ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Συγγραφική Ομάδα:
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΒΑΡΣΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΔΕΡΙΖΙΩΤΗΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ
ΜΙΧΑΗΛ ΜΑΛΙΑΚΑΣ
ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΜΕΛΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑ ΤΑΛΕΛΛΗ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό στοχεύει στη διδασκαλία ενός εισαγωγικού πανεπιστημιακού μαθήματος δύο εξαμήνων, που αφορά στη βασική ύλη της Γραμμικής Άλγεβρας.

Στην Ελλάδα κυκλοφορούν ήδη πολλά εισαγωγικά βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας. Τα τελευταία όμως χρόνια έχει υπάρξει μια ριζική αλλαγή της ύλης των Μαθηματικών που διδάσκονται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Είναι αναγκαίο λοιπόν ένα σύγγραμμα που λαμβάνει υπ' όψιν αυτήν την αλλαγή.

Αθήνα, Ιούνιος 2008
Η Συγγραφική Ομάδα

Εισαγωγή

…

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε συνοπτικά σε βασικές έννοιες για σύνολα και απεικονίσεις. Επιπλέον, θα αναφερθούμε στη μέθοδο της επαγωγής, η οποία αποτελεί μία από τις σημαντικές μεθόδους απόδειξης θεωρημάτων της Γραμμικής Άλγεβρας και των Μαθηματικών γενικότερα.

1.1 Σύνολα

Η έννοια του συνόλου είναι μια πρωταρχική θεμελιώδης έννοια στη Μαθηματική επιστήμη. Η θεωρία των συνόλων εισάγεται από τον Georg Cantor (1845-1918) περί το 1900 μ.Χ. και αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία ενοποιείται και θεμελιώνεται η Μαθηματική επιστήμη.

Ένα **σύνολο** είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Τα αντικείμενα αυτά λέγονται **στοιχεία** του συνόλου. Για κάθε σύνολο υπάρχει μια σαφής περιγραφή με βάση την οποία μπορούμε να αποφανθούμε κατά πόσο ένα δεδομένο στοιχείο ανήκει ή όχι στο σύνολο αυτό. Τα παραπάνω ασφαλώς δεν αποτελούν ένα μαθηματικό ορισμό του συνόλου. Η έννοια του συνόλου, όπως αυτή του σημείου, είναι θεμελιακή και δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες έννοιες. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να δει μια αξιωματική έκθεση της θεωρίας των συνόλων θα πρέπει να ανατρέξει σε ειδικά συγγράμματα.

Τα σύνολα και τα στοιχεία τους συνήθως συμβολίζονται με γράμματα. Έτσι, αν A είναι ένα σύνολο και a ένα στοιχείο του, τότε εκφράζουμε το γεγονός αυτό με το συμβολισμό «$a \in A$», ο οποίος διαβάζεται «το a ανήκει στο A». Ο συμβολισμός «$y \notin A$» διαβάζεται «το y δεν ανήκει στο A» και σημαίνει ότι το y δεν είναι στοιχείο του A. Επίσης, αναφέρουμε ότι ένα στοιχείο ενός συνόλου A πολλές φορές λέγεται και μέλος του A.

Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Δηλαδή,

Ορισμός 1.1.1 *Δύο σύνολα A, B λέγονται ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.*

Για να περιγράψουμε ένα σύνολο γράφουμε τα δύο άγκιστρα { } και στον χώρο μεταξύ αυτών περιγράφουμε τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο. Υπάρχουν τρεις κυρίως τρόποι να περιγραφεί ένα σύνολο.

(i) Πλήρης αναφορά όλων των στοιχείων του. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει αν το σύνολο έχει λίγα στοιχεία. Για παράδειγμα, γράφουμε $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{\text{Αθήνα, Θεσσαλονίκη}\}$.

(ii) Με αναγραφή αρκετών στοιχείων του συνόλου (όχι απαραίτητα όλων), έτσι ώστε να γίνει σαφής η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του συνόλου. Εδώ χρησιμοποιούνται και οι τρεις τελείες «...», τα λεγόμενα αποσιωπητικά. Για παράδειγμα, γράφουμε $\{1, 2, 3, ..., n\}$, $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, $\{2, 4, 6, ..., 2n\}$ και $\{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος.

(iii) Έστω S ένα σύνολο και P μια ιδιότητα. Τότε το $\{x \in S \mid \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P\}$ παριστά το σύνολο όλων των στοιχείων του S που έχουν την ιδιότητα P.

Παράδειγμα 1.1.2 *Στα ακόλουθα σύνολα, τα οποία θεωρούμε γνωστά, θα αναφερθούμε πολλές φορές στη συνέχεια:*

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} =$ *το σύνολο των φυσικών αριθμών*
$\mathbb{Z} =$ *το σύνολο των ακεραίων αριθμών*
$\mathbb{Q} =$ *το σύνολο των ρητών αριθμών*
$\mathbb{R} =$ *το σύνολο των πραγματικών αριθμών*
$\mathbb{C} =$ *το σύνολο των μιγαδικών αριθμών*

Ορισμός 1.1.3 *Το σύνολο που δεν έχει στοιχεία λέγεται* **κενό** *και συμβολίζεται με* $\emptyset$.

Ορισμός 1.1.4 *Αν A, B είναι δυο σύνολα και κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B, τότε το A λέγεται* **υποσύνολο** *του B και γράφουμε $A \subseteq B$. Αν επιπλέον υπάρχει κάποιο στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε το A λέγεται γνήσιο υποσύνολο του B και γράφουμε $A \subsetneq B$.*

Εύκολα βλέπουμε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου, ενώ κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του. Τέλος, δυο σύνολα A και B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Παράδειγμα 1.1.5 *Παρατηρούμε ότι* $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 1.1.6 *Έχουμε ότι*

(i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{το } x \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 2\}$ *είναι το σύνολο των αρτίων ακεραίων αριθμών.*

(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 4x + 1 = 0\} = \{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

(iii) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\} = \emptyset$.

Ορισμός 1.1.7 *Καλούμε* **ένωση** *δύο συνόλων A, B το σύνολο που έχει ως στοιχεία του εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή το B, και το συμβολίζουμε με $A \cup B$.*

Ορισμός 1.1.8 *Καλούμε* **τομή** *δύο συνόλων A, B το σύνολο που έχει ως στοιχεία του εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B, και το συμβολίζουμε με $A \cap B$.*

Από τους ορισμούς έπεται ότι αν A, B είναι δύο σύνολα τότε $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$. Επίσης, αν Γ είναι ένα σύνολο με $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \cup B \subseteq \Gamma$. Αν δεν υπάρχουν στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B, τότε $A \cap B = \emptyset$.

Ας θεωρήσουμε σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$. Τότε, η ένωση των A_i, $i \in \{1, 2 \ldots, \nu\}$, είναι το σύνολο με στοιχεία εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A_i, $1 \leq i \leq \nu$, και συμβολίζεται με $\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$ ή με $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$. Η τομή των A_i, $i \in \{1, 2 \ldots, \nu\}$, είναι το σύνολο με στοιχεία εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα A_i, $1 \leq i \leq \nu$, και συμβολίζεται με $\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$ ή με $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu$.

Ανάλογα, αν Λ είναι ένα σύνολο συνόλων, τότε το σύνολο που περιλαμβάνει εκείνα ακριβώς τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα μέλη του Λ λέγεται ένωση των συνόλων που ανήκουν στο Λ και συμβολίζεται με $\bigcup_{A \in \Lambda} A$. Αν $\Lambda \neq \emptyset$, τότε η τομή των συνόλων που ανήκουν στο Λ είναι το σύνολο που περιλαμβάνει εκείνα ακριβώς τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα μέλη του Λ, και συμβολίζεται με $\bigcap_{A \in \Lambda} A$.

Ορισμός 1.1.9 *Η* **διαφορά** *ενός συνόλου Y από ένα σύνολο X είναι το σύνολο που περιλαμβάνει ακριβώς εκείνα τα στοιχεία του X που δεν ανήκουν στο Y, και συμβολίζεται με $X \backslash Y$. Αν το Y είναι ένα υποσύνολο του X τότε η διαφορά του Y από το X λέγεται* **συμπλήρωμα** *του Y στο X και συμβολίζεται με Y^c.*

Παράδειγμα 1.1.10 *Έστω A το σύνολο των αρτίων ακεραίων. Τότε $\mathbb{Z} \backslash A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin A\}$ είναι το σύνολο των περιττών ακεραίων.*

Ορισμός 1.1.11 *Το σύνολο με στοιχεία τα υποσύνολα ενός συνόλου S λέγεται* **δυναμοσύνολο** *του S και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(S)$.*

Παράδειγμα 1.1.12 *Έστω $S = \{1, 2\}$. Τότε $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$.*

Πρόταση 1.1.13 *(Η άλγεβρα των συνόλων) Έστω S ένα σύνολο και $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}(S)$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

$$\begin{array}{lcl}
A \cup A = A & & A \cap A = A \\
A \cup B = B \cup A & & A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) & & (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) \\
A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) & & A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \\
A \cap (A \cup B) = A & & A \cup (A \cap B) = A \\
A \cup \emptyset = A & & A \cap S = A \\
A \cup S = S & & A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \cup A^c = S & & A \cap A^c = \emptyset \\
 & (A^c)^c = A & \\
(A \cup B)^c = A^c \cap B^c & & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c
\end{array}$$

Οι τελευταίες δύο ισότητες λέγονται νόμοι του De Morgan.

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης είναι άμεση από τους ορισμούς. Ενδεικτικά, επαληθεύουμε την τελευταία ισότητα. Για να δείξουμε ότι $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ αρκεί να δείξουμε ότι $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ και $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$. Πράγματι, αν $x \in (A \cap B)^c$ τότε $x \in S$ και $x \notin A \cap B$ και άρα ένα ακριβώς από τα ακόλουθα ισχύει:

(i) $x \in A$ και $x \notin B$

(ii) $x \notin A$ και $x \in B$

(iii) $x \notin A$ και $x \notin B$

Στην περίπτωση (i) έχουμε ότι $x \in B^c$, στην περίπτωση (ii) έχουμε ότι $x \in A^c$ και στην περίπτωση (iii) έχουμε ότι $x \in A^c \cap B^c$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, έχουμε $x \in A^c \cup B^c$. Δείξαμε ότι $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Έστω τώρα ότι $x \in A^c \cup B^c$. Τότε $x \in A^c$ ή $x \in B^c$, συνεπώς $x \notin A$ ή $x \notin B$ και άρα $x \notin A \cap B$, δηλαδή $x \in (A \cap B)^c$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να επαληθευτούν όλες οι ισότητες της Πρότασης 1.1.13.

2. Αν A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο τότε με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του. Να δειχτεί ότι αν A, B είναι πεπερασμένα σύνολα τότε:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

3. Έστω S ένα σύνολο και $A, B \in \mathcal{P}(S)$. Να δειχτεί ότι $A \cap B^c = \emptyset$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$.

4. Έστω S ένα σύνολο και $A, B \in \mathcal{P}(S)$ με A^c και B^c πεπερασμένα σύνολα. Να δειχτεί ότι το σύνολο $(A \cap B)^c$ είναι επίσης πεπερασμένο.

5. Έστω S ένα σύνολο και $X, Y \in \mathcal{P}(S)$. Η συμμετρική διαφορά των συνόλων X και Y ορίζεται ως
$$(X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$$
και συμβολίζεται με $X \dot{+} Y$. Να δειχτεί ότι αν $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}(S)$, τότε

   (i) $A \dot{+} B = B \dot{+} A$

   (ii) $A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma$

   (iii) $A \dot{+} A = \emptyset$.

   (iv) $A \cap (B \dot{+} \Gamma) = (A \cap B) \dot{+} (A \cap \Gamma)$

6. Έστω S, I μη-κενά σύνολα και έστω ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(S)$. Η τομή των συνόλων A_i, $i \in I$, είναι το σύνολο με στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα A_i, $i \in I$, και συμβολίζεται με $\bigcap_{i \in I} A_i$. Η ένωση των συνόλων A_i, $i \in I$, είναι το σύνολο με στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A_i, $i \in I$, και συμβολίζεται με $\bigcup_{i \in I} A_i$. Να δειχτεί ότι:

   (i) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

   (ii) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

1.2 Καρτεσιανά Γινόμενα

Έστω A, B δυο σύνολα. Το σύμβολο (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ λέγεται **διατεταγμένο ζεύγος** με πρώτη συντεταγμένη το α και δεύτερη συντεταγμένη το β. Αν (α, β) και (α', β') είναι δύο διατεταγμένα ζεύγη, τότε $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ αν και μόνο αν $\alpha = \alpha'$ και $\beta = \beta'$.

Ορισμός 1.2.1 *Το* **καρτεσιανό γινόμενο** *των συνόλων A και B είναι το σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, και συμβολίζεται με $A \times B$.*

Παράδειγμα 1.2.2 *Αν* $A = \{1, 2, 3\}$ *και* $B = \{1, 4\}$, *τότε*

- $A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$
- $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
- $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
- $B \times B = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου μπορεί να γενικευθεί για περισσότερα από δύο σύνολα. Έτσι, αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι σύνολα, τότε το σύμβολο $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ με $\alpha_i \in A_i$, $1 \leq i \leq \nu$, λέγεται διατεταγμένη ν-άδα με i-συντεταγμένη το α_i για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Αν $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ και $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\nu)$ είναι δύο διατεταγμένες ν-άδες, τότε $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\nu)$ αν και μόνο αν $\alpha_i = \alpha'_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$, δηλαδή αν και μόνο αν η i-συντεταγμένη της ν-άδας $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ ισούται με την i-συντεταγμένη της ν-άδας $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\nu)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Ορισμός 1.2.3 *Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων* $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *είναι το σύνολο με στοιχεία τις διατεταγμένες ν-άδες* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, *όπου* $\alpha_i \in A_i$, $1 \leq i \leq \nu$, *και συμβολίζεται με* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$. *Στην περίπτωση που* $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = A$, *τότε το καρτεσιανό γινόμενο των* $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *συμβολίζεται με* A^ν, *δηλαδή* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu = A^\nu$.

Έτσι, το σύνολο A^ν ορίζεται για κάθε θετικό ακέραιο ν. Θεωρούμε ότι $A^1 = A$. Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, το σύνολο $\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{R}^\nu$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων πραγματικών αριθμών.

Παρατήρηση Δεν θεωρήσαμε σκόπιμο να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό του καρτεσιανού γινομένου. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευτεί οποιοδήποτε βιβλίο της θεωρίας συνόλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 4\}$. Να βρεθεί το $|(A \times B) \cup (B \times A)|$.
2. Έστω A, B, Γ, Δ σύνολα. Να δειχτεί ότι

   (i) $A \times B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$

   (ii) Αν $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ τότε

   (α) $A \times B = B \times A$ αν και μόνο αν $A = B$

   (β) $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Delta$ αν και μόνο αν $A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$

   (iii) $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$

   (iv) $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$

   (v) $(A \backslash B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \backslash (B \times \Gamma)$

3. Έστω A, B δύο σύνολα. Να δειχτεί ότι $A \times B = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} A_\beta$, όπου $B_\alpha = \{\alpha\} \times B$ και $A_\beta = A \times \{\beta\}$.

4. Έστω I, J, S μη-κενά σύνολα και έστω ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(S)$ και για κάθε $j \in J$ ένα σύνολο B_j με $B_j \in \mathcal{P}(S)$. Να δειχτεί ότι:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j.$$

1.3 Σχέσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός 1.3.1 *Έστω A, B δύο σύνολα. Μια* **διμελής σχέση** *από το A στο B είναι ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$. Ιδιαίτερα, ένα υποσύνολο $R \subseteq A \times A$ λέγεται μια διμελής σχέση στο A. Αν $(x, y) \in R$, τότε συνήθως γράφουμε xRy.*

Παράδειγμα 1.3.2 *Έστω A ένα σύνολο.*

(i) $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ *είναι μια διμελής σχέση στο A.*

(ii) $R = \{(x, Y) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid x \in Y\}$ *είναι μια διμελής σχέση από το A στο $\mathcal{P}(A)$.*

(iii) $R = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$ *είναι μια διμελής σχέση στο $\mathcal{P}(A)$.*

Ορισμός 1.3.3 *Έστω A ένα σύνολο και $R \subseteq A \times A$ μια διμελής σχέση στο A. Τότε*

(i) *Η R λέγεται* **αυτοπαθής** *αν $(x, x) \in R$ για κάθε $x \in A$.*

(ii) *Η R λέγεται* **συμμετρική** *αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν $(x, y) \in R$, τότε $(y, x) \in R$.*

(iii) *Η R λέγεται* **μεταβατική** *αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$, τότε $(x, z) \in R$.*

Μία διμελής σχέση στο A, η οποία είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** στο A. Για τις σχέσεις ισοδυναμίας χρησιμοποιούμε συνήθως το σύμβολο $\sim$. Έτσι, αν R είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A τότε αντί για xRy γράφουμε $x \sim y$. Οι τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες της $\sim$ εκφράζονται ως εξής:

- Αυτοπαθής: $x \sim x$ για κάθε $x \in A$
- Συμμετρική: Αν $x \sim y$ τότε $y \sim x$
- Μεταβατική: Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε $x \sim z$

Παράδειγμα 1.3.4 *Έστω A ένα σύνολο.*

(i) *Η ισότητα στο σύνολο A είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A.*

(ii) *Αν $A \neq \emptyset$, τότε η σχέση $X \subseteq Y$ στο σύνολο $\mathcal{P}(A)$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας, καθώς δεν είναι συμμετρική.*

Ορισμός 1.3.5 *Έστω A ένα σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο A. Αν $\alpha \in A$ τότε η* **κλάση ισοδυναμίας** *του α είναι το σύνολο $K_\alpha = \{x \in A \mid \alpha \sim x\}$. Παρατηρούμε ότι, λόγω της συμμετρικής ιδιότητας, $K_\alpha = \{x \in A \mid x \sim \alpha\}$. Το σύνολο $\{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με $A/\sim$.*

Παράδειγμα 1.3.6 *Θεωρούμε το σύνολο X των σημείων του επιπέδου και σταθεροποιούμε ένα σημείο $O \in X$. Ορίζουμε μια σχέση στο X, ως εξής: Αν $P, Q \in X$ τότε θέτουμε $P \sim Q$ αν και μόνο αν τα σημεία P, Q ισαπέχουν από το O. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η σχέση αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η κλάση ισοδυναμίας ενος στοιχείου $P \in X$ είναι το σύνολο των σημείων του κύκλου με κέντρο O, ο οποίος διέρχεται από το P. (Αν $P = O$ τότε ο κύκλος αυτός εκφυλίζεται σε ένα σημείο.) Το σύνολο $X/\sim$ είναι το σύνολο όλων των κύκλων του επιπέδου με κέντρο O.*

Πρόταση 1.3.7 *Έστω A ένα σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο A. Τότε:*

(i) *Αν $\alpha, \beta \in A$ τότε $K_\alpha = K_\beta$ αν και μόνο αν $\alpha \sim \beta$.*

(ii) *Αν $\alpha, \beta \in A$ τότε $K_\alpha = K_\beta$ ή $K_\alpha \cap K_\beta = \emptyset$.*

(iii) $\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha = A$.

Απόδειξη.
(i) Αν $K_\alpha = K_\beta$ τότε, επειδή $\beta \in K_\beta$, έπεται ότι $\beta \in K_\alpha$ και άρα $\alpha \sim \beta$. Έστω τώρα $\alpha \sim \beta$. Θα δείξουμε ότι $K_\alpha \subseteq K_\beta$ και $K_\beta \subseteq K_\alpha$. Αν $x \in K_\alpha$ τότε $x \sim \alpha$. Αλλά από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha \sim \beta$ και άρα από τη μεταβατική ιδιότητα έπεται ότι $x \sim \beta$. Έτσι, $x \in K_\beta$ και άρα δείξαμε ότι $K_\alpha \subseteq K_\beta$. Ανάλογα δείχνουμε ότι $K_\beta \subseteq K_\alpha$.

Οι αποδείξεις των (ii) και (iii) αφήνονται ως ασκήσεις στον αναγνώστη.

Ορισμός 1.3.8 *Έστω A ένα σύνολο. Ένα υποσύνολο $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ λέγεται* **διαμέριση** *του A αν*

(i) $\emptyset \notin S$,

(ii) $\bigcup_{\Gamma \in S} \Gamma = A$ *και*

(iii) αν $X, Y \in S$ τότε $X = Y$ ή $X \cap Y = \emptyset$.

Έτσι, μια διαμέριση ενός συνόλου A είναι ένα σύνολο μη-κενών υποσυνόλων του A, τα οποία ανά δύο έχουν τομή το κενό σύνολο ή συμπίπτουν και η ένωσή τους είναι το A.

Από την Πρόταση 1.3.7 έπεται ότι άν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο A, τότε το σύνολο $A/\sim$ των κλάσεων ισοδυναμίας είναι μια διαμέριση του A. Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 1.3.9 *Έστω A ένα σύνολο και S μια διαμέριση του A. Τότε, υπάρχει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο A, έτσι ώστε οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας να είναι ακριβώς τα στοιχεία του S (δηλαδή, $A/\sim\, = S$).*

Απόδειξη. Ορίζουμε μια σχέση στο A ως εξής: Για $x, y \in A$ θέτουμε $x \sim y$ αν και μόνο αν υπάρχει $\Gamma \in S$ με $x, y \in \Gamma$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η σχέση $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A και αν $x \in A$ με $x \in \Gamma$, τότε $K_\alpha = \Gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να εξεταστεί ποιες από τις ακόλουθες σχέσεις είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

1. Στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$:

   Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν ο ακέραιος $\beta - \alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 2.

2. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$:

   Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν ο ο πραγματικός αριθμός $\beta - \alpha$ είναι ρητός.

3. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$:

   Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν $\alpha\beta \geq 0$.

4. Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

   Αν $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ τότε $(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\beta_1, \beta_2)$ αν $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$.

1.4 Απεικονίσεις

Ορισμός 1.4.1 *Έστω X, Y δύο σύνολα. Μια* **απεικόνιση** *f από το X στο Y είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο x του X ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ του Y. Το σύνολο X λέγεται το πεδίο ορισμού της απεικόνισης f και το σύνολο Y το πεδίο τιμών της. Για συντομία, γράφουμε $f : X \longrightarrow Y$. Το στοιχείο $f(x)$ του Y λέγεται η εικόνα του x μέσω της απεικόνισης f. Τις απεικονίσεις ονομάζουμε επίσης και* **συναρτήσεις**.

Ορισμός 1.4.2 *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση και $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Τότε, το σύνολο $\{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ λέγεται η εικόνα του A μέσω της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Ιδιαίτερα, το $f(X)$ λέγεται η εικόνα της f. Το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ λέγεται η αντίστροφη εικόνα του B μέσω της f και συμβολίζεται με $f^{-1}(B)$.*

Παράδειγμα 1.4.3 (i) *Η πρόσθεση των πραγματικών αριθμών είναι μια απεικόνιση*

$\pi\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(x, y) \longmapsto x + y$.

(ii) *Ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών είναι μια απεικόνιση*

$\pi o\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(x, y) \longmapsto xy$.

(iii) *Μια απεικόνιση δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται μέσω κάποιου τύπου. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } x \text{ είναι ρητός} \\ 0 & \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος} \end{cases}$*

(iv) *Η $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(x, y) \longmapsto x$ είναι μια απεικόνιση.*

(v) Η $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\sigma(0) = 0$ και $\sigma(\nu) = \begin{cases} \kappa & \text{αν } \nu = 2\kappa \\ -\kappa & \text{αν } \nu = 2\kappa - 1 \end{cases}$ για κάθε $\nu > 0$ είναι μια απεικόνιση.

(vi) Η $\varrho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \longmapsto -\nu$ είναι μια απεικόνιση.

Ορισμός 1.4.4 *Δύο απεικονίσεις $f : X \longrightarrow Y$ και $g : A \longrightarrow B$ λέγονται ίσες αν $X = A$, $Y = B$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Παράδειγμα 1.4.5 *Οι απεικονίσεις $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $f(\nu) = \begin{cases} -1 & \text{αν ο } \nu \text{ είναι περιττός} \\ 1 & \text{αν ο } \nu \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$ και $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $g(\nu) = \text{συν}(\nu\pi)$ είναι ίσες.*

Ορισμός 1.4.6 *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση.*

(i) *Η f λέγεται* **ένα προς ένα**, *και γράφουμε 1-1, αν για κάθε $x, x' \in X$ με $x \neq x'$ είναι $f(x) \neq f(x')$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $x, x' \in X$ με $f(x) = f(x')$ είναι $x = x'$.*

(ii) *Η f λέγεται* **επί** *αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = y$ ή, ισοδύναμα, αν $f(X) = Y$.*

Παράδειγμα 1.4.7 *Για τις απεικονίσεις στο Παράδειγμα 1.4.3 έχουμε:*

(i) Η $\pi\rho$ είναι επί, αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\pi\rho((r, 0)) = r$, αλλά δεν είναι 1-1, αφού $\pi\rho((1, 3)) = 4 = \pi\rho((2, 2))$.

(ii) Η $\pi o\lambda$ είναι επί, αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\pi o\lambda((r, 1)) = r$, αλλά δεν είναι 1-1, αφού $\pi o\lambda((3, 4)) = 12 = \pi o\lambda((2, 6))$.

(iii) Η f δεν είναι επί, αφού $f(\mathbb{R}) = \{1, 0\} \subsetneq \mathbb{R}$, ούτε 1-1, αφού $f(2) = 1 = f(3)$.

(iv) Η π_1 είναι επί, αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\pi_1((r, 2)) = r$, αλλά δεν είναι 1-1, αφού $\pi_1((1, 2)) = 1 = \pi_1((1, 3))$.

(v) Εύκολα βλέπουμε ότι η σ είναι 1-1 και επί.

(vi) Η ϱ είναι 1-1, αφού αν $\varrho(x) = \varrho(y)$, τότε $-x = -y$ και άρα $x = y$, αλλά δεν είναι επί, αφού $\varrho(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{Z}$.

Ορισμός 1.4.8 *Έστω M ένα σύνολο. Η απεικόνιση $M \longrightarrow M$ που αντιστοιχεί το x στο x για κάθε $x \in X$ λέγεται η* **ταυτοτική** *απεικόνιση του M και συμβολίζεται με 1_M ή id_M.*

Ορισμός 1.4.9 *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ δύο απεικονίσεις. Τότε ορίζεται η απεικόνιση*

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in X$, η οποία λέγεται **σύνθεση** *των f και g.*

Παράδειγμα 1.4.10 *Έστω $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ και $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ οι συναρτήσεις με $f(\nu) = 2\nu + 1$ και $g(\nu) = 2\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$. Τότε, για τις συνδέσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ είναι $(g \circ f)(\nu) = 4\nu + 2$ και $(f \circ g)(\nu) = 4\nu + 1$. Παρατηρούμε ότι $f \circ g \neq g \circ f$.*

Πρόταση 1.4.11 *Αν $f : A \longrightarrow B$ είναι μια απεικόνιση, τότε $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.*

Απόδειξη. Είναι άμεση και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Πρόταση 1.4.12 *(Η προσεταιριστική ιδιότητα της σύνθεσης απεικονίσεων) Έστω $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow \Gamma$ και $h : \Gamma \longrightarrow \Delta$ απεικονίσεις. Τότε, οι απεικονίσεις $h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow \Delta$ και $(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow \Delta$ είναι ίσες.*

Απόδειξη. Έστω $\phi = h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow \Delta$ και $\psi = (h \circ g) \circ f : A \longrightarrow \Delta$. Τότε, για κάθε $\alpha \in A$ έχουμε $\phi(\alpha) = (h \circ (g \circ f))(\alpha) = h((g \circ f)(\alpha)) = h(g(f(\alpha)))$ και $\psi(\alpha) = ((h \circ g) \circ f)(\alpha) = (h \circ g)(f(\alpha)) = h(g(f(\alpha)))$. Άρα $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in A$, δηλαδή $\phi = \psi$.

Πρόταση 1.4.13 *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ δυο απεικονίσεις.*

(i) *Αν οι f και g είναι 1-1, τότε η $g \circ f$ είναι επίσης 1-1.*

(ii) *Αν οι f και g είναι επί, τότε η $g \circ f$ είναι επίσης επί.*

(iii) *Αν οι f και g είναι 1-1 και επί τότε η $g \circ f$ είναι επίσης 1-1 και επί.*

Απόδειξη.
(i) Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$. Επειδή η f είναι 1-1, έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Τώρα, επειδή η g είναι 1-1, έπεται ότι $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Άρα, η $g \circ f$ είναι 1-1.

(ii) Εστω $z \in Z$. Επειδή η g είναι επί, έπεται ότι $z = g(y)$ για κάποιο $y \in Y$. Τώρα, επειδή η f είναι επί, έχουμε ότι $y = f(x)$ για κάποιο $x \in X$. Άρα, έχουμε $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Δείξαμε ότι για κάθε $z \in Z$ υπάρχει κάποιο $x \in X$ με $z = (g \circ f)(x)$. Άρα, η $g \circ f$ είναι επί.

(iii) Αυτό έπεται άμεσα από τα (i) και (ii).

Έστω $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow A$ δυο απεικονίσεις. Τότε, ορίζονται οι απεικονίσεις

$$g \circ f : A \longrightarrow A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f \circ g : B \longrightarrow B.$$

Στην περίπτωση που $g \circ f = 1_A$ και $f \circ g = 1_B$, η g λέγεται μια **αντίστροφη** της f (και η f μια αντίστροφη της g). Θα εξετάσουμε παρακάτω πότε μια απεικόνιση f έχει αντίστροφη και θα δούμε ότι αυτή, αν υπάρχει, είναι μοναδική.

Πρόταση 1.4.14 *Μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ έχει αντίστροφη αν και μόνο αν είναι 1-1 και επί.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f έχει μια αντίστροφη $g : B \longrightarrow A$. Έτσι, έχουμε $g(f(\alpha)) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$ και $f(g(\beta)) = \beta$ για κάθε $\beta \in B$. Θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1 και επί. Πράγματι, έστω $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ με $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. Τότε, έχουμε $\alpha_1 = g(f(\alpha_1)) = g(f(\alpha_2)) = \alpha_2$ και έτσι η f είναι 1-1. Έστω τώρα $\beta \in B$. Τότε $f(g(\beta)) = \beta$, δηλαδή το β είναι η εικόνα του στοιχείου $g(\beta) \in A$ μέσω της f. Άρα, η f είναι επί.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι 1-1 και επί. Θα δείξουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $g : B \longrightarrow A$ με $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$. Έστω $\beta \in B$. Καθώς η f είναι επί, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$. Αν κάποιο στοιχείο $\alpha' \in A$ είναι τέτοιο ώστε $f(\alpha') = \beta$, τότε $f(\alpha) = \beta = f(\alpha')$. Επειδή όμως η f είναι 1-1, έπεται ότι $\alpha = \alpha'$. Άρα, αν $\beta \in B$ τότε υπάρχει ένα μοναδικό $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $g : B \longrightarrow A$, ώς εξής: Αν $\beta \in B$ τότε η εικόνα $g(\beta)$ του β μέσω της g είναι το μοναδικό στοιχείο $\alpha \in A$ το οποίο έχει την ιδιότητα $f(\alpha) = \beta$. Δηλαδή, $g(\beta) = \alpha$, όπου α το μοναδικό στοιχείο του A με την ιδιότητα $f(\alpha) = \beta$. Εύκολα τώρα βλέπουμε ότι $f(g(\beta)) = \beta$ για κάθε $\beta \in B$ και $g(f(\alpha)) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$. Άρα, έχουμε $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$.

Πρόταση 1.4.15 *Αν μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί τότε έχει μοναδική αντίστροφη, την οποία συμβολίζουμε με f^{-1}.*

Απόδειξη. Είδαμε στην Πρόταση 1.4.14 ότι αν μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί τότε έχει αντίστροφη. Έστω $g_1, g_2 : B \longrightarrow A$ δυο αντίστροφες της f. Τότε, έχουμε $g_1 \circ f = 1_A = g_2 \circ f$ και $f \circ g_1 = 1_B = f \circ g_2$. Έτσι, με βάση τις Προτάσεις 1.4.11 και 1.4.12, συμπεραίνουμε ότι $g_1 = 1_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ 1_B = g_2$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι αν μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί τότε η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : B \longrightarrow A$ είναι επίσης 1-1 και επί, ενώ η αντίστροφη της f^{-1} είναι η f.

Παράδειγμα 1.4.16 *Από τις απεικονίσεις του Παραδείγματος 1.4.3 μόνο η απεικόνιση σ στο (v) είναι 1-1 και επί και άρα μόνο αυτή έχει αντίστροφη. Η $\sigma^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ ορίζεται θέτοντας $\sigma^{-1}(0) = 0$ και*

$$\sigma^{-1}(\kappa) = \begin{cases} 2\kappa & \text{αν } \kappa \text{ θετικός ακέραιος} \\ -2\kappa - 1 & \text{αν } \kappa \text{ αρνητικός ακέραιος} \end{cases}$$

Πρόταση 1.4.17 *Αν οι απεικονίσεις $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow \Gamma$ έχουν αντίστροφες, τότε η απεικόνιση $g \circ f : A \longrightarrow \Gamma$ έχει επίσης αντίστροφη και μάλιστα ισχύει $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Απόδειξη. Έχουμε τις σχέσεις $f^{-1} \circ f = 1_A$ και $f \circ f^{-1} = 1_B$, όπως επίσης και τις σχέσεις $g^{-1} \circ g = 1_B$ και $g \circ g^{-1} = 1_\Gamma$. Με βάση τις Προτάσεις 1.4.11 και 1.4.12, έχουμε ότι

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = g\circ(f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})) = g\circ((f\circ f^{-1})\circ g^{-1}) = g\circ(1_B\circ g^{-1}) = g\circ g^{-1} = 1_\Gamma.$$

Ανάλογα δείχνουμε ότι $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = 1_A$. Έτσι, δείξαμε ότι η $g\circ f$ έχει μια αντίστροφη, την $f^{-1} \circ g^{-1}$. Καθώς γνωρίζουμε ότι αν μια απεικόνιση έχει αντίστροφη, τότε αυτή είναι μοναδική, έπεται ότι $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ορισμός 1.4.18 *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση και M ένα υποσύνολο του X. Η απεικόνιση $M \longrightarrow Y$ με $x \longmapsto f(x)$ λέγεται **περιορισμός** της f στο M και συμβολίζεται με $f|_M$.*

Ορισμός 1.4.19 *Έστω $\rho : A \longrightarrow B$ μία απεικόνιση και Γ ένα σύνολο με $A \subseteq \Gamma$. Αν $\sigma : \Gamma \longrightarrow B$ είναι μια απεικόνιση τέτοια ώστε $\rho = \sigma|_A$, τότε η σ λέγεται **επέκταση** της ρ.*

Παράδειγμα 1.4.20 *Θεωρούμε την απεικόνιση $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \longmapsto -\nu$. Τότε, οι απεικονίσεις $\sigma_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \longmapsto -\nu$ και $\sigma_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\sigma_2(\nu) = \begin{cases} -\nu & \text{αν ο } \nu \text{ είναι θετικός} \\ \nu & \text{αν ο } \nu \text{ είναι αρνητικός} \end{cases}$ είναι επεκτάσεις της ρ με $\sigma_1 \neq \sigma_2$.*

Ορισμός 1.4.21 *Έστω A, B δυο σύνολα. Η απεικόνιση $\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$ με $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha$ λέγεται* **προβολή** *στον πρώτο παράγοντα του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$. Ανάλογα ορίζεται η προβολή $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$ στον δεύτερο παράγοντα του $A \times B$.*

Παρατήρηση 1.4.22 *Ο ορισμός της απεικόνισης που δώσαμε (Ορισμός 1.4.1) δεν είναι διατυπωμένος αυστηρά στη γλώσσα των συνόλων. Ένας αυστηρός ορισμός είναι ο ακόλουθος: Μια απεικόνιση f είναι μια διατεταγμένη τριάδα (X, Y, R) όπου X, Y είναι σύνολα και R ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$, το οποίο έχει τις επόμενες δύο ιδιότητες:*

(i) *για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ ώστε $(x, y) \in R$ και*

(ii) *αν $x \in X$ και $y, y' \in Y$ είναι στοιχεία με $(x, y) \in R$ και $(x, y') \in R$, τότε $y = y'$.*

Έτσι, μια απεικόνιση $f = (X, Y, R)$ είναι μια διμελής σχέση ειδικής μορφής από το X στο Y.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (i) Ποιες από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι 1-1;, ποιες είναι επί;

$$
\begin{array}{l}
f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \longmapsto x^2 \\
f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^2 \\
f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^3 \\
f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 \\
f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \longmapsto x + 1
\end{array}
$$

   (ii) Είναι οι συναρτήσεις $f_5 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_5$ ίσες;

2. Έστω $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η προβολή στον πρώτο παράγοντα. Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ να δειχτεί ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση απο το σύνολο $\pi_1^{-1}(r_1)$ στο $\pi_1^{-1}(r_2)$.

3. Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια απεικόνιση, $X, Y \subseteq A$ και $\Gamma, \Delta \subseteq B$. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν $X \subseteq Y$ τότε $f(X) \subseteq f(Y)$

   (ii) Αν $\Gamma \subseteq \Delta$ τότε $f^{-1}(\Gamma) \subseteq f^{-1}(\Delta)$

   (iii) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

   (iv) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

4. Έστω $f : A \to B$ μια απεικόνιση, $X, Y \subseteq A$ και $\Gamma, \Delta \subseteq B$. Να δειχτεί ότι:

   (i) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

   (ii) $f^{-1}(\Gamma \cup \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cup f^{-1}(\Delta)$

   (iii) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

   (iv) $f^{-1}(\Gamma \cap \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cap f^{-1}(\Delta)$

   Να δειχτεί επίσης ότι στο (iii) έχουμε ισότητα για κάθε $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ αν και μόνο αν η f είναι 1-1.

5. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση. Θεωρούμε ένα μη-κενό σύνολο I και υποθέτουμε ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(X)$ και ένα σύνολο B_i με $B_i \in \mathcal{P}(Y)$. Να δειχτεί ότι:

   (i) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

   (ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

   (iii) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

   (iv) Αν η f είναι 1-1 τότε $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

6. Έστω $f : A \longrightarrow B$ και $\varrho : B \longrightarrow \Gamma$ δυο απεικονίσεις. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν η $\varrho \circ f$ είναι επί, τότε η ϱ είναι επί.

   (ii) Αν η $\varrho \circ f$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.

7. Έστω $f : A \longrightarrow X$ μια απεικόνιση και B, Γ υποσύνολα του A, τέτοια ώστε οι περιορισμοί $f|_B$ και $f|_\Gamma$ είναι 1-1. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο περιορισμός $f|_{B\cup\Gamma}$ είναι επίσης 1-1;

8. Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια απεικόνιση. Να δειχτεί ότι:

   (i) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν $|f^{-1}(\{\beta\})| = 1$ για κάθε $\beta \in f(A)$.

   (ii) Η f είναι επί αν και μόνο αν $f^{-1}(\{\beta\}) \neq \emptyset$ για κάθε $\beta \in B$.

9. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση. Τότε ορίζονται οι απεικονίσεις $\overline{f} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ με $A \longmapsto f(A)$ και $\overline{f^{-1}} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ με $B \longmapsto f^{-1}(B)$. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν η f είναι επί τότε $\overline{f} \circ \overline{f^{-1}} = 1_{\mathcal{P}(Y)}$.

   (ii) Αν η f είναι 1-1 τότε $\overline{f^{-1}} \circ \overline{f} = 1_{\mathcal{P}(X)}$.

10. (i) Έστω A, B δυο σύνολα και S το σύνολο των απεικονίσεων $f : \{1, 2\} \longrightarrow A \cup B$ με $f(1) \in A$ και $f(2) \in B$. Να δειχτεί ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση από το S στο $A \times B$.

    (ii) Έστω A ένα σύνολο και ν ένας φυσικός αριθμός. Αν M είναι το σύνολο όλων των απεικονίσεων $f : \{1, 2, 3, \ldots, \nu\} \longrightarrow A$, τότε να δειχτεί ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση από το A στο $A^\nu = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\nu-\text{φορές}}$.

11. Μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ λέγεται σταθερή αν $f(\alpha) = f(\alpha')$ για κάθε $\alpha, \alpha' \in A$. Να δειχτεί ότι αν $f, \varrho : A \longrightarrow A$ είναι σταθερές απεικονίσεις και $f \neq \varrho$, τότε $\varrho \circ f \neq f \circ \varrho$.

12. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση. Να δειχτεί ότι η f είναι σταθερή αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $g : X \longrightarrow X$ έχουμε $f \circ g = f$.

13. Να βρεθεί μια 1-1 και επί απεικόνιση $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$, όπου $M \subsetneq \mathbb{N}$.

14. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση. Να δειχτεί ότι το σύνολο $\{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in f(X)\}$ είναι μια διαμέριση του X.

15. (i) Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια 1-1 απεικόνιση. Να ορίσετε μια απεικόνιση $\varrho : Y \longrightarrow X$ με $\varrho \circ f = 1_X$.

    (ii) Δώστε παράδειγμα απεικονίσεων $\sigma, \tau : A \longrightarrow A$ με $\tau \circ \sigma = 1_A$ και $\sigma \circ \tau \neq 1_A$.

16. Έστω $f, g : X \longrightarrow Y$ δυο απεικονίσεις. Να δειχτεί ότι:

    (i) $f = g$ αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $h : Y \longrightarrow \{3, 7\}$ ισχύει $h \circ f = h \circ g$.

    (ii) $f = g$ αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $\sigma : \{3\} \longrightarrow X$ ισχύει ότι $f \circ \sigma = g \circ \sigma$.

17. Έστω $A = A_1 \times A_2$ και R_1, R_2 σχέσεις ισοδυναμίας στα A_1 και A_2 αντίστοιχα. Έστω R η σχέση στο A που ορίζεται θέτοντας $(\alpha_1, \alpha_2)R(\beta_1, \beta_2)$ αν $\alpha_1 R_1 \beta_1$ και $\alpha_2 R_2 \beta_2$. Να δειχτεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο A και υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία από το σύνολο A/R στο καρτεσιανό γινόμενο $(A_1/R_1) \times (A_2/R_2)$.

1.5 Μαθηματική Επαγωγή

Θα αποδείξουμε την αρχή της επαγωγής χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ιδιότητα των φυσικών αριθμών.

Αξίωμα του ελαχίστου ή Αξίωμα καλής διάταξης: Κάθε μη-κενό υποσύνολο M του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $m_0 \in M$ τέτοιο ώστε $m_0 \leq m$ για κάθε $m \in M$.

Θεώρημα 1.5.1 *(Μαθηματική επαγωγή ή αρχή της επαγωγής) Έστω ότι σε κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν αντιστοιχεί μια πρόταση $p(\nu)$ που αφορά το ν, με τέτοιον τρόπο ώστε:*

(i) η $p(1)$ αληθεύει και

(ii) αν η $p(\mu)$ αληθεύει για κάποιο φυσικό αριθμό μ, τότε η $p(\mu + 1)$ αληθεύει.

Τότε, η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν.

Απόδειξη. Έστω S το υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που έχει ως στοιχεία του εκείνους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς ν, για τους οποίους η πρόταση $p(\nu)$ δεν αληθεύει. Θα δείξουμε ότι $S = \emptyset$. Έστω ότι $S \neq \emptyset$. Τότε, από το αξίωμα ελαχίστου, το S περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω μ. Από την υπόθεση (i), έχουμε ότι $\mu > 1$. Από τον ορισμό του μ, έχουμε ότι $\mu - 1 \notin S$ και άρα η πρόταση $p(\mu - 1)$ αληθεύει. Τότε όμως, από την υπόθεση (ii), έπεται ότι και η $p(\mu)$ αληθεύει, που είναι άτοπο καθώς $\mu \in S$.

Μια άλλη μορφή της μαθηματικής επαγωγής είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1.5.2 *(Δεύτερη μορφή της επαγωγής) Έστω ότι σε κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν αντιστοιχεί μια πρόταση $p(\nu)$ που αφορά το ν, με τέτοιον τρόπο ώστε:*

(i) η $p(1)$ αληθεύει και

(ii) αν $\mu \in \mathbb{N}$ και η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu$, τότε η $p(\mu + 1)$ αληθεύει.

Τότε, η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $S = \{\nu \in \mathbb{N} \mid \nu \geq 1$ και η $p(\nu)$ δεν αληθεύει$\}$ είναι κενό. Αν το S δεν είναι κενό, τότε λόγω του αξιώματος του ελαχίστου, θα περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω μ. Από την υπόθεση (i), έχουμε ότι $\mu > 1$. Από τον ορισμό του μ προκύπτει ότι η πρόταση $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu - 1$. Από την υπόθεση (ii), έχουμε ότι η $p(\mu)$ αληθεύει, που είναι άτοπο.

Παρατήρηση 1.5.3 *Η υπόθεση (i) στα προηγούμενα δύο θεωρήματα λέγεται συνήθως «αρχικό βήμα της επαγωγής», ενώ η υπόθεση (ii) «επαγωγικό βήμα». Επίσης, η υπόθεση «αν η $p(\nu)$ αληθεύει» στην (ii) του Θεωρήματος 1.5.1 (αντίστοιχα «αν η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu$» στην (ii) του Θεωρήματος 1.5.2) λέγεται «υπόθεση επαγωγής».*

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε μια ιδιότητα που αφορά την πρόσθεση πραγματικών αριθμών:

Παρατήρηση 1.5.4 *Γνωρίζουμε ότι αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Δηλαδή, αν προσθέσουμε το άθροισμα των α και β με το γ, τότε το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό που βρίσκουμε αν προσθέσουμε το α με το άθροισμα των β και γ. Συνεπώς, δεν έχει σημασία πώς μπαίνουν οι παρενθέσεις. Έτσι, μπορούμε να παραστήσουμε χωρίς κίνδυνο σύγχυσης τον αριθμό $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ως $\alpha + \beta + \gamma$.*

Γενικότερα, αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε μπορεί να αποδειχτεί με επαγωγή ως προς ν ότι με όποιον τρόπο και να προσθέσουμε τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, δηλαδή με όποιον τρόπο και να βάλουμε τις παρενθέσεις, το αποτέλεσμα είναι πάντα το ίδιο και το συμβολίζουμε με $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$ ή $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1 + (\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)) = ((\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3) + \alpha_4 = (\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4)$.

Έστω B ένα πεπερασμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών με στοιχεία τους αριθμούς $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$. Χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών (δηλαδή τη σχέση $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$), μπορεί να αποδειχτεί με επαγωγή ως προς ν ότι για κάθε 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : \{1, 2, \ldots, \nu\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, \nu\}$ ισχύει

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu = \beta_{\phi(1)} + \beta_{\phi(2)} + \cdots + \beta_{\phi(\nu)}.$$

Άρα, χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, μπορούμε να παραστήσουμε το άθροισμα $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu$ με $\sum_{\beta \in B} \beta$.

Παράδειγμα 1.5.5 *Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 1$ ισχύει*

$$(\star) \quad \sum_{i=1}^{\nu} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Η $p(\nu)$ είναι η ισότητα $(\star)$. Η $p(1)$ αληθεύει, αφού $\sum_{i=1}^{1} = 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$. Υποθέτοντας ότι ισχύει η $p(\mu)$, θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu + 1)$. Έστω λοιπόν ότι

$$\sum_{i=1}^{\mu} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mu^2 = \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\mu+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{\mu} i^2 + (\mu+1)^2 \\ &= \tfrac{1}{6}\mu(\mu+1)(2\mu+1) + (\mu+1)^2 \\ &= \tfrac{1}{6}(\mu+1)[\mu(2\mu+1) + 6(\mu+1)] \\ &= \tfrac{1}{6}(\mu+1)(2\mu^2+7\mu+6) \\ &= \tfrac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(2\mu+3)\end{aligned}$$

και άρα ισχύει η $p(\mu+1)$. Συνεπώς, από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι η $(\star)$ ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν.

Παράδειγμα 1.5.6 *Έστω x ένας πραγματικός αριθμός με $x \neq 1$. Τότε, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 1$ ισχύει*

$$(\star\star) \qquad \sum_{i=0}^{\nu} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu = \frac{1-x^{\nu+1}}{1-x}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Η $p(\nu)$ είναι η ισότητα $(\star\star)$. Η $p(1)$ αληθεύει, αφού $\sum_{i=0}^{1} x^i = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$. Υποθέτοντας ότι ισχύει η $p(\mu)$, θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Έστω λοιπόν ότι

$$\sum_{i=0}^{\mu} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\mu = \frac{1-x^{\mu+1}}{1-x}.$$

Τότε

$$\sum_{i=0}^{\mu+1} x^i = \sum_{i=0}^{\mu} x^i + x^{\mu+1} = \frac{1-x^{\mu+1}}{1-x} + x^{\mu+1} = \frac{1-x^{\mu+1}+x^{\mu+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{\mu+2}}{1-x}$$

και άρα ισχύει η $p(\mu+1)$. Συνεπώς, από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι η $(\star\star)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν.

Παρατήρηση 1.5.7 *Συχνά οι επαγωγικές αποδείξεις δεν αρχίζουν από τον αριθμό 1, αλλά από κάποιον άλλο μεγαλύτερο. Ισχύουν τα αντίστοιχα των Θεωρημάτων 1.5.1 και 1.5.2 και στην περίπτωση αυτή. Για παράδειγμα, αναφέρουμε το παρακάτω:*

Θεώρημα 1.5.8 *(Δεύτερη μορφή της επαγωγής με αρχικό βήμα στο κ) Έστω κ ένας φυσικός αριθμός και έστω ότι σε κάθε φυσικό αριθμό ν με $\nu \geq \kappa$ αντιστοιχεί μια πρόταση $p(\nu)$ που αφορά το ν. Έστω επιπλέον ότι*

(i) Η $p(\kappa)$ αληθεύει και

(ii) Αν μ είναι ένας φυσικός αριθμός με $\mu \geq \kappa$ και η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $\kappa \leq r \leq \mu$, τότε η $p(\mu+1)$ αληθεύει.

Τότε, η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq \kappa$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 1.5.9 *Ένας φυσικός αριθμός $p \geq 2$ λέγεται πρώτος αν δε μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο μικρότερών του φυσικών αριθμών. Θα δείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $\nu \geq 2$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο (ενός ή περισσοτέρων) πρώτων αριθμών.*

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.5.8. Για $\nu = 2$ ο ισχυρισμός ισχύει, αφού ο 2 είναι πρώτος. Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για όλους τους φυσικούς r με $2 \leq r \leq \mu$. Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για τον $\mu + 1$. Αν ο $\mu + 1$ είναι πρώτος, τότε έχουμε τελειώσει. Αν ο $\mu + 1$ δεν είναι πρώτος, τότε $\mu + 1 = \mu_1\mu_2$ με $\mu_1 < \mu + 1$ και $\mu_2 < \mu + 1$. Αλλά τότε, από την υπόδεση της επαγωγής, οι αριθμοί μ_1 και μ_2 είναι πρώτοι ή γινόμενα πρώτων. Συνεπώς, το γινόμενό τους, δηλαδή ο αριθμός $\mu + 1$, είναι επίσης γινόμενο πρώτων. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από το Θεώρημα 1.5.8.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχτεί ότι

   (i) Ο φυσικός αριθμός $8^{\nu+1} + 9^{2\nu-1}$ είναι ένα πολλαπλάσιο του 73 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

   (ii) $\sum_{i=1}^{\nu}(-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^\nu \nu(\nu+1)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

   (iii) $2\nu \leq 2^\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

   (iv) $\sum_{i=1}^{\nu} i! < (\nu+1)!$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

2. Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία. Να δειχτεί ότι το πλήθος των στοιχείων του $\mathcal{P}(A)$ είναι 2^ν.

3. Έστω κ ένας φυσικός αριθμός και $M \subseteq \{1, 2, \cdots, \kappa\}$, τέτοιο ώστε:

   (i) $1 \in M$ και

   (ii) αν $\lambda \in \{1, 2, \ldots, \kappa - 1\}$ και $\lambda \in M$, τότε $\lambda + 1 \in M$.

   Να δειχτεί ότι $M = \{1, 2, \ldots, \kappa\}$.

4. (i) Έστω A, B δυο πεπερασμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών με $A \cap B = \emptyset$. Να δειχτεί ότι $\sum_{x \in A\cup B} x = \sum_{\alpha\in A} \alpha + \sum_{\beta\in B} \beta$.

   (ii) Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ πεπερασμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$. Να δειχτεί ότι $\sum_{x\in\cup_{i=1}^{\nu} A_i} x = \sum_{x\in A_1} x + \sum_{x\in A_2} x + \cdots + \sum_{x\in A_\nu} x$. Το άθροισμα $\sum_{x\in A_1} x + \sum_{x\in A_2} x + \cdots + \sum_{x\in A_\nu} x$ το συμβολίζουμε με $\sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{x\in A_i} x\right)$.

5. Έστω A, B δυο πεπερασμένα σύνολα και $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ μια απεικόνιση. Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ και $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu\}$, να δειχτεί ότι

   (i) $\sum_{x\in A\times B} f(x) = \sum_{\beta\in B} f(\alpha_1, \beta) + \sum_{\beta\in B} f(\alpha_2, \beta) + \cdots + \sum_{\beta\in B} f(\alpha_\nu, \beta)$

   (ii) $\sum_{x\in A\times B} f(x) = \sum_{\alpha\in A} f(\alpha, \beta_1) + \sum_{\alpha\in A} f(\alpha, \beta_2) + \cdots + \sum_{\alpha\in A} f(\alpha, \beta_\mu)$

Το δεύτερο μέλος της (i) το γράφουμε και ως $\sum_{\alpha\in A}\left(\sum_{\beta\in B} f(\alpha,\beta)\right)$, ενώ το δεύτερο μέλος της (ii) το γράφουμε και ως $\sum_{\beta\in B}\left(\sum_{\alpha\in A} f(\alpha,\beta)\right)$. Έτσι, από τις (i) και (ii), έπεται ότι

$$\sum_{x\in A\times B} f(x) = \sum_{\alpha\in A}\left(\sum_{\beta\in B} f(\alpha,\beta)\right) = \sum_{\beta\in B}\left(\sum_{\alpha\in A} f(\alpha,\beta)\right).$$

Κεφάλαιο 2

Πίνακες

2.1 Ορισμοί και Παραδείγματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την έννοια του πίνακα και θα μελετήσουμε ορισμένες βασικές τεχνικές του λογισμού των πινάκων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τη θεωρία των πινάκων για την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων.

Ξεκινάμε με μια αναφορά σε ορισμένα βασικά σύμβολα.

Ορισμός 2.1.1 *Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}$ το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.*

Ορισμός 2.1.2 *Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}^\nu$ το καρτεσιανό γινόμενο ν αντιτύπων του $\mathbb{F}$. Έτσι, τα στοιχεία του $\mathbb{F}^\nu$ είναι οι διατεταγμένες ν-άδες $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, όπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{F}$.*

Μια διατεταγμένη ν-άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) \in \mathbb{F}^\nu$ είναι ουσιαστικά η παράθεση ν στοιχείων του $\mathbb{F}$ σε μια σειρά. Πολλές φορές είναι χρήσιμο να παραθέτουμε στοιχεία του $\mathbb{F}$ όχι σε μια σειρά, αλλά σε περισσότερες. Έτσι, οδηγούμαστε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.1.3 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Ένας* **πίνακας** *A με ν γραμμές και μ στήλες επί του $\mathbb{F}$ (ή, απλούστερα, ένας $\nu \times \mu$ πίνακας επί του $\mathbb{F}$) είναι μια παράθεση στοιχείων του $\mathbb{F}$ σε μια διάταξη σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, η οποία τοποθετείται μέσα σε δύο μεγάλες παρενθέσεις*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix}.$$

Εδώ, το στοιχείο $a_{ij} \in \mathbb{F}$ βρίσκεται στην θέση που καθορίζει η i-γραμμή και η j-στήλη του πίνακα, για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Θα συμβολίζουμε έναν πίνακα A όπως παραπάνω με $(a_{ij})_{\nu\times\mu}$ ή, στην περίπτωση που οι διαστάσεις ν και μ εννοούνται, με (a_{ij}).

Δύο $\nu \times \mu$ πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ επί του $\mathbb{F}$ καλούνται ίσοι αν $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ το σύνολο των $\nu \times \mu$ πινάκων επί του $\mathbb{F}$.

Παράδειγμα 2.1.4 *Ο* 3×3 *πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *γράφεται και ως* $A = (a_{ij})_{3\times 3}$*, όπου* $a_{ij} = 3^{|i-j|}$.

Παράδειγμα 2.1.5 *Ο* 3×4 *πίνακας* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ *γράφεται και ως* $B = (b_{ij})$*, όπου* $b_{ij} = 4i + j - 4$ *για κάθε ζεύγος* (i, j) *με* $1 \leq i \leq 3$ *και* $1 \leq j \leq 4$.

Παράδειγμα 2.1.6 *Ο* 2×3 *πίνακας* $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ *γράφεται και ως* $C = (c_{ij})$*, όπου* $c_{ij} = i^2 + ij$.

Ορισμός 2.1.7 *Έστω* ν *ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Ένας πίνακας* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *λέγεται* **τετραγωνικός** *πίνακας διάστασης* ν.

Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε τα στοιχεία a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, ονομάζονται **διαγώνια στοιχεία** του πίνακα.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται **διαγώνιος** άν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε $A = D(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\nu\nu})$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται **άνω τριγωνικός** άν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$ και **κάτω τριγωνικός** άν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$.

Παράδειγμα 2.1.8 *Ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ *είναι διαγώνιος και* $A = D(1, 4, -6)$*, ο πίνακας* $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ *είναι άνω τριγωνικός, ενώ ο πίνακας* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ *είναι κάτω τριγωνικός.*

Ορισμός 2.1.9 *Έστω* ν, μ *δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Ένας* $\nu \times 1$ *πίνακας επί του* $\mathbb{F}$ *λέγεται* **πίνακας-στήλη**, *ενώ ένας* $1 \times \mu$ *πίνακας επί του* $\mathbb{F}$ *λέγεται* **πίνακας-γραμμή**.

Έτσι, ένας πίνακας-στήλη $A \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ είναι μια παράθεση ν στοιχείων του $\mathbb{F}$ σε μια στήλη, ενώ ένας πίνακας-γραμμή $B \in \mathbb{F}^{1\times\mu}$ είναι μια παράθεση μ στοιχείων του $\mathbb{F}$ σε μια γραμμή:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_\nu \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_\mu \end{pmatrix}.$$

Είναι φανερό από τους παραπάνω ορισμούς ότι τα σύνολα $\mathbb{F}^{1\times\mu}$ και $\mathbb{F}^{\mu}$ είναι ίσα.

Ορισμός 2.1.10 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί και $A = (a_{ij})$ ένας $\nu \times \mu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Ο πίνακας-γραμμή*

$$r_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i\mu} \end{pmatrix}$$

*λέγεται i-**γραμμή** του πίνακα A για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$. Ο πίνακας-στήλη*

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{\nu j} \end{pmatrix}$$

*λέγεται j-**στήλη** του πίνακα A για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, \mu\}$.*

Έτσι, ένας $\nu \times \mu$ πίνακας A επί του $\mathbb{F}$ προκύπτει παραθέτοντας τις μ στήλες του $c_1, c_2, \dots, c_\mu$ σε μια σειρά ή, ισοδύναμα, τις ν γραμμές του $r_1, r_2, \dots, r_\nu$ σε μια στήλη:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.1.11 *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 9 & -10 & 11 & -12 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 4}.$$

Τότε, η δεύτερη γραμμή και η τρίτη στήλη του A είναι αντίστοιχα

$$r_2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 2.1.12 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί και $A = (a_{ij})$ ένας $\nu \times \mu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Τότε, ο $\mu \times \nu$ πίνακας $A^t = (b_{ij})$ που ορίζεται θέτοντας $b_{ij} = a_{ji}$ για κάθε ζεύγος (i, j) με $1 \leq i \leq \mu$ και $1 \leq j \leq \nu$, λέγεται **ανάστροφος** του A.*

Έτσι, ο ανάστροφος ενός πίνακα-γραμμή είναι ένας πίνακας-στήλη και αντίστροφα. Γενικά, ο ανάστροφος A^t ενός $\nu \times \mu$ πίνακα A είναι ο $\mu \times \nu$ πίνακας που προκύπτει γράφοντας την πρώτη γραμμή του A ως πρώτη στήλη του A^t, τη δεύτερη γραμμή του A ως δεύτερη στήλη του A^t, κ.ο.κ. Αν λοιπόν $r_1, r_2, \dots, r_\nu$ και $c_1, c_2, \dots, c_\mu$ είναι οι γραμμές και οι στήλες του A αντίστοιχα, τότε

$$A^t = \begin{pmatrix} r_1^t & r_2^t & \dots & r_\nu^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^t \\ c_2^t \\ \vdots \\ c_\mu^t \end{pmatrix}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι γραμμές του A^t είναι οι ανάστροφοι $c_1^t, c_2^t, \dots, c_\mu^t$ των στηλών του A, ενώ οι στήλες του A^t είναι οι ανάστροφοι $r_1^t, r_2^t, \dots, r_\nu^t$ των γραμμών του A.

Παράδειγμα 2.1.13 *Ο ανάστροφος του πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 2}$ *είναι ο πίνακας* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 4}$.

