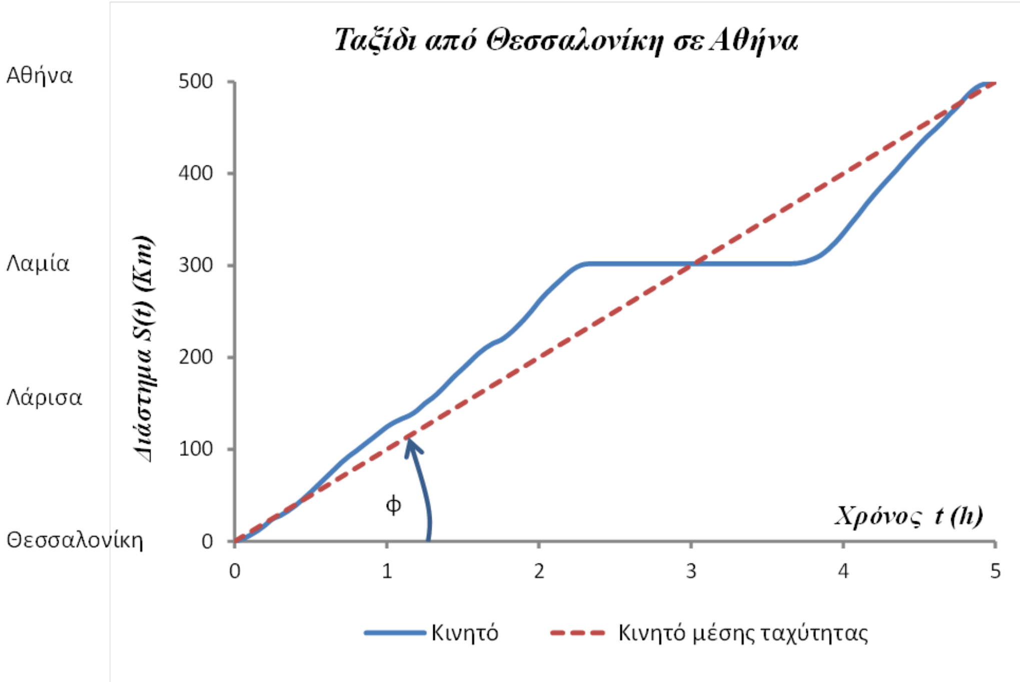
Κεφάλαιο 3. Παράγωγος Συνάρτησης

Σύνοψη:
Στο τρέχον Κεφάλαιο παρουσιάζεται ο Διαφορικός Λογισμός

Προαπαιτούμενη γνώση:
Συναρτήσεις, όρια και συνέχεια συναρτήσεων

3.1.1 Γενικά

Ταξιδεύουμε με ένα αυτοκίνητο τη διαδρομή Θεσσαλονίκης – Αθήνας. Θεωρούμε πως η συνάρτηση $S=S(t)$ δίνει τη θέση του αυτοκινήτου, σαν συνάρτηση του χρόνου. Έτσι προκύπτει το παρακάτω γράφημα:



Εικόνα 3.1 *Συνάρτηση της θέσης του αυτοκινήτου, σαν συνάρτηση του χρόνου.*

Παρατηρήσεις:

- Στο γράφημα, η διαδρομή του αυτοκινήτου λαμβάνει χώρα πάνω στον κατακόρυφο άξονα S. Αντίθετα, η καμπύλη του γραφήματος της συνάρτησης $S(t)$ βοηθάει στον καθορισμό της θέσης του, για κάθε χρονική στιγμή.
- Με δεδομένο πως η διαδρομή των 500 χιλιομέτρων (Km) καλύφθηκε σε 5 ώρες (h), η πρώτη ταχύτητα που μας έρχεται στο μυαλό είναι τα 100 Km/h, την οποία, μετά από δεύτερη σκέψη, την αποκαλούμε **Μέση Ταχύτητα**.
- Διερευνώντας, πάνω στο γράφημα, τη φυσική σημασία αυτής της μέσης ταχύτητας, η οποία προήλθε από τη διαίρεση:

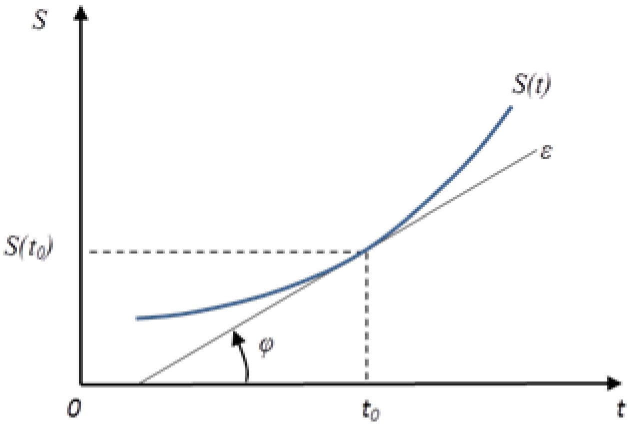
$$v(\text{μεση}) = \frac{\text{Συνολικο διανυμενο διαστημα}}{\text{Χρονος που απαιτηθηκε}} = \frac{S(5)-S(0)}{5-0} = \frac{500\,Km}{5h} = 100\ Km/h$$

διαπιστώνουμε πως η σχέση αυτή δίνει την κλίση της (κόκκινης) ευθείας, που συνδέει στο γράφημα τα σημεία αρχής (0 , 0) και τέλους (5 , 500) της διαδρομής του κινητού, είναι δηλαδή η εφφ, όπου η φ είναι η γωνία που δημιουργείται από τον άξονα των t και την ευθεία.

Αφού λοιπόν η κλίση της ευθείας είναι (α) σταθερή παντού και (β) ισούται με την μέση ταχύτητα μετακίνησης, συμπεραίνουμε πως το γράφημα της ευθείας περιγράφει την μετακίνηση ενός άλλου κινητού (φανταστικού) το οποίο διαγράφει την ίδια απόσταση (των 500 Km), στον ίδιο με εμάς χρόνο (5 h), με σταθερή ταχύτητα, το οποίο λέγεται **Κινητό της Μέσης Ταχύτητας**.

Ταυτόχρονα, συμπεραίνουμε πως **στο επίπεδο t και S, όπου περιγράφεται η θέση s ενός κινητού συναρτήσει του χρόνου t, οι κλίσεις της συνάρτησης θέσης αντιστοιχούν σε ταχύτητες**. Αν λοιπόν θεωρήσουμε την συνάρτηση θέσης ενός κινητού $S=S(t)$, η κλίση της καμπύλης $S(t)$ στο σημείο $(t_0,S(t_0))$ αντιστοιχεί στην ταχύτητα με τη οποία μεταβάλλεται η τιμή του S στην εν λόγω χρονική στιγμή, και ονομάζεται **Στιγμιαία Ταχύτητα.**

Και επειδή η κλίση μιας καμπύλης σε ένα σημείο ορίζεται με την κλίση της ευθείας (ε) που εφάπτεται στην καμπύλη, στο σημείο αυτό, ο υπολογισμός της στιγμιαίας ταχύτητας σε ένα σημείο, στο $(t_0,S(t_0))$ (όπως στο διπλανό σχήμα), καταλήγει στον υπολογισμό της κλίσης (του συντελεστή διεύθυνσης) της ευθείας ε.



