθυνόμενου γραφήματος είναι $|f| = k$.

Όμοια, σε συνδυασμό με τη μέθοδο διάσπασης κόμβων, μπορούμε να υπολογίσουμε την τοπική κομβική συνεκτικότητα σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα (βλέπε Άσκηση 12).

4.5.3 Θεώρημα του Menger

Στην αρχή του κεφαλαίου αναφέραμε το Θεώρημα του Menger, το οποίο συνδέει το μέγιστο πλήθος ακμικά ή κομβικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από έναν κόμβο s προς έναν κόμβο t με το ελάχιστο πλήθος ακμών ή κόμβων η διαγραφή των οποίων καταστρέφει όλα τα μονοπάτια από τον s στον t. Το θεώρημα αυτό έχει αποδειχθεί από τον Menger το 1927, αρκετά χρόνια πριν αναπτυχθεί η θεωρία της ροής δικτύων. Εδώ θα δείξουμε ότι το Θεώρημα του Menger αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέγιστης Ροής-Ελάχιστης Τομής. Ας θεωρήσουμε ένα γράφημα G, κατευθυνόμενο ή μη, και δύο κόμβους του s και t. Έστω f η μέγιστη ροή του αντίστοιχου δικτύου με αφετηριακό κόμβο τον s και τερματικό κόμβο τον t και με την κάθε ακμή να έχει χωρητικότητα ένα. Από το Θεώρημα Μέγιστης Ροής-Ελάχιστης Τομής γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πλήθος ακμών σε μία τομή (S, T) είναι ίσο με $|f|$. Όμως, από την Ιδιότητα 4.15, $|f|$ είναι και το μέγιστο πλήθος ακμικά ξένων μεταξύ τους μονοπατιών από τον s στον t. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να καταλήξουμε στην εκδοχή της κομβικής συνεκτικότητας του Θεωρήματος του Menger (βλέπε Άσκηση 11).

Ασκησεις 4

1. Δείξτε πώς μπορεί να υπολογισθεί η συνάρτηση $low[x]$ της Ενότητας 4.2.1 σε γραμμικό χρόνο, κατά τη διάρκεια μίας κατά-βάθος διερεύνησης.
2. Προτείνετε μία επέκταση του αλγόριθμου της Ενότητας 4.2.1, που να υπολογίζει μαζί με τις αρθρώσεις ενός γραφήματος, τις γέφυρες του, καθώς και τις δισυνεκτικές συνιστώσες.
3. Δείξτε ότι οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ ορίζουν μία διαμέριση των κόμβων του, δηλαδή ότι οποιεσδήποτε δύο ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G δεν έχουν κοινούς κόμβους.

4. Για κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ θέλουμε να βρούμε εάν υπάρχει κόμβος $v \in V$, από όπου είναι προσβάσιμοι όλοι οι κόμβοι του G. (Δηλαδή για κάθε κόμβο $v \in V$, πρέπει να υπάρχει μονοπάτι από τον s στον v.) Δώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να επιστρέφει ένα τέτοιο s, εάν υπάρχει. Ποιός είναι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας;

5. Έστω ένα γράφημα ροής $G(s) = (V, E, s)$ και έστω $D(s)$ το γράφημα που αναπαριστά τη σχέση κυριαρχίας στο $G(s)$. Το $D(s)$ έχει τους ίδιους κόμβους με το $G(s)$ και περιλαμβάνει τις ακμές $(d(v), v)$, για όλους τους κόμβους $v \in V - \{s\}$, όπου $d(v)$ ο άμεσος κυρίαρχος του v. Δείξτε ότι το $D(s)$ είναι δένδρο με ρίζα τον s.

6. Έστω $G_s = (V, E, s)$ ένα γράφημα ροής. Δείξτε ότι μία ακμή (u, v) είναι γέφυρα του G_s, εάν και μόνο ο κόμβος u είναι ο γονέας του v στο δένδρο κυριαρχίας D του G_s και για κάθε άλλη ακμή $(w, v) \in E$ ισχύει ότι ο v είναι κυρίαρχος του w στο G_s. Με βάση αυτό, αποδείξτε την ιδιότητα.