Ορισμός 2.1.14 *Έστω* ν *ένας θετικός ακέραιος αριθμός και* $A = (a_{ij})$ *ένας τετραγωνικός* $\nu \times \nu$ *πίνακας με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$. *Ο πίνακας* A *λέγεται* **συμμετρικός** *αν* $A = A^t$.

Παράδειγμα 2.1.15 *Ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ *είναι συμμετρικός, ενώ ο πίνακας* $B = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *δεν είναι συμμετρικός.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω A ένας $\nu \times \mu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι $A = (A^t)^t$.

2. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας επί του $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν ο A είναι διαγώνιος, τότε ο A είναι συμμετρικός.

   (ii) Ο A είναι άνω τριγωνικός αν και μόνο αν ο ανάστροφός του A^t είναι κάτω τριγωνικός.

3. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες είναι συμμετρικοί:

   (i) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $a_{ij} = i + j + ij$.

   (ii) $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $b_{ij} = i + j - ij$.

   (iii) $C = (c_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $c_{ij} = i - j + ij$.

2.2 Άθροισμα και Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός

Θα δούμε στην παράγραφο αυτή ότι στο σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ των $\nu \times \mu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ μπορούν να οριστούν πράξεις, οι οποίες οδηγούν στην ανάπτυξη ενός λογισμού που είναι ανάλογος με τον αριθμητικό λογισμό των στοιχείων του $\mathbb{F}$ (δηλαδή, των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών).

Ορισμός 2.2.1 *Έστω* ν, μ *δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί.*

Αν $A = (a_{ij})$ *και* $B = (b_{ij})$ *είναι δύο* $\nu \times \mu$ *πίνακες επί του* $\mathbb{F}$, *τότε ο πίνακας* $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ *λέγεται* **άθροισμα** *των* A *και* B.

Αν $A = (a_{ij})$ *είναι ένας* $\nu \times \mu$ *πίνακας επί του* $\mathbb{F}$ *και* $\kappa \in \mathbb{F}$, *τότε ο πίνακας* $\kappa A = (\kappa a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ *λέγεται* **βαθμωτό γινόμενο** *του* κ *με τον* A.

Έτσι, αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\mu} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & b_{\nu\mu} \end{pmatrix},$$

τότε

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1\mu} + b_{1\mu} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2\mu} + b_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} + b_{\nu 1} & a_{\nu 2} + b_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} + b_{\nu\mu} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \kappa A = \begin{pmatrix} \kappa a_{11} & \kappa a_{12} & \dots & \kappa a_{1\mu} \\ \kappa a_{21} & \kappa a_{22} & \dots & \kappa a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa a_{\nu 1} & \kappa a_{\nu 2} & \dots & \kappa a_{\nu\mu} \end{pmatrix}$$

για κάθε $\kappa \in \mathbb{F}$.

Ορισμός 2.2.2 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί.*

Ο $\nu \times \mu$ πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με $0 \in \mathbb{F}$ λέγεται **μηδενικός πίνακας** *και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{\nu\times\mu}$ ή, όταν οι διαστάσεις ν και μ εννοούνται, με $\mathbb{O}$.*

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $\nu \times \mu$ πίνακας επί του $\mathbb{F}$, τότε ο πίνακας $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ λέγεται **αντίθετος** *του A.*

Έτσι, αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix},$$

τότε

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1\mu} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{\nu 1} & -a_{\nu 2} & \dots & -a_{\nu\mu} \end{pmatrix}.$$

Ας δούμε τώρα μερικές βασικές ιδιότητες των πράξεων που ορίστηκαν παραπάνω.

Θεώρημα 2.2.3 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε, για κάθε $A, B, C \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{F}$ ισχύουν τα εξής:*

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)*
2. $A + \mathbb{O}_{\nu\times\mu} = A$ *(ύπαρξη μηδενικού στοιχείου)*
3. $A + (-A) = \mathbb{O}_{\nu\times\mu}$ *(ύπαρξη αντίθετου στοιχείου)*
4. $A + B = B + A$ *(μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης)*
5. $1A = A$

6. $(\kappa\lambda)A = \kappa(\lambda A)$

7. $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$ *(επιμεριστική ιδιότητα)*

8. $\kappa(A + B) = \kappa A + \kappa B$ *(επιμεριστική ιδιότητα)*

Απόδειξη. Όλες οι παραπάνω ιδιότητες αποδεικνύονται με βάση αντίστοιχες ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στοιχείων του $\mathbb{F}$. Ενδεικτικά, θα δείξουμε τις ιδιότητες 1 και 8, αφήνοντας την απόδειξη των υπολοίπων ως άσκηση στον αναγνώστη.

1. Έστω λοιπόν ότι $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $C = (c_{ij})$. Για να δείξουμε ότι οι πίνακες $(A + B) + C$ και $A + (B + C)$ είναι ίσοι, θα πρέπει να δείξουμε ότι τα στοιχεία του $\mathbb{F}$ που βρίσκονται στην (i, j)-θέση των δύο αυτών πινάκων είναι ίσα για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο ζεύγος δεικτών και παρατηρούμε ότι το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, j)-θέση του πίνακα $A + B$ είναι το $a_{ij} + b_{ij}$. Συνεπώς, το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, j)-θέση του πίνακα $(A+B)+C$ είναι το $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$. Με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, j)-θέση του πίνακα $A + (B + C)$ είναι το $a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$. Καθώς όμως $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \in \mathbb{F}$, έπεται το ζητούμενο.

8. Έστω ότι $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Σταθεροποιούμε ένα ζεύγος δεικτών (i, j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Τότε, το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, j)-θέση του πίνακα $A + B$ είναι το $a_{ij} + b_{ij}$ και άρα το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, j)-θέση του πίνακα $\kappa(A+B)$ είναι το $\kappa(a_{ij} + b_{ij})$. Ανάλογα, βλέπουμε ότι το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, j)-θέση του πίνακα $\kappa A + \kappa B$ είναι το $\kappa a_{ij} + \kappa b_{ij}$. Όμως $\kappa(a_{ij} + b_{ij}) = \kappa a_{ij} + \kappa b_{ij} \in \mathbb{F}$ και άρα συμπεραίνουμε ότι $\kappa(A + B) = \kappa A + \kappa B$.

Ως λογική συνέπεια των ιδιοτήτων του προηγούμενου θεωρήματος, μπορούμε να δείξουμε και ορισμένες άλλες ιδιότητες των πράξεων που ορίστηκαν στο σύνολο των πινάκων.

Πρόταση 2.2.4 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί, A, B δύο $\nu \times \mu$ πίνακες επί του $\mathbb{F}$ και $\kappa \in \mathbb{F}$. Τότε:*

1. *Ο πίνακας $-A$ είναι ο μοναδικός με την ιδιότητα $A + (-A) = \mathbb{O} \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ (μοναδικότητα του αντιθέτου).*

2. $-(-A) = A$

3. $-(A + B) = (-A) + (-B)$

4. $0A = \mathbb{O} \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$

5. $\kappa\mathbb{O} = \mathbb{O} \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$

6. $(-\kappa)A = -\kappa A = \kappa(-A)$

Απόδειξη.

1. Έστω ότι ο πίνακας $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι τέτοιος ώστε $A + B = \mathbb{O}$. Τότε, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, συμπεραίνουμε ότι

$$B = \mathbb{O} + B = ((-A) + A) + B = (-A) + (A + B) = (-A) + \mathbb{O} = -A.$$

2. Με βάση το 1, η σχέση $A+(-A)=\mathbb{O}$ δείχνει ότι ο A είναι ο αντίθετος του πίνακα $-A$, δηλαδή ότι $A=-(-A)$.

3. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$(A+B)+(-B)=A+(B+(-B))=A+\mathbb{O}=A.$$

Έτσι, με βάση το 1, η σχέση

$$(A+B)+((-B)+(-A))=((A+B)+(-B))+(-A)=A+(-A)=\mathbb{O}$$

δείχνει ότι ο πίνακας $(-A)+(-B)=(-B)+(-A)$ είναι ο αντίθετος του $A+B$, δηλαδή ότι $(-A)+(-B)=-(A+B)$.

4. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, έπεται ότι $0A=(0+0)A=0A+0A$ και άρα

$$0A=\mathbb{O}+0A=((-0A)+0A)+0A=(-0A)+(0A+0A)=(-0A)+0A=\mathbb{O}.$$

5. Εδώ έχουμε $\kappa\mathbb{O}=\kappa(\mathbb{O}+\mathbb{O})=\kappa\mathbb{O}+\kappa\mathbb{O}$ και άρα

$$\kappa\mathbb{O}=\mathbb{O}+\kappa\mathbb{O}=((-\kappa\mathbb{O})+\kappa\mathbb{O})+\kappa\mathbb{O}=(-\kappa\mathbb{O})+(\kappa\mathbb{O}+\kappa\mathbb{O})=(-\kappa\mathbb{O})+\kappa\mathbb{O}=\mathbb{O}.$$

6. Με βάση το 4, έχουμε $(-\kappa)A+\kappa A=(-\kappa+\kappa)A=0A=\mathbb{O}$ και άρα ο πίνακας $(-\kappa)A$ είναι ο αντίθετος του κA, δηλαδή $(-\kappa)A=-\kappa A$. Χρησιμοποιώντας τώρα το 5, έπεται ότι $\kappa(-A)+\kappa A=\kappa((-A)+A)=\kappa\mathbb{O}=\mathbb{O}$ και άρα ο πίνακας $\kappa(-A)$ είναι ο αντίθετος του κA, δηλαδή $\kappa(-A)=-\kappa A$.

Όπως συμβαίνει και με την αριθμητική των στοιχείων του $\mathbb{F}$, έτσι και στην περίπτωση των πινάκων μπορούμε να ορίσουμε την πράξη της αφαίρεσης. Αν $A,B\in\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, τότε ορίζουμε

$$A-B=A+(-B).$$

Έτσι, αν $A=(a_{ij})$ και $B=(b_{ij})$, τότε $-B=(-b_{ij})$ και άρα $A-B=A+(-B)=(a_{ij}+(-b_{ij}))=(a_{ij}-b_{ij})$. Είναι φανερό ότι ο αντίθετος πίνακας του $A-B$ είναι ο $B-A=(b_{ij}-a_{ij})$, δηλαδή έχουμε

$$-(A-B)=B-A=B+(-A)=(-A)+B.$$

Σε σχέση με το βαθμωτό πολλαπλασιασμό, η αφαίρεση ικανοποιεί ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ικανοποιεί η πρόσθεση, οι οποίες γενικεύουν τις αντίστοιχες ιδιότητες της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{F}$ (πρβλ. την Άσκηση 2 στο τέλος αυτής της παραγράφου).

Παράδειγμα 2.2.5 *Θεωρούμε τους* 3×2 *πίνακες*

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&5\\4&-1\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}-2&3\\-5&-4\\1&-1\end{pmatrix}\quad \textit{και}\quad C=\begin{pmatrix}6&-3\\8&-4\\9&-1\end{pmatrix}.$$

Τότε, υπολογίζουμε

$$A+2B-3C=\begin{pmatrix}1&2\\-3&5\\4&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&6\\-10&-8\\2&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}18&-9\\24&-12\\27&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21&17\\-37&9\\-21&0\end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.2.6 *Ας θεωρήσουμε δύο $\nu \times \mu$ πίνακες A, B επί του $\mathbb{F}$. Τότε για τον πίνακα*

$$C = 2(3A - 4B) + (A + 5B) - 2(2A - 9B)$$

είναι

$$\begin{aligned} C &= (6A - 8B) + (A + 5B) - (4A - 18B) \\ &= 6A - 8B + A + 5B - 4A + 18B \\ &= 6A + A - 4A - 8B + 5B + 18B \\ &= (6 + 1 - 4)A + (-8 + 5 + 18)B \\ &= 3A + 15B. \end{aligned}$$

Έχουμε δει ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A επί του $\mathbb{F}$ λέγεται συμμετρικός αν είναι ίσος με τον ανάστροφό του A^t. Με άλλα λόγια, ο τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ είναι συμμετρικός αν ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j).

Ορισμός 2.2.7 *Ενας τετραγωνικός πίνακας A επί του $\mathbb{F}$ λέγεται αντισυμμετρικός αν $A^t = -A$.*

Έτσι, ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ είναι αντισυμμετρικός αν ισχύει $a_{ji} = -a_{ij}$ για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j).

Παράδειγμα 2.2.8 *Ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ *είναι αντισυμμετρικός, ενώ ο πίνακας* $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ *δεν είναι αντισυμμετρικός.*

Παράδειγμα 2.2.9 *Θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα $A = (a_{ij})$ επί του $\mathbb{F}$ καθώς και τους πίνακες*

$$B = \tfrac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{και} \quad C = \tfrac{1}{2}(A - A^t).$$

Για τους πίνακες $B = (b_{ij})$ και $C = (c_{ij})$ ισχύει $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ και $c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$. Από τις τελευταίες σχέσεις έπεται εύκολα ότι ο πίνακας B είναι συμμετρικός και ο C αντισυμμετρικός. Καθώς είναι εύκολο να δούμε ότι $A = B + C$, συμπεραίνουμε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας είναι το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε τις ιδιότητες της πρότασης 2.2.4, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες των στοιχείων του $\mathbb{F}$, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2.3.

2. Να δείξετε ότι αν A, B, C είναι $\nu \times \mu$ πίνακες επί του $\mathbb{F}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{F}$, τότε ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

   (i) $A - (B - C) = (A - B) + C$

(ii) $\kappa(A-B) = \kappa A - \kappa B$

(iii) $(\kappa - \lambda)A = \kappa A - \lambda A$

3. Να δειχτεί ότι για κάθε $A, B, C \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ ισχύει ότι

$$2(A - B + 3C) + 3(2A + 6B - 6C) - 4(2A + 4B - 3C) = \mathbb{O}.$$

4. Έστω A, B, C τρεις τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης, τέτοιοι ώστε $A = B + C$. Αν ο B είναι συμμετρικός και ο C αντισυμμετρικός, να δειχτεί ότι $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ και $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$. (Έτσι, η ανάλυση ενός τετραγωνικού πίνακα σε άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα που περιγράφεται στο παράδειγμα 2.2.9 είναι μοναδική.)

5. Να δειχτεί ότι τα διαγώνια στοιχεία ενός αντισυμμετρικού (τετραγωνικού) πίνακα είναι ίσα με 0.

6. Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες επί του $\mathbb{F}$ και $\kappa \in \mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν οι A, B είναι συμμετρικοί, τότε οι πίνακες $A + B, \kappa A$ είναι επίσης συμμετρικοί.

   (ii) Αν οι A, B είναι αντισυμμετρικοί, τότε οι πίνακες $A + B, \kappa A$ είναι επίσης αντισυμμετρικοί.

   (iii) Αν οι A, B είναι άνω τριγωνικοί, τότε οι πίνακες $A + B, \kappa A$ είναι επίσης άνω τριγωνικοί.

   (iv) Αν οι A, B είναι κάτω τριγωνικοί, τότε οι πίνακες $A + B, \kappa A$ είναι επίσης κάτω τριγωνικοί.

2.3 Γινόμενο Πινάκων

Ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο το γινόμενο ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ με έναν $\nu \times \mu$ πίνακα επί του $\mathbb{F}$, που έχει ως αποτέλεσμα έναν άλλο $\nu \times \mu$ πίνακα. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ένα διαφορετικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες (κατάλληλων διαστάσεων) και θα μελετήσουμε ορισμένες ιδιότητες του γινομένου αυτού.

Ορισμός 2.3.1 *Έστω ν, μ, σ τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί, $A = (a_{ij})_{\nu\times\sigma}$ ένας $\nu \times \sigma$ πίνακας και $B = (b_{ij})_{\sigma\times\mu}$ ένας $\sigma \times \mu$ πίνακας. Τότε, ο $\nu \times \mu$ πίνακας $C = (c_{ij})_{\nu\times\mu}$, που είναι τέτοιος ώστε*

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i\sigma}b_{\sigma j}$$

για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $1 \le i \le \nu$ και $1 \le j \le \mu$, ονομάζεται **γινόμενο** *των A και B και συμβολίζεται με $A \cdot B$ ή, απλούστερα, με AB.*

Βλέπουμε λοιπόν ότι το γινόμενο AB δύο πινάκων A και B ορίζεται μόνον όταν το πλήθος των στηλών του A είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του B. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, το πλήθος των γραμμών του AB είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του A, ενώ το πλήθος των στηλών του AB είναι ίσο με το πλήθος των στηλών του B.

Παράδειγμα 2.3.2 *Θεωρούμε τους πίνακες* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *και* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. *Τότε, το γινόμενο* AB *ορίζεται και είναι ο* 2×3 *πίνακας* $\begin{pmatrix} 12 & 2 & -2 \\ -9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. *Για παράδειγμα, το στοιχείο* 12 *στην* $(1,1)$*-θέση του πίνακα* AB *προκύπτει ως το άθροισμα* $4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-4)$. *Εδώ, παρατηρούμε ότι το γινόμενο* BA *δεν ορίζεται.*

Παράδειγμα 2.3.3 *Θεωρούμε τον πίνακα-γραμμή* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *και τον πίνακα-στήλη* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Τότε, το γινόμενο* AB *είναι ο* 1×1 *πίνακας* (-12), *ενώ το γινόμενο* BA *είναι ο* 3×3 *πίνακας* $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. *Στην περίπτωση αυτή, βλέπουμε ότι και τα δύο γινόμενα* AB *και* BA *ορίζονται και είναι τετραγωνικοί πίνακες διαφορετικών διαστάσεων.*

Ας θεωρήσουμε ένα $\nu \times \sigma$ πίνακα $A = (a_{ij})$, ένα $\sigma \times \mu$ πίνακα $B = (b_{ij})$ και το γινόμενο $AB \in \mathbb{F}^{\nu \times \mu}$. Τότε, με βάση τον ορισμό 2.3.1, το στοιχείο του $\mathbb{F}$ που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του AB είναι το άθροισμα

$$\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{i\sigma} b_{\sigma j}$$

για κάθε ζεύγος δεικτών (i,j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Παρατηρούμε ότι το παραπάνω άθροισμα είναι ακριβώς το στοιχείο του $\mathbb{F}$ που συνιστά τον 1×1 πίνακα $r_i \cdot c_j$, όπου $r_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i\sigma} \end{pmatrix}$ είναι η i-γραμμή του πίνακα A και $c_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{\sigma j} \end{pmatrix}$ είναι η j-στήλη του πίνακα B.

Έτσι, αναφερόμενοι στο παράδειγμα 2.3.2, το στοιχείο -9 που βρίσκεται ατην $(2,1)$-θέση του γινομένου AB προκύπτει ως το γινόμενο

$$r_2 \cdot c_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

της δεύτερης γραμμής r_2 του A με την πρώτη στήλη c_1 του B.

Παράδειγμα 2.3.4 *Θεωρούμε τους* 2×2 *πίνακες* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *και* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. *Τότε, έχουμε*

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή, βλέπουμε ότι τα δύο γινόμενα AB *και* BA *ορίζονται, είναι τετραγωνικοί πίνακες διάστασης* 2, *αλλά* $AB \neq BA$.

Παράδειγμα 2.3.5 *Θεωρούμε τους* 2×2 *πίνακες* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *και* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Τότε, έχουμε* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{2\times 2}$ *και* $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}_{2\times 2}$.

Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι ο πολλαπλασιασμός των πινάκων παρουσιάζει ορισμένες βασικές διαφορές συγκρινόμενος με την πράξη του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{F}$. Παρά τις διαφορές, θα δούμε ότι ο πολλαπλασιασμός των πινάκων έχει αρκετές κοινές ιδιότητες με τον πολλαπλασιασμό των αριθμών. Προς την κατεύθυνση αυτή, δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.3.6 *Έστω* ν *ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Ο διαγώνιος* $\nu \times \nu$ *πίνακας* $I_\nu = D(1, 1, \ldots, 1)$ *λέγεται* **ταυτοτικός πίνακας** *διάστασης* ν. *Όταν η διάσταση* ν *εννοείται, γράφουμε* I *αντί* I_ν.

Έτσι, ο ταυτοτικός πίνακας I_ν είναι ο $\nu \times \nu$ πίνακας που έχει 1 κατά μήκος της διαγωνίου και 0 εκτός της διαγωνίου, δηλαδή

$$I_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ισοδύναμα, έχουμε $I_\nu = (\delta_{ij})_{\nu\times\nu}$, όπου δ_{ij} είναι το **δελτα του Kronecker**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Ας δούμε τώρα ορισμένες βασικές ιδιότητες που έχει ο πολλαπλασιασμός των πινάκων.

Θεώρημα 2.3.7 *Έστω* ν, μ, σ, τ *θετικοί ακέραιοι αριθμοί και* $A = (a_{ij})_{\nu\times\sigma}$, $A' = (a'_{ij})_{\nu\times\sigma}$ $B = (b_{ij})_{\sigma\times\mu}$, $B' = (b'_{ij})_{\sigma\times\mu}$, $C = (c_{ij})_{\mu\times\tau}$ *πίνακες επί του* $\mathbb{F}$ *με διαστάσεις όπως φαίνεται. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) $(AB)C = A(BC)$ *(προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)*

(ii) $(A + A')B = AB + A'B$ *(επιμεριστική ιδιότητα)*

(iii) $A(B + B') = AB + AB'$ *(επιμεριστική ιδιότητα)*

(iv) $I_\nu A = A = AI_\sigma$ *(ύπαρξη μονάδων)*

(v) $(\kappa A)B = \kappa(AB) = A(\kappa B)$ *για κάθε* $\kappa \in \mathbb{F}$.

Απόδειξη.
(i) Αρχικά παρατηρούμε ότι τα γινόμενα $AB, (AB)C, BC$ και $A(BC)$ ορίζονται. Για να δείξουμε ότι οι $\nu\times\tau$ πίνακες $(AB)C$ και $A(BC)$ είναι ίσοι σταθεροποιούμε ένα ζεύγος δεικτών (i, j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \tau$. Θα δείξουμε ότι τα στοιχεία που βρίσκονται στην (i, j)-θέση

των πινάκων $(AB)C$ και $A(BC)$ είναι ίσα. Με βάση τον ορισμό του γινομένου, η i-γραμμή του πίνακα $AB \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι η

$$R_i = \left(\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{s1} \quad \sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{s2} \quad \ldots \quad \sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{s\mu} \right).$$

Αν λοιπόν c_j είναι η j-στήλη του πίνακα C, τότε το στοιχείο του $\mathbb{F}$ που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του πίνακα $(AB)C$ είναι το

$$\begin{aligned} R_i \cdot c_j &= \left(\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{s1}\right)c_{1j} + \left(\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{s2}\right)c_{2j} + \cdots + \left(\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{s\mu}\right)c_{\mu j} \\ &= \sum_{s=1}^{\sigma}(a_{is}b_{s1})c_{1j} + \sum_{s=1}^{\sigma}(a_{is}b_{s2})c_{2j} + \cdots + \sum_{s=1}^{\sigma}(a_{is}b_{s\mu})c_{\mu j} \\ &= \sum_{m=1}^{\mu}\sum_{s=1}^{\sigma}(a_{is}b_{sm})c_{mj}. \end{aligned}$$

Εργαζόμαστε ανάλογα για να βρούμε το στοιχείο του $\mathbb{F}$ που βρίσκεταιστην (i,j)-θέση του πίνακα $A(BC)$. Έτσι, θεωρούμε την i-γραμμή r_i του πίνακα A και τη j-στήλη C_j του πίνακα $BC \in \mathbb{F}^{\sigma\times\tau}$. Όμως, με βάση τον ορισμό του γινομένου, έχουμε ότι

$$C_j = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{\mu} b_{1m}c_{mj} \\ \sum_{m=1}^{\mu} b_{2m}c_{mj} \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^{\mu} b_{\sigma m}c_{mj} \end{pmatrix}.$$

Άρα το στοιχείο του $\mathbb{F}$ που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του πίνακα $A(BC)$ είναι το

$$\begin{aligned} r_i \cdot C_j &= a_{i1}\left(\sum_{m=1}^{\mu} b_{1m}c_{mj}\right) + a_{i2}\left(\sum_{m=1}^{\mu} b_{2m}c_{mj}\right) + \cdots + a_{i\sigma}\left(\sum_{m=1}^{\mu} b_{\sigma m}c_{mj}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\mu} a_{i1}(b_{1m}c_{mj}) + \sum_{m=1}^{\mu} a_{i2}(b_{2m}c_{mj}) + \cdots + \sum_{m=1}^{\mu} a_{i\sigma}(b_{\sigma m}c_{mj}) \\ &= \sum_{s=1}^{\sigma}\sum_{m=1}^{\mu} a_{is}(b_{sm}c_{mj}). \end{aligned}$$

Καθώς τα διπλά αθροίσματα $\sum_{m=1}^{\mu}\sum_{s=1}^{\sigma}(a_{is}b_{sm})c_{mj}$ και $\sum_{s=1}^{\sigma}\sum_{m=1}^{\mu} a_{is}(b_{sm}c_{mj})$ είναι προφανώς ίσα, δείχτηκε το ζητούμενο.

(ii) Για να δείξουμε ότι οι $\nu\times\mu$ πίνακες $A(B+B')$ και $AB+AB'$ είναι ίσοι, σταθεροποιούμε ένα ζεύγος δεικτών (i,j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Θα δείξουμε ότι τα στοιχεία που βρίσκονται στην (i,j)-θέση των δύο αυτών πινάκων είναι ίσα. Με βάση τον ορισμό του γινομένου, το στοιχείο του $\mathbb{F}$ που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του πίνακα AB (αντίστοιχα, του πίνακα AB') είναι το $\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{sj}$ (αντίστοιχα, το $\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b'_{sj}$). Έτσι, το στοιχείο του $\mathbb{F}$ που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του αθροίσματος $AB + AB'$ είναι το άθροισμα

$$\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b'_{sj} = \sum_{s=1}^{\sigma}(a_{is}b_{sj} + a_{is}b'_{sj}) = \sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}(b_{sj} + b'_{sj}).$$

Καθώς το παραπάνω στοιχείο είναι ακριβώς αυτό που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του πίνακα $A(B + B')$, το ζητούμενο έπεται.

(iii) Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν του (ii) και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

(iv) Θα δείξουμε ότι $I_\nu A = A$. Για το σκοπό αυτό, σταθεροποιούμε ένα ζεύγος δεικτών (i,j) με $1 \le i \le \nu$ και $1 \le j \le \sigma$. Τότε, το στοιχείο που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του γινομένου $I_\nu A$ είναι το άθροισμα

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \delta_{is}a_{sj} = \delta_{i1}a_{1j} + \cdots + \delta_{i\,i-1}a_{i-1\,j} + \delta_{ii}a_{ij} + \delta_{i\,i+1}a_{i+1\,j} + \cdots + \delta_{i\sigma}a_{\sigma j},$$

όπου δ_{is} είναι το δέλτα του Kronecker. Καθώς το παραπάνω άθροισμα είναι προφανώς ίσο με

$$0a_{1j} + \cdots + 0a_{i-1\,j} + 1a_{ij} + 0a_{i+1\,j} + \cdots + 0a_{\sigma j} = a_{ij},$$

δηλαδή με το στοιχείο που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του πίνακα A, το ζητούμενο έπεται.

Η απόδειξη της ισότητας $AI_\sigma = A$ είναι παρόμοια και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

(v) Θα δείξουμε ότι $A(\kappa B) = \kappa(AB) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, αφήνοντας την απόδειξη της ισότητας $(\kappa A)B = \kappa(AB)$ ως άσκηση στον αναγνώστη. Σταθεροποιούμε λοιπόν ένα ζεύγος δεικτών (i,j) με $1 \le i \le \nu$ και $1 \le j \le \mu$. Τότε, το στοιχείο που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του γινομένου $A(\kappa B)$ είναι το άθροισμα

$$\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}(\kappa b_{sj}) = \sum_{s=1}^{\sigma} \kappa(a_{is}b_{sj}) = \kappa\sum_{s=1}^{\sigma} a_{is}b_{sj}.$$

Καθώς το παραπάνω στοιχείο είναι αυτό ακριβώς που βρίσκεται στην (i,j)-θέση του πίνακα $\kappa(AB)$, το ζητούμενο έπεται.

Ας δούμε τώρα ορισμένες άμεσες συνέπειες των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού που μόλις αποδείξαμε.

Πρόταση 2.3.8 *Έστω A ένας $\nu\times\sigma$ πίνακας και B ένας $\sigma\times\mu$ πίνακας επί του $\mathbb{F}$. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) $\mathbb{O}_{\tau\times\nu}\cdot A = \mathbb{O}_{\tau\times\sigma}$ *και* $A\cdot\mathbb{O}_{\sigma\times\tau} = \mathbb{O}_{\nu\times\tau}$ *για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό* τ.

(ii) $(-A)B = -AB = A(-B)$

(iii) $(-A)(-B) = AB$

Απόδειξη.

(i) Θα δείξουμε ότι $\mathbb{O}_{\tau\times\nu}\cdot A = \mathbb{O}_{\tau\times\sigma}$, αφήνοντας την απόδειξη της ισότητας $A\cdot\mathbb{O}_{\sigma\times\tau} = \mathbb{O}_{\nu\times\tau}$ ως άσκηση στον αναγνώστη. Για να απλοποιήσουμε κάπως το συμβολισμό, θα παραλείπουμε τους δείκτες που υποδηλώνουν τις διαστάσεις των μηδενικών πίνακων. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, έπεται ότι $\mathbb{O}A = (\mathbb{O}+\mathbb{O})A = \mathbb{O}A+\mathbb{O}A$ και άρα

$$\mathbb{O}A = \mathbb{O} + \mathbb{O}A = ((-\mathbb{O}A) + \mathbb{O}A) + \mathbb{O}A = (-\mathbb{O}A) + (\mathbb{O}A + \mathbb{O}A) = (-\mathbb{O}A) + \mathbb{O}A = \mathbb{O}.$$

(ii) Καθώς ο αντίθετος ενός πίνακα είναι το βαθμωτό γινόμενο του -1 με τον πίνακα, οι ισότητες $(-A)B = -AB = A(-B)$ έπονται από τις ισότητες του Θεωρήματος 2.3.7(v) για $\kappa = -1$.

(iii) Με βάση το (ii), έχουμε $(-A)(-B) = -(A(-B)) = -(-AB) = AB$.

Ορισμός 2.3.9 *Έστω ν, μ, a, b θετικοί ακέραιοι αριθμοί με $1 \leq a \leq \nu$ και $1 \leq b \leq \mu$. Θα συμβολίζουμε με $E^{\nu,\mu}_{ab}$ ή, απλούστερα, με E_{ab} τον $\nu \times \mu$ πίνακα που έχει 1 στην (a, b)-θέση και 0 παντού αλλού.*

Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας το δελτα του Kronecker, ο πίνακας $E_{ab} \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι αυτός που έχει στην (i, j)-θέση του το στοιχείο $\delta_{ia}\delta_{jb}$ για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$.

Παράδειγμα 2.3.10 *Αν κ είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{F}$, τότε κE_{ab} είναι ο πίνακας που έχει το κ στην (a, b)-θέση και 0 παντού αλλού. Έτσι, αν A είναι ένας $\nu \times \mu$ πίνακας επί του $\mathbb{F}$, τότε έχουμε $A = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\mu} a_{ij}E_{ij}$.*

Πρόταση 2.3.11 *Θεωρούμε τους πίνακες $E_{ab} \in \mathbb{F}^{\nu\times\sigma}$ και $E_{cd} \in \mathbb{F}^{\sigma\times\mu}$, όπου οι a, b, c, d είναι ακέραιοι αριθμοί με $1 \leq a \leq \nu$, $1 \leq b, c \leq \sigma$ και $1 \leq d \leq \mu$. Τότε, ισχύει $E_{ab}E_{cd} = \delta_{bc}E_{ad} \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, όπου δ_{bc} είναι το δέλτα του Kronecker, δηλαδή έχουμε*

$$E_{ab}E_{cd} = \begin{cases} E_{ad} & \text{αν } b = c \\ \mathbb{O}_{\nu\times\mu} & \text{αν } b \neq c \end{cases}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία του γινομένου $E_{ab}E_{cd}$ προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας τις γραμμές του E_{ab} με τις στήλες του E_{cd}. Καθώς ο E_{ab} έχει μόνο μία μη-μηδενική γραμμή και ο E_{cd} μόνο μία μη-μηδενική στήλη, βλέπουμε ότι το μοναδικό πιθανώς μη-μηδενικό στοιχείο του πίνακα $E_{ab}E_{cd}$ βρίσκεται στην (a, d)-θέση και προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την a-γραμμή r_a του E_{ab} με την d-στήλη c_d του E_{cd}. Ο πίνακας-γραμμή r_a όμως έχει 1 στην b-θέση και 0 παντού αλλού, ενώ ο πίνακας-στήλη c_d έχει 1 στην c-θέση και 0 παντού αλλού. Συνεπώς, το γινόμενο $r_a \cdot c_d$ δίνει 1 αν $b = c$ και 0 αν $b \neq d$. Τελικά, έχουμε $E_{ab}E_{cd} = E_{ad}$ αν $b = c$ και $E_{ab}E_{cd} = \mathbb{O}_{\nu\times\mu}$ αν $b \neq d$.

Πόρισμα 2.3.12 *Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ δύο τετραγωνικοί πίνακες διάστασης ν. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν οι A και B είναι διαγώνιοι, τότε ο AB είναι επίσης διαγώνιος.*

(ii) *Αν οι A και B είναι άνω τριγωνικοί, τότε ο AB είναι επίσης άνω τριγωνικός.*

(iii) *Αν οι A και B είναι κάτω τριγωνικοί, τότε ο AB είναι επίσης κάτω τριγωνικός.*

Απόδειξη.
(i) Καθώς $a_{ij} = b_{ij} = 0$ για $i \neq j$, μπορούμε να γράψουμε $A = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ii}E_{ii}$ και $B = \sum_{i=1}^{\nu} b_{ii}E_{ii}$. Συνεπως, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του γινομένου των πινάκων, έχουμε

$$AB = \left(\sum_{i=1}^{\nu} a_{ii}E_{ii}\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} b_{jj}E_{jj}\right) = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} a_{ii}E_{ii}b_{jj}E_{jj} = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} a_{ii}b_{jj}E_{ii}E_{jj}.$$

Όμως το γινόμενο $E_{ii}E_{jj}$ είναι ίσο με E_{ii} αν $i = j$ και μηδενίζεται αν $i \neq j$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $AB = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ii}b_{ii}E_{ii}$ και άρα ο πίνακας AB είναι διαγώνιος.

(ii) Καθώς $a_{ij} = b_{ij} = 0$ για $i > j$, μπορούμε να γράψουμε $A = \sum_{i \leq j} a_{ij}E_{ij}$ και $B = \sum_{s \leq t} b_{st}E_{st}$. Συνεπως, όπως και πριν, έχουμε

$$AB = \left(\sum_{i \leq j} a_{ij}E_{ij}\right)\left(\sum_{s \leq t} b_{st}E_{st}\right) = \sum_{i \leq j}\sum_{s \leq t} a_{ij}E_{ij}b_{st}E_{st} = \sum_{i \leq j}\sum_{s \leq t} a_{ij}b_{st}E_{ij}E_{st}.$$

Ο προσθετέος $a_{ij}b_{st}E_{ij}E_{st}$ στο παραπάνω διπλό άθροισμα μηδενίζεται αν $j \neq s$ και ισούται με $a_{ij}b_{st}E_{it}$ αν $j = s$. Καθώς όμως είναι πάντα $i \leq j$ και $s \leq t$, στην περίπτωση που $j = s$ θα είναι $i \leq t$. Το συμπέρασμα είναι ότι όλοι οι πιθανώς μη-μηδενικοί προσθετέοι στο παραπάνω άθροισμα είναι της μορφής $a_{ij}b_{st}E_{it}$ με $i \leq t$. Καθώς οι πίνακες αυτοί είναι άνω τριγωνικοί, ο πίνακας AB είναι επίσης άνω τριγωνικός (βλ. Άσκηση $6(iii)$ της παραγράφου 2.2).

(iii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του (ii) και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παρατήρηση Από την απόδειξη του Πορίσματος $2.3.12(i)$ παραπάνω προκύπτει και ένα επιπλέον συμπέρασμα. Πιο συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι το γινόμενο δύο διαγωνίων πινάκων είναι ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα γινόμενα των αντίστοιχων διαγωνίων στοιχείων των παραγόντων. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$D(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\nu\nu}) \cdot D(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{\nu\nu}) = D(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{\nu\nu}b_{\nu\nu}).$$

Ορισμός 2.3.13 *Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης ν. Τότε, ορίζουμε τις* **δυνάμεις** *A^{μ} για κάθε φυσικό αριθμό μ με επαγωγή, ως εξής:*

(i) $A^0 = I_{\nu}$

(ii) $A^{\mu+1} = A^{\mu}A$ *για κάθε $\mu \geq 0$.*

Όπως και στην περίπτωση των δυνάμεων στοιχείων του $\mathbb{F}$, έτσι και για τις δυνάμεις τετραγωνικών πινάκων ισχύουν μερικές βασικές ταυτότητες.

Πρόταση 2.3.14 *Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας επί του $\mathbb{F}$ και ν, μ δύο φυσικοί αριθμοί. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) $A^\nu A^\mu = A^{\nu+\mu}$

(ii) $(A^\nu)^\mu = A^{\nu\mu}$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο μ.

(i) Αν $\mu = 0$ τότε η αποδεικτέα $A^\nu A^0 = A^\nu$ είναι άμεση, αφού $A^0 = I$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $A^\nu A^\mu = A^{\nu+\mu}$ για κάποιο $\mu \geq 0$. Τότε, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού των πινάκων, έχουμε

$$A^\nu A^{\mu+1} = A^\nu(A^\mu A) = (A^\nu A^\mu)A = A^{\nu+\mu}A = A^{\nu+\mu+1}.$$

(ii) Αν $\mu = 0$ τότε η αποδεικτέα $(A^\nu)^0 = A^0$ είναι άμεση, αφού και τα δύο μέλη της είναι ίσα με τον ταυτοτικό πίνακα I. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $(A^\nu)^\mu = A^{\nu\mu}$ για κάποιο $\mu \geq 0$. Τότε, χρησιμοποιώντας το (i), έχουμε

$$(A^\nu)^{\mu+1} = (A^\nu)^\mu A^\nu = A^{\nu\mu}A^\nu = A^{\nu\mu+\nu}A = A^{\nu(\mu+1)}.$$

Αν A, B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης, τότε τα γινόμενα AB και BA δεν είναι απαραίτητα ίσα (βλέπε Παράδειγματα 2.3.4 και 2.3.5).

Ορισμός 2.3.15 *Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες διάστασης ν. Θα λέμε ότι οι πίνακες A και B* **μετατίθενται** *αν $AB = BA$.*

Παράδειγμα 2.3.16 *Για κάθε $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ μετατίθενται. Πράγματι, υπολογίζουμε*

$$AB = BA = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.3.17 *Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ και θα βρούμε όλους τους 2×2 πίνακες που μετατίθενται με αυτόν. Αν $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $a, b, c, d \in \mathbb{F}$, τότε υπολογίζουμε*

$$AB = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{pmatrix} a & a + b \\ c & c + d \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ο πίνακας B μετατίθεται με τον A, δηλαδή $AB = BA$, αν και μόνο αν $a + c = a$, $b + d = a + b$ και $d = c + d$. Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι οι ισότητες αυτές ισχύουν αν και μόνο αν $c = 0$ και $a = c$. Έτσι, οι πίνακες που μετατίθενται με τον A είναι ακριβώς αυτοί της μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ για $a, b \in \mathbb{F}$.

Υποθέτοντας ότι οι εμπλεκόμενοι πίνακες μετατίθενται μεταξύ τους, μπορούμε να γενικεύσουμε ορισμένες γνωστές ταυτότητες που ισχύουν στο $\mathbb{F}$.

Πρόταση 2.3.18 *Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης, οι οποίοι μετατίθενται. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) $AB^\nu = B^\nu A$ *για κάθε φυσικό αριθμό* ν

(ii) $(AB)^\nu = A^\nu B^\nu$ *για κάθε φυσικό αριθμό* ν

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο ν.

(i) Αν $\nu = 0$ τότε η αποδεικτέα $AB^0 = B^0 A$ έπεται άμεσα, καθώς $B^0 = I$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $AB^\nu = B^\nu A$ για κάποιο $\nu \geq 0$. Τότε, έχουμε

$$AB^{\nu+1} = A(B^\nu B) = (AB^\nu)A = (B^\nu A)B = B^\nu(AB) = B^\nu(BA) = (B^\nu B)A = B^{\nu+1}A.$$

(ii) Αν $\nu = 0$ τότε η αποδεικτέα $(AB)^0 = A^0 B^0$ είναι άμεση, καθώς και τα δύο μέλη της είναι ίσα με τον ταυτοτικό πίνακα I. Ας υποθέσουμε ότι $(AB)^\nu = A^\nu B^\nu$ για κάποιο $\nu \geq 0$. Τότε, χρησιμοποιώντας το (i), έχουμε

$$(AB)^\nu A = (A^\nu B^\nu)A = A^\nu(B^\nu A) = A^\nu(AB^\nu) = (A^\nu A)B^\nu = A^{\nu+1}B^\nu$$

και άρα

$$(AB)^{\nu+1} = (AB)^\nu(AB) = ((AB)^\nu A)B = \left(A^{\nu+1}B^\nu\right)B = A^{\nu+1}(B^\nu B) = A^{\nu+1}B^{\nu+1}.$$

Παράδειγμα 2.3.19 *Αν A, B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης, οι οποίοι μετατίθενται, τότε έχουμε $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Πράγματι, υπολογίζουμε*

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Πρόταση 2.3.20 *Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες διάστασης ν. Τότε, ο ανάστροφος του γινομένου AB είναι ίσος με το γινόμενο $B^t A^t$, δηλαδή ισχύει $(AB)^t = B^t A^t$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$, $A^t = (a'_{ij})$, $B^t = (b'_{ij})$, $(AB)^t = (c'_{ij})$ και $B^t A^t = (d_{ij})$. Για να δείξουμε ότι $(AB)^t = B^t A^t$, θα πρέπει να δείξουμε ότι $c'_{ij} = d_{ij}$ για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j). Ας σταθεροποιήσουμε λοιπόν ένα ζεύγος δεικτών (i, j) με $1 \leq i, j \leq \nu$. Με βάση τους ορισμούς, έχουμε

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{s=1}^{\nu} a_{js} b_{si} \quad \text{και} \quad d_{ij} = \sum_{s=1}^{\nu} b'_{is} a'_{sj} = \sum_{s=1}^{\nu} b_{si} a_{js}.$$

Το ζητούμενο έπεται, καθώς $a_{js} b_{si} = b_{si} a_{js} \in \mathbb{F}$ για κάθε $s = 1, \ldots, \nu$.

Παρατήρηση Στο σημείο αυτό, θα μπορούσαν να τεθούν ορισμένα ερωτήματα: Γιατί ορίστηκε με τον τρόπο που ορίστηκε ο πολλαπλασιασμός των πινάκων; Πώς δικαιολογείται η απαίτηση σχετικά με την ισότητα του πλήθους των στηλών του πρώτου παράγοντα με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου; (Και αυτά σε αντιδιαστολή με τον ορισμό του αθροίσματος και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, οι οποίοι είναι απόλυτα φυσιολογικοί.) Η απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα θα δοθεί έμμεσα σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου αυτού. Θα γίνει εκεί σαφές ότι αυτός ο τρόπος πολλαπλασιασμού είναι χρήσιμος για τις εφαρμογές της θεωρίας των πινάκων στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων και τη μελέτη των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχτούν οι ιδιότητες της Πρότασης 2.3.8, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του γινομένου των πινάκων.

2. Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν οι πίνακες $AB \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ και $BA \in \mathbb{F}^{3\times 3}$.

3. Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης. Να δειχτεί ότι οι A, B μετατίθενται αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

4. Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης που μετατίθενται μεταξύ τους. Να δειχτεί ότι:

   (i) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

   (ii) Αν οι A, B είναι συμμετρικοί, τότε ο πίνακας AB είναι επίσης συμμετρικός.

   (iii) Αν οι A, B είναι αντισυμμετρικοί, τότε ο πίνακας AB είναι συμμετρικός.

5. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Να δειχτεί ότι $A^\nu = \begin{pmatrix} 1 - 2\nu & 4\nu \\ -\nu & 2\nu + 1 \end{pmatrix}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

6. Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης. Να δειχτεί ότι $(AB)^\nu = A(BA)^{\nu-1}B$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν.

7. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας και ν ένας φυσικός αριθμός. Να δειχτεί ότι ο ανάστροφος του A^ν είναι η ν-οστή δύναμη του αναστρόφου A^t, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση $(A^\nu)^t = (A^t)^\nu$.

8. Θεωρούμε τους πίνακες $E_{11}, E_{12} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ με $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (i) Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πίνακες A επί του $\mathbb{F}$ που μετατίθενται με τον E_{11}.

   (ii) Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πίνακες A επί του $\mathbb{F}$ που μετατίθενται και με τον E_{11} και με τον E_{12}.

2.4 Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Γνωρίζουμε ότι κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $\kappa \in \mathbb{F}$ έχει ένα (μοναδικό) αντίστροφο $\kappa^{-1} \in \mathbb{F}$. Θα εξετάσουμε τώρα αν αυτή η ιδιότητα ισχύει στους πίνακες.

Ορισμός 2.4.1 *Ένας τετραγωνικός πίνακας A διάστασης ν λέγεται* **αντιστρέψιμος** *αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας B διάστασης ν, τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I_\nu$. Ένας τέτοιος πίνακας B λέγεται* **αντίστροφος** *του A.*

Πρόταση 2.4.2 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε, ο A έχει ένα μοναδικό αντίστροφο, τον οποίο θα συμβολίζουμε με A^{-1}.*

Απόδειξη. Έστω ότι για τους πίνακες $B, C \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ισχύει $AB = BA = I_\nu$ και $AC = CA = I_\nu$. Τότε, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού των πινάκων, έχουμε

$$B = BI_\nu = B(AC) = (BA)C = I_\nu C = C.$$

Παράδειγμα 2.4.3 *Ο 2×2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Πράγματι, υπολογίζουμε*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.4.4 *Ο 2×2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, καθώς η πρώτη στήλη του A αποτελείται από μηδενικά, συμπεραίνουμε ότι για κάθε 2×2 πίνακα B το γινόμενο BA έχει 0 στην $(1,1)$-θέση και άρα $BA \neq I_2$.*

Παράδειγμα 2.4.5 *Ας εξετάσουμε αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Θέλουμε να δούμε αν υπάρχουν στοιχεία $a, b, c, d \in \mathbb{F}$, τέτοια ώστε για τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ να ισχύει $AB = BA = I_2$. Καθώς*

$$AB = \begin{pmatrix} 2a + 3c & 2b + 3d \\ 5a + 8c & 5b + 8d \end{pmatrix},$$

η σχέση $AB = I_2$ ισοδυναμεί με τα συστήματα των εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 3c = 1 \\ 5a + 8c = 0 \end{array} \right\} \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2b + 3d = 0 \\ 5b + 8d = 1 \end{array} \right\}.$$

Τα συστήματα αυτά λυνονται εύκολα και δίνουν $a = 8$, $c = -5$, $b = -3$ και $d = 2$. Έτσι, για τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ ισχύει $AB = I_2$. Υπολογίζοντας το γινόμενο, βλέπουμε ότι ισχύει και η σχέση $BA = I_2$. Έτσι, ο A είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα 2.4.6 *Ας εξετάσουμε αν ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *είναι αντιστρέψιμος. Θέλουμε να δούμε αν υπάρχουν στοιχεία* $a, b, c, d \in \mathbb{F}$*, τέτοια ώστε για τον πίνακα* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *να ισχύει* $AB = BA = I_2$*. Καθώς*

$$AB = \begin{pmatrix} 2a + 4c & 2b + 4d \\ 3a + 6c & 3b + 6d \end{pmatrix},$$

η σχέση $AB = I_2$ *ισοδυναμεί με τα συστήματα των εξισώσεων*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 4c = 1 \\ 3a + 6c = 0 \end{array} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{array}{l} 2b + 4d = 0 \\ 3b + 6d = 1 \end{array} \right\}.$$

Τα συστήματα αυτά δεν έχουν λύση. Για παράδειγμα, η εξίσωση $3a + 6c = 0$ *δίνει* $a = -2c$ *και έτσι η εξίσωση* $2a + 4c = 1$ *γίνεται* $-4c + 4c = 1$*, δηλαδή* $0 = 1$*. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει* 2×2 *πίνακας* B *με* $AB = I_2$ *και άρα ο πίνακας* A *δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Από τα τελευταία παραδείγματα βλέπουμε ότι ο έλεγχος της αντιστρεψιμότητας ενός τετραγωνικού πίνακα και η εύρεση του αντιστρόφου, αν υπάρχει, μπορεί να γίνει επιλύοντας συστημάτα γραμμικών εξισώσεων. Στη συνέχεια του βιβλίου, θα δώσουμε κριτήρια για την αντιστρεψιμότητα ενός τετραγωνικού πίνακα και θα περιγράψουμε μεθόδους για τον υπολογισμό του αντιστρόφου. Θα δουμε τώρα ότι στην ειδική περίπτωση των διαγωνίων πινάκων τα προβλήματα αυτά επιδέχονται μια πολύ απλή λύση.

Πρόταση 2.4.7 *Έστω* ν *ένας θετικός ακέραιος αριθμός και* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ *στοιχεία του* $\mathbb{F}$*. Τότε, ο διαγώνιος πίνακας* $A = D(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* $a_i \neq 0$ *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, \nu$*. Επιπλέον, στην περίπτωση που ο* A *είναι αντιστρέψιμος, έχουμε* $A^{-1} = D(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_\nu^{-1})$*.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $a_i \neq 0$ για κάθε δείκτη $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Τότε, ορίζεται ο πίνακας $B = D(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_\nu^{-1})$ και έχουμε

$$AB = BA = D(1, 1, \ldots, 1) = I_\nu$$

(βλέπε την Παρατήρηση που ακολουθεί το Πόρισμα 2.3.12). Συνεπώς, ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B = D(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_\nu^{-1})$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει κάποιος δείκτης $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ με $a_i = 0$. Για κάθε πίνακα $B \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ τα στοιχεία της i-γραμμής του γινομένου AB προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας την i-γραμμή του πίνακα A με την αντίστοιχη στήλη του πίνακα B. Καθώς η i-γραμμή του διαγώνιου πίνακα A αποτελείται από μηδενικά, συμπεραίνουμε ότι η i-γραμμή του γινομένου AB αποτελείται επίσης από μηδενικά. Ειδικότερα, έχουμε $AB \neq I_\nu$ και έτσι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ας δούμε στη συνέχεια ορισμένες βασικές ιδιότητες των αντιστρέψιμων πινάκων.

Πρόταση 2.4.8 *Έστω* $A, B \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ *δύο αντιστρέψιμοι πίνακες και* κ *ένα μη-μηδενικό στοιχείο του* $\mathbb{F}$*. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Ο πίνακας* A^{-1} *είναι αντιστρέψιμος και* $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) *Ο πίνακας* AB *είναι αντιστρέψιμος και* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(iii) *Ο πίνακας* κA *είναι αντιστρέψιμος και* $(\kappa A)^{-1} = \kappa^{-1}A^{-1}$.

(iv) *Ο ανάστροφος πίνακας* A^t *είναι αντιστρέψιμος και* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Απόδειξη.
(i) Αυτό είναι φανερό, καθώς $AA^{-1} = A^{-1}A = I_\nu$.

(ii) Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, έχουμε

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_\nu)A^{-1} = AA^{-1} = I_\nu$$

και ανάλογα $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_\nu$.

(iii) Εδώ είναι

$$(\kappa A)(\kappa^{-1}A^{-1}) = (\kappa^{-1}(\kappa A))A^{-1} = ((\kappa^{-1}\kappa)A)A^{-1} = (1A)A^{-1} = AA^{-1} = I_\nu$$

και ανάλογα $(\kappa^{-1}A^{-1})(\kappa A) = I_\nu$.

(iv) Με βάση την Πρόταση 2.3.20, υπολογίζουμε

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_\nu^t = I_\nu$$

και ανάλογα $(A^{-1})^t A^t = I_\nu$.

Έχοντας ορίσει τις δυνάμεις ενός τετραγωνικού πίνακα με εκθέτες φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να ορίσουμε για τους αντιστρέψιμους πίνακες δυνάμεις με ακεραίους εκθέτες, σε αναλογία με τον αντίστοιχο ορισμό για τα μη-μηδενικά στοιχεία του $\mathbb{F}$.

Ορισμός 2.4.9 *Έστω* A *ένας τετραγωνικός πίνακας επί του* $\mathbb{F}$, *ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Τότε, για κάθε ακέραιο αριθμό* ν *ορίζουμε*

$$A^\nu = \begin{cases} A^\nu & \text{αν } \nu \geq 0 \\ (A^{-1})^{-\nu} & \text{αν } \nu < 0 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν οι επόμενοι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και, αν υπάρχουν, να βρείτε τους αντιστρόφους τους:

   (i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης ν. Να δειχτεί ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος αν ικανοποιείται μία από τις επόμενες δύο συνθήκες:

   (i) Υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός μ και ένας $\nu \times \mu$ πίνακας B με $B \neq \mathbb{O}_{\nu\times\mu}$, τέτοιος ώστε $AB = \mathbb{O}_{\nu\times\mu}$.

   (ii) Υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός σ και ένας $\sigma \times \nu$ πίνακας C με $C \neq \mathbb{O}_{\sigma\times\nu}$, τέτοιος ώστε $CA = \mathbb{O}_{\sigma\times\nu}$.

3. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν ο A είναι συμμετρικός, τότε ο A^{-1} είναι επίσης συμμετρικός.

   (ii) Αν ο A είναι αντισυμμετρικός, τότε ο A^{-1} είναι επίσης αντισυμμετρικός.

4. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, και ν, μ δύο ακέραιοι αριθμοί. Να δειχτεί ότι:

   (i) $A^\nu A^\mu = A^{\nu+\mu}$

   (ii) $(A^\nu)^\mu = A^{\nu\mu}$

5. Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης, οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι και μετατίθενται μεταξύ τους. Να δειχτεί ότι:

   (i) $AB^\nu = B^\nu A$ για κάθε ακέραιο αριθμό ν

   (ii) $(AB)^\nu = A^\nu B^\nu$ για κάθε ακέραιο αριθμό ν

Κεφάλαιο 3

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Στο Κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των πινάκων για να αναπτύξουμε συστηματικές μεθόδους για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, θα περιγράψουμε δύο τέτοιες μεθόδους: η πρώτη βασίζεται στη θεωρία των γραμμοπράξεων και η δεύτερη στη θεωρία των οριζουσών.

3.1 Γραμμικά Συστήματα

Ας δούμε αρχικά μερικούς βασικούς ορισμούς.

Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Ένα **γραμμικό σύστημα** ν εξισώσεων με μ αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ αποτελείται από ν εξισώσεις

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\mu}x_\mu = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\mu}x_\mu = b_2\\
&\cdots\\
&a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu\mu}x_\mu = b_\nu
\end{aligned}$$

για κατάλληλα στοιχεία $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$.

Τα στοιχεία a_{ij} ονομάζονται **συντελεστές** του συστήματος, ενώ ο $\nu \times \mu$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **πίνακας των συντελεστών** του συστήματος ή, απλούστερα πίνακας του συστήματος. Τα στοιχεία $b_1, b_2, \dots, b_\nu$ ονομάζονται **σταθεροί όροι** του συστήματος, ενώ ο πίνακας-στήλη

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\nu \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **στήλη των σταθερών όρων** του συστήματος. Παραθέτοντας τη στήλη των σταθερών όρων δίπλα από τον πίνακα των συντελεστών προκύπτει ο $\nu \times (\mu+1)$ πίνακας

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} & b_\nu \end{array}\right)$$

ο οποίος ονομάζεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος. Έτσι, κάθε γραμμικό σύστημα καθορίζεται από τον επαυξημένο πίνακά του.

Μια **λύση** του συστήματος είναι ένα στοιχείο

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\mu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\mu\times 1},$$

που είναι τέτοιο ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned} &a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1\mu}\xi_\mu = b_1 \\ &a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2\mu}\xi_\mu = b_2 \\ &\dots \\ &a_{\nu 1}\xi_1 + a_{\nu 2}\xi_2 + \cdots + a_{\nu\mu}\xi_\mu = b_\nu \end{aligned}$$

Το σύστημα λέγεται **συμβιβαστό** αν έχει τουλάχιστον μία λύση και **ασυμβίβαστο** αν δεν έχει καμία λύση.

Αν όλοι οι σταθεροί όροι είναι ίσοι με 0, τότε το σύστημα ονομάζεται **ομογενές**. Ένα ομογενές σύστημα είναι πάντα συμβιβαστό, αφού έχει τη μηδενική λύση $\xi = \mathbb{O}_{\mu\times 1}$. Η μηδενική λύση ενός ομογενούς συστήματος ονομάζεται **τετριμμένη λύση**.

Παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο $\xi \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ είναι λύση του συστήματος αν ισχύει

$$A \cdot \xi = b \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}.$$

Έτσι, το γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών A και στήλη σταθερών όρων b μπορεί να γραφεί ως μια εξίσωση πινάκων

$$A \cdot x = b,$$

όπου η ζητούμενη λύση x είναι ένας $\mu \times 1$ πίνακας. Αυτή ακριβώς η θεώρηση θα μας επιτρέψει να εφαρμόσουμε τον αλγεβρικό λογισμό των πινάκων για την επίλυση του γραμμικού συστήματος.

Για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε έναν αντιστρέψιμο $\nu \times \nu$ πίνακα E. Τότε, για κάθε $\xi \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ είναι

$$A\xi = b \Longleftrightarrow (EA)\xi = Eb.$$

Πράγματι, αν $A\xi = b$ τότε

$$(EA)\xi = E(A\xi) = Eb.$$

Αντίστροφα, αν $(EA)\xi = Eb$ τότε

$$A\xi = I_\nu A\xi = E^{-1}EA\xi = E^{-1}Eb = I_\nu b = b.$$

Δύο γραμμικά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** αν έχουν ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1.1 *Ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους με επαυξημένο πίνακα $(A|b)$ είναι ισοδύναμο με το γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους με επαυξημένο πίνακα $(EA|Eb)$ για κάθε αντιστρέψιμο $\nu \times \nu$ πίνακα E.*

Ο στόχος μας στη συνέχεια είναι να δούμε πώς μπορεί να επιλεγεί ο αντιστρέψιμος πίνακας E, έτσι ώστε το γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα $(EA|Eb)$ να είναι απλούστερο του αρχικού.

3.2 Γραμμοϊσοδυναμία Πινάκων

Θα δούμε στη συνέχεια έναν αλγόριθμο, που είναι γνωστός ως μέθοδος απαλοιφής του Gauss, ο οποίος μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε τον επαυξημένο πίνακα ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων, λαμβάνοντας ένα ισοδύναμο σύστημα που λύνεται πιο εύκολα από το αρχικό. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στον ορισμό που ακολουθεί.

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $\nu \times \mu$ πίνακα A με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ οι γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ είναι στοιχεία του συνόλου $\mathbb{F}^{1\times\mu}$, στο οποίο έχουμε ορίσει άθροισμα και βαθμωτό πολλαπλασιασμό με στοιχεία του $\mathbb{F}$. Έτσι, μπορούμε να προσθέτουμε δύο γραμμές του A ή να πολλαπλασιάζουμε μια γραμμή του με κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$.

Ορισμός 3.2.1 *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $\nu \times \mu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Οι παρακάτω μετασχηματισμοί του πίνακα A ονομάζονται* **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί** *των γραμμών του A.*

(i) Θεωρούμε ένα δείκτη $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$ και πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία της i-γραμμής r_i του A με το λ (αφήνοντας όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του A αμετάβλητα). Έτσι, προκύπτει ένας πίνακας $A_1 \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, του οποίου η i-γραμμή είναι ίση με λr_i. Ο μετασχηματισμός που οδηγεί από τον A στον A_1 θα λέγεται **τύπου I** *και θα συμβολίζεται γράφοντας $r_i \mapsto \lambda r_i$.*

(ii) Θεωρούμε δύο διακεκριμένους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$ και προσθέτουμε στην i-γραμμή r_i του A την j-γραμμή του r_j πολλαπλασιασμένη με λ (αφήνοντας όλες τις άλλες γραμμές του A αμετάβλητες). Έτσι, προκύπτει ένας πίνακας $A_2 \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, του οποίου η i-γραμμή είναι ίση με $r_i + \lambda r_j$. Ο μετασχηματισμός που οδηγεί από τον A στον A_2 θα λέγεται **τύπου II** *και θα συμβολίζεται γράφοντας $r_i \mapsto r_i + \lambda r_j$.*

(iii) Θεωρούμε δύο διακεκριμένους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και εναλλάσσουμε την i-γραμμή r_i του A με την j-γραμμή του r_j (αφήνοντας όλες τις άλλες γραμμές του A αμετάβλητες). Έτσι, προκύπτει ένας πίνακας $A_3 \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, του οποίου η i-γραμμή είναι ίση με r_j και η j-γραμμή ίση με r_i. Ο μετασχηματισμός που οδηγεί από τον A στον A_3 θα λέγεται **τύπου III** *και θα συμβολίζεται γράφοντας $r_i \leftrightarrow r_j$.*

Παράδειγμα 3.2.2 *Ας θεωρήσουμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Τότε, εφαρμόζοντας στον A τον μετασχηματισμό $r_1 \mapsto 2r_1$, προκύπτει ο πίνακας

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $r_2 \mapsto r_2 - r_3$, προκύπτει ο πίνακας

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -8 & 1 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & -7 & -2 \end{pmatrix},$$

ενώ εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $r_1 \leftrightarrow r_3$, προκύπτει ο πίνακας

$$A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 3.2.3 *Έστω A, B δύο $\nu \times \mu$ πίνακες επί του $\mathbb{F}$. Θα λέμε ότι ο A είναι* **γραμμοϊσοδύναμος με τον** *B αν ο B μπορεί να προκύψει από τον A εφαρμόζοντας μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.*

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, είναι σαφές ότι κάθε πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον εαυτό του. Επίσης, αν A, B, C είναι τρεις $\nu \times \mu$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B και ο B γραμμοϊσοδύναμος με τον C, τότε ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον C.

