Κεφάλαιο 4. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Σύνοψη
Το κεφάλαιο του Ολοκληρωτικού Λογισμού περιλαμβάνει δύο μεγάλες ενότητες. Η πρώτη περιέχει την Αόριστη Ολοκλήρωση, ενώ η δεύτερη την Ορισμένη Ολοκλήρωση. Η χρησιμότητα των εννοιών του κεφαλαίου αυτού, στην Επιστήμη του Μηχανικού, γίνεται καταφανής σε όποιον ξεφυλλίσει ένα σύγγραμμα Τεχνικής Μηχανικής, Αντοχής, Στατικής ή Δυναμικής, τα οποία χρησιμοποιούν κατά κόρο τα πάσης φύσης ολοκληρώματα.

Προαπαιτούμενη γνώση:
Η ενασχόληση με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό απαιτεί την γνώση των περισσότερων εργαλείων των Μαθηματικών. Από τους τύπους της Τριγωνομετρίας, τις συναρτήσεις, τα όρια, έως την πολύ καλή γνώση του Διαφορικού Λογισμού.

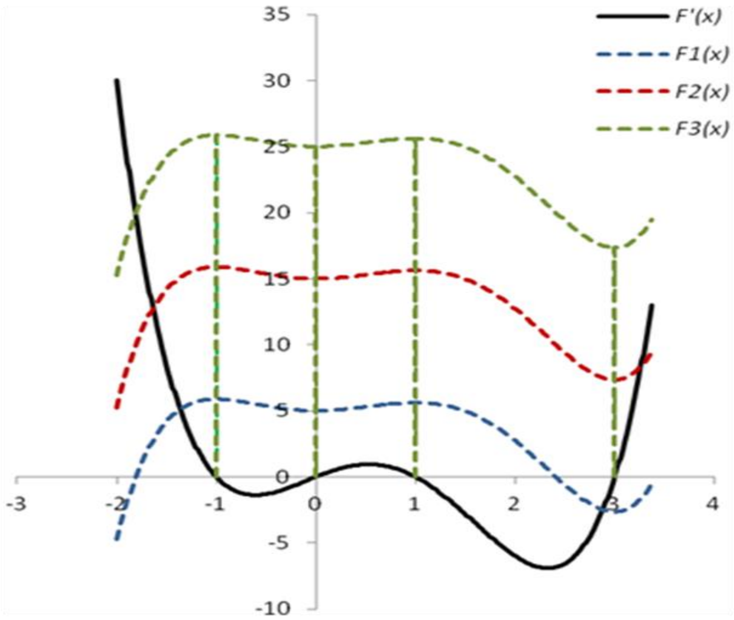
4.1 Αόριστη ολοκλήρωση

4.1.1 Γενικά

Αν θέλαμε να περιγράψουμε, όσο πιο απλά γίνεται την έννοια του αόριστου ολοκληρώματος, θα λέγαμε πως πρόκειται για την αντίστροφη πράξη της παραγώγισης. Από τη στιγμή, λοιπόν, που η παράγωγος της συνάρτησης x^2 είναι η $2x$, το αόριστο ολοκλήρωμα της $2x$ είναι η συνάρτηση x^2.

Αν όμως σκεφτούμε πως και η συνάρτηση x^2+c (όπου c μία αυθαίρετη σταθερή ποσότητα), έχει σαν παράγωγο τη συνάρτηση $2x$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως το αόριστο ολοκλήρωμα της $2x$ είναι η συνάρτηση x^2+c. Άρα, το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι η $F(x)$, η οποία, εκτός από αόριστο ολοκλήρωμα ονομάζεται και «αρχική» συνάρτηση ή «παράγουσα» συνάρτηση της $f(x)$, και είναι γνωστή κατά προσέγγιση μιας αυθαίρετης σταθεράς.

Στο γράφημα που ακολουθεί προσπαθούμε να προσεγγίσουμε γραφικά την αρχική συνάρτηση $F(x)$ μιας δοσμένης $F'(x)$.



Εικόνα 4.1 *Δίνεται η παράγωγος (μαύρη συνεχής καμπύλη) και προσεγγίζουμε γραφικά την αρχική συνάρτηση. Αν θυμηθούμε πως η παράγωγος είναι μια νέα συνάρτηση που δίνει τις κλίσεις της αρχικής της, αντιλαμβανόμαστε πως υπάρχει μία απειρία συναρτήσεων, που έχουν την ίδια κλίση σε κάθε σημείο του κοινού πεδίου ορισμού, διαφέροντας μεταξύτους κατά μία αθροιστική σταθερή ποσότητα.*

Παρατηρήσεις:

1. Από τα θεωρήματα των παραγώγων γνωρίζουμε πως το πρόσημο της παραγώγου αποκαλύπτει την μονοτονία της αρχικής συνάρτησης, ενώ οι ρίζες της παραγώγου είναι τα σημεία στάσης (πιθανά ακρότατα) της αρχικής. Επομένως, έχουμε πως η αρχική συνάρτηση είναι:
   - Αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1)$ (όπου η *F'(x)* είναι θετική),
   - φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0)$ (όπου η *F'(x)* είναι αρνητική),
   - αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$ (όπου η *F'(x)* είναι θετική),
   - φθίνουσα στο διάστημα $(1,3)$ (όπου η *F'(x)* είναι αρνητική),
   - αύξουσα στο διάστημα $(3,\infty)$ (όπου η *F'(x)* είναι θετική).

   ενώ,

   - έχει τοπικό μέγιστο στα σημεία: x=-1, x=1,
   - έχει τοπικό ελάχιστο στα σημεία: x=0 και x=3.
2. Αν ξεκινήσουμε να χαράσσουμε το γράφημα της *F(x)* από το σημείο (-2,-5), πράγμα που είναι εντελώς αυθαίρετο, θα χαράξουμε την καμπύλη της $F_1(x)$ (μπλε καμπύλη). Αν ξεκινήσουμε από το σημείο (-2,+5), επίσης αυθαίρετα, θα χαράξουμε την καμπύλη της $F_2(x)$ (μπλε καμπύλη), ενώ αν ξεκινήσουμε από το σημείο (-2,+51), εξίσου αυθαίρετα, θα χαράξουμε την καμπύλη της $F_3(x)$ (πράσινη καμπύλη).
3. Οι τρείς αυτές καμπύλες, όπως και άπειρες άλλες, έχουν την ίδια κλίση σε κάθε x του πεδίου ορισμού, και αυτή είναι η γεωμετρική ερμηνεία για την παρουσία της αυθαίρετης σταθεράς c, σε κάθε αποτέλεσμα της αόριστης ολοκλήρωσης.

4.1.2 Βασικές ιδιότητες και τύποι των αόριστων ολοκληρωμάτων

Πολλές από τις ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων έχουν άμεση σχέση με αντίστοιχες ιδιότητες των παραγώγων.

1. Ο συμβολισμός $\int f(x)dx = F(x)+c$ δηλώνει πως το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης *f(x)* είναι η *F(x)* (κατά προσέγγιση μιας αυθαίρετης σταθεράς). Αντίστροφα, δηλώνει πως «εάν παραγωγισθεί η συνάρτηση *F(x)*, δίνει την συνάρτηση *f(x)* (που ολοκληρώνεται)».
2. $\int 1dx = x+c \quad \text{και} \quad \int kdx = kx+c \quad \text{αν } k\in R$
3. $$\left.\begin{array}{l} \int [f_1\ x \pm f_2\ x]dx = \int f_1\ x\,dx \pm \int f_2\ x\,dx \\ \int af\ x\,dx = a\int f\ x\,dx \qquad \text{για } a\in R \end{array}\right| \Rightarrow \int [af_1\ x \pm bf_2\ x]dx = a\int f_1\ x\,dx \pm b\int f_2\ x\,dx$$
   $$\text{για } a,b\in R$$

   όπου η 3η ιδιότητα, που αναφέρεται στη γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων, προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα των παραγώγων:

   $$\frac{d}{dx}[af_1\ x \pm bf_2\ x] = a\frac{d}{dx}[f_1\ x] \pm b\frac{d}{dx}[f_2\ x] \quad \text{για } a,b\in R$$
4. $$\int x^{\nu}dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+c \qquad \text{για} \quad \nu\in R-\ -1$$

   όπου η 4η ιδιότητα προκύπτει από την αντίστοιχη σχέση των παραγώγων:

$$\left[x^{\nu+1}\right]' = \ \nu+1 \ x^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\nu+1}\left[x^{\nu+1}\right]' = \left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]' = x^{\nu}$$

5. Για την ιδιαίτερη περίπτωση όπου ν= -1 έχουμε: $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
6. Από τις αντίστοιχες ιδιότητες των παραγώγων προκύπτουν οι παρακάτω τύποι:

$$\int \eta\mu(x)dx = -\sigma\upsilon\nu(x) + c, \qquad \int \sigma\upsilon\nu(x)dx = \eta\mu(x) + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \tau o\xi\eta\mu(x) + c, \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x) + c, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \tau o\xi\varepsilon\phi(x) + c$$

και $\int e^x dx = e^x + c$

7. Και πάλι από τους τύπους της παραγώγισης έχουμε:

$$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi(x) + c \qquad \textbf{διότι} \qquad [\sigma\varphi(x)]' = -\frac{1}{\eta\mu^2(x)}$$

$$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi(x) + c \qquad \textbf{διότι} \qquad [\varepsilon\varphi(x)]' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x)}$$

8. Με όμοιο τρόπο έχουμε

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \qquad \textbf{διότι} \qquad (a^x)' = a^x \ln(a) \ \Rightarrow \ \left(\frac{a^x}{\ln(a)}\right)' = a^x$$

Σημαντική Παρατήρηση:

Συχνά ο αμύητος στην αόριστη ολοκλήρωση εφαρμόζει **μία ιδιότητα η οποία δεν ισχύει** και αφορά στην ολοκλήρωση του γινομένου δύο (ή περισσότερων) συναρτήσεων. Με τη μορφή **αντιιδιότητας** γράφουμε τη σχέση, όπου πρέπει να προσεχθεί το σύμβολο «διάφορο» που συνδέει τα δύο μέλη:

$$\int [f_1 \ x \ f_2 \ x \ ]dx \neq \int f_1 \ x \ dx \int f_2 \ x \ dx$$

Για να το θυμόμαστε, θα αναφερθούμε σε ένα κλασσικό ολοκλήρωμα:

Το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\eta\mu x}{x}dx$$

δεν έχει αναλυτική λύση (δεν υπάρχει συνάρτηση που παραγωγιζόμενη να μας δώσει το κλάσμα ημx/x). Αντίθετα, αν ίσχυε η ιδιότητα του γινομένου, το αποτέλεσμα θα «υπολογίζονταν» εύκολα:

$$= -\sigma\upsilon\nu \ x \ \ln|x| \ \ !!!$$

Να θυμίσουμε, άλλωστε, πως ούτε στην παραγώγιση γινομένου ίσχυε μία ανάλογη σχέση. Αντίθετα είχαμε:

$$[f \ x \ g \ x \ ]' = f' \ x \ g \ x \ + f \ x \ g' \ x \ .$$

Παράδειγμα 1ο:

$$\mathrm{I}=\int\left[3x^2-4x+7\right]dx=3\int x^2dx-4\int xdx+7\int 1dx=3\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+7x+c=x^3-2x^2+7x+c$$

Παράδειγμα 2ο:

$$\mathrm{I}=\int\left[5\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right]dx=5\int x^{1/3}dx+2\int x^{-1/2}dx=5\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=5\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}}+2\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}+c=$$

$$=\frac{15}{4}\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt{x}+c$$

Παράδειγμα 3ο:

$$\mathrm{I}=\int\left[\frac{3}{x}-\frac{5}{4x}\right]dx=3\int\frac{1}{x}dx-\frac{5}{4}\int\frac{1}{x}dx==3\ln|x|-\frac{5}{4}\ln|x|+c$$

Παράδειγμα 4ο:

$$\mathrm{I}=\int\left[\frac{3}{x^3}-\frac{5}{7x^2}\right]dx=3\int\frac{1}{x^3}dx-\frac{5}{7}\int\frac{1}{x^2}dx=3\int x^{-3}dx-\frac{5}{7}\int x^{-2}dx=3\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{5}{7}\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c=$$

$$=-\frac{3}{2}x^{-2}+\frac{5}{7}x^{-1}+c=-\frac{3}{2x^2}+\frac{5}{7x}+c$$

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int\left(\frac{1}{x}+\sigma\upsilon\nu x\right)dx$ **β)** $\int\ 2-\sqrt{x}\ ^{2}dx$ **γ)** $\int\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}dx$

δ) $\int(x^3+x)^2dx$

(Απ: α) lnx+ημx β) 1/6 x (24-16 $\sqrt{x}$ +3 x) γ) 3 x $^{1/3}$ δ) x^3/3+(2 x^5)/5+x^7/7)

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3})dx$ **β)** $\int\frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$ **γ)** $\int\frac{\eta\mu^3x-2}{\eta\mu^2x}dx$

(Απ: α) (3 x $^{4/3}$)/4+(2 x $^{3/2}$)/3+(4 x $^{7/4}$)/7 β) 2 $\sqrt{x}$ +lnx γ) -συνx+2σφx)

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{x\eta\mu x+1}{x}dx$ **β)** $\int\sqrt{x\sqrt{x}}dx$ **γ)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}}$ **δ)** $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2x}}dx$

(Απ: α) -συνx+lnx β) 4/7 x $\sqrt{x^{3/2}}$ γ) 2/9 (-(2+x)$^{3/2}$+(5+x)$^{3/2}$)

δ) (2 $\sqrt{x}$ (-2+$\sqrt{x-2}\sqrt{x}$ +x))/$\sqrt{(x-2)x}$)

Άσκηση: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{\log x}dx$$

Υπόδειξη: Υπάρχει μία ιδιότητα των λογαρίθμων η οποία λέγεται «αλλαγή Βάσης». Ας την δούμε:

$$\log_a x \log_b a = \log_b a^{\log_a x} = \log_b x \quad \Rightarrow \quad \log_a x = \frac{1}{\log_b a}\log_b x$$

Αν την χρησιμοποιήσετε σωστά θα λύσετε εύκολα την άσκηση.

(Απ: ($x^{1+\frac{1}{\ln 10}}$ ln10)/(1+ln10))

4.1.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης: (1) «Παιχνίδια» με το διαφορικό!

Στο κεφάλαιο των παραγώγων παρουσιάστηκε η έννοια του διαφορικού μιας συνάρτησης, μέσω της σχέσης:

$$d\left[f(x)\right]=f'(x)\,dx$$

την οποία «διαβάσαμε» ως εξής: «Το διαφορικό μιας συνάρτησης *f(x)* ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης *f ’(x)* επί το διαφορικό της μεταβλητής της (*x*)», ενώ την ερμηνεύσαμε (γεωμετρικά) με τη φράση: «Η διαφορά της τιμής της συνάρτησης *f(x)*, όταν από το σημείο *x* μεταβαίνουμε στο σημείο *x+dx* ισούται (προσεγγιστικά) με το γινόμενο της τιμής της παραγώγου της *f* στο κεντρικό σημείο (*x*), επί την ποσότητα κατά την οποία μεταβλήθηκε το *x* (το *dx*)».

Επομένως, η παρουσία του διαφορικού d*x* στο εσωτερικό του ολοκληρώματος, κάθε άλλο παρά διακοσμητική είναι. Την ουσία της παρουσίας του θα την αναλύσουμε διεξοδικά στο κεφάλαιο της ορισμένης ολοκλήρωσης. Προς το παρόν θα αρκεστούμε στα εξής:

1. Το διαφορικό της μεταβλητής που υπάρχει στο εσωτερικό ενός ολοκληρώματος έχει όλη την αξία και τις ιδιότητες του διαφορικού.
2. Ότι υπάρχει στο εσωτερικό του διαφορικού θεωρείται από το ολοκλήρωμα σαν η «μεταβλητή ολοκλήρωσης», ενώ οποιαδήποτε άλλη παράμετρος θεωρείται σταθερή.

Τώρα μπορούμε να αναφερθούμε σε μία βασική ιδιότητα της ολοκλήρωσης, σύμφωνα με την οποία: «η πράξη της ολοκλήρωσης είναι αντίστροφη της πράξης της διαφόρισης». Επομένως, όπου η μία πράξη συναντά την άλλη, αλληλοαναιρούνται. Αυτή η ιδιότητα εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$\int df(x) = f(x) + c$$

της οποίας η απόδειξη είναι απλούστατη και στηρίζεται στην σχέση του διαφορικού:

$$\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον προφανή συλλογισμό, πως το ολοκλήρωμα της παραγώγου της *f’(x)* είναι η ίδια η *f(x)*.

Ξαναγυρνώντας στη σχέση του διαφορικού

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx \quad \text{και} \quad f'(x)\,dx = d\,f(x)$$

καταλήγουμε στα εξής δύο πρακτικά συμπεράσματα:

1^{o}: «Όταν μία συνάρτηση βρίσκεται μέσα στο διαφορικό, βγαίνοντας παραγωγίζεται, ενώ στη θέση της (μέσα στο διαφορικό) εμφανίζεται η μεταβλητή της».

2ο: «Για να εισάγουμε στο εσωτερικό ενός διαφορικού μία συνάρτηση που το πολλαπλασιάζει, αντικαθιστούμε την μεταβλητή του διαφορικού με το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης (ως προς την εν λόγω μεταβλητή)»

Εξαγωγή από το διαφορικό	Εισαγωγή στο διαφορικό
$d\left(x^2+c\right) = \left(x^2+c\right)'dx = 2xdx$	$2xdx = d\left(\int 2xdx\right) = d\left(x^2+c\right)$
$d\left(\eta\mu(x)\right) = \left(\eta\mu(x)\right)'dx = \sigma\upsilon\nu(x)dx$	$\sigma\upsilon\nu(x)dx = d\left(\int \sigma\upsilon\nu(x)dx\right) = d\left(\eta\mu(x)+c\right)$
$d\ln(x) = \left(\ln(x)\right)'dx = \frac{1}{x}dx$	$\frac{1}{x}dx = d\left(\int \frac{1}{x}dx\right) = d\left(\ln(x)+c\right)$

Στη συνέχεια θα συστηματοποιήσουμε τις προηγούμενες απλές σχέσεις με το διαφορικό, ως προς το πώς χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση ενός ολοκληρώματος:

Α. $d(x+c) = (x+c)'dx = dx$, δηλαδή στο εσωτερικό του διαφορικού μπορούμε να προσθέσουμε μια οποιαδήποτε σταθερά (και βεβαίως θα επιλέξουμε αυτή που μας ενδιαφέρει).

□

Παράδειγμα 1ο:

$$\mathrm{I} = \int (x-10)^5 dx = \begin{bmatrix} \text{Προσθετουμε στο διαφορικο} \\ \text{την (βολικη) σταθερα } -10 \end{bmatrix} = \int (x-10)^5 d(x-10) = \int t^5 dt =$$

$$= \frac{t^6}{6} + c = \frac{(x-10)^6}{6} + c$$

όπου, από τη στιγμή που (μετά την πρόσθεση του -10 στο διαφορικό) η νέα μεταβλητή του ολοκληρώματος ήταν το (*x-10*), μετονομάσαμε το *x-10=t*.

□

Παράδειγμα 2ο:

Όμοια έχουμε: $\mathrm{I} = \int \frac{3}{x-5}dx = 3\int \frac{1}{x-5}d(x-5) = 3\int \frac{1}{t}d(t) = 3\ln|t| + c = 3\ln|x-5| + c$

□

Παράδειγμα 3ο:

$$I = \int \frac{3}{(x+5)^3}dx = \int \frac{3}{(x+5)^3}d(x+5) = \int \frac{3}{t^3}dt = 3\int t^{-3}dt = 3\frac{t^{-2}}{-2} + c = -\frac{3}{2t^2} + c = -\frac{3}{2(x+5)^2} + c$$

□

Παράδειγμα 4ο:

$$\mathrm{I} = \int \eta\mu(x+17)dx = \int \eta\mu(x+17)d(x+17) = \int \eta\mu(t)dt = -\sigma\upsilon\nu(t) + c = -\sigma\upsilon\nu(x+17) + c$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \; x-10 \;^{5} dx$ β) $\int \frac{3}{x-10 \;^{5}} dx$ γ) $\int \; e^{x+1}+\sqrt{x} \; dx$

(Απ: α) 1/6 (-10+x)^{6} β) -3/(4 (-10+x)^{4}) γ) e $^{1+x}$+(2 x $^{3/2}$)/3)

□

Β. $d \;\; kx \;\; = \;\; kx \;\, 'dx = kdx$ και γενικότερα $kdx = d \;\; \int kdx \;\; = d \;\; kx + c$, πράγμα που σημαίνει πως μία σταθερή ποσότητα k που πολλαπλασιάζει το διαφορικό «φαίνεται να μπαινοβγαίνει» στο διαφορικό.

□

Παράδειγμα 1^{ο}:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int \text{ημ} \;\; 5x-2 \;\; dx = \frac{5}{5}\int \text{ημ} \;\; 5x-2 \;\; dx = \frac{1}{5}\int \text{ημ} \;\; 5x-2 \;\; 5dx = \frac{1}{5}\int \text{ημ} \;\; 5x-2 \;\; d \;\; 5x \;\; = \\ &= \frac{1}{5}\int \text{ημ} \;\; 5x-2 \;\; d \;\; 5x-2 \;\; = \frac{1}{5}\int \text{ημ} \;\; t \;\; d \;\; t \;\; = -\frac{1}{5}\text{συν} \;\; t \;\; + c = \\ &= -\frac{1}{5}\text{συν} \;\; 5x-2 \;\; + c \end{aligned}$$

όπου, επειδή χρειαζόμασταν έναν συντελεστή του dx ίσο με το 5, πολλαπλασιάσαμε και διαιρέσαμε το ολοκλήρωμα με το 5, μετακινώντας τον αριθμητή μέσα στο ολοκλήρωμα και από εκεί, μέσα στο διαφορικό. Παρόμοιος είναι και ο τρόπος λειτουργίας και στα επόμενα δύο παραδείγματα.

□

Παράδειγμα 2^{ο}:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int \frac{k}{lx+m}dx = \frac{l}{l}\int \frac{k}{lx+m}dx = \frac{1}{l}\int \frac{k}{lx+m}ldx = \frac{1}{l}\int \frac{k}{lx+m}d\left(lx+m\right) = \frac{k}{l}\int \frac{1}{t}dt = \\ &= \frac{k}{l}\ln|t| + c = \frac{k}{l}\ln|lx+m| + c \end{aligned}$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει πως το ολοκλήρωμα ενός κλάσματος

- με αριθμητή μία σταθερά (πολυωνυμική συνάρτηση μηδενικού βαθμού) και
- παρονομαστή μια πρωτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση

είναι ίσο με τον λογάριθμο του παρονομαστή, πολλαπλασιασμένο με ένα κλάσμα, του οποίου ο αριθμητής είναι ίσος με τον αριθμητή της συνάρτησης που ολοκληρώνεται, ενώ ο παρονομαστής είναι ο συντελεστής του x.

Στο επόμενο παράδειγμα εμφανίζεται μια τεχνική η οποία θα γενικευτεί στην παράγραφο που αφορά στην ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

□

Παράδειγμα 3^{ο}:

$$\mathrm{I}=\int \frac{x-3}{5x+2}dx=\frac{5}{5}\int \frac{x-3}{5x+2}dx=\frac{1}{5}\int 5\frac{x-3}{5x+2}dx=\frac{1}{5}\int \frac{5x-15}{5x+2}dx=\frac{1}{5}\int \frac{5x+2-17}{5x+2}dx=$$
$$=\frac{1}{5}\int \left[\frac{5x+2}{5x+2}-\frac{17}{5x+2}\right]dx=\frac{1}{5}\int 1dx-\frac{1}{5}\int \left[\frac{17}{5x+2}\right]dx=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}\frac{5}{5}\int \left[\frac{17}{5x+2}\right]dx=$$
$$=\frac{1}{5}x-\frac{1}{25}\int \left[\frac{17}{5x+2}\right]5dx=\frac{1}{5}x-\frac{17}{25}\int \left[\frac{1}{5x+2}\right]d\left(5x+2\right)=\frac{1}{5}x-\frac{17}{25}\ln\left|5x+2\right|+c$$

□

Παράδειγμα 4^{o}:

$$\mathrm{I}=\int \left(e^{-\frac{1}{5}x+2}\right)dx=\frac{-5}{-5}\int \left(e^{-\frac{1}{5}x+2}\right)dx=-5\int \left(e^{-\frac{1}{5}x+2}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)dx=-5\int \left(e^{-\frac{1}{5}x+2}\right)d\left(-\frac{1}{5}x+2\right)=$$
$$=-5\int e^{t}\,dt=-5e^{t}+c=-5e^{-\frac{1}{5}x+2}+c$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int 5e^{3x-2}dx$ **β)** $\int (\sigma\upsilon\nu 7x+e^{-x})\,dx$ **γ)** $\int 2\eta\mu(5x+\frac{\pi}{3})dx$

δ) $\int \frac{1}{3x+6}dx$ **ε)** $\int (4x-10)^{8}\,dx$ **στ)** $\int \frac{3}{(6x-17)^{9}}dx$

(Απ: α) 5/3 e^{-2+3x} β) -e^{-x}+1/7 ημ7x γ) -(2/5) ημ[π/6-5x]
δ) 1/3 ln[3 (2+x)] ε) 128/9 (-5+2 x)^{9} στ) -1/(16 (17-6 x)^{8}))

□

C. Γενικεύουμε την μέθοδο αυτή, εισάγοντας στο διαφορικό βολικά τμήματα της συνάρτησης που ολοκληρώνεται.

□

Παράδειγμα 1^{o}:

$$\mathrm{I}=\int x^{2}\eta\mu(x^{3})\,dx=\int \left[\eta\mu(x^{3})\right]d\left(\int x^{2}dx\right)=\int \left[\eta\mu(x^{3})\right]d\left(\frac{x^{3}}{3}\right)=\frac{1}{3}\int \left[\eta\mu(x^{3})\right]d(x^{3})=$$
$$=\frac{1}{3}\int \left[\eta\mu(t)\right]dt=-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu(t)+c=-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu(x^{3})+c$$

όπου θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε αυτή τη διαδικασία επίλυσης, στην περίπτωση όπου το πολυωνυμικό μονώνυμο έχει εκθέτη κατά μία μονάδα μικρότερο από το μονώνυμο που υπάρχει μέσα στην συνάρτηση ημ(x), συν(x), e^{x} κ.λ.π.. Δηλαδή αν είναι της μορφής:

$$\int x^{n-1}f(x^{n})\,dx=\int f(x^{n})\,d\left(\frac{x^{n}}{n}\right)=\frac{1}{n}\int f(x^{n})\,dx^{n}=\frac{1}{n}\int f(t)\,dt$$

□

Παράδειγμα 3^{o}: Στο παράδειγμα αυτό, όπως και στα επόμενα δύο, θα αντιμετωπίσουμε συναρτήσεις κλασματικές στις οποίες θα μετατρέψουμε το κλάσμα σε γινόμενο σύμφωνα με το σχήμα:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\frac{1}{\beta}\right)$$

εισάγοντας στο διαφορικό αυτό που μας βολεύει.

$$\mathrm{I}=\int \varepsilon\varphi\ x\ dx=\int \frac{\eta\mu\ x}{\sigma\upsilon\nu\ x}dx=\int \eta\mu\ x\ \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\ x}dx=\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\ x}d\ -\sigma\upsilon\nu\ x\ =$$

$$=-\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\ x}d\ \sigma\upsilon\nu\ x\ =-\ln\left|\sigma\upsilon\nu\ x\ \right|+c$$

□

Παράδειγμα 4ο:

$$\mathrm{I}=\int \frac{\ln^2\ x}{9x}dx=\frac{1}{9}\int \ln^2\ x\ \frac{1}{x}dx=\frac{1}{9}\int \ln^2\ x\ d\ \ln\ x\ =\frac{1}{9}\int t^2dt=\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}+c=$$

$$=\frac{1}{27}t^3+c=\frac{1}{27}\ln^3\ x\ +c$$

□

Παράδειγμα 5ο:

$$\mathrm{I}=\int \frac{\mathrm{To\xi\eta\mu}\ x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \mathrm{To\xi\eta\mu}\ x\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \mathrm{To\xi\eta\mu}\ x\ d\ \mathrm{To\xi\eta\mu}\ x\ =\int tdt=\frac{1}{2}t^2+c=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{To\xi\eta\mu}^2\ x\ +c$$

□

Παράδειγμα 6ο:

Στο τρέχον παράδειγμα, όπως και στο επόμενο, θα ολοκληρώσουμε γινόμενα των συναρτήσεων ημ(x) και συν(x), εκ των οποίων, τουλάχιστον το ένα θα είναι υψωμένο σε περιττό εκθέτη. Τότε, επιλέγουμε το «ένα από τα μονά» και το εισάγουμε στο διαφορικό. Ας το δούμε:

$$\mathrm{I}=\int \eta\mu^2\ x\ \sigma\upsilon\nu^3\ x\ dx=\int \eta\mu^2\ x\ \sigma\upsilon\nu^2\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ dx=\int \eta\mu^2\ x\ \sigma\upsilon\nu^2\ x\ d\eta\mu\ x\ =\ldots$$

Στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε πως το ολοκλήρωμα «βλέπει», τώρα, σαν μεταβλητή το ημ(x). Άρα, για να μην θεωρηθεί η συνάρτηση συν(x) σαν μία σταθερή ποσότητα, πρέπει να εκφραστεί με τη βοήθεια του ημιτόνου, προφανώς με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης:

$$\eta\mu^2\ x\ +\sigma\upsilon\nu^2\ x\ =1 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\eta\mu^2\ x\ =1-\sigma\upsilon\nu^2\ x\\ \sigma\upsilon\nu^2\ x\ =1-\eta\mu^2\ x\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\eta\mu\ x\ =\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\ x}\\ \sigma\upsilon\nu\ x\ =\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\ x}\end{array}\right.$$

την οποία χρησιμοποιούμε στη συνέχεια:

$$\ldots=\int \eta\mu^2\ x\ \ 1-\eta\mu^2\ x\ \ d\eta\mu\ x\ =\int t^2\ \ 1-t^2\ \ dt=\int\ t^2-t^4\ \ dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c=$$

$$=\frac{1}{3}\eta\mu^3\ x\ -\frac{1}{5}\eta\mu^5\ x\ +c$$

□

Παράδειγμα 7ο:

$$I=\int \sigma\upsilon\nu^5 x\, dx=\int \sigma\upsilon\nu^4 x\ \sigma\upsilon\nu x\, dx=\int \sigma\upsilon\nu^4 x\, d\eta\mu x=\int \left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^2 d\eta\mu x=$$

$$=\int \left(1-\eta\mu^2 x\right)^2 d\eta\mu x=\int \left(1-t^2\right)^2 dt=\int \left(1-2t^2+t^4\right) dt=$$

$$=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+c=\eta\mu x-\frac{2}{3}\eta\mu^3 x+\frac{1}{5}\eta\mu^5 x+c$$

□

Ασκήσεις εμπέδωσης: Να λυθούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

$I=\int x^2\sigma\upsilon\nu\left(1-x^3\right) dx$, $I=\int \frac{x^2}{e^{x^3}}dx$, $I=\int \sigma\varphi x\, dx$, $I=\int x\sigma\varphi\left(x^2\right) dx$, $I=\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$,

$I=\int \sigma\upsilon\nu x \ln\left|\eta\mu x\right| dx$, $I=\int \frac{\text{Τοξεφ}\, x}{1+x^2}dx$, $I=\int \eta\mu^3 x\ \sigma\upsilon\nu^3 x\, dx$, $I=\int \frac{2x}{x^2+2}dx$,

$I=\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, $I=\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$, $I=\int f'(x)\,\eta\mu\left(f(x)\right) dx$, $I=\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{x^3+x}$ **β)** $\int \frac{xdx}{(x+4)^2}$

(Απ: α) lnx-1/2 ln[1+x²] β) 4/(4+x)+ln[4+x])

4.1.4 Μέθοδοι ολοκλήρωσης: (2) Μέθοδος της Αντικατάστασης

Η μέθοδος της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση έρχεται να θεωρητικοποιήσει και να γενικεύσει την προηγούμενη μέθοδο, των «παιχνιδιών με το διαφορικό», η οποία άλλωστε δεν είναι παρά μια ιδιαίτερη περίπτωση αντικατάστασης.