Εικόνα 3.2 *Υπολογισμός στιγμιαίας ταχύτητας*

Συνοπτικά έχουμε για τη στιγμιαία ταχύτητα μιας μετακίνησης που εκφράζεται από τη συνάρτηση θέσης $S=S(t)$:

Στιγμιαία ταχύτητα της S στο σημείο t =

= Κλίση της $S(t)$ στο t

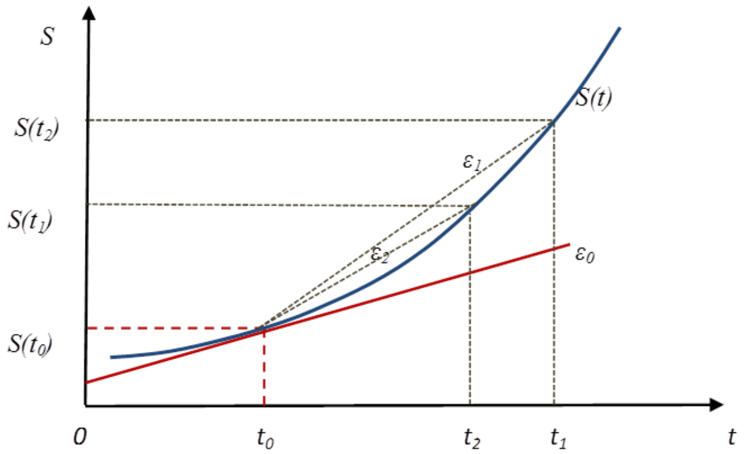
= Κλίση της ευθείας ε που εφάπτεται στην $S(t)$ στο σημείο $(t,S(t))$

= εφ(φ)

όπου φ η γωνία που δημιουργείται από την θετική κατεύθυνση του άξονα των t και την ευθεία ε.

Τρόπος υπολογισμού της στιγμιαίας ταχύτητας

Η βασική ιδέα είναι να υπολογίσουμε την τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας, με τη γνωστή μέθοδο υπολογισμού της μέσης ταχύτητας. Δηλαδή, να βρούμε τη μέση ταχύτητα σε ένα διάστημα πολύ μικρού χρονικού εύρους, το οποίο να ξεκινάει από το t_0, έστω το (t_0,t_1). Η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία αρχής και τέλους της κίνησης είναι η ε_1 (συνδέει τα σημεία $(t_0,s(t_0))$ και $(t_1,s(t_1))$, όπως φαίνεται στο σχήμα).



Εικόνα 3.3 *Υπολογισμός στιγμιαίας ταχύτητας με τη χρήση ορίου*

Η κλίση της δίνεται από τη σχέση:

$$\text{κλίση της } \varepsilon_1 = \frac{S\;t_1 - S\;t_0}{t_1 - t_0}$$

Όμως, η κλίση της ε_1 είναι σημαντικά διαφορετική από την κλίση την οποία προσπαθούμε να προσεγγίσουμε (την κλίση της ε_0, η οποία εφάπτεται στην καμπύλη στο «κεντρικό» σημείο *(t_0,$f(t_0)$)*).

Γι' αυτό προσπαθούμε να «ελαχιστοποιήσουμε το μήκος του διαστήματος, επιλέγοντας για παράδειγμα το σημείο t_2, το t_3 κλπ, τα οποία πλησιάζουν διαρκώς στο κεντρικό σημείο t_0.

Υπολογίζουμε, λοιπόν, τη στιγμιαία ταχύτητα (την κλίση της ε_0) μέσω του παρακάτω ορίου:

$$\text{Στιγμιαία ταχύτητα στο } t_0 = \text{κλίση της } \varepsilon_0 = \lim_{t_1 \to t_0}\left[\frac{S\;t_1 - S\;t_0}{t_1 - t_0}\right]$$

Κάτω από αυτό το πρίσμα, ξαναγυρνώντας στο αρχικό γράφημα της διαδρομής Θεσσαλονίκης – Αθήνας, παρατηρούμε πως σε πολλά σημεία η κλίση της καμπύλης είναι σημαντικά μεγαλύτερη της κλίσης της μέσης ταχύτητας, πράγμα που σημαίνει πως η στιγμιαία ταχύτητα ξεπερνούσε κατά πολύ την μέση ταχύτητα των100 Km/h. Αντίθετα, φαίνεται πως για μεγάλο χρονικό διάστημα (από τις 2.25 (2^{15}) έως τις 3,75 (3^{45})) εμφανίζεται το αυτοκίνητο ακινητοποιημένο, και η κλίση της συνάρτησης θέσης είναι μηδενική.

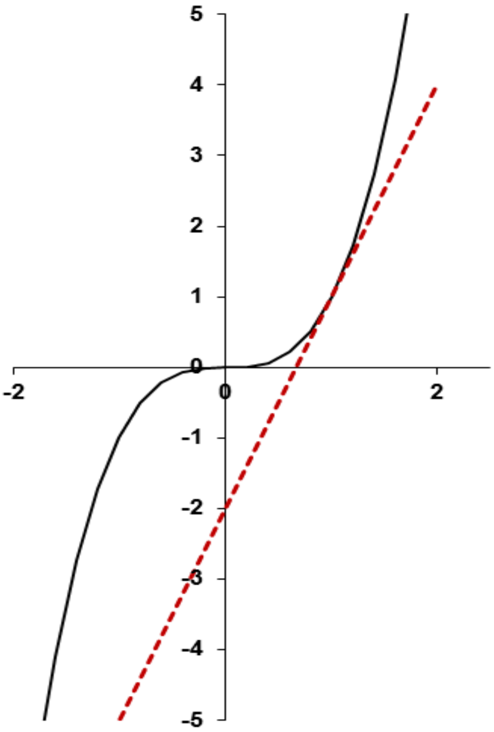
3.1.2 Η παράγωγος

Στα Μαθηματικά, η συνάρτηση θέσης του κινητού αντικαθίσταται από την έννοια της συνάρτησης, μια γενικότερη έννοια. Ταυτόχρονα, η έννοια της ταχύτητας αντικαθίσταται από την έννοια του ρυθμού μεταβολής της τιμής της συνάρτησης, καθώς μεταβάλλεται το x. Όμως εξακολουθεί, ο ρυθμός μεταβολής

- να είναι, ουσιαστικά μια γενίκευση της ταχύτητας, και
- να ταυτίζεται με την κλίση του γραφήματος της συνάρτησης σε ένα σημείο (άρα με την κλίση της ευθείας που εφάπτεται στο γράφημα, στο σημείο αυτό).

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η κλίση της καμπύλης της $f(x) = x^3$, στο σημείο x=1.

Λύση:



Εικόνα 3.4 *Υπολογισμός κλίσης της f(x)*

Η κλίση της καμπύλης $f(x)=x^3$, στο x=1 δίνεται (όπως και στην προηγούμενη περίπτωση) από το όριο:

$$\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ f(x)=x^3\ \sigma\tau o\ x=1=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(1+\Delta x)^3-1^2}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(1+3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3)-1}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[3+3\Delta x+\Delta x^2\right]=3$$

Ο αριθμός 3:

- αποκαλείται **παράγωγος αριθμός** της συνάρτησης $f(x)=x^3$, στο σημείο x=1,
- ισούται με την κλίση της καμπύλης της $f(x)$ στο σημείο (x=1, f(1)=1),
- είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (η κλίση) της ευθείας ε, η οποία εφάπτεται στην καμπύλη της $f(x)$, στο ίδιο σημείο.