Παράδειγμα 3.2.4 *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

και εφαρμόζουμε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, όπως φαίνεται παρακάτω

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 \mapsto -2r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ -4 & -2 & -16 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 19 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ -4 & -2 & -16 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 19 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ -4 & -2 & -16 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Στον ίδιο πίνακα A μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, όπως φαίνεται παρακάτω

$$A \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 14 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -33 & 17 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 \mapsto -r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 33 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 12 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 33 & -17 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -87 & 46 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 33 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -87 & 46 \\ 0 & 1 & 0 & -94 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 33 & -17 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι επίσης γραμμοϊσοδύναμος με τους πίνακες

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 33 & -17 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -87 & 46 \\ 0 & 1 & 0 & -94 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 33 & -17 \end{pmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι υπάρχουν πολλοί (άπειροι το πλήθος) πίνακες με τους οποίους ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος. Αν και ο πίνακας B δεν φαίνεται να είναι κατά καμία έννοια απλούστερος του A, βλέπουμε ότι οι πίνακες C και D έχουν περισσότερα μηδενικά από τον A και δείχνουν κάπως απλούστεροι από αυτόν.

Πριν περιγράψουμε τη μέθοδο που θα μας επιτρέψει να βρούμε έναν απλό πίνακα με τον οποίο ένας δεδομένος πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος, θα πρέπει να ορίσουμε ποιοι ακριβώς είναι οι απλοί πίνακες τους οποίους αναζητούμε.

Ορισμός 3.2.5 *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $\nu \times \mu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ και $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ ένας δείκτης, τέτοιος ώστε η γραμμή r_i δεν είναι μηδενική (δηλαδή, $r_i \neq \mathbb{O} \in \mathbb{F}^{1\times\mu}$). Τότε, το* **ηγετικό στοιχείο** *της γραμμής r_i είναι το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της, δηλαδή εκείνο το $a_{ij} \in \mathbb{F}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $a_{ij} \neq 0$ και $a_{ik} = 0$ για κάθε $k < j$.*

Ορισμός 3.2.6 *Ένας $\nu \times \mu$ πίνακας A με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ λέγεται* **κλιμακωτός** *αν ισχύουν τα εξής:*

(i) *Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής του A είναι το $1 \in \mathbb{F}$.*

(ii) *Αν μια γραμμή του A είναι μηδενική τότε κάθε επομένη γραμμή του A είναι επίσης μηδενική.*

(iii) *Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού στοιχείου κάθε προηγουμένης γραμμής.*

Ορισμός 3.2.7 *Ένας κλιμακωτός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ λέγεται* **ανηγμένος κλιμακωτός** *αν το ηγετικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία βρίσκεται.*

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, παρατηρούμε ότι ο μηδενικός πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Παράδειγμα 3.2.8 *Αναφερόμενοι στο Παράδειγμα 3.2.4, ο πίνακας B δεν είναι κλιμακωτός, ο πίνακας C είναι κλιμακωτός, αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός, ενώ ο πίνακας D είναι ανηγμένος κλιμακωτός.*

Παράδειγμα 3.2.9 *Ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι κλιμακωτός, αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός, ενώ ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Γενικεύοντας τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στο δεύτερο μέρος του Παραδείγματος 3.2.4, τα επόμενα βασικά αποτελέσματα περιγράφουν μια μέθοδο αναγωγής ενός πίνακα A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως **μέθοδος απαλοιφής του Gauss**.

Πρόταση 3.2.10 *Κάθε πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με κάποιον κλιμακωτό πίνακα.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο μηδενικός πίνακας, ως κλιμακωτός, είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα. Η απόδειξη στη γενική περίπτωση θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος ν των γραμμών του A.

Έστω ότι $\nu = 1$, οπότε ο A είναι ένας πίνακας-γραμμή. Αν ο πίνακας A είναι μηδενικός, τότε το ζητούμενο ισχύει, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω. Αν ο A δεν είναι μηδενικός, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών τύπου Ι και να λάβουμε έναν πίνακα-γραμμή, με τον οποίον ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος και έχει ως ηγετικό στοιχείο το $1 \in \mathbb{F}$. Καθώς ο τελευταίος πίνακας είναι προφανώς κλιμακωτός, το ζητούμενο δείχτηκε.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\nu > 1$ και κάθε $\nu' \times \mu'$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα αν $\nu' < \nu$. Θεωρούμε ένα $\nu \times \mu$ πίνακα $A = (a_{ij})$. Αν ο πίνακας A είναι μηδενικός, τότε το ζητούμενο ισχύει, όπως είπαμε παραπάνω. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο A δεν είναι μηδενικός. Τότε, τουλάχιστον μία απο τις στήλες $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ του A δεν είναι μηδενική. Έστω ότι η c_{j_0} είναι η πρώτη μη-μηδενική στήλη του A. Έτσι, $c_j = \mathbb{O} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ για κάθε $j < j_0$ και $c_{j_0} \neq \mathbb{O} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών τύπου III, μπορούμε να αναχθούμε στην περίπτωση όπου $a_{1j_0} \neq 0$. Εφαρμόζοντας τώρα ένα μετασχηματισμό τύπου I στην πρώτη γραμμή, αναγόμαστε στην περίπτωση που $a_{1j_0} = 1$. Αφαιρώντας στη συνέχεια κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής από τίς άλλες γραμμές (εφαρμόζοντας δηλαδή κατάλληλους μετασχηματισμούς τύπου II), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_{ij_0} = 0$ για κάθε $i > 1$. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν πίνακα A_1 του οποίου οι πρώτες $j_0 - 1$ στήλες είναι μηδενικές, ενώ η j_0-στήλη έχει 1 στην πρώτη θέση και 0 παντού αλλού. Έτσι, ο πίνακας A_1 είναι της μορφής

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & b_{1\,j_0+1} & \dots & b_{1\mu} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_{2\,j_0+1} & \dots & b_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_{\nu\,j_0+1} & \dots & b_{\nu\mu} \end{pmatrix},$$

για κατάλληλα $b_{ij} \in \mathbb{F}$. Τώρα θεωρούμε τον $(\nu - 1) \times (\mu - j_0)$ πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} b_{2\,j_0+1} & \dots & b_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\nu\,j_0+1} & \dots & b_{\nu\mu} \end{pmatrix}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση, γνωρίζουμε ότι ο πίνακας B είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό $(\nu - 1) \times (\mu - j_0)$ πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} c_{2\,j_0+1} & \dots & c_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{\nu\,j_0+1} & \dots & c_{\nu\mu} \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που οδηγούν από τον πίνακα B στον C στις αντίστοιχες γραμμές του πίνακα A_1 δεν μεταβάλλονται οι πρώτες j_0 στήλες του. Συνεπώς, ο A_1 είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & b_{1\,j_0+1} & \dots & b_{1\mu} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2\,j_0+1} & \dots & c_{2\mu} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{\nu\,j_0+1} & \dots & c_{\nu\mu} \end{pmatrix}.$$

Καθώς ο πίνακας C είναι κλιμακωτός, είναι φανερό ότι ο A_2 είναι επίσης κλιμακωτός. Έτσι, ο αρχικός πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον κλιμακωτό πίνακα A_2 και άρα δείχτηκε το ζητούμενο.

Πρόταση 3.2.11 *Κάθε κλιμακωτός πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με κάποιον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.*

Απόδειξη. Καθώς το ζητούμενο είναι φανερό αν ο πίνακας A είναι μηδενικός, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A δεν είναι μηδενικός. Έστω ότι οι πρώτες κ γραμμές του A είναι μη-μηδενικές, ενώ οι τελευταίες $\nu - \kappa$ είναι μηδενικές. Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, \kappa\}$ θεωρούμε την i-γραμμή r_i του A και υποθέτουμε ότι το ηγετικό στοιχείο της βρίσκεται στην j_i-στήλη. Από την υπόθεσή μας, είναι $j_1 < j_2 < \ldots < j_\kappa$ και άρα ο A είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{1\,j_1+1} & \ldots & a_{1\,j_2-1} & a_{1\,j_2} & a_{1\,j_2+1} & \ldots & a_{1\,j_3-1} & a_{1\,j_3} & a_{1\,j_3+1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{2\,j_2+1} & \ldots & a_{2\,j_3-1} & a_{2\,j_3} & a_{2\,j_3+1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{3\,j_3+1} & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Έτσι, αφαιρώντας ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο της δεύτερης γραμμής από την πρώτη (μετασχηματισμός τύπου ΙΙ), βλέπουμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν πίνακα A_1 της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{1\,j_1+1} & \ldots & a_{1\,j_2-1} & 0 & a'_{1\,j_2+1} & \ldots & a'_{1\,j_3-1} & a'_{1\,j_3} & a'_{1\,j_3+1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{2\,j_2+1} & \ldots & a_{2\,j_3-1} & a_{2\,j_3} & a_{2\,j_3+1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{3\,j_3+1} & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

για κάποια $a'_{1j} \in \mathbb{F}$, $j > j_2$. Αφαιρώντας στη συνέχεια κατάλληλα πολλαπλάσια της τρίτης γραμμής από την πρώτη και τη δεύτερη (εφαρμόζοντας δηλαδή κατάλληλους μετασχηματισμός τύπου ΙΙ), βλέπουμε ότι ο A_1 (και άρα ο A) είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν πίνακα A_2 της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{1\,j_1+1} & \ldots & a_{1\,j_2-1} & 0 & a'_{1\,j_2+1} & \ldots & a'_{1\,j_3-1} & 0 & a''_{1\,j_3+1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{2\,j_2+1} & \ldots & a_{2\,j_3-1} & 0 & a''_{2\,j_3+1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{3\,j_3+1} & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

για κάποια $a''_{1j}, a''_{2j} \in \mathbb{F}$, $j > j_3$. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό, βλέπουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε κατάλληλους στοιχειώδεις ματασχηματισμούς γραμμών τύπου ΙΙ και να οδηγηθούμε σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $A_{\kappa-1}$ με τον οποίο ο αρχικός πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος.

Θεώρημα 3.2.12 *Κάθε πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με κάποιον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.*

Παράδειγμα 3.2.13 *Ας θεωρήσουμε τον 3×5 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 26 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας στον A τους μετασχηματισμούς που περιγράφονται στην Πρόταση 3.2.10, παίρνουμε *διαδοχικά τους παρακάτω πίνακες*

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \mapsto \frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -34 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 \mapsto \frac{1}{17} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον κλιμακωτό πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια στον πίνακα B τους μετασχηματισμούς που περιγράφονται στην Πρόταση 3.2.11, παίρνουμε διαδοχικά τους παρακάτω πίνακες

$$B \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & 12 & -22 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 12r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.2.14 *Ας θεωρήσουμε τώρα τον 4×4 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 4 & 9 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & 24 \\ 5 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε στον A τους μετασχηματισμούς που περιγράφονται στην Πρόταση 3.2.10 και *παίρνουμε διαδοχικά τους παρακάτω πίνακες*

$$A \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 9 & 18 \\ 0 & -6 & 2 & 24 \\ 5 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \mapsto r_4 - 5r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 9 & 18 \\ 0 & -6 & 2 & 24 \\ 0 & -6 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \mapsto -\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & 2 & 24 \\ 0 & -6 & 10 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 + 6r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \\ 0 & -6 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_4 \mapsto r_4 + 6r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto -\frac{1}{16}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_4 \mapsto r_4 + 8r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον κλιμακωτό πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια στον πίνακα B τους μετασχηματισμούς που περιγράφονται στην Πρόταση 3.2.11, παίρνουμε διαδοχικά τους παρακάτω πίνακες

$$B \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 7r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 31/4 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Προκειμένου να συνδέσουμε την έννοια της γραμμοϊσοδυναμίας με τον αλγεβρικό λογισμό των πινάκων που αναπτύξαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.2.15 *Ένας $\nu \times \nu$ πίνακας ονομάζεται* **στοιχειώδης** *αν μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών στον ταυτοτικό $\nu \times \nu$ πίνακα I_ν.*

Έτσι, για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$, έχουμε τον στοιχειώδη πίνακα $D(i, \lambda) \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$, ο οποίος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την i-γραμμή του I_ν με λ. Με άλλα λόγια, ο πίνακας $D(i, \lambda)$ είναι ο διαγώνιος πίνακας με 1 σε όλα τα στοιχεία της διαγωνίου εκτός αυτού που βρίσκεται στην (i, i)-θέση, το οποίο είναι ίσο με λ. Θα λέμε ότι ο $D(i, \lambda)$ είναι ένας στοιχειώδης πίνακας τύπου I. Για παράδειγμα, έχουμε τους 2×2 πίνακες

$$D(1,4) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad D(2,7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, για κάθε δύο διακεκριμένους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ θεωρούμε τον στοιχειώδη πίνακα $M(i, j, \lambda) \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$, ο οποίος προκύπτει προσθέτοντας στην i-γραμμή του I_ν την j-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με λ. Έτσι, ο πίνακας $M(i, j, \lambda)$ έχει 1 κατά μήκος της διαγωνίου, λ στην (i, j)-θέση και 0 παντού αλλού. Θα λέμε ότι ο $M(i, j, \lambda)$ είναι ένας στοιχειώδης πίνακας τύπου II. Για παράδειγμα, έχουμε τους 3×3 πίνακες

$$M(1,2,9) = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M(3,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, για κάθε δύο διακεκριμένους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ θεωρούμε τον στοιχειώδη πίνακα $E(i, j) \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$, ο οποίος προκύπτει εναλλάσσοντας την i-γραμμή του I_ν με την j-γραμμή του. Θα λέμε ότι ο $E(i, j)$ είναι ένας στοιχειώδης πίνακας τύπου III. Για παράδειγμα, έχουμε τους 3×3 πίνακες

$$E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad E(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 3.2.16 *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $\nu \times \mu$ πίνακας επί του $\mathbb{F}$.*

(i) *Για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$, ο πίνακας $D(i, \lambda) \cdot A$ είναι αυτός που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την i-γραμμή του A με λ.*

(ii) *Για κάθε δύο διακεκριμένους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$, ο πίνακας $M(i, j, \lambda) \cdot A$ είναι αυτός που προκύπτει προσθέτοντας στην i-γραμμή του A την j-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με λ.*

(iii) *Για κάθε δύο διακεκριμένους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ ο πίνακας $E(i, j) \cdot A$ είναι αυτός που προκύπτει εναλλάσσοντας την i-γραμμή του A με την j-γραμμή του.*

Απόδειξη.

(i) Χρησιμοποιώντας το δέλτα του Kronecker, παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος δεικτών $s, t \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ το (s, t)-στοιχείο του πίνακα $D(i, \lambda)$ είναι ίσο με δ_{st} αν $s \neq i$ και με $\lambda\delta_{it}$ αν

$s = i$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ζεύγος δεικτών (s, l) με $s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και $l \in \{1, 2, \ldots, \mu\}$. Αν $s \neq i$, τότε το στοιχείο που βρίσκεται στην (s, l)-θέση του πίνακα $D(i, \lambda) \cdot A$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\nu} \delta_{st} a_{tl} = a_{sl}.$$

Επίσης, το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, l)-θέση του πίνακα $D(i, \lambda) \cdot A$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\nu} \lambda \delta_{it} a_{tl} = \lambda a_{il}.$$

Συνεπώς, ο πίνακας $D(i, \lambda) \cdot A$ είναι αυτός που προκύπτει από τον A πολλαπλασιάζοντας την i-γραμμή του με λ.

(ii) Για κάθε ζεύγος δεικτών $s, t \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ το (s, t)-στοιχείο του πίνακα $M(i, j, \lambda)$ είναι ίσο με δ_{st} αν $s \neq i$ και με $\delta_{it} + \lambda \delta_{jt}$ αν $s = i$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ζεύγος δεικτών (s, l) με $s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και $l \in \{1, 2, \ldots, \mu\}$. Αν $s \neq i$, τότε το στοιχείο που βρίσκεται στην (s, l)-θέση του πίνακα $M(i, j, \lambda) \cdot A$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\nu} \delta_{st} a_{tl} = a_{sl}.$$

Επίσης, το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, l)-θέση του πίνακα $M(i, j, \lambda) \cdot A$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\nu} (\delta_{it} + \lambda \delta_{jt}) a_{tl} = \sum_{t=1}^{\nu} \delta_{it} a_{tl} + \sum_{t=1}^{\nu} \lambda \delta_{jt} a_{tl} = a_{il} + \lambda a_{jl}.$$

Συνεπώς, ο πίνακας $M(i, j, \lambda) \cdot A$ προκύπτει από τον A προσθέτοντας στην i-γραμμή του την j-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με λ.

(iii) Για κάθε ζεύγος δεικτών $s, t \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ το (s, t)-στοιχείο του πίνακα $E(i, j)$ είναι ίσο με δ_{st} αν $s \neq i, j$, με δ_{jt} αν $s = i$ και με δ_{it} αν $s = j$. Ας θεωρήσουμε ένα ζεύγος δεικτών (s, l) με $s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και $l \in \{1, 2, \ldots, \mu\}$. Αν $s \neq i, j$, τότε το στοιχείο που βρίσκεται στην (s, l)-θέση του πίνακα $E(i, j) \cdot A$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\nu} \delta_{st} a_{tl} = a_{sl}.$$

Επίσης, το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, l)-θέση του πίνακα $E(i, j) \cdot A$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\nu} \delta_{jt} a_{tl} = a_{jl},$$

ενώ το στοιχείο που βρίσκεται στην (j, l)-θέση του γινομένου $E(i, j) \cdot A$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\nu} \delta_{it} a_{tl} = a_{il}.$$

Συνεπώς, ο πίνακας $E(i, j) \cdot A$ είναι αυτός που προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας την i-γραμμή του με την j-γραμμή του.

Παράδειγμα 3.2.17 *Ας θεωρήσουμε τον* 3×4 *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Με βάση το προηγούμενο Θεώρημα, πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τον A *με τον στοιχειώδη πίνακα*

$$D(2,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε ακριβώς τον πίνακα που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη γραμμή του A *με* -1. *Έτσι, έχουμε*

$$D(2,-1) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -8 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τον A *με τον στοιχειώδη πίνακα*

$$M(3,1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε τον πίνακα που προκύπτει προσθέτοντας στην τρίτη γραμμή του A *την πρώτη του γραμμή πολλαπλασιασμένη με* -2 *και άρα*

$$M(3,1,-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τον A *με τον στοιχειώδη πίνακα*

$$E(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε ακριβώς τον πίνακα που προκύπτει από τον A *εναλλάσσοντας τη δεύτερη με την τρίτη γραμμή του. Συνεπώς, είναι*

$$E(2,3) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Στο επόμενο αποτέλεσμα θα δούμε ότι οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και μάλιστα οι αντίστροφοί τους είναι επίσης στοιχειώδεις του ίδιου τύπου.

Πόρισμα 3.2.18 *Έστω* $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ *δύο διακεκριμένοι δείκτες και* $\kappa, \lambda \in \mathbb{F}$.

(i) *Αν* $\kappa\lambda \neq 0$ *τότε* $D(i,\kappa)\cdot D(i,\lambda) = D(i,\kappa\lambda) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$

(ii) *Αν* $\lambda \neq 0$ *τότε ο πίνακας* $D(i,\lambda)$ *είναι αντιστρέψιμος και ισχύει* $D(i,\lambda)^{-1} = D(i,\lambda^{-1})$.

(iii) $M(i,j,\kappa)\cdot M(i,j,\lambda) = M(i,j,\kappa+\lambda) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$

(iv) *Ο πίνακας* $M(i,j,\lambda)$ *είναι αντιστρέψιμος και ισχύει* $M(i,j,\lambda)^{-1} = M(i,j,-\lambda)$.

(v) *Ο πίνακας* $E(i,j)$ *είναι αντιστρέψιμος και ισχύει* $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$.

Απόδειξη.

(i) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.16, το γινόμενο $D(i,\kappa)\cdot D(i,\lambda)$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $D(i,\lambda)$ πολλαπλασιάζοντας την i-γραμμή του με κ. Είναι φανερό ότι ο τελευταίος πίνακας είναι ακριβώς ο $D(i,\kappa\lambda)$. (Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε την ισότητα $D(i,\kappa)\cdot D(i,\lambda) = D(i,\kappa\lambda)$, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση που έπεται του Πορίσματος 2.3.12.)

(ii) Με βάση το (i) παραπάνω, έχουμε

$$D(i,\lambda)\cdot D(i,\lambda^{-1}) = D(i,1) = D(i,\lambda^{-1})\cdot D(i,\lambda).$$

Το ζητούμενο έπεται, καθώς $D(i,1) = I_\nu$. (Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε την ισότητα $D(i,\lambda^{-1}) = D(i,\lambda^{-1})$ χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.4.7.)

(iii) Με βάση το Θεώρημα 3.2.16, το γινόμενο $M(i,j,\kappa)\cdot M(i,j,\lambda)$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $M(i,j,\lambda)$ προσθέτοντας στην i-γραμμή του την j-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με κ. Είναι φανερό ότι ο τελευταίος πίνακας είναι ακριβώς ο $M(i,j,\kappa+\lambda)$.

(iv) Από το (iii) παραπάνω, έχουμε

$$M(i,j,\lambda)\cdot M(i,j,-\lambda) = M(i,j,0) = M(i,j,-\lambda)\cdot M(i,j,\lambda).$$

Το ζητούμενο έπεται, καθώς $M(i,j,0) = I_\nu$.

(v) Από το Θεώρημα 3.2.16 έπεται ότι το γινόμενο $E(i,j)\cdot E(i,j)$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $E(i,j)$ εναλλάσσοντας την i-γραμμή του με την j-γραμμή του. Είναι φανερό ότι ο τελευταίος πίνακας είναι ο ταυτοτικός πίνακας και άρα $E(i,j)\cdot E(i,j) = I_\nu$.

Παράδειγμα 3.2.19 *Οι στοιχειώδεις* 3×3 *πίνακες*

$$D(2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad M(1,3,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμοι με αντιστρόφους

$$D(2,5)^{-1} = D(2,1/5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$M(1,3,1)^{-1} = M(1,3,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Όπως είδαμε, το αποτέλεσμα που έχει σε έναν πίνακα ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με ένα στοιχειώδη πίνακα είναι η εφαρμογή στον πίνακα του αντίστοιχου στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών. Στη συνέχεια, θα δούμε έναν εναλλακτικό τρόπο ορισμού της γραμμοϊσοδυναμίας πινάκων, ο οποίος βασίζεται στους στοιχειώδεις πίνακες.

Πρόταση 3.2.20 *Αν A, B είναι δύο $\nu \times \mu$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B.*

(ii) *Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n \geq 1$ και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_n$, έτσι ώστε $B = E_n \ldots E_2 E_1 A$.*

Απόδειξη.
Ας υποθέσουμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B. Τότε, ο B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας διαδοχικά n στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, για κάποιο $n \geq 1$. Έστω ότι $E_1, E_2, \ldots, E_n$ είναι οι στοιχειώδεις πίνακες που αντιστοιχούν στους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Θα δείξουμε ότι $B = E_n \ldots E_2 E_1 A$ με επαγωγή στο n.

Αν $n = 1$, τότε ο B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας τον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών με αντίστοιχο στοιχειώδη πίνακα E_1. Συνεπώς, με βάση το Θεώρημα 3.2.16, έχουμε $B = E_1 A$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $n > 1$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε γραμμοϊσοδυναμία που προκύπτει με την εφαρμογή $n-1$ στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών. Θεωρούμε τον πίνακα C που προκύπτει εφαρμόζοντας στον A τους πρώτους $n-1$ από τους n μετασχηματισμούς που οδηγούν από τον A στον B. Τότε, με βάση την επαγωγική υπόθεση, έχουμε $C = E_{n-1} \ldots E_2 E_1 A$. Καθώς ο πίνακας B προκύπτει από τον C εφαρμόζοντας τον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών με αντίστοιχο στοιχειώδη πίνακα E_n, από το Θεώρημα 3.2.16 έπεται ότι $B = E_n C = E_n(E_{n-1} \ldots E_2 E_1 A)$, δηλαδή το ζητούμενο.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $B = E_n \ldots E_2 E_1 A$, για κάποιον φυσικό αριθμό $n \geq 1$ και κάποιους στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Αν τώρα θεωρήσουμε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που αντιστοιχούν σε αυτούς τους πίνακες, τότε μπορούμε να δείξουμε (χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.16 και επαγωγή στο n όπως παραπάνω) ότι η εφαρμογή των μετασχηματισμών αυτών στον πίνακα A οδηγεί ακριβώς στον πίνακα B. Έτσι, ο A είναι πράγματι γραμμοϊσοδύναμος με τον B.

Από τον τρόπο απόδειξης της παραπάνω πρότασης, βλέπουμε επίσης πώς μπορούμε να εκφράζουμε μια συγκεκριμένη γραμμοϊσοδυναμία δύο πινάκων ως μια αλγεβρική σχέση, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πίνακες. Ας δούμε τα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2.21 *Ας θεωρήσουμε τους 3×5 πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 19 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ -4 & -2 & -16 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.4, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B. Πιο συγκεκριμένα, ο B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς

$$r_1 \leftrightarrow r_2\ , \quad r_2 \mapsto r_2 + r_3\ , \quad r_3 \mapsto -2r_3 \quad \textit{και} \quad r_1 \mapsto r_1 - r_3.$$

Συνεπώς, ο πίνακας B προκύπτει πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τον A με στοιχειώδεις 3×3 πίνακες ως εξής:

$$B = M(1,3,-1) \cdot D(3,-2) \cdot M(2,3,1) \cdot E(1,2) \cdot A.$$

Παράδειγμα 3.2.22 *Ας θεωρήσουμε τον 2×3 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

τους στοιχειώδεις 2×2 πίνακες

$$D(1,3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ M(2,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και τον 2×3 πίνακα B, ο οποίος ορίζεται θέτοντας

$$B = E(1,2) \cdot M(2,1,1) \cdot D(1,3) \cdot A.$$

Τότε, ο B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας διαδοχικά τρεις στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, όπως φαίνεται παρακάτω

$$A \overset{r_1 \mapsto 3r_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 15 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_2 \mapsto r_2 + r_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 15 \\ 7 & -5 & 15 \end{pmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 15 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Με άλλα λόγια, έχουμε

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 15 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Θα ολοκληρώσουμε την παράγραφο αυτή με δύο άμεσα πορίσματα της Πρότασης 3.2.20.

Πόρισμα 3.2.23 *Έστω A ένας $\nu \times \mu$ πίνακας. Τότε, υπάρχει ένας ανηγμένος κλιμακωτός $\nu \times \mu$ πίνακας B, ένας φυσικός αριθμός $n \geq 1$ και στοιχειώδεις $\nu \times \nu$ πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_n$, τέτοιοι ώστε $B = E_n \ldots E_2 E_1 A$.*

Απόδειξη. Με βάση το Θεώρημα 3.2.12, ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με κάποιον ανηγμένο κλιμακωτό πινακα B. Το ζητούμενο τώρα έπεται χρησιμοποποιώντας την Προταση 3.2.20.

Πόρισμα 3.2.24 *Η γραμμοϊσοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $\nu \times \mu$ πινάκων.*

Απόδειξη. Όπως σχολιάσαμε αμέσως ματά τον Ορισμό 3.2.3, η σχέση της γραμμοϊσοδυναμίας πινάκων έχει την ανακλαστική και τη μεταβατική ιδιότητα. Μένει να δείξουμε ότι ικανοποιείται και η συμμετρική ιδιότητα. Έστω λοιπόν δύο $\nu \times \mu$ πίνακες A και B, που είναι τέτοιοι ώστε ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B. Τότε, με βάση την Πρόταση 3.2.20, υπάρχουν στοιχειώδεις $\nu \times \nu$ πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_n$, έτσι ώστε $B = E_n \ldots E_2 E_1 A$. Οι πίνακες $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_n^{-1}$ είναι επίσης στοιχειώδεις (Πόρισμα 3.2.18) και $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_n^{-1} B$. Χρησιμοποιώντας πάλι την Πρότση 3.2.20, έπεται ότι ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες με τους οποίους είναι γραμμοϊσοδύναμοι οι επόμενοι πίνακες. Σε κάθε περίπτωση, να βρεθούν στοιχειώδεις πίνακες οι οποίοι περιγράφουν τη γραμμοϊσοδυναμία όπως στην Πρόταση 3.2.20:

$$(i)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & 1 \\ -2 & 7 & 1 & -3 \\ 8 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(ii)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(iii)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -9 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός, $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ δύο διακεκριμένοι δείκτες και $\kappa, \lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$. Να δειχτεί ότι:

   (i) $M(i, j, \kappa) \cdot D(j, \lambda) = M(i, j, \kappa\lambda)$

   (ii) $M(i, j, \kappa) \cdot D(i, \lambda) = D(i, \lambda) \cdot M(i, j, \kappa/\lambda)$

   (iii) $E(i, j) = D(j, -1) \cdot M(i, j, 1) \cdot M(j, i, -1) \cdot M(i, j, 1)$

   Η ισότητα του (iii) παραπάνω περιγράφει ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών τύπου III ως τη σύνθεση τεσσάρων στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών τύπων I και II.

3.3 Επίλυση ενός Γραμμικού Συστήματος

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\mu}x_\mu = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\mu}x_\mu = b_2 \\ &\cdots \\ &a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu\mu}x_\mu = b_\nu \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι το παραπάνω γραμμικό σύστημα καθορίζεται πλήρως από τον επαυξημένο πίνακα $(A|b)$, όπου $A = (a_{ij})$ είναι ο $\nu \times \mu$ πίνακας των συντελεστών και b είναι η στήλη των σταθερών όρων. Επιπλέον, με βάση την Πρόταση 3.1.1, το παραπάνω γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ο $(EA|Eb)$ για κάθε αντιστρέψιμο $\nu \times \nu$ πίνακα E. Όπως είδαμε στην προηγούμενη Παράγραφο, μπορούμε να επιλέξουμε τον πίνακα E, έτσι ώστε ο επαυξημένος πίνακας $(EA|Eb)$ του νέου συστήματος να είναι ανηγμένος κλιμακωτός. Έτσι, μπορούμε να αναχθούμε σε ένα απλούστερο σύστημα το οποίο λύνεται εύκολα.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.3.1 *Ας θεωρήσουμε το παρακάτω σύστημα* 3 *εξισώσεων με* 4 *αγνώστους*

$$\begin{aligned} 2x_2 + 12x_3 + 11x_4 &= -20 \\ 2x_1 + 8x_2 + 26x_3 &= 12 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο 3×5 *πίνακας*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 26 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

ο οποίος (όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.13) είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, το αρχικό γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 16x_3 &= 2 \\ x_2 + 6x_3 &= 1 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Το τελευταίο σύστημα λύνεται εύκολα δίνοντας

$$x_1 = 16\lambda + 2,\ x_2 = -6\lambda + 1,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = -2,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{F}$*. Με άλλα λόγια, το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι το*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 16\lambda + 2 \\ -6\lambda + 1 \\ \lambda \\ -2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{F} \right\} \subseteq \mathbb{F}^{4\times 1}.$$

Παράδειγμα 3.3.2 *Ας θεωρήσουμε το παρακάτω σύστημα* 4 *εξισώσεων με* 3 *αγνώστους*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 &= -2 \\ -6x_2 + 2x_3 &= 24 \\ 5x_1 + 9x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο 4×4 *πίνακας*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 4 & 9 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & 24 \\ 5 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

ο οποίος (όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.14) είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 31/4 \\ 0 & 1 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, το αρχικό γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 &= 31/4 \\ x_2 &= -15/4 \\ x_3 &= 3/4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Εδώ λοιπόν, το σύστημα έχει μια μοναδική λύση

$$x_1 = 31/4,\ x_2 = -15/4,\ x_3 = 3/4.$$

Παράδειγμα 3.3.3 *Ας θεωρήσουμε το παρακάτω σύστημα* 3 *εξισώσεων με* 5 *αγνώστους*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 &= -1 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 + 4x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο 3×6 *πίνακας*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

για τον οποίο μπορούμε να δείξουμε ότι είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, το αρχικό γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 - x_5 &= -7 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

το οποίο είναι προφανώς ασυμβίβαστο. Με άλλα λόγια, το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι το κενό.

Από τα παραπάνω παραδείγματα έπεται ότι η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss μας επιτρέπει να ανάγουμε κάθε γραμμικό σύστημα εξισώσεων σε ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα, του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Έτσι, ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους, του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό $\nu \times (\mu+1)$ πίνακα $(A|b)$, όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_\nu \end{pmatrix}^t \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Είναι φανερό ότι ο πίνακας A είναι επίσης ανηγμένος κλιμακωτός. Έστω ότι οι κ πρώτες γραμμές του πίνακα A έχουν ηγετικό στοιχείο (το 1), ενώ οι $\nu-\kappa$ τελευταίες είναι μηδενικές. Επιπλέον, έστω ότι οι στήλες του A στις οποίες βρίσκονται τα ηγετικά στοιχεία των κ πρώτων γραμμών του είναι οι $j_1, j_2, \dots, j_\kappa$, όπου $j_1 < j_2 < \dots < j_\kappa$, και έστω $l_1, l_2, \dots, l_{\mu-\kappa}$ οι υπόλοιπες $\mu-\kappa$ στήλες του. Τότε, το αρχικό σύστημα εξισώσεων είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{rcl}
x_{j_1} + \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{1l_s}x_{l_s} & = & b_1 \\
x_{j_2} + \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{2l_s}x_{l_s} & = & b_2 \\
 & \dots & \\
x_{j_\kappa} + \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{\kappa l_s}x_{l_s} & = & b_\kappa \\
0 & = & b_{\kappa+1} \\
 & \dots & \\
0 & = & b_\nu
\end{array}$$

Έτσι, η μορφή του επαυξημένου πίνακα $(A|b)$ καθορίζει τις δυνατότητες που υπάρχουν σχετικά με το πλήθος των λύσεων, όπως αυτό φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.3.4 *Έστω ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους, του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $(A|b)$, όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_\nu \end{pmatrix}^t \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Έστω επίσης κ το πλήθος των μημηδενικών γραμμών του A. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) Αν $b_i \neq 0$ για κάποιο $i \in \{\kappa+1, \dots, \nu\}$, τότε το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

(ii) Αν $b_i = 0$ για κάθε $i \in \{\kappa+1, \dots, \nu\}$, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό. Επιπλέον, αν $\kappa = \mu$, τότε το σύστημα έχει μια μοναδική λύση, ενώ αν $\kappa < \mu$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Απόδειξη. Υποθέτουμε, όπως παραπάνω, ότι $j_1, j_2, \dots, j_\kappa$ είναι οι στήλες του πίνακα A στις οποίες βρίσκονται τα ηγετικά στοιχεία των κ πρώτων γραμμών του, όπου $j_1 < j_2 < \dots < j_\kappa$, και ότι $l_1, l_2, \dots, l_{\mu-\kappa}$ είναι οι υπόλοιπες $\mu-\kappa$ στήλες του.

(i) Αν υπάρχει $i \in \{\kappa+1, \dots, \nu\}$, τέτοιο ώστε $b_i \neq 0$, τότε το αρχικό γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα το οποίο περιέχει την εξίσωση $0 = b_i$. Καθώς η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να ισχύσει για καμιά τιμή των αγνώστων του συστήματος, το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

(ii) Αν $b_i = 0$ για κάθε $i \in \{\kappa+1, \dots, \nu\}$, τότε το αρχικό γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{array}{rcl}
x_{j_1} + \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{1l_s}x_{l_s} & = & b_1 \\
x_{j_2} + \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{2l_s}x_{l_s} & = & b_2 \\
 & \dots & \\
x_{j_\kappa} + \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{\kappa l_s}x_{l_s} & = & b_\kappa
\end{array}$$

του οποίου οι λύσεις δίνονται από τους τύπους

$$\begin{array}{lcl} x_{j_1} & = & b_1 - \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{1l_s} y_{l_s} \\ x_{j_2} & = & b_2 - \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{2l_s} y_{l_s} \\ \cdots & & \\ x_{j_\kappa} & = & b_\kappa - \sum_{s=1}^{\mu-\kappa} a_{\kappa l_s} y_{l_s} \\ x_{l_1} & = & y_{l_1} \\ x_{l_2} & = & y_{l_2} \\ \cdots & & \\ x_{l_{\mu-\kappa}} & = & y_{l_{\mu-\kappa}} \end{array}$$

όπου $y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots, y_{l_{\mu-\kappa}} \in \mathbb{F}$. Είναι φανερό ότι οι λύσεις είναι άπειρες αν $\kappa < \mu$, καθώς μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα τα $y_{l_s} \in \mathbb{F}$, $s = 1, \ldots, \mu - \kappa$. Αν όμως $\kappa = \mu$, τότε υπάρχει μια μοναδική λύση, αφού δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές. (Στην περίπτωση που ισχύει $\kappa = \mu$, θα πρέπει αναγκαστικά να είναι $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $\ldots$, $j_\mu = \mu$ και άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, $\ldots$, $x_\mu = b_\mu$.)

Παράδειγμα 3.3.5 *Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{aligned} x + y - 6z &= \lambda \\ 2x + y - 2z &= 8 \\ 2x + 3y - 22z &= 5 \end{aligned}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{F}$. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & \lambda \\ 2 & 1 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & -22 & 5 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε στον παραπάνω πίνακα τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss και παίρνουμε τον γραμμοϊσοδύναμο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8-\lambda \\ 0 & 1 & -10 & -8+2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 13-4\lambda \end{pmatrix}.$$

΄Ετσι, προκύπτει το ισοδύναμο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 4z &= 8 - \lambda \\ y - 10z &= -8 + 2\lambda \\ 0 &= 13 - 4\lambda \end{aligned}$$

Το τελευταίο αυτό σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $13 - 4\lambda = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda = 13/4$. Στην περίπτωση αυτή, το γραμμικό σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + 4z &= 19/4 \\ y - 10z &= -3/2 \end{aligned}$$

και έχει άπειρες λύσεις που δίνονται από τους τύπους

$$x = 19/4 - 4t,\ y = -3/2 + 10t,\ z = t,$$

όπου $t \in \mathbb{F}$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους λέγεται ομογενές αν οι σταθεροί όροι του είναι ίσοι με 0. Η τετριμμένη λύση ενός ομογενούς συστήματος είναι η μηδενική λύση $\mathbb{O}_{\mu\times 1}$. Θα δούμε στη συνέχεια δύο εφαρμογές της Πρότασης 3.3.4 στην αναζήτηση μη-τετριμμένων λύσεων ενός ομογενούς συστήματος.

Πόρισμα 3.3.6 *Έστω ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους, όπου $\nu < \mu$. Τότε, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος. Ως ομογενές, το σύστημα είναι συμβιβαστό και άρα βρισκόμαστε στην περίπτωση (ii) της Πρότασης 3.3.4. Το πλήθος κ των μη-μηδενικών γραμμών σε κάθε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A είναι προφανώς $\leq \nu$. Έτσι, με βάση την υπόθεσή μας, είναι $\kappa < \mu$ και άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (Πρόταση 3.3.4(ii)).

Πόρισμα 3.3.7 *Έστω ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους και $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ο πίνακας των συντελεστών. Αν το σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση, τότε ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ταυτοτικό πίνακα I_ν.*

Απόδειξη. Έστω A_0 ένας ανηγμένος κλιμακωτός $\nu\times\nu$ πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A. Από την υπόθεσή μας και την Πρόταση 3.3.4(ii) έπεται ότι το πλήθος κ των μη-μηδενικών γραμμών του A_0 είναι ίσο με ν. Καθώς ο μοναδικός ανηγμένος κλιμακωτός $\nu\times\nu$ πίνακας με ν μη-μηδενικές γραμμές είναι ο ταυτοτικός, συμπεραίνουμε ότι $A_0 = I_\nu$. Έτσι, ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_ν.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να συμπληρωθεί, δίνοντας ένα κριτήριο για την αντιστρεψιμότητα ενός τετραγωνικού πίνακα.

Θεώρημα 3.3.8 *Οι επόμενες συνδήκες είναι ισοδύναμες για έναν $\nu\times\nu$ πίνακα A:*

(i) *Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.*

(ii) *Το ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους και πίνακα συντελεστών A έχει μόνο την τετριμμένη λύση.*

(iii) *Ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ταυτοτικό πίνακα I_ν.*

(iv) *Ο πίνακας A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.*

Απόδειξη.
Αρχικά, θα δείξουμε ότι $(i) \to (ii)$. Το ομογενές σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους και πίνακα συντελεστών A μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση πινάκων $Ax = \mathbb{O}_{\nu\times 1}$, με άγνωστο τον $\nu\times 1$ πίνακα x. Υποθέτοντας ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, έχουμε

$$x = I_\nu x = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}\mathbb{O}_{\nu\times 1} = \mathbb{O}_{\nu\times 1}$$

και άρα το ομογενές σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

Η συνεπαγωγή $(ii) \to (iii)$ είναι ακριβώς το Πόρισμα 3.3.7.

Θα δείξουμε τώρα ότι $(iii) \to (iv)$. Υποθέτοντας ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_ν, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.3.20 και να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_n$, τέτοιοι ώστε

$$I_\nu = E_n \dots E_2 E_1 A.$$

Καθώς οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και μάλιστα οι αντίστροφοί τους είναι επίσης στοιχειώδεις (Πόρισμα 3.2.18), έπεται ότι ο πίνακας

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_n^{-1}$$

είναι ένα γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Τέλος, θα δείξουμε ότι $(iv) \to (i)$. Ας υποθέσουμε ότι ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Καθώς οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι (Πόρισμα 3.2.18), έπεται ότι ο A είναι ένα γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων. Έτσι, ο A είναι επίσης αντιστρέψιμος (βλέπε Πρόταση 2.4.8(ii)).

Παρατήρηση 3.3.9 *Ας θεωρήσουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_ν και άρα υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_n$, τέτοιοι ώστε*

$$I_\nu = E_n \dots E_2 E_1 A.$$

Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση από δεξιά με A^{-1}, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = E_n \dots E_2 E_1 = E_n \dots E_2 E_1 I_\nu.$$

Συνεπώς, το γινόμενο $E_n \dots E_2 E_1$ πολλαπλασιαζόμενο από αριστερά με τον A μας δίνει τον ταυτοτικό πίνακα I_ν και πολλαπλασιαζόμενο από αριστερά με τον ταυτοτικό πίνακα I_ν μας δίνει τον αντίστροφο A^{-1}. Με βάση το Θεώρημα 3.2.16, συμπεραίνουμε ότι αν εφαρμόσουμε στον ταυτοτικό πίνακα I_ν την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών που οδηγεί από τον A στον I_ν θα λάβουμε τον πίνακα A^{-1}. Αυτή είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για τον αριθμητικό υπολογισμό του αντιστρόφου του A.

Παράδειγμα 3.3.10 *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε στον A στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να τον φέρουμε σε ανηγμένη *κλιμακωτή μορφή:*

$$\begin{aligned}
A \quad &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{r_3 \mapsto -\frac{1}{5} r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 4r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Έτσι, ως γραμμοϊσοδύναμος με τον ταυτοτικό πίνακα I_3, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Για να βρούμε τον A^{-1}, εφαρμόζουμε την παραπάνω ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών στον πίνακα I_3

$$\begin{aligned}
I_3 \quad &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{r_3 \mapsto -\frac{1}{5} r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 4r_3} \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & -3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 + r_3} \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & -3/5 \\ 7/5 & -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & -3/5 \\ 7/5 & -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση 3.3.11 *Συνήθως, η μεθοδολογία που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα για την εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα, εφόσον βέβαια αυτός υπάρχει, συντομεύεται γράφοντας τον πίνακα I_ν τα δεξιά του A. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε στον $\nu \times 2\nu$ πίνακα $(A|I_\nu)$ στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών με σκοπό να κάνουμε τον πίνακα A ανηγμένο κλιμακωτό. Στην περίπτωση που ο A είναι αντιστρέψιμος, ο τελικός πίνακας που θα προκύψει με αυτήν τη διαδικασία είναι ο $(I_\nu|A^{-1})$.*

Παράδειγμα 3.3.12 *Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια, σχηματίζουμε τον 3×6 *πίνακα*

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

και εφαρμόζουμε σε αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών με σκοπό να κάνουμε τον A *ανηγμένο κλιμακωτό, όπως φαίνεται παρακάτω*

$$\begin{aligned}
(A|I_3) & \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 + r_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - r_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{r_2 \mapsto \frac{1}{3} r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 8 r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -11/3 & -8/3 & 1 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{r_3 \mapsto 3 r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -8 & 3 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 + r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 7/3 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -8 & 3 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - \frac{7}{3} r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 27 & 19 & -7 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -8 & 3 \end{array}\right) \\
& \xrightarrow{r_1 \mapsto r_2 - \frac{1}{3} r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 27 & 19 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -8 & 3 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο A *είναι αντιστρέψιμος (ως γραμμοϊσοδύναμος με τον* I_3*) και μάλιστα*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.3.13 *Ας θεωρήσουμε τώρα τον* 3×3 *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Σχηματίζουμε τον 3×6 *πίνακα*

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

και εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών με σκοπό να κάνουμε τον A ανηγμένο κλιμακωτό

$$
\begin{aligned}
(A|I_3) &\xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_2 \mapsto \frac{1}{3} r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Με το συμβολισμό της Πρότασης 3.3.4, για τον τελευταίο πίνακα έχουμε $\kappa = 2 < 3 = \mu$. Έτσι, το ομογενές γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους και πίνακα συντελεστών A έχει άπειρες λύσεις. Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.3.8 έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί το επόμενο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
x + 5y - 3z + w &= 4 \\
2x - y + z - w &= 1 \\
4x + y - z + 2w &= 6
\end{aligned}
$$

2. Να βρεθούν οι τιμές της μιγαδικής παραμέτρου λ για τις οποίες το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x - iy &= 2 - i \\
2x + y &= 3 + i \\
ix - y &= \lambda
\end{aligned}
$$

είναι συμβιβαστό.

3. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{F}$ για τις οποίες το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + y - az &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις.

4. Να εξετάσετε αν οι επόμενοι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και να βρείτε τους αντιστρόφους τους (αν υπάρχουν).

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 11 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Να βρεθούν οι τιμές της μιγαδικής παραμέτρου λ για τις οποίες ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda^2 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον, για τις τιμές αυτές, να βρεθεί ο A^{-1}.

3.4 Ορίζουσα ενός Τετραγωνικού Πίνακα

Είδαμε στην προγούμενη παράγραφο πώς μπορούμε να συστηματοποιήσουμε, μέσω της θεωρίας των πινάκων, την εύρεση της λύσης ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Όμως, θα ήταν επιθυμητό να είχαμε και έναν τύπο που να δίνει αυτές τις λύσεις. Για παράδειγμα, αν στους συντελεστές του συστήματος και τους σταθερούς όρους του εμφανίζονται παράμετροι, μπορεί να μας ενδιαφέρει η μεγιστοποίηση κάποιων συναρτήσεων των λύσεων ή ακόμα μπορεί να αναζητούμε λύσεις με όλες τις συντεταγμένες θετικές. Σε τέτοιου είδους ερωτήματα, η μέθοδος που αναπτύξαμε δεν μπορεί να δώσει ικανοποιητικές απαντήσεις.

Για να εξηγήσουμε τι εννοούμε, ας θεωρήσουμε το απλό παράδειγμα της αριθμητικής προόδου, η οποία ορίζεται ως μία ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ στοιχείων του $\mathbb{F}$, για την οποία υπάρχει στοιχείο $b \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $a_n = a_{(n-1)} + b$ για κάθε $n \geq 1$. Είναι σαφές ότι αν δοθούν οι τιμές για τα a_1 και b και μια συγκεκριμένη τιμή του n, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον όρο a_n. Για παράδειγμα, αν $a_1 = 56$, $b = 36$ και $n = 22678$, τότε είναι απλά θέμα χρόνου που εξαρτάται από το είδος της τεχνολογικής υποστήριξης που έχουμε, να υπολογίσουμε τον όρο a_{22678} και να βρούμε $a_{22678} = 816428$. Όμως, έχουμε μια βαθύτερη κατανόηση του προβλήματος μόνον αφού αποδείξουμε τον τύπο $a_n = a_1 + (n-1)b$.

Η θεωρία των Οριζουσών, την οποία θα αναπτύξουμε στη συνέχεια, δίνει μια απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα (σχετικά με ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων). Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ θα αντιστοιχίσουμε ένα κατάλληλο στοιχείο του $\mathbb{F}$, την ορίζουσά του. Μέσω των οριζουσών θα πάρουμε έναν τύπο για τη λύση ενός συστήματος ν εξισώσεων με ν άγνωστους (κανόνας του Cramer). Επιπλέον, μέσω των οριζουσών θα πάρουμε ένα σαφές κριτήριο για την αντιστρεψιμότητα ενός τετραγωνικού πίνακα.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $\nu \times \nu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix},$$

όπου $r_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i\nu} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$ είναι η i γραμμή του A, $i = 1, 2, \dots, \nu$.

Ορισμός 3.4.1 *Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Μία απεικόνιση $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ λέγεται* **απεικόνιση ορίζουσας** *αν ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:*

(D_1) *Για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $i = 1, 2, \dots, \nu$ με $r_i = r + r' \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$ έχουμε*

$$D(A) = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r' \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix}.$$

(D_2) *Για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ και $i = 1, 2, \dots, \nu$ με $r_i = \lambda r \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$, έχουμε*

$$D(A) = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = \lambda D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix}.$$

(D_3) *Αν* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *είναι ένας πίνακας του οποίου δύο γραμμές είναι ίσες (για τον οποίο δηλαδή υπάρχουν δύο διακεκριμένοι δείκτες* $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ *με* $r_i = r_j$*), τότε* $D(A) = 0$.

(D_4) *Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι ίση με* 1*, δηλαδή* $D(I_\nu) = 1$.

Παράδειγμα 3.4.2 *Για* $\nu = 1$*, η απεικόνιση* $D : \mathbb{F}^{1\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}$ *με*

$$(a_{11}) \longmapsto a_{11}$$

είναι μια απεικόνιση ορίζουσας. Παράγματι, οι ιδιότητες D_1*,* D_2 *και* D_4 *είναι προφανείς, ενώ η* D_3 *είναι (στην περίπτωση αυτή) κενή περιεχομένου.*

Παράδειγμα 3.4.3 *Για* $\nu = 2$*, η απεικόνιση* $D : \mathbb{F}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{F}$ *με*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longmapsto a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

είναι μια απεικόνιση ορίζουσας. Η επαλήθευση των ιδιοτήτων D_1*,* D_2*,* D_3 *και* D_4 *αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.*

Πριν εξετάσουμε το πρόβλημα της ύπαρξης και της μοναδικότητας της απεικόνισης ορίζουσας, θα δούμε ορισμένες ιδιότητές της, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό.

Παρατήρηση 3.4.4 *Αν* A *είναι ένας* $\nu \times \nu$ *πίνακας,* $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ *και* $r_i = \sum_{s=1}^{\mu} \lambda_s \rho_s \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$*, όπου* $\lambda_s \in \mathbb{F}$ *και* $\rho_s \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$ *για κάθε* $s = 1, 2, \ldots, \mu$*, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες* D_1 *και* D_2 *μιας απεικόνισης ορίζουσας* D *και επαγωγή ως προς* μ *για να δείξουμε ότι*

$$D(A) = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{\mu} \lambda_s D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ \rho_s \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση 3.4.5 *Αν* A *είναι ένας* $\nu \times \nu$ *πίνακας με* $r_i = \mathbb{O}$ *για κάποιο* $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$*, τότε* $D(A) = 0$ *για κάθε απεικόνιση ορίζουσας* D*. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, έχουμε* $r_i = 0r_i$ *και άρα από την ιδιότητα* D_2 *έπεται ότι*

$$D(A) = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ 0r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = 0D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = 0.$$

Η ιδιότητα D_2 περιγράφει τη συμπεριφορά μιας απεικόνισης ορίζουσας ως προς τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών τύπου I. Θα δούμε τώρα πώς συμπεριφέρεται μια απεικόνιση ορίζουσας ως προς τους άλλους δύο τύπους στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Πρόταση 3.4.6 *Έστω $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ μια απεικόνιση ορίζουσας και A ένας $\nu\times\nu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.*

(i) Έστω $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ο πίνακας που προκύπτει αν εφαρμόσουμε στον A ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών τύπου II. Τότε, $D(B) = D(A)$.

(ii) Έστω $C \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ο πίνακας που προκύπτει αν εφαρμόσουμε στον A ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών τύπου III. Τότε, $D(C) = -D(A)$.

Απόδειξη. Έστω $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ οι γραμμές του πίνακα A.

(i) Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας B προκύπτει από τον A προσθέτοντας στην i-γραμμή του την j-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με λ, για κάποιους διακεκριμένους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. Έτσι, η i-γραμμή του B είναι ίση με $r_i + \lambda r_j$ και άρα έχουμε (υποθέτοντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $i < j$)

$$D(B) = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i + \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} + \lambda D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} = D(A).$$

Εδώ, η δεύτερη ισότητα έπεται από τις ιδιότητες D_1 και D_2 της απεικόνισης D, ενώ η τρίτη έπεται από την D_3.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας C προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας την i-γραμμή του με την j-γραμμή του, για κάποιους διακεκριμένους δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$. Έτσι, η i-γραμμή του C είναι ίση με r_j και η j-γραμμή του είναι ίση με r_i. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $i < j$. Χρησιμοποιώντας δύο φορές την ιδιότητα D_1 της D, έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} &= D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} \\
&= D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Με βάση την ιδιότητα D_3, η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής

$$0 = 0 + D(A) + D(C) + 0.$$

Έτσι, $D(A) + D(C) = 0$ και άρα $D(C) = -D(A)$.

Πόρισμα 3.4.7 *Έστω $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ μια απεικόνιση ορίζουσας και A ένας $\nu \times \nu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Έστω $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ένας πίνακας που προκύπτει αν εφαρμόσουμε στον A ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών. Τότε, $D(A) = 0$ αν και μόνο αν $D(B) = 0$.*

Απόδειξη. Στην περίπτωση που ο B προκύπτει εφαρμόζοντας στον A ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών τύπου II ή III, το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.4.6. Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών τύπου I. Έτσι, ας υποθέσουμε ότι ο B προκύπτει από τον A πολλαπλασιάζοντας μια γραμμή του με λ, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, από την ιδιότητα D_2 της D έπεται ότι $D(B) = \lambda D(A)$ και άρα $D(A) = 0$ αν και μόνο αν $D(B) = 0$.

Πρόταση 3.4.8 *Έστω $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ μια απεικόνιση ορίζουσας και A, B δύο γραμμοϊσοδύναμοι $\nu \times \nu$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Τότε, $D(A) = 0$ αν και μόνο αν $D(B) = 0$.*

Απόδειξη. Ο πίνακας B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας διαδοχικά n στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, για κάποιο $n \geq 1$. Θα δείξουμε ότι $D(A) = 0$ αν και μόνο αν $D(B) = 0$, χρησιμοποιώντας επαγωγή στο n.

Αν $n = 1$, τότε ο B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, το συμπέρασμα έπεται από το Πόρισμα 3.4.7.

Υποθέτουμε τώρα ότι $n > 1$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε γραμμοϊσοδυναμία που προκύπτει με την εφαρμογή $n-1$ στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών. Θεωρούμε τον πίνακα C που προκύπτει εφαρμόζοντας στον A τους πρώτους $n-1$ από τους n μετασχηματισμούς που οδηγούν από τον A στον B. Τότε, με βάση την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι $D(A) = 0$ αν και μόνο αν $D(C) = 0$. Καθώς ο πίνακας B προκύπτει από τον C εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, από το Πόρισμα 3.4.7 έπεται ότι $D(C) = 0$ αν και μόνο αν $D(B) = 0$. Τελικά, προκύπτει ότι $D(A) = 0$ αν και μόνο αν $D(B) = 0$.

Πρόταση 3.4.9 *Έστω $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ μια απεικόνιση ορίζουσας και A ένας $\nu \times \nu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Τότε, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $D(A) \neq 0$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι κάθε αντιστρέψιμος $\nu \times \nu$ πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ταυτοτικό πίνακα I_ν (Θεώρημα 3.3.8). Καθώς ισχύει $D(I_\nu) = 1 \neq 0$, από την Πρόταση 3.4.8 έπεται ότι αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε $D(A) \neq 0$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος και ας θεωρήσουμε (χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.12) έναν ανηγμένο κλιμακωτό $\nu \times \nu$ πίνακα B, ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A. Με βάση το Θεώρημα 3.3.8, θα είναι $B \neq I_\nu$. Είναι φανερό ότι κάθε ανηγμένος κλιμακωτός $\nu \times \nu$ πίνακας, που είναι διάφορος του ταυτοτικού, έχει τουλάχιστον μία μηδενική γραμμή. Συνεπώς, η τελευταία γραμμή του B είναι μηδενική και άρα από την Παρατήρηση 3.4.5 έπεται ότι $D(B) = 0$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.4.8, προκύπτει ότι $D(A) = 0$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι μια απεικόνιση ορίζουσας D είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη των πινάκων. Για να μπουν όμως τα αποτελέσματα αυτά σε ένα σαφές πλαίσιο, θα πρέπει να εξετάσουμε το πρόβλημα της ύπαρξης μιας τέτοιας απεικόνισης D. Στη συνέχεια, θα δείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της απεικόνισης D και θα δούμε πώς μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της σε έναν τετραγωνικό πίνακα.

Γνωρίζουμε ήδη (Παραδείγματα 3.4.2 και 3.4.3) πώς να ορίσουμε μια απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των 1×1 και 2×2 πινάκων. Η επόμενη Πρόταση δείχνει πώς να ορίσουμε μια απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $\nu \times \nu$ πινάκων όταν έχουμε μια απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $(\nu-1) \times (\nu-1)$ πινάκων.

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ θα συμβολίζουμε με A_{ij} τον $(\nu-1) \times (\nu-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-γραμμή του και την j-στήλη του. Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times3},$$

τότε έχουμε

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 3.4.10 *Έστω ν ένας φυσικός αριθμός με $\nu \geq 2$, $D : \mathbb{F}^{(\nu-1)\times(\nu-1)} \longrightarrow \mathbb{F}$ μια απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $(\nu-1) \times (\nu-1)$ πινάκων και $j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$. Τότε, η απεικόνιση $f_j : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$, η οποία ορίζεται θέτοντας $f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}D(A_{ij})$ για κάθε $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, είναι μια απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $\nu \times \nu$ πινάκων.*

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση f_j ικανοποιεί τις ιδιότητες D_1, D_2, D_3 και D_4.

Πράγματι, έστω $s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_s \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}.$$

Υποθέτουμε ότι $r_s = r + r'$, όπου $r = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_\nu \end{pmatrix}$ και $r' = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_\nu \end{pmatrix}$, και θεωρούμε τους πίνακες

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{s-1} \\ r \\ r_{s+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{s-1} \\ r' \\ r_{s+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix}.$$

Τώρα έχουμε

$$f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) = (-1)^{s+j} a_{sj} D(A_{sj}) + \sum_{i \neq s} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}).$$

Όμως $a_{sj} = x_j + x'_j$ και, επειδή η D είναι απεικόνιση ορίζουσας, για κάθε $i \neq s$ είναι $D(A_{ij}) = D(B_{ij}) + D(C_{ij})$. Έτσι, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$f_j(A) = (-1)^{s+j}(x_j + x'_j) D(A_{sj}) + \sum_{i \neq s} (-1)^{i+j} a_{ij} (D(B_{ij}) + D(C_{ij})).$$

Καθώς $x_j = b_{sj}$, $x'_j = c_{sj}$, $A_{sj} = B_{sj} = C_{sj}$ και $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$ για κάθε $i \neq s$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} f_j(A) &= (-1)^{s+j} b_{sj} D(B_{sj}) + (-1)^{s+j} c_{sj} D(C_{sj}) + \\ &\quad \textstyle\sum_{i \neq s} (-1)^{i+j} b_{ij} D(B_{ij}) + \sum_{i \neq s} (-1)^{i+j} c_{ij} D(C_{ij}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{i+j} b_{ij} D(B_{ij}) + \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{i+j} c_{ij} D(C_{ij}) \\ &= f_j(B) + f_j(C). \end{aligned}$$

Έτσι, δείχτηκε η ιδιότητα D_1 για την απεικόνιση f_j.

Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση f_j έχει την ιδιότητα D_2, θεωρούμε ένα δείκτη s με $1 \le s \le \nu$ και τον πίνακα

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_s \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}.$$

Υποθέτουμε ότι $r_s = \lambda r$, όπου $r = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_\nu \end{pmatrix}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$. Αν

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{s-1} \\ r \\ r_{s+1} \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix},$$

τότε έχουμε

$$f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) = (-1)^{s+j} a_{sj} D(A_{sj}) + \sum_{i \neq s} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}).$$

Όμως $a_{sj} = \lambda x_j = \lambda b_{sj}$ και $D(A_{sj}) = D(B_{sj})$. Επιπλέον, για κάθε $i \neq s$ είναι $a_{ij} = b_{ij}$ και, επειδή η D είναι απεικόνιση ορίζουσας, έχουμε $D(A_{ij}) = \lambda D(B_{ij})$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} f_j(A) &= (-1)^{s+j} \lambda b_{sj} D(B_{sj}) + \textstyle\sum_{i \neq s} (-1)^{i+j} b_{ij} \lambda D(B_{ij}) \\ &= \lambda \Big((-1)^{s+j} b_{sj} D(B_{sj}) + \textstyle\sum_{i \neq s} (-1)^{i+j} b_{ij} D(\beta_{ij}) \Big) \\ &= \lambda f_j(B). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η απεικόνιση f_j έχει την ιδιότητα D_3. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε δύο διακεκριμένους δείκτες $s, t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ με $s < t$ και υποθέτουμε ότι ο πίνακας

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_s \\ \vdots \\ r_t \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$$

είναι τέτοιος ώστε $r_s = r_t$. Τότε, έχουμε

$$f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}).$$

Καθώς η D είναι απεικόνιση ορίζουσας και ο πίνακας A_{ij} έχει δύο γραμμές ίσες για κάθε $i \neq s, t$, έπεται ότι $D(A_{ij}) = 0$ για κάθε $i \neq s, t$. Έτσι, βλέπουμε ότι

$$f_j(A) = (-1)^{s+j} a_{sj} D(A_{sj}) + (-1)^{t+j} a_{tj} D(A_{tj}).$$

Είναι σαφές ότι ο πίνακας A_{sj} προκύπτει από τον A_{tj} μέσω $t-s-1$ αντιμεταθέσεων διαδοχικών γραμμών. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τον A_{tj} και αντιμεταθέτουμε την s-γραμμή του πρώτα με την $s+1$, μετά με την $s+2$, …, και τέλος με την $t-1$, για να πάρουμε τον A_{sj}. Καθώς η D είναι απεικόνιση ορίζουσας, από την Πρόταση 3.4.6(ii) έπεται ότι $D(A_{sj}) = (-1)^{t-s-1} D(A_{tj})$. Επιπλέον, έχουμε $a_{sj} = a_{tj}$ και έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$f_j(A) = (-1)^{s+j} a_{tj} (-1)^{t-s-1} D(A_{tj}) + (-1)^{t+j} a_{tj} D(A_{tj}) = 0.$$

Απομένει να δειχτεί ότι η απεικόνιση f_j ικανοποιεί και την ιδιότητα D_4. Πράγματι, έχουμε $I_\nu = (\delta_{ij})$ και άρα

$$f_j(I_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{i+j} \delta_{ij} D((I_\nu)_{ij}) = (-1)^{j+j} D((I_\nu)_{jj}) = D((I_\nu)_{jj}).$$

Όμως $(I_\nu)_{jj} = I_{\nu-1}$ και έτσι, επειδή η D είναι απεικόνιση ορίζουσας, έπεται ότι $f_j(I_\nu) = D(I_{\nu-1}) = 1$.

Πόρισμα 3.4.11 *Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν υπάρχει τουλάχιστον μία απεικόνιση ορίζουσας με πεδίο ορισμού το σύνολο των $\nu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο ν. Για $\nu = 1$, η απεικόνιση $\mathbb{F}^{1\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}$ με $(a_{11}) \longmapsto a_{11}$ είναι μία απεικόνιση ορίζουσας. Έστω τώρα $\nu > 1$ και D μια απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $(\nu-1) \times (\nu-1)$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Τότε, από την Πρόταση 3.4.10, ορίζεται μέσω της D μία απεικόνιση ορίζουσας στο $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

Παράδειγμα 3.4.12 *Όπως έχουμε δει, η απεικόνιση $D : \mathbb{F}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{F}$ με*

$$D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

είναι μια απεικόνιση ορίζουσας. Έτσι, με βάση την Πρόταση 3.4.10, έπεται ότι η απεικόνιση $f_1 : \mathbb{F}^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{F}$, η οποία ορίζεται θέτοντας

$$f_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot D\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \cdot D\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \cdot D\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

είναι μια απεικόνιση ορίζουσας. Με ανάλογο τρόπο, ορίζονται οι απεικονίσεις ορίζουσας $f_2, f_3 : \mathbb{F}^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{F}$ με

$$f_2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -a_{12}\cdot D\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22}\cdot D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{32}\cdot D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

και

$$f_3\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{13}\cdot D\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} - \alpha_{23}\cdot D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + a_{33}\cdot D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση ορίζουσας με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ των $\nu \times \nu$ πινάκων. Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε ορισμένα προαπαιτούμενα.

Ορισμός 3.4.13 *Έστω ν ένας φυσικός αριθμός με $\nu \geq 2$. Μια 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ στον εαυτό του θα λέγεται* **μετάθεση** *σε ν σύμβολα (ή, απλόυστερα, μετάθεση). Το σύνολο των μεταθέσεων σε ν σύμβολα είναι το S_ν. Μία μετάθεση $f \in S_\nu$ θα λέγεται* **αντιμετάθεση** *αν υπάρχουν διακεκριμένοι δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ με $f(i) = j$, $f(j) = i$ και $f(s) = s$ για κάθε $s \in \{1, 2 \ldots, \nu\}$ με $s \neq i, j$.*

Παράδειγμα 3.4.14 *Το σύνολο S_2 περιέχει δύο στοιχεία: την ταυτοτική απεικόνιση του συνόλου $\{1, 2\}$ και την αντιμετάθεση $f : \{1, 2\} \longrightarrow \{1, 2\}$ με $f(1) = 2$ και $f(2) = 1$.*

Παράδειγμα 3.4.15 *Το σύνολο S_3 περιέχει έξι στοιχεία: την ταυτοτική απεικόνιση του συνόλου $\{1, 2, 3\}$ και τις μεταθέσεις f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, όπου*

- *f_1 είναι η αντιμετάθεση με $f_1(1) = 2$ και $f_1(2) = 1$*
- *f_2 είναι η αντιμετάθεση με $f_2(2) = 3$ και $f_2(3) = 2$*
- *f_3 είναι η αντιμετάθεση με $f_3(1) = 3$ και $f_3(3) = 1$*
- *η f_4 δίνεται θέτοντας $f_4(1) = 2$, $f_4(2) = 3$ και $f_4(3) = 1$*
- *η f_5 δίνεται θέτοντας $f_5(1) = 3$, $f_5(2) = 1$ και $f_5(3) = 2$*

Είναι προφανές ότι αν η $f \in S_\nu$ είναι μία αντιμετάθεση, τότε η σύνθεση $f \circ f$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, \nu\}$. Η ακόλουθη πρόταση μας λέει ότι κάθε μετάθεση είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων.

Πρόταση 3.4.16 *Κάθε μετάθεση σε ν σύμβολα, όπου $\nu \geq 2$, μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση αντιμεταθέσεων.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο ν.

Για $\nu = 2$, το ζητούμενο είναι σαφές. Πράγματι, είδαμε στο Παράδειγμα 3.4.14 ότι το σύνολο S_2 περιέχει την αντιμετάθεση $f : \{1,2\} \longrightarrow \{1,2\}$ με $f(1) = 2$ και $f(2) = 1$ και την ταυτοτική μετάθεση του συνόλου $\{1,2\}$, η οποία είναι ίση με τη σύνθεση $f \circ f$.

Έστω τώρα ότι $\nu > 2$ και η πρόταση ισχύει για τις μεταθέσεις που ανήκουν στο $S_{\nu-1}$. Θεωρούμε μια μετάθεση $f \in S_\nu$ και γράφουμε $f(\nu) = \mu$, για κάποιο $\mu \in \{1, 2, \cdots, \nu\}$. Έστω $\tau \in S_\nu$ η αντιμετάθεση με $\tau(\nu) = \mu$ και $\tau(\mu) = \nu$. (Στην περίπτωση που $\nu = \mu$ θέτουμε τ την ταυτοτική απεικόνιση.) Τότε, έχουμε $(\tau \circ f)(\nu) = \nu$ και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση $(\tau \circ f)' : \{1, 2, \ldots, \nu - 1\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, \nu - 1\}$ με $(\tau \circ f)'(s) = (\tau \circ f)(s)$ για κάθε $s \in \{1, 2, \ldots, \nu - 1\}$. Καθώς είναι $(\tau \circ f)' \in S_{\nu-1}$, από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι

$$(\tau \circ f)' = \tau_1' \circ \tau_2' \circ \ldots \circ \tau_l' \in S_{\nu-1},$$

για κάποιες αντιμεταθέσεις $\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_l' \in S_{\nu-1}$. Θεωρούμε τώρα τις μεταθέσεις $\tau_i \in S_\nu$, $i = 1, 2, \ldots, l$, οι οποίες ορίζονται θέτοντας $\tau_i(s) = \tau_i'(s)$ για κάθε $s \in \{1, 2, \ldots, \nu - 1\}$ και $\tau_i(\nu) = \nu$. Προφανώς οι τ_i είναι αντιμεταθέσεις και

$$\tau \circ f = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_l \in S_\nu.$$

Συνεπώς, έπεται ότι

$$f = \tau \circ \tau \circ f = \tau \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_l$$

και άρα η f είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων.

Παράδειγμα 3.4.17 *Θεωρούμε το σύνολο S_3 και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του Παραδείγματος 3.4.15. Εκεί, είδαμε ότι οι f_1, f_2 και f_3 είναι αντιμεταθέσεις. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $f_4 = f_1 \circ f_2$ και $f_5 = f_1 \circ f_3$, ενώ η ταυτοτική απεικόνιση του $\{1, 2, 3\}$ είναι ίση με τις συνθέσεις $f_1 \circ f_1 = f_2 \circ f_2 = f_3 \circ f_3$.*

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $\mathbb{F}^{1\times\nu}$ και ορίζουμε για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ τον πίνακα-γραμμή $e_i \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$, ο οποίος έχει 1 στην i-θέση και 0 παντού αλλού. Για παράδειγμα, έχουμε $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ και $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$. Τότε, κάθε πίνακας-γραμμή $r = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$r = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_\nu e_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} a_ie_i.$$

Πρόταση 3.4.18 *Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός και $D, D' : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ δύο απεικονίσεις ορίζουσας. Τότε, $D = D'$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Delta : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ με $\Delta(A) = D(A) - D'(A)$ για κάθε $\nu\times\nu$ πίνακα A. Θα αποδείξουμε ότι $D = D'$, δείχνοντας ότι η απεικόνιση Δ είναι η μηδενική απεικόνιση.

Κατ' αρχήν, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των απεικονίσεων D και D', αποδεικνύεται εύκολα ότι η απεικόνιση Δ ικανοποιεί τις ιδιότητες D_1, D_2 και D_3. Έτσι, ακολουθώντας την ίδια μέθοδο που ακολουθήσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 3.4.6(ii), μπορούμε να δείξουμε ότι $\Delta(B) = -\Delta(A)$ αν ο πίνακας B προκύπτει από τον $\nu \times \nu$ πίνακα A με εναλλαγή δύο γραμμών του.

Θεωρούμε τώρα έναν πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και τις γραμμές του $r_1, r_2, \dots, r_\nu$. Συνεπώς, έχουμε

$$r_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i\nu} \end{pmatrix} = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{i\nu}e_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}e_j \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$$

και άρα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες D_1 και D_2 για την απεικόνιση Δ, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\Delta(A) &= \Delta\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_\nu \end{pmatrix} \\
&= \Delta\begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^{\nu} a_{1j_1}e_{j_1} \\ \sum_{j_2=1}^{\nu} a_{2j_2}e_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j_\nu=1}^{\nu} a_{\nu j_\nu}e_{j_\nu} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j_1=1}^{\nu} a_{1j_1} \cdot\Delta\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \sum_{j_2=1}^{\nu} a_{2j_2}e_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j_\nu=1}^{\nu} a_{\nu j_\nu}e_{j_\nu} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j_1=1}^{\nu}\sum_{j_2=1}^{\nu} a_{1j_1}a_{2j_2} \cdot\Delta\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j_\nu=1}^{\nu} a_{\nu j_\nu}e_{j_\nu} \end{pmatrix} \\
&\dots \\
&= \sum_{j_1=1}^{\nu}\sum_{j_2=1}^{\nu}\dots\sum_{j_\nu=1}^{\nu}\sum_{j_\nu=1}^{\nu} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{\nu j_\nu} \cdot\Delta\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_\nu} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\Delta(A) = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ένας από τους ν^ν προσθετέους του τελευταίου αθροίσματος μηδενίζεται. Για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε επιλογή δεικτών $j_1, j_2, \dots, j_\nu \in \{1, 2, \cdots, \nu\}$. Αν δύο από τους δείκτες αυτούς είναι ίσοι, τότε από την ιδιότητα D_3 της Δ έπεται ότι

$$\Delta\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_\nu} \end{pmatrix} = 0.$$

Αν οι δείκτες $j_1, j_2, \dots, j_\nu$ είναι ανά δύο διαφορετικοί, τότε $\{j_1, j_2, \dots, j_\nu\} = \{1, 2, \dots, \nu\}$ και άρα η απεικόνιση

$$f : \{1, 2, \dots, \nu\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, \nu\},$$

η οποία ορίζεται θέτοντας $f(i) = j_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι μια μετάθεση. Έτσι, με βάση την Πρόταση 3.4.16, η f είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων. Αν η f είναι σύνθεση κ αντιμεταθέσεων, τότε ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_\nu} \end{pmatrix}$$

προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα

$$I_\nu = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_\nu \end{pmatrix}$$

εφαρμόζοντας διαδοχικά κ εναλλαγές γραμμών. Όπως σχολιάσαμε στην αρχή της απόδειξης, κάθε μία τέτοια εναλλαγή αλλάζει το πρόσημο στην τιμή της Δ. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_\nu} \end{pmatrix} = (-1)^\kappa \Delta(I_\nu) = (-1)^\kappa (D(I_\nu) - D'(I_\nu)) = (-1)^\kappa (1-1) = 0$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Θεώρημα 3.4.19 *Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση ορίζουσας $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$.*

Απόδειξη. Η ύπαρξη μιας απεικόνισης ορίζουσας έπεται από το Πόρισμα 3.4.11, ενώ η μοναδικότητά της έπεται από την Πρόταση 3.4.18.

Ορισμός 3.4.20 *Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός και $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ η μοναδική απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $\nu \times \nu$ πινάκων. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ η εικόνα $D(A) \in \mathbb{F}$ του A μέσω της D καλείται* **ορίζουσα** *του A και συμβολίζεται με $\det A$.*

Παρατήρηση 3.4.21 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $f_j : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ οι απεικονίσεις που ορίστηκαν στην Πρόταση 3.4.10. Από την Πρόταση 3.4.18 έπεται ότι $\det A = f_j(A)$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και κάθε $j = 1, 2, \ldots, \nu$. Η παράσταση αυτή της ορίζουσας του A λέγεται ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την j-στήλη ή ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς την j-στήλη. Ειδικότερα, συμπεραίνουμε ότι το στοιχείο του $\mathbb{F}$ που προκύπτει αναπτύσσοντας κατά Laplace ως προς κάποια στήλη δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη στήλη.*

Παράδειγμα 3.4.22 *Μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}$$

με ανάπτυξη ως προς την 3η-στήλη. Έτσι, έχουμε

$$\det A = f_3(A) = (-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τις 2×2 *ορίζουσες με βάση το Παράδειγμα 3.4.3, έπεται ότι*

$$\det A = (-1) \cdot (-11) - 3 \cdot (-6) + (-1) = 28.$$

Πρόταση 3.4.23 *Η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού* $\nu \times \nu$ *πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο ν. Για $\nu = 1$, το ζητούμενο είναι άμεσο (βλέπε Παράδειγμα 3.4.2). Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\nu \geq 2$ και το ζητούμενο ισχύει για τους άνω τριγωνικούς $(\nu - 1) \times (\nu - 1)$ πίνακες. Θεωρούμε έναν άνω τριγωνικό $\nu \times \nu$ πίνακα $A = (a_{ij})$ και υπολογίζουμε την ορίζουσά του με ανάπτυξη ως προς την 1η-στήλη. Καθώς $a_{i1} = 0$ για κάθε $i > 1$, έπεται ότι

$$\det A = a_{11} \det A_{11}.$$

Ο $(\nu - 1) \times (\nu - 1)$ πίνακας A_{11} όμως είναι άνω τριγωνικός και έχει διαγώνια στοιχεία $a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{\nu\nu}$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση, έπεται ότι

$$\det A_{11} = a_{22}a_{33}\ldots a_{\nu\nu}$$

και άρα

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{\nu\nu}.$$

Παράδειγμα 3.4.24 *Για τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}$$

έχουμε $\det A = (-1) \cdot 3 \cdot 5 = -15$.

Παράδειγμα 3.4.25 *Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}.$$

Αν και μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του A *αναπτύσσοντας ως προς οποιαδήποτε στήλη θέλουμε, θα προσπαθήσουμε, χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ορίζουσας, να κατασκευάσουμε από τον* A *έναν άλλο τετραγωνικό πίνακα* A' *του οποίου η ορίζουσα υπολογίζεται πιο* *εύκολα. Πιο συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.4.6(i), σύμφωνα με την οποία κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός τύπου ΙΙ αφήνει την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα αμετάβλητη. Έτσι, έχουμε*

$$
\begin{aligned}
\det A &\overset{r_2 \mapsto r_2 + 2r_1}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_3 \mapsto r_3 + r_1}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_4 \mapsto r_4 - r_1}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_3 \mapsto r_3 + 2r_2}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_4 \mapsto r_4 - r_2}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_4 \mapsto r_4 + \frac{1}{3} r_3}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -7/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι άνω τριγωνικός και άρα από την Πρόταση 3.4.23 έπεται ότι

$$\det A = (-1) \cdot (-1) \cdot 6 \cdot (-7/3) = -14.$$

Γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα είναι ίση με 0 αν δύο γραμμές του είναι ίσες (ιδιότητα D_3 της απεικόνισης ορίζουσας). Θα δούμε στη συνέχεια ότι το ίδιο συμβαίνει αν ο πίνακας έχει δύο στήλες ίσες.

Πρόταση 3.4.26 *Αν ο $\nu \times \nu$ πίνακας A έχει δύο στήλες ίσες, τότε $\det A = 0$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο ν. Για $\nu = 2$, το ζητούμενο έπεται άμεσα από τον τύπο του Παραδείγματος 3.4.3. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\nu \geq 3$ και το ζητούμενο ισχύει για τους τετραγωνικούς πίνακες διάστασης $\nu - 1$. Θεωρούμε έναν $\nu \times \nu$ πίνακα $A = (a_{ij})$, του οποίου δύο στήλες είναι ίσες. Έτσι, αν $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ είναι οι στήλες του A, τότε υπάρχουν διακεκριμένοι δείκτες $j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ με $c_{j_1} = c_{j_2}$. Επιλέγουμε ένα δείκτη

$j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ με $j \neq j_1, j_2$ και υπολογίζουμε την ορίζουσά του A αναπτύσσοντας ως προς τη j-στήλη. Έτσι, έχουμε

$$\det A = f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Καθώς όμως $j \neq j_1, j_2$ και $c_{j_1} = c_{j_2}$, είναι φανερό ότι ο $(\nu - 1) \times (\nu - 1)$ πίνακας A_{ij} έχει δύο στήλες ίσες για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Έτσι, με βάση την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε $\det A_{ij} = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και άρα $\det A = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχτεί ότι η ορίζουσα ενός κάτω τριγωνικού $\nu \times \nu$ πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

2. Να δειχτεί ότι για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ έχουμε $\det(\lambda A) = \lambda^{\nu} \det A$.

3. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $x \in \mathbb{F}$ για τις οποίες

$$(i)\ \det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(ii)\ \det \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$(i)\ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \nu-1 & \nu \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & \nu-1 & \nu \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & \nu-1 & \nu \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 & \nu \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & -\nu+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(ii)\ \det \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(iii)\ \det \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ 2a^2-a-1 & 2b^2-b-1 & 2c^2-c-1 \end{pmatrix}$$

5. Να δειχτεί ότι:

$$(i)\ \text{Αν } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}, \text{ τότε } \det A = 2^{\nu-1}$$

(ii) Αν $B = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε $\det B = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2\nu}$

3.5 Ορίζουσες και Γραμμικά Συστήματα

Στην Παράγραφο αυτή, θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα για να βρούμε έναν τύπο για τη λύση ενός συστήματος ν εξισώσεων με ν αγνώστους, στην περίπτωση που ο πίνκας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος. Αρχικά, θα βρούμε έναν τρόπο για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός αντιστρεψίμου πίνακα.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και (i,j) είναι ένα ζεύγος δεικτών με $i,j \in \{1,2,\dots,\nu\}$, τότε συμβολίζουμε με A_{ij} τον $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-γραμμή του και την j-στήλη του.

Ορισμός 3.5.1 *Έστω A ένας $\nu\times\nu$ πίνακας. Ο $\nu\times\nu$ πίνακας $adjA = (b_{ij})$, ο οποίος ορίζεται θέτοντας $b_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$ για κάθε $i,j = 1,2,\dots,\nu$, λέγεται* **προσαρτημένος** *πίνακας του A.*

Πρόταση 3.5.2 *Αν A είναι ένας $\nu\times\nu$ πίνακας, τότε $(adjA)\cdot A = (\det A)\cdot I_\nu$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $adjA = (b_{ij})$ με $b_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$ για κάθε $i,j\in\{1,2,\dots,\nu\}$ και $(adjA)\cdot A = (c_{ij})$. Σταθεροποιούμε ένα ζεύγος δεικτών (i,j) και έχουμε

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{\nu} b_{is}a_{sj} = \sum_{s=1}^{\nu} a_{sj}b_{is} = \sum_{s=1}^{\nu}(-1)^{i+s}a_{sj}\det A_{si}.$$

Θεωρούμε τώρα τις στήλες $c_1, c_2, \dots, c_\nu$ του πίνακα A και παρατηρούμε ότι το τελευταίο άθροισμα παραπάνω είναι ακριβώς το ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς την i-στήλη της ορίζουσας του $\nu\times\nu$ πίνακα

$$A(i,j) = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_{i-1} & c_j & c_{i+1} & \dots & c_\nu \end{pmatrix},$$

ο οποίος προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την i-στήλη του με την c_j. Συνεπώς, έχουμε

$$c_{ij} = \det A(i,j)$$

για κάθε $i,j = 1,2,\dots,\nu$. Ο πίνακας $A(i,j)$ όμως έχει δύο στήλες ίσες αν $i\neq j$ και άρα, στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε $c_{ij} = \det A(i,j) = 0$ (Πρόταση 3.4.26). Είναι φανερό ότι $A(i,i) = A$ και έτσι έχουμε $c_{ii} = \det A$ για κάθε $i = 1,2,\dots,\nu$. Τελικά, έπεται ότι $c_{ij} = \delta_{ij}\det A$ για κάθε i,j και άρα δείχτηκε το ζητούμενο.

Πόρισμα 3.5.3 *Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA$.*

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα της Πρότασης 3.5.2 από δεξιά με τον A^{-1}, έπεται ότι $adjA = (\det A) \cdot A^{-1}$. Καθώς η ορίζουσα του A είναι μη-μηδενική (Πρόταση 3.4.9), η ζητούμενη σχέση είναι άμεση.

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω τύπος για τον αντίστροφο ενός πίνακα έχει περισσότερο θεωρητικό παρά χρηστικό ενδιαφέρον, καθώς για τον υπολογισμό του προσαρτημένου πίνακα απαιτούνται πολλές πράξεις.

Παράδειγμα 3.5.4 *Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

για τον οποίο υπολογίζουμε ότι $\det A = 4$ και

$$adjA = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τις 2×2 ορίζουσες που εμφανίζονται, έπεται ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\nu}x_\nu = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\nu}x_\nu = b_2 \\ &\cdots \\ &a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu\nu}x_\nu = b_\nu \end{aligned}$$

Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών και $b \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ η στήλη των σταθερών όρων, τότε το σύστημα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$A \cdot x = b,$$

με άγνωστο τον πίνακα στήλη $x \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε έχουμε $x = A^{-1} \cdot b$ και άρα $x = \frac{1}{\det A} \cdot adjA \cdot b$. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\nu \end{pmatrix}$$

και έτσι

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{i+j} b_j \det A_{ji}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Παρατηρούμε ότι το παραπάνω άθροισμα είναι ακριβώς το ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς την i-στήλη της ορίζουσας του $\nu \times \nu$ πίνακα

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \ldots & a_{1\nu} \\ a_{21} & \ldots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \ldots & a_{2\nu} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \ldots & a_{\nu\,i-1} & b_\nu & a_{\nu\,i+1} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{pmatrix},$$

ο οποίος προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την i-στήλη του με τη στήλη b των σταθερών όρων. Συνεπώς, στην περίπτωση που ο πίνακας A των συντελεστών είναι αντιστρέψιμος, η λύση του γραμμικού συστήματος δίνεται από τους τύπους

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Ο μαθηματικός αυτός τύπος που δίνει τη λύση ενός γραμμικού συστήματος λέγεται **τύπος του Cramer**.

Παρατήρηση 3.5.5 *Ο τύπος του Cramer δεν προσφέρεται ιδιαίτερα για υπολογισμούς, καθώς για τον υπολογισμό οριζουσών συνήθως απαιτούνται πολλές πράξεις. Είναι χρήσιμος για άλλου είδους ερωτήματα. Η κύρια μέθοδος αριθμητικής επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος είναι η μέθοδος απαλοιφής του Gauss και οι παραφυάδες της, οι οποίες αναπτύσσονται σε βιβλία αριθμητικής ανάλυσης.*

Παράδειγμα 3.5.6 *Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{aligned} &x_1 - x_3 = 1 \\ &2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ &x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{aligned}$$

με πίνακα συντελεστών τον 3×3 πίνακα A του Παραδείγματος 3.5.4. Έχοντας υπολογίσει εκεί τον πίνακα A^{-1}, έπεται ότι η λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ -7/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τους τύπους του Cramer, έχουμε

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot 7 = \frac{7}{4},$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (-7) = -\frac{7}{4}$$

και

$$x_3 = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 3}$. Να δειχτεί ότι $adjA = A$.

2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μή-μηδενικά διαγώνια στοιχεία. Να δειχτεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι επίσης άνω τριγωνικός.

3. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε να δειχτεί ότι $adj(adjA) = (\det A)^{\nu-2} \cdot A$.

4. Να δειχτεί ότι αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι συμμετρικός, τότε ο $adjA$ είναι επίσης συμμετρικός.

5. Έστω $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο προσαρτημένος πίνακας $adjA$ και ο αντίστροφος του A, αν υπάρχει.

6. Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Cramer για την επίλυση των συστημάτων:

$$(i) \quad \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \end{array} \qquad\qquad (ii) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{array}$$

Κεφάλαιο 4

Διανυσματικοί Χώροι

Σ' αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια του διανυσματικού χώρου (ή αλλιώς γραμμικού χώρου) και μελετούμε ορισμένες ιδιότητές του.

4.1 Ορισμοί και Παραδείγματα

Πριν δώσουμε τον ορισμό του διανυσματικού χώρου, ας δούμε ορισμένα γνωστά μας παραδείγματα:

(i) Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ και $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ το σύνολο των $\nu \times \mu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ τότε το άθροισμά τους είναι επίσης ένας $\nu \times \mu$ πίνακας $A + B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$. Αν τώρα $\lambda \in \mathbb{F}$ και $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, τότε ορίζεται ο πίνακας $\lambda A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$.

(ii) Έστω Δ^2 το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου με αρχή το σημείο O. Αν $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in \Delta^2$, τότε ορίζεται το άθροισμά τους $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \in \Delta^2$ (με τον κανόνα του παραλληλογράμμου). Αν τώρα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{OA} \in \Delta^2$, τότε ορίζεται το $\lambda\overrightarrow{OA} \in \Delta^2$.

(iii) Έστω $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Αν $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, τότε το άθροισμά τους είναι επίσης μία πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής, $f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Αν τώρα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, τότε ορίζεται η $\lambda f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Η πρόσθεση πινάκων και ο πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ με ένα πίνακα στο παράδειγμα (i), η πρόσθεση διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός ενός πραγματικού αριθμού με ένα διάνυσμα στο παράδειγμα (ii) και η πρόσθεση πραγματικών συναρτήσεων και ο πολλαπλασιασμός ενός πραγματικού αριθμού με μια πραγματική συνάρτηση στο παράδειγμα (iii) έχουν ορισμένες κοινές θεμελιώδεις ιδιότητες. Γιά παράδειγμα, αν x, y, z είναι τρείς $\nu \times \mu$ πίνακες, ή τρία διανύσματα του επιπέδου με αρχή το O, ή τρεις πραγματικές συναρτήσεις, τότε ισχύει

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

ενώ αν λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

Παραδείγματα όπως τα προηγούμενα οδήγησαν στην έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 4.1.1 *Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Ένας* **διανυσματικός χώρος** *επί του $\mathbb{F}$ αποτελείται από ένα μη-κενό σύνολο V, μια απεικόνιση $V \times V \longrightarrow V$ με $(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$, που λέγεται πρόσθεση, και μια απεικόνιση $\mathbb{F} \times V \longrightarrow V$ με $(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$, που λέγεται πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ με ένα στοιχείο του V, έτσι ώστε να ισχύουν:*

(i) $u + v = v + u$ *για κάθε* $u, v \in V$

(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *για κάθε* $u, v, w \in V$

(iii) *Υπάρχει ένα στοιχείο* $\mathbb{O} \in V$ *με την ιδιότητα* $v + \mathbb{O} = v$ *για κάθε* $v \in V$.

(iv) *Για κάθε στοιχείο* $v \in V$ *υπάρχει ένα στοιχείο* $-v \in V$ *με την ιδιότητα* $v + (-v) = \mathbb{O}$.

(v) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{F}$ *και* $u, v \in V$

(vi) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ *και* $v \in V$

(vii) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ *και* $v \in V$

$(viii)$ $1v = v$ *για κάθε* $v \in V$

Παρατηρήσεις 4.1.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

(i) *Το στοιχείο $\mathbb{O} \in V$ είναι μοναδικό με την ιδιότητα $v + \mathbb{O} = v$ για κάθε $v \in V$. Πράγματι, αν $\mathbb{O}' \in V$ και $v + \mathbb{O}' = v$ για κάθε $v \in V$, τότε είναι $\mathbb{O}' = \mathbb{O}' + \mathbb{O} = \mathbb{O}$. Το $\mathbb{O} \in V$ λέγεται το* **μηδενικό στοιχείο** *του V και συμβολίζεται με 0_V. Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, τότε το μηδενικό στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου συμβολίζεται με $\mathbb{O}$.*

(ii) *Για κάθε $v \in V$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $-v \in V$ με $v + (-v) = \mathbb{O}$. Πράγματι, αν το στοιχείο $v' \in V$ είναι τέτοιο ώστε $v + v' = \mathbb{O}$, τότε*

$$-v = -v + \mathbb{O} = -v + (v + v') = (-v + v) + v' = \mathbb{O} + v' = v'.$$

Το $-v$ λέγεται το **αντίθετο στοιχείο** *του v.*

Ένας διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{F}$ λέγεται επίσης και γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Όταν το σύνολο $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών θα λέμε ότι έχουμε έναν *πραγματικό διανυσματικό χώρο* και όταν το σύνολο $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών θα λέμε ότι έχουμε ένα *μιγαδικό διανυσματικό χώρο*. Υπάρχουν επίσης διανυσματικοί χώροι στους οποίους το σύνολο των συντελεστών $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ ή το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Εμείς θα μελετήσουμε παρακάτω μόνο πραγματικούς ή μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους.

Παραδείγματα 4.1.3 *Εύκολα επαληθεύουμε ότι:*

(i) *Το σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ των $\nu \times \mu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ με τη συνήθη πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ με ένα πίνακα, είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Το μηδενικό στοιχείο $0_{\mathbb{F}^{\nu\times\mu}}$ είναι ο μηδενικός $\nu \times \mu$ πίνακας και ο αντίθετος του $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι ο πίνακας $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$.*

(ii) *Το σύνολο Δ^2 των διανυσμάτων του επιπέδου που έχουν ως αρχή το σημείο O με τη συνήθη πρόσθεση διανυσμάτων και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με ένα διάνυσμα είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Το μηδενικό στοιχείο $0_{\Delta^2} = \overrightarrow{OO}$ είναι το διάνυσμα με αρχή και τέλος το O. Αν $\overrightarrow{OA} \in \Delta^2$, τότε το αντίθετο διάνυσμα $-\overrightarrow{OA}$ είναι το διάνυσμα που είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{OA}$ με αρχή το O, φορά αντίθετη με τη φορά του $\overrightarrow{OA}$ και μέτρο ίσο με το μέτρο του $\overrightarrow{OA}$.*

(iii) *Το σύνολο $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής με τη συνήθη πρόσθεση συναρτήσεων και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με μια συνάρτηση είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Το μηδενικό στοιχείο $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ είναι η μηδενική συνάρτηση, δηλαδή η σταθερή συνάρτηση με τιμή 0, και αν $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, τότε η $-f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται με $x \longmapsto -f(x)$.*

Παράδειγμα 4.1.4 *Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός και $\mathbb{F}^\nu$ το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι με πρόσθεση*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) + (b_1, b_2, \ldots, b_\nu) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_\nu + b_\nu)$$

και πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ με ένα στοιχείο του $\mathbb{F}^\nu$

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_\nu),$$

το $\mathbb{F}^\nu$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Εδώ έχουμε $0_{\mathbb{F}^\nu} = (0, 0, \ldots, 0)$ και αν $u = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$, τότε $-u = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_\nu)$.

Παράδειγμα 4.1.5 *Έστω*

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\mu}x_\mu = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\nu}x_\mu = 0 \\ \cdots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu\mu}x_\mu = 0 \end{array}$$

ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους με πραγματικούς συντελεστές. Το σύνολο των λύσεων του συστήματος, με πρόσθεση δυο λύσεων και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με μια λύση όπως στο σύνολο $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$, είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Παράδειγμα 4.1.6 *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ως έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο με πρόσθεση τη συνήθη πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών και πολλαπλασιασμό το γινόμενο πραγματικού αριθμού επί μιγαδικό.*

Παράδειγμα 4.1.7 *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ως ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο με πρόσθεση τη συνήθη πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών και πολλαπλασιασμό το γινόμενο μιγαδικού αριθμού επί μιγαδικό.*

Παράδειγμα 4.1.8 *Έστω $\mathbb{R}_\nu[x]$ το σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ ν. Εύκολα επαληθεύουμε ότι με πρόσθεση*

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_\nu x^\nu) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_\nu x^\nu) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_\nu + b_\nu)x^\nu$$

και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με ένα στοιχείο του $\mathbb{R}_\nu[x]$

$$\lambda(a_0 + a_1x + \cdots + a_\nu x^\nu) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_\nu x^\nu$$

το $\mathbb{R}_\nu[x]$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Το μηδενικό στοιχείο $0_{\mathbb{R}_\nu[x]}$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο $0 + 0x + \cdots + 0x^\nu$ και αν $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_\nu x^\nu$, τότε το αντίθετο στοιχείο $-p(x)$ είναι το πολυώνυμο $-a_0 - a_1x - \cdots - a_\nu x^\nu$.

Πρόταση 4.1.9 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

- (i) *Για κάθε $\lambda \in F$ έχουμε ότι $\lambda 0_V = 0_V$.*
- (ii) *Για κάθε $v \in V$ έχουμε ότι $0_\mathbb{F} v = 0_V$.*
- (iii) *Αν για τα στοιχεία $\lambda \in \mathbb{F}$ και $v \in V$ ισχύει $\lambda v = 0_V$, τότε $\lambda = 0_\mathbb{F}$ ή $v = 0_V$.*
- (iv) *Για κάθε $\lambda \in F$ και κάθε $v \in V$ έχουμε ότι $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$.*

Απόδειξη.
(i) Έχουμε $\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V$. Έτσι, αν $\lambda 0_V = \omega$ τότε έχουμε τη σχέση $\omega + \omega = \omega$. Προσθέτοντας το στοιχείο $-\omega \in V$ και στα δύο μέλη της ισότητας, έχουμε $(\omega + \omega) + (-\omega) = \omega + (-\omega) = 0_V$. Τώρα, από την ιδιότητα (ii) της πρόσθεσης, έχουμε ότι $0_V = (\omega + \omega) + (-\omega) = \omega + (\omega + (-\omega)) = \omega + 0_V = \omega$.

(ii) Έχουμε ότι $0_\mathbb{F} v = (0_\mathbb{F} + 0_\mathbb{F})v = 0_\mathbb{F} v + 0_\mathbb{F} v$. Αν θέσουμε $0_\mathbb{F} v = \omega$ τότε έχουμε τη σχέση $\omega + \omega = \omega$ και συνεχίζουμε όπως πριν.

(iii) Έστω ότι $\lambda v = 0_V$. Αν $\lambda = 0_\mathbb{F}$, τότε έχουμε το ζητούμενο. Αν $\lambda \neq 0_\mathbb{F}$, τότε θεωρούμε τον αντίστροφο $\lambda^{-1} \in \mathbb{F}$ και έχουμε

$$v = 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1} 0_V.$$

Συνεπώς, με βάση το (i) παραπάνω, έπεται ότι $v = 0_V$.

(iv) Χρησιμοποιώντας και πάλι το (i) παραπάνω, έπεται ότι

$$\lambda v + \lambda(-v) = \lambda(v + (-v)) = \lambda 0_V = 0_V$$

και άρα $\lambda(-v) = -(\lambda v)$ (βλέπε Παρατήρηση 4.1.2(ii)). Ανάλογα, χρησιμοποιώντας το (ii) παραπάνω, έχουμε

$$\lambda v + (-\lambda)v = (\lambda + (-\lambda)v = 0_\mathbb{F} v = 0_V$$

και άρα $(-\lambda)v = -(\lambda v)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι επαληθεύσεις των ισχυρισμών στα Παραδείγματα 4.1.3, 4.1.4 και 4.1.5.

2. Να δειχτεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές, με πράξεις τη γνωστή πρόσθεση πολυωνύμων και το γνωστό πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με πολυώνυμο, είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

3. Έστω
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\mu}x_\mu = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\nu}x_\mu = b_2 \\ \cdots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu\mu}x_\mu = b_\nu \end{array}$$
ένα μη-ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους με πραγματικούς συντελεστές. Να δειχτεί ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος αυτού, με τη γνωστή πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με μια λύση, δεν είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

4. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος έπί του $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι:

   (i) $(-1)v = -v$ για κάθε $v \in V$

   (ii) Αν $u, v, w \in V$ και $u + v = u + w$, τότε $v = w$.

   (iii) Αν $u, v \in V$ και $\lambda u = \lambda v$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0_{\mathbb{F}}$, τότε $u = v$.

4.2 Υπόχωροι και Χώροι Πηλίκο

Ορισμός 4.2.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Ένα υποσύνολο A του V λέγεται* **υπόχωρος** *του V αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $0_V \in A$

(ii) *Για κάθε $u, v \in A$ έχουμε $u + v \in A$.*

(iii) *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ και $v \in A$ έχουμε $\lambda v \in A$.*

Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε $A \leq V$.

Παρατήρηση 4.2.2 *Ένας υπόχωρος A ενός διανυσματικού χώρου V κληρονομεί από τον V όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 4.1.1, που απαιτούνται για τον ορισμό του διανυσματικού χώρου. Δηλαδή, ο A είναι και αυτός ένας διανυσματικός χώρος ως πρός την ίδια πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με στοιχεία του $\mathbb{F}$, που θεωρήθηκε για τον ορισμό του V.*

Παράδειγμα 4.2.3 *Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$. Το υποσύνολο $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, έχουμε:*

(i) $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in A$

(ii) *Αν $u, v \in A$, τότε $u = (x_1, 0)$ και $v = (x_2, 0)$ για κάποια $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και έτσι $u + v = (x_1 + x_2, 0) \in A$.*

(iii) *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u \in A$, τότε $u = (x, 0)$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ και άρα $\lambda u = (\lambda x, 0) \in A$.*

Παράδειγμα 4.2.4 *Το υποσύνολο* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ *δεν είναι υπόχωρος του* $\mathbb{R}^2$. *Πράγματι, εδώ έχουμε* $(1, 0) \in B$ *αλλά* $(-1) \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin B$.

Παράδειγμα 4.2.5 *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$. *Είναι προφανές ότι ο* V *είναι υπόχωρος του εαυτού του. Επίσης, το μονοσύνολο* $\{0_V\}$ *είναι υπόχωρος του* V.

Παράδειγμα 4.2.6 *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$ *και* $v \in V$. *Τότε, το σύνολο* $\langle v \rangle = \{\lambda v \in V \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ *είναι ένας υπόχωρος του* V.

Παράδειγμα 4.2.7 *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$ *και* $u, v \in V$. *Τότε, το σύνολο* $\langle u, v \rangle = \{\lambda u + \mu v \in V \mid \lambda, \mu \in \mathbb{F}\}$ *είναι ένας υπόχωρος του* V.

Παράδειγμα 4.2.8 *Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε ποιοι είναι οι υπόχωροι του* Δ^2. *Ένας υπόχωρος είναι το σύνολο* $\{0_{\Delta^2}\}$. *Έστω τώρα* $A \leq \Delta^2$ *ένας υπόχωρος διαφορετικός από τον παραπάνω και* $\overrightarrow{OB} \in A$ *με* $\overrightarrow{OB} \neq 0_{\Delta^2}$. *Υπάρχουν οι παρακάτω δύο περιπτώσεις:*

(i) *Για κάθε* $\overrightarrow{O\Gamma} \in A$ *υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{R}$ *με* $\overrightarrow{O\Gamma} = \lambda \overrightarrow{OB}$. *Στην περίπτωση αυτή, ο υπόχωρος* A *έχει τη μορφή* $A = \{\lambda \overrightarrow{OB} \in \Delta^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(ii) *Υπάρχει* $\overrightarrow{O\Gamma} \in A$, *έτσι ώστε* $\overrightarrow{O\Gamma} \neq \lambda \overrightarrow{OB}$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Τότε, για κάθε* $\overrightarrow{OP} \in \Delta^2$ *υπάρχουν* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *με την ιδιότητα* $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OB} + \mu \overrightarrow{O\Gamma}$. *Άρα, στην περίπτωση αυτή, έχουμε* $A = \Delta^2$.

Εξετάζοντας «γεωμετρικά» το παραπάνω παράδειγμα, βλέπουμε ότι οι υπόχωροι του Δ^2 *είναι όλος ο χώρος, κάθε «ευθεία» που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το συνολο που περιέχει μόνο την αρχή των αξόνων.*

Παράδειγμα 4.2.9 *Το σύνολο* $Tr^{\alpha}(\nu, \mathbb{F})$ *των άνω τριγωνικών* $\nu \times \nu$ *πινάκων με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ *(πρβλ. Άσκηση 2.2.6*(iii)*).*

Παράδειγμα 4.2.10 *Το σύνολο λύσεων* Λ *ενός ομογενούς συστήματος* ν *εξισώσεων με* μ *αγνώστους*

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\mu}x_\mu = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\mu}x_\mu = 0 \\ \cdots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu\mu}x_\mu = 0 \end{array}$$

με συντελεστές από το $\mathbb{F}$ *είναι υπόχωρος του* $F^{\nu \times 1}$.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο υπόχωροί του. Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι το σύνολο $A \cap B$ είναι επίσης ένας υπόχωρος του V. Γενικότερα, ισχύει το εξής:

Πρόταση 4.2.11 *Έστω* Y *ένα μη-κενό σύνολο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου* V. *Τότε, η τομή των υποχώρων αυτών είναι ένας υπόχωρος του* V.

Απόδειξη. Έστω A η τομή των υπόχωρων που ανήκουν στο σύνολο Y. Κάθε υπόχωρος του V, επομένως και κάθε υπόχωρος που ανήκει στο σύνολο Y, περιέχει το στοιχείο 0_V. Έτσι το 0_V θα βρίσκεται στην τομή A. Έστω u, v δύο στοιχεία του συνόλου A. Τα στοιχεία αυτά θα ανήκουν σε κάθε υπόχωρο του Y. Συνεπώς, το άθροισμα $u + v$ θα ανήκει επίσης σε κάθε υπόχωρο του Y και άρα και στην τομή τους A. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\lambda v \in A$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ και $v \in A$. Έτσι, το σύνολο A είναι ένας υπόχωρος του χώρου V.

Είδαμε ότι αν A, B είναι υπόχωροι του V, τότε η τομή $A \cap B$ είναι επίσης ένας υπόχωρος του V. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ακόμη έναν υπόχωρο του V από τους A και B, ως εξής: Θεωρούμε το σύνολο

$$A + B = \{v \in V \mid v = v_1 + v_2 \text{ για κάποια } v_1 \in A \text{ και } v_2 \in B\}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι αυτό το σύνολο είναι ένας υπόχωρος του V, ο οποίος λέγεται το **άθροισμα** των A και B.

Γενικότερα, αν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V τότε εύκολα επαληθεύουμε ότι το σύνολο

$$\{v \in V \mid v = v_1 + v_2 + \cdots + v_\nu \text{ για κάποια } v_i \in A_i,\ 1 \leq i \leq \nu\}$$

είναι ένας υπόχωρος του V, ο οποίος λέγεται το άθροισμα των $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ και συμβολίζεται με $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu$ ή $\sum_{i=1}^{\nu} A_i$.

Παράδειγμα 4.2.12 *Έστω $\mathbb{R}^2$ ο διανυσματικός χώρος των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Αν $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ και $Y = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$, τότε οι X, Y είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ και έχουμε $X \cap Y = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $X + Y = \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι ο X (αντίστοιχα, ο Y) είναι ο «άξονας των x» (αντίστοιχα, «ο άξονας των y») στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$.*

Παράδειγμα 4.2.13 *Έστω $\mathbb{R}^3$ ο διανυσματικός χώρος των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών. Αν $X = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ $Y = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$ και $Z = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, τότε οι X, Y, Z είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και $X + Y + Z = \mathbb{R}^3$.*

Παράδειγμα 4.2.14 *Έστω $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ο διανυσματικός χώρος των $\nu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Αν $Tr^{\alpha}(\nu, \mathbb{F})$ (αντίστοιχα $Tr^{\kappa}(\nu, \mathbb{F})$) είναι ο υπόχωρος των άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικών $\nu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, τότε η τομή $Tr^{\alpha}(\nu, \mathbb{F}) \cap Tr^{\kappa}(\nu, \mathbb{F})$ είναι το σύνολο των διαγωνίων πινάκων του $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, ενώ $Tr^{\alpha}(\nu, \mathbb{F}) + Tr^{\kappa}(\nu, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.*

Ορισμός 4.2.15 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο υπόχωροι του. Αν $V = A + B$ και $A \cap B = \{0_V\}$, τότε ο V λέγεται το **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων A και B και γράφουμε $V = A \oplus B$.*

Πρόταση 4.2.16 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο υπόχωροί του. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) $V = A \oplus B$

(ii) *Κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $v = v_1 + v_2$ για κάποια $v_1 \in A$ και $v_2 \in B$. (Δηλαδή, αν $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$ με $v_1, v_1' \in A$ και $v_2, v_2' \in B$, τότε $v_1 = v_1'$ και $v_2 = v_2'$.)*

Απόδειξη. Έστω ότι $V = A \oplus B$. Από τον ορισμό προκύπτει ότι κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται ως άθροισμα $v = v_1 + v_2$ με $v_1 \in A$ και $v_2 \in B$. Έστω ότι για το στοιχείο $v \in V$ υπάρχει και μία δεύτερη γραφή αυτού του τύπου, έστω δηλαδή ότι $v = v_1' + v_2'$ με $v_1' \in A$ και $v_2' \in B$. Εξισώνοντας, έχουμε $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$ και άρα $v_1 - v_1' = v_2' - v_2$. Το στοιχείο $v_1 - v_1' = v_2' - v_2$ ανήκει ταυτόχρονα και στον υπόχωρο A και στον υπόχωρο B, δηλαδή ανήκει στην τομή $A \cap B$. Αλλά $A \cap B = \{0_V\}$, αφού $V = A \oplus B$, και άρα έχουμε ότι $v_1 - v_1' = v_2' - v_2 = 0_V$. Συνεπώς, $v_1 = v_1'$ και $v_2 = v_2'$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα της μορφής $v_1 + v_2$, όπου $v_1 \in A$ και $v_2 \in B$. Τότε, από τον ορισμό του αθροίσματος υποχώρων, έπεται ότι $V = A + B$. Έστω τώρα ένα στοιχείο $v \in A \cap B$. Τότε, έχουμε $v = v + 0_B = 0_A + v$. (Γνωρίζουμε βέβαια ότι $0_B = 0_A = 0_V$.) Από τη μοναδικότητα της γραφής που υποθέσαμε, έχουμε ότι $v = 0_A = 0_V$.

Παράδειγμα 4.2.17 *Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Παραδείγματος 4.2.12, παρατηρούμε ότι ο* $\mathbb{R}^2$ *είναι το ευθύ άθροισμα των* X, Y, *αφού* $\mathbb{R}^2 = X + Y$ *και* $X \cap Y = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Παράδειγμα 4.2.18 *Αναφερόμενοι στο Παράδειγμα 4.2.14, παρατηρούμε ότι ο χώρος* $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *δεν είναι το ευθύ άθροισμα των υποχώρων* $Tr^\alpha(\nu, \mathbb{F})$ *και* $Tr^\kappa(\nu, \mathbb{F})$, *αφού* $Tr^\alpha(\nu, \mathbb{F}) \cap Tr^\kappa(\nu, \mathbb{F}) \neq \{0_{\mathbb{F}^{\nu\times\nu}}\}$.

Θα δούμε στη συνέχεια μια κατασκευή που μας επιτρέπει να ορίσουμε, ξεκινώντας από ένα διανυσματικό χώρο και έναν υποχωρό του, έναν άλλο διανυσματικό χώρο, το λεγόμενο διανυσματικό χώρο πηλίκο. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V επί του $\mathbb{F}$ και έναν υπόχωρο $A \leq V$. Ορίζουμε μια σχέση $\sim_A$ στο σύνολο V, θέτοντας για κάθε $v_1, v_2 \in V$

$$v_1 \sim_A v_2 \text{ αν και μόνο αν } v_2 - v_1 \in A.$$

Ας δούμε μερικές βασικές ιδιότητες της σχέσης αυτής.

Πρόταση 4.2.19 *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$, $A \leq V$ *ένας υπόχωρός του και* $\sim_A$ *η σχέση στο* V *που ορίσαμε παραπάνω. Τότε:*

(i) *Η σχέση* $\sim_A$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

(ii) *Η κλάση ισοδυναμίας* $[v]$ *του στοιχείου* $v \in V$ *είναι το σύνολο*

$$\{w \in V \mid w = v + a \text{ για κάποιο } a \in A\}.$$

(iii) *Αν* v_1, v_2, w_1, w_2 *είναι στοιχεία του* V *για τα οποία ισχύει* $v_1 \sim_A v_2$ *και* $w_1 \sim_A w_2$, *τότε* $v_1 + w_1 \sim_A v_2 + w_2$.

(iv) *Αν* v_1, v_2 *είναι στοιχεία του* V *για τα οποία ισχύει* $v_1 \sim_A v_2$ *και* $\lambda \in \mathbb{F}$, *τότε* $\lambda v_1 \sim_A \lambda v_2$.

Απόδειξη.

(i) Η σχέση είναι ανακλαστική, καθώς για κάθε $v \in V$ έχουμε $v - v = 0_V \in A$ και άρα $v \sim_A v$. Αν $v_1, v_2 \in V$ και $v_1 \sim_A v_2$, τότε $v_2 - v_1 \in A$ και άρα $v_1 - v_2 = -(v_2 - v_1) \in A$. Συνεπώς, $v_2 \sim_A v_1$ και έτσι η $\sim_A$ είναι συμμετρική. Τέλος, για να δείξουμε ότι η $\sim_A$ είναι μεταβατική, θεωρούμε τρία στοιχεία $v_1, v_2, v_3 \in V$ για τα οποία ισχύει $v_1 \sim_A v_2$ και $v_2 \sim_A v_3$. Τότε, $v_2 - v_1 \in A$ και $v_3 - v_2 \in A$ και έτσι $v_3 - v_1 = (v_3 - v_2) + (v_2 - v_1) \in A$, δηλαδή $v_1 \sim_A v_3$.

(ii) Αυτό είναι άμεσο, αφού για κάθε στοιχείο $w \in V$ ισχύει $w = v + (w - v)$, ενώ $w \in [v]$ αν και μόνο αν $v \sim_A w$ δηλαδή αν και μόνο αν $w - v \in A$.

(iii) Καθώς $v_1 \sim_A v_2$ και $w_1 \sim_A w_2$, οι διαφορές $v_2 - v_1$ και $w_2 - w_1$ ανήκουν στον υπόχωρο A. Συνεπώς, $(v_2 + w_2) - (v_1 + w_1) = (v_2 - v_1) + (w_2 - w_1) \in A$ και άρα $v_1 + w_1 \sim_A v_2 + w_2$.

(iv) Καθώς $v_1 \sim_A v_2$, έχουμε $v_2 - v_1 \in A$. Συνεπώς, $\lambda v_2 - \lambda v_1 = \lambda(v_2 - v_1) \in A$ και άρα $\lambda v_1 \sim_A \lambda v_2$.

Ορισμός 4.2.20 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$, $A \leq V$ ένας υπόχωρός του και $\sim_A$ η σχέση ισοδυναμίας στο V που ορίσαμε παραπάνω.*

(i) *Η κλάση ισοδυναμίας $[v] = \{w \in V \mid w = v + a$ για κάποιο $a \in A\}$ του $v \in V$ συμβολίζεται με $v + A$ και ονομάζεται το σύμπλοκο του v ως προς τον υπόχωρο A.*

(ii) *Το σύνολο πηλίκο $V/\sim_A = \{[v] \mid v \in V\} = \{v + A \mid v \in V\}$ συμβολίζεται με V/A.*

Όπως συμβαίνει γενικά για τις κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης ισοδυναμίας, έτσι και εδώ τα σύμπλοκα των στοιχείων του V ως προς τον υπόχωρο A αποτελούν μια διαμέριση του V. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

(i) Για κάθε $v \in V$ ισχύει $v \in v + A$. Έτσι, τα σύμπλοκα ως προς τον A είναι μη-κενά υποσύνολα του V και $\bigcup_{v \in V}(v + A) = V$.

(ii) Για κάθε $v, v' \in V$ είναι $v + A = v' + A$ αν $v \sim_A v'$ και $(v + A) \cap (v' + A) = \emptyset$ αν $v \not\sim_A v'$. Έτσι, δύο διαφορετικά σύμπλοκα είναι πάντα ξένα μεταξύ τους.

Θα δούμε τώρα ότι το σύνολο πηλίκο V/A, δηλαδή το σύνολο των συμπλόκων των στοιχείων του V ως προς τον υπόχωρο A, μπορεί να λάβει τη δομή ενός διανυσματικού χώρου. Για να ορίσουμε πρόσθεση στο V/A, θεωρούμε δύο στοιχεία $\xi_1, \xi_2 \in V/A$. Τότε, υπάρχουν στοιχεία $v_1, v_2 \in V$, τέτοια ώστε $\xi_1 = v_1 + A$ και $\xi_2 = v_2 + A$. Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε το στοιχείο $v_1 + v_2 \in V$ και το σύμπλοκο $(v_1 + v_2) + A \in V/A$. Ασφαλώς, η επιλογή των αντιπροσώπων $v_1, v_2 \in V$ των κλάσεων ισοδυναμίας $\xi_1, \xi_2 \in V/A$ δεν είναι μοναδική. Επιλέγοντας δύο άλλα στοιχεία $w_1, w_2 \in V$ με $\xi_1 = w_1 + A$ και $\xi_2 = w_2 + A$, οδηγούμαστε στο στοιχείο $w_1 + w_2 \in V$ και το σύμπλοκο $(w_1 + w_2) + A \in V/A$. Στην περίπτωση αυτή, είναι $v_1 \sim_A w_1$ και $v_2 \sim_A w_2$ και άρα (Πρόταση 4.2.19(iii)) $v_1 + v_2 \sim_A w_1 + w_2$, δηλαδή $(v_1 + v_2) + A = (w_1 + w_2) + A \in V/A$. Έτσι, αν και τα στοιχεία $v_1 + v_2, w_1 + w_2 \in V$ είναι γενικά διαφορετικά μεταξύ τους, τα σύμπλοκα $(v_1 + v_2) + A$ και $(w_1 + w_2) + A$ είναι ίσα. Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύμπλοκο $(v_1 + v_2) + A$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των αντιπροσώπων v_1 και v_2, εξαρτάται δηλαδή μόνον από τα σύμπλοκα ξ_1 και ξ_2. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα των στοιχείων $\xi_1, \xi_2 \in V/A$ ως το στοιχείο $(v_1 + v_2) + A \in V/A$. Με άλλα λόγια, καθώς $\xi_1 = v_1 + A$ και $\xi_2 = v_2 + A$, ορίζουμε

$$(v_1 + A) + (v_2 + A) = (v_1 + v_2) + A.$$

Με εντελως ανάλογο τρόπο ορίζουμε και τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό των στοιχείων του V/A με στοιχεία του $\mathbb{F}$. Έτσι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ και $\xi \in V/A$ επιλέγουμε $v \in V$ με $\xi = v + A$

και θεωρούμε το στοιχείο $\lambda v \in V$ και το σύμπλοκο $\lambda v + A \in V/A$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.19(iv), έπεται ότι το σύμπλοκο $\lambda v + A \in V/A$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του αντιπροσώπου v. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το σύμπλοκο αυτό ως το γινόμενο $\lambda\xi$. Με άλλα λόγια, καθώς $\xi = v + A$, ορίζουμε

$$\lambda(v + A) = \lambda v + A.$$

Πρόταση 4.2.21 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $A \leq V$ ένας υπόχωρός του. Τότε, το σύνολο πηλίκο V/A εφοδιασμένο με τις πράξεις που ορίστηκαν παραπάνω αποκτά τη δομή ενός διανυσματικού χώρου επί του $\mathbb{F}$ με $0_{V/A} = 0_V + A \in V/A$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη των ιδιοτήτων $(i) - (viii)$ του Ορισμού 4.1.1 για τις πράξεις που ορίστηκαν στο V/A είναι άμεση συνέπεια των αντίστοιχων ιδιοτήτων για τις πράξεις του διανυσματικού χώρου V. Ενδεικτικά, θα αποδείξουμε την ιδιότητα (v), αφήνοντας την απόδειξη των υπόλοιπων ιδιοτήτων ως άσκηση στον αναγνώστη.

Έστω λοιπόν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $\xi, \xi' \in V/A$. Τότε, υπάρχουν $v, v' \in V$ με $\xi = v + A$ και $\xi' = v' + A$. Από τον ορισμό της πρόσθεσης στο V/A, είναι $\xi + \xi' = (v + v') + A$ και άρα $\lambda(\xi + \xi') = \lambda(v + v') + A$. Επίσης, έχουμε $\lambda\xi = \lambda v + A$ και $\lambda\xi' = \lambda v' + A$ και άρα $\lambda\xi + \lambda\xi' = (\lambda v + \lambda v') + A$. Στον διανυσματικό χώρο V όμως ισχύει $\lambda(v + v') = \lambda v + \lambda v'$ και έτσι έπεται ότι $\lambda(\xi + \xi') = \lambda(v + v') + A = (\lambda v + \lambda v') + A = \lambda\xi + \lambda\xi' \in V/A$.

Παράδειγμα 4.2.22 *Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο Δ^2 των διανυσμάτων του επιπέδου με αρχή το σημείο O. Έστω P το σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες $(1, 1)$ και $A \leq \Delta^2$ ο υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$. Γεωμετρικά, ο υπόχωρος $A = \{\lambda\overrightarrow{OP} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ είναι η ευθεία L του επιπέδου που αποτελείται από τις διχοτόμους του πρώτου και του τρίτου τεταρτημορίου.*

Επαληθεύεται εύκολα ότι για κάθε δύο διανύσματα $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma} \in \Delta^2$ είναι $\overrightarrow{OB} \sim_A \overrightarrow{O\Gamma}$ αν και μόνο αν το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία L_B του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο B και είναι παράλληλη με την L. Γεωμετρικά λοιπόν, το σύμπλοκο $\overrightarrow{OB} + A$ του διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ ως προς τον υπόχωρο A είναι ακριβώς η ευθεία L_B. Έτσι, ο διανυσματικός χώρος πηλίκο Δ^2/A αποτελείται από τη δέσμη όλων των ευθειών του επιπέδου που είναι παράλληλες με την L.