Στην μέθοδο της αντικατάστασης αντικαθιστούμε ένα τμήμα της συνάρτησης που ολοκληρώνεται με μία άλλη μεταβλητή. Υποθέτουμε, λοιπόν, πως η αντικατάσταση ορίζεται με τη σχέση:

$g(x)=t$ η οποία μπορεί να αντιστραφεί: $x=g^{-1}(t)$

Στη συνέχεια πρέπει στο ολοκλήρωμα να αντικατασταθούν:

- όλα τα x με το t, και
- το $dx=d\left(g^{-1}(t)\right)=g^{-1}{}'(t)\, dt$

Όλα αυτά πρέπει να μας οδηγήσουν σε ένα ολοκλήρωμα που να λύνεται ευκολότερα. Αξίζει να παρατηρήσουμε πως συχνά δεν είναι απαραίτητο να αντικαταστήσουμε, στη συνάρτηση που ολοκληρώνεται, το σύνολο της παλιάς ανεξάρτητης μεταβλητής, επειδή προκύπτουν απλοποιήσεις… Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα που θα μπορούσε να λυθεί και με την μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου.

□

Παράδειγμα 1ο:

$$\mathrm{I}=\int x^2 e^{-2x^3}dx=\ldots\begin{bmatrix}\text{Θετουμε } t=-2x^3 \;\Rightarrow\\ x=\sqrt[3]{-\dfrac{t}{2}}\\ dt=d\;\;-2x^3\;\;=-6x^2dx\Rightarrow\\ dx=-\dfrac{1}{6x^2}dt\end{bmatrix}\ldots=\int x^2e^t\left(-\frac{1}{6x^2}dt\right)=-\frac{1}{6}\int\left(x^2e^t\frac{1}{x^2}\right)dt=\ldots$$

όπου παρατηρούμε πως στο εσωτερικό του ολοκληρώματος συνυπάρχουν η παλιά μεταβλητή (*x*) και η νέα (*t*), γεγονός που είναι μη επιτρεπτό. Δεν μας ενοχλεί όμως, διότι συμβαίνει στιγμιαία, μια και η απλοποίηση θα το επιλύσει:

$$\ldots=-\frac{1}{6}\int\;e^t\;\;dt=-\frac{1}{6}e^t+c=-\frac{1}{6}e^{-2x^3}+c$$

□

Παράδειγμα 2ο:

$$\mathrm{I}=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\ldots$$

Αγνοώντας πως το ολοκλήρωμα αυτό αποτελεί τύπο με γνωστό αποτέλεσμα, σκεφτόμαστε ως εξής (μια και συναντούμε συχνά ολοκληρώματα με παρόμοια υπόρριζη ποσότητα και συνήθως επιχειρούμε την ίδια αντικατάσταση): Η συνάρτηση που ολοκληρώνεται έχει πεδίο ορισμού το διάστημα: (-1,1) (όπου παίρνει πραγματικές τιμές). Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στην υιοθέτηση της αντικατάστασης του *x* με το ημ*t*.

$$\ldots=\ldots\begin{bmatrix}\text{Θετουμε } x=\text{ημ}\;\;t\;\;\Rightarrow\\ t=\text{Τοξημ}\;\;x\\ dx=d\;\;\text{ημ}\;\;t\;\;=\text{συν}\;\;t\;\;dt\end{bmatrix}\ldots=\int\frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2\;\;t}}\text{συν}\;\;t\;\;dt=\int\frac{1}{\text{συν}\;\;t}\text{συν}\;\;t\;\;dt=\int 1dt=$$

$$=t+c=\text{Τοξημ}\;\;x\;\;+c$$

□

Παράδειγμα 3ο:

$$\mathrm{I}=\int\frac{4}{\sqrt{3-5x^2}}dx=\ldots.$$

Η μορφή της συνάρτησης που ολοκληρώνεται μας οδηγεί σε αποτέλεσμα της μορφής Τόξου ημιτόνου. Για τον λόγο αυτό προσπαθούμε να φτάσουμε σε μία υπόρριζη ποσότητα της μορφής $1\text{-}t^2$. Ας προσπαθήσουμε να το φέρουμε στη μορφή αυτή…

$$\ldots = \int \frac{4}{\sqrt{3-5x^2}}dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{3\left(1-\frac{5}{3}x^2\right)}}dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)^2\right)}}dx = \ldots \begin{bmatrix} \Theta\varepsilon\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ t=\sqrt{\frac{5}{3}}x \ \Rightarrow \\ x=\sqrt{\frac{3}{5}}t \ \Rightarrow \\ dx=\sqrt{\frac{3}{5}}dt \end{bmatrix} \ldots =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sqrt{\frac{3}{5}}dt = \frac{4}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{4}{\sqrt{5}}\tau o\xi\eta\mu\ t + c = \frac{4}{\sqrt{5}}\tau o\xi\eta\mu\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)+c$$

□

Παράδειγμα 4ο:

Ένα αντίστοιχο ολοκλήρωμα, που με ανάλογο τρόπο οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα της μορφής Τόξου εφαπτομένης (όπου ο παρονομαστής πρέπει να πάρει τη μορφή $1+t^2$), είναι και το επόμενο:

$$\mathrm{I} = \int \frac{5}{2+7x^2}dx = 5\int \frac{1}{2\left(1+\frac{7}{2}x^2\right)}dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(1+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}x\right)^2\right)}dx = \ldots \begin{bmatrix} \Theta\varepsilon\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ t=\sqrt{\frac{7}{2}}x \ \Rightarrow \\ x=\sqrt{\frac{2}{7}}t \ \Rightarrow \\ dx=\sqrt{\frac{2}{7}}dt \end{bmatrix} \ldots =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\sqrt{\frac{2}{7}}dt = \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{7}}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{5}{\sqrt{14}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t + c = \frac{5}{\sqrt{14}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{7}{2}}x\right)+c$$

□

Άσκηση: Να λύσετε τα επόμενα δύο ολοκληρώματα, ακολουθώντας την μέθοδο των παραπάνω παραδειγμάτων.

$$\mathrm{I} = \int \frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\gamma x^2}}dx \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{I} = \int \frac{\alpha}{\beta+\gamma x^2}dx$$

(Απ: α) $\dfrac{\alpha\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\sqrt{\gamma}x}{\sqrt{\beta-\gamma x^2}}\right)}{\sqrt{\gamma}}$ **β)** $\dfrac{\alpha\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\sqrt{\gamma}x}{\sqrt{\beta}}\right)}{\sqrt{\beta\gamma}}$ **)**

Άσκηση: Να λυθούν τα επόμενα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\mathrm{I} = \int \left(\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx, \qquad \mathrm{I} = \int \left(e^{-\frac{2}{5}x}\right)dx, \qquad \mathrm{I} = \int \left(\frac{e^{\ln x}}{x}\right)dx$$

(Απ: α) $4\sqrt{2+x^2}$ **β)** $-\dfrac{5}{2}e^{-2x/5}$ **γ) x)**

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \pi^{x\sqrt{2}}dx$ **β)** $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **γ)** $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}dx$

δ) $\int \frac{3}{\sqrt{x}\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{x}}dx$ **ε)** $\int \eta\mu^5 x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$ **στ)** $\int \frac{2}{x\sqrt[3]{1+\ln x}^5}dx$

(Απ: α) $\pi^{\sqrt{2}\pi}$ **x β)** $2^{1+\sqrt{x}}$ **/ln2 γ) ημ(lnx) δ) 6εφ** $\sqrt{x}$ **ε) ημ^{6}x/6 στ)** $-\frac{3}{(1+\ln x)^{2/3}}$ **)**

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int 3\eta\mu x\cdot\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)dx$ **β)** $\int \frac{dx}{x\sigma\upsilon\nu^2(\ln x)}$ **γ)** $\int (\sqrt{2})^{\sqrt{3x}}dx$

δ) $\int e^{x+e^x}dx$ **ε)** $\int e^{2^x+x\ln 2}dx$ **στ)** $\int \frac{1}{x}3^{\ln x}dx$

ζ) $\int \frac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{x^2}dx$

(Απ: α) 3συν(συνx) β) εφ(lnx) γ) $\frac{2^{1+\frac{\sqrt{3x}}{2}}}{\sqrt{3}\ln 2}$ **δ)** e^{e^x} **ε)** $\frac{e^{2^x}}{\ln 2}$ **στ)** $\frac{3^{\ln x}}{\ln 3}$ **ζ) συν(π/x)/π)**

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}dx$ **β)** $\int \frac{(1-x)e^{-x}}{1-xe^{-x}}dx$ **γ)** $\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}dx$ **δ)** $\int \frac{dx}{x+x\ln x}$

ε) $\int \frac{\ln x}{x\ln^2 x+x}dx$ **στ)** $\int \frac{\ln^2 x}{x\ln^3 x+x}dx$ **ζ)** $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx$ **η)** $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx$

(Απ: α) x-ln[2 (1+e^{2x})] β) x-ln(e^x-x] γ) lnx+ln(lnx) δ) ln(1+lnx)
ε) 1/2 ln[1+(lnx)^2] στ) 1/3 ln[1+(lnx)^3] ζ) –[1/(1+e^x)] η) 4/21 (1+e^x)$^{3/4}$ (-4+3e^x))

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sqrt{1+\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$ **β)** $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$ **γ)** $\int \sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{x}}dx$

(Απ: α) (2/3) (συν[x/2]+ημ[x/2])^2 $\sqrt{1+\eta\mu x}$ **β) -(2/3) (1+1/x)$^{3/2}$ γ) 4/3 ((2+**$\sqrt{x}$ **)/x)$^{3/2}$ x$^{3/2}$)**

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sigma\phi x\cdot\ln(\eta\mu x)dx$ **β)** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$ **γ)** $\int \frac{\varepsilon\phi x}{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}dx$ **δ)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\varepsilon\phi(\sqrt{x})}$

ε) $\int \frac{4\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{5+3\eta\mu x}dx$

(Απ: α) ½ $(\ln(\eta\mu x)^2$) β) 1/2 $\ln[\ln x]^2$ γ) $-\ln(\ln(\sigma\upsilon\nu x))$ δ) 2 $(\ln(\eta\mu\sqrt{x}$) ε) 3 $\ln[5+3\ \eta\mu x]-\eta\mu x$)

4.1.5 Μέθοδοι ολοκλήρωσης: (3) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Όπως ειπώθηκε ήδη, το ολοκλήρωμα ενός γινομένου συναρτήσεων δεν είναι ίσο με το γινόμενο των ολοκληρωμάτων των δύο αυτών συναρτήσεων. Άλλωστε, ένας αντίστοιχος τύπος δεν ίσχυε ούτε για την παραγώγιση του γινομένου δύο συναρτήσεων. Από τον τύπο αυτό (της παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων) θα ξεκινήσουμε την παρούσα παράγραφο:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)=f(x)\frac{dg(x)}{dx}+g(x)\frac{df(x)}{dx}$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση αυτή επί το dx, έχουμε την ισότητα:

$$d\left(f(x)g(x)\right)=f(x)dg(x)+g(x)df(x)$$

την οποία, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, φθάνουμε στον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int d\left(f(x)g(x)\right)=\int f(x)dg(x)+\int g(x)df(x) \quad \Rightarrow$$

$$f(x)g(x)=\int f(x)dg(x)+\int g(x)df(x) \quad \Rightarrow$$

οπότε

$$\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x)$$

όπου εφαρμόσαμε τη γνωστή ιδιότητα των ολοκληρωμάτων:

$$\int df(x)=f(x)+c$$

Ο τύπος στον οποίο καταλήξαμε θα μπορούσε να γραφεί και υπό τη μορφή:

$$\int f(x)\left[g(x)\right]'dx=f(x)g(x)-\int g(x)\left[f(x)\right]'dx$$

Βέβαια προκύπτει η απορία για το πώς βρέθηκε η συνάρτηση *g(x)* μέσα στο διαφορικό του ολοκληρώματος (ή μέσα στην αγκύλη που παραγωγίζεται). Η απάντηση είναι απλή: Το αρχικό ολοκλήρωμα περιείχε το γινόμενο της *f* με την παράγωγο της *g*, η οποία ολοκληρώθηκε μπαίνοντας στο διαφορικό (ή αντίστοιχα στην αγκύλη που παραγωγίζεται). Αυτό γίνεται αντιληπτό με το επόμενο παράδειγμα:

$$\int x^2e^{3x}dx=\begin{bmatrix}\displaystyle\int e^{3x}d\left[\frac{x^3}{3}\right]\\ \displaystyle\int x^2d\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\displaystyle\int e^{3x}\left[\frac{x^3}{3}\right]'dx\\ \displaystyle\int x^2\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]'dx\end{bmatrix}$$

Το επόμενο ερώτημα αφορά στο ποια από τις δύο συναρτήσεις του γινομένου, στο εσωτερικό του ολοκληρώματος, θα επιλεγεί για να ολοκληρωθεί και να μπει μέσα στο διαφορικό. Ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις:

- Εάν η πρώτη συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ενώ η δεύτερη είναι μία από τις ημ(kx), συν(kx) και e^{kx}, τότε ολοκληρώνουμε και τοποθετούμε στο διαφορικό τις τριγωνομετρικές ή την εκθετική συνάρτηση, δηλαδή, τη συνάρτηση που δεν ανεβάζει τον εκθέτη της όταν ολοκληρώνεται.

- Εάν η πρώτη συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ενώ η δεύτερη είναι λογαριθμική, τότε ολοκληρώνουμε και τοποθετούμε στο διαφορικό την πολυωνυμική συνάρτηση.

□

Παράδειγμα 1ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int \ln\ x\ dx$

$$\mathrm{I}=\int \ln(x)dx = x\ln(x)-\int xd\left(\ln(x)\right) = x\ln(x)-\int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x)-\int 1dx = x\ln(x)-x+c$$

$$= x\left(\ln(x)-1\right)+c$$

□

Παράδειγμα 2ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int x^2e^xdx$

$$\mathrm{I}=\int x^2e^xdx=\int x^2de^x = x^2e^x-\int e^xdx^2 = x^2e^x-\int 2xe^xdx = \ldots$$

Παρατηρούμε πως

(α) Η διαδικασία της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, ολοκληρώνεται με την έξοδο της συνάρτησης από το διαφορικό, αφού, φυσικά, παραγωγισθεί.

(β) Με τον τρόπο αυτό, η πολυωνυμική συνάρτηση μειώνει κατά μία μονάδα το βαθμό της. Επομένως, θα απαιτηθεί να επαναλάβουμε την διαδικασία της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, τόσες φορές, όσος είναι ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης. Συνεχίζουμε λοιπόν…

$$\ldots = x^2e^x-\int 2xde^x = x^2e^x-2xe^x+\int e^xd2x = x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx =$$

$$= x^2e^x-2xe^x+2e^x+c = e^x\ \ x^2-2x+2\ \ +c$$

□

Παράδειγμα 3ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int x^2\text{ημ}\ \ 3x-7\ \ dx$

Σαν άσκηση ας δείξει ο αναγνώστης τα αποτελέσματα των δύο επόμενων ολοκληρωμάτων, που θα χρειαστούν κατά τη λύση του παραδείγματος αυτού:

$$\mathrm{I}_1=\int \text{ημ}\ \ 3x-7\ \ dx=-\frac{1}{3}\text{συν}\ \ 3x-7\ \ +c \qquad \text{και}$$

$$\mathrm{I}_2=\int \text{συν}\ \ 3x-7\ \ dx=\frac{1}{3}\text{ημ}\ \ 3x-7\ \ +c$$

… και η λύση του παραδείγματος:

$$\mathrm{I}=\int x^2\eta\mu\,(3x-7)\,dx=\int x^2 d\left(-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)\right)=-\frac{1}{3}x^2\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)-\int\left(-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)\right)dx^2=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)+\frac{2}{3}\int x\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)\,dx=-\frac{1}{3}x^2\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)+\frac{2}{3}\int xd\left(\frac{1}{3}\eta\mu\,(3x-7)\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)+\frac{2}{9}x\eta\mu\,(3x-7)-\frac{2}{9}\int\eta\mu\,(3x-7)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)+\frac{2}{9}x\eta\mu\,(3x-7)-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)\right)+c=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)+\frac{2}{9}x\eta\mu\,(3x-7)+\frac{2}{27}\sigma\upsilon\nu\,(3x-7)+c$$

□

Παράδειγμα 4ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int e^x\eta\mu\,(x)\,dx$

Το πολύ γνωστό αυτό ολοκλήρωμα ανήκει σε μία ομάδα ολοκληρωμάτων που λύνονται με την ίδια μέθοδο: Εφαρμόζουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες τόσες φορές (συνήθως δύο) έτσι ώστε να καταλήξουμε σε ένα ίδιο ολοκλήρωμα, έτσι ώστε να φτάσουμε σε μια ισότητα της μορφής I=*g(x)*+kI (όπου I το ολοκλήρωμα). Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς το I έχουμε τη λύση του ολοκληρώματος.

$$\mathrm{I}=\int e^x\eta\mu\,(x)\,dx=\int\eta\mu\,(x)\,de^x=e^x\eta\mu\,(x)-\int e^x d\eta\mu\,(x)=e^x\eta\mu\,(x)-\int e^x\sigma\upsilon\nu\,(x)\,dx=$$

$$=e^x\eta\mu\,(x)-\int\sigma\upsilon\nu\,(x)\,de^x=e^x\eta\mu\,(x)-e^x\sigma\upsilon\nu\,(x)+\int e^x d\sigma\upsilon\nu\,(x)=$$

$$=e^x\eta\mu\,(x)-e^x\sigma\upsilon\nu\,(x)-\int e^x\eta\mu\,(x)\,dx=e^x\eta\mu\,(x)-e^x\sigma\upsilon\nu\,(x)-\mathrm{I}$$

Παρατηρούμε πως φτάσαμε στην ισότητα:

$$\mathrm{I}=e^x\eta\mu\,(x)-e^x\sigma\upsilon\nu\,(x)-\mathrm{I}$$

από την οποία προκύπτει η τιμή του ολοκληρώματος I:

$$2\mathrm{I}=e^x\eta\mu(x)-e^x\sigma\upsilon\nu(x)+c \quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\left[e^x\eta\mu(x)-e^x\sigma\upsilon\nu(x)\right]+c$$

□

Παράδειγμα 5ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int\eta\mu^2\,(x)\,dx$.

Ένα ολοκλήρωμα που μπορεί να λυθεί με παρόμοιο τρόπο με το προηγούμενο. Βέβαια, θα το λύσουμε σε επόμενο παράδειγμα, εκφράζοντας το ημ^2(x) συναρτήσει του συνημιτόνου του διπλάσιου τόξου, με τη βοήθεια του αντίστοιχου τύπου «αποτετραγωνισμού».

$$\mathrm{I}=\int \eta\mu^2\ x\ dx=\int \eta\mu\ x\ \eta\mu\ x\ dx=\int \eta\mu\ x\ d\ \ -\sigma\upsilon\nu\ x\ \ =$$

$$=-\eta\mu\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ -\int\ -\sigma\upsilon\nu\ x\ \ d\ \ \eta\mu\ x\ \ =-\eta\mu\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ +\int \sigma\upsilon\nu^2\ x\ dx=$$

$$=-\eta\mu\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ +\int\ 1-\eta\mu^2\ x\ \ dx=-\eta\mu\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ +\int 1dx-\int \eta\mu^2\ x\ dx=$$

$$=-\eta\mu\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ +x-\mathrm{I}\qquad\Rightarrow\qquad 2\mathrm{I}=x-\eta\mu\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ +c\qquad\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\left[x-\eta\mu\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ \right]+c$$

□

Παράδειγμα 6$^{\text{o}}$: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Σκεφτόμαστε και πάλι (όπως την προηγούμενη φορά που αντιμετωπίσαμε την ίδια υπόρριζη ποσότητα), στηριζόμενοι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ολοκληρώνεται [-1 , 1], να επιλέξουμε την αντικατάσταση x=συνt. Βέβαια, αντί του συνημιτόνου θα μπορούσαμε να διαλέξουμε το x=ημt, όμως τότε δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος:

$$\mathrm{I}=\int\sqrt{1-x^2}dx=\ldots\left|\begin{array}{c}\Theta\epsilon\tau o\upsilon\mu\epsilon\ x=\sigma\upsilon\nu\ t\ \ \Rightarrow\\ t=\mathrm{To}\xi\sigma\upsilon\nu\ x\\ dx=d\ \ \sigma\upsilon\nu\ t\ \ =-\eta\mu\ t\ dt\end{array}\right|\ldots=\int\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\ t}\ \ -\eta\mu\ t\ \ dt=$$

$$=-\int \eta\mu^2\ t\ dt=\ldots=\frac{1}{2}\left[t-\eta\mu\ t\ \sigma\upsilon\nu\ t\ \right]+c=$$

$$=\frac{1}{2}\left[t-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\ t}\ \sigma\upsilon\nu\ t\ \right]+c=\frac{1}{2}\left[\mathrm{To}\xi\sigma\upsilon\nu\ x\ -x\sqrt{1-x^2}\right]+c$$

όπου, εκτός από το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος χρησιμοποιήσαμε την προφανή σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\ \ \mathrm{To}\xi\sigma\upsilon\nu\ x\ \ =x$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int x^2\ln(3x)\,dx$ **β)** $\int x\ln\sqrt{x}\,dx$ **γ)** $\int \ln\sqrt{1+x}\,dx$ **δ)** $\int x\ln(1+\frac{1}{x})\,dx$

ε) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+\alpha^2})\,dx$ **στ)** $\int\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$ **ζ)** $\int x^2\ln^3 x\,dx$ **η)** $\int x\ln(x+1)\,dx$

(Απ: α) 1/9 x^3 (-1+3ln3x) β) 1/8x^2(-1+2lnx) γ) 1/2(-x+(1+x)ln[1+x]) δ) 1/2(x+x^2 ln[1+1/x]-ln[1+x])

ε) - $\sqrt{x^2+\alpha^2}$ +x ln[x+ $\sqrt{x^2+\alpha^2}$] στ) (x lnx-(1+x) ln[1+x])/x

ζ) 1/27 x^3 (-2+6 lnx-9 $(\ln x)^2$+9 $(\ln x)^3$) η) 1/4 (-(-2+x) x+2 (-1+x^2) ln[1+x]))

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$ **β)** $\int (x+1)\ln(x+2)\,dx$ **γ)** $\int\frac{\ln(\eta\mu x)}{\eta\mu^2 x}dx$ **δ)** $\int \sigma\upsilon\nu 2x\ln(\sigma\upsilon\nu x)dx$

ε) $\int \ln(x+\sqrt{x})dx$ στ) $\int x^{\nu}\ln x dx$ ζ) $\int \frac{\ln x}{x^{\nu}}dx$

(Απ: α) -xστεμx-ln[2 συν[x/2]]+ ln[2ημ[x/2]] β) 1/4 x (-x+2(2+x) ln[2+x])

γ) - στεμx(συνx(1+ ln[ημx])+xημx) δ) 1/4 (2x+(-1+2 ln [συνx]) ημ2x)

ε) $\sqrt{x}$ -x- ln [1+ $\sqrt{x}$]+x ln[$\sqrt{x}$ +x] στ) ($x^{1+\nu}$ (-1+(1+ν) lnx))/$(1+\nu)^2$

ζ) -($x^{1-\nu}$ (1+(-1+ν) lnx))/$(-1+\nu)^2$)

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int x^2\alpha^x dx$ β) $\int x^2\ln(1+x)dx$ γ) $\int x^2 e^{x^3}dx$ δ) $\int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx$

ε) $\int \frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$ στ) $\int \eta\mu x\ln(1+\eta\mu x)dx$ ζ) $\int \sigma\upsilon\nu x\ln(1+\eta\mu x)dx$ η) $\int \sigma\upsilon\nu x\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)dx$

(Απ: α) (a^x (2-2 x lna+x^2 $(\ln a)^2$))/ $(\ln a)^3$ β) 1/18 (x (-6+3x-2x^2)+6 (1+x^3) ln[1+x])

γ) e^{x^3} /3 δ) -ln[-1-e^{-x}]-e^{-x} ln [1+e^x] ε) $e^{-1/x}$ x στ) x+συνx- συνx ln [1+ ημx]

ζ) ln [1+ ημx]+(-1+ ln [1+ημx]) ημx η) x+(-1+ ln [1+ συνx])ημx)

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα (με κατάλληλη αντικατάσταση):

α) $\int e^x\ln(1+e^x)dx$ β) $\int x\ln(x^2+3)dx$

(Απ: α) -e^x+(1+e^x) ln[1+e^x] β) 1/2 (-x^2+(3+x^2) ln[3+x^2])

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx$ β) $\int \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)dx$

(Απ: α) ln[-2 (1+x)]- ln[1+x]/(2+x)- ln[2 (2+x)]

β) - ln[1+x]+2 ln[2+x]+x ln[(2+x)/(1+x)])

4.1.6 Μέθοδοι ολοκλήρωσης: (4) Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Για τη λύση των ολοκληρωμάτων των ρητών συναρτήσεων πρέπει να γνωρίζουμε τη λύση των παρακάτω ολοκληρωμάτων, τα οποία ο αναγνώστης (θεωρητικά) τα γνωρίζει ήδη:

$$\text{(i)}\quad \mathrm{I}=\int \frac{a}{x\pm k}dx=a\int \frac{1}{x\pm k}d\left(x+k\right)=a\ln|x+k|+c$$

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{I}=\int \frac{ax}{x^2\pm k}dx=a\int \frac{1}{x^2\pm k}d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{a}{2}\int \frac{1}{x^2\pm k}d\left(x^2\pm k\right)=\frac{a}{2}\ln|x^2\pm k|+c$$

$$\text{(iii)}\ \ \mathrm{I}=\int \frac{a}{(x\pm k)^{\nu}}dx = a\int \frac{1}{(x\pm k)^{\nu}}d(x+k) = a\int (x\pm k)^{-\nu}d(x+k) = a\frac{(x\pm k)^{-\nu+1}}{-\nu+1}+c$$

ενώ αξίζει να αναφέρουμε και μία ακόμη περίπτωση (την οποία αντιμετωπίζουμε για πρώτη φορά):

$$\mathrm{I}=\int\frac{1}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^{\mathrm{v}}+1)}\mathrm{dx}=\int\frac{1+\mathrm{x}^{\mathrm{v}}-\mathrm{x}^{\mathrm{v}}}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^{\mathrm{v}}+1)}\mathrm{dx}=\int\frac{(1+\mathrm{x}^{\mathrm{v}})-\mathrm{x}^{\mathrm{v}}}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^{\mathrm{v}}+1)}\mathrm{dx}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-\frac{\mathrm{x}^{\mathrm{v}}}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^{\mathrm{v}}+1)}\right)\mathrm{dx}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-\frac{\mathrm{x}^{\mathrm{v}-1}}{\mathrm{x}^{\mathrm{v}}+1}\right)\mathrm{dx}=$$

$$=\ln|\mathrm{x}|-\frac{1}{\mathrm{v}}\int\frac{(\mathrm{x}^{\mathrm{v}}+1)'}{\mathrm{x}^{\mathrm{v}}+1}\mathrm{dx}=\ln|\mathrm{x}|-\frac{1}{\mathrm{v}}\ln|\mathrm{x}^{\mathrm{v}}+1|+\mathrm{c}$$

Επίσης θα πρέπει να θυμόμαστε τη σχέση της ατελούς διαίρεσης, η οποία συνδέει τον Διαιρετέο (Δ), τον Διαιρέτη (δ), το Πηλίκο (π) και το Υπόλοιπο (υ):

$$\frac{\Delta}{\delta}=\pi+\frac{\upsilon}{\delta}$$

Αναζητούμε λοιπόν λύση για το ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I}=\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$$

όπου *p(x)* και *q(x)* είναι δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις, ν_p και ν_q βαθμού, αντίστοιχα, ενώ ισχύει και η ανίσωση: $\mathbf{\nu_p<\nu_q}$, δηλαδή ο βαθμός του αριθμητή πρέπει να είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε φθάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα εκτελώντας τη διαίρεση. Εάν οι πολυωνυμικές συναρτήσεις *π(x)* και *υ(x)* είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης, το προηγούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\mathrm{I}=\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int\left[\pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{q(x)}\right]dx=\int\pi(x)\,dx+\int\left[\frac{\upsilon(x)}{q(x)}\right]dx$$

καταλήγοντας στον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης και μιας ρητής, της οποίας ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) Ο παρονομαστής *q(x)* έχει απλές πραγματικές ρίζες.