Όμως η βασική ιδέα των Μαθηματικών είναι να πραγματοποιεί τις συγκεκριμένες πράξεις στο τυχαίο x και όχι σε μια συγκεκριμένη τιμή. Έτσι μπορούν να δημιουργούν νέες συναρτήσεις, που να επιλύουν το πρόβλημα στη γενική του μορφή. Στο προηγούμενο παράδειγμα, για την x^3, έχουμε για το τυχαίο x:

$$\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ f(x)=x^3\ \sigma\tau o\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}o\ x=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(x+\Delta x)^3-x^2}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3)-x^3}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\right]=3x^2$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην $3x^2$, μια νέα συνάρτηση (σε σχέση με την x^3) η οποία δίνει, για κάθε x, την κλίση της x^3. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται **παράγωγος συνάρτηση**. Για την παράγωγο συνάρτηση έχουμε τους συμβολισμούς:

$$\text{Αν}\quad f(x)=x^3 \ \text{τοτε}\ \left[\begin{array}{l} f'(x)=\left(x^3\right)'=3x^2 \\ \dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[x^3\right]=3x^2 \end{array}\right.$$

□

Ορισμός: Μία συνάρτηση για την οποία υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)$$

σε ένα σύνολο τιμών Α (υποσύνολο του R), λέγεται παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σύνολο Α. Το όριο αυτό ορίζει μια νέα συνάρτηση, με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, η οποία λέγεται παράγωγος συνάρτηση της f ή πρώτη παράγωγος της f.

□

3.1.3 Τύποι και Ιδιότητες των παραγώγων

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στις βασικές ιδιότητες των παραγώγων, αλλά και στους τύπους παραγώγισης των συνηθισμένων συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Τα όσα αναφέρονται εδώ αποτελούν βασικό εργαλείο για τη συνέχεια, έστω και αν αγνοεί κανείς την απόδειξή τους. Για τον λόγο αυτό αναφέρονται εδώ χωρίς απόδειξη. Η απόδειξη των περισσοτέρων θα γίνει σε επόμενες παραγράφους.

1. Συμβολισμός της παραγώγου συνάρτησης:
$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]$$
2. $\left(af(x)\pm bg(x)\right)'=\dfrac{d}{dx}\left(af(x)\pm bg(x)\right)=af'(x)\pm bg'(x)$

   όπου τα a και b είναι σταθερές ποσότητες
3. $(a)'=\dfrac{d}{dx}(a)=0$ όπου α είναι μία σταθερή.
4. $(x)'=\dfrac{d}{dx}(x)=1$
5. $\left(x^\nu\right)'=\dfrac{d}{dx}\left[x^\nu\right]=\nu x^{\nu-1}$, όπου το ν ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς.
6. $\dfrac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)=g(x)\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)+f(x)\dfrac{d}{dx}\left(g(x)\right)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

   Ο τύπος αυτός μπορεί να γενικευτεί. Για παράδειγμα, η παράγωγος του γινομένου τριών συναρτήσεων υπολογίζεται από την σχέση:

   $$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)h(x)\right)=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$
7. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\eta\mu(\mathrm{x})\right]=\sigma\upsilon\nu(\mathrm{x})$, $\dfrac{d}{dx}\left(\sigma\upsilon\nu(x)\right)=-\eta\mu(x)$

9. $\dfrac{d}{dx}\,\varepsilon\phi(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x)}$, $\qquad \dfrac{d}{dx}\,\sigma\phi(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2(x)}$

10. $\dfrac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$, $\qquad \dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$

11. $\dfrac{d}{dx}\log_a(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$

12. $\dfrac{d}{dx}\,\text{Το}\xi\eta\mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \dfrac{d}{dx}\,\text{Το}\xi\sigma\upsilon\nu(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $\dfrac{d}{dx}\,\text{Το}\xi\varepsilon\phi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

3.1.4 Παράγωγος του πολυωνυμικού μονωνύμου x^ν

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση που αποτελεί την πρώτη παράγωγο του x^ν, θα πρέπει πρώτα να αναφερθούμε στο περίφημο διώνυμο του Νεύτωνα. Πρόκειται για έναν τύπο που συστηματοποιεί την ταυτότητα $(a \pm b)^\nu$, όταν ο ν είναι φυσικός αριθμός. Για γράψουμε την ταυτότητα αυτή, θα πρέπει να θυμίσουμε τον τύπο των Συνδυασμών (να αναφέρουμε απλά πως «ονομάζουμε Συνδυασμούς των ν στοιχείων ανά μ, το πλήθος όλων των διαφορετικών μ-αδων που δημιουργούνται από ν στοιχεία, όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επελέγησαν τα στοιχεία της μ-αδας»).

$$C_\nu^\mu = \binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \quad \text{για } \nu \geq \mu$$

όπου το ν! (ν παραγοντικό) ορίζεται από το γινόμενο: ν!=1.2.3…(ν-1)ν, με την παραδοχή 0!=1.

Έχουμε λοιπόν για το διωνυμικό ανάπτυγμα:

$$(a \pm b)^\nu = \binom{\nu}{0}a^\nu \pm \binom{\nu}{1}a^{\nu-1}b + \binom{\nu}{2}a^{\nu-2}b^2 \pm \binom{\nu}{3}a^{\nu-3}b^3 + \ldots + / \pm \binom{\nu}{3}b^\nu$$

□

Παρατήρηση 1η: Εάν η βάση του διωνύμου είναι το $(a-b)$, τότε, γράφοντάς το υπό τη μορφή $a+(-b)$, αντιλαμβανόμαστε πως στο ανάπτυγμα εμφανίζεται το πρόσημο μείον στις περιττές δυνάμεις του *b*.

Παρατήρηση 2η: Υπάρχει ένας μνημονικός κανόνας (τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε εδώ), σύμφωνα με τον οποίο: «Οι όροι γράφονται με την εξής σειρά:

Ο 1ος περιέχει το α^ν, ο 2ος το $a^{\nu-1}b$, ο 3ος το $a^{\nu-2}b^2,\ldots,$ ο (ν-1)οστος το $a^1b^{\nu-1}$ και ο νοστος το b^ν.

Ο συντελεστής του 1ου όρου είναι η μονάδα. Κάθε επόμενος συντελεστής προκύπτει από τα στοιχεία του προηγούμενου όρου: Πολλαπλασιάζουμε τον συντελεστή επί τον εκθέτη του *α* (του προηγούμενου όρου) και διαιρούμε με το πλήθος των όρων που υπάρχουν πριν από τον όρο του οποίου το συντελεστή υπολογίζουμε».

Ας το δούμε:

$$(a \pm b)^{\nu} = 1a^{\nu} \pm \frac{1\nu}{1} a^{\nu-1}b + \frac{\nu(\nu-1)}{2} a^{\nu-2}b^{2} \pm \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2.3} a^{\nu-3}b^{3} + \dots + / \pm 1b^{\nu} =$$

$$= 1a^{\nu} \pm \nu a^{\nu-1}b + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} a^{\nu-2}b^{2} \pm \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} a^{\nu-3}b^{3} + \dots + / \pm 1b^{\nu}$$

με τους συντελεστές να επαναλαμβάνονται αντίστροφα, μετά το μέσον του αναπτύγματος.

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην επόμενη παράγωγο:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{(x+\Delta x)^{\nu} - x^{\nu}}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{x^{\nu} + \nu x^{\nu-1}\Delta x + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} x^{\nu-2}\Delta x^{2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} x^{\nu-3}\Delta x^{3} + \dots - x^{\nu}}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\nu x^{\nu-1}\Delta x + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} x^{\nu-2}\Delta x^{2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} x^{\nu-3}\Delta x^{3} + \dots}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\nu x^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} x^{\nu-2}\Delta x + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} x^{\nu-3}\Delta x^{2} + \dots\right] = \nu x^{\nu-1}$$

□

3.1.5 Παράγωγος γινομένου και κλάσματος συναρτήσεων

Θα δείξουμε, με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου, την παράγωγο της κλασματικής συνάρτησης.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{1}{g(x)^{2}} \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{1}{g(x)^{2}} \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]g(x)}{\Delta x} - \frac{f(x)\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{f'\ x\ g\ x - f\ x\ g'\ x}{g\ x^{\ 2}}$$

□

Άσκηση: Με την ίδια μέθοδο να αποδειχθεί ο τύπος της παραγώγου του γινομένου συναρτήσεων.