Ας δούμε πώς προσθέτουμε δυο τέτοιες ευθείες L_1 και L_2, σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης στο διανυσματικό χώρο Δ^2/A. Κατ' αρχήν, θεωρούμε δυο σημεία B_1 και B_2 του επιπέδου με $B_1 \in L_1$ και $B_2 \in L_2$, οπότε $L_1 = L_{B_1}$ και $L_2 = L_{B_2}$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2} \in \Delta^2$ και το άθροισμά τους $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OB_3}$, όπου B_3 είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου, του οποίου οι άλλες τρεις κορυφές είναι τα σημεία O, B_1 και B_2. Τότε, το άθροισμα $L_1 + L_2$ είναι η ευθεία L_{B_3} που είναι παράλληλη με την L και διέρχεται από το σημείο B_3.

Ανάλογα, μπορεί να περιγραφεί γεωμετρικά και το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού με ένα στοιχείο του Δ^2/A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $\mathbb{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ το σύνολο των παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Δείξτε ότι το σύνολο αυτό είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Έστω $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=0\}$. Δείξτε ότι το σύνολο A είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

3. Να εξεταστεί αν τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι υπόχωροί του:

   (i) $M = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid a_{11} = 1\}$
   (ii) $N = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid a_{22} = 0\}$
   (iii) το σύνολο των συμμετρικών 3×3 πινάκων
   (vi) το σύνολο των αντιστρέψιμων 3×3 πινάκων

4. Να εξεταστεί αν τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$ είναι υπόχωροί του:

   (i) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$
   (ii) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$
   (iii) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_4 = x_2x_3\}$

5. Έστω A και B δύο υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι η ένωση $A \cup B$ είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$.

6. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δυο υπόχωροί του. Να δειχτεί ότι:

   (i) $A \leq A+B$ και $B \leq A+B$
   (ii) αν $\Gamma \leq V$ με $A \leq \Gamma$ και $B \leq \Gamma$, τότε $A+B \leq \Gamma$

7. Έστω $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=0\}$ και $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. Να δειχτεί ότι:

   (i) Τα υποσύνολα A και B είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.
   (ii) $A+B = \mathbb{R}^3$.

   Να εξετάσετε αν $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

8. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δυο υπόχωροί του. Να δειχτεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   (i) $V = A \oplus B$
   (ii) $V = A+B$ και αν $0_V = v_1 + v_2$ με $v_1 \in A$ και $v_2 \in B$, τότε $v_1 = 0_A$ και $v_2 = 0_B$.

9. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B, Γ τρεις υπόχωροί του. Να δειχτεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   (i) Κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $v = v_1+v_2+v_3$ για κάποια $v_1 \in A$, $v_2 \in B$ και $v_3 \in \Gamma$. (Δηλαδή, αν $v = v_1+v_2+v_3 = v_1'+v_2'+v_3'$ με $v_1, v_1' \in A$, $v_2, v_2' \in B$ και $v_3, v_3' \in \Gamma$, τότε $v_1 = v_1'$, $v_2 = v_2'$ και $v_3 = v_3'$.)
   (ii) $V = A+B+\Gamma$ και αν $0_V = v_1+v_2+v_3$ με $v_1 \in A$, $v_2 \in B$ και $v_3 \in \Gamma$, τότε $v_1 = v_2 = v_3 = 0_V$.
   (iii) $V = A+B+\Gamma$ και $A \cap (B+\Gamma) = B \cap (A+\Gamma) = \Gamma \cap (A+B) = \{0_V\}$.

4.3 Γραμμικοί Συνδυασμοί

Ορισμός 4.3.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και K ένα μη-κενό υποσύνολό του. Λέμε ότι το στοιχείο $v \in V$ είναι ένας* **γραμμικός συνδυασμός** *στοιχείων του K αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ και $v_1, v_2, \dots, v_\nu \in K$ με*

$$v = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i v_i.$$

Θα συμβολίζουμε με $\langle K \rangle$ το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K.

Παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο v του διανυσματικού χώρου V ενδέχεται να μπορεί να γραφτεί με πολλούς τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του K. Για παράδειγμα, αν $V = \mathbb{F}^2$ και $K = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$, τότε το στοιχείο $(2,2) \in V$ μπορεί να γραφτεί είτε ως $(2,2) = 2(0,1) + 2(1,0) + 0(1,1)$ είτε ως $(2,2) = 0(0,1) + 0(1,0) + 2(1,1)$.

Από το επόμενο αποτέλεσμα έπεται ότι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών ενός μη-κενού υποσυνόλου ενός διανυσματικού χώρου V έχει και αυτό τη δομή ενός διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα 4.3.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και K ένα μη-κενό υποσύνολό του. Τότε, το σύνολο $\langle K \rangle$ των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K είναι ένας υπόχωρος του V.*

Απόδειξη. Καθώς $K \neq \emptyset$, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $v_0 \in K$ και άρα $0_V = 0_{\mathbb{F}} v_0 \in \langle K \rangle$. Έστω τώρα $u, v \in \langle K \rangle$. Τότε, υπάρχουν $\lambda_i, \rho_j \in \mathbb{F}$ και $u_i, v_j \in K$, $1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq j \leq \mu$, τέτοια ώστε $u = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i u_i$ και $v = \sum_{j=1}^{\mu} \rho_j v_j$. Έτσι, το άθροισμα $u + v = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{\mu} \rho_j v_j$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του K. Αν τώρα $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε το γινόμενο $\lambda v = \lambda(\sum_{j=1}^{\mu} \rho_j v_j) = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda \rho_j v_j$ είναι επίσης ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του K. Έτσι, το σύνολο $\langle K \rangle$ των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K είναι ένας υπόχωρος του V.

Ορισμός 4.3.3 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και K ένα μη-κενό υποσύνολό του. Το σύνολο $\langle K \rangle$ των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K λέγεται ο υπόχωρος του V που παράγεται από το K ή η* **γραμμική θήκη** *του K στον V. Αν $K = \{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$ τότε πολλές φορές συμβολίζουμε τον $\langle K \rangle$ με $\langle v_1, v_2, \dots, v_\nu \rangle$. Αν $\langle K \rangle = V$, τότε λέμε ότι το σύνολο K παράγει τον χώρο V ή ότι το K είναι ένα* **σύνολο γεννητόρων** *του V.*

Ορισμός 4.3.4 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του V το οποίο παράγει τον V, τότε ο V λέγεται* **πεπερασμένα παραγόμενος** *διανυσματικός χώρος.*

Παράδειγμα 4.3.5 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

(i) Αν $K = \{v\} \subseteq V$, τότε $\langle K \rangle = \{w \in V \mid w = \lambda v, \lambda \in \mathbb{F}\} = \langle u \rangle$ (βλ. Παράδειγμα 4.2.6).

(ii) Αν $K = \{u, v\} \subseteq V$, τότε $\langle K \rangle = \{w \in V \mid w = \lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{F}\} = \langle u, v \rangle$. (βλ. Παράδειγμα 4.2.7).

(iii) *Αν* $K = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$, *τότε* $\langle K \rangle = \{w \in V \mid w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_\nu u_\nu, \lambda_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu\}$.

Παράδειγμα 4.3.6 *Έστω* $K = \{(1,0,0),(0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. *Τότε,* $\langle K \rangle = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Παράδειγμα 4.3.7 *Ας εξετάσουμε αν το* $(1,2,3)$ *ανήκει στον υπόχωρο του* $\mathbb{R}^3$ *που παράγεται από το σύνολο* $K = \{(1,0,1),(-1,1,1)\}$. *Με βάση τον ορισμό της γραμμικής θήκης, το στοιχείο* $(1,2,3)$ *ανήκει στον* $\langle K \rangle$ *αν και μόνο αν υπάρχουν* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *με* $(1,2,3) = \lambda(1,0,1) + \mu(-1,1,1) = (\lambda - \mu, \mu, \lambda + \mu)$, *δηλαδή αν και μόνο αν το ακόλουθο σύστημα*

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= 1 \\ \mu &= 2 \\ \lambda + \mu &= 3 \end{aligned}$$

έχει λύση. Καθώς το σύστημα αυτό δεν έχει λύση, έπεται ότι $(1,2,3) \notin \langle K \rangle$.

Παράδειγμα 4.3.8 *Ας εξετάσουμε αν το σύνολο* $K = \{(1,1,1),(0,1,1),(-1,0,-1)\}$ *είναι ένα σύνολο γεννητόρων του* $\mathbb{R}^3$. *Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του* $\mathbb{R}^3$ *είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του* K, *δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *υπάρχουν* $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ *με*

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,1) + \mu(0,1,1) + \nu(-1,0,-1) = (\lambda - \nu, \lambda + \mu, \lambda + \mu - \nu).$$

Έτσι, οδηγούμαστε στο επόμενο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x &= \lambda - \nu \\ y &= \lambda + \mu \\ z &= \lambda + \mu - \nu \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $\lambda = x + y - z$, $\mu = z - x$, $\nu = y - z$ *και άρα το* K *παράγει τον* $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 4.3.9 *Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα δύο εξισώσεων με τρείς αγνώστους και συντελεστές πραγματικούς αριθμούς:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το $\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, *το οποίο είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{R}^{3\times 1}$. *Παρατηρούμε ότι* $\Lambda = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ *και έτσι το σύνολο* $K = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *παράγει τον* Λ.

Παράδειγμα 4.3.10 *Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα τριών εξισώσεων με πέντε αγνώστους και συντελεστές πραγματικούς αριθμούς:*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 \\ -x_4/3 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 1} \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\},$$

το οποίο είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{5\times 1}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Lambda = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 1} \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Έτσι, αν

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{5\times 1}$$

τότε το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K είναι το σύνολο των λύσεων του συστήματος, δηλαδή $\langle K \rangle = \Lambda$. Με άλλα λόγια, το K είναι ένα σύνολο γεννητόρων του Λ.

Παράδειγμα 4.3.11 *Το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{F}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος. (Γιατί;)*

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και K ένα υποσύνολό του. Θεωρούμε επίσης το σύνολο όλων των υπόχωρων του V που περιέχουν το K,

$$S_K = \{A \in \mathcal{P}(V) \mid A \leq V \text{ και } K \subseteq A\}.$$

Τότε το $S_K \neq \emptyset$, αφού $V \in S_K$. Ορίζουμε $K^\star = \bigcap_{A \in S_K} A$, δηλαδή το $K^\star$ είναι η τομή όλων των υπόχωρων του V που περιέχουν το K. Από την Πρόταση 4.2.11, έπεται ότι το $K^\star$ είναι ένας υπόχωρος του V. Στη συνέχεια θα δούμε ότι, αν το K δεν είναι κενό, η παραπάνω κατασκευή δίνει μια εναλλακτική περιγραφή του υποχώρου $\langle K \rangle$ του V που παράγεται από το K.

Πρόταση 4.3.12 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και K ένα μη-κενό υποσύνολό του. Τότε, $\langle K\rangle = K^\star$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle K\rangle \subseteq K^\star$ και $\langle K\rangle \supseteq K^\star$.

Έστω $v \in \langle K\rangle$. Τότε $v = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i v_i$ με $\lambda_i \in \mathbb{F}$ και $v_i \in K$, $1 \leq i \leq \nu$. Επειδή $v_i \in K$, έπεται ότι $v_i \in K^\star$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$. Όμως ο $K^\star$ είναι ένας υπόχωρος του V και άρα $\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i v_i \in K^\star$, δηλαδή $v \in K^\star$. Έτσι, δείξαμε ότι $\langle K\rangle \subseteq K^\star$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $K^\star \subseteq \langle K\rangle$. Είναι σαφές από τον ορισμό του $\langle K\rangle$ ότι $K \subseteq \langle K\rangle$, αφού αν $v_0 \in K$ τότε $v_0 = 1_{\mathbb{F}} v_0 \in \langle K\rangle$. Άρα, ο $\langle K\rangle$ είναι ένας υπόχωρος του V που περιέχει το σύνολο K, δηλαδή $\langle K\rangle \in S_K$. Συνεπώς $K^\star \subseteq \langle K\rangle$.

Ορισμός 4.3.13 *Ορίζουμε ως υπόχωρο του V που παράγεται από το $\emptyset$ τον $\{0_V\}$, δηλαδή $\langle\emptyset\rangle = \{0_V\}$.*

Παρατηρούμε ότι, με βάση τον ορισμό του $K^\star$, αν $K = \emptyset$ τότε $K^\star = \{0_V\}$. Έτσι, από τον προηγούμενο ορισμό και την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι $K^\star = \langle K\rangle$ για κάθε υποσύνολο K του V.

Πρόταση 4.3.14 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ στοιχεία του V. Τότε*

(i) $\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_\nu\rangle = \langle v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_\nu\rangle$ *για κάθε δείκτη i και κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$*

(ii) $\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_\nu\rangle = \langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, \lambda v_i + v_j, \ldots, v_\nu\rangle$ *για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $i \neq j$ και $\lambda \in \mathbb{F}$*

(iii) $\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_\nu\rangle = \langle v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_\nu\rangle$ *για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $i \neq j$*

Απόδειξη. Έστω $A = \langle v_1, v_2, \ldots, v_\nu\rangle$.

(i) Σταθεροποιούμε ένα δείκτη $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και θεωρούμε ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0$. Έστω $B = \langle v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_\nu\rangle$. Θα δείξουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Έστω $v \in A$. Τότε, υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ με

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = \lambda_1 v_1 + \cdots + \frac{\lambda_i}{\lambda}(\lambda v_i) + \cdots + \lambda_\nu v_\nu$$

και άρα $v \in B$. Αντίστροφα, αν $v \in B$ τότε υπάρχουν $\rho_1, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_\nu \in \mathbb{F}$ με

$$v = \rho_1 v_1 + \cdots + \rho_i(\lambda v_i) + \cdots + \rho_\nu v_\nu = \rho_1 v_1 + \cdots + (\rho_i \lambda) v_i + \cdots + \rho_\nu v_\nu$$

και άρα $v \in A$.

(ii) Σταθεροποιούμε ένα ζεύγος δεικτών (i, j) με $i \neq j$ και θεωρούμε ένα στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$. Έστω $B' = \langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, \lambda v_i + v_j, \ldots, v_\nu\rangle$. Θα δείξουμε ότι $A \subseteq B'$ και $B' \subseteq A$. Έστω $v \in A$. Τότε, υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ με

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots + \lambda_\nu v_\nu \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + (\lambda_i - \lambda_j \lambda) v_i + \cdots + \lambda_j(\lambda v_i + v_j) + \cdots + \lambda_\nu v_\nu \end{aligned}$$

και άρα $v \in B'$. Αντίστροφα, αν $v \in B'$ τότε υπάρχουν $\rho_1, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_j, \ldots, \rho_\nu \in \mathbb{F}$ με

$$\begin{aligned} v &= \rho_1 v_1 + \cdots + \rho_i v_i + \cdots + \rho_j(\lambda v_i + v_j) + \cdots + \rho_\nu v_\mu \\ &= \rho_1 v_1 + \cdots + (\rho_i + \rho_j \lambda) v_i + \cdots + \rho_j v_j + \cdots + \rho_\nu v_\nu \end{aligned}$$

και άρα $v \in A$.

(iii) Η απόδειξη είναι άμεση.

Πόρισμα 4.3.15 *Έστω A, B δύο γραμμοϊσοδύναμοι $\nu \times \mu$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Τότε, ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{1\times\mu}$ που παράγεται από τις γραμμές του A ισούται με τον υπόχωρο του $\mathbb{F}^{1\times\mu}$ που παράγεται από τις γραμμές του B.*

Απόδειξη. Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών, τότε το ζητούμενο έπεται από την προηγούμενη πρόταση. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με επαγωγή και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 4.3.16 *Θεωρούμε τον 3×5 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

και εφαρμόζουμε σ' αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & -10 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Τότε, ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του A ισούται με τον υπόχωρο του $\mathbb{F}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του B.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξεταστεί αν το $K = \{1+x, 1+2x, 1+x^2, 1+2x^2\}$ παράγει τον χώρο $\mathbb{R}_2[x]$. Υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του K που παράγει το $\mathbb{R}_2[x]$;

2. Έστω $\mathcal{D}$ το σύνολο των 3×3 διαγωνίων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς.

   (i) Να δειχτεί ότι $\mathcal{D} \leq \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(ii) Να εξεταστεί αν το σύνολο

$$K=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

παράγει τον $\mathcal{D}$.

3. Να εξεταστεί αν το $(1,-1,0,3)$ ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από το σύνολο $K=\{(1,0,1,7),(-1,1,0,-3)\}$.

4. Να εξεταστεί αν το σύνολο $K=\{(1,0,-1),(-1,1,1)\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

5. Να βρεθεί ένα σύνολο γεννητόρων του χώρου των λύσεων του ακόλουθου συστήματος με πραγματικούς συντελεστές:

$$\begin{aligned}2x_1+x_2+x_4&=0\\x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\x_2+2x_3+x_4&=0\end{aligned}$$

6. Να δειχτεί ότι $\mathbb{R}=\langle\alpha\rangle$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$. Έστω $\beta\in\mathbb{C}$ με $\beta\neq 0$. Αληθεύει ότι $\mathbb{C}=\langle\beta\rangle$ ως διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$; Επί του $\mathbb{C}$;

7. Έστω $v_1,v_2,\ldots,v_\nu,v$ στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι $\langle v_1,v_2,\ldots,v_\nu,v\rangle=\langle v_1,v_2,\ldots,v_\nu\rangle$ αν και μόνο αν το v είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $v_1,v_2,\ldots,v_\nu$.

4.4 Η Έννοια της Βάσης

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $K=\{v_1,v_2,\ldots,v_\nu\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του. Ας υποθέσουμε ότι το v_ν είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,v_2,\ldots,v_{\nu-1}$. Τότε, έχουμε $v_\nu=\sum_{j=1}^{\nu-1}\rho_j v_j$ για κάποια $\rho_j\in F$, $1\le j\le\nu-1$. Για κάθε $v\in V=\langle v_1,v_2,\ldots,v_\nu\rangle$ υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu\in F$ με

$$\begin{aligned}v&=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_{\nu-1}v_{\nu-1}+\lambda_\nu v_\nu\\&=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_{\nu-1}v_{\nu-1}+\lambda_\nu\Big(\textstyle\sum_{j=1}^{\nu-1}\rho_jv_j\Big)\\&=(\lambda_1+\lambda_\nu\rho_1)v_1+(\lambda_2+\lambda_\nu\rho_2)v_2+\cdots+(\lambda_{\nu-1}+\lambda_\nu\rho_{\nu-1})v_{\nu-1}.\end{aligned}$$

Έτσι, κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,v_2,\ldots,v_{\nu-1}$ και άρα $V=\langle v_1,v_2,\ldots,v_{\nu-1}\rangle$.

Η περιγραφή των στοιχείων του V ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1,v_2,\cdots,v_\nu$ θα ήταν πιο χρήσιμη αν για την περιγραφή ήταν απαραίτητα όλα τα $v_1,v_2,\ldots,v_\nu$. Όπως είδαμε πιό πάνω, αν ένα από τα v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε αυτό δεν χρειάζεται για την περιγραφή των στοιχείων του V.

Πρόταση 4.4.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $v_1,v_2,\ldots,v_\nu$ στοιχεία του V με $\nu\geq 2$. Τότε, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(*i*) *Ένα από τα v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.*

(*ii*) *Υπάρχουν στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V.$$

Απόδειξη. Έστω ότι ένα από τα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$, ας πούμε το v_i, είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Τότε, υπάρχουν στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$, τέτοια ώστε

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_\nu v_\nu.$$

Συνεπώς, θα είναι

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V$$

και άρα δείχτηκε το ζητούμενο, αφού οι συντελεστές των $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ δεν είναι όλοι μηδέν (ο συντελεστής του v_i είναι -1).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ όχι όλα μηδέν με $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V$. Τότε, υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ με $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{F}}$. Καθώς έχουμε

$$-\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_\nu v_\nu,$$

έπεται ότι

$$v_i = \rho_1 v_1 + \cdots + \rho_{i-1} v_{i-1} + \rho_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \rho_\nu v_\nu,$$

όπου $\rho_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ για κάθε $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, \nu$. Άρα, το v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Η παραπάνω πρόταση οδηγεί στην ακόλουθη έννοια:

Ορισμός 4.4.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$ λέγονται* **γραμμικά εξαρτημένα** *αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V.$$

Ορισμός 4.4.3 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$ λέγονται* **γραμμικά ανεξάρτητα** *αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα. Έτσι, τα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν μια σχέση της μορφής*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V$$

με $\lambda_i \in \mathbb{F}$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$ είναι δυνατή μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0_{\mathbb{F}}$.

Παράδειγμα 4.4.4 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

(*i*) *Αν $v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε ξέρουμε ότι $\lambda v = 0_V$ αν και μόνο αν $\lambda = 0_{\mathbb{F}}$ ή $v = 0_V$. Άρα, αν $v \neq 0_V$ η σχέση $\lambda v = 0_V$ συνεπάγεται ότι $\lambda = 0_{\mathbb{F}}$. Συνεπώς, το v είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τώρα, επειδή $1 \cdot 0_V = 0_V$, έπεται ότι το 0_V είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

(ii) *Έστω $u, v \in V$ με u, v γραμμικά εξαρτημένα. Τότε, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ όχι και τα δύο μηδέν, έτσι ώστε $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0_V$. Αν, για παράδειγμα, είναι $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$, τότε έχουμε $u = \lambda v$, όπου $\lambda = -\lambda_2/\lambda_1$.*

(iii) *Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$ με $v_i = 0_V$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$. Τότε, τα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι, έχουμε*

$$0_V = 0_{\mathbb{F}} v_1 + \cdots + 0_{\mathbb{F}} v_{i-1} + 1 v_i + 0_{\mathbb{F}} v_{i+1} + \cdots + 0_{\mathbb{F}} v_\nu.$$

Παράδειγμα 4.4.5 *Ας εξετάσουμε αν τα στοιχεία $x+1, x+2, x^2-1$ του $\mathbb{R}_3[x]$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Θα πρέπει να ελέγξουμε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, όχι όλοι μηδέν, έτσι ώστε*

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x+2) + \lambda_3(x^2-1) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Αλλά αυτό το σύστημα έχει μόνο μία λύση, την τετριμμένη, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι τα $x+1, x+2, x^2-1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 4.4.6 *Ας εξετάσουμε αν τα στοιχεία $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ του $\mathbb{R}^{2\times 1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Όπως πρίν, θεωρούμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι το ομογενές αυτό σύστημα των 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους έχει και μη-τετριμμένες λύσεις (Πόρισμα 3.3.6). Συνεπώς, τα $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Παράδειγμα 4.4.7 *Ας εξετάσουμε αν τα στοιχεία $(1,-2,1), (2,1,-7), (1,8,-17)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε*

$$\lambda_1(1,-2,1) + \lambda_2(2,1,-7) + \lambda_3(1,8,-17) = (0,0,0).$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - 7\lambda_2 - 17\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα, βλέπουμε ότι αυτό έχει και μη-μηδενικές λύσεις. (Για παράδειγμα, μια τέτοια λύση παίρνουμε θέτοντας $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ και $\lambda_3 = 1$.) Συνεπώς, τα διανύσματα $(1,-2,1)$, $(2,1,-7)$, $(1,8,-17)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Παράδειγμα 4.4.8 *Έστω A ένας 5×4 πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ της μορφής*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$. Τότε, οι γραμμές r_1, r_2, r_3 του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{1\times 4}$. Πράγματι, αν $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 = 0 \in \mathbb{F}^{1\times 4}$, τότε έχουμε

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ισοδύναμα, έχουμε το επόμενο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} &= 0 \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} + \lambda_3 a_{33} &= 0 \\ \lambda_1 a_{14} + \lambda_2 a_{24} + \lambda_3 a_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή $\alpha_{11} \neq 0$, η πρώτη εξίσωση δίνει $\lambda_1 = 0$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του λ_1 στη δεύτερη εξίσωση, παίρνουμε $\lambda_2 a_{22} = 0$. Έτσι, καθώς $a_{22} \neq 0$, έπεται ότι $\lambda_2 = 0$. Τέλος, αντικαθιστώντας τις τιμές των λ_1 και λ_2 στην τρίτη εξίσωση, παίρνουμε $\lambda_3 a_{33} = 0$, απ' όπου έπεται ότι $\lambda_3 = 0$.

Παρατήρηση 4.4.9 *Πρατηρούμε ότι τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ ενός διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbb{F}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν το μηδενικό στοιχείο 0_V μπορεί να γραφτεί ως ένας μη-τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους. Τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν το 0_V μπορεί να γραφτεί μόνο με τον τετριμμένο τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Ορισμός 4.4.10 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

(i) Ένα πεπερασμένο μη-κενό υποσύνολο $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ του V λέγεται γραμμικά εξαρτημένο (αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητο) αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα).

(ii) Ένα υποσύνολο X του V λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν υπάρχει μη-κενό πεπερασμένο γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολό $S \subseteq X$. Αν το X δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο τότε λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο. Έτσι, το X είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε μη-κενό πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(iii) Εξ' ορισμού, το κενό σύνολο $\emptyset$ θεωρείται γραμμικά ανεξάρτητο.

Πρόταση 4.4.11 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δυο πεπερασμένα μη-κενά υποσύνολά του, τέτοια ώστε $B \subseteq A$.*

(i) Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, τότε και το B θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(ii) *Αν το B είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, τότε και το A είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Απόδειξη. Έστω ότι $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\kappa\}$ και $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_\kappa, v_{\kappa+1}, \ldots, v_\nu\}$.

(i) Ας υποθέσουμε ότι το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο και το B γραμμικά εξαρτημένο. Τότε, θα υπάρχει μια εξίσωση της μορφής

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa = 0_V$$

με $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \kappa$, και ένα τουλάχιστον από τα λ_i διαφορετικό από το $0_\mathbb{F}$. Τότε όμως έχουμε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa + 0_\mathbb{F} v_{\kappa+1} + \cdots + 0_\mathbb{F} v_\nu = 0_V$$

και άρα το A είναι γραμμικά εξαρτημένο, άτοπο.

(ii) Αυτό είναι άμεση συνέπεια του (i) παραπάνω.

Ορισμός 4.4.12 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B ένα υποσύνολό του. Το B θα λέγεται μια **βάση** του V αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον V.*

Θεώρημα 4.4.13 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B ένα πεπερασμένο μηκενό υποσύνολό του. Τότε, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το σύνολο B είναι μια βάση του V.*

(ii) *Κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B.*

Απόδειξη. Έστω ότι $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το (i) και ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο v του διανυσματικού χώρου V. Τότε, επειδή $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_\nu \rangle$, υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \nu$, με

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το v γράφεται και ως

$$v = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \cdots + \rho_\nu v_\nu,$$

για κάποια $\rho_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \nu$. Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των παραπάνω σχέσεων, έχουμε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \cdots + \rho_\nu v_\nu$$

και έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$(\lambda_1 - \rho_1) v_1 + (\lambda_2 - \rho_2) v_2 + \cdots + (\lambda_\nu - \rho_\nu) v_\nu = 0_V.$$

Επειδή το σύνολο B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, όλοι οι συντελεστές των v_i στην τελευταία σχέση πρέπει να είναι μηδέν και έτσι $\lambda_i = \rho_i$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$.

Έστω τώρα ότι ισχύει το (ii). Από την υπόθεση μας, έχουμε ότι το σύνολο B παράγει τον χώρο V. Μένει να αποδείξουμε ότι το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Θεωρούμε λοιπόν ένα γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του B που είναι ίσος με το 0_V:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V,$$

$\lambda_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \nu$. Το 0_V όμως γράφεται επίσης ως γραμμικός συνδυασμός και κατά τον τετριμμένο τρόπο, ως εξής:

$$0_{\mathbb{F}}v_1 + 0_{\mathbb{F}}v_2 + \cdots + 0_{\mathbb{F}}v_\nu = 0_V.$$

Από τη μοναδικότητα της γραφής κάθε στοιχείου του χώρου V ως γραμμικός συνδυασμός των v_i, έπεται ότι $\lambda_i = 0_{\mathbb{F}}$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$.

Παράδειγμα 4.4.14 *Θεωρούμε τα στοιχεία* $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *και* $e_3 = (0,0,1)$ *του* $\mathbb{F}^3$. *Για κάθε* $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{F}^3$ *έχουμε ότι* $(x_1,x_2,x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ *και άρα* $\mathbb{F}^3 = \langle e_1,e_2,e_3\rangle$. *Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι τα* e_1,e_2,e_3 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα, το σύνολο* $\{e_1,e_2,e_3\}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{F}^3$*, η οποία λέγεται η* **κανονική βάση** *του* $\mathbb{F}^3$.

Με ανάλογο τρόπο, δείχνουμε ότι τα στοιχεία $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_\nu = (0,0,0,\ldots,1)$ *παράγουν τον* $\mathbb{F}^\nu$ *και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, το σύνολο* $\{e_1,e_2,\ldots,e_\nu\}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{F}^\nu$. *Όπως και πρίν, η βάση αυτή θα λέγεται η κανονική βάση του* $\mathbb{F}^\nu$.

Παράδειγμα 4.4.15 *Όπως είδαμε παραπάνω, το σύνολο* $\{(1,0),(0,1)\}$ *είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{F}^2$*, η κανονική του βάση.*

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{(1,1),(1,-1)\}$ *είναι επίσης μια βάση του* $\mathbb{F}^2$. *Πράγματι, αν* $(x_1,x_2) \in \mathbb{F}^2$ *τότε* $(x_1,x_2) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)$*, όπου* $\lambda_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ *και* $\lambda_2 = \frac{x_1-x_2}{2}$. *Άρα* $\mathbb{R}^2 = \langle(1,1),(1,-1)\rangle$. *Αν τώρα είναι* $\rho_1(1,1) + \rho_2(1,-1) = (0,0)$ *για κάποια* $\rho_1,\rho_2 \in \mathbb{F}$*, τότε* $\rho_1 + \rho_2 = 0$ *και* $\rho_1 - \rho_2 = 0$. *Συνεπώς, θα πρέπει να είναι* $\rho_1 = \rho_2 = 0$ *και άρα τα* $(1,1),(1,-1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{(1,-1),(2,-3)\}$ *είναι μια άλλη βάση του* $\mathbb{F}^2$. *Πράγματι, αν* $(x_1,x_2) \in \mathbb{F}^2$ *τότε* $(x_1,x_2) = \lambda_1(1,-1) + \lambda_2(2,-3)$*, όπου* $\lambda_1 = 3x_1 + 2x_2$ *και* $\lambda_2 = -x_1 - x_2$*, και άρα* $\mathbb{F}^2 = \langle(1,-1),(2,-3)\rangle$. *Τώρα, αν* $\rho_1(1,-1) + \rho_2(2,-3) = (0,0)$ *για κάποια* $\rho_1,\rho_2 \in \mathbb{F}$*, τότε θα είναι* $\rho_1 + 2\rho_2 = 0$ *και* $-\rho_1 - 3\rho_2 = 0$. *Απο τις εξισώσεις αυτές έπεται ότι* $\rho_1 = \rho_2 = 0$ *και άρα τα* $(1,-1),(2,-3)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Παρατηρούμε ότι και οι τρείς βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}^2$ *που βρήκαμε, δηλαδή οι* $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(1,1),(1,-1)\}$ *και* $\{(1,-1),(2,-3)\}$ *έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Αργότερα θα δείξουμε ότι αν μια βάση ενός διανυσματικού χώρου* V *έχει* ν *στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του έχει επίσης* ν *στοιχεία.*

Παράδειγμα 4.4.16 *Θεωρούμε τους* 2×3 *πίνακες* $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *και* $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Για κάθε πίνακα* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 3}$ *έχουμε*

$$A = \alpha_{11}E_{11} + \alpha_{12}E_{12} + \alpha_{13}E_{13} + \alpha_{21}E_{21} + \alpha_{22}E_{22} + \alpha_{23}E_{23}$$

και άρα $\mathbb{F}^{2\times 3} = \langle E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}\rangle$. *Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι τα* E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23} *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι, το σύνολο* $\{E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}\}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{F}^{2\times 3}$*, η οποία λέγεται η* **κανονική βάση** *του* $\mathbb{F}^{2\times 3}$.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε για κάθε δύο θετικούς ακεραίους ν, μ και κάθε ζεύγος ακεραίων (i,j) με $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$ τον πίνακα $E_{ij} \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ ο οποίος έχει 1 στην (i,j)-θέση και 0 παντού αλλού. Τότε, το υποσύνολο του $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ που αποτελείται από τους πίνακες E_{ij}, $1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq j \leq \mu$, είναι μια βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, η οποία λέγεται η κανονική βάση του $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$.

Παράδειγμα 4.4.17 *Αναφερόμενοι στο Παράδειγμα 4.3.9, το σύνολο* $\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$ *είναι μια βάση του χώρου λύσεων του συστήματος.*

Παράδειγμα 4.4.18 *Το σύνολο* $\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{5\times 1}$ *είναι μια βάση του χώρου λύσεων του συστήματος του Παραδείγματος 4.3.10.*

Παράδειγμα 4.4.19 *Έστω $\mathbb{R}[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές και έστω το υποσύνολο $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^\nu, \ldots\}$ του $\mathbb{R}[x]$. Είναι σαφές ότι $\langle B\rangle = \mathbb{R}[x]$. Επιπλέον, το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο αφού για κάθε φυσικό αριθμό ν η σχέση $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_\nu x^\nu = 0$ με $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$ συνεπάγεται ότι $a_0 = a_1 = \cdots = a_\nu = 0$. Συνεπώς, ο $\mathbb{R}[x]$ είναι ένας διανυσματικός χώρος που έχει μια βάση με άπειρο πλήθος στοιχείων.*

Παράδειγμα 4.4.20 *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$*. Θα βρούμε μια βάση για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του A. Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, έχουμε*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2\to r_2-2r_1 \\ r_3\to r_3-3r_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{r_3\to r_3-r_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Από το Πόρισμα 4.3.15, έπεται ότι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του A ισούται με τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του B. Άρα, οι γραμμές του B είναι ένα σύνολο γεννητόρων του υποχώρου του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του A. Όπως ακριβώς στο Παράδειγμα 4.4.8, μπορούμε να δούμε ότι οι γραμμές του B είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^{1\times 5}$. Άρα οι γραμμές του B είναι μια βάση του υποχώρου του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του A.

Παράδειγμα 4.4.21 *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$*. Θα βρούμε μια βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^{1\times 4}$ που παράγεται από τις γραμμές του A. Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, έχουμε*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2\to r_2-2r_1 \\ r_3\to r_3+r_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_3\to r_3-2r_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Άρα, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έπεται ότι μια βάση του υπόχωρου

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{R}^{1\times 4}$$

είναι το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξεταστεί ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Γι' αυτά που είναι γραμμικά εξαρτημένα, να βρεθεί ένα στοιχείο που να είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

   (i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   (ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

2. Να εξεταστεί ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}_3[x]$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Γι' αυτά που είναι γραμμικά εξαρτημένα, να βρεθεί ένα στοιχείο που να είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

   (i) $\{x, 3 + x^3, x + 2x^2\}$

   (ii) $\{-2 + x, 3 + x, 1 + x^2, 5 - x + 4x^2\}$

   (iii) $\{3 - 2x + 4x^2 + x^3, 4 - x + 6x^2 + x^3, 7 - 8x + 8x^2 + 3x^3\}$

3. Να δειχτεί ότι τα στοιχεία $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x$ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4. Έστω v_1, v_2, v_3 γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου επί του $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι τα στοιχεία $v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_1 - 2v_2 + v_3$ του V είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

5. (i) Να δειχτεί ότι τα στοιχεία $(1 + i, 2i), (1, 1 + i)$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   (ii) Να δειχτεί ότι τα στοιχεία $(1+i, 2i), (1, 1+i)$ του μιγαδικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

6. Να δειχτεί ότι αν $a \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$, τότε το $\{a\}$ είναι μία βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}$.

7. Δίνεται το σύνολο $B = \{(a_1, a_2, a_3), (0, b_2, b_3), (0, 0, c_3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι το B είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν $a_1 b_2 c_3 \neq 0$.

8. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^{3\times 3}$ και να βρείτε μια βάση τους:

(i) $V_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A \text{ διαγώνιος}\}$

(ii) $V_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A \text{ συμμετρικός}\}$

(iii) $V_3 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid a_{11} = a_{22} = a_{33}\}$

9. Να βρεθεί μια βάση του χώρου των λύσεων του επόμενου γραμμικού συστήματος με πραγματικούς συντελεστές:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 - 7x_4 - 8x_5 &= 0 \end{aligned}$$

10. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ και $C(A) = \{B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid AB = BA\}$. Να δειχτεί ότι ο $C(A)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 3}$ και να βρεθεί μια βάση του.

11. Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί και $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa \in \mathbb{R}^{\nu\times\mu}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός σ και ένας πίνακας $X \in \mathbb{R}^{\mu\times\sigma}$ με $X \neq 0_{\mathbb{R}^{\nu\times\sigma}}$ και $A_iX = 0_{\mathbb{R}^{\nu\times\sigma}}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \kappa$. Να δειχτεί ότι το σύνολο $\{A_1, A_2, \ldots, A_\kappa\}$ δεν είναι μια βάση του $\mathbb{R}^{\nu\times\mu}$.

12. (i) Να βρεθεί μια βάση για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1\times 6}$ που παράγεται από τις γραμμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

    (ii) Να βρεθεί μια βάση για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1\times 4}$ που παράγεται από τις γραμμές του πίνακα $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B ένα υποσύνολο του V. Να δειχτεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

    (i) Το σύνολο B είναι μια βάση του V.

    (ii) Κάθε στοιχείο του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B.

14. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο υποσύνολά του με $B \subseteq A$. Να δειχτεί ότι:

    (i) Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε και το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

    (ii) Αν το B είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε και το A είναι γραμμικά εξαρτημένο.

4.5 Διάσταση Διανυσματικού Χώρου

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ένα κεντρικό θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Απ' αυτό έπεται ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει μια βάση. Επιπλέον, αν η βάση αυτή είναι πεπερασμένη και έχει ν στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του είναι επίσης πεπερασμένη και έχει ν στοιχεία.

Θεώρημα 4.5.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και ν, μ δυο φυσικοί αριθμοί. Αν ν γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του V ανήκουν σε έναν υπόχωρο του V που παράγεται από μ στοιχεία, τότε $\nu \leq \mu$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως πρός ν.

Έστω ότι $\nu = 1$ και v_1 είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο στοιχείο του V, για το όποίο ισχύει $v_1 \in A$, όπου A είναι ένας υπόχωρος του V που παράγεται από μ στοιχεία. Επειδή το v_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι $v_1 \neq 0_V$ και άρα $A \neq \{0_V\}$. Συνεπώς $\mu \geq 1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\nu > 1$ και το θεώρημα ισχύει για κάθε γραμμικά ανεξάρτητα $\nu - 1$ στοιχεία του V. Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του V και έστω ότι $v_i \in A$, $1 \leq i \leq \nu$, για κάποιον υπόχωρο A του V που παράγεται από μ στοιχεία, $A = \langle u_1, u_2, \ldots, u_\mu \rangle$. Θα δείξουμε ότι $\nu \leq \mu$. Επειδή $v_i \in A = \langle u_1, u_2, \ldots, u_\mu \rangle$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$, έχουμε ότι

$$(\star) \qquad \begin{array}{l} v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1\mu}u_\mu \\ v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2\mu}u_\mu \\ \cdots \\ v_\nu = a_{\nu 1}u_1 + a_{\nu 2}u_2 + \cdots + a_{\nu\mu}u_\mu \end{array}$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{F}$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

(i) Έστω ότι $a_{i\mu} = 0_{\mathbb{F}}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι αν B είναι ο υπόχωρος του V που παράγεται από τα $u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}$, τότε $a_i \in B$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$. Ειδικότερα, έπεται ότι τα $\nu - 1$ διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$, τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ανήκουν στον υπόχωρο $B = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1} \rangle$. Άρα, από την υπόθεση της επαγωγής, έπεται ότι $\nu - 1 \leq \mu - 1$ και έτσι $\nu \leq \mu$.

(ii) Ας υποθέσουμε τώρα ότι $a_{i\mu} \neq 0_{\mathbb{F}}$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$. Μπορούμε, αλλάζοντας αν χρειάζεται τη σειρά των εξισώσεων, να υποθέσουμε ότι $i = \nu$. Έτσι, $a_{\nu\mu} \neq 0_{\mathbb{F}}$. Θεωρούμε τώρα τα στοιχεία

$$(\star\star) \qquad w_i = v_i - \frac{a_{i\mu}}{a_{\nu\mu}} v_\nu,$$

$1 \leq i \leq \nu - 1$. Θα δείξουμε ότι τα $w_1, w_2, \ldots, w_{\nu-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_{\nu-1} w_{\nu-1} = 0_V,$$

για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \nu - 1$. Με βάση τις ισότητες $(\star\star)$ έπεται ότι

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{\nu-1} v_{\nu-1} + \lambda'_\nu v_\nu = 0,$$

όπου $\lambda'_\nu = -\frac{1}{a_{\nu\mu}}(\lambda_1 a_{1\mu} + \lambda_2 a_{2\mu} + \cdots + \lambda_{\nu-1} a_{\nu-1\,\mu}) \in \mathbb{F}$. Από την υπόθεση, έχουμε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{\nu-1} = 0_{\mathbb{F}}$. Συνεπώς, τα

$w_1, w_2, \ldots, w_{\nu-1}$ είναι πράγματι γραμμικά ανεξάρτητα. Παρατηρούμε ότι από τις $(\star)$ και $(\star\star)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} w_i &= v_i - \tfrac{a_{i\mu}}{a_{\nu\mu}} v_\nu \\ &= a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{i\mu}u_\mu - \tfrac{a_{i\mu}}{a_{\nu\mu}} v_\nu \\ &= a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{i\mu}u_\mu - \tfrac{a_{i\mu}}{a_{\nu\mu}} (a_{\nu1}u_1 + a_{\nu2}u_2 + \cdots + a_{\nu\mu}u_\mu) \\ &= \left(a_{i1} - \tfrac{a_{i\mu}}{a_{\nu\mu}} a_{\nu1}\right) u_1 + \left(a_{i2} - \tfrac{a_{i\mu}}{a_{\nu\mu}} a_{\nu2}\right) u_2 + \cdots + \left(a_{i\,\mu-1} - \tfrac{a_{i\mu}}{a_{\nu\mu}} a_{\nu\,\mu-1}\right) u_{\mu-1} \end{aligned}$$

και άρα $w_i \in \langle u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}\rangle$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $w_1, w_2, \ldots, w_{\nu-1}$, τα οποία ανήκουν στον υπόχωρο του V που παράγεται από τα $u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}$, έχουμε ότι $\nu - 1 \le \mu - 1$ και άρα $\nu \le \mu$.

Ένα άμεσο πόρισμα του παραπάνω αποτελέσματος είναι το ακόλουθο:

Πόρισμα 4.5.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$, ο οποίος παράγεται από μ στοιχεία. Τότε, κάθε υποσύνολο του V που περιέχει τουλάχιστον $\mu + 1$ στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Πόρισμα 4.5.3 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και ν ένας φυσικός αριθμός. Αν ο V έχει μία πεπερασμένη βάση με ν στοιχεία, τότε κάθε βάση του V είναι πεπερασμένη και έχει ν στοιχεία.*

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ μία βάση του V. Τότε, $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_\nu\rangle$. Αν B είναι μία βάση του V με άπειρο πλήθος στοιχείων, τότε υπάρχουν υποσύνολα του B με πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο από το ν. Αλλά κάθε υποσύνολο του B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αφού το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς, υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V με πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο από το ν, το οποίο είναι άτοπο από το Πόρισμα 4.5.2. Άρα, κάθε βάση του V είναι πεπερασμένη. Έστω τώρα $\{u_1, u_2, \ldots, u_\lambda\}$ μια άλλη βάση του V. Επειδή $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_\nu\rangle$ και τα $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, από το Θεώρημα 4.5.1 έπεται ότι $\lambda \le \nu$. Ανάλογα, επειδή $V = \langle u_1, u_2, \ldots, u_\lambda\rangle$ και τα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι $\nu \le \lambda$. Άρα $\lambda = \nu$.

ΣΧΟΛΙΟ. Στην περίπτωση που ένας διανυσματικός χώρος V έχει μια βάση με πλήθος στοιχείων 0, τότε $V = \langle\emptyset\rangle = \{0_V\}$.

Πόρισμα 4.5.4 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B_0 ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολό του. Τότε, υπάρχει μια πεπερασμένη βάση B του V με $B_0 \subseteq B$.*

Απόδειξη. Η περίπτωση που ο χώρος έχει μόνο ένα στοιχείο, το μηδενικό, είναι απλή και παραλείπεται. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $V \ne \{0_V\}$. Έστω ότι $V = \langle u_1, u_2, \ldots, u_\mu\rangle$ και $B_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των υποσυνόλων του χώρου V, τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα και περιέχουν το B_0, δηλαδή

$$\mathcal{A} = \{K \subseteq V \mid B_0 \subseteq K \ \text{ και } K \text{ γραμμικά ανεξάρτητο}\}.$$

Το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι μη-κενό διότι περιέχει από τον ορισμό του το B_0. Επίσης, από το Θεώρημα 4.5.1 έχουμε ότι κάθε σύνολο K που ανήκει στο $\mathcal{A}$ έχει το πολύ μ στοιχεία, δηλαδή $|\,K\,| \leq \mu$. Άρα, υπάρχει κάποιο σύνολο $B \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $|\,K\,| \leq |\,B\,|$ για κάθε $K \in \mathcal{A}$. Ας υποθέσουμε ότι $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu, v_{\nu+1}, \ldots, v_\rho\}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο B είναι μια βάση του χώρου V. Καθώς το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τον ορισμό του, αρκεί να δειχτεί ότι $\langle B \rangle = V$. Για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο $v \in V$. Αν το v ανήκει στο B, τότε είναι φανερό ότι $v \in \langle B \rangle$. Ας υποθέσουμε ότι $v \notin B$. Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο $B \cup \{v\}$ έχει ένα στοιχείο περισσότερο από το B. Άρα, με βάση τον ορισμό του B, το σύνολο $B \cup \{v\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Συνεπώς, υπάρχουν στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_\rho, \lambda \in \mathbb{F}$ με

$$(\star) \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu + \lambda_{\nu+1} v_{\nu+1} + \cdots + \lambda_\rho v_\rho + \lambda v = 0_V$$

και ένα τουλάχιστον από τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_\rho, \lambda$ διαφορετικό από το $0_\mathbb{F}$. Αν είναι $\lambda = 0_\mathbb{F}$, τότε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu + \lambda_{\nu+1} v_{\nu+1} + \cdots + \lambda_\rho v_\rho = 0_V$$

με ένα τουλάχιστον από τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_\rho$ διαφορετικό από το $0_\mathbb{F}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το σύνολο $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu, v_{\nu+1}, \ldots, v_\rho\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα, θα πρέπει να είναι $\lambda \neq 0_\mathbb{F}$. Αυτό, μας δίνει τη δυνατότητα να λύσουμε την εξίσωση $(\star)$ ως πρός v και να συμπεράνουμε ότι $v \in \langle B \rangle$. Συνεπώς, έχουμε δείξει ότι $V = \langle B \rangle$ και άρα το B είναι πράγματι μια βάση του V.

Θεώρημα 4.5.5 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Τότε, ο χώρος V έχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη βάση.*

Απόδειξη. Αν $V \neq \{0_V\}$, τότε υπάρχει $v \in V$ με $v \neq 0_V$. Άρα το v είναι γραμμικά ανεξάρτητο και από το Πόρισμα 4.5.4 υπάρχει μια πεπερασένη βάση B του V με $v \in B$. Αν $V = \{0_V\}$, τότε θεωρούμε ως βάση του V το κενό σύνολο.

Παρατήρηση 4.5.6 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $V \neq \{0_V\}$ και $K = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του. Ένας τρόπος να βρούμε μια βάση του V, που μάλιστα είναι υποσύνολο του K, είναι ο ακόλουθος:*

Αν το σύνολο K είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτό θα είναι μια βάση, διότι έχουμε ήδη υποθέσει ότι παράγει το χώρο. Αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε κάποιο διάνυσμά του θα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$v_\nu = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{\nu-1} v_{\nu-1}$$

για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \nu - 1$. Στήν περίπτωση αυτή, έχουμε ότι $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1} \rangle$. Τώρα, αν το σύνολο $K' = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε θα είναι και βάση. Αν το K' είναι γραμμικά εξαρτημένο, μπορούμε να αφαιρέσουμε ένα ακόμη στοιχείο και να έχουμε ένα σύνολο γεννητόρων του χώρου V με $\nu - 2$ στοιχεία. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, θα φτάσουμε μετά από $\nu - 1$ το πολύ βήματα σε ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του K, το οποίο θα αποτελεί μια βάση του χώρου.

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Από το Θεώρημα 4.5.5 έπεται ότι ο V έχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη βάση, ενώ από το Πόρισμα 4.5.3

προκύπτει ότι κάθε βάση του V είναι πεπερασμένη και κάθε δύο βάσεις του V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Συνεπώς, το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του V δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη βάση αλλά από το χώρο V. Έτσι, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.5.7 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Το πλήθος των στοιχείων μιας οποιασδήποτε βάσης του χώρου V λέγεται* **διάσταση** *του V και συμβολίζεται με $dim_{\mathbb{F}}V$.*

Παράδειγμα 4.5.8 *Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^{\nu}$. Η κανονική βάση του V (βλ. Παράδειγμα 4.4.14) αποτελείται από ν διανύσματα και άρα $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\nu} = \nu$.*

Παράδειγμα 4.5.9 *Έστω $\mathbb{R}_{\nu}[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ ν. Θεωρούμε τα παρακάτω πολυώνυμα:*

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, \dots, f_{\nu}(x) = x^{\nu}.$$

Τα πολυώνυμα αυτά αποτελούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο και παράγουν τον χώρο. Έτσι, έχουμε ότι $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_{\nu}[x] = \nu + 1$.

Παράδειγμα 4.5.10 *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ως πραγματικό διανυσματικό χώρο. Μια βάση του χώρου αυτού είναι το σύνολο $\{1, i\}$. Έτσι, η διάσταση του χώρου είναι 2, δηλαδή $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.*

Αν τώρα θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ ως μιγαδικό διανυσματικό χώρο, τότε μια βάση του χώρου είναι το σύνολο $\{1\}$ και έτσι η διάσταση του χώρου είναι 1, δηλαδή $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$.

Παρατήρηση 4.5.11 *Είδαμε ότι υπάρχουν διανυσματικοί χώροι που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενοι (βλ. Παράδειγμα 4.3.11). Σημειώνουμε ότι και αυτοί οι χώροι έχουν βάση και ότι ορίζεται και γι' αυτούς διάσταση. Αυτά τα αποτελέσματα δεν θα τα αποδείξουμε εδώ, καθώς η απόδειξή τους απαιτεί πιο προχωρημένη θεωρία συνόλων από αυτή που θεωρούμε γνωστή.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \alpha_{12} = \alpha_{21} \right\}$.

   (i) Να δειχτεί ότι $K \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (ii) Να βρεθεί μια βάση του K και η διάσταση $dim_{\mathbb{R}}K$.

2. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{C}^3$ που παράγεται από το σύνολο $\{(3-i, 2+2i, 4), (2, 2+4i, 3), (1-i, -2i, -1)\}$.

3. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου λύσεων των ακολούθων ομογενών συστημάτων με πραγματικούς συντελεστές:

$$(i) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{array}$$

4. Έστω $A = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$.

   (i) Να δειχτεί ότι $A \leq \mathbb{R}_3[x]$.

   (ii) Να βρεθεί μια βάση του A και η διάσταση $dim_{\mathbb{R}}A$.

5. Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα υποσύνολο S του V.

   (i) Το S είναι μία βάση του V.

   (ii) Αν I είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V και $S \subseteq I$, τότε $S = I$.

   (iii) Αν K είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V και $K \subseteq S$, τότε $K = S$.

4.6 Ιδιότητες Διάστασης και Βάσεων

Πρόταση 4.6.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και ν ένας φυσικός αριθμός. Τότε, κάθε δύο από τις παρακάτω τρεις προτάσεις συνεπάγονται την τρίτη:*

(i) *Η διάσταση του χώρου V είναι ν.*

(ii) *Τα ν στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ παράγουν τον χώρο V.*

(iii) *Τα ν στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύουν οι (i) και (ii), αλλά το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε, ένα από τα διανύσματα του συνόλου αυτού είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Έτσι, ο χώρος V παράγεται από $\nu - 1$ διανύσματα και άρα (Θεώρημα 4.5.1) η διάσταση του χώρου είναι το πολύ $\nu - 1$, άτοπο.

Έστω τώρα ότι ισχύουν οι (i) και (iii). Από το Πόρισμα 4.5.4 έπεται ότι υπάρχει μια βάση B του V που περιέχει το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$. Αλλά, $|B| = dim_{\mathbb{F}}V = \nu$ και έτσι θα πρέπει να είναι $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$. Καθώς η βάση B παράγει τον χώρο V, έπεται ότι ισχύει η (ii).

Τέλος, αν ισχύουν οι (ii) και (iii), τότε το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ αποτελεί μια βάση του χώρου V και άρα η διάσταση του χώρου είναι ν.

Παράδειγμα 4.6.2 *Γνωρίζουμε ότι ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των τριωνύμων $\mathbb{R}_2[x]$ έχει διάσταση 3. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{f_1(x) = x^2, f_2(x) = x, f_3(x) = 1\}$ είναι μια βάση του. Θεωρούμε το σύνολο $\{g_1(x) = x^2 + 5x + 6, g_2(x) = x^2 + 1, g_3(x) = x\}$. Με σκοπό να δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θεωρούμε μια εξίσωση*

$$\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0,$$

με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Τότε, έχουμε $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $5\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ και $6\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, απ' όπου έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Έτσι, το σύνολο $\{g_1(x) = x^2 + 5x + 6, g_2(x) = x^2 + 1, g_3(x) = x\}$ είναι πράγματι γραμμικά ανεξάρτητο. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.6.1, το σύνολο αυτό παράγει τον χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ και άρα αποτελεί μια βάση του.

Πρόταση 4.6.3 *Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A ένας υπόχωρός του. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $dim_{\mathbb{F}}A \leq dim_{\mathbb{F}}V$ και

(ii) $A = V$ αν και μόνο αν $dim_{\mathbb{F}}A = dim_{\mathbb{F}}V$.

Απόδειξη.
(i) Έστω B_0 μια βάση του A. Τότε, το B_0 είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Έτσι, σύμφωνα με το Πόρισμα 4.5.4, υπάρχει μια βάση B του χώρου V με $B_0 \subseteq B$. Άρα $dim_{\mathbb{F}}A = |B_0| \leq |B| = dim_{\mathbb{F}}V$.

(ii) Αν $A = V$ τότε είναι προφανές ότι $dim_{\mathbb{F}}A = dim_{\mathbb{F}}V$. Έστω τώρα ότι $dim_{\mathbb{F}}A = dim_{\mathbb{F}}V$. Θεωρούμε μια βάση B_0 του A. Από το Πόρισμα 4.5.4 έπεται ότι υπάρχει μια βάση B του V με $B_0 \subseteq B$. Καθώς τα σύνολα B_0 και B έχουν το ίδιο πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, θα πρέπει να είναι $B_0 = B$. Συνεπώς, έχουμε $A = \langle B_0 \rangle = \langle B \rangle = V$.

Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της διάστασης του αθροίσματος δυο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου και του αθροίσματος των διαστάσεων των υποχώρων.

Θεώρημα 4.6.4 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο πεπερασμένης διάστασης υπόχωροί του. Τότε, ο υπόχωρος $A + B$ του V έχει πεπερασμένη διάσταση και*

$$dim_{\mathbb{F}}(A + B) = dim_{\mathbb{F}}A + dim_{\mathbb{F}}B - dim_{\mathbb{F}}(A \cap B).$$

Απόδειξη. Η τομή $A \cap B$ είναι ένας υπόχωρος του A, ο οποίος έχει πεπερασμένη διάσταση. Έτσι, από την Πρόταση 4.6.3 έπεται ότι ο $A \cap B$ έχει επίσης πεπερασμένη διάσταση. Θεωρούμε λοιπόν μια βάση $\{v_1, \ldots, v_\nu\}$ του $A \cap B$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.5.4, η βάση αυτή επεκτείνεται σε μια βάση $\{v_1, \ldots, v_\nu, u_1, \ldots, u_\mu\}$ του A και σε μια βάση $\{v_1, \ldots, v_\nu, w_1, \ldots, w_\rho\}$ του B. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_\nu, u_1, \ldots, u_\mu, w_1, \ldots, w_\rho\}$ είναι μια βάση του $A+B$.

Έστω v ένα στοιχείο του $A + B$. Από τον ορισμό του υποχώρου $A + B$, το v γράφεται ως άθροισμα της μορφής $v_A + v_B$ για κάποια $v_A \in A$ και $v_B \in B$. Τώρα έχουμε

$$v_A = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_\mu u_\mu$$

και

$$v_B = \epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_\nu v_\nu + \zeta_1 w_1 + \cdots + \zeta_\rho w_\rho$$

για κάποια $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \delta_1, \ldots, \delta_\mu, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_\nu, \zeta_1, \ldots, \zeta_\rho \in \mathbb{F}$. Έτσι, προσθέτοντας έχουμε

$$v = v_A + v_B = (\lambda_1 + \epsilon_1)v_1 + \cdots + (\lambda_\nu + \epsilon_\nu)v_\nu + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_\mu u_\mu + \zeta_1 w_1 + \cdots + \zeta_\rho w_\rho$$

και άρα το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_\nu, u_1, \ldots, u_\mu, w_1, \ldots, w_\rho\}$ παράγει τον $A + B$.

Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_\nu, u_1, \ldots, u_\mu, w_1, \ldots, w_\rho\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε μια γραμμική σχέση

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_\mu u_\mu + \zeta_1 w_1 + \cdots + \zeta_\rho w_\rho = 0_V,$$

όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \delta_1, \ldots, \delta_\mu, \zeta_1, \ldots, \zeta_\rho \in \mathbb{F}$. Από τη σχέση αυτή, έχουμε

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_\mu u_\mu = -\zeta_1 w_1 - \cdots - \zeta_\rho w_\rho = v_0.$$

Το στοιχείο $v_0 \in V$, όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση, ανήκει και στον υπόχωρο A και στον υπόχωρο B, δηλαδή $v_0 \in A \cap B$. Έτσι, έχουμε ότι

$$v_0 = \kappa_1 v_1 + \cdots + \kappa_\nu v_\nu$$

για κάποια $\kappa_1, \ldots, \kappa_\nu \in \mathbb{F}$ και άρα

$$\kappa_1 v_1 + \cdots + \kappa_\nu v_\nu + \zeta_1 w_1 + \cdots + \zeta_\rho w_\rho = 0_V.$$

Όμως το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_\nu, w_1, \ldots, w_\rho\}$ είναι μια βάση του υπόχωρου B και άρα $\kappa_1 = \ldots = \kappa_\nu = \zeta_1 = \ldots = \zeta_\rho = 0_{\mathbb{F}}$. Συνεπώς, $v_0 = 0_V$ και άρα

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_\mu u_\mu = 0_V.$$

Καθώς το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_\nu, u_1, \ldots, u_\mu\}$ είναι μια βάση του υπόχωρου A, έπεται ότι $\lambda_1 = \ldots = \lambda_\nu = \delta_1 = \ldots = \delta_\mu = 0_{\mathbb{F}}$. Έτσι, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_\nu, u_1, \ldots, u_\mu, w_1, \ldots, w_\rho\}$ είναι πράγματι γραμμικά ανεξάρτητο.

Συνεπώς, ο διανυσματικός χώρος $A+B$ έχει μια βάση $\{v_1, \ldots, v_\nu, u_1, \ldots, u_\mu, w_1, \ldots, w_\rho\}$, η οποία αποτελείται από $\nu+\mu+\rho$ στοιχεία. Είναι τώρα φανερό ότι $dim_{\mathbb{F}}(A+B) = \nu+\mu+\rho = (\nu+\mu)+(\nu+\rho)-\nu = dim_{\mathbb{F}}A + dim_{\mathbb{F}}B - dim_{\mathbb{F}}(A \cap B)$.

Παράδειγμα 4.6.5 *Έστω A και B υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ με $A = \langle (1,2,0),(2,3,1) \rangle$ και $B = \langle (0,0,1),(3,0,1) \rangle$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα διανύσματα $(1,2,0)$ και $(2,3,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $dim_{\mathbb{R}}A = 2$. Το ίδιο ισχύει επίσης για τα διανύσματα $(0,0,1)$ και $(3,0,1)$ και άρα $dim_{\mathbb{R}}B = 2$. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $(0,0,1) \in B$ δεν ανήκει στον υπόχωρο A. Πράγματι, αν ήταν $(0,0,1) \in A$, τότε θα υπήρχαν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $(0,0,1) = \lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(2,3,1)$. Καταλήγουμε έτσι στο γραμμικό σύστημα*

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ &2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ &\lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

το οποίο εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι αδύνατο. Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι ο υπόχωρος $A+B$ περιέχει γνήσια τον A και άρα (Πρόταση 4.6.3) έχει διάσταση τουλάχιστον 3. Καθώς ο $A+B$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, ο οποίος έχει διάσταση 3, θα έχουμε $dim_{\mathbb{R}}(A+B) = 3$ και τελικά $A+B = \mathbb{R}^3$. Έτσι, από το Θεώρημα 4.6.4, έχουμε ότι $dim_{\mathbb{R}}(A \cap B) = 1$.