Έστω πως η πολυωνυμική συνάρτηση του παρονομαστή *q(x)* έχει μόνον απλές πραγματικές ρίζες (τάξης πολλαπλότητας 1), έστω τις ρ_1, ρ_2, …, ρ_ν. Τότε, αναλύουμε την κλασματική συνάρτηση που ολοκληρώνεται, σε άθροισμα ν απλών κλασμάτων:

$$\frac{\upsilon(x)}{q(x)}=\frac{\upsilon(x)}{a(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)}=\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{A_\nu}{x-\rho_\nu}\right]$$

Επομένως, η ολοκλήρωση του αρχικού κλάσματος καταλήγει στην ολοκλήρωση του αθροίσματος των ν απλών κλασμάτων, που δίνουν σαν αποτέλεσμα ένα άθροισμα ν λογαρίθμων.

□

Παράδειγμα 2ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $I=\int\frac{4x+6}{x^3+x^2-6x}dx$

Εφόσον ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό της πολυωνυμικής συνάρτησης του παρονομαστή, μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως τα όσα ειπώθηκαν θεωρητικά προηγουμένως.

α) Ρίζες του παρονομαστή:

$$x^3+x^2-6x=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(x^2+x-6\right)=x\left(x-2\right)\left(x+3\right)=0$$

όπου εφαρμόσαμε τον τύπο του τριωνύμου, βρίσκοντας τις ρίζες $\rho_1=0$, $\rho_2=2$ και $\rho_3=-3$.

β) Ανάλυση του κλάσματος:

$$\frac{4x+6}{x^3+x^2-6x}=\frac{4x+6}{x\left(x-2\right)\left(x+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}=\frac{A\left(x^2+x-6\right)+Bx\left(x+3\right)+Cx\left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)\left(x+3\right)}=$$

$$=\frac{A\left(x^2+x-6\right)+B\left(x^2+3x\right)+C\left(x^2-2x\right)}{x\left(x-2\right)\left(x+3\right)}=\frac{x^2\left(A+B+C\right)+x\left(A+3B-2C\right)-6A}{x\left(x-2\right)\left(x+3\right)}$$

Εφόσον ισχύουν οι πέντε διαδοχικές ισότητες, θα ισχύει και η ισότητα του πρώτου κλάσματος με το έκτο. Επειδή τα κλάσματα αυτά έχουν τον ίδιο παρονομαστή, θα είναι ίσα εάν και οι αριθμητές τους είναι ίσοι. Εάν δηλαδή ισχύουν οι ισότητες (που καταλήγουν ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους):

$$\frac{4x+6}{x^3+x^2-6x}=\frac{x^2\left(A+B+C\right)+x\left(A+3B-2C\right)-6A}{x\left(x-2\right)\left(x+3\right)} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=0 \\ A+3B-2C=4 \\ -6A=6 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} A=-1 \\ B=1-C \\ 3B-2C=5 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{r} A=-1 \\ B=\frac{7}{5}=1.4 \\ C=-\frac{2}{5}=-0.4 \end{array}\right.$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I=\int\frac{4x+6}{x^3+x^2-6x}dx=\int\left[-\frac{1}{x}+\frac{7}{5\left(x-2\right)}-\frac{2}{7\left(x+3\right)}\right]dx=-ln\left|x\right|+\frac{5}{7}ln\left|x-2\right|-\frac{2}{7}ln\left|x+3\right|+c$$

□

Παράδειγμα 2^{ο}: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int\frac{x^5}{x^3-4x^2+x+6}dx$ **(Δίνεται *q*(2)=0)**

Επειδή ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή, πρέπει να κάνουμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{l|l} x^5 & x^3-4x^2+x+6 \\ \hline -x^5+4x^4-x^3-6x^2 & x^2+4x+15 \\ \hline \quad 4x^4-x^3-6x^2 & \\ \quad -4x^4+16x^3-4x^2-24x & \\ \hline \quad\quad 15x^3-10x^2-24x & \\ \quad\quad -15x^3+60x^2-15x-90 & \\ \hline \quad\quad\quad 50x^2-39x-90 & \end{array}$$

Άρα το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$\mathrm{I}=\int \frac{x^5}{x^3-4x^2+x+6}dx=\int\left[x^2+4x+15+\frac{50x^2-39x-90}{x^3-4x^2+x+6}\right]dx=$$
$$=\int\left[x^2+4x+15\right]dx+\int\left[\frac{50x^2-39x-90}{x^3-4x^2+x+6}\right]dx=\frac{x^3}{3}+2x^2+15x+\int\left[\frac{50x^2-39x-90}{x^3-4x^2+x+6}\right]dx$$

Στη συνέχεια, για να λύσουμε το ολοκλήρωμα που απέμεινε, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις τρεις ρίζες του παρονομαστή. Εφόσον έχει μία ρίζα, το x=2 (διότι $p(2)$=0), διαιρώντας με τον παράγοντα (x-2) υπολογίζουμε τις υπόλοιπες δύο ρίζες από το πηλίκο:

$$\frac{x^3-4x^2+x+6}{x-2}=x^2-2x-3 \quad \Rightarrow \qquad x^3-4x^2+x+6= \ x-2 \ \ x^2-2x-3 \ = \ x-2 \ \ x+1 \ \ x-3$$

Ανάλυση του κλάσματος σε απλά κλάσματα:

$$\frac{50x^2-39x-90}{x^3-4x^2+x+6}=\frac{50x^2-39x-90}{x-2 \ \ x+1 \ \ x-3}=\frac{\overbrace{A}^{x+1 \ \ x-3}}{x-2}+\frac{\overbrace{B}^{x-2 \ \ x-3}}{x+1}+\frac{\overbrace{C}^{x-2 \ \ x+1}}{x-3}=$$
$$=\frac{A \ x^2-2x-3 \ +B \ x^2-5x+6 \ +C \ x^2-x-2}{x-2 \ \ x+1 \ \ x-3}=$$
$$=\frac{x^2 \ A+B+C \ +x \ -2A-5B-C \ -3A+6B-2C}{x-2 \ \ x+1 \ \ x-3}$$

Επειδή η προηγούμενη σχέση είναι μια συνεχής ισότητα, σημαίνει πως το πρώτο κλάσμα είναι ίσο με το τελευταίο, και επειδή τα δύο κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή, θα πρέπει να έχουν και τον ίδιο αριθμητή. Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων, καταλήγουμε σε ένα σύστημα 3 εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{array}{c} A+B+C=50 \\ -2A-5B-C=-39 \\ -3A+6B-2C=-90 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} A=-\dfrac{32}{3} \\ B=-\dfrac{1}{12} \\ C=\dfrac{243}{4} \end{array}$$

όπου παραλείφθηκε η λύση του συστήματος, σαν κάτι εύκολο και γνωστό. Επομένως η λύση του ολοκληρώματος:

$$\mathrm{I}=\int \frac{x^5}{x^3-4x^2+x+6}dx=\int\left[x^2+4x+15+\frac{50x^2-39x-90}{x^3-4x^2+x+6}\right]dx=$$
$$=\int\left[x^2+4x+15\right]dx+\int\left[\frac{50x^2-39x-90}{x^3-4x^2+x+6}\right]dx=\frac{x^3}{3}+2x^2+15x+\int\left[\frac{50x^2-39x-90}{x^3-4x^2+x+6}\right]dx$$

□

Παράδειγμα 3ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $I=\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

Εδώ θα επιχειρήσουμε μια αρκετά συνηθισμένη αλλαγή μεταβλητών, επιχειρώντας να απαλλαγούμε ταυτόχρονα από την ρίζα αλλά και από το εκθετικό μέρος:

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Θέτουμε } 1+e^x=t^2 \quad\Rightarrow\quad e^x=t^2-1 \quad\Rightarrow \\ de^x=d\ \ t^2-1 \quad\Rightarrow\quad e^x dx=2tdt \quad\Rightarrow \\ \qquad dx=\frac{2t}{e^x}dt \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt\end{array}\right\}=\int\frac{1}{\sqrt{t^2}}\frac{2t}{t^2-1}dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt=$$

$$=\int\frac{2}{t-1\ \ t+1}dt=\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]dt=\ln|t-1|-\ln|t+1|+c=$$

$$=\ln\left|\sqrt{1+e^x}-1\right|-\ln\left[\sqrt{1+e^x}+1\right]+c$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ β) $\int\frac{3x}{x^2-x-12}dx$ γ) $\int\frac{2x^2+1}{x^3-5x^2+6x}dx$ δ) $\int\frac{dx}{x^2-x}$ ε) $\int\frac{6x+5}{9x^2-4}dx$

(Απ: α) 1/2 ln[3+2x+x^2] β) 3/7 (4 ln[4-x]+3 ln[3+x]) γ) 1/6 (38 ln[-65 (-3+x)]-27 ln [65 (-2+x)]+ lnx)
δ) ln[-1+x]- lnx ε) 1/12 (9 ln[10-15x]- ln[5 (2+3x)]))

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα (με διαίρεση πολυωνύμων):

α) $\int\frac{5x-1}{x+3}dx$ β) $\int\frac{x^2-5}{x+2}dx$ γ) $\int\frac{x^3}{x^2-x}dx$ δ) $\int\frac{x^3+2}{x^2+x}dx$

(Απ: α) 5 (3+x)-16 ln[3+x] β) -6-2 x+x^2/2- ln[2+x] γ) -(3/2)+x+x^2/2+ ln[-1+x]
δ) 1/2 ((-2+x) x+4 lnx-2 ln[1+x]))

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int\frac{2x+1}{x^3+x^2}dx$ β) $\int\frac{5x^2+6x+7}{x^3+x^2+x-3}dx$ γ) $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx$ δ) $\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

ε) $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$ στ) $\int\frac{x^2+5x+4}{x(x+2)^2}dx$

Υπόδειξη: Ο παρονομαστής του (β) ολοκληρώματος έχει ρίζα το x=1.
(Απ: α) -(1/x)+lnx-ln[1+x] β) 3ln[-1+x]+ ln[2 (3+2 x+x^2)] γ) Τοξεφ[x/α]/α
δ) 1/(1-x)- ln[-1+x]+ lnx ε) ln[6-2x]- ln[2 (-2+x)] στ) -(1/(2+x))+ lnx)

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα (με διαίρεση πολυωνύμων):

α) $\int\frac{6x^2-20x+5}{3x^2-x+1}dx$ β) $\int\frac{15x^2+20x+9}{5x^2+3}dx$ γ) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ δ) $\int\frac{x^4-7x^2+6x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$

(Απ: α) 2x-3 ln[1-x+3 x^2] β) 3x+2ln[3+5x^2]

γ) $4x+x^2/2+x^3/3+5\ln[-8\ (-2+x)]+2\ln x-3\ln[8\ (2+x)]$

δ) $3x+x^2/2+\ln[6-3\ x]-2\ln[3\ (-1+x)]+\ln x)$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα (μετά από κατάλληλη αντικατάσταση καταλήγουν σε επίλυση ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων):

α) $\int \frac{3}{5+2^{-x}}dx$ β) $\int \frac{dx}{2^x+3}$ γ) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ δ) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}dx$ ε) $\int \frac{1+4^x}{1+2^x}dx$

(Απ: α) $(3\ln[-1-5\ 2^x])/\ln 32$ β) $(x\ln 2-\ln[3+2^x])/\ln 8$ γ) $-x+\ln[-2\ (1+e^{2x})]$

δ) $1/3\ (-x+2\ln[-4\ (3+e^{2x})])$ ε) $(2^x+x\ln 2-2\ln[2\ (1+2^x)])/\ln 2$)

□

(ii) Ο παρονομαστής *q(x)* έχει πολλαπλές πραγματικές ρίζες.

Ας υποθέσουμε πως η πολυωνυμική συνάρτηση του παρονομαστή *q(x)* έχει απλές, αλλά και πολλαπλές πραγματικές ρίζες. Χωρίς να προσπαθούμε να περιορίσουμε την γενικότητα υποθέτουμε πως η πολυωνυμική συνάρτηση του παρονομαστή είναι $4^{ου}$ βαθμού και έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες, έστω τις ρ_1 (απλή) και ρ_2 (τριπλή). Τότε, αναλύουμε την κλασματική συνάρτηση που ολοκληρώνεται, σε άθροισμα τεσσάρων απλών κλασμάτων:

$$\frac{\upsilon\ x}{q\ x}=\frac{\upsilon\ x}{a\ \ x-\rho_1\ \ x-\rho_2\ ^3}=\frac{1}{a}\left[\frac{A}{x-\rho_1}+\frac{B_1}{x-\rho_2}+\frac{B_2}{x-\rho_2\ ^2}+\frac{B_3}{x-\rho_2\ ^3}\right]$$

Επομένως, η ολοκλήρωση του αρχικού κλάσματος καταλήγει στην ολοκλήρωση του αθροίσματος των τεσσάρων αυτών κλασμάτων.

Παράδειγμα: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $I=\int \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x}dx$

Λύση:

$$I=\int \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x}dx=\int \frac{x-1}{x\ \ x^2+4x+4}dx=\int \frac{x-1}{x\ \ x+2\ ^2}dx$$

Αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{x-1}{x\ \ x+2\ ^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{x+2\ ^2}=\frac{A\ \ x+2\ ^2+B_1x\ \ x+2\ +B_2x}{x\ \ x+2\ ^2}=$$

$$=\frac{A\ \ x^2+4x+4\ +B_1\ \ x^2+2x\ +B_2x}{x\ \ x+2\ ^2}=\frac{x^2\ \ A+B_1\ +x\ \ 4A+2B_1+B_2\ +4A}{x\ \ x+2\ ^2}$$

οπότε, εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων των αριθμητών του πρώτου και του τελευταίου κλάσματος, καταλήγουμε στο επόμενο σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\left.\begin{array}{c} A+B_1=0 \\ 4A+2B_1+B_2=1 \\ 4A=-1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} B_1=\dfrac{1}{4} \\ B_2=\dfrac{3}{2} \\ A=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

και το κλάσμα γράφεται:

$$\frac{x-1}{x(x+2)^2}=-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{3}{2(x+2)^2}$$

Η λύση του ολοκληρώματος:

$$\int\frac{x-1}{x(x+2)^2}dx=\int\left[-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{3}{2(x+2)^2}\right]dx=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x+2)^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}d(x+2)+\frac{3}{2}\int(x+2)^{-2}d(x+2)=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{4}\ln|x-2|+\frac{3}{2(x+2)}+c$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x(x-3)^3}dx$ **β)** $\displaystyle\int\frac{x^2+x-1}{x^2(x+3)^2}dx$

(Απ: α) (-3 x-(-3+x)^2 ln[-3+x]+(-3+x)^2 lnx)/(27 (-3+x)^2)

β) 1/27 (3 (1/x-5/(3+x))+5 lnx-5 ln[3+x]))

□

(ii) Ο παρονομαστής *q(x)* έχει μιγαδικές ρίζες.

Θα επικεντρωθούμε στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου ο παρονομαστής είναι ένα τριώνυμο με δύο μιγαδικές, συζυγείς ρίζες. Στην περίπτωση αυτή (όπου η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική) πρέπει να ξαναθυμηθούμε τον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύεται ο περίφημος τύπος των ριζών του τριωνύμου:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\ldots$$

όπου απλά βγάλαμε κοινό παράγοντα το α. Στη συνέχεια προσπαθούμε να σχηματίσουμε, με βάση τους πρώτους δύο όρους, ένα τέλειο τετράγωνο, προσθαφαιρώντας την κατάλληλη σταθερά:

$$\ldots=\alpha\left(\left(x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right)-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4a\gamma}{4\alpha^2}\right)=\ldots$$

Για τις ανάγκες της ολοκλήρωσης, αυτή η τελευταία σχέση είναι επαρκής. Απλά θα πρέπει να θυμηθούμε πως ο αριθμητής του δεύτερου κλάσματος (δηλαδή η διακρίνουσα Δ) είναι αρνητικός στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών, οπότε η ισότητα συνεχίζει…

$$...=\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4a\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$

πράγμα που μας επιτρέπει, με την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, να καταλήξουμε σε ένα ολοκλήρωμα, με αποτέλεσμα ένα τόξο εφαπτομένης. Ας το δούμε με δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ο: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{3}{x^2-4x+13}dx$

Λύση: Παρατηρώντας πως το τριώνυμο του παρονομαστή έχει μιγαδικές ρίζες ($\Delta=16-52=-36<0$), επιχειρούμε την προτεινόμενη ανάλυση:

$$I=\int\frac{3}{x^2-4x+13}dx=\int\frac{3}{x^2-4x+4-4+13}dx=\int\frac{3}{(x-2)^2+9}dx=\int\frac{3}{9\left[\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right]}dx=...$$

$$\left\{\text{Θέτουμε }\ t=\frac{x-2}{3}\quad\Rightarrow\quad x=3t+2\quad\Rightarrow\quad dx=3dt\right\}$$

$$...=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2+1}dx=\frac{1}{3}\text{Τοξεφ}(t)+c=\frac{1}{3}\text{Τοξεφ}\left(\frac{x-2}{3}\right)+c$$

□

Παράδειγμα 2ο: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{x-2}{x^2+6x+10}dx$

Λύση: Στην ιδιαίτερη αυτή περίπτωση θα προσπαθήσουμε, με τις κατάλληλες προσθαφαιρέσεις, να καταλήξουμε σε δύο κλάσματα, όπου ο αριθμητής του πρώτου θα είναι η παράγωγος του παρονομαστή, ενώ ο αριθμητής του δεύτερου θα είναι ένας σταθερός αριθμός:

$$I=\int\frac{x-2}{x^2+6x+10}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+6)-3-2}{x^2+6x+10}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+6)-5}{x^2+6x+10}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx-\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+6x+10}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+6x+10}d(x^2+6x+10)-\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+6x+10}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right|-\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+6x+10}dx=...$$

με το δεύτερο ολοκλήρωμα να είναι παρόμοιο με αυτό του προηγούμενου παραδείγματος, οπότε ας λυθεί από τον αναγνώστη σαν παράδειγμα.

□

Παράδειγμα 3ο: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{x+5}{x^3-2x^2+5x}dx$

Λύση: Το ολοκλήρωμα αυτό αποτελεί τον οδηγό για τη λύση ρητών ολοκληρωμάτων, όταν ο παρονομαστής έχει ταυτόχρονα πραγματικές και μιγαδικές ρίζες.

α) Υπολογισμός των ριζών του παρονομαστή:

$$x^3-2x^2+5x=x\left(x^2-2x+5\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x^2-2x+5=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x=1+2i \\ x=1-2i \end{cases}$$

β) Ανάλυση του κλάσματος:

$$\frac{x+5}{x^3-2x^2+5x}=\frac{x+5}{x\left(x^2-2x+5\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}=\frac{A\left(x^2-2x+5\right)+x\left(Bx+C\right)}{x\left(x^2-2x+5\right)}=$$

$$=\frac{\left(A+B\right)x^2+\left(C-2A\right)x+5A}{x\left(x^2-2x+5\right)}$$

και η σύγκριση των αριθμητών του πρώτου και του τελευταίου κλάσματος οδηγεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ -2A+C&=1 \\ 5A&=5 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=3 \end{cases}$$

γ) Η λύση του ολοκληρώματος:

$$I=\int \frac{x+5}{x^3-2x^2+5x}dx=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{-x+3}{x^2-2x+5}\right]dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\left[\frac{-x+3}{x^2-2x+5}\right]dx=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\left[\frac{2x-6}{x^2-2x+5}\right]dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\left[\frac{2x-2-4}{x^2-2x+5}\right]dx=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\left[\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\right]dx+\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{x^2-2x+5}\right]dx=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x^2-2x+5}\right]d\left(x^2-2x+5\right)+\int\left[\frac{2}{\left(x-2\right)^2+1}\right]d\left(x-2\right)=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right)+2\text{Τοξεφ}\left(x-2\right)+c$$

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\left(x-3\right)^3}dx$ **β)** $\displaystyle\int\frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+4x+13\right)}dx$ **γ)** $\displaystyle\int\frac{4x^2+12x+10}{x^2\left(x^2+2x+10\right)}dx$

(Απ: γ) -(1/x)+2/3 τοξεφ[(1+x)/3]+lnx-1/2 ln[10+2x+x^2])

4.1.7 Μέθοδοι ολοκλήρωσης: (5) Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Η ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων προϋποθέτει τη γνώση κάποιων βασικών τύπων της Τριγωνομετρίας:

Από τους τύπους: $\begin{aligned} &\text{συν}\left(2x\right)=\text{συν}^2\left(x\right)-\text{ημ}^2\left(x\right) \quad \text{και} \\ &\text{ημ}\left(2x\right)=2\text{ημ}\left(x\right)\text{συν}\left(x\right) \end{aligned}$ προκύπτουν:

1) προκύπτουν οι τύποι του αποτετραγωνισμού:

$$\eta\mu^2\ x\ = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\ 2x}{2}\ , \qquad \sigma\upsilon\nu^2\ x\ = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\ 2x}{2}$$

και

$$\varepsilon\varphi^2\ x\ = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\ 2x}{1+\sigma\upsilon\nu\ 2x}$$

2) και οι τύποι του «ημίσεως τόξου»:

$$\eta\mu\ x\ = \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\ x\ = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

□

Παράδειγμα 1ο: Στη συνέχεια θα λύσουμε (και πάλι) το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int \eta\mu^2\ x\ dx$ **χρησιμοποιώντας τους τύπους αποτετραγωνισμού:**

$$\mathrm{I} = \int \eta\mu^2\ x\ dx = \int \frac{1-\sigma\upsilon\nu\ 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\ 2x\ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \sigma\upsilon\nu\ 2x\ d\ 2x\ =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu\ 2x\ + c$$

όπου το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα «φαίνεται» διαφορετικό από το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο 5ο παράδειγμα της παραγράφου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, αλλά δεν είναι…

□

Παράδειγμα 2ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int \frac{1}{\eta\mu\ x} dx$ **με τη βοήθεια του τύπου του «ημίσεως τόξου»**

$$\mathrm{I} = \int \frac{1}{\eta\mu\ x} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} dx = \int \frac{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\varepsilon\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\left(\frac{x}{2}\right) dx + \frac{1}{2}\int \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)} d\left(2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)} d\left(-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$=\ln\left|\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\ln\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c=\ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

Ή αλλιώς:

$$\mathrm{I}=\int\frac{1}{\eta\mu\ x}dx=\int\frac{\eta\mu\ x}{\eta\mu^2\ x}dx\underset{du=-\eta\mu x dx}{\overset{u=\sigma\upsilon\nu x}{=}}\int\frac{-du}{1-u^2}=\int\frac{du}{u^2-1}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+c=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu x-1}\right|+c$$

Ομοίως:

$$\mathrm{I}=\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\ x}dx=\int\frac{\sigma\upsilon\nu\ x}{\sigma\upsilon\nu^2\ x}dx\underset{du=\sigma\upsilon\nu x dx}{\overset{u=\eta\mu x}{=}}\int\frac{du}{1-u^2}=-\int\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\eta\mu x+1}{\eta\mu x-1}\right|+c$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}dx$ **β)** $\int\frac{\eta\mu 2x}{e^{\eta\mu^2 x}}dx$ **γ)** $\int\frac{e^x\eta\mu^2\frac{x}{2}}{e^{\eta\mu x}}dx$

δ) $\int x\eta\mu x^2\sigma\upsilon\nu x^2dx$ **ε)** $\int x\sigma\upsilon\nu^2x^2dx$ **στ)** $\int\frac{1+\eta\mu 2x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

(Απ: α) -x+2 εφ[x/2] β) $-e^{-\eta\mu^2 x}$ **γ) 1/2** $e^{x-\eta\mu x}$ **δ) -(1/4)** $\sigma\upsilon\nu^2[x^2]$
ε) 1/8 $(2x^2+\eta\mu 2x^2)$ **στ) - συνx+ημx)**

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ **β)** $\int\frac{\eta\mu 2x}{\alpha^2\eta\mu^2 x+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ **γ)** $\int\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}dx$

δ) $\int\eta\mu^3 x\cdot\eta\mu 2xdx$ **ε)** $\int\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x}}dx$ **στ)** $\int\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

ζ) $\int e^x\varepsilon\varphi^2(e^x)dx$ **η)** $\int\left(\frac{1}{x\eta\mu\frac{1}{x}}\right)^2dx$

(Απ: α) -ln[3+συν2x] β) $\ln[\alpha^2+\beta^2+(-a^2+b^2)\,\sigma\upsilon\nu 2x]/(a^2-b^2)$**)**

γ) ln[-συνx-ημx] δ) $(2\ \eta\mu^5 x)/5$ **ε) -(1/2)** $\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}$ **στ) -2 στεμ2x ζ)** $-e^x+\varepsilon\varphi[e^x]$ **η) σφ(1/x))**

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x}$ **β)** $\int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} dx$ **γ)** $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x} dx$

δ) $\int \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx$ **ε)** $\int \frac{x - \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} dx$

(Απ: α) -2 σφ2x β) -συνx+ημx γ) τοξεφh[εφx]

δ) (εφ^{3}x)/3 ε) 4 ln[συν(x/2)]+x εφ(x/2))

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα (χρησιμοποιώντας τύπο αποτετραγωνισμού προκύπτει ολοκλήρωση κατά παράγοντες) :

α) $\int (2x+5)\sigma\upsilon\nu^2 x dx$ **β)** $\int x\sigma\upsilon\nu^4 x dx$ **γ)** $\int (x\eta\mu x)^2 dx$

δ) $\int \frac{x}{1+\sigma\upsilon\nu x} dx$

(Απ: α) 1/4 (συν2x+2 (5 συνx ημx+x (5+x+ημ2x)))

β) 1/128 (16 συν2x+συν4x+4x (6x+8 ημ2x+ημ4x))

γ) 1/24 (4 x^3-6 x συν2x+(3-6 x^2) ημ2x)

δ) 2 ln[συν(x/2)]+x εφ(x/2))

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα (με κατάλληλη αντικατάσταση):

α) $\int \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu x}} dx$ **β)** $\int \sqrt[3]{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu^5 x dx$ **γ)** $\int (\varepsilon\phi^2 x + \varepsilon\phi^4 x) dx$ **δ)** $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\sqrt[3]{\eta\mu x}} dx$