□

3.1.6 Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στην απόδειξη της παραγώγου του ημx και του συνx, θα χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά όρια:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu(x)}{x}\right]=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\left[\sigma\upsilon\nu(x)\right]=1$$

καθώς και τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\eta\mu(\alpha\pm\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\pm\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha\pm\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\mp\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

στις οποίες πρέπει να προσέξουμε την αντιστροφή των πρόσημων στην περίπτωση του συνημιτόνου.

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{d}{dx}\left(\eta\mu(x)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\eta\mu(x+\Delta x)-\eta\mu(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\eta\mu(x)\sigma\upsilon\nu(\Delta x)+\eta\mu(\Delta x)\sigma\upsilon\nu(x)-\eta\mu(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\eta\mu(x)+\eta\mu(\Delta x)\sigma\upsilon\nu(x)-\eta\mu(x)}{\Delta x}\right]=\sigma\upsilon\nu(x)\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\eta\mu(\Delta x)}{\Delta x}\right]=\sigma\upsilon\nu(x)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γνωστό όριο: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu(x)}{x}\right]=1$

□

Άσκηση: Με την ίδια μέθοδο να αποδειχθεί ο τύπος της παραγώγου του συνημιτόνου.

□

3.1.7 Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης

Αρχικά να θυμίσουμε τον ορισμό του αριθμού e:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\ 1+x^{\ 1/x},$$

όπως και τις ιδιότητες των λογαρίθμων:

$$a\ln\ b\ =\ln\ b^{a} \qquad \text{και} \qquad \frac{\ln\ b}{a}=\frac{1}{a}\ln\ b\ =\ln\ b^{1/a}$$

Για να υπολογίσουμε λοιπόν την παράγωγο της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^{x}$ ξεκινούμε από τη σχέση ορισμού της παραγώγου συνάρτησης:

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{e^{x+\Delta x}-e^{x}}{\Delta x}\right]=e^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right]$$

Θέτουμε:

$$t=e^{\Delta x}-1 \quad\Rightarrow\quad e^{\Delta x}=t+1 \quad\Rightarrow\quad \ln\left(e^{\Delta x}\right)=\ln\left(t+1\right) \quad\Rightarrow\quad \Delta x=\ln\left(t+1\right)$$

όπου, όταν το Δx τείνει στο μηδέν και το t τείνει επίσης στο μηδέν. Έτσι συνεχίζουμε την προηγούμενη σχέση:

$$\frac{df}{dx}=e^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right]=e^{x}\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{\ln\left(t+1\right)}\right]=e^{x}\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\frac{\ln\left(1+t\right)}{t}}\right]=e^{x}\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\ln\left(1+t\right)^{1/t}}\right]=$$

$$=e^{x}\left[\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(1+t\right)^{1/t}}\right]=e^{x}\left[\frac{1}{\ln\left(e\right)}\right]=e^{x} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$$

Η αντιμετώπιση της γενικής περίπτωσης της εκθετικής συνάρτησης θα γίνει μετά την παράγραφο που αναφέρεται στην παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων.

□

3.1.8 Παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που θυμίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, έχουμε για την λογαριθμική συνάρτηση *y = lnx*

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x\frac{x}{x}}\right]=$$

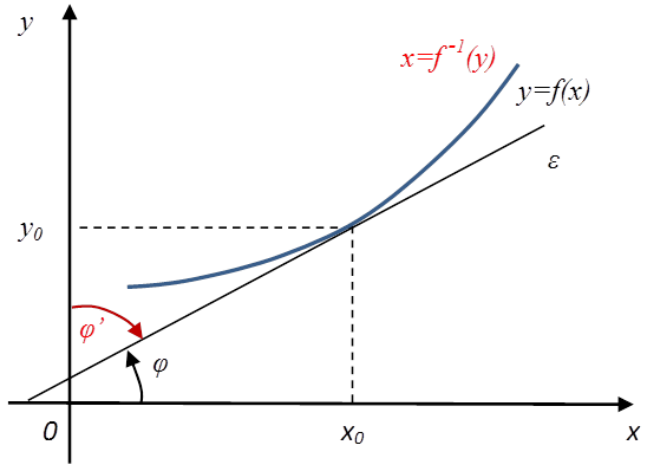
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x}{x\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]=$$

$$=\frac{1}{x}\ln\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

□

3.1.9 Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Αρχικά θα θέλαμε να θυμίσουμε κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν στις αντίστροφες συναρτήσεις. Έστω, λοιπόν, η μονότονη συνάρτηση *f(x)* (αν δεν είναι μονότονη δεν αντιστρέφεται) του επόμενου γραφήματος.



Εικόνα 3.5 *Μονότονη συνάρτηση*

Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχίζει την τιμή y_0 στην τιμή x_0. Η αντίστροφη συνάρτηση κάνει το ακριβώς αντίθετο: Αντιστοιχίζει την τιμή x_0 στην τιμή y_0. Η συνάρτηση που υλοποιεί αυτή την αντίστροφη αντιστοίχιση λέγεται (όπως είδαμε) αντίστροφη συνάρτηση και συμβολίζεται με το f^{-1}. Επομένως, το γράφημά της θα είναι ακριβώς ίδιο με το γράφημα της *f*, εάν θεωρήσουμε σαν μεταβλητή το *y* και συνάρτηση το *x*. Άρα, στο σημείο x_0 θα έχουμε για τους παράγωγους αριθμούς των δύο συναρτήσεων:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \text{εφ}(\varphi) \quad \text{και} \quad \frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \text{εφ}(\varphi')$$

Επειδή όμως οι γωνίες φ και φ' είναι συμπληρωματικές, έχουμε:

$$\text{εφ}(\varphi) = \frac{1}{\text{εφ}(\varphi')}$$

α) Ας εφαρμόσουμε τις γνώσεις αυτές στην περίπτωση της συνάρτησης

$$y = f(x) = \text{Τοξημ}(x) \;\; \text{της οποίας αντίστροφη είναι η συνάρτηση}: \; x = f^{-1}(y) = \text{ημ}(y)$$

Σημείωση: Όποιος δεν καταλαβαίνει τις δύο αυτές συναρτήσεις, δεν έχει παρά να τις «διαβάσει»:

- Η 1^{η}: «Το *y* είναι η γωνία της οποίας το ημίτονο είναι *x*».
- Η 2^{η}: «Το *x* είναι το ημίτονο κάποιας γωνίας *y*».

Παραγωγίζοντας λοιπόν την *f* έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\,\text{Τοξημ}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}\,\text{ημ}y} = \frac{1}{\text{συν}(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

όπου, στην τελευταία ισότητα, αντικαταστήσαμε το ημ(*y*) με το *x*.