Θεώρημα 4.6.6 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_\mu\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του. Αν $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_\rho\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε υπάρχει υποσύνολο B_0 του B με $\mu - \rho$ στοιχεία, έτσι ώστε $V = \langle B_0 \cup A \rangle$. Αν επιπλέον το σύνολο B είναι μια βάση του V, τότε το σύνολο $B_0 \cup A$ είναι επίσης μια βάση του V.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.5.1 έχουμε ότι $\rho \leq \mu$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο ρ. Για $\rho = 1$, έχουμε ότι $A = \{v_1\}$. Το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα $v_1 \neq 0_V$. Επειδή το σύνολο B παράγει το χώρο, θα υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu \in \mathbb{F}$ με

$$v_1 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_\mu w_\mu.$$

Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\mu = 0_{\mathbb{F}}$, τότε $v_1 = 0_V$, άτοπο. Άρα, κάποιο από τα λ_i θα είναι διάφορο του μηδενός. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$. Τότε, μπορούμε να λύσουμε ως πρός w_1 και να λάβουμε τη σχέση

$$w_1 = \frac{1}{\lambda_1}(v_1 - \lambda_2 w_2 - \cdots - \lambda_\mu w_\mu).$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $w_1 \in \langle v_1, w_2, \ldots, w_\mu \rangle$ και άρα

$$V = \langle w_1, w_2, \ldots, w_\mu \rangle = \langle v_1, w_2, \ldots, w_\mu \rangle.$$

Το ζητούμενο έπεται θέτοντας $B_0 = \{w_2, \ldots, w_\mu\}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\rho > 1$ και το θεώρημα ισχύει για το $\rho - 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το ρ. Θεωρούμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $A' = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\rho-1}\}$ και χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση για να βρούμε ένα υποσύνολο

$$B' = \{w'_1, w'_2, \ldots, w'_{\mu-(\rho-1)}\} \subseteq B,$$

τέτοιο ώστε $V = \langle B' \cup A' \rangle$. Καθώς $v_\rho \in V$, έχουμε μια σχέση της μορφής

$$v_\rho = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{\rho-1} v_{\rho-1} + \sigma_1 w'_1 + \sigma_2 w'_2 + \cdots + \sigma_{\mu-(\rho-1)} w'_{\mu-(\rho-1)},$$

για κατάλληλα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\rho-1}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\mu-(\rho-1)} \in \mathbb{F}$. Αν $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{\mu-(\rho-1)} = 0_{\mathbb{F}}$, τότε τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_{\rho-1}, v_\rho$ θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα, άτοπο. Άρα, κάποιο σ_i είναι μη-μηδενικό. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$. Τότε, μπορούμε να λύσουμε ως προς w'_1 και να λάβουμε τη σχέση

$$w'_1 = \frac{1}{\sigma_1}\left(v_\rho - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_{\rho-1} v_{\rho-1} - \sigma_2 w'_2 - \cdots - \sigma_{\mu-(\rho-1)} w'_{\mu-(\rho-1)}\right).$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $w'_1 \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{\rho-1}, v_\rho, w'_2, \ldots, w'_{\mu-(\rho-1)} \rangle$ και άρα

$$V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{\rho-1}, w'_1, w'_2, \ldots, w'_{\mu-(\rho-1)} \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{\rho-1}, v_\rho, w'_2, \ldots, w'_{\mu-(\rho-1)} \rangle.$$

Το ζητούμενο έπεται θέτοντας $B_0 = \{w'_2, \ldots, w'_{\mu-(\rho-1)}\}$.

Αν τώρα το σύνολο B είναι μια βάση του χώρου V, τότε έχουμε $dim_{\mathbb{F}} V = \mu$. Έτσι, με βάση την Πρόταση 4.6.1, το σύνολο $B_0 \cup A$ (το οποίο παράγει τον χώρο V και έχει μ στοιχεία) αποτελεί επίσης μια βάση του V.

Παράδειγμα 4.6.7 *Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος για να βρούμε μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα στοιχεία $v_1 = (1, -1, 0)$ και $v_2 = (0, 1, 1)$. Θεωρούμε μια βάση του $\mathbb{R}^3$, έστω την κανονική $\{e_1, e_2, e_3\}$, όπου $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ και $e_3 = (0, 0, 1)$. Τότε, $v_1 = (1, -1, 0) = e_1 - e_2$ και άρα $e_2 = e_1 - v_1$. Συνεπώς, είναι $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, e_1, e_3 \rangle$. Τώρα $v_2 \in \langle v_1, e_1, e_3 \rangle$ και $v_2 = e_2 + e_3 = e_1 - v_1 + e_3$, δηλαδή $e_1 = v_2 + v_1 - e_3$. Συνεπώς, $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, e_3 \rangle$ και το σύνολο $\{v_1, v_2, e_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το v_1 και το v_2.*

Πρόταση 4.6.8 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B μια βάση του. Αν $K \subseteq B$ και $K' = B \setminus K$, τότε $V = \langle K \rangle \oplus \langle K' \rangle$.*

Απόδειξη. Είναι άμεση από τους ορισμούς και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παρατήρηση 4.6.9 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A ένας υπόχωρός του. Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.6 μας δίνει έναν τρόπο για να βρούμε έναν υπόχωρο A' του V με $V = A \oplus A'$. Πράγματι, έστω $\{w_1, w_2, \ldots, w_\mu\}$ μια βάση του V και $\{v_1, v_2, \ldots, v_\rho\}$ μια βάση του A. Τότε, από το Θεώρημα 4.6.6 έπεται ότι μπορούμε να βρούμε μία βάση B του V με $\{v_1, v_2, \ldots, v_\rho\} \subseteq B$ και $B \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_\rho\} \subseteq \{w_1, w_2, \ldots, w_\mu\}$. Αν τώρα θέσουμε $A' = \langle B \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_\rho\} \rangle$, τότε από την Πρόταση 4.6.8 έχουμε ότι $V = A \oplus A'$.*

Παράδειγμα 4.6.10 *Έστω $v = (1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$ και $A = \langle v \rangle \leq \mathbb{R}^3$. Θα βρούμε έναν υπόχωρο A' του $\mathbb{R}^3$ με $A \oplus A' = \mathbb{R}^3$. Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε, έχουμε $v = e_1 - 2e_3$ και επομένως $e_1 = v + 2e_3$. Συνεπώς, έχουμε $\mathbb{R}^3 = \langle v, e_2, e_3 \rangle$. Άρα, αν $A' = \langle e_2, e_3 \rangle$ τότε $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle \oplus \langle e_2, e_3 \rangle = A \oplus A'$.*

Παρατηρούμε ότι $e_3 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}v$ και άρα $\mathbb{R}^3 = \langle v, e_1, e_2 \rangle$. Συνεπώς, αν $A'' = \langle e_1, e_2 \rangle$ τότε έχουμε $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle = A \oplus A''$. Έτσι, έχουμε $\mathbb{R}^3 = A \oplus A' = A \oplus A''$ με $A' = \{(0, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\} \neq \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = A''$.

Πρόταση 4.6.11 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $A \leq V$ ένας υπόχωρός του. Τότε, ο διανυσματικός χώρος πηλίκο V/A είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενος και μάλιστα $dim_{\mathbb{F}}(V/A) = dim_{\mathbb{F}} V - dim_{\mathbb{F}} A$.*

Απόδειξη. Καθώς ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος, υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $K \subseteq V$, τέτοιο ώστε $V = \langle K \rangle$. Κάθε στοιχείο του πηλίκου V/A είναι ένα σύμπλοκο της μορφής $v + A$ για κάποιο $v \in V$. Γράφοντας το v ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του K, βλέπουμε ότι $v + A \in \langle \overline{K} \rangle$, όπου $\overline{K} = \{x + A \mid x \in K\}$. Έτσι, το πεπερασμένο υποσύνολο $\overline{K} \subseteq V/A$ παράγει το διανυσματικό χώρο V/A και άρα ο V/A είναι πεπερασμένα παραγόμενος.

Ας θεωρήσουμε μια βάση $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu\}$ του V/A. Επιλέγοντας αντιπροσώπους των κλάσεων, έχουμε $\xi_i = v_i + A$ για κάποιο $v_i \in V$, $1 \leq i \leq \nu$. Θεωρούμε επίσης μια βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_\mu\}$ του διανυσματικού χώρου A, ο οποίος είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενος (Πρόταση 4.6.3). Θα δείξουμε ότι το σύνολο $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ αποτελεί μια βάση του V.

Θα δείξουμε αρχικά ότι το B παράγει τον V. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα στοιχείο $v \in V$ και το σύμπλοκο $v + A \in V/A$. Καθώς το σύνολο $\{v_1 + A, v_2 + A, \ldots, v_\nu + A\}$ παράγει το διανυσματικό χώρο V/A, μπορούμε να γράψουμε

$$v + A = \lambda_1(v_1 + A) + \lambda_2(v_2 + A) + \cdots + \lambda_\nu(v_\nu + A) \in V/A,$$

για κατάλληλα $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \nu$. Τότε όμως έχουμε

$$v + A = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu) + A \in V/A$$

και άρα το στοιχείο $v' = v - (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu)$ ανήκει στον υπόχωρο A. Όμως το σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_\mu\}$ παράγει τον A και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$v' = \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \cdots + \kappa_\mu u_\mu,$$

για κατάλληλα $\kappa_j \in \mathbb{F}$, $1 \leq j \leq \mu$. Συνεπώς, έχουμε

$$v = \kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \cdots + \kappa_\mu u_\mu + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu$$

και άρα το B παράγει τον V.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Ας υποθέσουμε ότι

$$\kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \cdots + \kappa_\mu u_\mu + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V \in V,$$

για κάποιους συντελεστές $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\mu, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$. Τότε,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = -\kappa_1 u_1 - \kappa_2 u_2 - \cdots - \kappa_\mu u_\mu \in A$$

και άρα

$$\lambda_1(v_1 + A) + \lambda_2(v_2 + A) + \cdots + \lambda_\nu(v_\nu + A) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu) + A = 0_V + A \in V/A.$$

Όμως $0_V + A = 0_{V/A} \in V/A$ και άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0$, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας του συνόλου $\{v_1 + A, v_2 + A, \ldots, v_\nu + A\} \subseteq V/A$. Τότε όμως είναι

$$\kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \cdots + \kappa_\mu u_\mu = 0_A \in A$$

και άρα, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας του συνόλου $\{u_1, u_2, \ldots, u_\mu\} \subseteq A$, έπεται ότι $\kappa_1 = \kappa_2 = \ldots = \kappa_\mu = 0$.

Έχοντας δείξει ότι το σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ αποτελεί μια βάση του V, συμπεραίνουμε ότι $dim_{\mathbb{F}} V = \mu + \nu = dim_{\mathbb{F}} A + dim_{\mathbb{F}}(V/A)$, δηλαδή το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (i) Να δειχτεί ότι τα $p(x) = 1 + x + x^2$ και $q(x) = x - x^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}_3[x]$.

   (ii) Να βρεθεί μία βάση B του $\mathbb{R}_3[x]$ με $\{p(x), q(x)\} \subseteq B$.

2. Να βρεθούν δύο βάσεις B_1, B_2 του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ με $B_1 \neq B_2$, οι οποίες περιέχουν το σύνολο $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ και τους υποχώρους του A και B, όπου $A = \langle (1, 0, 2, -1), (-1, 1, 1, 1) \rangle$ και $B = \langle (-1, -3, 0, 1), (5, 0, 3, 0) \rangle$. Να βρεθεί η διάσταση $dim_{\mathbb{R}}(A \cap B)$ του υποχώρου $A \cap B$.

4. Έστω $K = \{(3, 2, 2, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 3), (7, 5, 5, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Να βρεθεί μια βάση B_0 του $\langle K \rangle$ και μια βάση B του $\mathbb{R}^4$ με $B_0 \subseteq B$.

5. (i) Έστω $B = \{p(x), q(x), \sigma(x), r(x)\}$ η βάση του $\mathbb{R}_3[x]$ που βρέθηκε στην άσκηση 1. Αν $A = \langle p(x), q(x) \rangle$ και $B = \langle \sigma(x), r(x) \rangle$, να δειχτεί ότι $\mathbb{R}_3[x] = A \oplus B$.

   (ii) Έστω $B_1 = B_0 \cup \{\alpha\}$ και $B_2 = B_0 \cup \{\beta\}$ οι βάσεις του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ που βρέθηκαν στην άσκηση 2. Αν $A = \langle \alpha \rangle$ και $B = \langle \beta \rangle$, να δειχτεί ότι $\mathbb{R}^{2\times 2} = \langle B_0 \rangle \oplus A = \langle B_0 \rangle \oplus B$.

6. (i) Έστω A, B υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_6[x]$ με $dim_{\mathbb{R}} A = 4$ και $dim_{\mathbb{R}} B = 5$. Να δειχτεί ότι $dim_{\mathbb{R}}(A \cap B) \geq 2$.

   (ii) Να βρεθούν υπόχωροι A_0, B_0 του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_6[x]$ με $dim_{\mathbb{R}} A_0 = 4$, $dim_{\mathbb{R}} B_0 = 5$ και $dim_{\mathbb{R}}(A_0 \cap B_0) = 2$.

7. Έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_3[x]$ που παράγεται από τα $1 + 2x, -3x + 5x^2$. Να βρεθούν υπόχωροι Z_1, Z_2 του $\mathbb{R}_3[x]$, έτσι ώστε $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus Z_1 = W \oplus Z_2$ και $Z_1 \neq Z_2$.

8. Έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ που παράγεται από τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν διακεκριμένοι υπόχωροι Z_1, Z_2, Z_3 του $\mathbb{R}^{2\times 2}$, έτσι ώστε $\mathbb{R}^{2\times 2} = W \oplus Z_1 = W \oplus Z_2 = W \oplus Z_3$.

9. (i) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου Σ των συμμετρικών $\nu \times \nu$ πραγματικών πινάκων.

   (ii) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου A των αντισυμμετρικών $\nu \times \nu$ πραγματικών πινάκων.

   (iii) Να δειχθεί ότι $\mathbb{R}^{\nu\times\nu} = \Sigma \oplus A$.

Κεφάλαιο 5

Γραμμικές Απεικονίσεις

Στο Κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε τις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων και θα μελετήσουμε ορισμένες βασικές ιδιότητές τους.

5.1 Ορισμοί και Παραδείγματα

Ορισμός 5.1.1 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Μια απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ λέγεται* **γραμμική** *αν για κάθε $u, v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύουν τα εξής:*

(i) $f(u + v) = f(u) + f(v) \in W$ *και*

(ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u) \in W$.

Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ λέγεται επίσης γραμμικός μετασχηματισμός του V.

Έτσι, οι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων είναι ακριβώς οι απεικονίσεις εκείνες που αντιστοιχούν στο άθροισμα δύο στοιχείων του πεδίου ορισμού τους το άθροισμα των εικόνων τους στο πεδίο τιμών και αντίστοιχα για τα πολλαπλάσια με στοιχεία του $\mathbb{F}$. Καθώς η γραμμική δομή ενός διανυσματικού χώρου περιγράφεται από το άθροισμα των στοιχείων του και το γινόμενό τους με στοιχεία του $\mathbb{F}$, μπορούμε να πούμε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων είναι οι απεικονίσεις που διατηρούν τη δομή των χώρων.

Παραδείγματα 5.1.2

(i) *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V και σταθεροποιούμε ένα στοιχείο $a \in \mathbb{F}$. Τότε, η απεικόνιση $T_a : V \longrightarrow V$ με $T_a(v) = av$ για κάθε $v \in V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση από τον V στον εαυτό του.*

(ii) *Έστω φ μια γωνία με $0 \leq \varphi < 2\pi$. Τότε, η απεικόνιση $R_\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $R_\varphi(x, y) = (x\sigma\upsilon\nu\varphi - y\eta\mu\varphi, x\eta\mu\varphi + y\sigma\upsilon\nu\varphi)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμική και λέγεται στροφή του επιπέδου κατά γωνία φ.*

(iii) *Θεωρούμε την απεικόνιση* $J : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *με* $J(a+bi) = a - bi$ *για κάθε μιγαδικό αριθμό* $a + bi$ *(με* $a, b \in \mathbb{R}$*). Έτσι, η* J *απεικονίζει κάθε μιγαδικό αριθμό* z *στον συζυγή του* $\overline{z}$*. Η απεικόνιση* J *είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}$*.*

Αν όμως θεωρήσουμε τον $\mathbb{C}$ *ως ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο, τότε η απεικόνιση* J *δεν είναι γραμμική. Πράγματι, για* $\lambda = i$ *και* $v = i$ *έχουμε* $J(\lambda v) = J(ii) = J(-1) = -1$*, ενώ* $\lambda J(v) = iJ(i) = i(-i) = 1$*.*

(iv) *Έστω* ν, μ, σ *τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί και* A *ένας* $\nu \times \mu$ *πίνακας με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$*. Τότε, η απεικόνιση* $L_A : \mathbb{F}^{\mu\times\sigma} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times\sigma}$ *με* $L_A(B) = AB$ *για κάθε* $B \in \mathbb{F}^{\mu\times\sigma}$ *είναι γραμμική.*

Ειδικότερα, ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^{\mu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ *με* $L_A(B) = AB$ *για κάθε πίνακα-στήλη* $B \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$*.*

(v) *Έστω* ν, μ, σ *τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί και* A *ένας* $\mu \times \sigma$ *πίνακας με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$*. Τότε, η απεικόνιση* $R_A : \mathbb{F}^{\nu\times\mu} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times\sigma}$ *με* $R_A(B) = BA$ *για κάθε* $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ *είναι γραμμική.*

Ειδικότερα, ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $R_A : \mathbb{F}^{1\times\mu} \longrightarrow \mathbb{F}^{1\times\sigma}$ *με* $R_A(B) = BA$ *για κάθε πίνακα-γραμμή* $B \in \mathbb{F}^{1\times\mu}$*.*

(vi) *Έστω* ν, μ *δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε, η απεικόνιση* $t : \mathbb{F}^{\nu\times\mu} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ *με* $A \longmapsto A^t$ *για κάθε* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ *είναι γραμμική.*

(vii) *Για κάθε πολυώνυμο* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *ορίζεται κατά τα γνωστά η παράγωγος* $f'(x) \in \mathbb{R}[x]$*. Αν* ν *είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε η απεικόνιση* $d : \mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\nu-1}[x]$ *με* $d(f(x)) = f'(x)$ *για κάθε* $f(x) \in \mathbb{R}_\nu[x]$ *είναι γραμμική.*

$(viii)$ *Για κάθε πολυώνυμο* $f(x) = \sum_{i=0}^{\nu} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ *μπορούμε να θεωρήσουμε το πολυώνυμο* $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} \in \mathbb{R}[x]$*. Έτσι, αν* ν *είναι ένας φυσικός αριθμός, τότε ορίζεται η γραμμική απεικόνιση* $I : \mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\nu+1}[x]$ *με* $I(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt$ *για κάθε* $f(x) \in \mathbb{R}_\nu[x]$*.*

(ix) *Για κάθε πολυώνυμο* $f(x) = \sum_{i=0}^{\nu} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ *μπορούμε να θεωρήσουμε τον πραγματικό αριθμό* $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{a_i}{i+1}$*. Έτσι, αν* ν *είναι ένας φυσικός αριθμός, τότε ορίζεται η γραμμική απεικόνιση* $S : \mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ *με* $S(f(x)) = \int_0^1 f(t)\,dt$ *για κάθε* $f(x) \in \mathbb{R}_\nu[x]$*.*

(x) *Οι απεικονίσεις* $f : \mathbb{F}^2 \longrightarrow \mathbb{F}^2$ *με* $f(x,y) = (y,x)$ *για κάθε* $(x,y) \in \mathbb{F}^2$ *και* $g : \mathbb{F}^3 \longrightarrow \mathbb{F}^3$ *με* $g(x,y,z) = (y,z,x)$ *για κάθε* $(x,y,z) \in \mathbb{F}^3$ *είναι γραμμικές.*

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε ένα φυσικό αριθμό ν *και μια μετάθεση σε* ν *σύμβολα* $\pi \in S_\nu$*. Τότε, η απεικόνιση* $f_\pi : \mathbb{F}^\nu \longrightarrow \mathbb{F}^\nu$ *με* $f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(\nu)})$ *για κάθε* $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{F}^\nu$ *είναι γραμμική.*

(xi) *Η απεικόνιση* $f : \mathbb{F}^2 \longrightarrow \mathbb{F}^3$ *με* $f(x,y) = (x+y, 2x-y, x+3y)$ *για κάθε* $(x,y) \in \mathbb{F}^2$ *είναι γραμμική.*

(xii) *Έστω κ, ν δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Τότε, η απεικόνιση $p : \mathbb{F}^\nu \longrightarrow \mathbb{F}$ με $p(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = x_\kappa$ για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{F}^\nu$ είναι γραμμική και λέγεται προβολή στην κ συντεταγμένη.*

Ας δούμε τώρα ορισμένες άμεσες συνέπειες του ορισμού μιας γραμμικής απεικόνισης.

Πρόταση 5.1.3 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια απεικόνιση.*

(i) *Η f είναι γραμμική αν και μόνο αν $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $u, v \in V$.*

(ii) *Αν η f είναι γραμμική, τότε*

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\nu f(v_\nu)$$

για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ και $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$.

Απόδειξη. (i) Αν η f είναι γραμμική τότε

$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $u, v \in V$. Αντίστροφα, έστω ότι για την απεικόνιση f ισχύει η παραπάνω σχέση. Τότε, θέτοντας $\lambda = \mu = 1$, έχουμε την πρώτη ιδιότητα που χαρακτηρίζει τη γραμμικότητα της f. Τέλος, θέτοντας $\mu = 0$, έπεται και η δεύτερη ιδιότητα.

(ii) Αυτό αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο ν.

Πρόταση 5.1.4 *Αν V, W είναι δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε έχουμε $f(0_V) = 0_W$ και $f(-u) = -f(u)$ για κάθε $u \in V$.*

Απόδειξη. Για την πρώτη σχέση έχουμε $f(0_V) = f(0_\mathbb{F} 0_V) = 0_\mathbb{F} f(0_V) = 0_W$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα στοιχείο $v \in V$. Με βάση την Πρόταση 4.1.9(iv), έχουμε $-v = (-1)v \in V$ και $-f(v) = (-1)f(v) \in W$ και άρα $f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v)$.

Παραδείγματα 5.1.5

(i) *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Τότε, η απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ με $f(v) = 0_W$ για κάθε $v \in V$ είναι γραμμική.*

(ii) *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Τότε, η ταυτοτική απεικόνιση $1_V : V \longrightarrow V$ με $1_V(v) = v$ για κάθε $v \in V$ είναι γραμμική.*

(iii) *Έστω U, V και W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Αν οι απεικονίσεις $f : U \longrightarrow V$ και $g : V \longrightarrow W$ είναι γραμμικές, τότε η σύνθεση $g \circ f : U \longrightarrow W$ είναι επίσης γραμμική. Πράγματι, αν $v, v' \in V$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ τότε έχουμε*

$$(g\circ f)(v+v') = g(f(v+v')) = g(f(v)+f(v')) = g(f(v))+g(f(v')) = (g\circ f)(v)+(g\circ f)(v')$$

και

$$(g \circ f)(\lambda v) = g(f(\lambda v)) = g(\lambda f(v)) = \lambda g(f(v)) = \lambda(g \circ f)(v).$$

Ορισμός 5.1.6 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση.*

(i) *Η f καλείται* **μονομορφισμός** *αν είναι 1-1.*

(ii) *Η f καλείται* **επιμορφισμός** *αν είναι επί.*

(iii) *Η f καλείται* **ισομορφισμός** *αν είναι ταυτόχρονα μονομορφισμός και επιμορφισμός.*

Παραδείγματα 5.1.7

(i) *Αναφερόμενοι στα Παραδείγματα 5.1.2, παρατηρούμε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις των $(viii)$ και (xi) είναι μονομορφισμοί, οι γραμμικές απεικονίσεις των (vii), (ix) και (xii) είναι επιμορφισμοί, ενώ οι γραμμικές απεικονίσεις των (ii), (vi) και (ix) είναι ισομορφισμοί.*

(ii) *Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$, τότε η ταυτοτική απεικόνιση $1_V : V \longrightarrow V$ (πρβλ. Παράδειγμα 5.1.5(ii) είναι ισομορφισμός.*

(iii) *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και V_0 ένας υπόχωρός του. Τότε, η απεικόνιση $\iota : V_0 \longrightarrow V$ με $\iota(v) = v$ για κάθε $v \in V_0$ είναι ένας μονομορφισμός. Επιπλέον, αν V/V_0 είναι ο αντίστοιχος διανυσματικός χώρος πηλίκο, τότε η απεικόνιση $p : V \longrightarrow V/V_0$ με $p(v) = v + V_0$ για κάθε $v \in V$ είναι ένας επιμορφισμός.*

Πρόταση 5.1.8 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Η f είναι ισομορφισμός.*

(ii) *Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$, τέτοια ώστε $f \circ g = 1_W$ και $g \circ f = 1_V$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ισομορφισμός. Τότε, η f είναι 1-1 και επί και άρα υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : W \longrightarrow V$. Προφανώς, ισχύουν οι ισότητες $f \circ f^{-1} = 1_W$ και $f^{-1} \circ f = 1_V$. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι γραμμική. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε στοιχεία $\lambda, \lambda' \in \mathbb{F}$ και $w, w' \in W$. Καθώς η f είναι επί, υπάρχουν $v, v' \in V$ με $w = f(v)$ και $w' = f(v')$. Συνεπώς, από την γραμμικότητα της f έπεται ότι

$$\lambda w + \lambda' w' = \lambda f(v) + \lambda' f(v') = f(\lambda v + \lambda' v')$$

(πρβλ. Πρόταση 5.1.3(i)) και άρα

$$f^{-1}(\lambda w + \lambda' w') = \lambda v + \lambda' v' = \lambda f^{-1}(v) + \lambda' f^{-1}(v').$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η f^{-1} είναι γραμμική.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$, τέτοια ώστε $f \circ g = 1_W$ και $g \circ f = 1_V$. Τότε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.14, έπεται ότι η απεικόνιση f είναι 1-1 και επί. Έτσι, με βάση τον Ορισμό 5.1.6, συμπεραίνουμε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Ορισμός 5.1.9 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Θα λέμε ότι ο V είναι ισόμορφος με τον W, και θα γράφουμε $V \simeq W$, αν υπάρχει ισομορφισμός $f : V \longrightarrow W$.*

Η σχέση της ισομορφίας που ορίσαμε παραπάνω μεταξύ των διανυσματικών χώρων επί του $\mathbb{F}$ έχει τις επόμενες ιδιότητες:

(i) Κάθε διανυσματικός χώρος V είναι ισόμορφος με τον εαυτό του. Πράγματι, η ταυτοτική απεικόνιση $1_V : V \longrightarrow V$ είναι ένας ισομορφισμός.

(ii) Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι. Αν ο V είναι ισόμορφος με τον W, τότε και ο W είναι ισόμορφος με τον V. Έτσι, στην περίπτωση αυτή, λέμε απλούστερα ότι οι διανυσματικοί χώροι V και W είναι ισόμορφοι. Πράγματι, αν $f : V \longrightarrow W$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : W \longrightarrow V$ είναι επίσης ισομορφισμός (βλ. την απόδειξη της Πρότασης 5.1.8).

(iii) Έστω U, V και W τρεις διανυσματικοί χώροι. Αν ο U είναι ισόμορφος με τον V και ο V είναι ισόμορφος με τον W, τότε ο U είναι ισόμορφος με τον W. Εδώ, αν $f : U \longrightarrow V$ και $g : V \longrightarrow W$ είναι ισομορφισμοί, τότε η σύνθεση $g \circ f : U \longrightarrow W$ είναι 1-1, επί και γραμμική (Παράδειγμα 5.1.5(iii)), δηλαδή ισομορφισμός.

Παραδείγματα 5.1.10

(i) *Έστω $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ η απεικόνιση που ορίζεται με $f(r_1, r_2, r_3, r_4) = r_1 + r_2x + r_3x^2 + r_4x^3$ για κάθε $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}^4$. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική, 1-1 και επί. Έτσι, η f είναι ένας ισομορφισμός και άρα $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}_3[x]$.*

(ii) *Έστω $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 3}$ η απεικόνιση με $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) \longmapsto \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \end{pmatrix}$. Και εδώ μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι η f είναι γραμμική, 1-1 και επί, δηλαδή ισομορφισμός. Έτσι, $\mathbb{R}^6 \simeq \mathbb{R}^{2\times 3}$.*

(iii) *Έστω $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση με $(r_1, r_2, r_3, r_4) \longmapsto (r_1 + r_3, r_2 - r_4)$. Η απεικόνιση f είναι γραμμική και μάλιστα επιμορφισμός. Πράγματι, για κάθε $(r, r') \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει το στοιχείο $(r, r', 0, 0) \in \mathbb{R}^4$, για το οποίο έχουμε $f(r, r', 0, 0) = (r, r')$. Καθώς $f(1, 1, 1, 0) = (2, 1) = f(2, 1, 0, 0)$, η f δεν είναι $1 - 1$. Έτσι, η f δεν είναι ισομορφισμός.*

(iv) *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η απεικόνιση με $(r_1, r_2) \longmapsto (r_1, r_1 - r_2, r_2)$. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική και μάλιστα ένας μονομορφισμός. Καθώς δεν υπάρχει στοιχείο $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ με $f(r_1, r_2) = (0, 1, 0)$, η f δεν είναι επί. Έτσι, η f δεν είναι ισομορφισμός.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια απεικόνιση. Να δειχτεί ότι η f είναι γραμμική αν και μόνο αν $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ για κάθε $u, v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{F}$.

2. Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 - 3x_2, x_1 + x_2)$
(ii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 - x_2 + 10x_3)$
(iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_3, x_2)$
(iv) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 + x_3, x_1^2)$

3. Να δειχτεί ότι η απεικόνιση $\Delta : \mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\nu-1}[x]$ με $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x)$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}_\nu[x]$ είναι ένας επιμορφισμός διανυσματικών χώρων.

4. Έστω A ένας αντιστρέψιμος $\nu \times \nu$ πίνακας. Να δειχτεί ότι οι γραμμικές απεικονίσεις $L_A : \mathbb{F}^{\nu\times\sigma} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times\sigma}$ και $R_A : \mathbb{F}^{\sigma\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}^{\sigma\times\nu}$, που ορίστηκαν στα Παραδείγματα 5.1.2$(iv), (v)$, είναι ισομορφισμοί για κάθε φυσικό αριθμό σ.

5.2 Γραμμικές Απεικονίσεις και Βάσεις

Ας θεωρήσουμε ένα διανυσματικό χώρο V επί του $\mathbb{F}$ με διάσταση ν και μια βάση του $\{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$. Τότε, κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_\nu$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu.$$

Επομένως, έχοντας σταθεροποιήσει τη βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$, σε κάθε στοιχείο $v \in V$ αντιστοιχεί ένας πίνακας-στήλη $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Για να ορίζεται με τον τρόπο αυτό μια απεικόνιση, για να αντιστοιχεί δηλαδή ακριβώς ένας πίνακας στήλη σε κάθε στοιχείο $v \in V$, θα πρέπει να θεωρήσουμε μία διατεταγμένη βάση του V. Πράγματι, αν $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = \lambda_2 v_2 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu$, τότε μέσω της πρώτης γραφής του v παίρνουμε τον πίνακα-στήλη $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$ και μέσω της δεύτερης γραφής του v τον πίνακα-στήλη $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$.

Ορισμός 5.2.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν. Μια διατεταγμένη βάση του V είναι μια διατεταγμένη ν-άδα $(v_1, v_2, \dots, v_\nu)$ στοιχείων του V, έτσι ώστε το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$ να είναι μια βάση του V.*

Έστω τώρα V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν και $\widehat{B} = (v_1, v_2, \dots, v_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του. Τότε, ορίζεται η απεικόνιση

$$[\ ]_{\widehat{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$$

με $v \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$, όπου $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu$. Ο πίνακας-στήλη $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$ λέγεται **η στήλη των συντελεστών** του v ως προς τη διατεταγμένη βάση $\widehat{B}$ και συμβολίζεται με $[v]_{\widehat{B}}$.

Παραδείγματα 5.2.2 *Θεωρούμε τις ακόλουθες διατεταγμένες βάσεις του* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\widehat{e} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \quad \textit{και} \quad \widehat{a} = ((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1)).$$

Τότε, για το στοιχείο $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ *είναι* $v = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$ *και άρα* $[v]_{\widehat{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Έτσι, η στήλη των συντελεστών του* w *ως προς τη διατεταγμένη βάση* $\widehat{e}$ *είναι η* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Καθώς έχουμε* $v = 4(1,1,1) - 3(1,0,1) + 2(0,-1,1)$, *έπεται ότι* $[v]_{\widehat{a}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Έτσι, η στήλη των συντελεστών του w *ως προς τη διατεταγμένη βάση* $\widehat{a}$ *είναι η* $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Πρόταση 5.2.3 *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$ *διάστασης* ν. *Τότε, για κάθε διατεταγμένη βάση* $\widehat{B} = (v_1, v_2, \cdots, v_\nu)$ *του* V *η απεικόνιση*

$$[\ ]_{\widehat{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu \times 1}$$

που ορίστηκε παραπάνω είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $[\ ]_{\widehat{B}}$ είναι γραμμική, 1-1 και επί.

Για να δείξουμε τη γραμμικότητα της $[\ ]_{\widehat{B}}$, θεωρούμε δύο στοιχεία $v, v' \in V$. Έστω ότι $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu$ και $v' = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_\nu v_\nu$. Άρα, θα είναι $[v]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$ και $[v]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_\nu \end{pmatrix}$. Καθώς $v + v' = (\lambda_1 + \lambda_1)v_1 + \cdots + (\lambda_\nu + \lambda_\nu)v_\nu$, έπεται ότι

$$[v+v']_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu + \lambda'_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_\nu \end{pmatrix} = [v]_{\widehat{B}} + [v]_{\widehat{B}}.$$

Ανάλογα δείχνουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ και $v \in V$ θα είναι $[\lambda v]_{\widehat{B}} = \lambda[v]_{\widehat{B}}$. Συνεπώς, η απεικόνιση $[\ ]_{\widehat{B}}$ είναι γραμμική.

Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση $[\ ]_{\widehat{B}}$ είναι επί, παρατηρούμε ότι για κάθε στοιχείο $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ το στοιχείο $v \in V$ που ορίζεται θέτοντας $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu$ είναι τέτοιο ώστε $[v]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$.

Για να δείξουμε τέλος ότι η απεικόνιση $[\ ]_{\widehat{B}}$ είναι 1-1, θεωρούμε δύο στοιχεία $v_1, v_2 \in V$ με $[v_1]_{\widehat{B}} = [v_2]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$. Τότε όμως είναι $v_1 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = v_2$ και άρα δείχτηκε το ζητούμενο.

Πόρισμα 5.2.4 *Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν, τότε $V \simeq \mathbb{F}^{\nu\times 1}$.*

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των γραμμικών απεικονίσεων σχετικά με τις έννοιες της γραμμικής εξάρτησης, του συνόλου γεννητόρων και της βάσης ενός διανυσματικού χώρου.

Πρόταση 5.2.5 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση.*

(i) Αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τα $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu) \in W$ είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένα.

(ii) Αν η f είναι 1-1 και τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα στοιχεία $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu) \in W$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. (i) Καθώς τα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V$. Συνεπώς, από τη γραμμικότητα της f έπεται ότι

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\nu f(v_\nu) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu) = f(0_V) = 0_W$$

και άρα τα $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ είναι στοιχεία του $\mathbb{F}$, τέτοια ώστε $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\nu f(v_\nu) = 0_W$. Με βάση τη γραμμικότητα της f, η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu) = 0_W = f(0_V).$$

Έτσι, καθώς η f είναι 1-1, έπεται ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu = 0_V$. Τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ είναι, από την υπόθεσή μας, γραμμικά ανεξάρτητα και άρα θα πρέπει να είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\nu = 0$. Άρα, τα στοιχεία $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)$ είναι πράγματι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 5.2.6 *Το συμπέρασμα της Πρότασης 5.2.5(ii) δεν ισχύει αν η γραμμική απεικόνιση f δεν είναι 1-1. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $v = (1, 1, 0)$ και $v' = (0, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά τα στοιχεία $f(v) = (0, 1)$, $f(v') = (0, -1)$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Πρόταση 5.2.7 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν η f είναι επί και $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_\nu \rangle$, τότε $W = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu) \rangle$.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο $w \in W$. Καθώς η f είναι επί, υπάρχει στοιχείο $v \in V$ με $f(v) = w$. Όμως, $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_\nu \rangle$ και άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ με $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\nu v_\nu$. Έτσι, με βάση τη γραμμικότητα της f, έπεται ότι το στοιχείο

$$w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\nu f(v_\nu)$$

είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)$. Συνεπώς, δείξαμε ότι $W = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu) \rangle$.

Παράδειγμα 5.2.8 *Το συμπέρασμα της Πρότασης 5.2.7 δεν ισχύει αν η γραμμική απεικόνιση f δεν είναι επί. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y) = (x, x - y, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $e_1 = (1, 0)$ και $e_2' = (0, 1)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^2$, αλλά τα στοιχεία $f(e_1) = (1, 1, 0)$, $f(e_2) = (0, -1, 1)$ δεν παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.*

Πόρισμα 5.2.9 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ ένας ισομορφισμος. Τότε, το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ είναι μια βάση του V αν και μόνο αν το σύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)\}$ είναι μια βάση του W.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ είναι μια βάση του V. Τότε, το υποσύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)\} \subseteq W$ είναι μια βάση του W, καθώς είναι γραμμικά ανεξάρτητο (Πρόταση 5.2.5(ii)) και παράγει τον W (Πρόταση 5.2.7).

Αντίστροφα, αν το σύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)\}$ είναι μια βάση του W, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον ισομορφισμό $f^{-1} : W \longrightarrow V$ (βλ. την απόδειξη της Πρότασης 5.1.8) και να συμπεράνουμε όπως παραπάνω ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ είναι μια βάση του V.

Το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε την ισομορφία δύο (πεπερασμένα παραγόμενων) διανυσματικών χώρων με έναν πολύ απλό τρόπο: με την ισότητα των διαστάσεών τους.

Θεώρημα 5.2.10 *Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Τότε, οι V, W είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν $dim_{\mathbb{F}} V = dim_{\mathbb{F}} W$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι οι διανυσματικοί χώροι V, W είναι ισόμορφοι και $dim_{\mathbb{F}} V = \nu$. Τότε, υπάρχει μια βάση $\{v_1, v_2, \ldots v_\nu\}$ του V με ν στοιχεία. Αν $f : V \longrightarrow W$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε το σύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)\}$ αποτελεί μια βάση του W (βλ. Πόρισμα 5.2.9) και άρα $dim_{\mathbb{F}} W = \nu = dim_{\mathbb{F}} V$.

Αντίστροφα, αν $dim_{\mathbb{F}} V = dim_{\mathbb{F}} W = \nu$, τότε οι διανυσματικοί χώροι V, W είναι ισόμορφοι με τον $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$ (Πόρισμα 5.2.4). Έστω ότι $f : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ και $g : W \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ ισομορφισμοί. Τότε, η σύνθεση $f \circ g^{-1} : V \longrightarrow W$ είναι ένας ισομορφισμός και άρα οι διανυσματικοί χώροι V, W είναι ισόμορφοι (πρβλ. ιδιότητες (ii) και (iii) μετά τον Ορισμό 5.1.9).

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \longrightarrow W$ και του περιορισμού της $f|_B$ σε μια βάση B του V. Θα δούμε ότι η γραμμική απεικόνιση f καθορίζεται από τις τιμές της στη βάση B και ότι κάθε απεικόνιση από τη βάση B του V στον W μπορεί να επεκταθεί σε μια γραμμική απεικόνιση από τον V στον W.

Πρόταση 5.2.11 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f, g : V \longrightarrow W$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Τότε, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) $f = g$

(ii) *Αν το $B \subseteq V$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων, τότε ισχύει $f(v) = g(v)$ για κάθε $v \in B$.*

(iii) *Υπάρχει ένα σύνολο γεννητόρων $B \subseteq V$, έτσι ώστε να ισχύει $f(v) = g(v)$ για κάθε $v \in B$.*

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι αν ισχύει το (i), τότε $f(v) = g(v)$ για κάθε στοιχείο $v \in V$ και άρα θα ισχύει το (ii). Αν τώρα ισχύει το (ii), τότε, επιλέγοντας ένα σύνολο γεννητόρων B του V, βλέπουμε ότι ισχύει το (iii).

Τέλος, για να δείξουμε ότι $(iii) \rightarrow (i)$, ας θεωρήσουμε ένα σύνολο γεννητόρων $B \subseteq V$, έτσι ώστε να ισχύει $f(v) = g(v)$ για κάθε $v \in B$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f = g$, δηλαδή ότι $f(v) = g(v)$ για κάθε $v \in V$. Έστω $v \in V$. Καθώς το υποσύνολο $B \subseteq V$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in B$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ έτσι ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\mu$. Όμως $f(v_i) = g(v_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και άρα

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\nu f(v_\nu) = \lambda_1 g(v_1) + \lambda_2 g(v_2) + \cdots + \lambda_\nu g(v_\nu) = g(v)$$

(βλ. Πρόταση 5.1.3(ii)).

Πρόταση 5.2.12 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με τον V πεπερασμένα παραγόμενο. Αν τα στοιχεία $v_1, \ldots, v_\nu \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε για κάθε διατεταγμένη ν-άδα $(w_1, \ldots, w_\nu) \in W^\nu$ υπάρχει τουλάχιστον μία γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ με $f(v_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, \nu$.*

Απόδειξη. Καθώς ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένα παραγόμενος, γνωρίζουμε ότι για τη διάσταση $\mu = dim_{\mathbb{F}} V$ ισχύει $\mu \geq \nu$ και μάλιστα υπάρχουν στοιχεία $v_{\nu+1}, \ldots, v_\mu \in V$, τέτοια ώστε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_\nu, v_{\nu+1}, \ldots, v_\mu\}$ να αποτελεί μια βάση του V (βλ. Πόρισμα 4.5.4). Έτσι, για κάθε στοιχείο $v \in V$ υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_\mu \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu + \lambda_{\nu+1} v_{\nu+1} + \cdots + \lambda_\mu v_\mu.$$

Από τη μοναδικότητα των παραπάνω συντελεστών, συμπεραίνουμε ότι ο κανόνας που αντιστοιχίζει στο στοιχείο $v \in V$ το στοιχείο $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu \in W$ είναι μία απεικόνιση από τον V στον W, την οποία συμβολίζουμε με f.

Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ είναι γραμμική, θεωρούμε ένα άλλο στοιχείο $v' \in V$ και ένα $\lambda \in \mathbb{F}$. Αν

$$v' = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_\nu v_\nu + \lambda'_{\nu+1} v_{\nu+1} + \cdots + \lambda'_\mu v_\mu$$

είναι η (μοναδική) έκφραση του v' ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, τότε έχουμε

$$v + v' = (\lambda_1 + \lambda'_1) v_1 + \cdots + (\lambda_\nu + \lambda'_\nu) v_\nu + (\lambda_{\nu+1} + \lambda'_{\nu+1}) v_{\nu+1} + \cdots + (\lambda_\mu + \lambda'_\mu) v_\mu$$

και
$$\lambda v = (\lambda\lambda_1)v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_\nu)v_\nu + (\lambda\lambda_{\nu+1})v_{\nu+1} + \cdots + (\lambda\lambda_\mu)v_\mu.$$
Συνεπώς,
$$\begin{aligned} f(v+v') &= (\lambda_1+\lambda_1')w_1 + \cdots + (\lambda_\nu+\lambda_\nu')w_\nu \\ &= (\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu) + (\lambda_1' w_1 + \cdots + \lambda_\nu' w_\nu) \\ &= f(v) + f(v') \end{aligned}$$
και
$$f(\lambda v) = (\lambda\lambda_1)w_1 + \cdots + (\lambda\lambda_\nu)w_\nu = \lambda(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu) = \lambda f(v),$$
δηλαδή η f είναι γραμμική.

Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, \nu$ η έκφραση του v_i ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης είναι η εξής:
$$v_i = 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + 0 \cdot v_\nu + 0 \cdot v_{\nu+1} + \cdots + 0 \cdot v_\mu.$$
Έτσι, με βάση τον ορισμό της f, έχουμε
$$f(v_i) = 0 \cdot w_1 + \cdots + 1 \cdot w_i + \cdots + 0 \cdot w_\nu = w_i$$
και άρα δείχτηκε το ζητούμενο.

Θεώρημα 5.2.13 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $\mathcal{L}(V,W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από τον V στον W. Υποθέτουμε ότι ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος και θεωρούμε μια βάση του $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$, όπου $\nu = dim_{\mathbb{F}} V$. Τότε, η απεικόνιση*
$$a : \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow W^\nu,$$
με $f \longmapsto (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu))$, είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση a είναι 1-1, θεωρούμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $f, g : V \longrightarrow W$ με $a(f) = a(g) \in W^\nu$. Τότε,
$$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)) = (g(v_1), g(v_2), \ldots, g(v_\nu))$$
και άρα $f(v_i) = g(v_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Έτσι, με βάση την Πρόταση 5.2.11, συμπεραίνουμε ότι $f = g$.

Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση a είναι επί, θεωρούμε μια διατεταγμένη ν-άδα
$$(w_1, w_2, \ldots, w_\nu) \in W^\nu.$$
Καθώς τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, από την Πρόταση 5.2.12 έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον μία γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ με $f(v_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Έτσι, θα είναι
$$a(f) = (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)) = (w_1, w_2, \ldots, w_\nu)$$
και άρα η a είναι επί.

Γνωρίζουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ είναι ισομορφισμός (δηλαδή, 1-1 και επί) αν και μόνο αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$, τέτοια ώστε $f \circ g = 1_W$ και $g \circ f = 1_V$ (βλ. Πρόταση 5.1.8). Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε με έναν ανάλογο τρόπο τους μονομορφισμούς και τους επιμορφισμούς των διανυσματικών χώρων.

Πόρισμα 5.2.14 *Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Η f είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$ με $g \circ f = 1_V$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι 1-1 και ας θεωρήσουμε μια βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ του V. Τότε, τα στοιχεία $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu) \in W$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 5.2.5(ii)). Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 5.2.12 και να βρούμε μια γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$, τέτοια ώστε $g(f(v_i)) = v_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Παρατηρούμε ότι για τις γραμμικές απεικονίσεις

$$g \circ f : V \longrightarrow V \quad \text{και} \quad 1_V : V \longrightarrow V$$

ισχύει $(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = v_i = 1_V(v_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Καθώς το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ παράγει τον V, με βάση την Πρόταση 5.2.11, συμπεραίνουμε ότι $g \circ f = 1_V$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια (γραμμική) απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$ με $g \circ f = 1_V$. Αν $v, v' \in V$ είναι δύο στοιχεία με $f(v) = f(v') \in W$, τότε έχουμε

$$v = 1_V(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(f(v')) = (g \circ f)(v') = 1_V(v') = v'.$$

Άρα, η f είναι 1-1.

Πόρισμα 5.2.15 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με τον W πεπερασμένα παραγόμενο και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Η f είναι επιμορφισμός.*

(ii) *Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$ με $f \circ g = 1_W$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι επί και ας θεωρήσουμε μια βάση $\{w_1, w_2, \ldots, w_\nu\}$ του W. Τότε, υπάρχουν στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$ τέτοια ώστε $w_i = f(v_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 5.2.12 και να βρούμε μια γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$, τέτοια ώστε $g(w_i) = v_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Παρατηρούμε ότι για τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f \circ g : W \longrightarrow W \quad \text{και} \quad 1_W : W \longrightarrow W$$

ισχύει $(f \circ g)(w_i) = f(g(w_i)) = f(v_i) = w_1 = 1_W(w_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Καθώς το σύνολο $\{w_1, w_2, \ldots, w_\nu\}$ παράγει τον W, με βάση την Πρόταση 5.2.11, συμπεραίνουμε ότι $f \circ g = 1_W$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια (γραμμική) απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$ με $f \circ g = 1_W$. Τότε, για κάθε στοιχείο $w \in W$ θεωρούμε το στοιχείο $v = g(w) \in V$ και παρατηρούμε ότι ισχύει $f(v) = f(g(w)) = (f \circ g)(w) = 1_W(w) = w$. Άρα, η f είναι επί.

Παράδειγμα 5.2.16 *Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}W = \nu$. Θεωρούμε δύο βάσεις $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ και $\{w_1, w_2, \ldots, w_\nu\}$ των V και W αντίστοιχα και δύο γραμμικές απεικονίσεις $f : V \longrightarrow W$ και $g : W \longrightarrow V$, τέτοιες ώστε $f(v_i) = w_i$ και $g(w_i) = v_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ (βλ. Πρόταση 5.2.12). Τότε, για τις γραμμικές απεικονίσεις*

$$g \circ f : V \longrightarrow V \quad \text{και} \quad f \circ g : W \longrightarrow W$$

ισχύει $(g \circ f)(v_i) = v_i$ και $(f \circ g)(w_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Συνεπώς, με βάση την Πρόταση 5.2.11, συμπεραίνουμε ότι $g \circ f = 1_V$ και $f \circ g = 1_W$. Άρα, οι διανυσματικοί χώροι V και W είναι ισόμορφοι (βλ. Πρόταση 5.1.8) και έχουμε μια εναλλακτική απόδειξη της μιας συνεπαγωγής του Θεωρήματος 5.2.10.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ και τις διατεταγμένες του βάσεις $\widehat{B}$ και $\widehat{B'}$, όπου $\widehat{B} = ((1,0,0),(1,1,1),(0,-1,1))$ και $\widehat{B'} = ((1,1,1),(0,-2,-1),(0,0,-1))$. Αν $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, να βρεθούν οι $[v]_{\widehat{B}}$ και $[v]_{\widehat{B'}}$.

2. Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση.

   (i) Υποθέτουμε ότι για κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ του V το υποσύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)\}$ του W είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο. Δείξτε ότι η f είναι 1-1.

   (ii) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ του V, τέτοια ώστε το υποσύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)\}$ του W είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Δείξτε ότι η f είναι 1-1.

   (iii) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ του V, τέτοιο ώστε τα στοιχεία $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)$ παράγουν τον W. Δείξτε ότι η f είναι επί.

   (iv) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ του V, τέτοια ώστε το υποσύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)\}$ να είναι επίσης μια βάση του W. Δείξτε ότι η f είναι ένας ισομορφισμός.

3. Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^{2\times 2}$ και , $\mathbb{R}_3[x]$. Να δειχτεί ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος ισομορφισμοί $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$.

4. Να εξεταστεί αν οι ακόλουθοι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι:

   (i) $\mathbb{R}^5$ και $\mathbb{R}_4[x]$,

   (ii) $\mathbb{C}$ και $\mathbb{R}_3[x]$,

   (iii) $\mathbb{R}$ και $\{(x, 2x, 3x) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$.

5. Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ ένας μονομορφισμός. Να δειχτεί ότι ο f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$ με $g \circ f = 1_V$ (πρβλ. Πόρισμα 5.2.14).

6. Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ ένας επιμορφισμός. Να δειχτεί ότι ο f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$ με $f \circ g = 1_W$ (πρβλ. Πόρισμα 5.2.15).

5.3 Ο Πυρήνας και η Εικόνα

Υπενθυμίζουμε ότι αν X, Y είναι δύο σύνολα και $a : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση, τότε για κάθε υποσύνολο $X_0 \subseteq X$ ορίζεται η εικόνα $a(X_0) \subseteq Y$, ως εξής:

$$a(X_0) = \{y \in Y : \text{υπάρχει } x \in X_0 \text{ με } y = f(x)\}.$$

Επίσης, για κάθε υποσύνολο $Y_0 \subseteq Y$ ορίζεται η αντίστροφη εικόνα $a^{-1}(Y_0) \subseteq X$ με

$$a^{-1}(Y_0) = \{x \in X : f(x) \in Y_0\}.$$

Πρόταση 5.3.1 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση.*

(i) *Αν ο $V_0 \leq V$ είναι ένας υπόχωρος του V, τότε η εικόνα $f(V_0)$ είναι ένας υπόχωρος του W.*

(ii) *Αν ο $W_0 \leq W$ είναι ένας υπόχωρος του W, τότε η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(W_0)$ είναι ένας υπόχωρος του V.*

Απόδειξη. (i) Καθώς $0_V \in V_0$ και $f(0_V) = 0_W$, έπεται ότι $0_W \in f(V_0)$. Ας θεωρήσουμε τώρα δύο στοιχεία $w_1, w_2 \in f(V_0)$. Τότε, υπάρχουν στοιχεία $v_1, v_2 \in V_0$, τέτοια ώστε $w_1 = f(v_1)$ και $w_2 = f(v_2)$. Καθώς ο V_0 είναι ένας υπόχωρος του V, είναι $v_1 + v_2 \in V_0$ και άρα

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in f(V_0).$$

Επίσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ έχουμε $\lambda v_1 \in V_0$ και άρα

$$\lambda w_1 = \lambda f(v_1) = f(\lambda v_1) \in f(V_0).$$

Έτσι, η εικόνα $f(V_0)$ είναι πράγματι ένας υπόχωρος του W.

(ii) Για να δείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(W_0)$ είναι ένας υπόχωρος του V, αρχικά παρατηρούμε ότι $f(0_V) = 0_W \in W_0$ και άρα $0_V \in f^{-1}(W_0)$. Επιπλέον, αν θεωρήσουμε δύο στοιχεία $v_1, v_2 \in f^{-1}(V_0)$, τότε $f(v_1), f(v_2) \in W_0$ και άρα

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \in W_0,$$

δηλαδή $v_1 + v_2 \in f^{-1}(W_0)$. Τέλος, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ έχουμε

$$f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1) \in W_0$$

και άρα $\lambda v_1 \in f^{-1}(V_0)$. Έτσι, ο $f^{-1}(W_0)$ είναι πράγματι ένας υπόχωρος του V.

Ειδικότερα, αν V, W είναι δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση, μπορούμε να θεωρήσουμε τον υπόχωρο $\{0_W\} \leq W$ και την αντίστροφή του εικόνα $f^{-1}(\{0_W\}) \leq V$, καθώς επίσης τον υπόχωρο $V \leq V$ και την εικόνα του $f(V) \leq W$.

Ορισμός 5.3.2 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση.*

1. *Ο υπόχωρος $f^{-1}(\{0_W\}) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$ του V λέγεται* **πυρήνας** *της γραμμικής απεικόνισης f και συμβολίζεται $kerf$.*

2. *Ο υπόχωρος $f(V) = \{w \in W \mid w = f(v), v \in V\}$ του W λέγεται* **εικόνα** *της γραμμικής απεικόνισης f και συμβολίζεται imf.*

Η μελέτη του πυρήνα και της εικόνας μιας γραμμικής απεικόνισης δίνει χρήσιμες πληροφορίες για την απεικόνιση όπως αυτό φαίνεται από το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 5.3.3 *Έστω V, W δυο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση.*

(i) *Η f είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $kerf = \{0_V\}$.*

(ii) *Η f είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $imf = W$.*

Απόδειξη. (i) Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η f είναι μονομορφισμός. Τότε, για κάθε στοιχείο $v \in kerf$ έχουμε $f(v) = 0_W = f(0_V)$. Καθώς η f είναι 1-1, έπεται ότι $v = 0_V$ και άρα $kerf = \{0_V\}$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $kerf = \{0_V\}$. Αν τα στοιχεία $v, v' \in V$ είναι τέτοια ώστε $f(v) = f(v')$, τότε θα είναι $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0_W$ και άρα $v - v' \in kerf$. Συνεπώς, $v - v' = 0_V$, δηλαδή $v = v'$ και έτσι η f είναι 1-1.

(ii) Αυτό είναι άμεση συνέπεια των ορισμών.

Παραδείγματα 5.3.4

(i) *Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Η απεικόνιση f είναι γραμμική και μάλιστα ισχύει*

$$kerf = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$$

και

$$imf = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Καθώς $kerf \neq \{(0, 0, 0)\}$ (για παράδειγμα, έχουμε $(1, 1, 1) \in kerf$), η f δεν είναι 1-1. Επίσης, έχουμε $imf \subsetneqq \mathbb{R}^3$ (για παράδειγμα, $(1, 0, 0) \notin imf$) και άρα η f δεν είναι επί.

(ii) *Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $d : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ με $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \longmapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η d είναι γραμμική και μάλιστα ένας επιμορφισμός (πρβλ. Παράδειγμα 5.1.2(vii)). Η απεικόνιση d δεν είναι 1-1, καθώς ο πυρήνας της $kerd$ αποτελείται από όλα τα σταθερά πολυώνυμα (και άρα $kerd \neq 0$).*

(iii) *Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_6[x]$ με $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \longmapsto \alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6$ είναι γραμμική και μάλιστα ένας μονομορφισμός. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η εικόνα imf της f αποτελείται από όλα τα πραγματικά πολυώνυμα με βαθμό ≤ 6, στα οποία οι συντελεστές του x, του x^3 και του x^5 μηδενίζονται. Έτσι, είναι $imf \subsetneqq \mathbb{R}_6[x]$ και άρα η f δεν είναι επί.*

Πρόταση 5.3.5 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $V_0 \leq V$ είναι ένας υπόχωρος του V και $B_0 \subseteq V_0$ ένα σύνολο γεννητόρων του, τότε το υποσύνολο $f(V_0) \subseteq W$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων της εικόνας $f(V_0) \leq W$.*

Απόδειξη. Καθώς $B_0 \subseteq V_0$, είναι σαφές ότι το $f(B_0)$ είναι υποσύνολο του $f(V_0)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του $f(V_0)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $f(B_0)$. Για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο $w \in f(V_0)$. Τότε, από τον ορισμό της εικόνας $f(V_0)$ του V_0, έπεται ότι υπάρχει $v \in V_0$ με $w = f(v)$. Καθώς το B_0 είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V_0, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in B_0$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$, έτσι ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu.$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.1.3(ii), έχουμε

$$w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\nu v_\nu) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\nu f(v_\nu).$$

Έτσι, το $w \in f(V_0)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu) \in f(B_0)$.

Πόρισμα 5.3.6 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $B \subseteq V$ είναι μια βάση του V, τότε το υποσύνολο $f(B) \subseteq W$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων της εικόνας imf της f.*

Απόδειξη. Καθώς η βάση B είναι ειδικότερα ένα σύνολο γεννητόρων του V και $imf = f(V)$, το ζητούμενο είναι μια άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.5.

Πόρισμα 5.3.7 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν ο V_0 είναι ένας πεπερασμένα παραγόμενος υπόχωρος του V, τότε η εικόνα του $f(V_0)$ είναι ένας υπόχωρος του W, ο ο οποίος είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενος.*

Απόδειξη. Αν B_0 είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του V_0, τότε το σύνολο $f(B_0)$ είναι επίσης πεπερασμένο και παράγει τον υπόχωρο $f(V_0)$ του W.

Πόρισμα 5.3.8 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος, τότε η εικόνα imf της f είναι ένας πεπερασμένα παραγόμενος υπόχωρος του W.*

Παράδειγμα 5.3.9 *Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times \mu}$ ένας $\nu \times \mu$ πίνακας επί του $\mathbb{F}$ και $L_A : \mathbb{F}^{\mu \times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ η γραμμική απεικόνιση με $L_A(B) = AB$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{\mu \times 1}$ (βλ. Παράδειγμα 5.1.2(iv)).*

Αρχικά, παρατηρούμε ότι για τον πυρήνα της L_A είναι

$$kerL_A = \{X \in \mathbb{F}^{\mu \times 1} \mid AX = 0_{\mathbb{F}^{\nu \times 1}}\}.$$

Έτσι, ένας πίνακας-στήλη $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{pmatrix}$ ανήκει στον πυρήνα $ker L_A$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1\mu}x_\mu & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2\mu}x_\nu & = 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{\nu 1}x_1 & + & a_{\nu 2}x_2 & + & \cdots & + & a_{\nu\mu}x_\mu & = 0 \end{array}$$

Με άλλα λόγια, ο πυρήνας $ker L_A$ της γραμμικής απεικόνισης L_A είναι ακριβώς το σύνολο των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος εξισώσεων $AX = 0$ (βλ. Παράδειγμα 4.2.10).

Για να προσδιορίσουμε την εικόνα $im L_A$ της L_A θεωρούμε το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{F}^{\mu\times 1}.$$

Καθώς το σύνολο αυτό παράγει το διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 5.3.5 και να συμπεράνουμε ότι ο υπόχωρος $im L_A \leq \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ παράγεται από τα στοιχεία

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

δηλαδή από τα γινόμενα

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι τα παραπάνω γινόμενα είναι ακριβώς οι στήλες

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\nu 1} \end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{\nu 2} \end{pmatrix}, \ldots, \; c_\mu = \begin{pmatrix} a_{1\mu} \\ a_{2\mu} \\ \vdots \\ a_{\nu\mu} \end{pmatrix}$$

του πίνακα A και άρα $im L_A = \langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu \rangle \leq \mathbb{F}^{\nu\times 1}$.