ε) $\int \frac{\eta\mu^5 x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} dx$ **στ)** $\int \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} dx$ **ζ)** $\int \frac{\eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^3} dx$ **η)** $\int \frac{\eta\mu^2 x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2} dx$

(Απ: α) (4 (συν(x/2)+ημ(x/2))^2 (-2+ημx))/(3 $\sqrt{1+\eta\mu x}$ **)**

β) (3 ημx$^{1/3}$ (178 ημx+39 ημ3x+5 ημ5x))/1280

γ) εφ^{3}x/3

δ) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\sqrt[3]{\eta\mu x}} dx = \frac{3}{2}\eta\mu^{4/3} x - \frac{3}{4}\eta\mu^{8/3} x + \frac{3}{14}\eta\mu^{14/3} x + c$

ε) -(1/180) $\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$ **(303-52 συν2x+5 συν4x)**

στ) 1/4 (συν2x-4 ln[συνx]) ζ) -(1/8) στεμ(x/2)^4 η) -x-2σφ(x/2))

□

Άλλες μορφές τριγωνομετρικών συναρτήσεων

α) Είδαμε ήδη αρκετά τριγωνομετρικά ολοκληρώματα της μορφής:

$$\mathrm{I}=\int \eta\mu^{\kappa}\ x\ \sigma\upsilon\nu^{\lambda}\ x\ dx$$

όπου τα κ και λ ήταν φυσικού αριθμοί, από τους οποίους τουλάχιστον ο ένας ήταν περιττός. Τότε, δείξαμε πως το ολοκλήρωμα καταλήγει στην ολοκλήρωση μια πολυωνυμικής συνάρτησης. Ακολουθήσαμε τη μέθοδο: «Παίρνουμε ένα από τα μονά και το βάζουμε (ολοκληρώνοντάς το) στο διαφορικό:

Παράδειγμα 1ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int \eta\mu^{4}\ x\ \sigma\upsilon\nu^{5}\ x\ dx$

$$\mathrm{I}=\int \eta\mu^{4}\ x\ \sigma\upsilon\nu^{5}\ x\ dx=\int \eta\mu^{4}\ x\ \sigma\upsilon\nu^{4}\ x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ dx=\int \eta\mu^{4}\ x\ \sigma\upsilon\nu^{4}\ x\ d\eta\mu\ x\ =$$

$$=\int \eta\mu^{4}\ x\ \sigma\upsilon\nu^{4}\ x\ d\eta\mu\ x\ =\int \eta\mu^{4}\ x\ \left(1-\eta\mu^{2}\ x\right)^{2} d\eta\mu\ x\ =\int t^{4}\left(1-t^{2}\right)^{2} dt=$$

$$=\int \left(t^{4}-2t^{6}+t^{8}\right) dt=\frac{1}{5}t^{5}-\frac{2}{7}t^{7}+\frac{1}{9}t^{9}+c=\frac{1}{5}\eta\mu^{5}\ x\ -\frac{2}{7}\eta\mu^{7}\ x\ +\frac{1}{9}\eta\mu^{9}\ x\ +c$$

□

Παράδειγμα 2ο: Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να λύσουμε ολοκληρώματα της μορφής: $\mathrm{I}=\int \eta\mu^{\nu}\ x\ dx$ **και** $\mathrm{I}=\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}\ x\ dx$**, όπου το ν είναι ένας άρτιος φυσικός αριθμός (εάν είναι περιττός γνωρίζουμε ήδη τον τρόπο με τον οποίο το μετατρέπουμε σε πολυωνυμικό ολοκλήρωμα).**

(i) Αρχικά υπολογίζουμε το $\mathrm{I}=\int \eta\mu^{\nu}\ x\ dx$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\int \eta\mu^{\nu}(x)dx=\int \eta\mu^{\nu-1}(x)d\left(-\sigma\upsilon\nu(x)\right)=-\eta\mu^{\nu-1}(x)\sigma\upsilon\nu(x)+\int \sigma\upsilon\nu(x)d\left(\eta\mu^{\nu-1}(x)\right)=\\&=-\eta\mu^{\nu-1}(x)\sigma\upsilon\nu(x)+\int(\nu-1)\sigma\upsilon\nu^{2}(x)\eta\mu^{\nu-2}(x)dx=\\&=-\eta\mu^{\nu-1}(x)\sigma\upsilon\nu(x)+(\nu-1)\int\left(1-\eta\mu^{2}(x)\right)\eta\mu^{\nu-2}(x)dx=\\&=-\eta\mu^{\nu-1}(x)\sigma\upsilon\nu(x)+(\nu-1)\int \eta\mu^{\nu-2}(x)dx-(\nu-1)\int \eta\mu^{\nu}(x)dx \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\nu\mathrm{I}=\nu\int \eta\mu^{\nu}(x)dx=-\eta\mu^{\nu-1}(x)\sigma\upsilon\nu(x)+(\nu-1)\int \eta\mu^{\nu-2}(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\int \eta\mu^{\nu}(x)dx=-\frac{1}{\nu}\eta\mu^{\nu-1}(x)\sigma\upsilon\nu(x)+\frac{(\nu-1)}{\nu}\int \eta\mu^{\nu-2}(x)dx$$

Η τελευταία σχέση ορίζει έναν αναδρομικό τύπο, που επιτρέπει τη συστηματική επίλυση των ολοκληρωμάτων αυτής της μορφής. Εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια μέθοδο, υπολογίζουμε και τον επόμενο αναδρομικό τύπο:

$$\mathrm{I}=\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}\ x\ dx=\frac{1}{\nu}\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\ x\ \eta\mu\ x\ +\frac{\nu-1}{\nu}\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\ x\ dx$$

□

Παράδειγμα 3ο: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int \sigma\upsilon\nu^{9}\ x\ dx$

$$\mathrm{I}=\int \sigma\upsilon\nu^{9}\ x\ dx=\int \sigma\upsilon\nu^{8}\ x\ d\left(\eta\mu\ x\right)=\int \left(1-\eta\mu^{2}\ x\right)^{4} d\left(\eta\mu\ x\right)=\int \left(1-t^{2}\right)^{4} dt=$$

$$=\int \left(1-4t^{2}+6t^{4}-4t^{6}+t^{8}\right) dt=t-\frac{4}{3}t^{3}+\frac{6}{5}t^{5}-\frac{4}{7}t^{7}+\frac{1}{9}t^{9}+c=$$

$$= \eta\mu\; x \;-\frac{4}{3}\eta\mu^3\; x \;+\frac{6}{5}\eta\mu^5\; x \;-\frac{4}{7}\eta\mu^7\; x \;+\frac{1}{9}\eta\mu^9\; x \;+c$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα του διωνύμου του Newton για ν=4:

$$a\pm b\;^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

□

Παράδειγμα 4^o: Να λυθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int \sigma\upsilon\nu^6\; x\; dx$**, με τη χρήση της αναδρομικής σχέσης.**

$$\mathrm{I}=\int \sigma\upsilon\nu^6\; x\; dx = \frac{1}{6}\sigma\upsilon\nu^5\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{6}\int \sigma\upsilon\nu^4\; x\; dx =$$

$$= \frac{1}{6}\sigma\upsilon\nu^5\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{6}\left[\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^3\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{3}{4}\int \sigma\upsilon\nu^2\; x\; dx\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\sigma\upsilon\nu^5\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{24}\sigma\upsilon\nu^3\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{8}\int \sigma\upsilon\nu^2\; x\; dx =$$

$$= \frac{1}{6}\sigma\upsilon\nu^5\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{24}\sigma\upsilon\nu^3\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{8}\left[\sigma\upsilon\nu\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu^0\; x\; dx\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\sigma\upsilon\nu^5\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{24}\sigma\upsilon\nu^3\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{8}\sigma\upsilon\nu\; x\; \eta\mu\; x \;+\frac{5}{16}x + c$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu^6 x dx$ **β)** $\int \eta\mu^7 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$ **γ)** $\int \sigma\upsilon\nu^5 x dx$ **δ)** $\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx$

ε) $\int \sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^3 x dx$ **στ)** $\int \sigma\upsilon\nu^4\; x\; dx$

(Απ: α) -((συν^{7}x (365-364 συν2x+63 συν4x))/5544)

β) (1/5120)(-70 συν2x+20 συν4x+5 συν6x-5συν8x+συν10x)

γ) (5 ημx)/8+5/48 ημ3x+1/80 ημ5x

δ) 1/840 (157+108 συν2x+15 συν4x) ημ^{3}x

ε) 1/30 συν^{3}x (-7+3 συν2x)

στ) 1/32 (12 x+8 ημ2x+ημ4x))

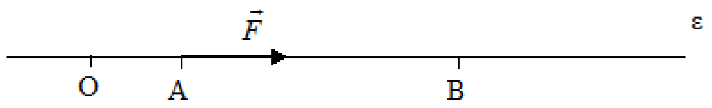
□

4.2 Ορισμένη Ολοκλήρωση

4.2.1 Γενικά

Χωρίς την ύπαρξη της Ορισμένης Ολοκλήρωσης, η Αόριστη Ολοκλήρωση ίσως να ήταν ένα παιχνίδι των Μαθηματικών, που θα απαντούσε στο ερώτημα «πες μου ποιας συνάρτησης η παράγωγος είναι η *f(x)*». Βέβαια, η Αόριστη Ολοκλήρωση είναι κι ένα ισχυρότατο εργαλείο στην επίλυση των Διαφορικών Εξισώσεων (οι οποίες είναι εξισώσεις που περιέχουν πληροφορίες για μία παράγωγο μιας άγνωστης συνάρτησης, αναζητώντας αυτή την άγνωστη συνάρτηση) και θα γίνουν αντικείμενο μελέτης στα πλαίσια ενός επόμενου μαθήματος.

Ένα παράδειγμα που εισάγει με εύληπτο τρόπο την έννοια (και την αναγκαιότητα ύπαρξης) του Ορισμένου Ολοκληρώματος είναι αυτό που αφορά στο Έργο μιας δύναμης. Έστω, λοιπόν, μία ευθεία ε, εφοδιασμένη με ένα σύστημα αναφοράς (δηλαδή με ένα σημείο Ο που αποτελεί την αρχή μέτρησης των αποστάσεων και ένα μοναδιαίο διάνυσμα). Η ευθεία ε είναι ο φορέας μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ η οποία μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το σημείο Α στο σημείο Β.

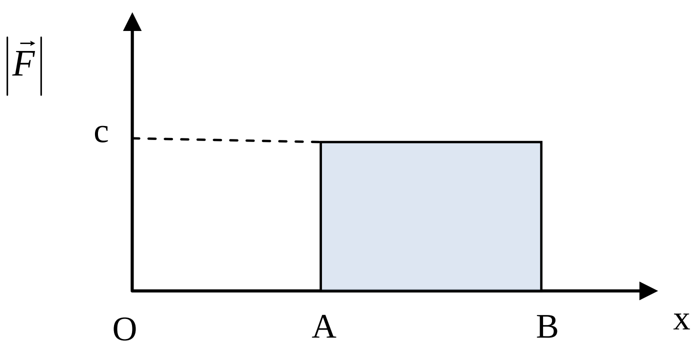


Εικόνα 4.2 *Φορέας δύναμης*

Ως γνωστόν το έργο της δύναμης $\vec{F}$ (στο παράδειγμα που περιγράφουμε, η φορά του διανύσματος της $\vec{F}$ είναι η ίδια με τη φορά της μετακίνησης του σημείου εφαρμογής της), είναι ένα μονόμετρο μέγεθος (δεν είναι δηλαδή διανυσματικό) και ισούται με το γινόμενο του μέτρου της $\vec{F}$ επί το μήκος του διαστήματος [Α,Β]. Θα έχουμε επομένως:

$$W_F = \left|\vec{F}\right| \; B - A$$

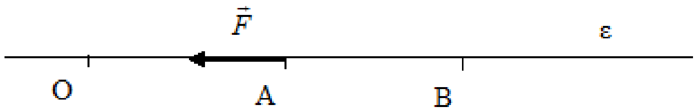
Μεταφέρουμε αυτό το πρόβλημα σε ένα Καρτεσιανό σύστημα, όπου ο οριζόντιος άξονας (ο άξονας των τετμημένων) είναι η ευθεία ε, ενώ ο κατακόρυφος (ο άξονας των τεταγμένων) ορίζει το μέγεθος της δύναμης $\vec{F}$ (έστω $\left|\vec{F}\right| = c$). Τότε θα έχουμε το παρακάτω γράφημα:



Εικόνα 4.3 *Γράφημα δύναμης*

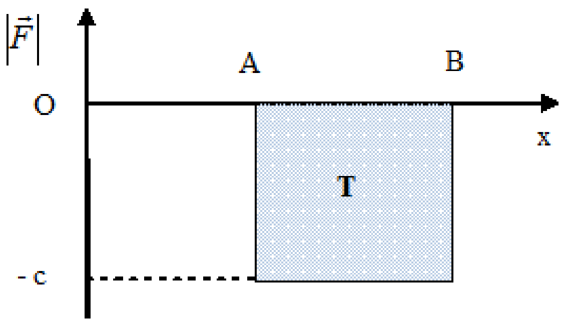
Παρατηρούμε πως στην περίπτωση αυτή το έργο της $\vec{F}$ είναι το αποτέλεσμα του γινομένου του μήκους ενός διαστήματος του άξονα των x, με τη σταθερή τιμή c μιας συνάρτησης $\left|\vec{F}\ \ x\right| = c$ και ισούται με το εμβαδόν του τόπου Τ (σκιασμένη περιοχή του γραφήματος).

Βέβαια προκύπτει το ερώτημα για το κατά πόσο το Έργο μιας δύναμης ισούται με ένα εμβαδόν. Για να απαντήσουμε, παίρνουμε την περίπτωση όπου μία δύναμη μετακινεί το σημείο εφαρμογής της αντίθετα από τη φορά της (για παράδειγμα πρόκειται για την περίπτωση όπου οι δυνάμεις τριβής και της αντίστασης του αέρα «φρενάρουν» ένα αυτοκίνητο που κινείται σε οριζόντιο δρόμο). Τότε έχουμε σχηματικά:



Εικόνα 4.4 *Φορέας δύναμης*

που αντιστοιχεί στο γράφημα:



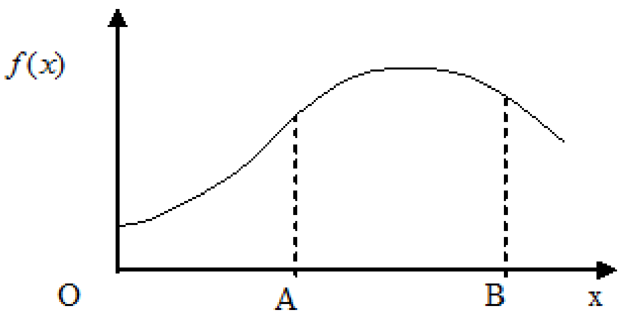
Εικόνα 4.5 *Γράφημα δύναμης*

$$W_F = -\left|\vec{F}\right|\ B - A\ = -c\ B - A$$

Στην περίπτωση αυτή το παραγόμενο έργο από την δύναμη $\vec{F}\ \ x\ = -c\vec{i}$ (όπου $\vec{i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία ε) είναι αρνητικό. Μπορεί η απόλυτη τιμή του Έργου να είναι ίση με το εμβαδόν του τόπου Τ, όμως δεν μπορούμε πλέον να ταυτίσουμε Έργο και εμβαδόν.

Όλα αυτά συνέβαιναν με το δεδομένο πως η δύναμη F που παράγει το έργο είναι σταθερή! Τα πάντα όμως μεταβάλλονται, εάν η δύναμη F είναι συνάρτηση της θέσης x, στην οποία βρίσκεται το σημείο εφαρμογής της:

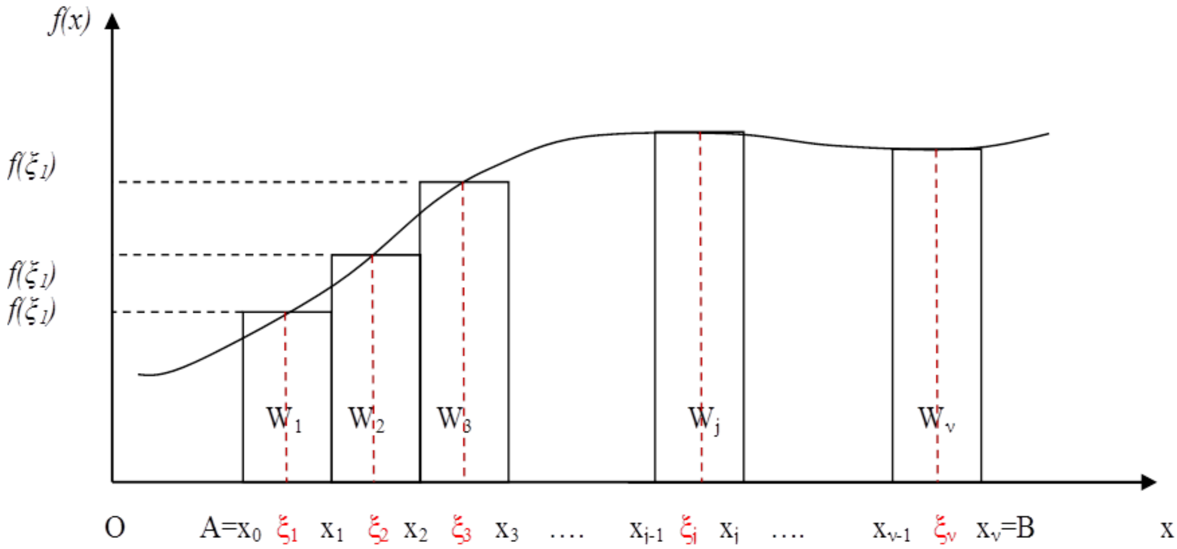
$$\vec{F}\ \ x\ = f(x)\vec{i}$$



Εικόνα 4.6 *Γράφημα μεταβλητής δύναμης*

Στην περίπτωση αυτή αντιλαμβανόμαστε πως το Έργο της μεταβλητής δύναμης F είναι ένα γινόμενο της συνάρτησης *f(x)*, επί το μήκος του διαστήματος [Α,Β], μόνο που δεν ξέρουμε τον τρόπο για να το υπολογίσουμε. Για τον λόγο αυτό ξαναγυρίζουμε στο Έργο σταθερής δύναμης. Για να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε την κατακτημένη γνώση θα πρέπει να «μετατρέψουμε» την μεταβλητή δύναμη, σε σταθερή! Για τον λόγο αυτό διαμερίζουμε το διάστημα [Α,Β] σε πολλά μικρά υποδιαστήματα, έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε πως κατά μήκος του κάθε υποδιαστήματος η τιμή της δύναμης F παραμένει «σταθερή». Το τελικό αποτέλεσμα για το συνολικό Έργο είναι, προφανώς, το άθροισμα όλων των Έργων των υποδιαστημάτων.

Βέβαια προκύπτει ένα σημαντικό ζήτημα: Σε ποιο σημείο θα υπολογίσουμε την «σταθερή» τιμή της συνάρτησης *f(x)* στο κάθε υποδιάστημα (έστω στο τυχαίο (j-οστό) υποδιάστημα). Επειδή το πρόβλημα αυτό είναι αρκετά περίπλοκο, θα επιθλέξουμε προς το παρόν (αυθαίρετα και λανθασμένα) το μέσον του κάθε υποδιαστήματος. Με βάση όλα αυτά καταλήγουμε στο επόμενο γράφημα:



Εικόνα 4.7 *Γράφημα μεταβλητής δύναμης διαιρεμένο σε υποδιαστήματα*

Από το γράφημα αυτό προκύπτουν οι σχέσεις:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_j + \ldots + W_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} W_j =$$

$$= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_j)\Delta x_j + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x_\nu =$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu} f(\xi_j)\Delta x_j$$

όπου θέσαμε $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ και γενικά $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

Γίνεται φανερή πλέον η αδυναμία που προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε το σημείο του κάθε υποδιαστήματος στο οποίο υπολογίστηκε η τιμή της συνάρτησης *f*, σαν η σταθερή τιμή της σε ολόκληρο το υποδιάστημα. Πρόκειται για μια αυθαιρεσία που μπορεί να κοστίσει σημαντικά σε ακρίβεια. *Εάν*, στην προσπάθεια να επιτύχουμε την μέγιστη δυνατή ακρίβεια, διαμερίσουμε το διάστημα [Α,Β] σε άπειρα υποδιαστήματα, τότε γίνεται φανερό πως η πιο πάνω αδυναμία ελαχιστοποιείται. Στην περίπτωση αυτή στο προηγούμενο άθροισμα μεταβάλλουμε το σύμβολο της άθροισης (Σ), αντικαθιστώντας το με το σύμβολο S, ελαφρώς παραφθαρμένο:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{\nu} f(\xi_j)\Delta x_j\right]=\int_A^B \left[f(\xi_j)\Delta x_j\right]=\int_A^B f(x)dx$$

Η έκφραση

$$\int_A^B f(x)dx$$

ονομάζεται «Ορισμένο Ολοκλήρωμα της συνάρτησης *f(x)*, στο διάστημα ολοκλήρωσης [Α,Β]. Η κατανόηση της προηγούμενης σχέσης με την οποία ορίστηκε το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι σημαντικότατη, μια και αποτελεί βασικό εργαλείο στα χέρια οποιουδήποτε προσπαθεί να «μεταφράσει» σε μαθηματική σχέση ένα πρόβλημα, στη βάση του οποίου βρίσκεται το γινόμενο μιας συνάρτησης επί το μήκος ενός υποδιαστήματος του διαστήματος στο οποίο ορίζεται.

Είναι επίσης σημαντικό να αντιληφθεί ο αναγνώστης πως **το Ορισμένο Ολοκλήρωμα δεν είναι ένα εμβαδόν**, έστω κι αν συχνά χρησιμοποιούμε αυτή την παρομοίωση για λόγους παραστατικότητας.

4.2.2 Ορισμός του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Θεωρώντας πως ο μέσος αναγνώστης δεν ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο φθάνουμε στον τρόπο υπολογισμού του Ορισμένου Ολοκληρώματος, δίνουμε «αξιωματικά» τον ορισμό:

Ορισμός: Εάν η συνάρτηση *F(x)* είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της *f(x)*, εάν δηλαδή ισχύει:

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

τότε το Ορισμένο Ολοκλήρωμα ορίζεται με την επόμενη σχέση:

$$\int_A^B f(x)dx = F(x)\Big|_A^B = F(x)\Big|_A^B = F(B)-F(A)$$

Παράδειγμα: Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το Έργο της δύναμης:

$$\vec{F}\ x\ = f(x)\vec{i} = \left(\frac{1}{4}x+1\right)\vec{i}$$

όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το 0 στο 4.

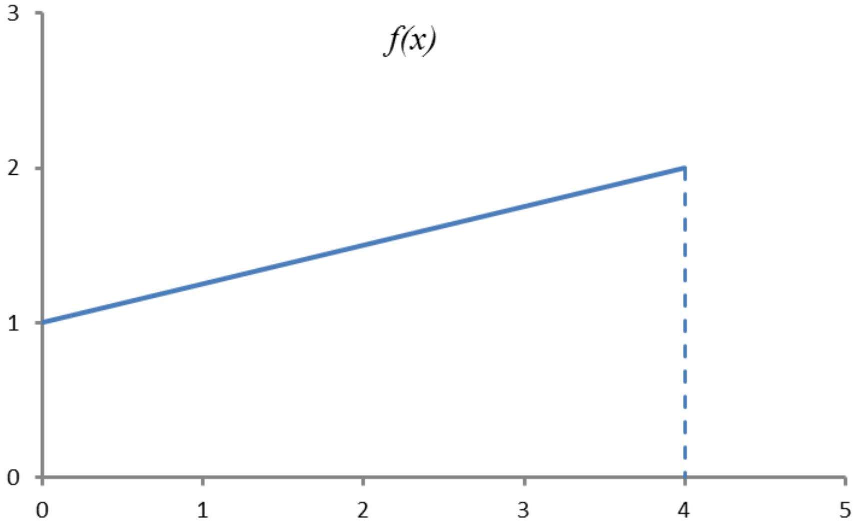
Λύση: Με βάση τα όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το Έργο της F δίνεται από το Ορισμένο Ολοκλήρωμα:

$$W=\int_A^B f(x)dx=\int_0^4\left(\frac{1}{4}x+1\right)dx=\left[\frac{1}{8}x^2+x\right]_0^4 = \ 2+4\ -0=6$$

όπου οι μονάδες του Έργου (εάν η δύναμη μετριέται σε Newton (1 N) και τη μήκος σε μέτρα (1 m)) είναι:

1 Joule = 1Nm.

Προσπαθώντας να υπολογίσουμε και γεωμετρικά το αποτέλεσμα, δημιουργούμε το γράφημα της συνάρτησης *f(x)*.



Εικόνα 4.8 *Γράφημα της συνάρτησης* $\vec{F}\ \ x\ =\left(\frac{1}{4}x+1\right)\vec{i}$

Το Έργο θα δίνεται από το εμβαδόν του τραπεζίου:

$$W=\frac{B+\beta}{2}\upsilon=\frac{1+2}{2}4=6$$

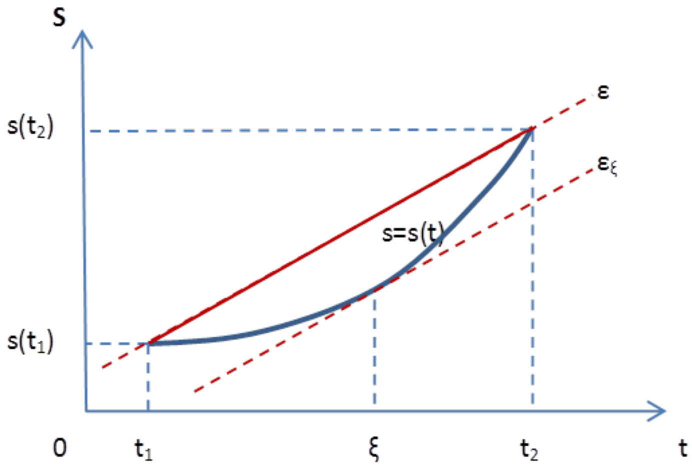
□

4.2.3 Ερμηνεία του Ορισμού για τον υπολογισμό του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Αρχικά να πούμε πως η κατανόηση της τρέχουσας παραγράφου δεν αποτελεί προαπαιτούμενο για την κατανόηση των επόμενων εννοιών που θα ακολουθήσουν στη συνέχεια. Άρα, ο αναγνώστης μπορεί να την παραλείψει.

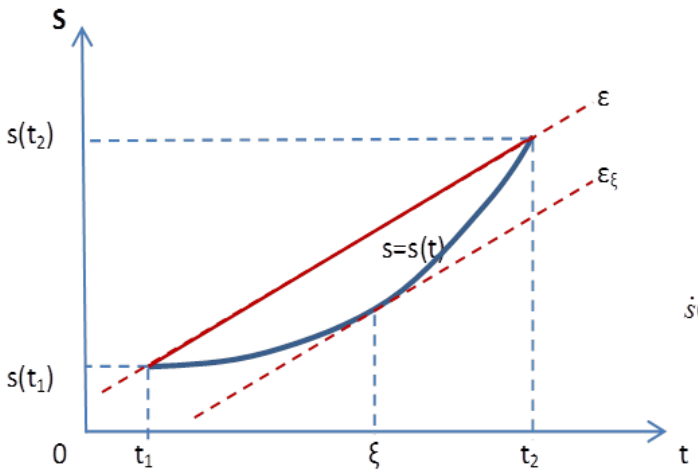
Στα πλαίσια του Διαφορικού λογισμού καταλήξαμε σε κάποια συμπεράσματα, τα οποία χρειαζόμαστε για τη συνέχεια.   Υπενθυμίζουμε:

- ✓ Μία συνάρτηση s=s(t) που περιγράφει τη θέση ενός κινητού λέγεται συνάρτηση θέσης του κινητού.