□

β) Με όμοιο τρόπο έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\ \text{Τοξσυν}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ (να το δείξετε σαν άσκηση)

□

γ) Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο υπολογίζουμε και την παράγωγο της συνάρτησης *y=f(x)*=Τοξεφ(*x*), οπότε *x*=εφ*(y)*

$$\frac{d}{dx}\ \text{Τοξεφ}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}\ \text{εφ}(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\text{συν}^2(y)}} = \text{συν}^2(y) = \frac{1}{1+\text{εφ}^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$$

όπου, για να εκφραστεί το συν*x* με τη βοήθεια της εφαπτομένης (εφ*x*), χρησιμοποιήθηκε η τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\text{εφ}^2 y = \frac{\text{ημ}^2 y}{\text{συν}^2 y} = \frac{1-\text{συν}^2 y}{\text{συν}^2 y} = \frac{1}{\text{συν}^2 y} - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{συν}^2 y = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y}$$

□

3.1.10 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Μία συνάρτηση ονομάζεται σύνθετη, όταν το όρισμά της είναι μία άλλη συνάρτηση. Η ουσία της σύνθετης συνάρτησης και ο τρόπος που συμβολίζεται, δίνονται από την επόμενη ισότητα:

$$f \circ g \ \ x = \ f \circ g \quad x = f \quad g \ \ x$$

□

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση: y = συν(x^2+2), γράφεται σαν σύνθετη:

f(g) = συν(g(x)) όπου g(x) = x^2+2

□

Αντίθετα, η συνάρτηση *y = συν⁴(x)*, γράφεται σαν σύνθετη:

f(g) = $g(x)^4$ όπου g(x) = συν(x)

□

Συχνά η συνάρτηση g(x) αποκαλείται ενδιάμεση συνάρτηση.

Η παραγώγιση της σύνθετης συνάρτησης επιτυγχάνεται με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{d}{dx} f\left(g\left(x\right)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f\left(g\left(x+\Delta x\right)\right) - f\left(g\left(x\right)\right)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f\left(g\left(x+\Delta x\right)\right) - f\left(g\left(x\right)\right)}{g\left(x+\Delta x\right) - g\left(x\right)}\frac{g\left(x+\Delta x\right) - g\left(x\right)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta f}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x}\right] = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} f\left(g\left(x\right)\right) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

□

Ο προηγούμενος τρόπος παραγώγισης της $f\left(g\left(x\right)\right)$ μπορεί να περιγραφεί από έναν μνημονικό κανόνα: «**Παραγωγίζουμε αρχικά την f σαν να έχει μεταβλητή την g, και το αποτέλεσμα αυτό πολλαπλασιάζεται επί την παράγωγο της g ως προς x**».

Μια παρόμοια πράξη συμβαίνει όταν οι ενδιάμεσες συναρτήσεις είναι περισσότερες της μίας:

$$\frac{d}{dx} f\left(g\left(u\left(x\right)\right)\right) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{du}\frac{du}{dx}$$

□

Παράδειγμα: Να παραγωγισθούν οι συναρτήσεις: ***$y = συν(x^2+2)$*** **και** ***$y = συν^4(x^2+2)$***

Λύση:

α) Η συνάρτηση *$y = συν(x^2+2)$* γράφεται *$y = συν(g(x))$*, όπου *$g(x)=x^2+2$*.

$$\frac{d}{dx}\,\sigma\upsilon\nu\left(x^2+2\right) = \frac{d}{dg}\left(\sigma\upsilon\nu\, g\right)\left(\frac{d}{dx} g\left(x\right)\right) = -\eta\mu\left(g\right)\frac{d}{dx}\left[x^2+2\right] = -2x\eta\mu\left(x^2+2\right)$$

□

β) Η συνάρτηση *$y = συν^4(x^2+2)$* γράφεται *$y=[g(u(x))]^4$*, όπου *$g(u)=συν(u)$* και *$u(x)=x^2+2$*

$$\frac{d}{dx}\,\sigma\upsilon\nu^4\left(x^2+2\right) = \frac{d}{dg}\left(g^4\right)\left(\frac{d}{du}\,\sigma\upsilon\nu\, u\right)\left(\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)\right) = \ldots = 4\sigma\upsilon\nu^3\left(x^2+2\right)\left(-\eta\mu\left(x^2+2\right)\right)\left(2x\right) =$$

$$= -8x\sigma\upsilon\nu^3\left(x^2+2\right)\eta\mu\left(x^2+2\right)$$

□

Παράδειγμα: Να γραφούν οι τύποι όταν είναι σύνθετες οι βασικές συναρτήσεις:

α) $\frac{d}{dx}\left[\left(f\left(x\right)\right)^{\nu}\right] = \nu\left(f\left(x\right)\right)^{\nu-1} f'\left(x\right)$

β) $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(f\left(x\right)\right)\right] = \frac{1}{f\left(x\right)} f'\left(x\right) = \frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}$

γ) $\frac{d}{dx}\left[e^{f\left(x\right)}\right] = e^{f\left(x\right)} f'\left(x\right)$

δ) $\frac{d}{dx}\left[\text{Τοξεφ}\left(f(x)\right)\right]=\frac{1}{1+\left(f(x)\right)^2}f'(x)=\frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}$ κ.λ.π.

□

3.1.11 Παραγώγιση των εκθετικών συναρτήσεων (συνέχεια…)

Αφού αναφερθήκαμε στην παραγώγιση των σύνθετων συναρτήσεων, μπορούμε να διατυπώσουμε έναν κανόνα για την παραγώγιση των εκθετικών συναρτήσεων, εν γένει:

«**Για να παραγωγίσουμε μία εκθετική συνάρτηση, λογαριθμούμε την ισότητα ορισμού της (Νεπέρειος λογάριθμος) και την παραγωγίζουμε (σαν σύνθετη συνάρτηση) κατά μέλη. Στη συνέχεια λύνουμε την ισότητα που θα προκύψει, ως προς τη ζητούμενη παράγωγο**».

Ας το δούμε αναλυτικότερα.

Παράδειγμα: Να παραγωγισθεί η συνάρτηση: *y=f(x)=a^x^*.

Λύση:

$$y(x)=a^x \Rightarrow \ln\left(y(x)\right)=\ln\left(a^x\right)=x\ln a \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\ln\left(y(x)\right)\right]=\frac{d}{dx}\left(x\ln a\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y(x)}y'(x)=\ln a \Rightarrow y'(x)=y(x)\ln a \Rightarrow y'(x)=\left(a^x\right)'=a^x\ln a$$

□

Παράδειγμα: Να παραγωγισθεί η συνάρτηση: $y=f(x)=\eta\mu^x(x)$.

Λύση:

$$y(x)=\eta\mu^x(x) \Rightarrow \ln\left(y(x)\right)=\ln\left(\eta\mu^x(x)\right)=x\ln\left(\eta\mu(x)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(y(x)\right)\right]=\frac{d}{dx}\left[x\ln\left(\eta\mu(x)\right)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y(x)}y'(x)=\ln\left(\eta\mu(x)\right)+\frac{x}{\eta\mu(x)}\sigma\upsilon\nu(x)=\ln\left(\eta\mu(x)\right)+x\sigma\varphi(x) \Rightarrow$$

$$y'(x)=y(x)\left[\ln\left(\eta\mu(x)\right)+x\sigma\varphi(x)\right] \Rightarrow$$

$$y'(x)=\left(a^x\right)'=\eta\mu^x(x)\left[\ln\left(\eta\mu(x)\right)+x\sigma\varphi(x)\right]$$

□

3.1.12 Πίνακας Παραγώγων Στοιχειωδών Συναρτήσεων, Βασικών Σύνθετων Συναρτήσεων και Κανόνες Παραγώγισης