Παράδειγμα 5.3.10 *Για ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον 2×3 πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ και τη γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 1}$ με $L_A(B) = AB$ για κάθε $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.*

Τότε, ο πυρήνας $kerL_A$ αποτελείται ακριβώς από τους πίνακες $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, για τους οποίους είναι

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Επίσης, η εικόνα imL_A της L_A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A, δηλαδή

$$imL_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε διανυσματικό υπόχωρο V_0 ενός διανυσματικού χώρου V ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας στον V, θέτοντας

$$v \sim v' \Longleftrightarrow v' - v \in V_0$$

για κάθε $v, v' \in V$. Η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $v \in V$ είναι το σύμπλοκο $v + V_0 = \{v + v_0 : v_0 \in V_0\}$ και το σύνολο πηλίκο V/V_0 εφοδιάζεται με τη δομή ενός διανυσματικού χώρου επί του $\mathbb{F}$, όπου

$$(v + V_0) + (v' + V_0) = (v + v') + V_0 \quad \text{και} \quad \lambda(v + V_0) = \lambda v + V_0$$

για κάθε σύμπλοκα $v + V_0, v' + V_0 \in V/V_0$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Το μηδενικό στοιχείο του $V/kerf$ είναι το σύμπλοκο $0_V + kerf$.

Το επόμενο βασικό αποτέλεσμα, που συνδέει τον πυρήνα με την εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης, αναφέρεται συνήθως ως το 1^0 **θεώρημα των ισομορφισμών** διανυσματικών χώρων.

Θεώρημα 5.3.11 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, υπάρχει ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων*

$$\overline{f} : V/kerf \longrightarrow imf,$$

τέτοιος ώστε για κάθε στοιχείο $\xi \in V/kerf$ με $\xi = v + kerf$ για κάποιο $v \in V$, να είναι $\overline{f}(\xi) = f(v)$.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε $v \in V$ το στοιχείο $f(v) \in W$ ανήκει στον υπόχωρο $imf \leq W$. Θεωρούμε τώρα ένα άλλο στοιχείο $v' \in V$ που είναι τέτοιο ώστε $v + kerf = v' + kerf \in V/kerf$. Τότε, θα είναι $v' - v \in kerf$ και άρα $f(v') - f(v) = f(v' - v) = 0_W$. Συνεπώς, έχουμε $f(v) = f(v')$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο $f(v)$ εξαρτάται μόνο από το σύμπλοκο $v + kerf \in V/kerf$ του $v \in V$. Με άλλα λόγια, ορίζεται πράγματι μια απεικόνιση

$$\overline{f} : V/kerf \longrightarrow imf,$$

με $v + kerf \longmapsto f(v)$, $v + kerf \in V/kerf$.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $\overline{f}$ είναι γραμμική. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε δύο στοιχεία $\xi_1, \xi_2 \in V/kerf$ και ένα $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε, υπάρχουν στοιχεία $v_1, v_2 \in V$

με $\xi_1 = v_1 + kerf$ και $\xi_2 = v_2 + kerf$. Από τον ορισμό των πράξεων στον διανυσματικό χώρο $V/kerf$, θα είναι $\xi_1 + \xi_2 = (v_1 + kerf) + (v_2 + kerf) = (v_1 + v_2) + kerf$ και $\lambda\xi_1 = \lambda(v_1 + kerf) = \lambda v_1 + kerf$. Έτσι, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της f, έχουμε

$$\overline{f}(\xi_1 + \xi_2) = \overline{f}((v_1 + v_2) + kerf) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \overline{f}(\xi_1) + \overline{f}(\xi_2)$$

και

$$\overline{f}(\lambda\xi_1) = \overline{f}(\lambda v_1 + kerf)) = f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1) = \lambda\overline{f}(\xi_1).$$

Άρα, η απεικόνιση $\overline{f}$ είναι γραμμική.

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι η $\overline{f}$ είναι 1-1, δηλαδή ότι $ker\overline{f} = \{0_V + kerf\}$. Αν $\xi \in ker\overline{f}$ και $\xi = v + kerf$ για κάποιο $v \in V$, τότε θα είναι

$$f(v) = \overline{f}(v + kerf) = \overline{f}(\xi) = 0 \in imf$$

και άρα $v \in kerf$. Τότε όμως, θα είναι $\xi = v + kerf = 0_V + kerf$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε $w \in imf$ υπάρχει $v \in V$ με $w = f(v)$ και άρα για το σύμπλοκο $v + kerf \in V/kerf$ θα ισχύει $w = f(v) = \overline{f}(v + kerf)$. Έτσι, η γραμμική απεικόνιση $\overline{f}$ είναι επί.

Παρατήρηση 5.3.12 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε επίσης τον ισομορφισμό $\overline{f} : V/kerf \longrightarrow imf$ του προηγούμενου θεωρήματος. Τότε, η σύνδεση*

$$V \xrightarrow{p} V/kerf \xrightarrow{\overline{f}} imf \xrightarrow{\iota} W$$

είναι ακριβώς η απεικόνιση f. Εδώ, p είναι η κανονική απεικόνιση πηλίκο του V επί του διανυσματικού χώρου πηλίκο $V/kerf$ και ι ο εγκλεισμός του υποχώρου imf στον W (βλ. Παράδειγμα 5.1.7(iii)). Πράγματι, για κάθε στοιχείο $v \in V$ έχουμε

$$\big(\iota \circ \overline{f} \circ p\big)(v) = \iota\big(\overline{f}(p(v))\big) = \iota\big(\overline{f}(v + kerf)\big) = \iota(f(v)) = f(v).$$

Συνεπώς, η γραμμική απεικόνιση f μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση ενός επιμορφισμού, ενός ισομορφισμού και ενός μονομορφισμού.

Πόρισμα 5.3.13 *Αν V, W είναι δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε $dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}kerf + dim_{\mathbb{F}}imf$.*

Απόδειξη. Οι διανυσματικοί χώροι $V/kerf$ και imf είναι πεπερασμένα παραγόμενοι (βλ. Προτάσεις 4.6.11 και 4.6.3 αντίστοιχα) και ισόμορφοι (Θεώρημα 5.3.11). Συνεπώς, θα είναι $dim_{\mathbb{F}}(V/kerf) = dim_{\mathbb{F}}imf$ (Θεώρημα 5.2.10) και έτσι η ζητούμενη σχέση έπεται από την Πρόταση 4.6.11.

Πρόταση 5.3.14 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Η f είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Η f είναι επίμορφισμός.*

(iii) *Η f είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $(i) \to (iii)$ και $(ii) \to (iii)$.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι 1-1. Τότε, θα είναι $kerf = \{0_V\}$ (Πρόταση 5.3.3(i)) και άρα $dim_{\mathbb{F}}kerf = 0$. Συνεπώς, η σχέση του Πορίσματος 5.3.13 γίνεται $dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}imf$. Καθώς η εικόνα imf της f είναι ένας υπόχωρος του V, ο οποίος είναι πεπερασμένα παραγόμενος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.6.3(ii) και να συμπεράνουμε ότι $imf = V$. Έτσι, η f είναι επί και άρα ισομορφισμός.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι επί. Τότε, θα ισχύει $imf = V$ και άρα $dim_{\mathbb{F}}imf = dim_{\mathbb{F}}V$. Από τη σχέση του Πορίσματος 5.3.13, έπεται ότι $dim_{\mathbb{F}}kerf = 0$ και έτσι $kerf = \{0_V\}$. Συνεπώς, με βάση την Πρόταση 5.3.3(ii), η γραμμική απεικόνιση f είναι 1-1 και άρα ισομορφισμός.

Παρατήρηση 5.3.15 *Η υπόθεση ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένα παραγόμενος είναι απαραίτητη στην Πρόταση 5.3.14. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τον πραγματικο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και τις γραμμικές απεικονίσεις*

$$d : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \quad \textit{και} \quad I : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$

με $d(f(x)) = f'(x)$ και $I(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ (πρβλ. Παραδείγματα 5.1.2$(vii), (viii)$). Καθώς η σύνθεση $d \circ I$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]$, συμπεραίνουμε ότι η I είναι 1-1 (Πόρισμα 5.2.14) και η d επί (Πόρισμα 5.2.15). Όμως, η d δεν είναι ισομορφισμός, αφού δεν είναι 1-1 (ο πυρήνας της $kerd$ αποτελείται από τα σταθερά πολυώνυμα), και η I δεν είναι ισομορφισμός, αφού δεν είναι επί (η εικόνα της imI αποτελείται από τα πολυώνυμα χωρίς σταθερό όρο).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχτεί ότι οι επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές και να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα και την εικόνα τους.

   (i) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4 + x_1)$

   (i) $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ με $f(x) = f(-x)$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.

   (iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ με $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 - x_2, x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, x_3 - x_1)$

2. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να βρεθεί μια βάση για τους υπόχωρους imL_A και $kerL_A$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

3. Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $V_0 \leq V$ ένας υπόχωρός του. Να δειχτεί ότι:

   (i) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ με $kerf = V_0$.

(ii) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : V \longrightarrow V$ με $img = V_0$.

4. Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι και $f : V \longrightarrow W$ ένας μονομορφισμός. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν $V_0 \leq V$ είναι ένας υπόχωρος του V, τότε $dim_{\mathbb{F}} f(V_0) = dim_{\mathbb{F}} V_0$.

   (ii) Αν $W_0 \leq W$ είναι ένας υπόχωρος του W, τότε $dim_{\mathbb{F}} f^{-1}(W_0) \leq dim_{\mathbb{F}} W_0$. Επιπλέον, η τελευταία ανισότητα είναι ισότητα αν και μόνο αν $W_0 \subseteq imf$.

5. Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι και $f : V \longrightarrow W$ ένας επιμορφισμός. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν $W_0 \leq W$ είναι ένας υπόχωρος του W, τότε $dim_{\mathbb{F}} f^{-1}(W_0) = dim_{\mathbb{F}} kerf + dim_{\mathbb{F}} W_0$.

   (ii) Αν $V_0 \leq V$ είναι ένας υπόχωρος του V, τότε $dim_{\mathbb{F}} f(V_0) \leq dim_{\mathbb{F}} V_0$. Επιπλέον, η τελευταία ανισότητα είναι ισότητα αν και μόνο αν $V_0 \cap kerf = \{0_V\}$.

6. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και V_1, V_2 δύο υπόχωροί του. Να δειχτεί ότι:

   (i) Οι διανυσματικοί χώροι $(V_1+V_2)/V_2$ και $V_1/(V_1 \cap V_2)$ είναι ισόμορφοι (2^0 **θεώρημα των ισομορφισμών** διανυσματικών χώρων).

   (ii) Αν $V_1 \subseteq V_2$, τότε ο διανυσματικός χώρος πηλίκο $\overline{V_2} = V_2/V_1$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\overline{V} = V/V_1$ και μάλιστα οι διανυσματικοί χώροι $\overline{V}/\overline{V_2}$ και V/V_2 είναι ισόμορφοι (3^0 **θεώρημα των ισομορφισμών** διανυσματικών χώρων).

5.4 Άλγεβρα Γραμμικών Απεικονίσεων

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ορισμένες αλγεβρικές ιδιότητες του συνόλου $\mathcal{L}(V, W)$ των γραμμικών απεικονίσεων από τον διανυσματικό χώρο V στον διανυσματικό χώρο W.

Πρόταση 5.4.1 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$.*

(i) *Αν $f, g : V \longrightarrow W$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε η απεικόνιση*

$$f + g : V \longrightarrow W,$$

που ορίζεται θέτοντας $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ για κάθε $v \in V$, είναι επίσης γραμμική. Η απεικόνιση $f + g$ καλείται **άθροισμα** *των f και g.*

(ii) *Αν $f : V \longrightarrow W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε η απεικόνιση*

$$\lambda f : V \longrightarrow W,$$

που ορίζεται θέτοντας $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$ για κάθε $v \in V$, είναι επίσης γραμμική. Η απεικόνιση λf καλείται **γινόμενο** *του λ με την f.*

Απόδειξη. Έστω $v, v' \in V$ και $\mu \in \mathbb{F}$. Από τον ορισμό της $f + g$ και τη γραμμικότητα των f, g, έχουμε

$$\begin{aligned}(f+g)(v+v') &= f(v+v') + g(v+v') \\ &= f(v) + f(v') + g(v) + g(v') \\ &= f(v) + g(v) + f(v') + g(v') \\ &= (f+g)(v) + (f+g)(v')\end{aligned}$$

και

$$(f+g)(\mu v) = f(\mu v) + g(\mu v) = \mu f(v) + \mu g(v) = \mu(f(v) + g(v)) = \mu(f+g)(v).$$

Άρα, η απεικόνιση $f + g$ είναι γραμμική. Για την απεικόνιση λf έχουμε

$$(\lambda f)(v+v') = \lambda f(v+v') = \lambda(f(v) + f(v')) = \lambda f(v') + \lambda f(v') = (\lambda f)(v) + (\lambda f)(v')$$

και

$$(\lambda f)(\mu v) = \lambda f(\mu v) = \lambda\mu f(v) = \mu\lambda f(v) = \mu(\lambda f)(v).$$

Συνεπώς, δείχτηκε η γραμμικότητα της λf.

Πρόταση 5.4.2 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Τότε, το σύνολο $\mathcal{L}(V, W)$ των γραμμικών απεικονίσεων από τον V στον W, εφοδιασμένο με το άθροισμα και το γινόμενο με στοιχεία του $\mathbb{F}$ που ορίστηκαν στην Πρόταση 5.4.1, είναι επίσης ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}(V, W)$ είναι η μηδενική απεικόνιση $v \longmapsto 0_W$, $v \in V$, ενώ το αντίθετο ενός στοιχείου $f \in \mathcal{L}(V, W)$ είναι η απεικόνιση $v \longmapsto -f(v)$, $v \in V$.*

Απόδειξη. Όλες οι ιδιότητες που θα πρέπει να δειχτούν προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς. Για παράδειγμα, θα δείξουμε ότι αν $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε είναι $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$. Για να δείξουμε την ισότητα αυτή, θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $v \in V$ ισχύει

$$(\lambda(f+g))(v) = (\lambda f + \lambda g)(v).$$

Με βάση τους ορισμούς, έχουμε

$$(\lambda(f+g))(v) = \lambda(f+g)(v) = \lambda(f(v) + g(v))$$

και

$$(\lambda f + \lambda g)(v) = (\lambda f)(v) + (\lambda g)(v) = \lambda f(v) + \lambda g(v).$$

Καθώς είναι $\lambda(f(v) + g(v)) = \lambda f(v) + \lambda g(v)$, το ζητούμενο έπεται. Οι υπόλοιπες ιδιότητες αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Έστω W ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και ν ένας φυσικός αριθμός. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι το σύνολο W^ν με πρόσθεση

$$(w_1, w_2, \ldots, w_\nu) + (w'_1, w'_2, \ldots, w'_\nu) = (w_1 + w'_1, w_2 + w'_2, \ldots, w_\nu + w'_\nu)$$

και πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου $\lambda \in \mathbb{F}$ με ένα στοιχείο του W^ν

$$\lambda(w_1, w_2, \ldots, w_\nu) = (\lambda w_1, \lambda w_2, \ldots, \lambda w_\nu),$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ (πρβλ. Παράδειγμα 4.1.4).

Παρατήρηση 5.4.3 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$ μια βάση του, όπου $\nu = dim_{\mathbb{F}} V$. Θεωρούμε επίσης ένα διανυσματικό χώρο W και την απεικόνιση*

$$a : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow W^\nu,$$

η οποία ορίζεται θέτοντας $a(f) = (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu))$ για κάθε $f \in \mathcal{L}(V, W)$ (Θεώρημα 5.2.13). Η απεικόνιση a είναι γραμμική. Πράγματι, αν $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε

$$\begin{aligned} a(f+g) &= ((f+g)(v_1), (f+g)(v_2), \ldots, (f+g)(v_\nu)) \\ &= (f(v_1) + g(v_1), f(v_2) + g(v_2), \ldots, f(v_\nu) + g(v_\nu)) \\ &= (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)) + (g(v_1), g(v_2), \ldots, g(v_\nu)) \\ &= a(f) + a(g) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} a(\lambda f) &= ((\lambda f)(v_1), (\lambda f)(v_2), \ldots, (\lambda f)(v_\nu)) \\ &= (\lambda f(v_1), \lambda f(v_2), \ldots, \lambda f(v_\nu)) \\ &= \lambda(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)) \\ &= \lambda a(f). \end{aligned}$$

Καθώς γνωρίζουμε ήδη ότι η απεικόνιση a είναι 1-1 και επί (Θεώρημα 5.2.13), συμπεραίνουμε ότι η a είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς συμπεριφέρεται η γραμμική δομή του συνόλου των γραμμικών απεικονίσεων αναφορικά με τη σύνθεση.

Πρόταση 5.4.4 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f, g : V \longrightarrow W$ δύο γραμμικές απεικονίσεις.*

(i) *Αν V' είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $s : V' \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε $(f+g) \circ s = f \circ s + g \circ s$ και $(\lambda f) \circ s = \lambda(f \circ s)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$.*

(ii) *Αν W' είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $t : W \longrightarrow W'$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε $t \circ (f+g) = t \circ f + t \circ g$ και $t \circ (\lambda f) = \lambda(t \circ f)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Απόδειξη. Οι δύο ισότητες στο (i) είναι άμεσες συνέπειες των ορισμών. Πράγματι, για κάθε στοιχείο $v' \in V'$ έχουμε

$$\begin{aligned} ((f+g) \circ s)(v') &= (f+g)(s(v')) \\ &= f(s(v')) + g(s(v')) \\ &= (f \circ s)(v') + (g \circ s)(v') \\ &= (f \circ s + g \circ s)(v') \end{aligned}$$

και

$$((\lambda f) \circ s)(v') = (\lambda f)(s(v')) = \lambda f(s(v')) = \lambda(f \circ s)(v') = (\lambda(f \circ s))(v').$$

Ανάλογα, οι ισότητες στο (ii) έπονται από τους ορισμούς και τη γραμμικότητα της t. Πράγματι, για κάθε $v \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned} (t \circ (f+g))(v) &= t((f+g)(v)) \\ &= t(f(v) + g(v)) \\ &= t(f(v)) + t(g(v)) \\ &= (t \circ f)(v) + (t \circ g)(v) \\ &= (t \circ f + t \circ g)(v) \end{aligned}$$

και

$$(t \circ (\lambda f))(v) = t((\lambda f)(v)) = t(\lambda f(v)) = \lambda t(f(v)) = \lambda(t \circ f)(v) = (\lambda(t \circ f))(v).$$

Ειδικότερα, ας θεωρήσουμε ένα διανυσματικό χώρο V επί του $\mathbb{F}$ και τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V,V)$ των γραμμικών απεικονίσεων από τον V στον εαυτό του. Θεωρούμε επίσης την πράξη της σύνθεσης

$$\mathcal{L}(V,V) \times \mathcal{L}(V,V) \longrightarrow \mathcal{L}(V,V),$$

με $(f,g) \longmapsto f \circ g$ για κάθε $f,g \in \mathcal{L}(V,V)$, και παρατηρούμε ότι για κάθε $f,g,h \in \mathcal{L}(V,V)$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύουν τα εξής:

(i) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(ii) $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ και $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$

(iii) $(\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda(f \circ g)$

Ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ που είναι εφοδιασμένος με μια πράξη η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) παραπάνω λέγεται **άλγεβρα** επί του $\mathbb{F}$.

Ορισμός 5.4.5 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $f^\nu : V \longrightarrow V$ για κάθε φυσικό αριθμό ν με επαγωγή, ως εξής:*

(i) $f^0 = 1_V$ *και*

(ii) $f^\nu = f^{\nu-1} \circ f$ *για κάθε* $\nu \geq 1$.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V,W)$ στην περίπτωση όπου W είναι ο μονοδιάστατος διανυσματικός χώρος $\mathbb{F}$.

Ορισμός 5.4.6 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ καλείται* **δυϊκός χώρος** *του V και συμβολίζεται με V^*.*

Παράδειγμα 5.4.7 *Ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^\nu$ είναι ισόμορφος με το δυϊκό του για κάθε φυσικό αριθμό ν. Πράγματι, θεωρώντας την κανονική βάση $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ του $\mathbb{R}^\nu$, μπορούμε να ορίσουμε τον ισομορφισμό*

$$a : (\mathbb{R}^\nu)^* \longrightarrow \mathbb{R}^\nu,$$

θέτοντας $a(f) = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_\nu))$ για κάθε $f \in (\mathbb{R}^\nu)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R})$ (βλ. Παρατήρηση 5.4.3).

Πρόταση 5.4.8 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, η απεικόνιση*

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*,$$

η οποία ορίζεται θέτοντας $f^*(g) = g \circ f$ για κάθε $g \in W^* = \mathcal{L}(W,\mathbb{F})$ είναι επίσης γραμμική και καλείται **δυϊκή απεικόνιση** *της f.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε $g \in W^*$, δηλαδή για κάθε γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow \mathbb{F}$, η σύνθεση $g \circ f : V \longrightarrow \mathbb{F}$ είναι επίσης γραμμική (βλ. Παράδειγμα 5.1.5(iii)) και άρα $g \circ f \in V^*$. Έτσι, ορίζεται πραγματικά η απεικόνιση f^*. Για να δείξουμε ότι η f^* είναι γραμμική, θεωρούμε δύο στοιχεία $g, g' \in W^*$ και ένα $\lambda \in \mathbb{F}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$f^*(g + g') = f^*(g) + f^*(g') \quad \text{και} \quad f^*(\lambda g) = \lambda f^*(g),$$

δηλαδή ότι

$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f \quad \text{και} \quad (\lambda g) \circ f = \lambda(g \circ f).$$

Έτσι, το ζητούμενο είναι μια ειδική περίπτωση της Πρότασης 5.4.4(i).

Πρόταση 5.4.9 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Τότε, η απεικόνιση*

$$\mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathcal{L}(W^*, V^*),$$

με $f \longmapsto f^*$, $f \in \mathcal{L}(V, W)$, είναι γραμμική.

Απόδειξη. Έστω $f, f' \in \mathcal{L}(V, W)$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(f + f')^* = f^* + f'^*$ και $(\lambda f)^* = \lambda f^*$. Συνεπώς, θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $g \in W^* = \mathcal{L}(W, \mathbb{F})$ είναι

$$(f + f')^*(g) = f^*(g) + f'^*(g') \quad \text{και} \quad (\lambda f)^*(g) = \lambda f^*(g),$$

δηλαδή ότι

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \text{και} \quad g \circ (\lambda f) = \lambda(g \circ f).$$

Έτσι, το ζητούμενο είναι μια ειδική περίπτωση της Πρότασης 5.4.4(ii).

Πρόταση 5.4.10 *Έστω U, V και W τρεις διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Θεωρούμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $f : U \longrightarrow V$ και $g : V \longrightarrow W$ και τις δυϊκές απεικονίσεις $f^* : V^* \longrightarrow U^*$ και $g^* : W^* \longrightarrow V^*$. Τότε, η δυϊκή απεικόνιση $(g \circ f)^* : W^* \longrightarrow U^*$ της σύνθεσης $g \circ f : U \longrightarrow W$ είναι η σύνθεση $f^* \circ g^* : W^* \longrightarrow U^*$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, θεωρούμε ένα στοιχείο $s \in W^* = \mathcal{L}(W, \mathbb{F})$ και υπολογίζουμε

$$(g \circ f)^*(s) = s \circ (g \circ f) = (s \circ g) \circ f = f^*(s \circ g) = f^*(g^*(s)) = (f^* \circ g^*)(s).$$

Άρα, δείχτηκε το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, που είναι τέτοιες ώστε $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ και $g(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Να δειχτεί ότι $f \circ g \neq g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

2. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμικη απεικόνιση με $f^2 = f$. Να δειχτεί ότι $V = kerf \oplus imf$.

3. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμικη απεικόνιση με $f^2 = 1_V$. Να δειχτεί ότι τα υποσύνολα

$$V_1 = \{v \in V : f(v) = v\} \quad \text{και} \quad V_{-1} = \{v \in V : f(v) = -v\}$$

είναι υπόχωροι του V και μάλιστα ισχύει $V = V_1 \oplus V_{-1}$.

4. Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος πραγματικός διανυσματικός χώρος και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμικη απεικόνιση με $f^2 = -1_V$. Να δειχτεί ότι:

   (i) Υπάρχει μια βάση του V της μορφής $\{v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \ldots, v_\nu, f(v_\nu)\}$, για κατάλληλα $v_1, v_2, \ldots, v_\nu \in V$.

   (ii) Η διάσταση $dim_{\mathbb{R}} V$ είναι άρτια.

5. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμικη απεικόνιση με $f^\nu = 0$ για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$. Να δειχτεί ότι η γραμμική απεικόνιση $1_V - f : V \longrightarrow V$ είναι ισομορφισμός.

6. Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Θεωρούμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $f : V \longrightarrow W$ και $g : W \longrightarrow V$ και υποθέτουμε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$1_V - g \circ f : V \longrightarrow V$$

είναι ισομορφισμός. Να δειχτεί ότι η γραμμική απεικόνιση

$$1_W - f \circ g : W \longrightarrow W$$

είναι επίσης ισομορφισμός και μάλιστα ισχύει $(1_W - f \circ g)^{-1} = 1_W + f \circ (1_V - g \circ f)^{-1} \circ g$.

Κεφάλαιο 6

Γραμμικές Απεικονίσεις και Πίνακες

6.1 Πίνακας Γραμμικής Απεικόνισης

Θα δούμε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο πεπερασμένα παραγόμενων διανυσματικών χώρων μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα, αν σταθεροποιήσουμε δύο βάσεις των χώρων. Μέσω της περιγραφής αυτής, οι αλγεβρικές πράξεις στο σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων αντιστοιχούν σε πράξεις μεταξύ πινάκων.

Ας θεωρήσουμε δύο πεπερασμένα παραγόμενους διανυσματικούς χώρους V και W επί του $\mathbb{F}$ και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$. Θεωρούμε επίσης μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\mu)$ του V και μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_\nu)$ του W. Όπως κάθε στοιχείο του W, έτσι και οι εικόνες $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\mu)$ των $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ μπορούν να εκφραστούν με μοναδικό τρόπο ως γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων $w_1, w_2, \ldots, w_\nu \in W$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_{11}w_1 + \lambda_{21}w_2 + \cdots + \lambda_{\nu 1}w_\nu \\ f(v_2) &= \lambda_{12}w_1 + \lambda_{22}w_2 + \cdots + \lambda_{\nu 2}w_\nu \\ &\vdots \\ f(v_\mu) &= \lambda_{1\mu}w_1 + \lambda_{2\mu}w_2 + \cdots + \lambda_{\nu\mu}w_\nu \end{aligned}$$

για κατάλληλα $\lambda_{ij} \in \mathbb{F}$. Συνεπώς, τα λ_{ij} είναι τέτοια ώστε για τη στήλη των συντελεστών του $f(v_i) \in W$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{w}$, να ισχύει

$$[f(v_i)]_{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \lambda_{1i} \\ \lambda_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_{\nu i} \end{pmatrix}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \mu$. Θεωρούμε τώρα τον $\nu \times \mu$ πίνακα A, του οποίου η i-στήλη c_i είναι ακριβώς το παραπάνω διάνυσμα-στήλη $[f(v_i)]_{\mathbf{w}}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \mu$. Με άλλα λόγια, θέτουμε

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1\mu} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{\nu 1} & \lambda_{\nu 2} & \ldots & \lambda_{\nu\mu} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}.$$

Ορισμός 6.1.1 *Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\mu)$ του V και μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_\nu)$ του W. Τότε, ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ που ορίστηκε παραπάνω ονομάζεται* **πίνακας της γραμμικής απεικόνισης** *f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$, και συμβολίζεται με $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$.*

Παραδείγματα 6.1.2

(i) *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^4 \longrightarrow \mathbb{F}^3$, η οποία ορίζεται θέτοντας*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_3 - x_4, x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4, x_2 + x_3)$$

για κάθε $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4$. Θεωρούμε επίσης τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, όπου $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{F}^4$ (βλ. Παράδειγμα 4.4.14). Τότε, έχουμε

$$f(e_1) = f(1, 0, 0, 0) = (2, 1, 1, 0) = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

και άρα $[f(e_1)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Υπολογίζοντας με τον ίδιο τρόπο τους πίνακες $[f(e_2)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[f(e_3)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $[f(e_4)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, βρίσκουμε ότι

$$(f : \mathbf{e}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^2 \longrightarrow \mathbb{F}^4$, η οποία ορίζεται θέτοντας*

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 - 5x_2)$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2$. Θεωρούμε επίσης τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{e}' = ((1, -1), (2, 1))$ του $\mathbb{F}^2$ και τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ του $\mathbb{F}_4$ που ορίστηκε στο προηγούμενο παράδειγμα. Τότε, έχουμε

$$f(1, -1) = (4, 1, 0, 6) = 4 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 6 \cdot e_4$$

και άρα $[f(1, -1)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα

$[f(2,1)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. *Συνεπώς, έχουμε*

$$(f : \mathbf{e}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό* $J : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}$, *ο οποίος ορίζεται θέτοντας* $J(a+bi) = a - bi$ *για κάθε* $a + bi \in \mathbb{C}$ *(όπου* $a, b \in \mathbb{R}$*). Θεωρούμε επίσης τη διατεταγμένη βάση* $\mathbf{e} = (1, i)$ *του* $\mathbb{C}$. *Καθώς*

$$J(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i \quad \textit{και} \quad J(i) = -i = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$(J : \mathbf{e}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Έστω $z_1 = 2 + i$ *και* $z_2 = 1 + i$. *Είναι εύκολο να δειχτεί ότι το σύνολο* $\{z_1, z_2\}$ *είναι επίσης μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}$. *Καθώς*

$$J(1) = 1 = z_1 - z_2 \quad \textit{και} \quad J(i) = -i = z_1 - 2z_2,$$

συμπεραίνουμε ότι, θέτοντας $\mathbf{e}' = (z_1, z_2)$, *θα είναι*

$$(J : \mathbf{e}, \mathbf{e}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(iv) *Έστω* φ *μια γωνία με* $0 \leq \varphi < 2\pi$ *και* $R_\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *η γραμμική απεικόνιση με* $R_\varphi(x, y) = (x\sigma\upsilon\nu\varphi - y\eta\mu\varphi, x\eta\mu\varphi + y\sigma\upsilon\nu\varphi)$ *για κάθε* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Θεωρώντας τη διατεταγμένη βάση* $\mathbf{e} = ((1, 0), (0, 1))$, *έχουμε*

$$R_\varphi(1, 0) = (\sigma\upsilon\nu\varphi, \eta\mu\varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (1, 0) + \eta\mu\varphi \cdot (0, 1)$$

και

$$R_\varphi(0, 1) = (-\eta\mu\varphi, \sigma\upsilon\nu\varphi) = -\eta\mu\varphi \cdot (1, 0) + \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (0, 1).$$

Συνεπώς, έχουμε

$$(R_\varphi : \mathbf{e}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{pmatrix}.$$

(v) *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση* $d : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, *η οποία ορίζεται θέτοντας* $d(f(x)) = f'(x)$ *για κάθε* $f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. *Έστω* $\mathbf{e}_3$ *και* $\mathbf{e}_2$ *οι διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων* $\mathbb{R}_3[x]$ *και* $\mathbb{R}_2[x]$ *με* $\mathbf{e}_3 = (1, x, x^2, x^3)$ *και* $\mathbf{e}_2 = (1, x, x^2)$ *αντίστοιχα. Τότε, για τον πίνακα της* d *ως προς αυτές τις βάσεις έχουμε*

$$(d : \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Γενικότερα, έστω $\nu \geq 1$ ένας φυσικός αριθμός και $d : \mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\nu-1}[x]$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται θέτοντας $d(f(x)) = f'(x)$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}_\nu[x]$. Θεωρώντας τις διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{e}_\nu = (1, x, x^2, \ldots, x^\nu)$ και $\mathbf{e}_{\nu-1} = (1, x, x^2, \ldots, x^{\nu-1})$ των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}_\nu[x]$ και $\mathbb{R}_{\nu-1}[x]$ αντίστοιχα, έχουμε

$$(d : \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_{\nu-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu \times (\nu+1)}.$$

(vi) *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $I : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ με $I(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. Έστω $\mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$ οι διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}_2[x]$ και $\mathbb{R}_3[x]$, οι οποίες ορίστηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα. Τότε, για τον πίνακα της I ως προς αυτές τις βάσεις, έχουμε*

$$(I : \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Γενικότερα, έστω $\nu \geq 1$ ένας φυσικός αριθμός και $I : \mathbb{R}_{\nu-1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_\nu[x]$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται θέτοντας $I(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}_{\nu-1}[x]$. Θεωρώντας τις διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{e}_{\nu-1} = (1, x, x^2, \ldots, x^{\nu-1})$ και $\mathbf{e}_\nu = (1, x, x^2, \ldots, x^\nu)$ των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}_{\nu-1}[x]$ και $\mathbb{R}_\nu[x]$ αντίστοιχα, έχουμε

$$(d : \mathbf{e}_{\nu-1}, \mathbf{e}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\nu+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\nu+1) \times \nu}.$$

Παρατήρηση 6.1.3 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί και A ένας $\nu \times \mu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, του οποίου τις στήλες συμβολίζουμε με $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^{\mu \times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu \times 1}$, με $L_A(B) = AB$ για κάθε πίνακα-στήλη $B \in \mathbb{F}^{\mu \times 1}$, και τις κανονικές βάσεις*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\mu \times 1}$$

και

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E'_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$$

των διανυσματικών χώρων $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ και $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι $L_A(E_j) = AE_j = c_j$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \mu$ και άρα για τον πίνακα της L_A ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_\mu)$ και $\mathbf{E}' = (E_1', E_2', \ldots, E_\nu')$, θα είναι $(L_A : \mathbf{E}, \mathbf{E}') = A$.

Παρατήρηση 6.1.4 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $V_0 \leq V$ ένας υπόχωρός του. Γνωρίζουμε ότι ο διανυσματικός χώρος V_0 είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενος και μάλιστα $dim_{\mathbb{F}} V_0 \leq dim_{\mathbb{F}} V$ (Πρόταση 4.6.3(i)). Επιπλέον, αν $\{v_1, \ldots, v_\kappa\}$ είναι μια βάση του V_0, τότε μπορούμε να βρούμε μια βάση του V της μορφής $\{v_1, \ldots, v_\kappa, v_{\kappa+1}, \ldots, v_\nu\}$ (Πόρισμα 4.5.4). Θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}' = (v_1, \ldots, v_\kappa)$ και $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_\kappa, v_{\kappa+1}, \ldots, v_\nu)$ των διανυσματικών χώρων V_0 και V αντίστοιχα. Αν $\iota : V_0 \longrightarrow V$ είναι η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται θέτοντας $\iota(v) = v$ για κάθε $v \in V_0$, τότε*

$$(\iota : \mathbf{v}', \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\kappa}.$$

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι το σύνολο των συμπλόκων $\{v_{\kappa+1} + V_0, \ldots, v_\nu + V_0\}$ παράγει το διανυσματικό χώρο πηλίκο V/V_0. Καθώς $dim_{\mathbb{F}}(V/V_0) = \nu - \kappa$ (Πρόταση 4.6.11), το σύνολο αυτό αποτελεί μια βάση του V/V_0. Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\overline{\mathbf{v}} = (v_{\kappa+1} + V_0, \ldots, v_\nu + V_0)$ του V/V_0 και τη γραμμική απεικόνιση $p : V \longrightarrow V/V_0$ που ορίζεται θέτοντας $p(v) = v + V_0$ για κάθε $v \in V$. Τότε, είναι

$$(p : \mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(\nu-\kappa)\times\nu}.$$

Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Γνωρίζουμε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε μια βάση του V (Πρόταση 5.2.11). Κατά συνέπεια, θα δούμε ότι η f καθορίζεται πλήρως από τον πίνακά που της αντιστοιχεί για κάθε επιλογή διατεταγμένων βάσεων των V και W. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το εξής:

Πρόταση 6.1.5 *Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\mu)$ του V, μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_\nu)$ του W και τον πίνακα $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$. Τότε, για κάθε στοιχείο $v \in V$ οι στήλες των συντελεστών $[v]_{\mathbf{v}} \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ και $[f(v)]_{\mathbf{w}} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ είναι τέτοιες ώστε $[f(v)]_{\mathbf{w}} = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot [v]_{\mathbf{v}}$.*

Απόδειξη. Έστω $c_1, c_2, \ldots, c_\mu \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ οι στήλες του πίνακα $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Από τον ορισμό του A, θα είναι $c_j = [f(v_j)]_{\mathbf{w}}$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \mu$. Θεωρούμε τη σύνθεση

$$[\ ]_{\mathbf{w}} \circ f : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$$

των γραμμικών απεικονίσεων $f : V \longrightarrow W$ και $[\ ]_{\mathbf{w}} : W \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ (βλ. Πρόταση 5.2.3) και τη σύνθεση

$$L_A \circ [\ ]_{\mathbf{v}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$$

των γραμμικών απεικονίσεων $[\ ]_{\mathbf{v}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ και $L_A : \mathbb{F}^{\mu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ (βλ. Παράδειγμα 5.1.2(iv)). Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει $[f(v)]_{\mathbf{w}} = A\cdot[v]_{\mathbf{v}} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$, δηλαδή ότι $([\ ]_{\mathbf{w}}\circ f)(v) = (L_A \circ [\ ]_{\mathbf{v}})(v)$ για κάθε $v \in V$. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$[\ ]_{\mathbf{w}} \circ f = L_A \circ [\ ]_{\mathbf{v}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}.$$

Με βάση την Πρόταση 5.2.11, αρκεί να δείξουμε ότι οι δύο αυτές γραμμικές απεικονίσεις παίρνουν την ίδια τιμή στα στοιχεία της βάσης $\{v_1, v_2, \ldots, v_\mu\}$ του V, δηλαδή ότι $[f(v_j)]_{\mathbf{w}} = A \cdot [v_j]_{\mathbf{v}}$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \mu$. Καθώς

$$v_j = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \cdots + 0 \cdot v_\mu,$$

η στήλη $[v_j]_{\mathbf{v}}$ των συντελεστών του v_j ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}$ του V είναι ο $\mu \times 1$ πίνακας-στήλη με 1 στην j-θέση και 0 παντού αλλού. Έτσι, το γινόμενο $A\cdot[v_j]_{\mathbf{v}}$ είναι ακριβώς η j-στήλη c_j του A. Συνεπώς, η ισότητα $[f(v_j)]_{\mathbf{w}} = A \cdot [v_j]_{\mathbf{v}}$ είναι άμεση, αφού $[f(v_j)]_{\mathbf{w}} = c_j$.

Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Έχουμε δει ότι μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$, έτσι ώστε οι τιμές της στα στοιχεία μιας βάσης του V να είναι οποιαδήποτε στοιχεία του W (Πρόταση 5.2.12). Κατά συνέπεια, θα δούμε ότι για κάθε πίνακα (κατάλληλων διαστάσεων) υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση f όπως παραπάνω που αντιστοιχεί στο δεδομένο πίνακα, για κάθε επιλογή διατεταγμένων βάσεων των V και W. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το εξής:

Πρόταση 6.1.6 *Έστω V, W δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Θεωρούμε μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\mu)$ του V, μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_\nu)$ του W και ένα πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$. Τότε, υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$, τέτοια ώστε $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = A$.*

Απόδειξη. Έστω $c_1, c_2, \ldots, c_\mu \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ οι στήλες του πίνακα A. Καθώς η απεικόνιση

$$[\ ]_{\mathbf{w}} : W \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$$

είναι ένας επιμορφισμός (Πρόταση 5.2.3), υπάρχουν στοιχεία $z_1, z_2, \ldots, z_\mu \in W$, τέτοια ώστε $[z_j]_{\mathbf{w}} = c_j$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \mu$. Με βάση την Πρόταση 5.2.12, γνωρίζουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση

$$f : V \longrightarrow W,$$

με $f(v_j) = z_j$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \mu$. Συνεπώς, η j-στήλη του πίνακα $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι ίση με τον πίνακα-στήλη $[f(v_j)]_{\mathbf{w}} = [z_j]_{\mathbf{w}} = c_j$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \mu$. Έτσι, οι πίνακες $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ και A έχουν τις ίδιες στήλες και άρα $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = A$. Τέλος, η μοναδικότητα της γραμμικής απεικόνισης f έπεται από την Πρόταση 6.1.5.

Παραδείγματα 6.1.7

(i) *Θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *και* $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ *των διανυσματικών χώρων* $\mathbb{F}^3$ *και* $\mathbb{F}^2$ *αντίστοιχα, όπου* $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$, $w_1 = (1, 1)$ *και* $w_2 = (1, 0)$. *Έστω* $f : \mathbb{F}^3 \longrightarrow \mathbb{F}^2$ *η γραμμική απεικόνιση που είναι τέτοια ώστε*

$$(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Καθώς $(2, 2, 2) = (0, 1, 1) + (1, 0, 1) + (1, 1, 0) = v_1 + v_2 + v_3$, *έχουμε* $[(2, 2, 2)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *και άρα*

$$[f(2, 2, 2)]_{\mathbf{w}} = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot [(2, 2, 2)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, θα είναι $f(2, 2, 2) = 2w_1 - 5w_2 = (2, 2) - (5, 0) = (-3, 2)$.

(ii) *Θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *και* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *των διανυσματικών χώρων* $\mathbb{F}^2$ *και* $\mathbb{F}^3$ *αντίστοιχα, όπου* $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (5, 3)$, $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (0, 1, -1)$ *και* $w_3 = (1, 0, 1)$. *Έστω* $f : \mathbb{F}^2 \longrightarrow \mathbb{F}^3$ *η γραμμική απεικόνιση με*

$$(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Κάθε στοιχείο $(x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2$ *μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός* $(x_1, x_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, *όπου* $\lambda_1 = 3x_1 - 5x_2$ *και* $\lambda_2 = -x_1 + 2x_2$. *Συνεπώς, έχουμε* $[(x_1, x_2)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ *και άρα*

$$[f(x_1, x_2)]_{\mathbf{w}} = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot [(x_1, x_2)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -9x_1 + 16x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, θα είναι

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1 - 2x_2)w_1 + (-9x_1 + 16x_2)w_2 + (-2x_1 + 5x_2)w_3 \\ &= (-x_1 + 3x_2, -8x_1 + 14x_2, 8x_1 - 13x_2). \end{aligned}$$

Πρόταση 6.1.8 *Έστω* V, W *δύο διανυσματικοί χώροι επί του* $\mathbb{F}$ *και* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_\mu)$ *δύο διατεταγμένες βάσεις των* V *και* W *αντίστοιχα. Αν* $f, g : V \longrightarrow W$ *είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις και* $\lambda \in \mathbb{F}$, *τότε*

(i) $(f + g : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) + (g : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ *και*

(ii) $(\lambda f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$.

Απόδειξη. Έστω $A = (a_{ij}) = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ και $B = (b_{ij}) = (g : \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Αυτό σημαίνει οτι οι στήλες των συντελεστών $[f(v_j)]_\mathbf{w}$ και $[g(v_j)]_\mathbf{w}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$[f(v_j)]_\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{\mu j} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad [g(v_j)]_\mathbf{w} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{\mu j} \end{pmatrix},$$

δηλαδή ότι

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{\mu j}w_\mu \quad \text{και} \quad g(v_j) = b_{1j}w_1 + b_{2j}w_2 + \cdots + b_{\mu j}w_\mu$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \nu$. Από τον ορισμό της γραμμικής απεικόνισης $f + g : V \longrightarrow W$, έπεται ότι

$$(f+g)(v_j) = f(v_j) + g(v_j) = (a_{1j} + b_{1j})w_1 + (a_{2j} + b_{2j})w_2 + \cdots + (a_{\mu j} + b_{\mu j})w_\mu$$

και άρα έχουμε

$$[(f+g)(v_j)]_\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_{1j} + b_{1j} \\ a_{2j} + b_{2j} \\ \vdots \\ a_{\mu j} + b_{\mu j} \end{pmatrix}$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \nu$. Έτσι, κάθε στήλη του πίνακα $(f + g : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι το άθροισμα των αντιστοίχων στηλών των πινάκων A και B, δηλαδή

$$(f + g : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = A + B = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) + (g : \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Ανάλογα, από τον ορισμό της γραμμικής απεικόνισης $\lambda f : V \longrightarrow W$, έπεται ότι

$$(\lambda f)(v_j) = \lambda f(v_j) = \lambda a_{1j}w_1 + \lambda a_{2j}w_2 + \cdots + \lambda a_{\mu j}w_\mu$$

και άρα έχουμε

$$[(\lambda f)(v_j)]_\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1j} \\ \lambda a_{2j} \\ \vdots \\ \lambda a_{\mu j} \end{pmatrix}$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \nu$. Έτσι, βλέπουμε ότι για τον πίνακα $(\lambda f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ισχύει

$$(\lambda f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda A = \lambda(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Πόρισμα 6.1.9 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με διαστάσεις ν και μ αντίστοιχα. Τότε, οι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{L}(V, W)$ και $\mathbb{F}^{\mu \times \nu}$ είναι ισόμορφοι.*

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ και $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_\mu)$ των V και W αντίστοιχα. Τότε, η απεικόνιση

$$s : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu \times \nu},$$

η οποία ορίζεται θέτοντας $s(f) = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ για κάθε $f \in \mathcal{L}(V, W)$ είναι γραμμική (Πρόταση 6.1.8), 1-1 και επί (Πρόταση 6.1.6). Έτσι, η s είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Πόρισμα 6.1.10 *Αν V, W είναι δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με διαστάσεις ν και μ αντίστοιχα, τότε $dim_{\mathbb{F}}\mathcal{L}(V, W) = \nu\mu$.*

Απόδειξη. Καθώς δύο ισόμορφοι διανυσματικοί χώροι έχουν την ίδια διάσταση (Θεώρημα 5.2.10), το ζητούμενο έπεται από τη σχέση $dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{\mu\times\nu} = \nu\mu$ (πρβλ. Παράδειγμα 4.4.16).

Θα εξετάσουμε τώρα τη σχέση που υπάρχει μεταξύ του πίνακα της σύνθεσης δύο γραμμικών απεικονίσεων και των πινάκων των δύο αυτών γραμμικών απεικονίσεων.

Πρόταση 6.1.11 *Έστω U, V, W τρεις διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_\kappa)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_\mu)$ τρεις διατεταγμένες βάσεις των U, V και W αντίστοιχα. Αν $f : U \longrightarrow V$ και $g : V \longrightarrow W$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε $(g \circ f : \mathbf{u}, \mathbf{w}) = (g : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot (f : \mathbf{u}, \mathbf{v})$.*

Απόδειξη. Έστω $A = (a_{ij}) = (f : \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\kappa}$ και $B = (b_{ij}) = (g : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$. Τότε, για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \kappa$ η στήλη των συντελεστών $[f(u_j)]_{\mathbf{v}}$ δίνεται από τη σχέση

$$[f(u_j)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{\nu j} \end{pmatrix}$$

και άρα

$$f(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{\nu j}v_\nu = \sum_{l=1}^{\nu} a_{lj}v_l.$$

Επίσης, για κάθε $l = 1, 2, \ldots, \nu$ η στήλη των συντελεστών $[g(v_l)]_{\mathbf{w}}$ δίνεται από τη σχέση

$$[g(v_l)]_{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{\mu l} \end{pmatrix}$$

και άρα

$$g(v_l) = b_{1l}w_1 + b_{2l}w_2 + \cdots + b_{\mu l}w_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} b_{il}w_i.$$

Καθώς

$$g(f(u_j)) = g\left(\sum_{l=1}^{\nu} a_{lj}v_l\right) = \sum_{l=1}^{\nu} a_{lj}g(v_l) = \sum_{l=1}^{\nu} a_{lj}\sum_{i=1}^{\mu} b_{il}w_i = \sum_{l=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\mu} a_{lj}b_{il}w_i,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$(g \circ f)(u_j) = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{\nu} b_{il}a_{lj}w_i = \sum_{i=1}^{\mu}\left(\sum_{l=1}^{\nu} b_{il}a_{lj}\right)w_i.$$

Άρα για τη j-στήλη $[(g \circ f)(u_j)]_{\mathbf{w}}$ του πίνακα $(g \circ f : \mathbf{u}, \mathbf{w})$ θα είναι

$$[(g \circ f)(u_j)]_{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{\nu} b_{1l}a_{lj} \\ \sum_{l=1}^{\nu} b_{2l}a_{lj} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{\nu} b_{\mu l}a_{lj} \end{pmatrix}$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \kappa$. Έτσι, το στοιχειο στην (i, j)-θέση του πίνακα $(g \circ f : \mathbf{u}, \mathbf{w})$ είναι ίσο με $\sum_{l=1}^{\nu} b_{il}a_{lj}$, συμπίπτει δηλαδή με το στοιχείο στην (i, j)-θέση του πίνακα BA για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \mu$ και $j = 1, 2, \ldots, \kappa$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι $(g \circ f : \mathbf{u}, \mathbf{w}) = BA$, δηλαδή ότι $(g \circ f : \mathbf{u}, \mathbf{w}) = (g : \mathbf{v}, \mathbf{w})(f : \mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Παράδειγμα 6.1.12 *Έστω $f, g : \mathbb{F}^3 \longrightarrow \mathbb{F}^3$ οι γραμμικές απεικονίσεις με $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 + x_3)$ και $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, 2x_1 + x_3)$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3$. Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ του $\mathbb{F}^3$, όπου $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{F}^3$, και υπολογίζουμε τους αντίστοιχους πίνακες*

$$A = (f : \mathbf{e}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = (g : \mathbf{e}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε επίσης τή γραμμική απεικόνιση $h = g \circ f + f - 2g : \mathbb{F}^3 \longrightarrow \mathbb{F}^3$ και χρησιμοποιούμε τις Προτάσεις 6.1.8 και 6.1.11 για να συμπεράνουμε ότι

$$(h : \mathbf{e}, \mathbf{e}) = (g : \mathbf{e}, \mathbf{e}) \cdot (f : \mathbf{e}, \mathbf{e}) + (f : \mathbf{e}, \mathbf{e}) - 2(g : \mathbf{e}, \mathbf{e}) = BA + A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 3 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, αν $v = (1, -2, 1) \in \mathbb{F}^3$ τότε για την εικόνα $h(v) \in \mathbb{F}^3$ έχουμε

$$[h(v)]_{\mathbf{e}} = (h : \mathbf{e}, \mathbf{e}) \cdot [v]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 3 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, θα είναι $h(v) = -13e_1 + 18e_2 - 4e_3 = (-13, 18, -4)$.

Θεώρημα 6.1.13 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η f είναι ισομορφισμός.*

(ii) *Για κάθε δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα, ο $\nu \times \nu$ πίνακας $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι αντιστρέψιμος.*

(iii) *Υπάρχουν δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα, τέτοιες ώστε ο $\nu \times \nu$ πίνακας $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι $(i) \to (ii)$, υποθέτουμε ότι η f είναι ισομορφισμός και θεωρούμε δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα. Η γραμμική απεικόνιση $f^{-1} : W \longrightarrow V$ είναι τέτοια ώστε $f \circ f^{-1} = 1_W$ και $f^{-1} \circ f = 1_V$ και άρα, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.1.11, έχουμε

$$(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})(f^{-1} : \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (f \circ f^{-1} : \mathbf{w}, \mathbf{w}) = (1_W : \mathbf{w}, \mathbf{w})$$

και

$$(f^{-1} : \mathbf{w}, \mathbf{v})(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (f^{-1} \circ f : \mathbf{v}, \mathbf{v}) = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Είναι φανερό από τους ορισμούς ότι $(1_W : \mathbf{w}, \mathbf{w}) = I_\nu = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v})$ και άρα ο πίνακας $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι πράγματι αντιστρέψιμος (με αντίστροφο τον πίνακα $(f^{-1} : \mathbf{w}, \mathbf{v})$).

Η συνεπαγωγή $(ii) \to (iii)$ είναι άμεση. Για να δείξουμε ότι $(iii) \to (i)$, θεωρούμε δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα, που είναι τέτοιες ώστε ο πίνακας $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι αντιστρέψιμος, καθώς επίσης και τον αντίστροφό του πίνακα A^{-1}. Από την Πρόταση 6.1.6, γνωρίζουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : W \longrightarrow V$ με $A^{-1} = (g : \mathbf{w}, \mathbf{v})$. Οι σύνθετες απεικονίσεις $g \circ f : V \longrightarrow V$ και $f \circ g : W \longrightarrow W$ είναι τέτοιες ώστε

$$(g \circ f : \mathbf{v}, \mathbf{v}) = (g : \mathbf{w}, \mathbf{v})(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = A^{-1}A = I_\nu = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v})$$

και

$$(f \circ g : \mathbf{w}, \mathbf{w}) = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w})(g : \mathbf{w}, \mathbf{v}) = AA^{-1} = I_\nu = (1_W : \mathbf{w}, \mathbf{w}).$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την Πρόταση 6.1.6, συμπεραίνουμε ότι $g \circ f = 1_V$ και $f \circ g = 1_W$. Άρα η f είναι πράγματι ισομορφισμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f : \mathbb{F}^3 \longrightarrow \mathbb{F}^4$ η γραμμική απεικόνιση με $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - 5x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 - 3x_3, x_1 + x_3)$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3$. Θεωρούμε επίσης τα στοιχεία $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{F}^3$, όπου $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ και $v_3 = (1, 0, 1)$, καθώς επίσης και τα στοιχεία $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{F}^4$ με $w_1 = (1, 2, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 3, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 4)$ και $w_4 = (5, 0, 0, 1)$.

   (i) Να δειχτεί ότι η $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ είναι μια διετατεγμένη βάση του $\mathbb{F}^3$.

   (ii) Να δειχτεί ότι η $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ είναι μια διετατεγμένη βάση του $\mathbb{F}^4$.

   (iii) Να βρεθεί ο πίνακας $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

2. Θεωρούμε τα στοιχεία $v_1, v_2 \in \mathbb{F}^2$ με $v_1 = (5, 3)$ και $v_2 = (3, 2)$, καθώς επίσης και τα στοιχεία $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{F}^3$ με $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$ και $v_3 = (1, 1, -1)$.

   (i) Να δειχτεί ότι η $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ είναι μια διετατεγμένη βάση του $\mathbb{F}^2$.

   (ii) Να δειχτεί ότι η $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ είναι μια διετατεγμένη βάση του $\mathbb{F}^3$.

   (iii) Έστω $f : \mathbb{F}^2 \longrightarrow \mathbb{F}^3$ η γραμμική απεικόνιση με $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν οι τιμές $f(1, 1)$ και $f(2, -3)$.

3. Έστω $f : \mathbb{F}^3 \longrightarrow \mathbb{F}^3$ η γραμμική απεικόνιση με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3$. Θεωρούμε επίσης την κανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ του $\mathbb{F}^3$ και την αντίστοιχη διατεταγμένη του βάση $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$.

   (i) Να βρεθεί ο πίνακας $(f : \mathbf{e}, \mathbf{e})$.

   (ii) Να βρεθεί ο πίνακας $(g : \mathbf{e}, \mathbf{e})$, όπου $g = f^2 - 3f + 1_V \in \mathcal{L}(V, V)$.

   (iii) Να βρεθεί η τιμή $h(2, 1, -3) \in \mathbb{F}^3$, όπου $h = f^3 + f^2 - 5f \in \mathcal{L}(V, V)$.

4. Έστω A ένας $\nu \times \nu$ πίνακας επί του $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

   (i) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

   (ii) Η γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^{\nu\times\mu} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι ισομορφισμός για κάθε $\mu \geq 1$.

   (iii) Η γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ είναι ισομορφισμός.

5. Έστω $f : V \longrightarrow W$ ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων επί του $\mathbb{F}$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του V. Να δειχτεί ότι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{w}$ του W, τέτοια ώστε να ισχύει $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = I_\nu$.

6. Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F διάστασης ν και μ αντίστοιχα και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Να δειχτεί ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

   (i) Η f είναι μονομορφισμός.

   (ii) Για κάθε δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα, ο πίνακας $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ είναι τέτοιος ώστε $BA = I_\nu$ για κάποιο $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$.

   (iii) Υπάρχουν δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα, για τις οποίες ο πίνακας $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ είναι τέτοιος ώστε $BA = I_\nu$ για κάποιο $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$.

7. Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F διάστασης ν και μ αντίστοιχα και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Να δειχτεί ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

   (i) Η f είναι επιμορφισμός.

   (ii) Για κάθε δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα, ο $\mu \times \nu$ πίνακας $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ είναι τέτοιος ώστε $AB = I_\mu$ για κάποιο $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$.

   (iii) Υπάρχουν δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα, για τις οποίες ο πίνακας $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ είναι τέτοιος ώστε $AB = I_\mu$ για κάποιο $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$.

8. Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι, $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και $R_A : \mathbb{F}^{1\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}^{1\times\mu}$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται θέτοντας $R_A(B) = BA$ για κάθε πίνακα-γραμμή $B \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$. Θεωρούμε τις κανονικές βάσεις $\{E_1, E_2, \ldots, E_\nu\}$ και $\{E'_1, E'_2, \ldots, E'_\mu\}$ των $\mathbb{F}^{1\times\nu}$ και $\mathbb{F}^{1\times\mu}$ αντίστοιχα και τις αντίστοιχες διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_\nu)$ και $\mathbf{E}' = (E'_1, E'_2, \ldots, E'_\mu)$. Να δειχτεί ότι ο πίνακας $(R_A : \mathbf{E}, \mathbf{E}') \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ είναι ο ανάστροφος πίνακας A^t του A.

6.2 Ισοδυναμία και Ομοιότητα Πινάκων

Όπως είδαμε, κάθε γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο πεπερασμένα παραγόμενων διανυσματικών χώρων αντιστοιχεί σε έναν πίνακα, ο οποίος ορίζεται αφού πρώτα επιλέξουμε δύο διατεταγμένες βάσεις των χώρων. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ δύο πινάκων που αντιστοιχούν στην ίδια απεικόνιση, ως προς δύο διαφορετικές επιλογές βάσεων.

Πρόταση 6.2.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν και $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ δύο διατεταγμένες βάσεις του. Θεωρούμε τον $\nu \times \nu$ πίνακα $P = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}')$. Τότε:*

(i) *Ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος.*

(ii) *Για κάθε $v \in V$ οι στήλες των συντελεστών $[v]_{\mathbf{v}}$ και $[v]_{\mathbf{v}'}$ είναι τέτοιες ώστε $[v]_{\mathbf{v}'} = P \cdot [v]_{\mathbf{v}}$.*

Ο πίνακας P λέγεται ο **πίνακας αλλαγής βάσης** *από τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}$ στη $\mathbf{v}'$.*

Απόδειξη. Ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, ως πίνακας του ισομορφισμού 1_V ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}$ και $\mathbf{v}'$ (Θεώρημα 6.1.13). Για να δείξουμε το (ii), θεωρούμε ένα στοιχείο $v \in V$ και τη γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{F} \longrightarrow V$ με $g(\lambda) = \lambda v$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$. Θεωρούμε επίσης τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{1} = (1)$ του $\mathbb{F}$ και παρατηρούμε ότι $(g : \mathbf{1}, \mathbf{v}) = [v]_{\mathbf{v}}$ και $(g : \mathbf{1}, \mathbf{v}') = [v]_{\mathbf{v}'}$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.1.11, συμπεραίνουμε ότι

$$P \cdot [v]_{\mathbf{v}} = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}') \cdot (g : \mathbf{1}, \mathbf{v}) = (1_V \circ g : \mathbf{1}, \mathbf{v}') = (g : \mathbf{1}, \mathbf{v}') = [v]_{\mathbf{v}'},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Παρατήρηση 6.2.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν και $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ δύο διατεταγμένες βάσεις του. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.13, βλέπουμε ότι ο αντίστροφος του πίνακα αλλαγής βάσης $P = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}')$ είναι ο πίνακας $P^{-1} = (1_V^{-1} : \mathbf{v}', \mathbf{v})$, δηλαδή ο πίνακας αλλαγής βάσης $(1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v})$ από τη $\mathbf{v}'$ στη $\mathbf{v}$.*

Παράδειγμα 6.2.3 *Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^3$ και τις διατεταγμένες βάσεις του $\mathbf{e} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ και $\mathbf{v} = ((0,-1,2),(1,1,-2),(2,0,1))$. Για να βρούμε τον πίνακα αλλαγής βάσης $P = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{e})$ από τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}$ στην $\mathbf{e}$, θα πρέπει να εκφράσουμε τα στοιχεία της $\mathbf{v}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της $\mathbf{e}$. Έτσι, είναι φάνερό ότι*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο αντίστροφος πίνακας $P^{-1} = (1_V : \mathbf{e}, \mathbf{v})$ είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{e}$ στη $\mathbf{v}$. Έτσι, οι στήλες του P^{-1} προκύπτουν εκφράζοντας τα στοιχεία της $\mathbf{e}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της $\mathbf{v}$. Μπορούμε να δούμε ότι $(1,0,0) = (0,-1,2) + (1,1,-2)$, $(0,1,0) = -5(0,-1,2) - 4(1,1,-2) + 2(2,0,1)$ και $(0,0,1) = -2(0,-1,2) - 2(1,1,-2) + (2,0,1)$. Συνεπώς, θα είναι

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για να εκφράσουμε το στοιχείο $(1,2,3) \in \mathbb{F}^3$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της $\mathbf{v}$, θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών $[(1,2,3)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και υπολογίζουμε

$$[(1,2,3)]_{\mathbf{v}} = (1_V : \mathbf{e}, \mathbf{v}) \cdot [(1,2,3)]_{\mathbf{e}} = P^{-1} \cdot [(1,2,3)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, θα είναι $(1,2,3) = -15(0,-1,2) - 13(1,1,-2) + 7(2,0,1)$ (όπως μπορούμε άμεσα να επαληθεύσουμε).