Εικόνα 4.9 *Συνάρτηση θέσης κινητού*

- ✓ Στο γράφημα της s(t) η ευθεία που ενώνει τα σημεία (t_1,s(t_1)) και (t_2,s(t_2)) έχει κλίση Δs/Δt=[s(t_2) – s(t_2)]/(t_2–t_1), η οποία όμως είναι (εξ ορισμού) η μέση ταχύτητα της κίνησης από την χρονική στιγμή t_1 έως την t_2. Επομένως οι κλίσεις στο γράφημα της συνάρτησης θέσης αντιστοιχούν σε ταχύτητες και η κόκκινη ευθεία περιγράφει την κίνηση του (θεωρητικού) κινητού μέσης ταχύτητας.
- ✓ Η φυσική ερμηνεία του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής περιλαμβανόταν στη φράση πως: «Σε κάθε μετακίνηση (από την χρονική στιγμή t_1 έως την t_2) υπάρχει τουλάχιστον μία χρονική στιγμή ξ, του εν λόγω διαστήματος, κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα είναι ίση με την μέση ταχύτητα του συνολικού χρονικού διαστήματος:



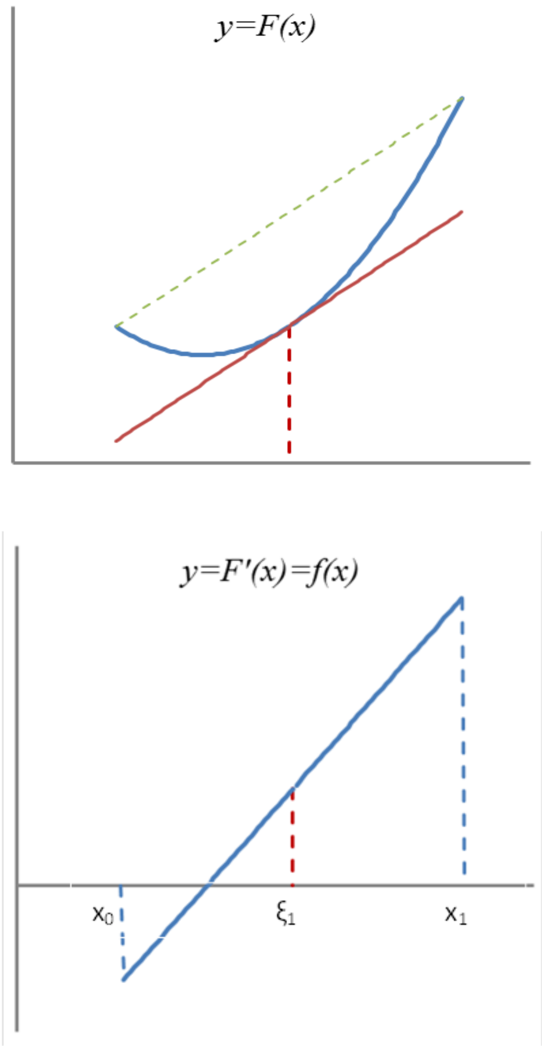
$$\dot{s}(\xi) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Εικόνα 4.10 *Εφαρμογή του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής στη συνάρτηση θέσης κινητού*

Έστω η συνάρτηση *y=f(x)* της οποίας η αρχική (το αόριστο ολοκλήρωμα) είναι η *y=F(x)*. Έστω, επίσης, πως στο διάστημα *(A=x_0,B=x_ν)* η συνάρτηση *F(x)* είναι συνεχής στο κλειστό ξαι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάσυημα, έτσι ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής (ΘΜΤ) έχουμε πως για τη συνάρτηση *F(x)* **η μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής της είναι ίση με την κλίση της στο σημείο ξ_1, είναι ίση δηλαδή με την τιμή της παραγώγου της στο ξ_1 ($f(\xi_1)=F'(\xi_1)$).**

Αν λοιπόν θεωρήσουμε πως το διάστημα (x_0,x_1) είναι το πρώτο υποδιάστημα, μήκους $\Delta x_1=x_1-x_0$, από τα ν υποδιαστήματα στα οποία έχουμε διαμερίσει το συνολικό διάστημα της ορισμένης ολοκλήρωσης της *f(x)*, τότε η τιμή της *f* στο σημείο ξ_1 θα είναι ίση με τον μέσο όρο των τιμών της (δηλαδή με τον μέσο όρο των κλίσεων της *F* στο υποδιάστημα) σε ολόκληρο το υποδιάστημα (λαμβάνοντας μάλιστα υπ' όψηn της και τις ενδεχόμενες αρνητικές τιμές – όπως στο παρακάτω γράφημα).



Εικόνα 4.11 και 4.12 *Εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής για συνάρτηση F(x) που στο παράδειγμα είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, οπότε η παράγωγός της F'(x)=f(x) είναι πρωτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση.*

Γράφοντας το ΘΜΤ για την συνάρτηση F(x) έχουμε:

$$f(\xi_1) = F'(\xi_1) = \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \Rightarrow$$

$$F'(\xi_1)(x_1 - x_0) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) = f(\xi_1)\Delta x_1 = F(x_1) - F(x_0)$$

όπου η έκφραση $f(\xi_1)(x_1 - x_0) = f(\xi_1)\Delta x_1$ αντικαταστάθηκε από την $F(x_1) - F(x_0)$ η οποία δίνει **<u>με απόλυτη ακρίβεια</u>** το γινόμενο της τιμής της συνάρτησης (που μεταβάλλεται διαρκώς), επί το μήκος του διαστήματος $[x_0, x_1]$, χάρη στο ΘΜΤ.

Η γενίκευση της παραπάνω σχέσης μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

1. Θέτοντας στη θέση του x_1 το B και εφαρμόζοντας την ίδια σχέση:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_A^B f(x)dx = F(x_1) - F(x_0) = F(B) - F(A)$$

2. Εφαρμόζοντας ν-φορές την πιο πάνω σχέση, για κάθε υποδιάστημα:

$$\int_A^B f(x)dx = \sum_{j=1}^{\nu} f(\xi_j)\Delta x_j = \sum_{j=1}^{\nu}\left[F(x_j) - F(x_{j-1})\right] =$$

$$= \left(F(x_1) - F(x_0)\right) + \left(F(x_2) - F(x_1)\right) + \left(F(x_3) - F(x_2)\right) + \ldots$$

$$\ldots. + \left(F(x_{\nu-1}) - F(x_{\nu-2})\right) + \left(F(x_\nu) - F(x_{\nu-1})\right) =$$

$$= F(x_\nu) - F(x_0) = F(B) - F(A)$$

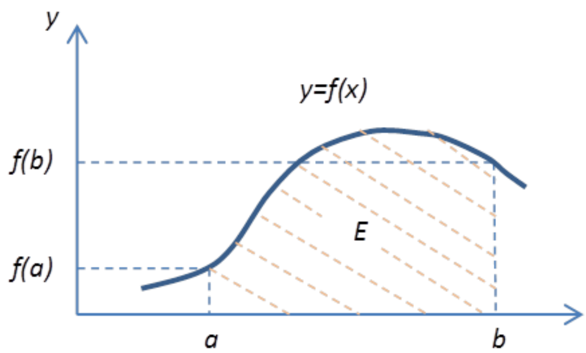
4.2.4 Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Οι επόμενες ιδιότητες είναι πολύ σημαντικές και πρέπει να γίνουν αντικείμενο προσεκτικής μελέτης:

1η) $$\int_a^b \left(\kappa f(x) \pm \lambda g(x)\right) dx = \kappa\int_a^b f(x)dx \pm \lambda\int_a^b g(x)dx$$

η οποία προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα των Αόριστων Ολοκληρωμάτων.

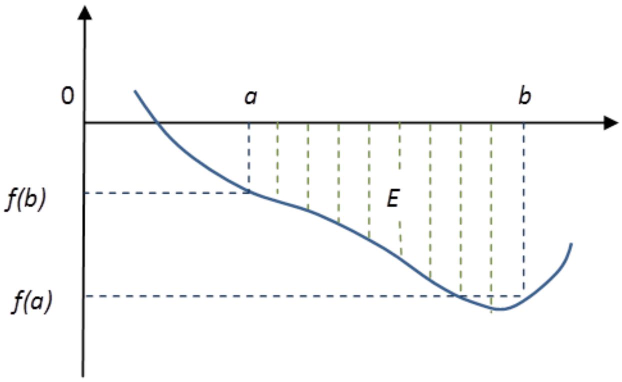
2η) Εάν $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a,b)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = E$



Εικόνα 4.13 *Γράφημα συνάρτησης όταν f(x)>0*

όπου Ε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου Τόπου, ο οποίος ορίζεται από τον άξονα των *x*, την καμπύλη της συνάρτησης *f* και τις ευθείες *x=a* και *x=b*.

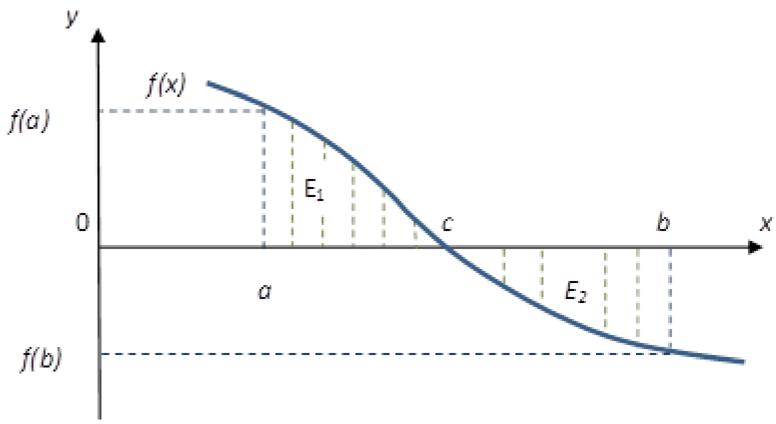
3η) Εάν $f(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a,b)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = -E$



Εικόνα 4.14 *Γράφημα συνάρτησης όταν f(x)<0*

όπου Ε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου Τόπου, ο οποίος ορίζεται από τον άξονα των *x*, την καμπύλη της συνάρτησης *f* και τις ευθείες *x=a* και *x=b.*

4η) Εάν η συνάρτηση *f(x)* είναι η συνάρτηση του γραφήματος:



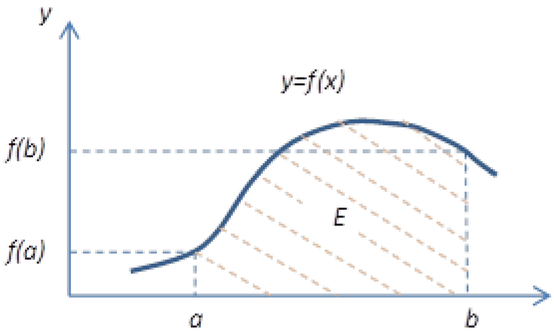
Εικόνα 4.15

τότε: $\int_a^b f(x)dx = E_1 - E_2$ όπου E_1 το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου Τόπου, ο οποίος ορίζεται από τον άξονα των *x*, την καμπύλη της συνάρτησης *f* και τις ευθείες *x=a* και *x=c*, και E_2 το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου Τόπου, ο οποίος ορίζεται από τον άξονα των *x*, την καμπύλη της συνάρτησης *f* και τις ευθείες *x=c* και *x=b*.

5η) Ισχύει η ισότητα: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Πράγματι έχουμε: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = - \; F(a)-F(b) \; = -\int_a^b f(x)dx$

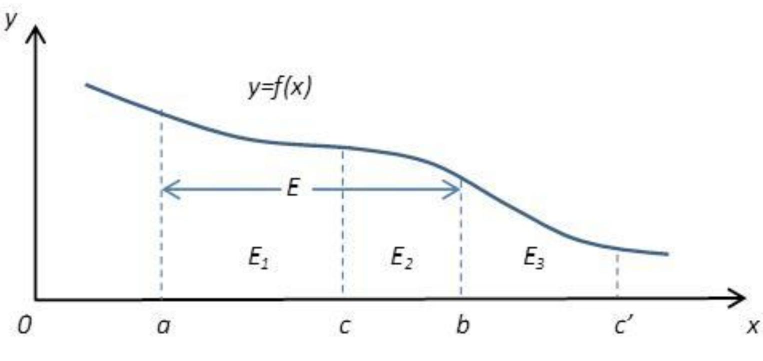
Όμως αξίζει να δώσουμε ακόμη μία ερμηνεία. Ας υποθέσουμε πως η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι αυτή που περιγράφεται στο παρακάτω γράφημα (δηλαδή $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a,b)$).



Εικόνα 4.16

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx = E$ θα ισούται με το εμβαδόν Ε, διότι αποτελεί άθροισμα των θετικών ποσοτήτων $f(x)dx$. Αντίθετα, το ολοκλήρωμα $\int_b^a f(x)dx$ θα είναι μία ποσότητα αρνητική, διότι θα αποτελεί άθροισμα των αρνητικών ποσοτήτων $f(x)dx$ (το *dx* θα είναι αρνητικό, μια και «πηγαίνουμε» από το *b* στο *a* (άρα με βήμα αρνητικό)).

6η) Ισχύει η ισότητα: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, είτε το *c* είναι εντός του διαστήματος *(a,b)*, είτε εκτός. Πράγματι, παίρνοντας το παράδειγμα του επόμενου γραφήματος



Εικόνα 4.17

όπου η συνάρτηση *f(x)* είναι θετική, για κάθε *x* που ανήκει στα διαστήματα *(a,c)*, *(c,b)* και *(b,c')*, παρατηρούμε (γεωμετρικά) πως

$$\int_a^b f(x)dx = E = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = E_1 + E_2 \qquad \text{και}$$

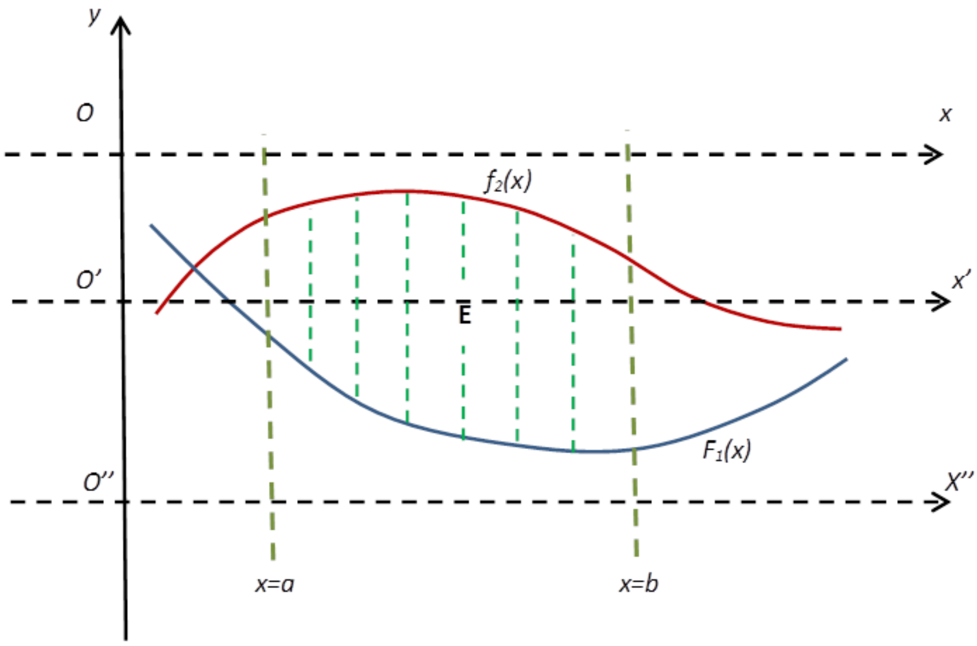
$$\int_a^b f(x)dx = E = \int_a^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^b f(x)dx = E_1 + E_2 + E_3 - E_3 = E_1 + E_2$$

όπου η τιμή του ολοκληρώματος $\int_{c'}^{b} f(x)dx$, είναι αρνητική λόγω του ότι ολοκληρώνουμε από το *c'* προς το *b*.

7η) Εάν $f_2(x) \geq f_1(x), \quad \forall x \in (a,b)$ τότε

$$\int_a^b f_2(x) - f_1(x)\ dx = E,$$

όπου Ε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου Τόπου, ο οποίος ορίζεται από τις καμπύλες των συναρτήσεων f_1 και f_2 και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$.



Εικόνα 4.18 *Γράφημα τόπου, που περιορίζεται μεταξύ δύο καμπυλών*

Μάλιστα, αξίζει να παρατηρήσουμε πως το εν λόγω ολοκλήρωμα θα ισούται με το εμβαδόν Ε, ανεξάρτητα από τη θέση του άξονα των *x*, σε σχέση με τις δύο συναρτλησεις.

8η) Ισχύει η ισότητα: $\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad = F(a) - F(a)$, κάτι που περιγράφεται γεωμετρικά με την έκφραση: «Το εμβαδόν ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι μηδέν».

4.2.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1^{ο}: Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τόπου που ορίζεται από τον άξονα των *x*, την συνάρτηση *f(x) = -2x^2+4x+6* και τις δύο ρίζες της *f*, προσεγγιστικά (γεωμετρικά) και ακριβώς (με τη βοήθεια ολοκληρώματος).

Λύση:

α) Υπολογισμός των ριζών της *f* :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{-4} = \frac{-4 \pm 8}{-4} = \left[\begin{array}{l} \rho_1 = -1 \\ \rho_1 = 3 \end{array} \right.$$

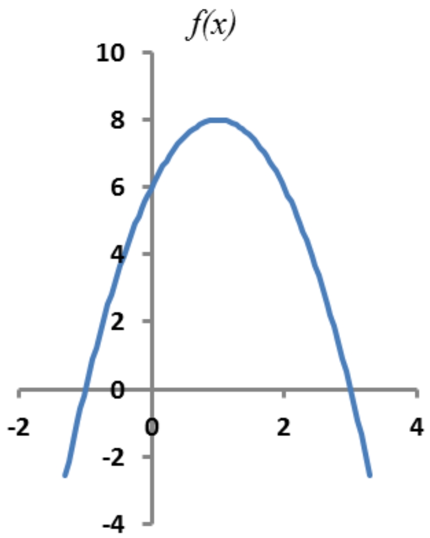
β) Εκτίμηση του εμβαδού του τόπου: Αρχικά να παρατηρήσουμε πως η πολυωνυμική συνάρτηση *f* είναι μία παραβολή που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου (α=-2) είναι αρνητικός). Αυτό μπορούσαμε να το συμπεράνουμε παίνροντας τα όρια στο συν και στο πλην άπειρο:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[-2x^2 + 4x + 6 \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[-2x^2 \right] = -\infty$$

και

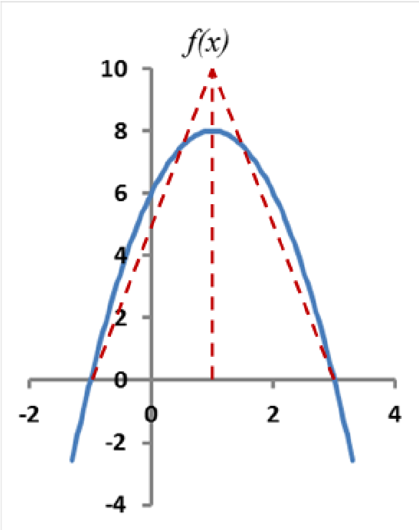
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left[-2x^2 + 4x + 6 \right] = \lim_{x \to \infty} \left[-2x^2 \right] = -\infty$$

Αφού δημιουργήσουμε την παρακάτω γραφική παράσταση, για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε (γεωμετρικά) το ζητούμενο εμβαδό θα πρέπει να το αντιστοιχίσουμε με ένα γεωμετρικό σχήμα (που το εμβαδόν του να υπολογίζεται εύκολα), του οποίου το εμβαδό θεωρούμε ισοδύναμο με το ζητούμενο.



Εικόνα 4.19 *Γράφημα της συνάρτησης της συνάρτησης f(x) = -2x^2+4x+6*

Αν για παράδειγμα επιλέξουμε το τρίγωνο, με βάση το επόμενο γράφημα θα είχε βάση το διάστημα ανάμεσα στις ρίζες και ύψος 10, δηλαδή Ε=4*10/2=20 (τετραγωνικές μονάδες).



Εικόνα 4.20 *Προσέγγιση της συνάρτησης* f(*x*) = *-2x*^{2}*+4x+6 από τρίγωνο*

γ) Ακριβής υπολογισμός:

$$E=\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)dx=\int_{-1}^{3}\left[-2x^2+4x+6\right]dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}=$$

$$=-18+18+18-\left[\frac{1}{3}+2-6\right]=18+4-\frac{1}{3}=21.6667$$

Αποτέλεσμα που δεν απέχει ιδιαίτερα από την πρόβλεψή μας (πρόκειται για ένα σχετικό σφάλμα μικρότερο του 8 %, απολύτως παραδεκτό για τέτοιους υπολογισμούς)!

□

Παράδειγμα 2^{o}: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\int_{0}^{\pi} x\eta\mu(x)dx$

Λύση:

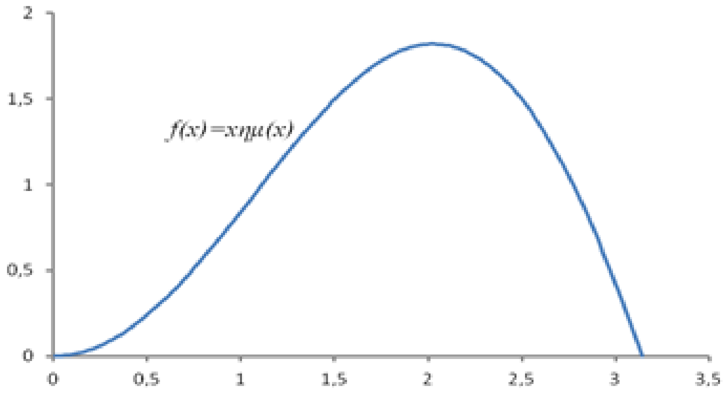
α) Υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος της f.

$$I=\int x\eta\mu(x)dx=-\int xd\sigma\upsilon\nu(x)=-x\sigma\upsilon\nu(x)+\int\sigma\upsilon\nu(x)dx=-x\sigma\upsilon\nu(x)+\eta\mu(x)+c$$

β) Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος Ι:

$$I=\int_{0}^{\pi} x\eta\mu(x)dx=\left[-x\sigma\upsilon\nu(x)+\eta\mu(x)\right]_{0}^{\pi}=-\pi\sigma\upsilon\nu(\pi)+\eta\mu(\pi)-0=\pi$$

Στη συνέχεια προσπαθήστε, με τη βοήθεια του γραφήματος, να υπολογίσετε γεωμετρικά (αντικαθιστώντας τα εμβαδά που θέλετε με γνωστού εμβαδού γεωμετρικά σχήματα) την τιμή του Ι.



Εικόνα 4.21 *Γραφική παράσταση της χημ(x)*

□

Παράδειγμα 3^{o}: Να υπολογισθεί το συνολικό εμβαδό των τόπων που ορίζονται από τον άξονα των *x* και την συνάρτηση *f(x)* = $2x^3-14x^2+8x+24$, όταν δίνεται μία ρίζα της (ρ=2).

Λύση:

α) Υπολογισμός των ριζών της f .

<u>Σημαντική παρατήρηση</u>: Στο κεφάλαιο των πολυωνυμικών συναρτήσεων (π.σ.) μάθαμε πως εάν μία π.σ. *p(x)*, ν-ου βαθμού, έχει ρίζα την ρ, τότε θα διαιρείται με το (*x*-ρ). Το πηλίκο (π(*x*)) της διαίρεσης είναι μία π.σ. ν-1 βαθμού και οι ρίζες του π(*x*) είναι οι υπόλοιπες ν-1 ρίζες της αρχικής *p(x)*. Ο υπολογισμός της π.σ. γίνεται είτε με την εκτέλεση της διαίρεσης, είτε με το Σχήμα Horner.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3-14x^2+8x+24 & x-2 \\ \cline{2-2}
-2x^3+4x^2 \qquad\qquad & 2x^2-10x+12 \\ \cline{1-1}
-10x^2+8x \qquad & \\
10x^2-20x \qquad & \\ \cline{1-1}
-12x+24 & \\
12x+24 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Επομένως οι υπόλοιπες δύο ρίζες είναι οι ρίζες της πολυωνυμικής συνάρτησης π(*x*) = $2x^2-10x-12$, που υπολογίζονται εύκολα: $\rho_{1,2}$ = -1 και 6.

β) Κατάστρωση του ολοκληρώματος

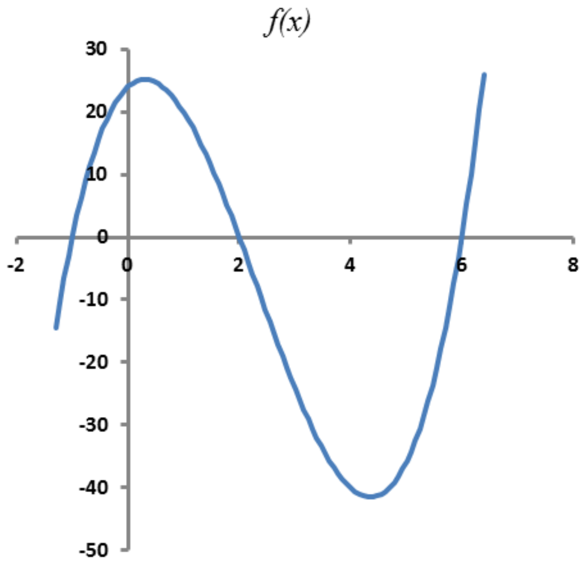
Όταν αναφερθήκαμε στις γραφικές παραστάσεις των π.σ. 3^{ου} βαθμού, εξηγήσαμε πως εάν έχουν τρεις πραγματικές ρίζες, τότε η μορφή του γραφήματός τους είναι αυτή ενός πλάγιου S και το πρόσημό τους είναι θετικό ανάμεσα στην πρώτη και τη δεύτερη ρίζα, ενώ είναι αρνητικό ανάμεσα στη δεύτερη και την τρίτη.

Αυτό, άλλωστε, μπορεί να γίνει φανερό με τη βοήθεια των ορίων στο άπειρο και επιβεβαιώνεται και από τη γραφική παράσταση της *f*.

Τώρα εάν θέλαμε να κάνουμε μία εκτίμηση των δύο εμβαδών (πάντα με τη βοήθεια τριγώνων), θα λέγαμε:

$E_1 = 3*30/2=45$, $E_2 = 4*50/2=100$

και συνολικά E=145 (τετραγωνικές μονάδες)



Εικόνα 4.22 *Γράφημα πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού*

Επομένως το ολοκλήρωμα που δίνει το ακριβές αποτέλεσαμα είναι:

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)dx - \int_{\rho_2}^{\rho_3} f(x)dx = \int_{-1}^{2}\left[2x^3 - 14x^2 + 8x + 24\right]dx - \int_{2}^{6}\left[2x^3 - 14x^2 + 8x + 24\right]dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} - \frac{14x^3}{3} + 4x^2 + 24x\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{x^4}{2} - \frac{14x^3}{3} + 4x^2 + 24x\right]_{2}^{6} = \left[8 - \frac{112}{3} + 48\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{14}{3} + 4 - 24\right] -$$

$$- \left[\ 648 - 1008 + 144 + 144\ - \left[8 - \frac{112}{3} + 16 + 48\right]\right] =$$

$$= 140.16667$$

Παρατήρηση: Το αρχικό ολοκλήρωμα θα μπορούσε να γραφεί, με τη βοήθεια της απόλυτης τιμής, υπό τη μορφή:

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_3} \left| f(x) \right| dx = \int_{-1}^{6} \left| 2x^3 - 14x^2 + 8x + 24 \right| dx$$

όμως η επίλυσή του θα κατέληγε στα προηγούμενα.

□

Παράδειγμα 4ο: Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τόπου που ορίζεται από τις συναρτήσεις:

$f_1(x) = x^2-2$* και *$f_2(x) = -x$

Λύση.

α) Υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων τομής:

Οι συντεταγμένες των σημείων τομής έχουν την ιδιότητα να επαληθεύουν ταυτόχρονα και τις δύο συναρτήσεις. Άρα ο υπολογισμός τους επιτυγχάνεται με τη θεώρηση των δύο συναρτήσεων σαν ένα σύστημα δύο εξισώσεων, με δύο αγνώστους (x και y).

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 2 \\ y &= -x \end{aligned}\right] \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2 = -x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

και αντικαθιστώντας τις δύο τιμές του x στην μία από τις δύο εξισώσεις (έστω τη δεύτερη), υπολογίζουμε και τις αντίστοιχες τιμές του y. Έτσι τα δύο σημεία τομής έχουν τις συντεταγμένες: (-2 , 2) και (1 , -1).

Παρατήρηση. Συχνά τίθεται η ερώτηση: Στα γραμμικά συστήματα έχουμε τρεις δυνατές περιπτώσεις, (i) να έχουν ακριβώς μία λύση, (ii) να έχουν άπειρες λύσεις (σύστημα αόριστο), (iii) να μην έχουν καμία λύση (σύστημα αδύνατο). Πως λοιπόν συμβαίνει το σύστημα που μόλις επιλύθηκε να έχει δύο (ακριβώς) λύσεις; Η απάντηση είναι απλή: **Το σύστημα αυτό δεν είναι γραμμικό** (λόγω του παράγοντα x^2).

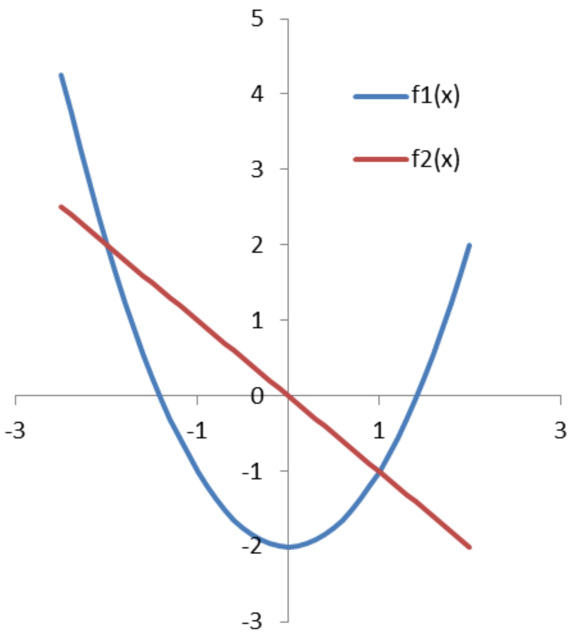
β) Κατάστρωση του ολοκληρώματος και υπολογισμός του.