α) Τύποι

Παραγώγιση απλής συνάρτησης	Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης
$\left[x^{\nu}\right]'=\nu x^{\nu-1}$	$\left[f\ x^{\ \nu}\right]'=\nu f\ x^{\ \nu-1} f'\ x$
$\eta\mu(x)\ '=\sigma\upsilon\nu(x)$	$\left[\eta\mu\ \ f\ \ x\ \ \right]'=\sigma\upsilon\nu\ \ f\ \ x\ \ \ f'\ x$
$\sigma\upsilon\nu(x)\ '=-\eta\mu(x)$	$\left[\sigma\upsilon\nu\ \ f\ \ x\ \ \right]'=-\eta\mu\ \ f\ \ x\ \ \ f'\ x$
$\varepsilon\varphi(x)\ '=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}(x)}$	$\left[\varepsilon\varphi\ \ f(x)\ \right]'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}\ \ f(x)}f'(x)$
$\sigma\varphi(x)\ '=-\dfrac{1}{\eta\mu^{2}(x)}$	$\left[\sigma\varphi\ \ f(x)\ \right]'=-\dfrac{1}{\eta\mu^{2}\ \ f(x)}f'(x)$
$\left[e^{x}\right]'=e^{x}$	$\left[e^{f\ x}\right]'=e^{f\ x}f'(x)$
$\ln(x)\ '=\dfrac{1}{x}$	$\left[\ln\ \ f(x)\ \right]'=\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$
$\log_{a}(x)\ '=\dfrac{1}{x\ln\ a}$	$\left[log_{a}\ \ f(x)\ \right]'=\dfrac{1}{f(x)ln\ a}f'\ x$
$\text{Τοξημ}(x)\ '=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\left[\text{Τοξημ}\ \ f(x)\ \right]'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^{2}}}f'(x)$
$\text{Τοξεφ}(x)\ '=\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$\left[\text{Τοξεφ}\ \ f(x)\ \right]'=\dfrac{1}{1+f(x)^{2}}f'(x)$

β) Ιδιότητες

Παράγωγος αθροίσματος	$(f+g)'=f'+g'$
Παράγωγος διαφοράς	$(f-g)'=f'-g'$
Παράγωγος γινομένου αριθμού επί συνάρτηση	$(\lambda f)'=\lambda f'$, $\lambda\in\mathbb{R}$
Παράγωγος γινομένου	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
Παράγωγος δύναμης	$(f^{\alpha})'=\alpha\cdot f^{\alpha-1}\cdot f'$, $\alpha\in\mathbb{R}$
Παράγωγος πηλίκου	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$, $g(x)\neq 0$ $\left(\dfrac{1}{g}\right)'=-\dfrac{g'}{g^2}$, $g(x)\neq 0$

□

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση f(x)=$\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της παραγώγου να αποδείξετε ότι:

α) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0

β) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε x>0

γ) Να βρείτε τους αριθμούς $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(x)$ με x>0

(Απ: 1/2, 1/4, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$)

□

Άσκηση: Να βρείτε όπου ορίζεται την f' όταν:

α) f(x)= $\sqrt[4]{x^7}$ β) f(x)= $\sqrt[3]{x}$ γ) f(x)= $\sqrt[4]{(x-1)^7}$ δ) f(x)= $\sqrt[3]{(2x-1)}\sqrt[3]{x}$ ε) f(x)= $\sqrt[3]{(x+4)^2}$

(Απ: α) R_+, β) R^*, [1,+∞), γ) R-{0, 1/2}, δ) R-{-4})

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) f(x)=$4x^3-2\ln x+\sqrt{x}+3$συνx-ημ$\dfrac{\pi}{3}$ β) f(x)=(x^3-x)ημx-$2x^3\ln x+\dfrac{xe^x}{4}$ γ) f(x)=$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

δ) f(x)=$x^3\sqrt{x}\ln x$ ε) f(x)=$\dfrac{1}{ημx}+\dfrac{1}{συνx}$ στ) f(x)=ημ$\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

ζ) f(x)= $\sqrt[3]{(2x-1)^2}$ **η) f(x)=ημx·** $e^{συνx}$ **θ) f(x)=** $συν^3(3x\text{-}2)+\sqrt{2x^2\text{-}x+1}$

(Απ: α) -(2/x)+1/(2 $\sqrt{x}$ **)+12x2-3ημx**

β) $x(-1+x^2)συνx+1/4(e^x+e^x x-8x^2-24x^2\ln x+4(-1+3x^2)ημx)$

γ) $8\ (x+x^5)/(-1+x^4)^2$

δ) $1/2\ x^{5/2}\ (2+7\ \ln x)$

ε) σφx στεμx+τεμx εφx

στ) $-2\ x\ συν(1/(1+x^2))/(1+x^2)^2)$

ζ) $4/(3\ (-1+2\ x)^{1/3})$

η) $e^{\text{Cosx}}\ (\text{Cosx-Sin}^2\text{x})$

θ) (-1+4 x)/(2 $\sqrt{1-x+2x^2}$ **)+9 συν²(2-3 x) ημ(2-3 x))**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος της f στο σημείο x_0 όταν:

α) f(x)= $x^2\sqrt{1+x^3}$ **και $x_0=2$** **β) f(x)=$x^3ημ^3(πx)$ και $x_0=\frac{1}{6}$**

γ) f(x)= $\frac{ημx\text{-}xσυνx}{συνx+xημx}$ **, x∈** $\left(-\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right)$ **και $x_0=0$**

δ) $f(x)=\sqrt{e^{3x+1}+x^2+1}$ **στο $x_0=0$**

(Απ: α) 20 β) 1/576 (6+ $\sqrt{3}π$ **) γ) 0 δ) 3e/(2** $\sqrt{1+e}$ **))**

□

Άσκηση: Να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων

α) f(x)= $\sqrt{x}ημx$ **β) f(x)=** $\sqrt{x}συνx$ **γ)** $f(x)=\begin{cases} x^2ημ\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

δ) f(x)= $\begin{cases} \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x & , αν\ \ x<0 \\ 2\sqrt{x}+x & , αν\ \ x\geq 0 \end{cases}$ **ε) f(x)=** $\begin{cases} (x^2+7)ημx & , αν\ \ x\leq 0 \\ x^3συνx+7x & , αν\ \ x>0 \end{cases}$ **στ) f(x)=** $\frac{ημx}{1+συνx}$

(Απ: α) R^*_+ β) R^*_+ γ) R^* δ) R^*_+ ε) R στ) R-{(2κ+1)π})

□

Άσκηση: Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) g(x)=f(ημx) **β) g(x)=ημ(f(x))²** **γ) g(x)=[f(συνx)]²**

δ) h(x)=ln(ημx) , x∈(0,π) **ε) h(x)=συν⁴(3x²+1)**

(Απ: α) f'(ημx)συνx

β) συν(f²(x)) 2f(x) f'(x)

γ) 2f(συνx)[f'(συνx)]ημx

δ) συνx/(ημx)

ε) 24xσυν^3(3x^2+1))

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x)=x^3(x+1)^2-x^5$ **β)** $f(x)=\dfrac{x^4(x+1)^2}{x^2+1}$ **γ)** $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}$

δ) $f(x)=xe^x\ln x$ **ε)** $f(x)=\dfrac{e}{e^x-e^{-x}}$

(Απ: α) x^2 (3+8x)

β) 2x^3(2+5x+4x^2+3x^3+2x^4)/(1+x^2)^2

γ) (4-x$^{3/2}$+x$^{5/2}$)/(2x^3)

δ) e^x(1+(1+x) lnx)

ε) -e^{1+x} (1+ e^{2x})/(-1+ e^{2x})^2)

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x)=e^x(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$ **β)** $f(x)=e^{\varepsilon\phi x-1}$ **γ)** $f(x)=x\ln x-x$ **δ)** $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\ln(\sigma\upsilon\nu x)$