7. Έστω $G = (V, E)$ ένα δίκτυο ροής με αφετηριακό κόμβο s και τερματικό κόμβο t. Μία ακμή του G είναι κρίσιμη, εάν η ελάττωση της χωρητικότητας της έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της μέγιστης ροής. Δώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να βρίσκει μία κρίσιμη ακμή του δικτύου. Ποιός είναι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας;

8. Έστω $G = (V, E)$ ένα δίκτυο ροής με αφετηριακό κόμβο s και τερματικό κόμβο t, όπου οι χωρητικότητες των ακμών είναι ακέραιες. Μας δίνεται μία μέγιστη ροή f στο G και ζητούμε έναν αποδοτικό τρόπο να την ανανεώσουμε στις εξής δύο περιπτώσεις:

   - όταν η χωρητικότητα μίας ακμής (x, y) αυξάνεται κατά 1 μονάδα, και
   - όταν η χωρητικότητα μίας ακμής (x, y) μειώνεται κατά 1 μονάδα.

   Δώστε αποδοτικούς αλγορίθμους που να ενημερώνουν τη μέγιστη ροή του δικτύου για κάθε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Και στις δύο περιπτώσεις η ενημέρωση της μέγιστης ροής είναι εφικτή σε γραμμικό χρόνο.

9. Θεωρήστε την ακόλουθη μέθοδο υπολογισμού μίας ροής f δικτύου $G = (V, E)$ με αφετηριακό κόμβο s, τερματικό κόμβο t και συνάρτηση χωρητικότητας ακμών c. Ξεκινάμε με μηδενική ροή $|f| = 0$ και βρίσκουμε σε κάθε επανάληψη μία αυξητική διαδρομή από τον s στον t χρησιμοποιώντας μόνο τις ακμές του αρχικού δικτύου G. Δηλαδή ο αλγόριθμος δεν λαμβάνει υπόψη το υπολειπόμενο δίκτυο και εξετάζει μόνο τις ακμές $(u, v) \in E$, για τις οποίες $f(u, v) < c(u, v)$. Έχουμε εξετάσει στο μάθημα ότι αυτή η μέθοδος δεν βρίσκει πάντα τη μέγιστη ροή f^* ενός δικτύου. Δείξτε με ένα κατάλληλο παράδειγμα ότι ο λόγος $|f^*| \,/\, |f|$ μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλος, δηλαδή συνάρτηση του αριθμού των κόμβων του δικτύου.

10. Θεωρούμε ένα συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνεκτικότητα ακμών $\lambda(G)$ του G. Δείξτε πώς μπορεί να υπολογισθεί η $\lambda(G)$ χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο εύρεσης μέγιστης ροής. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο που κάνει όσο το δυνατό λιγότερες κλήσεις στον αλγόριθμο μέγιστης ροής ($n = |V|$ κλήσεις είναι αρκετές).

11. Αποδείξτε την Ιδιότητα 4.16. Στη συνέχεια, δείξτε ότι το Θεώρημα του Menger για την κομβική συνεκτικότητα αποτελεί συνέπεια αυτής της ιδιότητας.

12. Διατυπώστε και αποδείξτε μία ιδιότητα αντίστοιχη της Ιδιότητας 4.17 για την τοπική κομβική συνεκτικότητα σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα.

Βιβλιογραφια 4

[1] A.V. Aho, J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1974.

[2] R. Ahuja, T. Magnanti, and J. Orlin, Network Flows, Prentice Hall, 1993.

[3] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein, Introduction to Algorithms, MIT Press (2ed edition), 2001.

[4] S. Dasgupta, C. Papadimitriou, and U. Vazirani, Algorithms, McGraw-Hill, 2008.

[5] S. Even and G. Even, Graph Algorithms, Cambridge University Press (2nd Edition), 2012.

[6] J.L. Gross and J. Yellen (Eds), Handbook of Graph Theory, Series: Discrete Mathematics and Its Applications Volume: 25, CTC Press, 2003.

[7] G.F. Italiano, L. Laura, and F. Santaroni, Finding strong bridges and strong articulation points in linear time, Theor. Comput. Sci. 447, 2012.

[8] W. Kocay and D.L. Kreher, Graphs, Algorithms, and Optimization, Chapman and Hall/CRC, 2004.

[9] T. Lengauer and R. E. Tarjan, A Fast Algorithm for Finding Dominators in a Flowgraph, ACM Trans. Program. Lang. Syst. 1(1), 1979.

[10] H. Nagamochi and T. Ibaraki, Algorithmic Aspects of Graph Connectivity, Cambridge University Press, 2008.

[11] R. E. Tarjan, Data Structures and Network Algorithms, SIAM, 1983.

[12] R. E. Tarjan, Depth-First Search and Linear Graph Algorithms, SIAM J. Comput. 1(2), 1972.

[13] Ι. Μανωλοπουλος, Α. Παπαδοπουλος, Κ. Τσιχλας, Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 2014.