Για να καταστρώσουμε το ολοκλήρωμα θα πρέπει να γνωρίζουμε ποια από τις δύο συναρτήσεις παίρνει μεγαλύτερες τιμές από την άλλη, στο διάστημα ανάμεσα από τα δύο σημεία τομής (-2 , 1). Έχουμε δύο τρόπους να σκεφτούμε:

(i) Η f_1 είναι μία παραβολή με θετικό συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου. Άρα στρέφει τα κοίλα της προς τα άνω. Επομένως μπορεί να καθορίσει έναν κλειστό τόπο με μία ευθεία (την f_2) μόνον εάν η ευθεία βρίσκεται από πάνω, ακριβώς όπως φαίνεται στο επόμενο γράφημα.

(ii) Επιλέγουμε μία τιμή για το x, που να είναι εσωτερική του διαστήματος (-2 , 1), έστω την x=0, και ελέγχουμε την τιμή των δύο συναρτήσεων στο σημείο αυτό:

$f_1(0)=[x^2-2]_{x=0}=-2 \ < \ f_2(0)=[-x]_{x=0}=0$



Εικόνα 4.23 *Γράφημα τόπου που ορίζεται από τις συναρτήσεις:* $f_1(x) = x^2-2$ *και* $f_2(x) = -x$

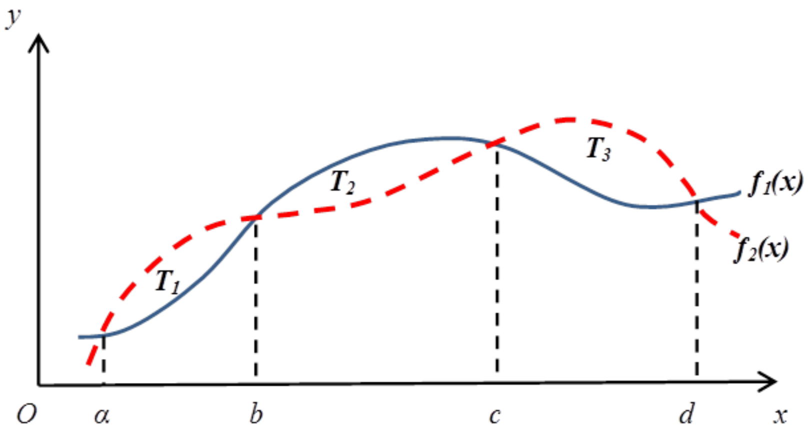
Άρα το ολοκλήρωμα:

$$E=\int_a^b \; f_2(x)-f_1(x)\; dx=\int_{-2}^{1}\left[-x- \;\; x^2-2\;\;\right]dx=\int_{-2}^{1}\left[-x^2-x+2\right]dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=$$

$$=\left[-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right]-\left[\frac{8}{3}-2-4\right]=4.5$$

□

Παράδειγμα 5^{ο}: Να γραφεί η σχέση που δίνει το συνολικό εμβαδό των τόπων T_1, T_2 και T_3, σύμφωνα με το επόμενο σχήμα.



Εικόνα 4.24

1^{ος} τρόπος: $E=E_1+E_2+E_3=\int_a^d \left|f_2(x)-f_1(x)\right|dx$

2^{ος} τρόπος:

$$E=E_1+E_2+E_3=\int_a^b \; f_2(x)-f_1(x)\; dx+\int_b^c \; f_1(x)-f_2(x)\; dx+\int_c^d \; f_2(x)-f_1(x)\; dx=$$

$$=\int_a^b \; f_2(x)-f_1(x)\; dx-\int_b^c \; f_2(x)-f_1(x)\; dx+\int_c^d \; f_2(x)-f_1(x)\; dx$$

όπου ο 1^{ος} τρόπος θα καταλήξει, τελικά, στον 2^{ο}.

□

Παράδειγμα 6^{ο}: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=3\int_{-6}^{2}\frac{x^2+6}{x^2+9}dx-9\int_{2}^{-6}\frac{1}{x^2+9}dx=24$

Λύση: Αρχικά παρατηρούμε πως αντιστρέφοντας τα όρια του 2ου ολοκληρώματος (και αλλάζοντας το πρόσημό του), τα δύο ολοκληρώματα μπορούν να ενοποιηθούν:

$$\mathrm{I}=3\int_{-6}^{2}\frac{x^2+6}{x^2+9}dx-9\int_{2}^{-6}\frac{1}{x^2+9}dx=3\int_{-6}^{2}\frac{x^2+6}{x^2+9}dx+3\int_{-6}^{2}\frac{3}{x^2+9}dx=$$

$$3\int_{-6}^{2}\left[\frac{x^2+6}{x^2+9}+\frac{3}{x^2+9}\right]dx=3\int_{-6}^{2}\left[\frac{x^2+9}{x^2+9}\right]dx=$$

$$=3\int_{-6}^{2}1dx=3\left(x\right)_{-6}^{2}=3\left(2+6\right)=24$$

□

Παράδειγμα 7ο: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int_{0}^{\pi}x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

Λύση: Αρχικά θα λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I}=\int x\sigma\upsilon\nu^2(x)\,dx=\int x\sigma\upsilon\nu(x)\,d\eta\mu(x)=x\sigma\upsilon\nu(x)\,\eta\mu(x)-\int\eta\mu(x)\,d\left[x\sigma\upsilon\nu(x)\right]=$$

$$=x\sigma\upsilon\nu(x)\,\eta\mu(x)-\int\eta\mu(x)\left[\sigma\upsilon\nu(x)-x\eta\mu(x)\right]dx=$$

$$=x\sigma\upsilon\nu(x)\,\eta\mu(x)-\int\eta\mu(x)\,\sigma\upsilon\nu(x)\,dx+\int x\eta\mu^2(x)\,dx=$$

$$=x\sigma\upsilon\nu(x)\,\eta\mu(x)-\int\eta\mu(x)\,d\eta\mu(x)+\int x\left(1-\sigma\upsilon\nu^2(x)\right)dx=$$

$$=x\sigma\upsilon\nu(x)\,\eta\mu(x)-\frac{\eta\mu^2(x)}{2}+\int xdx-\int x\sigma\upsilon\nu^2(x)\,dx=$$

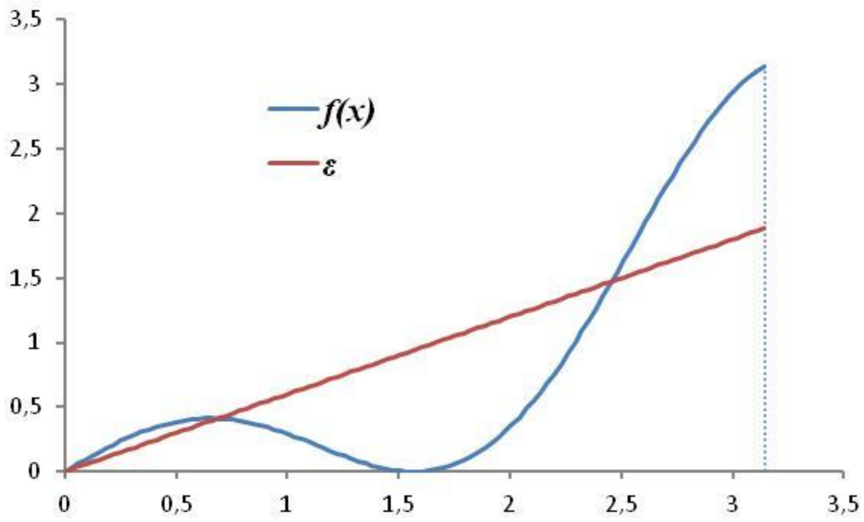
$$=x\sigma\upsilon\nu(x)\,\eta\mu(x)-\frac{\eta\mu^2(x)}{2}+\frac{x^2}{2}-I \qquad \Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\left[x\sigma\upsilon\nu(x)\,\eta\mu(x)-\frac{\eta\mu^2(x)}{2}+\frac{x^2}{2}\right]+c$$

οπότε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I}=\int_{0}^{\pi}x\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\frac{1}{2}\left[x\sigma\upsilon\nu(x)\,\eta\mu(x)-\frac{\eta\mu^2(x)}{2}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}=\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{4}$$

Αξίζει να υπολογισθεί το εμβαδόν που «γράφει» η συνάρτηση *f*, με τη βοήθεια του τριγώνου του επομένου γραφήματος, το οποίο θεωρούμε πως έχει παρόμοιο εμβαδό.



□

Παράδειγμα 8ο: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\mathrm{I}=\int_0^2 \left|1-x^2\right| dx$

Λύση: Απαλλασσόμαστε από το σύμβολο της απόλυτης τιμής, με τη βοήθεια της σχέσης:

$$\left|1-x^2\right|=\begin{cases}1-x^2 & \text{αν} \quad 0\le x\le 1\\ x^2-1 & \text{αν} \quad 1<x\le 2\end{cases}$$

οπότε έχουμε:

$$\mathrm{I}=\int_0^2 \left|1-x^2\right| dx=\int_0^1 \left(1-x^2\right) dx+\int_1^2 \left(x^2-1\right) dx=\dots$$

και η συνέχεια είναι εύκολη.

□

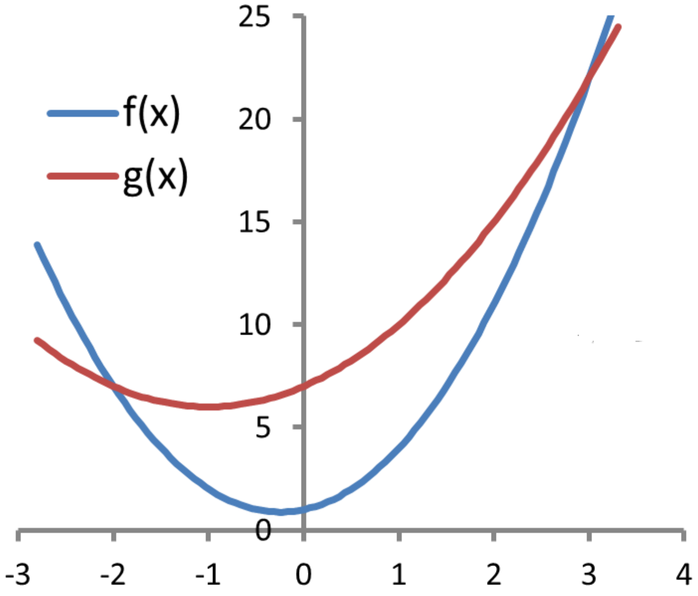
Παράδειγμα 9ο: Να υπολογισθεί το εμβαδόν που ορίζεται από τις καμπύλες C_f και C_g των συναρτήσεων *f(x)=2x²+x+1* και *g(x)=x²+2x+7*.

Λύση: Πρόκειται για δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις δεύτερου βαθμού, των οποίων η γραφική παράσταση είναι η παραβολή. Από τη στιγμή που δεν μας δίνονται τα άκρα του εμβαδού που αναζητούμε (πράγμα που θα μπορούσε να γίνει με τη βοήθεια δύο κατακόρυφων ευθειών της μορφής $x=c_1$ *και* $x=c_2$), αντιλαμβανόμαστε πως το ζητούμενο εμβαδόν ορίζεται από τις δύο καμπύλες και από τα δύο σημεία τομής των δύο παραβολών. Επομένως αναζητούμε τα δύο αυτά σημεία τομής. Πρόκειται για τα δύο σημεία του επιπέδου, των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν ταυτόχρονα τις εξισώσεις των δύο παραβολών:

$$\left.\begin{aligned} y&=2x^2+x+1\\ y&=x^2+2x+7\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2x^2+x+1=x^2+2x+7 \quad\Rightarrow\quad x^2-x-6=0 \quad\Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}x_1=\ \ 3\\ x_2=-2\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1=\left[x^2+2x+7\right]_{x=3}=22\\ y_2=\left[x^2+2x+7\right]_{x=-2}=7\end{cases}$$

όπου δεν ήταν απαραίτητος ο υπολογισμός της συντεταγμένης *y* του κάθε σημείου. Όλα αυτά μπορούν να γίνουν κατανοητά με την επόμενη γραφική παράσταση:



Για τον υπολογισμό του ζητούμενου εμβαδού πρέπει αρχικά να ξεχωρίζουμε ποια συνάρτηση παίρνει μεγαλύτερες τιμές, στο διάστημα (-2,3). Ο πιο απλός τρόπους είναι να υπολογίσουμε την τιμή των δύο συναρτήσεων σε κάποιο από τα σημεία του διαστήματος αυτού, έστω του x=0, όπου έχουμε f(0)=1 και g(0)=7, πράγμα που μαρτυρά πως η συνάρτηση g είναι αυτή που παίρνει μεγαλύτερες τιμές. Επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε:

$$E=\int_{-2}^{3} g(x)-f(x)\ dx=\int_{-2}^{3}\left[x^2+2x+7-\ 2x^2+x+1\ \right]dx=\int_{-2}^{3}\left[-x^2+x+6\right]dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{3}=36.16667\ \text{τετρ.μονάδες}$$

□

Ασκήσεις

Άσκηση: Να υπολογίσετε την τιμή του κ$\in R$ για την οποία ισχύει:

$$2\int_{-4}^{\kappa}\frac{x^2}{3x^2+12}dx-8\int_{\kappa}^{-4}\frac{1}{3x^2+12}dx=1$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{1}^{e}\eta\mu\ \ln x\ dx$ **β)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx$ **γ)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx$

δ) $\int_{0}^{\pi}x\eta\mu^2 x dx$ **ε)** $\int_{1}^{2}\ln^2 x dx$ **στ)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sigma\upsilon\nu x dx$

Υπόδειξη: Στο ολοκλήρωμα (α) να θέσετε *t=ln(x)*, ενώ για το (δ) υπάρχει λυμένο αντίστοιχο παράδειγμα.

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 (x^2+1+\sigma\upsilon\nu(\pi x))dx$ **β)** $\int_0^1 \frac{x+1}{e^x}dx$ **γ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 2x}dx$

δ) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}dx$ **ε)** $\int_1^{\pi} e^x \eta\mu x dx$ **στ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}}dx$ **β)** $\int_0^2 |1-x|dx$

Υπόδειξη: Για το ολοκλήρωμα (α) χρησιμοποιείστε τον τύπο αποτετραγωνισμού.

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1+\frac{1}{x+1}$**. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x'x, και τις ευθείες x=2, x=5.**

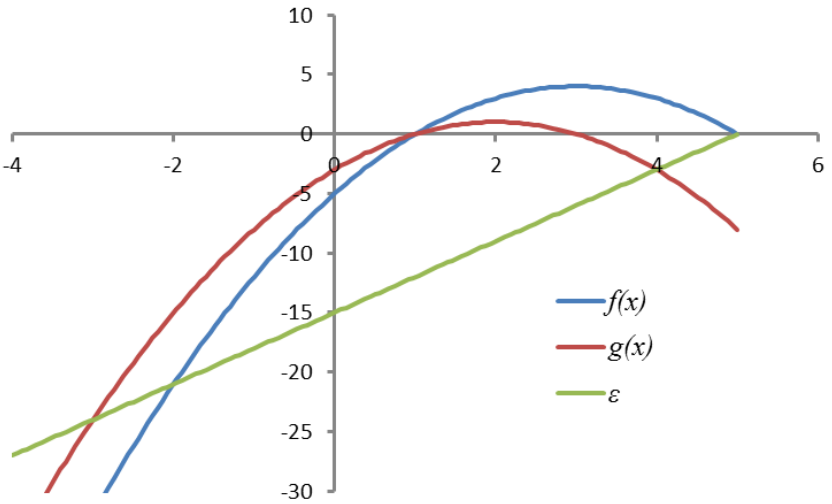
□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f : f(x)= $-x^2+2x+3$ και την ευθεία 2x-ψ-1=0

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi_1(x)= -x^2+6x-5$, $\psi_2(x)= -x^2+4x-3$ και $\psi_3(x)= 3x-15$.

Υπόδειξη: Η γραφική παράσταση:



□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , C_g όταν

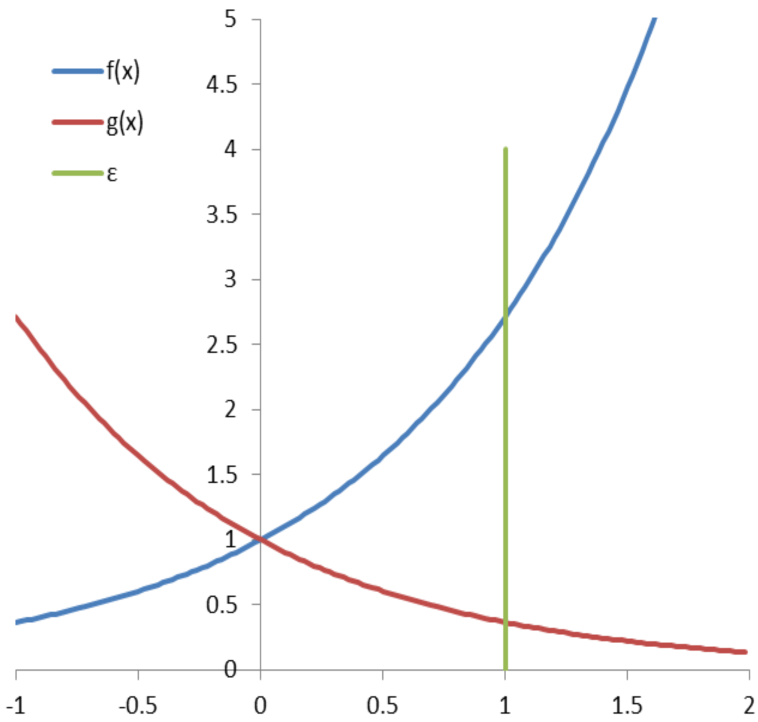
α) f(x)= $-x^2+4x$, g(x)= x^2-4x+6

β) f(x)= x^3+1, g(x)= x+1

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $f(x)=e^x$, $g(x)= e^{-x}$ και την ευθεία x=1.

Υπόδειξη: Η γραφική παράσταση:



□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $f(x)=x^3$, $g(x)= -x^3$ και την ευθεία 7x+3ψ=10.

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $f(x)=\dfrac{8}{x^2+4}$, και της παραβολής $x^2= 4ψ$.

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2+ψ^2=8$ και την παραβολή $x^2= -2ψ$.

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f : f(x)= lnx, τον άξονα ψ'ψ, και τις ευθείες ψ= -1, ψ=1.

□

Άσκηση: Αν ε είναι η εφαπτομένη της C_f : $f(x)=e^x$ στο σημείο (1,e), να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x'x, και την ευθεία x= -1.

□

Άσκηση: Αν Α είναι το χωρίο που περικλείεται από την C_f : $f(x)=e^x$, τις ευθείες x=0, x=1 και τον άξονα x'x, να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η ευθεία x=α να χωρίζει το Α σε ισοεμβαδικά χωρία.

□

Άσκηση: Το χωρίο μεταξύ της C_f : f(x)=4x^4+1 και της ευθείας ψ=6 χωρίζεται από την ευθεία ψ=5α^4 +1 (α>0) σε δύο ισοεμβαδικά χωρία. Να υπολογιστεί η τιμή του α.

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f : $f(x)=e^{2x}-2x^2-2x-1$**, τον άξονα x'x, και τις ευθείες x= -1, x=1.**

□

Άσκηση: Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=x^2+x και g(x)=(x+1)ln(x+1).

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από των C_f , C_g και των ευθειών x=0 και x=1.

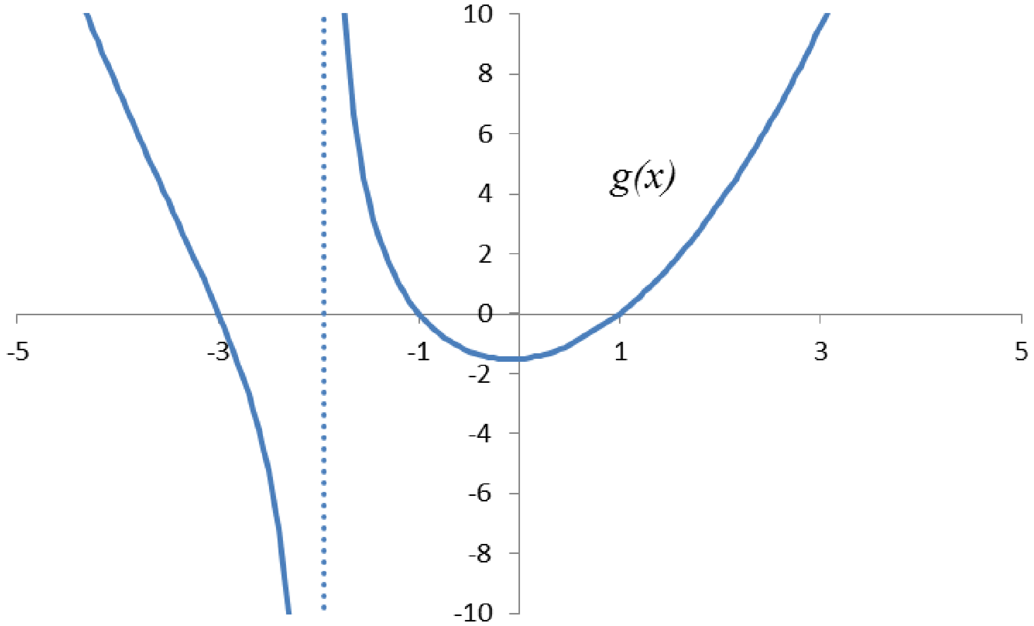
□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζουν:

α) η C_f όπου $f(x)=x^3+3x^2-x-3$ **και ο άξονας x'x**

β) η C_g όπου $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x+2}$ **και ο άξονας x'x.**

Υπόδειξη: $x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x^2-1)(x+3)$ **και το γράφημα… (οπότε ας γίνει και μία εκτίμηση για το αποτέλεσμα)**



□

4.2.6 Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Ονομάζουμε Γενικευμένα Ολοκληρώματα, τα ορισμένα ολοκληρώματα κατά τη λύση των οποίων συναντούμε έναν παράγοντα του ολοκληρώματος που απειρίζεται. Οι δύο κατηγορίες Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων που θα αντιμετωπίσουμε είναι:

(i) Όταν κάποιο από τα όρια είναι άπειρο.

(ii) Όταν, η συνάρτηση που ολοκληρώνεται, απειρίζεται σε κάποιο σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Όταν, δηλαδή, η *f(x)* δεν έχει πεπερασμένη τιμή σε ένα ή περισσότερα σημεία του διαστήματος αυτού. Τέτοια σημεία καλούνται ανώμαλα σημεία της *f (x).*

Βέβαια, είναι δυνατόν να συναντήσουμε ταυτόχρονα και τις δύο αυτές κατηγορίες κατά τη λύση ενός ολοκληρώματος, χωρίς αυτό να προσθέτει κάποια ιδιαίτερα σημαντικότερη δυσκολία.

Περίπτωση Ι. Κάποιο από τα όρια του Ορισμένου Ολοκληρώματος είναι άπειρο

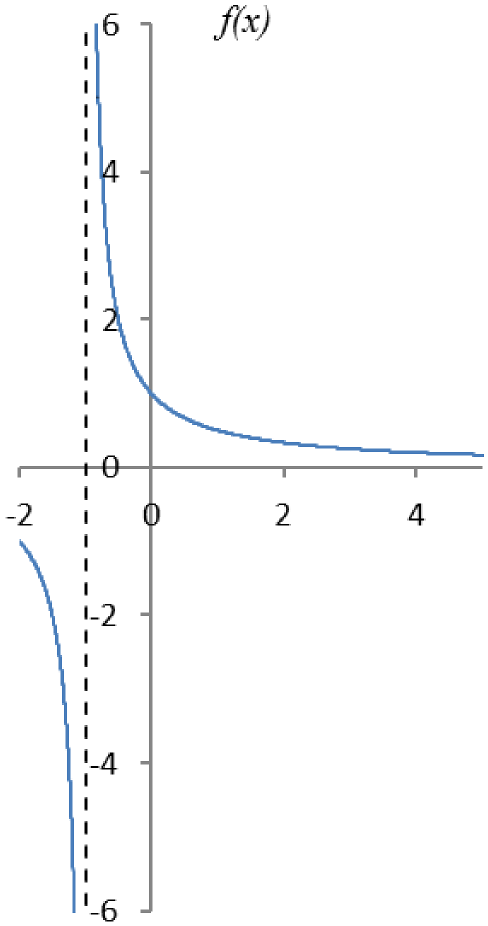
Οι δύο επόμενες σχέσεις δίνουν τον τρόπο λειτουργίας:

$$\text{α)}\quad \int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\left[\int_a^{M} f(x)dx\right] = \lim_{M\to\infty} F(M) - F(a)$$

$$\text{β)}\quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{M\to-\infty}\left[\int_M^{a} f(x)dx\right] = F(a) - \lim_{M\to-\infty} F(M)$$

όπου *F(x)* είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της *f(x)*.

Παράδειγμα 1^{o}: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1}dx$



Εικόνα 4.25 *Γράφημα της συνάρτησης* $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, αντιλαμβανόμαστε πως θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν που δημιουργείται ανάμεσα στον άξονα των *x* και στην συνάρτηση *f* που ολοκληρώνεται, από το 0 έως το άπειρο.

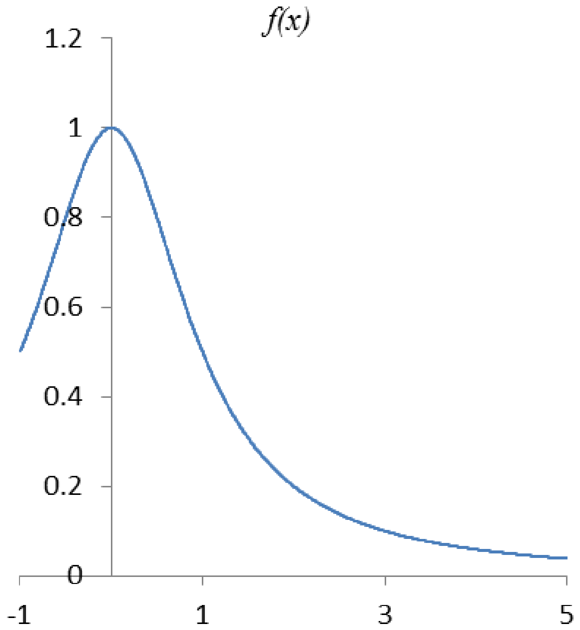
Η πρώτη ιδέα είναι πως το εμβαδό αυτό θα είναι άπειρο. Ας το δούμε:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx = \lim_{M\to\infty}\left[\int_0^M \frac{1}{x+1}dx\right] = \lim_{M\to\infty}\left[\ln \; x+1\right]_0^M =$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left[\ln \; M+1\right] - \ln \; 1 = \ln \; \infty \; - 0 = \infty$$

Άρα, αυτό το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα αποκλίνει προς το άπειρο, έστω και βραδέως (για παράδειγμα Ln(10^9)=20.7).

□

Παράδειγμα 2ο: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$



Εικόνα 4.26 *Γράφημα της συνάρτησης* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, αντιλαμβανόμαστε πως θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν που δημιουργείται ανάμεσα στον άξονα των *x* και στην συνάρτηση *f* που ολοκληρώνεται, από το 0 έως το άπειρο.

Η πρώτη ιδέα είναι πως και το εμβαδό αυτό (όπως του προηγουμένου παραδείγματος) θα είναι άπειρο. Ας το δούμε:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{M\to\infty}\left[\int_0^{M}\frac{1}{x^2+1}dx\right]=\lim_{M\to\infty}\left[\text{Τοξεφ }x\right]_0^M=$$

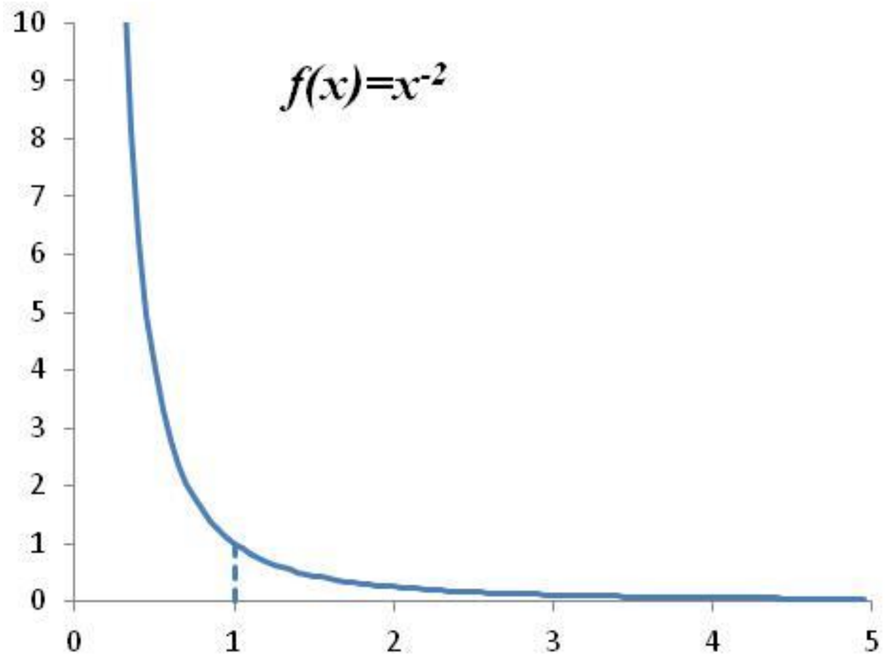
$$=\lim_{M\to\infty}\left[\text{Τοξεφ }M\right]-\text{Τοξεφ }0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

Άρα, αυτό το Γενικευμένο Ολοκλήρωμα συγκλίνει προς το π/2.