ε) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+2\varepsilon\phi x}$ **στ)** $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ **ζ)** $f(x)=(1+\sigma\upsilon\nu x)(x-\eta\mu x)$ **η)** $f(x)=\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x$

(Απ: α) 2e^x ημx

β) e$^{-1+\varepsilon\varphi x}$ τεμ^{2}x

γ) logx

δ) -(1+ln(συνx)) ημx

ε) 2x (1-x τεμ^{2}x+2 εφx)/(1+2 εφx)^2

στ) 1/(1+συνx)

ζ) ημx (-x+2 ημx)

η) 0)

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x)=\alpha^{x^2-5x+1}$ **β)** $f(x)=(\ln x)^{\sqrt{4}}$ **γ)** $f(x)=\tau o\xi\eta\mu(5x-1)$ **δ)** $f(x)=\sqrt{\varepsilon\phi x+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}}$

ε) $f(x)=2\eta\mu(x^2+4)^{\frac{1}{2}}$ **στ)** $f(x)=\ln\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ **ζ)** $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(\eta\mu 2x)$ **η)** $f(x)=\left(\dfrac{x-5}{2x+1}\right)^3$

(Απ: α) $α^{-5x+x^2}$ ((1-5 x+x^2) +α(-5+2 x) lnα)

β) 2lnx/x

γ) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{(2-5x)x}}$

δ) 1/2 τεμx $\sqrt{τεμx+εφx}$

ε) (2xCos $\sqrt{4+x^2}$ **)/** $\sqrt{4+x^2}$

στ) εφ(x/2)/(-1+συνx)

ζ) -6 συν2x συν($ημ^2$2x) ημ(ημ2x)

η) (33 $(-5+x)^2$)/$(1+2x)^4$)

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x)=συν^3(x^4+5)$ **β)** $f(x)=\sqrt{\ln(3x+1)}$ **γ)** $f(x)=τοξεφ[\log(ημx)]$ **δ)** $f(x)=ημ^3(ημ^3(x^5))$

ε) $f(x)=\log^4(ημ^2x+2)$

(Απ: α) -12 x^3 $συν^2$(5+x^4) ημ(5+x^4)

β) 3/((2+6 x) $\sqrt{\ln(1+3x)}$ **)**

γ) σφ[x] ln10/($(\ln 10)^2$+$(\ln(ημx))^2$)

δ) 45 x^4 $συνx^5$ συν($ημ^3$ x^5) $ημ^2(x^5)$ $ημ^2$ ($ημ^3$ x^5)

ε) (8 συνx $(\ln(2+ημ^2x))^3$ ημx)/$(\ln 10)^4$ (2+$ημ^2$x)))

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x)=(xημ2x+εφ^4(x^5))^5$ **β)** $f(x)=τοξεφ\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **γ)** $f(x)=e^{-x}-ημe^{-x}συνe^{-x}$

δ) $f(x)=\dfrac{ημx}{1+\ln ημx}$ **ε)** $f(x)=\ln\dfrac{x\ln x-1}{x\ln x+1}$

(Απ: α) 5 (2 x συν2x+ημ2x+20 x^4 $τεμ^2x^5$ $εφ^3x^5$) (x ημ2x+$εφ^4x^5$)^4

β) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{2(x-1)}$

γ) -2 e^{-x} $ημ^2(e^{-x})$

δ) συνx ln(ημx)/$(1+\ln(ημx))^2$

ε) 2 (1+lnx)/(-1+x^2 $(\ln x)^2$))

□

Άσκηση: Να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων

α) f(x)= $\frac{x\ln x}{1-x}+\ln(1-x)$ β) f(x)= $\text{τοξημ}\frac{2x}{1+x^2}$ γ) $f(x)=\frac{1}{\alpha\beta}\text{τοξεφ}\left(\frac{\beta}{\alpha}\text{εφ}x\right)$

δ) f(x)= $\ln\sqrt{\text{εφ}\frac{x}{2}}$ ε) f(x)= $\sqrt{\text{ημ}x-\text{ημ}^2x}+\text{τοξημ}(\sqrt{1-\text{ημ}x})$

(Απ: α) lnx/(-1+x)^2

β) 2/(x^2+1)

γ) (b^2 τεμ^{2}x)/(a^2+b^2 εφ^{2}x)

δ) (στεμx)/2

ε) -(συνx ημx)/ $\sqrt{-(-1+\text{ημ}x)\text{ημ}x}$ **)**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) f(x)=x^x , x>0 **β) f(x)=(ημx)^{συνx}, x**$\in(0,\frac{\pi}{2})$ γ) $f(x)=(1+\frac{1}{x})^{(1+\frac{1}{x})}$

(Απ:

α) x^x (1+lnx)

β) ημx^{συνx} (συνx σφx-ln(ημx) ημx)

γ) $(1+\frac{1}{x})^{1/x}$ **(1+x)(1+ln(1+1/x))/x^3)**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) f(x)=x^{lnx} **β) f(x)=** $x^{e^{-x^2}}$ **γ) f(x)=(lnx)^x , x>1** **δ) f(x)=** $x^{\sqrt{x}}$

(Απ:

α) 2 x^{-1+lnx} lnx

β) $e^{-x^2}x^{-1+e^{-x^2}}$ **(1-2x^2 lnx)**

γ) (lnx)^x (1/lnx+ln(lnx))

δ) 1/2 $x^{-\frac{1}{2}+\sqrt{x}}$ **(2+lnx))**

□

3.1.13 Παραγώγιση Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Με τις γνώσεις που έχουμε μέχρις εδώ, κατανοούμε πως η έκφραση *F(x,y) = z* καθορίζει μία συνάρτηση της εξαρτημένης μεταβλητής *z*, της οποίας η τιμή εξαρτάται από δύο μεταβλητές (την *x* και την *y*). Καθορίζοντας την τιμή των δύο μεταβλητών η *F* επιτρέπει τον υπολογισμό της εξαρτημένης μεταβλητής. Θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$z=F\;\;x,y\;\;=x^2-3xy \qquad \Rightarrow \qquad z=F\;\;2,3\;\;=-14$$

Συχνά, βλέπουμε την έκφραση *F(x,y)* = 0, πιστεύοντας πως πρόκειται για μια σχέση που ορίζει μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Όμως, θέτοντας τιμές στις δύο «ανεξάρτητες μεταβλητές», φθάνουμε σε μία μη αληθή πρόταση:

$$F\ \ 2,3\ =0 \quad \Rightarrow \quad -14=0$$

Επομένως στην ισότητα *F(x,y)* = 0, η γνώση της τιμής της μεταβλητής *x*, απαιτεί τον υπολογισμό της τιμής του *y*, έτσι ώστε το αριστερό μέλος της ισότητας να είναι ίσο με το μηδέν. Άρα, στην περίπτωση αυτή, η τιμή του *y* εξαρτάται από την τιμή που θα επιλεγεί για το *x*. Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, πως το *y* είναι εξαρτημένη μεταβλητή. Ονομάζουμε λοιπόν πεπλεγμένες συναρτήσεις αυτές που δεν είναι λυμένες ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή τους.

Η μορφή μιας πεπλεγμένης συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι η:

F(x,y) = 0

η οποία, αν μπορεί να λυθεί ως προς *y*, μετατρέπεται στην *y = f(x)*

Η γραφή μιας συνάρτησης με πεπλεγμένη μορφή συμβαίνει είτε διότι μας βολεύει:

- $F\ \ x,y\ = x^2+y^2-4=0 \quad ή \qquad x^2+y^2=4$

  (κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα R=2), που λύνεται ως προς *y*: $y=\pm\sqrt{4-x^2}$, όμως στην πεπλεγμένη μορφή γίνεται ευκολότερα αντιληπτή.