Στη συνέχεια, θα δούμε ότι κάθε αντιστρέψιμος πίνακας είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης για κατάλληλες επιλογές των διατεταγμένων βάσεων.

Πρόταση 6.2.4 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}} V = \nu$ και $\mathbf{v}$ μία διατεταγμένη βάση του. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν πίνακα $P \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$:*

(i) *Ο P είναι αντιστρέψιμος.*

(ii) *Υπάρχει μία διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}'$ του V, έτσι ώστε $P = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}')$.*

Απόδειξη. Καθώς η συνεπαγωγή $(ii) \to (i)$ είναι ακριβώς η Πρόταση 6.2.1(i), αρκεί να δείξουμε ότι $(i) \to (ii)$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.1.6, μπορούμε να βρούμε μια (μοναδική) γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ με $(f : \mathbf{v}, \mathbf{v}) = P$. Από την υπόθεσή μας, ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος και άρα η γραμμική απεικόνιση f είναι ένας ισομορφισμός του V στον εαυτό του (Θεώρημα 6.1.13). Αν $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$, τότε το σύνολο $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_\nu)\}$ είναι επίσης μια βάση του V (Πόρισμα 5.2.9). Ας θεωρήσουμε τώρα τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}' = (v_1', v_2', \ldots, v_\nu')$ του V, όπου $v_i' = f(v_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Από τους σχετικούς ορισμούς, συμπεραίνουμε ότι η j-στήλη του πίνακα αλλαγής βάσης $(1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}')$ είναι η στήλη των συντελεστών $[v_j']_{\mathbf{v}}$ του v_j' ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}$ του V, δηλαδή η στήλη των συντελεστών $[f(v_j)]_{\mathbf{v}}$ του $f(v_j)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}$ του V, δηλαδή η j-στήλη του πίνακα $(f : \mathbf{v}, \mathbf{v}) = P$. Αυτό ισχύει για κάθε $j = 1, 2, \ldots, \nu$ και άρα θα είναι $(1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}') = P$.

Είμαστε τώρα σε θέση να περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται οι πίνακες που αναπαριστούν μια γραμμική απεικόνιση ως προς διαφορετικές επιλογές βάσεων.

Πρόταση 6.2.5 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με διαστάσεις ν και μ αντίστοιχα και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ του V και δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ του W. Αν $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ και $B = (f : \mathbf{v}', \mathbf{w}')$, τότε*

$$B = PAQ \in \mathbb{F}^{\mu \times \nu},$$

όπου $P = (1_W : \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ και $Q = (1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v})$ είναι οι πίνακες αλλαγής βάσης.

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται άμεσα από την Πρόταση 6.1.11, καθώς

$$PAQ = (1_W : \mathbf{w}, \mathbf{w}') \cdot (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot (1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v}) = (1_W \circ f \circ 1_V : \mathbf{v}', \mathbf{w}') = (f : \mathbf{v}', \mathbf{w}') = B.$$

Ορισμός 6.2.6 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί και A, B δύο $\mu \times \nu$ πίνακες επί του $\mathbb{F}$. Ο πίνακας A λέγεται* **ισοδύναμος** *προς τον B αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\mu\times\mu}$ και $Q \in F^{\nu\times\nu}$ με $B = PAQ$.*

Πρόταση 6.2.7 *Έστω ν, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Η σχέση της ισοδυναμίας των πινάκων που ορίστηκε παραπάνω είναι μια σχέση ισοδύναμίας στο σύνολο $\mathbb{F}^{\mu\times\nu}$.*

Απόδειξη. Για την ανακλαστικότητα της σχέσης, θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε πίνακας $A \in F^{\mu\times\nu}$ είναι ισοδύναμος προς τον εαυτό του. Αυτό όμως είναι φανερό, καθώς $A = I_\mu A I_\nu$.

Για να δείξουμε ότι η σχέση είναι συμμετρική, θεωρούμε δύο πίνακες $A, B \in F^{\mu\times\nu}$ και υποθέτουμε ότι ο A είναι ισοδύναμος προς τον B. Τότε, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\mu\times\mu}$ και $Q \in F^{\nu\times\nu}$, τέτοιοι ώστε $B = PAQ$. Καθώς οι πίνακες P^{-1} και Q^{-1} είναι αντιστρέψιμοι (Πρόταση 2.4.8(i)) και $A = P^{-1}BQ^{-1}$, έπεται ότι ο B είναι ισοδύναμος προς τον A.

Τέλος, για να δείξουμε τη μεταβατική ιδιότητα της σχέσης, θεωρούμε τρεις πίνακες $A, B, C \in F^{\mu\times\nu}$, οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε ο A είναι ισοδύναμος προς τον B και ο B είναι ισοδύναμος προς τον C. Τότε, θα είναι $B = PAQ$ και $C = P'BQ'$, για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $P, P' \in F^{\mu\times\mu}$ και $Q, Q' \in F^{\nu\times\nu}$. Καθώς οι πίνακες $PP' \in F^{\mu\times\mu}$ και $QQ' \in F^{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμοι (Πρόταση 2.4.8(ii)) και $C = P'(PAQ)Q' = (P'P)A(QQ')$, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι ισοδύναμος προς τον C.

Αν ν, μ είναι δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί και $A, B \in F^{\mu\times\nu}$ δύο πίνακες με τον A ισοδύναμο προς τον B, τότε θα λέμε ότι οι A, B είναι ισοδύναμοι και θα γράφουμε $A \sim B$. Έτσι, με βάση την Πρόταση 6.2.1(i), μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την Πρόταση 6.2.5 ως εξής: *Οι πίνακες που αντιστοιχούν σε μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο πεπερασμένα παραγόμενων διανυσματικών χώρων ως προς δύο διαφορετικές επιλογές διατεταγμένων βάσεων είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι.* Θα δούμε τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 6.2.8 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με διαστάσεις ν και μ αντίστοιχα και $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε δύο διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα και τον πίνακα $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν πίνακα $B \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$:*

(i) *Οι πίνακες A, B είναι ισοδύναμοι.*

(ii) *Υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}', \mathbf{w}'$ των διανυσματικών χώρων V και W αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $B = (f : \mathbf{v}', \mathbf{w}')$.*

Απόδειξη. Με βάση τα σχόλια που προηγήθηκαν, αρκεί να δείξουμε ότι (i) $\rightarrow$ (ii). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι. Τότε, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\mu\times\mu}$ και $Q \in F^{\nu\times\nu}$, τέτοιοι ώστε $B = PAQ$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.2.4 για τους αντιστρέψιμους πίνακες $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $Q^{-1} \in \mathbb{F}^{\mu\times\mu}$, μπορούμε να βρούμε διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}', \mathbf{w}'$ των V και W αντίστοιχα, έτσι ώστε $P = (1_W : \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ και $Q^{-1} = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}')$. Καθώς $Q = (Q^{-1})^{-1} = (1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v})$ (Παρατήρηση 6.2.2), έχουμε

$$B = PAQ = (1_W : \mathbf{w}, \mathbf{w}') \cdot (f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot (1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v}) = (1_W \circ f \circ 1_V : \mathbf{v}', \mathbf{w}') = (1_W : \mathbf{v}', \mathbf{w}'),$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Όπως κάθε σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο, έτσι και η ισοδυναμία των πινάκων διαμερίζει το σύνολο $\mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Θα δούμε στη συνέχεια ότι υπάρχουν ακριβώς k το πλήθος κλάσεις ισοδυναμίας, όπου k είναι ο ελάχιστος των ν και μ. Επιπλέον, ας θεωρήσουμε για κάθε $r = 1, 2, \ldots, k$ τον πίνακα

$$A_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\mu\times\nu},$$

ο οποίος έχει r το πλήθος μονάδες στις θέσεις $(1,1), (2,2), \ldots, (r,r)$ και μηδέν παντού αλλού. Τότε, όπως θα δούμε στη συνέχεια, κάθε μια από τις k το πλήθος κλάσεις ισοδύναμίας περιέχει έναν και μόνο έναν από τους πίνακες A_r.

Πρόταση 6.2.9 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}}V = \nu$ και $dim_{\mathbb{F}}W = \mu$. Αν $f : V \longrightarrow W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ των V και W αντίστοιχα, έτσι ώστε*

$$(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = A_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\mu\times\nu},$$

όπου $r = dim_{\mathbb{F}} imf$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον υπόχωρο $kerf$ του V και παρατηρούμε ότι $dim_{\mathbb{F}}kerf = dim_{\mathbb{F}}V - dim_{\mathbb{F}}imf = \nu - r$ (βλ. Πόρισμα 5.3.13). Επιλέγουμε μια βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-r}\}$ του $kerf$ και την επεκτείνουμε σε μια βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-r}, v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ του V (Πόρισμα 4.5.4). Αναδιατάσσοντας τα στοιχεία της βάσης αυτής, θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-r})$ του V. Από το Πόρισμα 5.3.6, γνωρίζουμε ότι ο υπόχωρος imf του W παράγεται από τα στοιχεία $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r), f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_{\nu-r})$. Έτσι, καθώς $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-r} \in kerf$, θα είναι $imf = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r)\rangle$. Ο διανυσματικός χώρος imf έχει διάσταση r και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.6.1 για να συμπεράνουμε ότι τα στοιχεία $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r) \in W$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Χρησιμοποιώντας και πάλι το Πόρισμα 4.5.4, μπορούμε να βρούμε μια βάση του W της μορφής $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r), w_1, w_2, \ldots, w_{\mu-r}\}$. Ας θεωρήσουμε τώρα τη διατεταγμένη βάση $\mathbf{w} = (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r), w_1, w_2, \ldots, w_{\mu-r})$ του W. Από την κατασκευή των διατεταγμένων βάσεων $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι φανερό ότι $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\mu\times\nu}$.

Πόρισμα 6.2.10 *Κάθε $\mu \times \nu$ πίνακας A με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής*

$$A_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\mu\times\nu},$$

για κάποιο r με $r \leq \mu, \nu$.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{F}^\nu$ και $\mathbb{F}^\mu$ και τις διατεταγμένες τους βάσεις $\mathbf{e}$ και $\mathbf{e}'$, που ορίζουν οι κανονικές τους βάσεις $\{e_1, e_2, \ldots, e_\nu\}$ και $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_\mu\}$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει (ακριβώς μία) γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^\nu \longrightarrow \mathbb{F}^\mu$, έτσι ώστε $(f : \mathbf{e}, \mathbf{e}') = A$ (Πρόταση 6.1.6). Με βάση την Πρόταση 6.2.9, μπορούμε να επιλέξουμε διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{e_0}, \mathbf{e_0'}$ των διανυσματικών χώρων $\mathbb{F}^{\nu}$ και $\mathbb{F}^{\mu}$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $(f : \mathbf{e_0}, \mathbf{e_0'}) = A_r$, για κάποιο r με $r \leq \mu, \nu$. Το ζητούμενο δείχτηκε, καθώς οι πίνακες $(f : \mathbf{e}, \mathbf{e}')$ και $(f : \mathbf{e_0}, \mathbf{e_0'})$ είναι ισοδύναμοι (Πρόταση 6.2.5).

Παράδειγμα 6.2.11 *Θεωρούμε τον πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$*. Ακολουθώντας την απόδειξη του Πορίσματος 6.2.10, θα βρούμε αντιστρέψιμους πίνακες* $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *και* $Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$*, τέτοιους ώστε*

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

για κάποιο $r \leq 3$*.*

Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *με* $f(1,0,0,0) = (1,2,1)$*,* $f(0,1,0,0) = (1,1,2)$*,* $f(0,0,1,0) = (-1,2,-5)$ *και* $f(0,0,0,1) = (2,3,3)$*. Είναι εύκολο να δούμε ότι* $f(x,y,z,w) = (x+y-z+2w, 2x+y+2z+3w, x+2y-5z+3w)$ *για κάθε* $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$*. Ο πυρήνας* $kerf$ *της* f *αποτελείται από όλα τα στοιχεία* $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ *για τα οποία είναι*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z+2w & = & 0 \\ 2x+y+2z+3w & = & 0 \\ x+2y-5z+3w & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Λύνοντας το παραπάνω ομογενές σύστημα, βρίσκουμε ότι

$$kerf = \{(-3z-w, 4z-w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Έτσι, η διάσταση του πυρήνα $kerf$ *της* f *είναι ίση με* 2 *και μια βάση του αποτελεί το σύνολο* $\{(-3,4,1,0), (-1,-1,0,1)\}$*. Μπορούμε να επεκτείνουμε το σύνολο αυτό σε μια βάση του* $\mathbb{R}^4$*, προσαρτώντας, για παράδειγμα, τα στοιχεία* $(1,0,0,0)$ *και* $(0,1,0,0)$*. Έτσι, προκύπτει η διατεταγμένη βάση*

$$\mathbf{v} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (-3,4,1,0), (-1,-1,0,1))$$

του $\mathbb{R}^4$*. Με βάση τη γενική θεωρία, γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα* $f(1,0,0,0) = (1,2,1)$ *και* $f(0,1,0,0) = (1,1,2)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *προσαρτώντας σε αυτά, για παράδειγμα, το* $(0,0,1)$*. Έτσι, προκύπτει η διατεταγμένη βάση*

$$\mathbf{v}' = ((1,2,1), (1,1,2), (0,0,1))$$

του $\mathbb{R}^3$*. Τότε, για τον πίνακα της* f *ως προς τις διατεταγμένες βάσεις* $\mathbf{v}$ *και* $\mathbf{v}'$ *θα είναι*

$$(f : \mathbf{v}, \mathbf{v}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θεωρώντας τις διατεταγμένες βάσεις

$$\mathbf{e} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)) \quad \textit{και} \quad \mathbf{e}' = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$$

των $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα, έχουμε

$$(f : \mathbf{v}, \mathbf{v}') = (1_{\mathbb{R}^3} : \mathbf{e}', \mathbf{v}') \cdot (f : \mathbf{e}, \mathbf{e}') \cdot (1_{\mathbb{R}^4} : \mathbf{v}, \mathbf{e}).$$

Από την κατασκευή της, για τη γραμμική απεικόνιση f έχουμε $(f : \mathbf{e}, \mathbf{e}') = A$ και άρα οι πίνακες αλλαγής βάσης $P = (1_{\mathbb{R}^3} : \mathbf{e}', \mathbf{v}')$ και $Q = (1_{\mathbb{R}^4} : \mathbf{v}, \mathbf{e})$ είναι τέτοιοι ώστε

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εδώ, έχουμε

$$P^{-1} = (1_{\mathbb{R}^3} : \mathbf{v}', \mathbf{e}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$Q = (1_{\mathbb{R}^4} : \mathbf{v}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα P αντιστρέφοντας τον P^{-1} και να συμπεράνουμε ότι

$$P = (P^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ας θεωρήσουμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ με στήλες $c_1, c_2, \ldots, c_\mu \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Όπως έχουμε δει στο Παράδειγμα 5.3.9, η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης

$$L_A : \mathbb{F}^{\mu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1},$$

η οποία ορίζεται θέτοντας $L_A(B) = AB$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$, είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ που παράγεται από το σύνολο $\{c_1, c_2, \ldots, c_\mu\}$. Συνεπώς, η διάσταση $dim_{\mathbb{F}} im L_A$ της εικόνας $im L_A$ της L_A είναι ίση με το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A.

Ορισμός 6.2.12 *Έστω A ένας $\nu \times \mu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Η* **τάξη** *$r(A)$ του πίνακα A είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A. Ισοδύναμα, η τάξη $r(A)$ του A είναι η διάσταση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης*

$$L_A : \mathbb{F}^{\mu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1},$$

η οποία ορίζεται θέτοντας $L_A(B) = AB$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$.

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της ισοδυναμίας των πινάκων και της έννοιας της τάξης, που μόλις ορίσαμε. Αρχικά, θα δούμε μια βασική ιδιότητα της τάξης των πινάκων.

Πρόταση 6.2.13 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και $B \in \mathbb{F}^{\mu\times\rho}$ δύο πίνακες. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

(ii) *Αν υπάρχει πίνακας $B' \in \mathbb{F}^{\rho\times\mu}$, τέτοιος ώστε $BB' = I_\mu$, τότε $r(AB) = r(A)$.*

(iii) *Αν υπάρχει πίνακας $A' \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$, τέτοιος ώστε $A'A = I_\mu$, τότε $r(AB) = r(B)$.*

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$L_A : \mathbb{F}^{\mu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1} \quad \text{και} \quad L_B : \mathbb{F}^{\rho\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1},$$

καθώς επίσης και τη σύνθεσή τους

$$L_A \circ L_B : \mathbb{F}^{\rho\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1}.$$

Για κάθε $C \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ έχουμε

$$(L_A \circ L_B)(C) = L_A(L_B(C)) = L_A(BC) = A(BC) = (AB)C = L_{AB}(C)$$

και άρα $L_A \circ L_B = L_{AB}$. Μια άμεση συνέπεια της τελευταίας σχέσης είναι ότι η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης L_{AB} περιέχεται στην εικόνα της L_A, δηλαδή ότι $imL_{AB} \leq imL_A$. Έτσι, με βάση τους ορισμούς και την Πρόταση 4.6.3, προκύπτει ότι

$$r(AB) = dim_{\mathbb{F}} imL_{AB} \leq dim_{\mathbb{F}} imL_A = r(A).$$

Για να δείξουμε την άλλη ανισότητα, θεωρούμε τον υπόχωρο $imL_B \leq \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ και τον περιορισμό

$$L'_A : imL_B \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$$

της γραμμικής απεικόνισης L_A σε αυτόν. Θα δείξουμε αρχικά ότι η εικόνα της L'_A είναι ίση με την εικόνα της L_{AB}. Πράγματι, αν $X \in imL'_A$, τότε υπάρχει $Y \in imL_B$ τέτοιο ώστε $X = L'_A(Y) = L_A(Y) = AY$. Καθώς $Y \in imL_B$, θα υπάρχει $Z \in \mathbb{F}^{\rho\times 1}$, τέτοιο ώστε $Y = L_B(Z) = BZ$. Έτσι, έχουμε $X = A(BZ) = (AB)Z = L_{AB}(Z) \in imL_{AB}$. Αντίστροφα, αν $X \in imL_{AB}$, τότε υπάρχει $Z \in \mathbb{F}^{\rho\times 1}$, έτσι ώστε $X = L_{AB}(Z) = (AB)Z = A(BZ)$. Συνεπώς, θεωρώντας το στοιχείο $BZ = L_B(Z) \in imL_B$, έχουμε $L'_A(BZ) = L_A(BZ) = A(BZ) = X$ και άρα $X \in imL'_A$. Έχοντας δείξει ότι η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης L'_A είναι ο υπόχωρος $imL_{AB} \leq \mathbb{F}^{\nu\times 1}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση του Πορίσματος 5.3.13 (για τη γραμμική απεικόνιση L'_A) και να συμπεραίνουμε ότι

$$r(AB) = dim_{\mathbb{F}} imL_{AB} = dim_{\mathbb{F}} imL'_A \leq dim_{\mathbb{F}} imL_B = r(B).$$

(ii) Καθώς γνωρίζουμε ήδη ότι $r(AB) \leq r(A)$ (από το (i)), αρκεί να δείξουμε ότι $r(A) \leq r(AB)$. Πράγματι, θεωρώντας τους πίνακες AB και B', έχουμε $r(ABB') \leq r(AB)$, δηλαδή $r(A) \leq r(AB)$.

(iii) Καθώς γνωρίζουμε ήδη ότι $r(AB) \leq r(B)$ (από το (i)), αρκεί να δείξουμε ότι $r(B) \leq r(AB)$. Θεωρώντας όμως τους πίνακες A' και AB, έχουμε $r(A'AB) \leq r(AB)$, δηλαδή $r(B) \leq r(AB)$.

Θεώρημα 6.2.14 *Δυο πίνακες $A, B \in F^{\nu\times\mu}$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν $r(A) = r(B)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά οι πίνακες A, B είναι ισοδύναμοι. Τότε, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\nu\times\nu}$ και $Q \in F^{\mu\times\mu}$, τέτοιοι ώστε $PAQ = B$. Συνεπώς, με βάση την Πρόταση 6.2.13$(ii), (iii)$ θα είναι

$$r(B) = r(PAQ) = r(PA) = r(A).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι πίνακες A, B έχουν την ίδια τάξη. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 6.2.10, έπεται ότι ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\nu\times\mu},$$

για κάποιο $r \leq \mu, \nu$. Καθώς ισοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη, ενώ η τάξη του παραπάνω πίνακα είναι προφανώς ίση με r, θα πρέπει να είναι $r(A) = r$. Όμως, έχουμε υποθέσει ότι $r(A) = r(B)$ και άρα $r(B) = r$. Έτσι, εφαρμόζοντας με τον ίδιο τρόπο το Πόρισμα 6.2.10 για τον πίνακα B, συμπεραίνουμε ότι και αυτός είναι ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\nu\times\mu}.$$

Καθώς η ισοδυναμία των πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας (Πρόταση 6.2.7), προκύπτει τελικά ότι οι πίνακες A και B είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι.

Πρόταση 6.2.15 *Έστω A ένας $\mu \times \nu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ και $A^t \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ ο ανάστροφός του. Τότε, $r(A) = r(A^t)$.*

Απόδειξη. Με βάση το Πόρισμα 6.2.10, γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής

$$I = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\mu\times\nu}.$$

Έτσι, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\mu\times\mu}$ και $Q \in F^{\nu\times\nu}$, τέτοιοι ώστε $A = PIQ \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$. Συνεπώς, παίρνοντας αναστρόφους στην προηγούμενη σχέση, συμπεραίνουμε ότι $A^t = Q^t I^t P^t \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ (βλ. Πρόταση 2.3.20). Καθώς οι πίνακες $Q^t \in F^{\nu\times\nu}$ και $P^t \in F^{\mu\times\mu}$ είναι αντιστρέψιμοι (Πρόταση 2.4.8(iv)), συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες $A^t, I^t \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι ισοδύναμοι. Καθώς ισοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη, έχουμε $r(A) = r(I)$ και $r(A^t) = r(I^t)$. Έτσι, για να δείξουμε ότι $r(A) = r(A^t)$, αρκεί να δείξουμε ότι $r(I) = r(I^t)$. Αυτό όμως είναι φανερό, αφού

$$I^t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\nu\times\mu}$$

και άρα $r(I^t) = r = r(I)$.

Παρατήρηση 6.2.16 *Ας θεωρήσουμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ με γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_\nu \in \mathbb{F}^{1\times\mu}$ και τον ανάστροφό του $A^t \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$. Οι στήλες του A^t είναι ακριβώς οι ανάστροφοι $r_1^t, r_2^t, \ldots, r_\nu^t \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ των γραμμών του A. Έτσι, η τάξη του A^t, που είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A^t, είναι ακριβώς το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A. Καθώς $r(A) = r(A^t)$, συμπεραίνουμε ότι η τάξη ενός πίνακα, που ορίστηκε ως το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του, μπορεί ισοδύναμα να οριστεί ως το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Παρατήρηση 6.2.17 *Ορίσαμε στην Παράγραφο 3.2 του βιβλίου την έννοια της γραμμοϊσοδυναμίας των πινάκων. Είδαμε ότι δύο πίνακες είναι γραμμοϊσοδύναμοι αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με αριστερό πολλαπλασιασμό με ένα στοιχειώδη πίνακα (Πρόταση 3.2.20). Καθώς οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι (Πόρισμα 3.2.18), συμπεραίνουμε ότι δύο γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες είναι ισοδύναμοι (με την έννοια του Ορισμού 6.2.6) και άρα έχουν την ίδια τάξη. Έτσι, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss δίνει μια απλή μέθοδο για τον υπολογισμό της τάξης ενός πίνακα, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.*

Παράδειγμα 6.2.18 *Θα βρούμε την τάξη του πίνακα* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}$. *Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις γραμμοπράξεις, όπως φαίνεται παρακάτω:*

$$A \overset{r_2 \mapsto r_2+2r_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_3 \mapsto r_3+6r_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 4 \\ 0 & 16 & 16 & 8 \end{pmatrix} \overset{r_3 \mapsto r_3-2r_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Καθώς οι δύο πρώτες γραμμές του τελευταίου πίνακα είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου των γραμμών $\mathbb{F}^{1\times 4}$, *συμπεραίνουμε (Παρατήρηση 6.2.16) ότι η τάξη του πίνακα αυτού είναι* 2. *Έτσι, με βάση την Παρατήρηση 6.2.17, προκύπτει ότι* $r(A) = 2$.

Χρησιμοποιώντας την έννοια της τάξης, μπορούμε να δώσουμε ένα χαρακτηρισμό των αντιστρέψιμων πινάκων.

Πρόταση 6.2.19 *Ένας τετραγωνικός πίνακας* $A \in F^{\nu\times\nu}$ *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* $r(A) = \nu$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε, από την Πρόταση 6.2.13(iii) έπεται ότι $r(AI_\nu) = r(I_\nu)$, δηλαδή ότι $r(A) = r(I_\nu)$. Είναι φανερό όμως ότι $r(I_\nu) = \nu$ και άρα $r(A) = \nu$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $r(A) = \nu$ και ας θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση

$$L_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}.$$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{E}$ του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$, τέτοια ώστε $(L_A : \mathbf{E}, \mathbf{E}) = A$ (βλ. Παρατήρηση 6.1.3). Έτσι, με βάση το Θεώρημα 6.1.13, για να δείξουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αρκεί να δείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση L_A είναι ισομορφισμός. Καθώς $r(A) = \nu$, η εικόνα της L_A είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ διάστασης ν και άρα $imL_A = \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ (βλ. Πρόταση 4.6.3(ii)). Συνεπώς, η γραμμική απεικόνιση L_A είναι ένας επιμορφισμός και άρα (Πρόταση 5.3.14) ένας ισομορφισμός.

Ορίσαμε την έννοια της ισοδυναμίας πινάκων εξετάζοντας τη σχέση που υπάρχει μεταξύ μιας γραμμικής απεικόνισης και του πίνακα που την περιγράφει ως προς ένα ζεύγος διατεταγμένων βάσεων του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της. Θα ορίσουμε στη συνέχεια μια συναφή σχέση στο σύνολο των τετραγωνικών πινάκων, η οποία προκύπτει εξετάζοντας τη σχέση που υπάρχει μεταξύ ενός γραμμικού μετασχηματισμού ενός διανυσματικού χώρου και του πίνακα που τον αναπαριστά ως προς μια διατεταγμένη βάση του.

Έτσι, ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο V επί του $\mathbb{F}$ και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$. Θεωρούμε επίσης μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}$ του V και τον πίνακα $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{v})$. Αν $\mathbf{v}'$ είναι μια άλλη διατεταγμένη βάση του V και $B = (f : \mathbf{v}', \mathbf{v}')$, τότε θα είναι

$$B = (f : \mathbf{v}', \mathbf{v}') = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}') \cdot (f : \mathbf{v}, \mathbf{v}) \cdot (1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v}) = PAP^{-1},$$

όπου $P = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}')$ είναι ο αντίστοιχος πίνακας αλλαγής βάσης, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο $P^{-1} = (1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v})$ (Παρατήρηση 6.2.2).

Ορισμός 6.2.20 *Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός και A, B δύο $\nu\times\nu$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Θα λέμε ότι ο A είναι όμοιος προς τον B αν $B = PAP^{-1}$, για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.*

Πρόταση 6.2.21 *Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Η σχέση της ομοιότητας των πινάκων που ορίστηκε παραπάνω είναι μια σχέση ισοδύναμίας στο σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.*

Απόδειξη. Για την ανακλαστικότητα της σχέσης, θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε πίνακας $A \in F^{\nu\times\nu}$ είναι όμοιος προς τον εαυτό του. Αυτό είναι φανερό, καθώς $A = I_\nu A I_\nu^{-1}$.

Για να δείξουμε ότι η σχέση είναι συμμετρική, θεωρούμε δύο πίνακες $A, B \in F^{\nu\times\nu}$ και υποθέτουμε ότι ο A είναι όμοιος προς τον B. Τότε, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in F^{\nu\times\nu}$, τέτοιος ώστε $B = PAP^{-1}$. Καθώς ο πίνακας P^{-1} είναι επίσης αντιστρέψιμος και $A = P^{-1}BP$, έπεται ότι ο B είναι όμοιος προς τον A.

Τέλος, για να δείξουμε τη μεταβατική ιδιότητα της σχέσης, θεωρούμε τρεις πίνακες $A, B, C \in F^{\nu\times\nu}$, οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε ο A είναι όμοιος προς τον B και ο B είναι όμοιος προς τον C. Τότε, θα είναι $B = PAP^{-1}$ και $C = QBQ^{-1}$, για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in F^{\nu\times\nu}$. Καθώς ο πίνακας $QP \in F^{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 2.4.8(ii)) και $C = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = (QP)A(QP)^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι όμοιος προς τον C.

Αν ν είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός και $A, B \in F^{\nu\times\nu}$ δύο πίνακες με τον A όμοιο προς τον B, τότε θα λέμε ότι οι A, B είναι όμοιοι. Έτσι, με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι: *Οι πίνακες που αντιστοιχούν σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου ως προς δύο διαφορετικές επιλογές της διατεταγμένης βάσης του είναι μεταξύ τους όμοιοι.* Θα δούμε τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 6.2.22 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με διάσταση ν και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}$ του V και τον πίνακα $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν πίνακα $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$:*

(i) *Οι πίνακες A, B είναι όμοιοι.*

(ii) *Υπάρχει διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}'$ του διανυσματικού χώρου V, τέτοια ώστε $B = (f : \mathbf{v}', \mathbf{v}')$.*

Απόδειξη. Με βάση τα παραπάνω, αρκεί να δείξουμε ότι $(i) \to (ii)$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι. Τότε, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in F^{\nu\times\nu}$, τέτοιος ώστε $B = PAP^{-1}$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.2.4, μπορούμε να βρούμε μια διατεταγμένη βάση $\mathbf{v}'$ του V, έτσι ώστε $P = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}')$. Καθώς $P^{-1} = (1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v})$ (Παρατήρηση 6.2.2), έχουμε

$$B = PAP^{-1} = (1_V : \mathbf{v}, \mathbf{v}') \cdot (f : \mathbf{v}, \mathbf{v}) \cdot (1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v}) = (1_V \circ f \circ 1_V : \mathbf{v}', \mathbf{v}') = (f : \mathbf{v}', \mathbf{v}'),$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Είναι φανερό ότι αν δύο τετραγωνικοί πίνακες είναι μεταξύ τους όμοιοι, τότε είναι ισοδύναμοι. Γνωρίζουμε ότι όλοι οι αντιστρέψιμοι $\nu \times \nu$ πίνακες έχουν τάξη ν (Πρόταση 6.2.19) και άρα είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι (Θεώρημα 6.2.14). Από την άλλη μεριά, είναι προφανές ότι ο μόνος πίνακας που είναι όμοιος προς τον ταυτοτικό πίνακα I_ν είναι ο ίδιος ο I_ν. Έτσι, αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος και $A \neq I_\nu$, τότε οι πίνακες A, I_ν είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι, αλλά όχι όμοιοι.

Έχουμε δει ότι το πρόβλημα της ταξινόμησης των πινάκων ως προς ισοδυναμία ανάγεται σε ένα απλό αριθμητικό κριτήριο (Θεώρημα 6.2.14), ενώ κάθε κλάση ισοδύναμίας περιέχει ακριβώς ένα πίνακα μιας απλής κανονικής μορφής (Πόρισμα 6.2.10). Τα αντίστοιχα προβλήματα για τη σχέση της ομοιότητας είναι αρκετά πιο πολύπλοκα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (i) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, u_1', u_2', \ldots, u_\nu' \in V$. Ορίζουμε τους υποχώρους U, U' και U'' του V, θέτοντας $U = \langle u_1, u_2, \ldots, u_\nu \rangle$, $U' = \langle u_1', u_2', \ldots, u_\nu' \rangle$ και $U'' = \langle u_1 + u_1', u_2 + u_2', \ldots, u_\nu + u_\nu' \rangle$. Να δειχτεί ότι $dim_{\mathbb{F}} U'' \leq dim_{\mathbb{F}} U + dim_{\mathbb{F}} U'$.

   (ii) Έστω A, B δύο $\nu \times \mu$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

2. Να εξεταστεί αν οι πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{3\times 4}$ με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

   είναι ισοδύναμοι.

3. Θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις

$$\mathbf{e} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = (1,0,-1), (1,2,0), (1,1,2))$$

   του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

   (i) Να υπολογιστούν οι πίνακες αλλαγής βάσης $(1_{\mathbb{R}^3} : \mathbf{e}, \mathbf{v})$ και $(1_{\mathbb{R}^3} : \mathbf{v}, \mathbf{e})$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με

$$(f : \mathbf{v}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογιστεί η τιμή $f(1, 1, 1)$.

4. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ με

$$\varphi(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(-1) & f(0) \end{pmatrix}$$

για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. Να βρεθούν διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}_3[x]$ και $\mathbb{R}^{2\times 2}$ αντίστοιχα, έτσι ώστε ο πίνακας $(f : \mathbf{v}, \mathbf{w})$ να είναι της μορφής $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ για κάποιο $r \geq 0$.

5. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

(i) Να βρεθεί η τάξη $r(A)$ του πίνακα A.

(ii) Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ και $Q \in \mathbb{F}^{4\times 4}$, τέτοιοι ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, όπου $r = r(A)$.

6. (i) Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση με $f^2 = 0 \in \mathcal{L}(V)$. Να δειχτεί ότι η εικόνα imf της f είναι υπόχωρος του πυρήνα $kerf$ και ότι $dim_{\mathbb{F}}imf \leq \frac{1}{2}dim_{\mathbb{F}}V$.

(ii) Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ένας πίνακας με $A^2 = 0$. Να δειχτεί ότι $r(A) \leq \frac{1}{2}n$.

7. Έστω A ένας $\mu \times \nu$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Να δειχτεί ότι:

(i) Η τάξη του A είναι ϊση με μ αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, τέτοιος ώστε $AB = I_\mu$.

(ii) Η τάξη του A είναι ϊση με ν αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, τέτοιος ώστε $CA = I_\nu$.

8. Έστω $A, B \in F^{\nu\times\nu}$ δύο όμοιοι πίνακες. Να δειχτεί ότι οι πίνακες $A + \lambda I_\nu$ και $B + \lambda I_\nu$ είναι όμοιοι για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$.

6.3 Ιδιότητες Οριζουσών

Εδώ θα δούμε ότι η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών των δύο πινάκων. Μέσω αυτής της ιδιότητας, θα προκύψουν και άλλες σημαντικές ιδιότητες των οριζουσών.

Γνωρίζουμε ήδη πώς συμπεριφέρεται η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα αν εφαρμόσουμε σε αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (βλ. ιδιότητα $(D2)$ στον Ορισμό 3.4.1 και Πρόταση 3.4.6). Χρησιμοποιώντας την έννοια του στοιχειώδους πίνακα, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε αυτήν την ιδιότητα της ορίζουσας, ως εξής:

Πρόταση 6.3.1 *Αν $E \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε $\det(EA) = (\det E)(\det A)$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας $E \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ λέγεται στοιχειώδης αν λαμβάνεται από τον ταυτοτικό πίνακα I_ν μέσω ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας EA είναι ο πίνακας που προκύπτει αν εφαρμόσουμε στον A το στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών που εφαρμόζουμε στον I_ν για να πάρουμε τον E (Θεώρημα 3.2.16). Θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) Ο πίνακας $E = D(i,\lambda)$ λαμβάνεται πολλαπλασιασιάζοντας την i-γραμμή του I_ν με κάποιο μη-μηδενικό στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε, από την ιδιότητα $(D2)$ στον Ορισμό 3.4.1, έχουμε $\det E = \lambda \det I_\nu = \lambda$, αφού $\det I_\nu = 1$. Ο πίνακας EA είναι ο πίνακας που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την i-γραμμή του πίνακα A με λ και άρα (εφαρμόζοντας και πάλι την ιδιότητα $(D2)$ του Ορισμού 3.4.1) έχουμε

$$\det(EA) = \lambda(\det A) = (\det E)(\det A).$$

(ii) Ο πίνακας $E = M(i,j,\lambda)$ προκύπτει προσθέτοντας στην i-γραμμή του I_ν την j-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με κάποιο στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε, από την Πρόταση 3.4.6(i) έχουμε $\det E = \det I_\nu = 1$. Ο πίνακας EA είναι ο πίνακας που προκύπτει προσθέτοντας στην i-γραμμή του A την j-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με λ και άρα (χρησιμοποιώντας και πάλι την Πρόταση 3.4.6(i)) έχουμε

$$\det(EA) = \det A = (\det E)(\det A).$$

(iii) Ο πίνακας $E = E(i,j)$ λαμβάνεται εναλλάσοντας την i-γραμμή του I_ν με την j-γραμμή του. Τότε, από την Πρόταση 3.4.6(ii), έχουμε $\det E = -\det I_\nu = -1$. Ο πίνακας EA είναι ο πίνακας που προκύπτει εναλλάσοντας την i-γραμμή του πίνακα A με την j-γραμμή του και άρα (εφαρμόζοντας και πάλι την Πρόταση 3.4.6(ii)) έχουμε

$$\det(EA) = -\det A = (\det E)(\det A).$$

Έτσι, ολοκληρώθηκε η απόδειξη της Πρότασης.

Πόρισμα 6.3.2 *Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.3.8, μπορούμε να βρούμε στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, έτσι ώστε $A = E_1E_2\ldots E_k$. Συνεπώς, από την Πρόταση 6.3.1 (και επαγωγή στο πλήθος k των παραγόντων) συμπεραίνουμε ότι

$$\det(AB) = (\det E_1)(\det E_2)\ldots(\det E_k)(\det B) \tag{6.1}$$

για κάθε $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ειδικότερα, θέτοντας $B = I_\nu$, συμπεραίνουμε ότι

$$\det A = (\det E_1)(\det E_2)\dots(\det E_k).$$

Έτσι, η σχέση (6.1) μπορεί να ξαναγραφτεί στη μορφή $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, τελειώνοντας την απόδειξη.

Θεώρημα 6.3.3 *Για κάθε δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ισχύει $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.*

Απόδειξη. Με βάση το Πόρισμα 6.3.2, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι για την τάξη $r(A)$ του A θα είναι $r(A) < \nu$ (Πρόταση 6.2.19). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.2.13(i), συμπεραίνουμε ότι $r(AB) \leq r(A) < \nu$ και άρα ο πίνακας AB δεν είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 6.2.19). Καθώς οι πίνακες A και AB δεν είναι αντιστρέψιμοι, έχουμε $\det A = \det(AB) = 0$ (Πρόταση 3.4.9) και άρα η σχέση $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ είναι προφανής.

Πόρισμα 6.3.4 *Αν οι πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι όμοιοι, τότε $\det A = \det B$.*

Απόδειξη. Καθώς οι A, B είναι όμοιοι, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τέτοιος ώστε $B = PAP^{-1}$. Συνεπώς, έχουμε $PA = BP \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και άρα

$$(\det P)(\det A) = \det(PA) = \det(BP) = (\det B)(\det P) = (\det P)(\det B) \in \mathbb{F}$$

(Θεώρημα 6.3.3). Ως αντιστρέψιμος, ο πίνακας P έχει μη-μηδενική ορίζουσα, δηλαδή $\det P \neq 0$ (Πρόταση 6.2.19). Έτσι, από την παραπάνω ισότητα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\det A = \det B$, δηλαδή το ζητούμενο.

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν πεπερασμένα παραγόμενο διανυσματικό χώρο V επί του $\mathbb{F}$ και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$. Αν $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ είναι δύο διατεταγμένες βάσεις του V, τότε γνωρίζουμε ότι οι πίνακες $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{v})$ και $B = (f : \mathbf{v}', \mathbf{v}')$ είναι μεταξύ τους όμοιοι (Θεώρημα 6.2.22). Συνεπώς, με βάση το Πόρισμα 6.3.4, θα είναι $\det A = \det B$.

Ορισμός 6.3.5 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Η* **ορίζουσα** *$\det f$ της f είναι η ορίζουσα του πίνακα $(f : \mathbf{v}, \mathbf{v})$, όπου $\mathbf{v}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V. (Με βάση τα παραπάνω σχόλια, η ορίζουσα του πίνακα $(f : \mathbf{v}, \mathbf{v})$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της διατεταγμένης βάσης $\mathbf{v}$ του V.)*

Θεώρημα 6.3.6 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η f είναι ένας ισομορφισμός.*

(ii) $\det f \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $A = (f : \mathbf{v}, \mathbf{v})$. Τότε, με βάση τον Ορισμό 6.3.5, θα είναι $\det f = \det A$. Συνεπώς, $\det f \neq 0$ αν και μόνο αν $\det A \neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 3.4.9). Έτσι, η ισοδυναμία των (i) και (ii) είναι μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.1.13.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα και αυτής του αναστρόφου του.

Πρόταση 6.3.7 *Αν ο $E \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε $\det E = \det E^t$.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) Ο πίνακας $E = D(i, \lambda)$ λαμβάνεται πολλαπλασιασιάζοντας την i-γραμμή του I_ν με κάποιο μη-μηδενικό στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$. Καθώς ο πίνακας E είναι (στην περίπτωση αυτή) συμμετρικός, έχουμε $E = E^t$ και άρα $\det E = \det E^t$.

(ii) Ο πίνακας $E = M(i, j, \lambda)$ προκύπτει προσθέτοντας στην i-γραμμή του I_ν την j-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με κάποιο στοιχείο $\lambda \in \mathbb{F}$. Στην περίπτωση αυτή, ο ανάστροφος E^t είναι ο πίνακας $M(j, i, \lambda)$ που προκύπτει προσθέτοντας στην j-γραμμή του I_ν την i-γραμμή του πολλαπλασιασμένη με $\lambda \in \mathbb{F}$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.4.6(i), έπεται ότι $\det E = \det I_\nu = \det E^t$.

(iii) Ο πίνακας $E = E(i, j)$ λαμβάνεται εναλλάσοντας την i-γραμμή του I_ν με την j-γραμμή του. Όπως και στην πρώτη περίπτωση, έτσι και εδώ, ο πίνακας E είναι συμμετρικός και άρα $\det E = \det E^t$.

Πόρισμα 6.3.8 *Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det A = \det A^t$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.3.8, μπορούμε να βρούμε στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, έτσι ώστε $A = E_1E_2\ldots E_k$. Συνεπώς, από τό Θεώρημα 6.3.3 συμπεραίνουμε ότι

$$\det A = (\det E_1)(\det E_2)\ldots(\det E_k).$$

Καθώς $A^t = (E_1E_2\ldots E_k)^t = E_k^t\ldots E_2^tE_1^t$, έπεται ότι

$$\det A^t = (\det E_k^t)\ldots(\det E_2^t)(\det E_1^t).$$

Γνωρίζουμε ότι $\det E_i = \det E_i^t$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ (Πρόταση 6.3.7) και έτσι οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι $\det A = \det A^t$.

Θεώρημα 6.3.9 *Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ισχύει $\det A = \det A^t$.*

Απόδειξη. Με βάση το Πόρισμα 6.3.8, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι για την τάξη $r(A)$ του A θα είναι $r(A) < \nu$ (Πρόταση 6.2.19). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.2.15, συμπεραίνουμε ότι $r(A^t) = r(A) < \nu$ και άρα ο πίνακας A^t δεν είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 6.2.19). Καθώς οι πίνακες A και A^t δεν είναι αντιστρέψιμοι, έχουμε $\det A = 0 = \det A^t$ (Πρόταση 3.4.9).

Παρατήρηση 6.3.10 *Η ορίζουσα των πινάκων ορίστηκε στην* $\S 3.4$ *ως μια απεικόνιση από το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$ *στο* $\mathbb{F}$*, η οποία είναι γραμμική ως προς τις γραμμές του πίνακα, αλλάζει πρόσημο αν εναλλάξουμε δύο γραμμές του πίνακα και απεικονίζει τον ταυτοτικό πίνακα στο* $1 \in \mathbb{F}$*. Ας θεωρήσουμε έναν πίνακα* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *με στήλες* $c_1, c_2, \ldots, c_\nu \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ *και τον ανάστροφό του* $A^t \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$*. Οι γραμμές του* A^t *είναι ακριβώς οι ανάστροφοι* $c_1^t, c_2^t, \ldots, c_\nu^t \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ *των στηλών του* A*. Έτσι, καθώς* $\det A = \det A^t$*, συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες, σχετικά με ορίζουσες, που αφορούν τις γραμμές ενός πίνακα ισχύουν και για τις στήλες του. Πιο συγκεκριμένα:*

(i) *Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι γραμμική ως προς κάθε στήλη του.*

(ii) *Αν δυο στήλες ενός τετραγωνικού πίνακα* A *είναι ίσες τότε* $\det A = 0$.

(iii) *Αν ο πίνακας* B *προκύπτει από έναν τετραγωνικό πίνακα* A *μέσω αντιμετάθεσης δύο στηλών του, τότε* $\det B = -\det A$.

(iv) *Αν οι στήλες ενός τετραγωνικού πίνακα* A *είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε* $\det A = 0$.

(v) *Αν* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$*, τότε* $\det A = \sum_{j=1}^{\nu}(-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$*, όπου* A_{ij} *είναι η ορίζουσα του υποπίνακα του* A *που προκύπτει διαγράφοντας την* i*-γραμμή και την* j*-στήλη του. (Η παράσταση αυτή της ορίζουσας λέγεται ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την* i*-γραμμή ή ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς την* i*-γραμμή. Το ανάπτυγμα αυτό δεν εξαρτάται από τη γραμμή ως προς την οποία αναπτύσσουμε.)*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με $f(x,y,z) = (2x+y+3z, x-y+2z, 4x+5y-2z)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   (i) Να υπολογιστεί ο ορίζουσα $\det f$ της f.

   (ii) Να εξετασθεί αν η f είναι ισομορφισμός.

2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Να δειχτεί ότι:

   (i) Αν $A^k = 0$ για κάποιο $k \geq 0$, τότε $\det A = 0$.

   (ii) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

3. Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς ν, να δειχτεί ότι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_\nu \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_\nu^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\nu-1} & x_2^{\nu-1} & \ldots & x_\nu^{\nu-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq\nu} (x_j - x_i).$$

   (Η ορίζουσα αυτή λέγεται ορίζουσα του Vandermonde.)

4. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 16 & 9 \\ 8 & -1 & 64 & -27 \end{pmatrix}$.

5. Θεωρούμε τρεις πίνακες $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και $C \in \mathbb{F}^{\mu\times\mu}$, καθώς επίσης και τον πίνακα $D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(\nu+\mu)\times(\nu+\mu)}$. Να δειχτεί ότι $\det D = (\det A)(\det C)$.

6.4 Εφαρμογή στην Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Χρησιμοποιώντας την έννοια της τάξης των πινάκων, θα μελετήσουμε ιδιότητες του συνόλου των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, θα δούμε ότι ένα γραμμικό σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν η τάξη του πίνακά του είναι ίση με την τάξη του αντίστοιχου επαυξημένου πίνακα.

Ας θεωρήσουμε αρχικά ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\mu}x_\mu &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\mu}x_\mu &= 0 \\ &\vdots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu\mu}x_\mu &= 0 \end{aligned}$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $1 \le i \le \nu$, $1 \le j \le \mu$. Το σύστημα αυτό γράφεται σε μορφή πινάκων ως $AX = 0$, όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών και $X \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ ο πίνακας-στήλη των αγνώστων. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$L_A : \mathbb{F}^{\mu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1},$$

η οποία ορίζεται πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με A, και παρατηρούμε ότι ο πυρήνας $kerL_A$ είναι ακριβώς το σύνολο των λύσεων $\{X \in \mathbb{F}^{\mu\times 1} \mid AX = 0 \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}\}$ του συστήματος (βλ. Παράδειγμα 5.3.9).

Πρόταση 6.4.1 *Το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος ν εξισώσεων με μ αγνώστους είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ διάστασης $\mu - r(A)$, όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό και το Πόρισμα 5.3.13, έχουμε $dim_{\mathbb{F}} \ker L_A = \mu - dim_F imL_A$ και άρα το ζητούμενο έπεται καθώς $r(A) = dim_{\mathbb{F}} imL_A$.

Πόρισμα 6.4.2 *Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους έχει μη-τετριμμένες λύσεις αν και μόνο αν ισχύει $r(A) < \mu$, όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών.*

Απόδειξη. Αυτό έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση.

Πόρισμα 6.4.3 *Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους, $AX = 0$, έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 6.4.2, έπεται ότι το σύστημα $AX = 0$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $r(A) = \nu$. Ο πίνακας A είναι ένας τετραγωνικός $\nu \times \nu$ πίνακας και άρα $r(A) = \nu$ αν και μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 6.2.19), δηλαδή αν και μόνο αν $\det A \neq 0$ (Πρόταση 3.4.9).

Παράδειγμα 6.4.4 *Θα βρούμε μια βάση του χώρου των λύσεων του συστήματος $AX = 0$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 9 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 4}$.*

Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, παίρνουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 9 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Γνωρίζουμε ότι το σύστημα $AX = 0$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα $A'X = 0$ (βλ. Πόρισμα 3.1.1 και Πρόταση 3.2.20), δηλαδή ότι

$$\{X \in \mathbb{F}^{4\times 1} \mid AX = 0\} = \{X \in \mathbb{F}^{4\times 1} \mid A'X = 0\}.$$

Καθώς $r(A') = 2$, ο χώρος των λύσεων του συστήματος έχει διάσταση $4 - 2 = 2$. Λύνοντας το σύστημα $A'X = 0$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

βλέπουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 1} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{F} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 1} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{F} \right\}.$$

Αν $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, τότε βλέπουμε ότι ο χώρος των λύσεων του συστήματος παράγεται από τα v_1, v_2. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν μια βάση του χώρου των λύσεων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\mu}x_\mu &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\mu}x_\mu &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu\mu}x_\mu &= b_\nu \end{aligned}$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq j \leq \mu$ και $b_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq \nu$. Το σύστημα αυτό γράφεται σε μορφή πινάκων ως $AX = B$, όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu \times \mu}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών, $X \in \mathbb{F}^{\mu \times 1}$ ο πίνακας των αγνώστων και $B \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ ο πίνακας των σταθερών όρων. Θεωρούμε, όπως και πριν, τη γραμμική απεικόνιση

$$L_A : \mathbb{F}^{\mu \times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu \times 1},$$

η οποία ορίζεται πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με A.

Πρόταση 6.4.5 *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων $AX = B$, όπου $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \mu}$:*

(i) *Το σύστημα έχει λύση.*

(ii) *Ο πίνακας $B \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ του A.*

(iii) $B \in imL_A$.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι οι ισχυρισμοί (i) και (ii) είναι ισοδύναμοι, παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_\mu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\mu \times 1}$ είναι μία λύση του συστήματος $AX = B$ αν και μόνο αν $A\Lambda = B$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν $B = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_\mu c_\mu$. Η ισοδυναμία των ισχυρισμών (ii) και (iii) έπεται άμεσα, καθώς ο υπόχωρος $imL_A \leq \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ παράγεται από τις στήλες $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ του A (βλ. Παράδειγμα 5.3.9).

Υπενθυμίζουμε ότι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος ν εξισώσεων και μ αγνώστων είναι ο $\nu \times (\mu + 1)$ πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος, προσαρτώντας τον πίνακα των σταθερών όρων στην τελευταία στήλη. Έτσι, αν γράψουμε το σύστημα σε μορφή πινάκων ως $AX = B$, τότε ο επαυξημένος πίνακας είναι ο $(A \mid B) \in \mathbb{F}^{\nu \times (\mu+1)}$. Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την προηγούμενη πρόταση, χρησιμοποιώντας τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος, ως εξής:

Θεώρημα 6.4.6 *Ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$ όπως παραπάνω έχει λύση αν και μόνο αν $r(A) = r(A \mid B)$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό τους, οι τάξεις των πινάκων A και $(A \mid B)$ είναι οι διαστάσεις των υποχώρων του $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$, οι οποίοι παράγονται από τις στήλες τους. Έτσι, έχουμε

$$r(A) = dim_{\mathbb{F}}\langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu \rangle \quad \text{και} \quad r(A \mid B) = dim_{\mathbb{F}}\langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu, B \rangle.$$

Καθώς ο υπόχωρος $\langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu \rangle$ περιέχεται στον υπόχωρο $\langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu, B \rangle$, συμπεραίνουμε ότι $r(A) \leq r(A \mid B)$ (βλ. Πρόταση 4.6.3(i)). Επιπλέον, θα είναι $r(A) = r(A \mid B)$ αν και μόνο αν $\langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu \rangle = \langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu, B \rangle$ (Πρόταση 4.6.3(ii)). Είναι φανερό ότι οι υπόχωροι $\langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu \rangle$ και $\langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu, B \rangle$ είναι ίσοι αν και μόνο αν $B \in \langle c_1, c_2, \ldots, c_\mu \rangle$ και άρα το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 6.4.5.

Παράδειγμα 6.4.7 *Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Θα καθορίσουμε τις τιμές του a, για τις οποίες αυτό έχει λύση.

Σε μορφή πινάκων το παραπάνω σύστημα γράφεται ως $AX = B$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$. Γνωρίζουμε ότι το σύστημα $AX = B$ έχει λύση αν και μόνο αν $r(A) = r(A \mid B)$. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και, εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, έχουμε:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3a-4 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, βλέπουμε ότι $r(A) = 2$, ενώ $r(A \mid B) = 2$ αν και μόνο αν $a = 4/3$. Συνεπώς, το σύστημα $AX = B$ έχει λύση αν και μόνο αν $a = 4/3$.

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε υπόχωρο V_0 ενός διανυσματικού χώρου V και κάθε στοιχείο $v \in V$ ορίζεται το σύμπλοκο

$$v + V_0 = \{v + v_0 \mid v_0 \in V_0\}.$$

Πρόταση 6.4.8 *Έστω $AX = B$ ένα γραμμικό σύστημα με ν εξισώσεις και μ αγνώστους. Υποθέτουμε ότι Λ είναι μια λύση του συστήματος και θεωρούμε τον υπόχωρο $kerL_A$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}^{\mu \times 1}$, που αποτελεί το σύνολο των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $AX = 0$. Τότε, το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$ είναι το σύμπλοκο $\Lambda + kerL_A$.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε αρχικά ένα στοιχείο $\Lambda' \in \Lambda + kerL_A$. Τότε, θα υπάρχει $\Lambda_0 \in kerL_A$, τέτοιο ώστε $\Lambda' = \Lambda + \Lambda_0$. Έτσι, θα είναι

$$A\Lambda' = A(\Lambda + \Lambda_0) = A\Lambda + A\Lambda_0 = B + 0 = B$$

και άρα το Λ' είναι μια λύση του συστήματος $AX = B$.

Αντίστροφα, έστω ότι το $\Lambda' \in \mathbb{F}^{\mu \times 1}$ είναι μια λύση του συστήματος $AX = B$. Τότε, θα είναι $A\Lambda' = B$ και άρα

$$A(\Lambda' - \Lambda) = A\Lambda' - A\Lambda = B - B = 0.$$

Συνεπώς, το $\Lambda' - \Lambda$ είναι μια λύση του ομογενούς συστήματος $AX = 0$, δηλαδή $\Lambda' - \Lambda \in kerL_A$. Έτσι, το $\Lambda' = \Lambda + (\Lambda' - \Lambda)$ είναι ένα στοιχείο του συμπλόκου $\Lambda + kerL_A$.

Πόρισμα 6.4.9 *Έστω $AX = B$ ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με μ αγνώστους και $v_1, v_2, \ldots, v_\rho \in \mathbb{F}^{\mu \times 1}$ μια βάση του χώρου των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0$. Αν Λ είναι μια λύση του συστήματος $AX = B$, τότε το σύνολο των λύσεών του είναι το*

$$\{\Lambda + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_\rho v_\rho \in \mathbb{F}^{\mu \times 1} \mid a_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \rho\}.$$

Επιπλέον $\rho = \mu - r(A)$.

Απόδειξη. Καθώς ο διανυσματικός χώρος των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $AX = 0$ είναι ακριβώς το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$, το ζητούμενο έπεται άμεσα από την Πρόταση 6.4.8.

Πόρισμα 6.4.10 *Ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$ με $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $r(A) = r(A \mid B) = \mu$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.4.6 γνωρίζουμε ότι το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν $r(A) = r(A \mid B)$. Στην περίπτωση αυτή, η λύση είναι μοναδική αν και μόνο αν $kerL_A = 0$ (Πρόταση 6.4.8), δηλαδή αν και μόνο αν $dim_{\mathbb{F}}kerL_A = 0$. Το ζητούμενο έπεται, καθώς $r(A) = dim_{\mathbb{F}}imL_A = \mu - dim_{\mathbb{F}}kerL_A$ (Πόρισμα 5.3.13).

Πόρισμα 6.4.11 *Ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$ με $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $r(A) \leq r(A \mid B) \leq \nu$ και άρα οι ισότητες του Πορίσματος 6.4.10 είναι ισοδύναμες με την ισότητα $r(A) = \nu$. Όμως, $r(A) = \nu$ αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (Πρόταση 6.2.9), δηλαδή αν και μόνο αν $\det A \neq 0$ (Πρόταση 3.4.9).

Παράδειγμα 6.4.12 *Θα βρούμε το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$, όπου*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times4} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}.$$

Πρώτα θα εξετάσουμε αν το σύστημα έχει λύση. Από το Θεώρημα 6.4.6, γνωρίζουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $r(A) = r(A \mid B)$. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, παίρνουμε:

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έτσι, βλέπουμε ότι $r(A) = r(A \mid B) = 2$ και άρα το σύστημα έχει λύση.

Από το Πόρισμα 6.4.9 συμπεραίνουμε ότι για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του συστήματος θα πρέπει να βρούμε μία λύση του Λ, καθώς επίσης και μια βάση του χώρου των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0$. Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών που εφαρμόσαμε παραπάνω στον επαυξημένο πίνακα $(A \mid B)$, σε συνδυασμό με τις Προτάσεις 3.1.1 και 3.2.20, δείχνουν ότι τα γραμμικά συστήματα $AX = B$ και $AX = 0$ είναι ισοδύναμα με τα συστήματα $A'X = B'$ και $A'X = 0$ αντίστοιχα, όπου

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα $A'X = B'$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Θέτοντας $x_4 = x_2 = 0$, έπεται ότι το στοιχείο $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι μια λύση του συστήματος $A'X = B'$, άρα και του συστήματος $AX = B$. Στη συνέχεια, θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα $A'X = 0$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Βλέπουμε εύκολα ότι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς αυτού συστήματος είναι το

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\},$$

δηλαδή το

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Έτσι, αν $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, τότε τα v_1, v_2 αποτελούν μια βάση του χώρου των λύσεων του $AX = 0$. Συνεπώς, το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$ είναι το

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παράδειγμα 6.4.13 *Θα βρούμε το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος $AX = B$, όπου*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}.$$

Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, παίρνουμε:

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_1]{\substack{r_2 \to r_2 + 3r_1 \\ r_3 \to r_3 + 2r_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \to r_3 - 2r_2 \\ r_4 \to -1/3 r_4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

΄Ετσι, βλέπουμε ότι $r(A) = 3 = r(A \mid B)$ και άρα το σύστημα $AX = B$ έχει λύση. Τώρα, το σύστημα $AX = B$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα $A'X = B'$, όπου

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι μια λύση του συστήματος $A'X = B'$ (και άρα και του συστήματος $AX = B$) είναι το στοιχείο $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Επιπλέον, καθώς $r(A) = r(A \mid B) = 3$, το Λ είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Πόρισμα 6.4.10).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί μια βάση για το χώρο των λύσεων του συστήματος $AX = 0$, όπου

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & i & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 4}$

2. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα $AX = 0$, όπου $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, έχει περισσότερες από μία λύσεις;

3. Για ποιες τιμές του μ το σύνολο λύσεων του συστήματος $AX = 0$, όπου
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -10 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5},$$
έχει διάσταση 1;

4. Να βρεθεί μια βάση του χώρου των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0$.

5. Έστω ότι $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ είναι μη-μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί, ανά δύο διαφορετικοί μεταξύ τους. Να δειχτεί ότι η μόνη λύση του γραμμικού συστήματος
$$\begin{aligned} \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_\nu x_\nu &= 0 \\ \gamma_1^2 x_1 + \gamma_2^2 x_2 + \cdots + \gamma_\nu^2 x_\nu &= 0 \\ \cdots & \\ \gamma_1^\nu x_1 + \gamma_2^\nu x_2 + \cdots + \gamma_\nu^\nu x_\nu &= 0 \end{aligned}$$
είναι η τετριμμένη.

6. Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων των παρακάτω γραμμικών συστημάτων:
$$(i) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$
$$(ii) \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$
$$(iii) \quad \begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

7. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου a, για τις οποίες το ακόλουθο γραμμικό σύστημα έχει λύση:
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 &= a \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$
Για τις τιμές αυτές να βρεθούν τα αντίστοιχα σύνολα των λύσεων.

8. Να δειχτεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + (b+1)x_3 &= 4 \\ bx_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση για κάθε $b \neq 0, 6$. Τι συμβαίνει όταν $b = 0$ ή $b = 6$;

9. Να βρεθεί ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $AX = 0$, του οποίου ο χώρος των λύσεων παράγεται από τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

10. Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\mu}$. Να δειχτεί ότι το γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει λύση για κάθε $B \in \mathbb{R}^{\nu\times 1}$ αν και μόνο αν $r(A) = \nu$.