□

Παράδειγμα 3ο: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$

Λύση: Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης



Εικόνα 4.27 *Γράφημα της συνάρτησης* $f(x)=\frac{1}{x^2}$

αντιλαμβανόμαστε πως θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν που δημιουργείται ανάμεσα στον άξονα των *x* και στην συνάρτηση *f* που ολοκληρώνεται, από το 1 έως το άπειρο. Ας το δούμε:

$$I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\left[\int_1^{M}\frac{1}{x^2}dx\right]=\lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^M=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{M}\right]+\frac{1}{1}=0+1=1$$

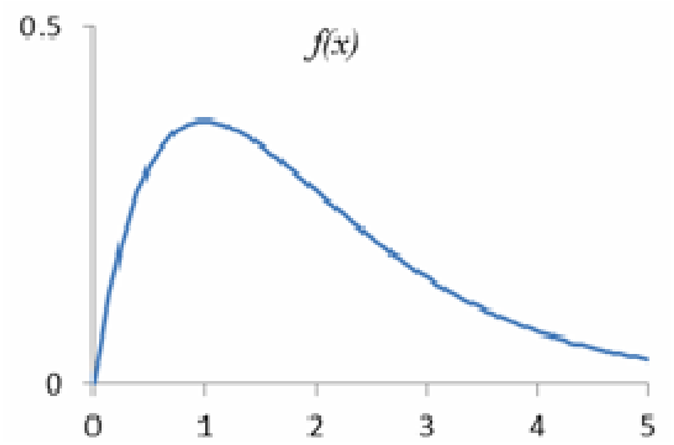
Γενικό συμπέρασμα: Από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να συμπεράνουμε πως το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; k > 0 \qquad k \in (0, \infty)$$

σιγκλίνει σε μία πραγματική τιμή (θετική) όταν k>1, ενώ αποκλίνει προς το ∞ όταν 0<k≤ 1, πράγμα που μπορεί εύκολα να αποδειχθεί.

□

Παράδειγμα 4ο: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\infty} xe^{-sx} dx$



Εικόνα 4.28 *Γράφημα της συνάρτησης* $f(x) = xe^{-sx}$ *για την τιμή* s=1

(α) Λύση του αόριστου ολοκληρώματος:

$$I = \int xe^{-sx} dx = \int xd\left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\right) = -\frac{1}{s}xe^{-sx} + \int \frac{1}{s}e^{-sx} d\;\; x \;\; = -\frac{1}{s}xe^{-sx} + \frac{1}{s}\int e^{-sx} d\;\; x \;\; =$$

$$= -\frac{1}{s}xe^{-sx} - \frac{1}{s^2}e^{-sx} + c$$

(β) Λύση του γενικευμένου ολοκληρώματος:

$$I = \int_0^{\infty} xe^{-sx} dx = \lim_{M \to \infty}\left[\int_0^{M} xe^{-sx} dx\right] = \lim_{M \to \infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx} - \frac{1}{s^2}e^{-sx}\right]_0^M =$$

$$= \lim_{M \to \infty}\left[-\frac{1}{s}Me^{-sM} - \frac{1}{s^2}e^{-sM}\right] - \left[-\frac{1}{s}0e^{0} - \frac{1}{s^2}e^{0}\right] = \frac{1}{s^2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα των ορίων:

$$\lim_{M \to \infty}\left[e^{-sM}\right] = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{M \to \infty}\left[Me^{-sM}\right] = \lim_{M \to \infty}\left[\frac{M}{e^{sM}}\right] = \ldots$$

και εφαρμόζοντας τον Κανόνα του De l’ Hopital (παραγωγίζοντας ως προς M έχουμε:

$$\ldots = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{se^{sM}}\right] = \frac{1}{\infty} = 0$$

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα του παραδείγματος αυτού έχει ιδιαίτερη σημασία στα Μαθηματικά. Αρχικά να παρατηρήσουμε πως το τελικό του αποτέλεσμα ήταν μία συνάρτηση με μεταβλητή την παράμετρο s, που υπήρχε στον εκθέτη του e. Στη γενική περίπτωση το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος:

$$\int_0^\infty f(x)\, e^{-sx}dx = \mathscr{L}_f(s)$$

είναι η συνάρτηση $\mathscr{L}_f$ (s) που ονομάζεται «Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f».

□

Άσκηση: Ακολουθώντας τη μεθοδολογία του προηγούμενου παραδείγματος να δείξετε τις ισότητες:

$$I = \int_0^\infty \lambda e^{-sx}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-sx}dx = \lambda\frac{1}{s} \qquad \text{με } \lambda \in R$$

$$I = \int_0^\infty x^2 e^{-sx}dx = \frac{2}{s^3}$$

□

Παράδειγμα 5^{o}: Να υπολογισθεί το εκθετικό ολοκλήρωμα το ολοκλήρωμα: $I = \int_\alpha^{+\infty} e^{-kx}dx$

Λύση: Για να μελετήσουμε την σύγκλιση του ολοκληρώματος αυτού πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_\alpha^x e^{-kt}dt.$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{-kx}dx = \lim_{x\to+\infty}\int_\alpha^x e^{-kt}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)_\alpha^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-k\alpha}}{k} - \frac{e^{-kx}}{k}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{-k\alpha}}{k}, & \alpha\nu \;\; k>0 \\ +\infty, & \alpha\nu \;\; k\le 0 \end{cases}.$$

Άρα το εκθετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν k> 0 και αποκλίνει όταν $k \le 0$.

□

Παράδειγμα 6^{o}: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+13}$

Λύση: Αρχικά θα λύσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα. Παρατηρούμε πως ο παρονομαστής έχει μιγαδικές ρίζες [Δ=36-52=-16]. Επομένως εφαρμόζουμε την αντίστοιχη μέθοδο, η οποία (όπως είδαμε στο κεφάλαιο των αόριστων ολοκληρωμάτων) θα μας οδηγήσει σε λύση με τη βοήθεια του τόξου εφαπτομένης!

$$I=\int\frac{dx}{x^2+6x+13}=\int\frac{dx}{x^2+6x+9-9+13}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\int\frac{dx}{4\left[\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1\right]}=\ldots$$

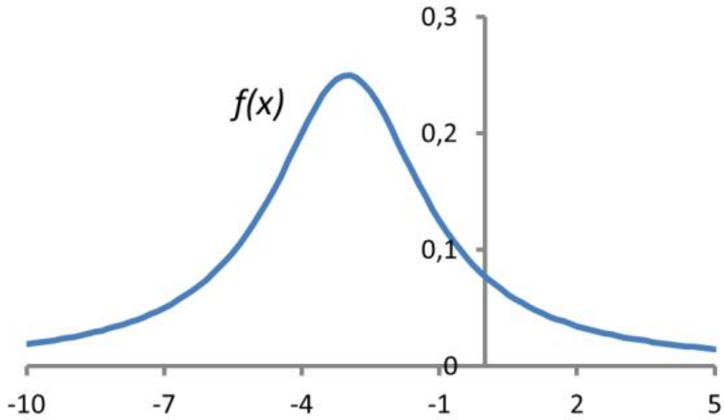
$$\left\{\text{Θέτουμε}\quad t=\frac{x+3}{2}\quad\Rightarrow\quad x=2t-3\quad\Rightarrow\quad dx=2dt\right\}$$

$$\ldots=\frac{1}{4}\int\frac{2dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\text{Τοξεφ}(t)+c=\frac{1}{2}\text{Τοξεφ}\left(\frac{x+3}{2}\right)+c$$

Στη συνέχεια λύνουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+13}=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty}\left[\text{Τοξεφ}\left(\frac{x+3}{2}\right)\right]-\lim_{x\to\infty}\left[\text{Τοξεφ}\left(\frac{x+3}{2}\right)\right]\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$$

Μία προσπάθεια ερμηνείας του πεπερασμένου αποτελέσματος δίνεται από το γράφημα της συνάρτησης που ολοκληρώνεται:



□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

α) $I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$ **β)** $I=\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ **γ)** $I=\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ **δ)** $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+x}dx$

Υπόδειξη: $\lim_{x\to\infty}[\ln(x)-\ln(x+1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]=\ldots$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

Υπόδειξη: Εκτελώντας την αντικατάσταση t=ex, υπολογίζετε το αόριστο ολοκλήρωμα σαν Τοξεφ(ex)+c.

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Υπόδειξη: Εκτελέστε την αντικατάσταση: $t=\sqrt{x}$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^{\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ **β)** $\int_0^{\infty}\sigma\upsilon\nu x dx$ **γ)** $\int_0^{\infty}e^{-x}dx$ **δ)** $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$

□

Άσκηση: Δείξτε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$ **και** $\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$ **συγκλίνουν.**

Υπόδειξη: Μην προσπαθήσετε να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα του (α). Δεν υπάρχει! Υπάρχει όμως το (β) το οποίο και θα υπολογίσετε. Στη συνέχεια παρατηρήστε πως η συνάρτηση του (β) ολοκληρώματος είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης του (α) για x>1 και βγάλτε το κατάλληλο συμπέρασμα.

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\int_1^{\infty}\frac{\log x}{x^2}dx$

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ **όπου p οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.**

□

Άσκηση: Να γίνει υπολογισμός του $\int_{0^+}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ **όπως και του** $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\int_0^{1}\frac{1}{1-x}dx$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\int_0^{3}\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-1}$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

□

Άσκηση: Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-\alpha)^k}$ **συγκλίνει για k<1 και αποκλίνει για k>1.**

□

Άσκηση: Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)dx$ **συγκλίνει.**

□

Άσκηση: Υπολογίστε το $\int_{-\frac{2}{\pi}}^{0} (2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x})dx$

□

Περίπτωση II. Η συνάρτηση που ολοκληρώνεται απειρίζεται σε κάποιο σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης

Ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις:

α) Αναζητείται η τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_a^b f(x)dx$, όταν στο σημείο a ισχύει για το πλευρικό όριο:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$$

ενώ η συνάρτηση *f* είναι ολοκληρώσιμη και οι τιμές της είναι πεπερασμένες σε ολόκληρο το υπόλοιπο διάστημα που απομένει από το (*a,b*], όταν αφαιρεθεί μία περιοχή του *a*. Τότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω ορίου:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to a+}\left[\int_x^b f(x)dx\right]=F(b)-\lim_{x\to a+}F(x)$$

β) Αναζητείται η τιμή του ολοκληρώματος $I=\int_a^b f(x)dx$, όταν στο σημείο *b* ισχύει για το πλευρικό όριο:

$$\lim_{x\to b-} f(x) \;=\pm\infty$$

ενώ η συνάρτηση *f* είναι ολοκληρώσιμη και οι τιμές της είναι πεπερασμένες σε ολόκληρο το υπόλοιπο διάστημα που απομένει από το [*a,b*), όταν αφαιρεθεί μία περιοχή του *b*. Τότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω ορίου:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to b-}\left[\int_a^x f(x)dx\right]=\lim_{x\to b-} F(x) \;-F(a)$$

γ) Αναζητείται η τιμή του ολοκληρώματος $I=\int_a^b f(x)dx$, όταν στο σημείο $c\in \; a,b$ ισχύει τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια:

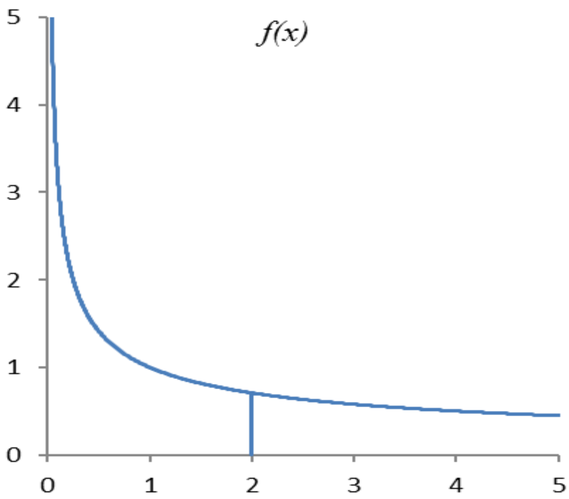
$$\lim_{x\to c-} f(x) \;=\pm\infty \qquad \acute{\eta} \qquad \lim_{x\to c+} f(x) \;=\pm\infty$$

Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται σύμφωνα με την επόμενη ισότητα:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{x\to c-}\left[\int_a^x f(x)dx\right]+\lim_{x\to c+}\left[\int_x^b f(x)dx\right]=$$
$$=\lim_{x\to c-} F(x) \;-F(a)+F(b)-\lim_{x\to b-} F(x)$$

Παράδειγμα 1^o: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Λύση: Η συνάρτηση που ολοκληρώνεται απειρίζεται όταν το x τείνει στο μηδέν από δεξιά (αυτό μας ενδιαφέρει στο συγκεκριμένο ολοκλήρωμα), όπως, άλλωστε, φανερώνει και το επόμενο γράφημα.



Εικόνα 4.29 *Γράφημα της συνάρτησης* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{k \to 0+} \left[\int_k^2 x^{-1/2} dx \right] = \lim_{k \to 0+} \left[2\sqrt{x} \right]_k^2 = 2\sqrt{2} - \lim_{k \to 0+} \left[2\sqrt{k} \right] = 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}$$

□

Άσκηση: Με τον τρόπο λύσης του προηγούμενου παραδείγματος να δείξετε πως το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^k} dx$$

συγκλίνει προς μία θετική τιμή, όταν το *k<1*, και αποκλίνει (τείνει στο άπειρο) όταν το $k \geq 1$**.**

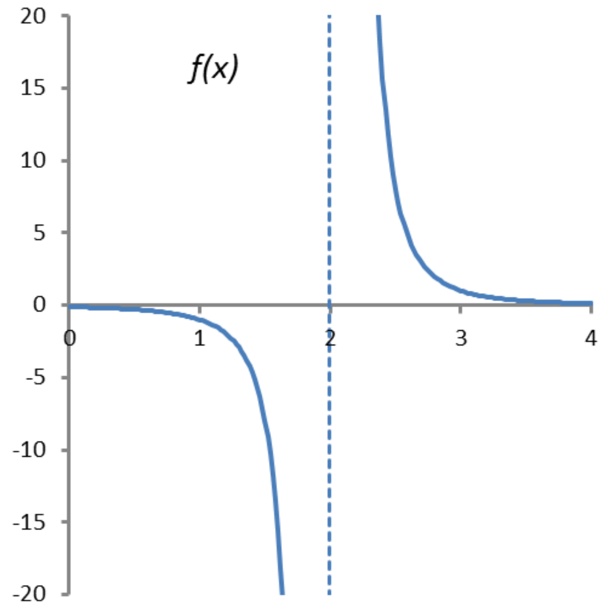
□

Παράδειγμα 2ο: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x-2)^3} dx$

Λύση: Παρατηρούμε πως η συνάρτηση που ολοκληρώνεται απειρίζεται στην περιοχή του *x*=2. Εύκολα αποδεικνύεται πως

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} \left[\frac{1}{(x-2)^3} \right] = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \left[\frac{1}{(x-2)^3} \right] = \infty$$

πράγμα που οδηγεί στην επόμενη γραφική παράσταση:



Η λύση του ολοκληρώματος:

$$I=\int_0^4 \frac{1}{(x-2)^3}dx=\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^3}dx+\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^3}dx=\lim_{x\to 2-}\left[\int_0^x \frac{1}{(x-2)^3}dx\right]+\lim_{x\to 2+}\left[\int_x^4 \frac{1}{(x-2)^3}dx\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2-}\left[-\frac{1}{2(x-2)^2}\right]-\left[-\frac{1}{2(x-2)^2}\right]_{x=0}+\left[-\frac{1}{2(x-2)^2}\right]_{x=4}-\lim_{x\to 2+}\left[-\frac{1}{2(x-2)^2}\right]=-\infty+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\infty$$

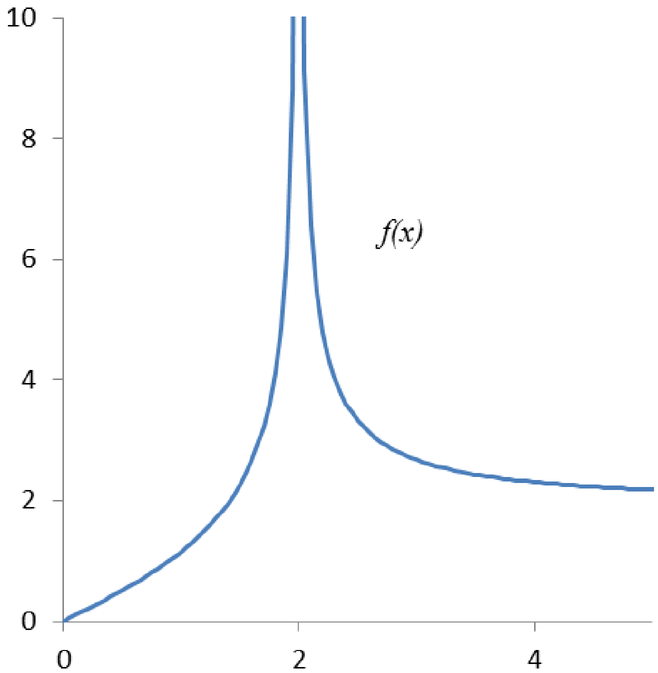
Παρατηρούμε λοιπόν πως το ολοκλήρωμα καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\infty-\infty$, οπότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αποτέλεσμα (στην πραγματικότητα αποδεικνύεται, μέσω της σύγκρισης απειροστών, πως το τελικό αποτέλεσμα είναι ίσο με το μηδέν, όμως η περαιτέρω ανάλυση ξεφεύγει από το όριο αυτού του συγγράμματος).

Παράδειγμα 3ο: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{|x^2-4|}}dx$

(α) Για να λύσουμε το ολοκλήρωμα αυτό θα πρέπει να αφαιρέσουμε την απόλυτη τιμή από τον παρονομαστή, χωρίζοντάς το σε δύο ολοκληρώματα. Αρχικά να θυμίσουμε την βασική ιδιότητα των απολύτων τιμών:

$$|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & \alpha\nu\ \ x\geq 2\ \ \acute{\eta}\ \ x\leq -2 \\ 4-x^2 & \alpha\nu\ \ -2<x<2 \end{cases}$$

(β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{|x^2-4|}}$



Εικόνα 4.30 *Γράφημα της συνάρτησης* $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{\left|x^2-4\right|}}$

(γ) Τα δύο ολοκληρώματα.

$$I=\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{\left|x^2-4\right|}}\,dx=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\ \displaystyle\int_2^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx\end{array}\right.$$

(δ) Λύση των αόριστων ολοκληρωμάτων.

$$\int \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=-\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,d\ \ 4-x^2\ \ =-\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=-\int\left[t^{-1/2}\right]dt=-2\sqrt{t}+c=-2\sqrt{4-x^2}+c$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,d\ \ x^2-4\ \ =\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\int\left[t^{-1/2}\right]dt=2\sqrt{t}+c=2\sqrt{x^2-4}+c$$

(ε) Η λύση των ολοκληρωμάτων.

$$\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\lim_{k\to 2-}\left[\int_0^k \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\right]=\lim_{k\to 2-}\left[-2\sqrt{4-x^2}\right]_0^k=\lim_{k\to 2-}\left[-2\sqrt{4-k^2}\right]-\left[-2\sqrt{4-0^2}\right]=$$
$$=0+4$$

$$\int_{2}^{4}\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}dx=\lim_{k\to 2+}\left[\int_{k}^{4}\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}dx\right]=\lim_{k\to 2+}\left[2\sqrt{4-x^2}\right]_k^4=2\sqrt{4^2-4}-\lim_{k\to 2+}\left[2\sqrt{4-k^2}\right]=$$
$$=2\sqrt{12}-0=4\sqrt{3}$$

Και το συνολικό αποτέλεσμα:

$$I=\int_{0}^{4}\frac{2x}{\sqrt{|x^2-4|}}dx=4+4\sqrt{3}=4\;1+\sqrt{3}$$

□

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{5}\frac{dx}{4-x}$ **.**

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^x-1}dx$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{2}^{6}\left[\frac{1}{(4-x)^2}\right]^{1/3}dx$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^3}$

4.2.7 Ορισμένα Ολοκληρώματα με μεταβλητή σε ένα όριο

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{x}f(u)du=\;F(u)\,{}_0^x=F(x)-F(0)\,,$$ όπου η *F(x)* είναι η αρχική της *f(x)*

είναι ουσιαστικά το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x), όπου έχει ορισθεί η αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης c, μέσω της τιμής -*F*(0). Επομένως η μεταβλητή *u* στο εσωτερικό του ολοκληρώματος δεν παίζει κάποιο σημαντικό ρόλο και λέγεται «μεταβλητή ολοκλήρωσης». Για τον λόγο αυτό συχνά, και όταν δεν υπάρχει ειδικός λόγος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ταυτόχρονα την ίδια μεταβλητή στο εσωτερικό του ολοκληρώματος και στο όριο.

$$\int_{0}^{x}f(u)du=\int_{0}^{x}f(x)dx=F(x)-F(0)$$

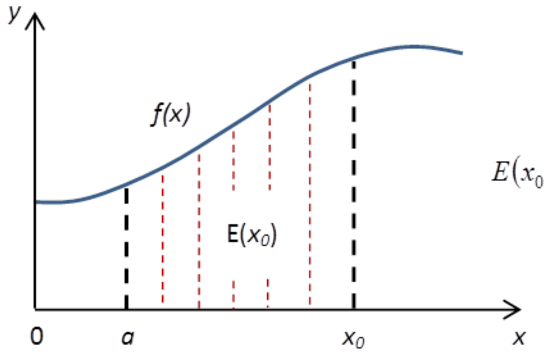
Η τοποθέτηση μιας άλλης τιμής (πλην του μηδενός) στο κάτω όριο του ολοκληρώματος το μόνο που κάνει είναι να μεταβάλλει την τιμή της αυθαίρετης σταθεράς:

$$\int_{1}^{x}f(u)du=\int_{1}^{x}f(x)dx=F(x)-F(1)$$

Βέβαια, είναι δυνατό να τοποθετηθεί η μεταβλητή στο κάτω όριο:

$$\int_x^5 f(u)du = F(u)\Big|_x^5 = -F(x) + F(5)$$

Με τη βοήθεια του επόμενου γραφήματος μπορούμε να έχουμε μια ερμηνεία τέτοιων ολοκληρωμάτων (πάντα με την επιφύλαξη πως τα Ορισμένα Ολοκληρώματα είναι κάτι πολύ πιο σύνθετο από εργαλεία μέτρησης εμβαδού).



$$E(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx \quad \mu\varepsilon\ x > a$$

Εικόνα 4.31 *Γράφημα Ολοκληρώματος με μεταβλητή σε ένα όριο*

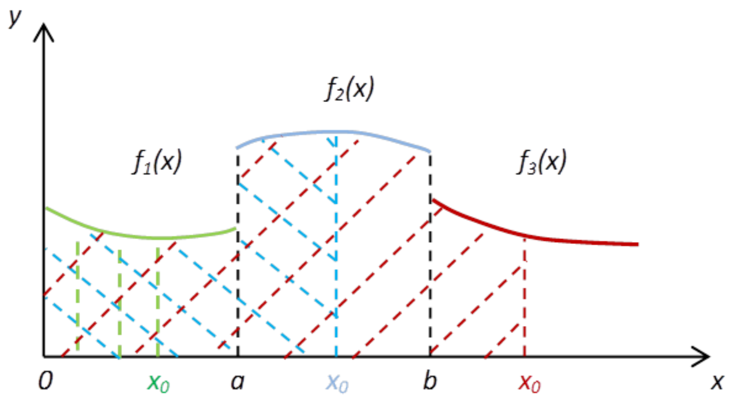
Παρατηρούμε, λοιπόν, πως στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα είναι μία συνάρτηση $E(x_0)$, η οποία υπολογίζει το εμβαδό που ορίζεται ανάμεσα στον άξονα των x και σε μία θετική συνάρτηση $f(x)$, από το σημείο a έως το τυχαίο $x_0>a$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει και το ολοκλήρωμα

$$I(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx \quad \text{με } x_0 > 0$$

όταν η συνάρτηση f ορίζεται με περισσότερα σκέλη:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{αν} \quad x < a \\ f_2(x) & \text{αν} \quad a < x < b \\ f_3(x) & \text{αν} \quad b < x \end{cases}$$



Εικόνα 4.32 *Γράφημα Ολοκληρώματος με μεταβλητή σε ένα όριο σε κλαδική συνάρτηση*

Παρατηρώντας με προσοχή τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά αντιλαμβανόμαστε την επόμενη σχέση που ορίζει το ολοκλήρωμα *I(x₀)*.

$$I\left(x_0\right)=\int_0^{x_0} f(x)dx=\begin{cases} \int_0^{x_0} f\left(x\right)dx & \alpha\nu \quad x_0<a \\ \int_0^{a} f\left(x\right)dx+\int_a^{x_0} f\left(x\right)dx & \alpha\nu \;\; a<x_0<b \\ \int_0^{a} f\left(x\right)dx+\int_a^{b} f\left(x\right)dx+\int_b^{x_0} f\left(x\right)dx & \alpha\nu \quad x_0>b \end{cases}$$

Ειδικός λόγος, για τη μη χρησιμοποίηση της ίδιας μεταβλητής στο όριο και εντός του ολοκληρώματος, είναι να χρησιμοποιείται η μεταβλητή των ορίων και στο εσωτερικό του ολοκληρώματος. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^{t} tf(x)dx=I(t)$$

Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή t, παρόλο που είναι η μοναδική μεταβλητή του αποτελέσματος, στο εσωτερικό του ολοκληρώματος θεωρείται σταθερή! Η συνέχεια του παραδείγματος

$$I=\int_0^{t} tf(x)dx=t\int_0^{t} f(x)dx=t\left[F(x)\right]_0^t=t\left[F\left(t\right)-F\left(0\right)\right]$$

Τέλος, να μιλήσουμε και για την παραγώγιση ολοκληρωμάτων με τη μεταβλητή στο όριο. Οι παρακάτω ισότητες παρουσιάζουν την βασική πλευρά του προβλήματος:

$$\int_a^{t} f(x)dx=F(t)-F(a) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left[\int_a^{t} f(x)dx\right]=\frac{d}{dt}\left(F(t)-F(a)\right)=f(t)$$

και

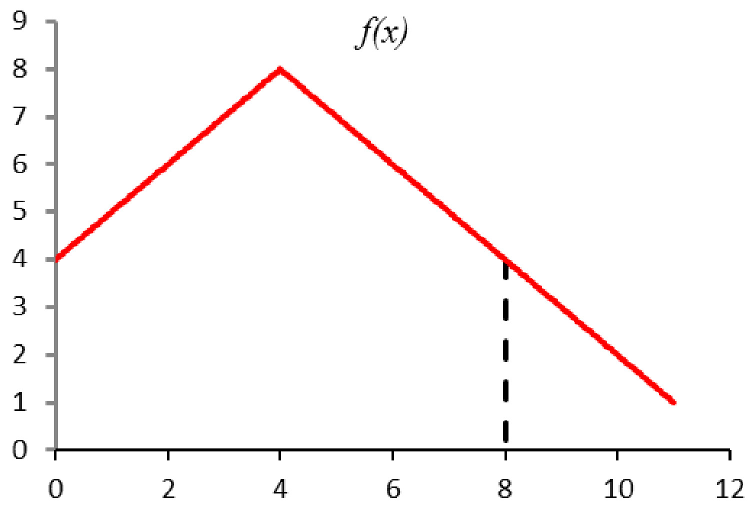
$$\int_a^{t} tf(x)dx=t\left(F\left(t\right)-F\left(a\right)\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left[\int_a^{t} tf(x)dx\right]=\frac{d}{dt}\left[t\left(F\left(t\right)-F\left(a\right)\right)\right]=tf(t)+F\left(t\right)-F\left(a\right)$$

Να παρατηρήσουμε πως η παραγώγιση γίνεται ως προς τη μεταβλητή που υπάρχει στα όρια, όπως είναι αναμενόμενο.

Παράδειγμα 1^{o}. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & \alpha\nu \quad 0\le x<4 \\ -x+12 & \alpha\nu \quad x\ge 4 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω γράφημα και ζητούνται:



Εικόνα 4.33 *Γράφημα της συνάρτησης f(x)*

α) Το ολοκλήρωμα $I\left(x_0\right)=\int_0^{x_0} f(x)dx$

β) Το εμβαδό της πρόσοψης της μονώροφης κατοικίας με πλάτος 8 μέτρα.

Λύση:

α) Λύση του ολοκληρώματος:

$$I\left(x_0\right)=\int_0^{x_0} f(x)dx=\begin{cases}\int_0^{x_0} f\left(x\right)dx & \alpha\nu\quad 0<x_0<4\\ \int_0^{4} f\left(x\right)dx+\int_4^{x_0} f\left(x\right)dx & \alpha\nu\quad 4<x_0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\int_0^{x_0}\left(x+4\right)dx & \alpha\nu\quad 0<x_0<4\\ \int_0^{4}\left(x+4\right)dx+\int_4^{x_0}\left(-x+12\right)dx & \alpha\nu\quad 4<x_0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\left[\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^{x_0} & \alpha\nu\quad 0<x_0<4\\ \left[\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^{4}+\left[-\frac{x^2}{2}+12x\right]_4^{x_0} & \alpha\nu\quad 4<x_0\end{cases}=\begin{cases}\frac{{x_0}^2}{2}+4x_0 & \alpha\nu\quad 0<x_0<4\\ -\frac{{x_0}^2}{2}+12x_0-16 & \alpha\nu\quad 4<x_0\end{cases}$$

β) Υπολογισμός του εμβαδού.

Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τη συνάρτηση $I(x_0)$ για την τιμή $x_0=8$

$$I(8)=\left[\begin{cases} \dfrac{x_0{}^2}{2}+4x_0 & \alpha\nu \quad 0<x_0<4 \\ -\dfrac{x_0{}^2}{2}+12x_0-16 & \alpha\nu \quad 4<x_0 \end{cases}\right]_{x_0=8}=48 \text{ τ.μ.}$$

Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει και γεωμετρικά. Το συγκεκριμένο εμβαδόν από δύο ίσα τραπέζια, λόγω συμμετρίας. Έχουμε:

$$I\ \ 8\ =2\left[\frac{f\ \ 0\ +f\ \ 4}{2}4\right]=4\ \ 4+8\ =48$$

□

Παράδειγμα 2ο. Να παραγωγισθεί η συνάρτηση $I\ \ t\ =\int_2^t t\ \ x-1\ ^4 dx=t\int_2^t\ x-1\ ^4 dx$

Λύση.

α) Λύνοντας πρώτα το ολοκλήρωμα:

$$I\ \ t\ =\int_2^t t\ \ x-1\ ^4 dx=t\int_2^t\ x-1\ ^4 dx=t\left[\frac{x-1\ ^5}{5}\right]_2^t=t\left[\frac{t-1\ ^5}{5}\right]-\frac{t}{5}=\frac{t}{5}\left[\ t-1\ ^5-1\right]$$

οπότε

$$\frac{d}{dt}\left[I\ \ t\ \right]=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{5}\left[\ t-1\ ^5-1\right]\right)=\frac{1}{5}\left[\ t-1\ ^5-1\right]+t\ \ t-1\ ^4$$

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\dfrac{d}{dt}\left[\int_a^t tf(x)dx\right]=\dfrac{d}{dt}\left[t\ \ F\ \ t\ -F\ \ a\ \ \right]=tf(t)+F\ \ t\ -F\ \ a$

$$\frac{d}{dt}\int_2^t t\ \ x-1\ ^4 dx=t\ \ t-1\ ^4+\frac{t-1\ ^5}{5}-\frac{1}{5}$$

□

Άσκηση: Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t-2}dt$ **β)** $F(x)=\displaystyle\int_1^x \sqrt{2t^2-t-1}dt$ **γ)** $F(x)=\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{2-x}} \frac{3-t}{\ln(t-1)}dt$

□

Άσκηση: Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $F(x)=\displaystyle\int_{4-x}^{\ln x} \sqrt{t-1}dt$ **β)** $F(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} t^3\ln(4+3t^3)dt,\ x\geq 0$ **γ)**

$$f(x)=2x+x^2\int_0^1 \text{ημ}(xt)dt$$

□

Άσκηση: Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\int_1^x (2x+4)\sigma\upsilon\nu t dt$ **β)** $f(x)=e^{2x-1}+\int_1^x (t-x)e^t dt,\ x\geq 0$

□

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$ **. Να βρείτε το ολοκλήρωμα** $I=\int_0^1 F(x)dx$ **.**

□

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_2^x \eta\mu t^2 dt$ **. Να βρείτε το ολοκλήρωμα** $I=\int_0^2 F(x)dx$ **.**

□

Άσκηση: Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 0} I\ \ x$ **αν** $I(x)=\int_3^x \frac{\sqrt{t+1}+1}{\sqrt{t+1}-1}dt$ **, x>0.**

□

Άσκηση: Να βρεθεί $\int_{-1}^2 f(x)dx$ **αν** $f(x)=\begin{cases}\int_0^x (2t+1)\,dt, & \alpha\nu\ \ -1\leq x\leq 1\\ -2\int_2^x dt, & \alpha\nu\ \ 1<x\leq 2\end{cases}$ **.**

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & \alpha\nu\ \ x<0\\ \ln(x+1), & \alpha\nu\ \ x\geq 0\end{cases}$ **. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:**

$\mathrm{I}=\int_{-1}^2 f(x)dx$ **.**

□

Άσκηση: Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την C$_f$, $f(x)=\int_0^x (2t-2)dt$ **, τον άξονα x'x και την ευθεία x=3.**

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν Ε(λ) της επιφάνειας που περικλείεται από την C$_f$: $f(x)=\frac{1}{x}$ **, x>0, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=1, x=λ >0. Στη συνέχεια να βρεθούν τα** $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda),\ \lim\limits_{\lambda\to 1}\mathrm{E}(\lambda),\ \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{E}(\lambda).$

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ των διαγραμμάτων των συναρτήσεων $f(x)=\int_0^x (3t^2-2)dt$, $g(x)=\int_0^x 2tdt$**.**

□

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\int_{1/x}^{x} \frac{t+\ln t}{t^2+1}dt = \ln x$**.**

□

Άσκηση: Να βρεθεί το $L=\lim_{x\to 0^+}\int_0^x \frac{e^{t^2}-1}{x^\nu}dt$**, ν=1,2,3,...**

□

Άσκηση: Να λυθεί η εξίσωση: $\int_1^x \frac{2+(\ln t)^{2\nu}}{t}dt = 2+\frac{1}{2\nu+1}$ **αν ν=1,2,...**

□

Άσκηση: Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f:R→R τέτοια ώστε $\int_0^x tf(t)\,dt = \sigma\upsilon\nu 3x + x^2 - 1,\ \forall x\in R$**.**

□

Άσκηση: Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f:R→R τέτοια ώστε: $\int_2^{x+1} f(t)\,dt = x^4+x^2-x,\ \forall x\in R$**.**

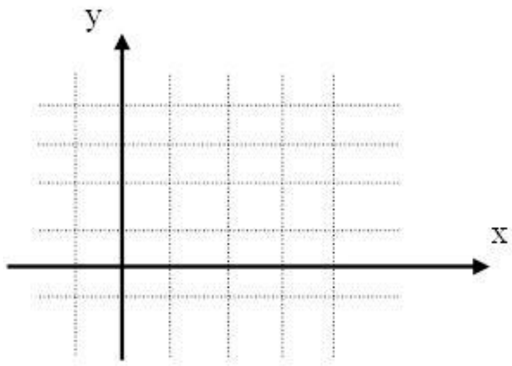
□

4.3 Τα ορισμένα ολοκληρώματα σε Πολικές Συντεταγμένες

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ορισμένη ολοκλήρωση σε άλλα συστήματα συντεταγμένων. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την ορισμένη ολοκλήρωση στις πολικές συντεταγμένες. Να θυμίσουμε πως ένα σύστημα συντεταγμένων επιτρέπει την αντιστοίχιση σε κάθε σημείο ενός χώρου με μία διεύθυνση. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να «δείξουμε», με τρόπο μοναδικό, οποιοδήποτε σημείο του χώρου αυτού. Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα ήταν το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η κατανόηση σε βάθος του συστήματος αυτού, μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε ευκολότερα άλλα συστήματα συντεταγμένων.

4.3.1 Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η βάση του Καρτεσιανού συστήματος είναι οι δύο γνωστοί (προσανατολισμένοι) άξονες των x και των y.



Εικόνα 4.34 *Οι συντεταγμένες γραμμές στις Καρτεσιανές συντεταγμένες*

Ουσιαστικά το σύστημα αυτό καλύπτει το επίπεδο με έναν κάναβο ευθειών παράλληλων με τους δύο άξονες. Από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχονται ακριβώς δύο τέτοιες ευθείες, οι οποίες υποδεικνύουν τις συντεταγμένες του σημείου. Οι ευθείες του κάναβου αυτού ονομάζονται **συντεταγμένες γραμμές.** Η εξίσωση των συντεταγμένων γραμμών προκύπτει από την εξίσωση της κάθε συντεταγμένης με μια αυθαίρετη σταθερή (c):

x = c η εξίσωση των ευθειών που είναι παράλληλες του άξονα των y.

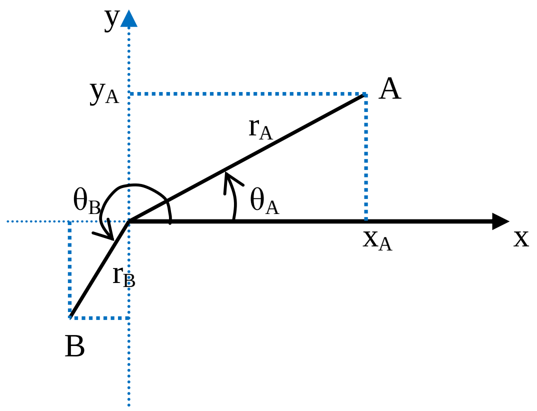
y = c η εξίσωση των ευθειών που είναι παράλληλες του άξονα των x.

Η εξίσωση x=c δίνει μία ευθεία παράλληλη με τον άξονα των y που τέμνει τον άξονα των x στο σημείο c. Πράγματι, η ευθεία αυτή είναι ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία, ανεξαρτήτως της τιμής της συντεταγμένης y, έχουν την x ίση με το c.

Όμοια, η εξίσωση y=c αντιστοιχεί σε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των x. Σ' αυτήν ανήκουν τα σημεία που έχουν οποιοδήποτε x, αλλά το y τους είναι ίσο με το c. Έτσι λοιπόν ο κάναβος αυτός αποτελείται από δύο δέσμες (οικογένειες) παραλλήλων ευθειών οι οποίες μεταξύ τους τέμνονται κάθετα.

4.3.2 Πολικές συντεταγμένες

Στις πολικές συντεταγμένες υπάρχει ένας ημιάξονας Ox, στον οποίο ορίζεται η μονάδα μήκους. Η θέση του κάθε σημείου A του επιπέδου ορίζεται από την απόστασή του ($r \geq 0$) από την αρχή O και από τη γωνία (θ), που δημιουργείται από τον ημιάξονα Ox και την επιβατική ακτίνα OA.



Εικόνα 4.35 *Οι Πολικές συντεταγμένες*

Ένα σημαντικό πρόβλημα που ανακύπτει είναι να υπολογίσουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου Α, όταν γνωρίζουμε τις πολικές, και αντίστροφα, τις πολικές συντεταγμένες του Α, όταν γνωρίζουμε τις Καρτεσιανές.

Θεωρούμε γνωστές τις πολικές συντεταγμένες (r,θ), ενός σημείου Α. Οι αντίστοιχες Καρτεσιανές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (με δεδομένο πως το σημείο τομής (Ο) των αξόνων ταυτίζεται με το Ο του ημιάξονα των πολικών, ενώ ο ημιάξονας των πολικών ταυτίζεται με το θετικό τμήμα του άξονα των x)

x = rσυνθ και y = rημθ

Αντίστροφα, οι σχέσεις που δίνουν τις πολικές συντεταγμένες, όταν γνωρίζουμε τις Καρτεσιανές είναι οι:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0 \quad \text{και} \quad \begin{cases} \theta = \text{Τοξεφ}\ y/x & \text{αν}\ \ x>0 \\ \theta = \text{Τοξεφ}\ y/x + \pi & \text{αν}\ \ x>0 \\ \theta = \pi/2 & \text{αν}\ x=0\ \text{και}\ y>0 \\ \theta = -\pi/2 & \text{αν}\ x=0\ \text{και}\ y<0 \end{cases}$$

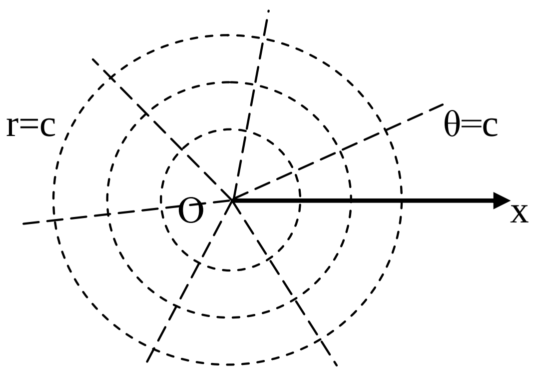
Η απόσταση r ενός σημείου Σ είναι πάντα θετική, ενώ η γωνία θ παίρνει τιμές από 0 έως 2π. Οι συντεταγμένες γραμμές του συστήματος αυτού προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο που προέκυψαν και στο Καρτεσιανό. Δηλαδή εξισώνοντας με μία σταθερή την κάθε συντεταγμένη (και θεωρώντας πως η άλλη μεταβάλλεται):

r = c

που δημιουργεί ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το Ο και ακτίνα το c (διότι η απόσταση παραμένει σταθερή ενώ η γωνία θ μεταβάλλεται). Αντίστοιχα η εξίσωση

θ = c

αντιστοιχεί σε δέσμη ημιευθειών με κέντρο το Ο.

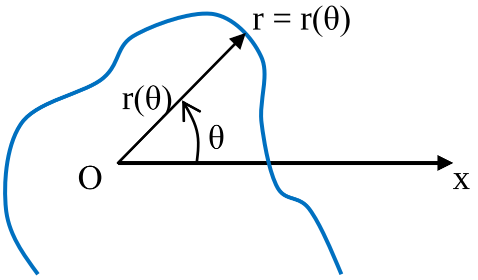


Εικόνα 4.36 *Οι συντεταγμένες γραμμές στις Πολικές συντεταγμένες*

Η συνηθισμένη μορφή των συναρτήσεων στις πολικές συντεταγμένες είναι η:

r = r(θ)

και οι γραφικές τους παραστάσεις μοιάζουν με αυτή, του επόμενου γραφήματος.



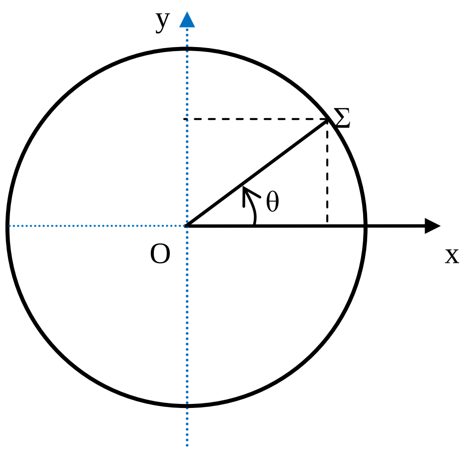
Εικόνα 4.37 *Η μορφή των συναρτήσεων στις πολικές συντεταγμένες*

4.3.3 Παραδείγματα συναρτήσεων σε πολικές συντεταγμένες

1^o) Η εξίσωση του κύκλου. Ως γνωστόν στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση του κύκλου ακτίνας R είναι η:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$$

εκφράζοντας τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες x και y και προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα.



Εικόνα 4.38 *Ο κύκλος στις πολικές συντεταγμένες*

Χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους μετατροπής:

$$\mathbf{x = r\sigma\upsilon\nu\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad y = r\eta\mu\theta}$$

υπολογίζουμε την ακόμη γνωστότερη σχέση r = R.

$$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2 \;\Rightarrow\; r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + r^2\eta\mu^2\theta = R^2 \;\Rightarrow\; r^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = R^2 \;\Rightarrow}$$

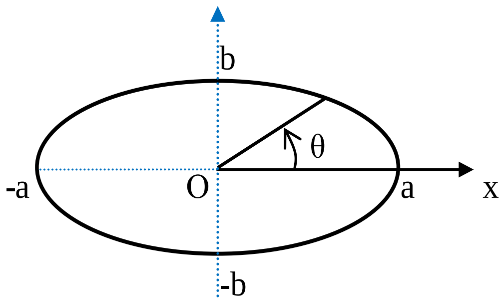
$$\mathbf{r = r(\theta) = R}$$

Φτάνουμε δηλαδή στο συμπέρασμα πως στις πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το O (την αρχή του ημιάξονα των πολικών συντεταγμένων) είναι η σταθερή συνάρτηση: r = c. Είναι κάτι που θα έπρεπε να το περιμένουμε, μια και αυτού του είδους οι κύκλοι αποτελούν συντεταγμένες γραμμές για τις πολικές (ακριβώς παρόμοιες με τις ευθείες της μορφής y=c, που είναι οι αντίστοιχες συντεταγμένες γραμμές στο Καρτεσιανό σύστημα).

□

2^{o}) **Η εξίσωση της έλλειψης.** Η εξίσωση της έλλειψης με οριζόντιο ημιάξονα τον a και κατακόρυφο τον b, στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Εικόνα 4.39 *Η έλλειψη στις πολικές συντεταγμένες*

Όπως και προηγουμένως βρίσκουμε:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \frac{r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\eta\mu^2\theta}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; r^2\left[\frac{b^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+a^2\eta\mu^2\theta}{a^2b^2}\right]=1 \;\Rightarrow$$

$$r=r\ \theta\ =\frac{ab}{\sqrt{b^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+a^2\eta\mu^2\theta}}$$

□

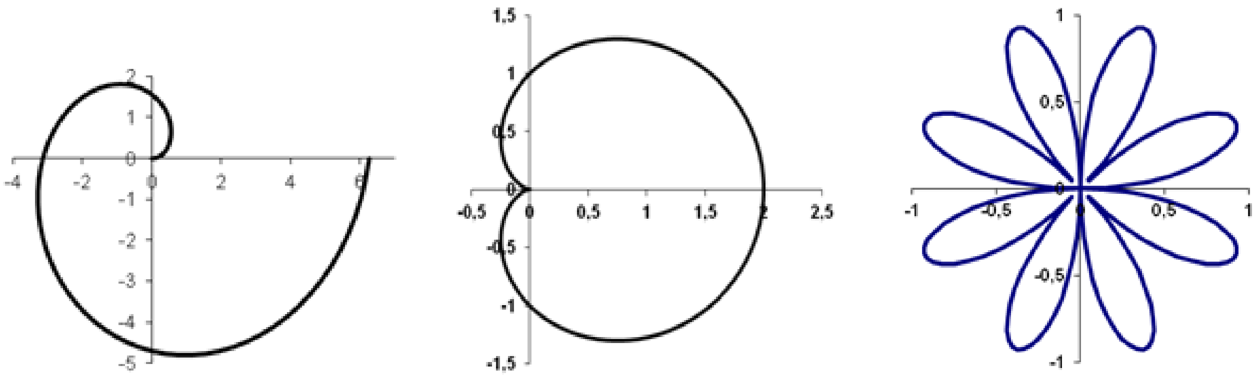
Άσκηση: Να υπολογισθεί η έκφραση σε πολικές της παραβολής y=x^2-1 και να βεβαιωθείτε πως η σχέση αυτή λειτουργεί για κάθε γωνία πλην της θ=π/2.

□

Παραδείγματα: Υπάρχουν ιδιαίτερα περίπλοκες καμπύλες με πολύ απλή έκφραση στο σύστημα των πολικών συντεταγμένων. Σαν παράδειγμα να αναφέρουμε::

- η σπείρα του Αρχιμήδη με εξίσωση: r(θ) = αθ
- το καρδιοειδές με εξίσωση: r(θ) = α(1+συνθ)
- η οκτάφυλλη μαργαρίτα, με εξίσωση: r(θ) = $a\left|\eta\mu(4\theta)\right|$

με γραφικές παραστάσεις:



Εικόνα 4.40 *Η σπείρα του Αρχιμήδη, το καρδιοειδές και η οκτάφυλλη μαργαρίτα, για α=1*

□

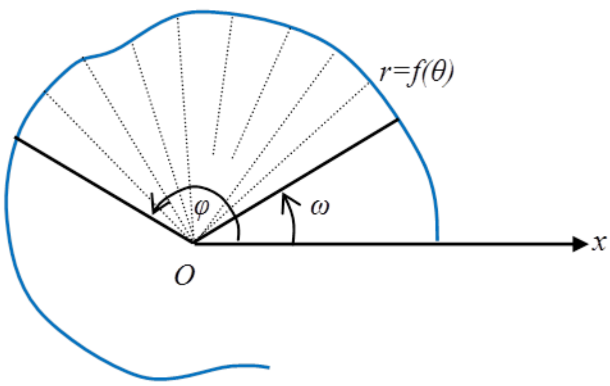
4.3.4 Ολοκλήρωση συναρτήσεων σε πολικές συντεταγμένες.

Η βασική ιδέα πάνω στην οποία στηριζόμαστε για να κατανοήσουμε την ορισμένη ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες, αφορά στο ότι το ρόλο που παίζει στις Καρτεσιανές συντεταγμένες ο άξονας των x, στις Πολικές εκφράζεται από το σημείο Ο.

Επομένως, το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{\omega}^{\phi} f(\theta)d\theta$$

αφού διαμερίσει το διάστημα [ω , φ] σε ν στοιχειώδεις γωνίες (όπως στο επόμενο γράφημα)

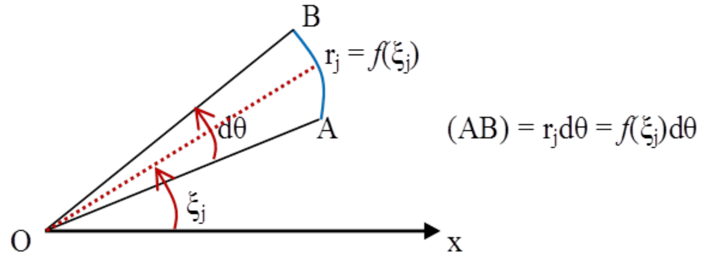


Εικόνα 4.41 *Διαμέριση του διαστήματος [ω,φ].*

προσπαθεί να αθροίσει γινόμενα της μορφής: $f(\xi_j)d\theta = f(\xi_j)(\theta_j - \theta_{j-1})$. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathrm{I} = \lim_{\nu\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{\nu}\left[f\left(\xi_j\right)d\theta_j\right]\right] = \int_{\omega}^{\phi} f(\theta)d\theta$$

Για να αντιληφθούμε τη φυσική ερμηνεία του προηγούμενου ολοκληρώματος, θα πρέπει να ερμηνεύσουμε τη σχέση: $f(\xi_j)d\theta$. Να θυμίσουμε ότι είδαμε στο 2^{o} κεφάλαιο πως «**στην περίπτωση ενός κύκλου ακτίνας R, το γινόμενο μιας επίκεντρης γωνίας φ επί την ακτίνα R αποδίδει το μήκος του τόξου (AB), στο οποίο βαίνει η γωνία φ, εφόσον η γωνία φ εκφράζεται σε ακτίνια**». Στην περίπτωση των πολικών συντεταγμένων, όπου η καμπύλη $r=f(\theta)$ δεν είναι απαραίτητα κύκλος, μπορούμε να θεωρήσουμε το τμήμα (AB) της καμπύλης της συνάρτησης σαν ένα στοιχειώδες τμήμα κυκλικού τόξου (όπως, αντίστοιχα, θεωρήσαμε τα τμήματα που ορίζονται από τον άξονα των x και την συνάρτηση $f(x)$, σαν στοιχειώδη παραλληλόγραμμα).



Εικόνα 4.42 *Μήκος του «τόξου» (AB).*

Όσα αναφέρθηκαν, συνδυαζόμενα με το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(\theta)$ δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως το ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I} = \int_{\theta}^{\phi} f(\theta)d\theta$$

υπολογίζει το συνολικό μήκος της καμπύλης που ορίζει η συνάρτηση $r=f(\theta)$, όταν η γωνία μεταβάλλεται από την τιμή ω έως την τιμή φ.

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου, ακτίνας R.

Λύση: Όπως είδαμε, η εξίσωση του κύκλου σε πολικές συντεταγμένες είναι η $r=f(\theta)=R$. Έχουμε λοιπόν:

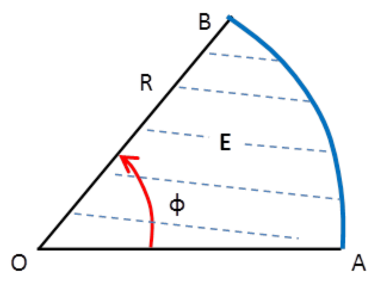
$$\text{Μήκος περιφέρειας} = \int_0^{2\pi} R d\theta = R\int_0^{2\pi} d\theta = R\ \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

καταλήγοντας στον γνωστό τύπο.

□

4.3.5 Υπολογισμός εμβαδών σε πολικές συντεταγμένες.

Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε πως μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον στοιχειώδη τόπο OAB με έναν κυκλικό τομέα, ο οποίος έχει σαν ακτίνα την μέση τιμή της συνάρτησης $r = f(\theta)$ στο στοιχειώδη τόπο. Για να προσεγγίσουμε όμως το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός τόπου στις πολικές συντεταγμένες, είναι απαραίτητο να αναφερθούμε στον υπολογισμό του εμβαδού ενός κυκλικού τομέα:



Εικόνα 4.43 *Κυκλικός τομέας ακτίνας R και γωνίας φ.*

Και πάλι η απλή μέθοδος των τριών δίνει την εύκολη λύση:

- Η γωνία 2π αντιστοιχεί σε εμβαδό πR^2
- Η γωνία φ αντιστοιχεί σε εμβαδό $E(\varphi)$

οπότε

$$E(\varphi) = \frac{\varphi \pi R^2}{2\pi} = \frac{1}{2}\varphi R^2$$

Ξαναγυρίζοντας στην Εικόνα 4.40, έχουμε για το εμβαδόν του στοιχειώδους τόπου ΟΑΒ:

$$E(OAB) = \frac{1}{2}\varphi R^2 = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta$$

οπότε το εμβαδό του τόπου που περιγράφεται στην Εικόνα 4.39 δίνεται από τη σχέση:

$$E_T = \int_{\omega}^{\varphi} \frac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\omega}^{\varphi}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το εμβαδόν της σπείρας του Αρχιμήδη (r=f(θ)=αθ), σαν συνάρτηση της παραμέτρου α.

$$E_{\Sigma\pi\varepsilon i\rho\alpha\varsigma} = \int_{\omega}^{\varphi} \frac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\omega}^{\varphi}(\alpha\theta)^2 d\theta = \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\alpha^2\pi^3$$

□

Άσκηση: Να υπολογισθεί το εμβαδό του καρδιοειδούς [r(θ) = α(1+συνθ)], σαν συνάρτηση της παραμέτρου α.

□

Άσκηση: Να υπολογισθεί το εμβαδό της οκτάφυλλης μαργαρίτας [r(θ) = $a\left|\eta\mu(4\theta)\right|$], επιλέγοντας την τιμή α=1.

Υπόδειξη: Για να μην υπάρξουν προβλήματα με την απόλυτη τιμή, υπολογίστε το εμβαδό του πρώτου φύλλου (το οποίο ορίζεται για γωνίες από 0 έως π/4) και πολλαπλασιάστε το επί οκτώ.

□

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία για Περαιτέρω Μελέτη

Αυγολούπης, Σ.Ι. (1992), *Διαφορικός Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Αριστοτελείου Πανεπιστημίου

Δημητρακούδης, Θεοδώρου, Κικίλιας, Κουρής, Παλαμούρδας (2002*), Διαφορικός* - *Ολοκληρωτικός Λογισμός,* Αθήνα: Εκδόσεις Δηρός

Κατωπόδης, Μακρυγιάννης, Σάσσαλος, (1994), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική Ε.Π.Ε

Κυβεντίδης, Θ. (2005), *Ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη

Παπαδήμας, Ο. (1997), *Εισαγωγή Στο Μαθηματικό Λογισμό*, Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλη

Τερζίδης, Χ. (2006), *Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής με Στοιχεία Διανυσματικής & Γραμμικής Άλγεβρας*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Χριστοδουλίδου

Finney, R.L., Weir, M.D., Giordano, F.R. (2009), *Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Piskounov, N. (1980), *Calcul Différentiel et Intégral*, Paris: Editions de Moscou