- $x-2\ ^2+\ y+1\ ^2=4$

  (κύκλος με κέντρο το (2,-1) και ακτίνα R=2), που λύνεται ως προς *y*: $y=-1\pm\sqrt{4-\ x-2\ ^2}$, δύσκολα όμως κάποιος μπορεί να αντιληφθεί πως πρόκειται για κύκλο.

είτε γιατί δεν μπορούμε να κάνουμε διαφορετικά:

- $F\ \ x,y\ = x^2+x^3y^2-e^x\ln\ y\ =0$ η οποία δεν λύνεται ως προς κάποιο από τα *x* και *y*.
- $x^2+x^3y^2=e^x\ln\ y$ που είναι η συνάρτηση του προηγούμενου παραδείγματος, με ένα τμήμα της να μεταφέρεται στο β’ μέλος της ισότητας.

□

Κανόνας: Η παραγώγιση μιας συνάρτησης γραμμένης υπό πεπλεγμένη μορφή γίνεται με παραγώγιση της σχέσης ορισμού της, εφαρμόζοντας την μέθοδο παραγώγισης μιας σύνθετης συνάρτησης, όποτε χρειάζεται να παραγωγίσουμε την εξαρτημένη μεταβλητή (συνήθως θεωρούμε εξαρτημένη την *y*).

Για να το εκφράσουμε απλούστερα: «παραγωγίζουμε την ισότητα ορισμού της πεπλεγμένης συνάρτησης κατά μέλη, ενθυμούμενοι πως το *y* είναι συνάρτηση και όχι μεταβλητή. Στο τέλος λύνουμε την ισότητα που προκύπτει ως προς το *y*‘».

Ο κανόνας αυτός γίνεται ευκολότερα κατανοητός με κάποια μικρά παραδείγματα:

1. $\dfrac{d}{dx}\ x^2y^3\ =2xy^3+3x^2y^2y'$
2. $\dfrac{d}{dx}\ \eta\mu\ \ xy^3\ \ =\sigma\upsilon\nu\ \ xy^3\ \cdot\dfrac{d}{dx}\ xy^3\ =\ y^3+3xy^2y'\ \sigma\upsilon\nu\ \ xy^3$

□

Παράδειγμα: Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης: $x^2+y^2=4$

Λύση:

$$x^2+y^2=4 \quad \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} \quad 2x+2yy'=0 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{x}{y}$$

Παρόμοιο αποτέλεσμα έχουμε παραγωγίζοντας και τη σχέση: $y=\pm\sqrt{4-x^2}$. Πράγματι:

$$y=\pm\sqrt{4-x^2} \quad \Rightarrow \quad y'=(\pm)\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2\right)'=(\pm)\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=(\pm)\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=(\pm)\frac{-x}{|y|}$$

όπου η εναλλαγή του πρόσημου ($\pm$) έχει να κάνει με το πρόσημο της τιμής του *y*.

□

Παράδειγμα: Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης *y(x)* που ορίζεται από την ισότητα:

$F(x,y) = x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y = 0$

Λύση: Παρατηρούμε πως η λύση της *F(x,y)=0* ως προς y είναι πολύ δύσκολη, ενώ η λύση της ως προς *x* είναι ευκολότερη. Πράγματι, η εξίσωση αυτή αποτελεί ένα τριώνυμο ως προς *x*:

$$F(x,y) = x^2 + x(3y^2 - \ln y) + y^3 = 0$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση επιμένουμε να θεωρούμε πως η εν λόγω σχέση ορίζει μια συνάρτηση y με μεταβλητή το *x*. Παραγωγίζοντας σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$2x + 3y^2y' + 3y^2 + 6xyy' - \ln y - \frac{xy'}{y} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x + 3y^2 - \ln y = y'\left(\frac{x}{y} - 3y^2 - 6xy\right) \quad \Rightarrow$$

$$y'=\frac{2x+3y^2-\ln y}{\frac{x}{y}-3y^2-6xy}$$

□

Άσκηση: Να βρείτε την $\frac{dy}{dx}$ αν

α) $\ln y+\frac{y}{x}=1$ **β)** $\ln(x^2+y^2)=2\,\text{τοξεφ}\frac{y}{x}$ **γ)** $y^2=3^{-1/x^2}$ **δ)** $x^y=y^x$

(Απ: α) $\frac{y^2}{x(x+y)}$ **β)** $\frac{x+y}{x-x^2-y^2}$ **γ)** $-\frac{\ln 3}{x^3y3^{1/x^2}}$ **δ)** $\frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}}$ **)**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος των πεπλεγμένων συναρτήσεων:

α) $xy^3 - 3x^2 = xy+5$

β) $e^{xy}+y\ln x=\text{συν}2x$

(Απ: α) $\dfrac{y^3-6x-y}{x(1-3y^2)}$ **β)** $-\dfrac{y\ln x+\dfrac{y}{x}+2\eta\mu 2x+ye^{xy}}{xe^{xy}}$ **)**

□

Άσκηση: Να βρείτε την $\dfrac{dy}{dx}$ **αν**

α) $xy^2-\ln y-x-\eta\mu x=0$ **για x=0** **β)** $2y+1-xy^3=0$ **για x=1** **γ)** $x^3y+xy^3=2$ **για x=1**

(Απ: α) $-2y+y^3$ **β)** $\dfrac{y^3}{2-3y^2}$ **γ)** $-\dfrac{y^3+3y}{3y^2+1}$**)**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης x(y) στο σημείο y=0, που ορίζεται με πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση: $yx^x+x-1=0$

(Απ: $\dfrac{x-y-1}{y(1-x)(\ln x+1)}$**)**

Άσκηση: Να βρείτε την $\dfrac{dy}{dx}$ **της παράστασης $x^5-xy+y^5=0$.**

(Απ: $\dfrac{y-5x^4}{5y^4-x}$**)**

□

Άσκηση: Να βρείτε την $\dfrac{dy}{dx}$ **της παράστασης $x^6+2x^3y-y^7x-2=0$.**

(Απ: $\dfrac{y^7-6x^5-6x^2y}{2x^3-7y^6}$**)**

□

Άσκηση: Να βρείτε την $\dfrac{dy}{dx}$ **της παράστασης $x+\sigma\upsilon\nu x-e^y+xy^2=0$.**

(Απ: $\dfrac{1-\eta\mu x+y^2+2xy}{e^y}$**)**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος της πεπλεγμένης συνάρτησης που ορίζεται από τη σχέση $y^2+x^2y-2x^4=0$

(Απ: $\dfrac{8x^3-2xy}{x^2+2y}$**)**

□

Άσκηση: Αν μια συνάρτηση ορίζεται από την εξίσωση $8x^2 - 4y^2+3xy-2x+y=0$ να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$

(Απ: $\frac{2-3y-16x}{3x+1-8y}$)

□

3.1.14 Παράγωγος Συνάρτησης δοσμένης με Παραμετρικές Εξισώσεις

Πολλές φορές η σχέση της ανεξάρτητης μεταβλητής με την εξαρτημένη καθορίζεται με την διαμεσολάβηση μιας παραμέτρου. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ορίζεται μέσω δύο παραμετρικών εξισώσεων της μορφής:

$x=x(t)$ και $y=y(t)$

όπου το t είναι η ανεξάρτητη παράμετρος (στα περισσότερα προβλήματα της Φυσικής είναι ο χρόνος t).

Αν θέλουμε να καταλήξουμε σε μία συνάρτηση με την κλασσική μορφή, θα πρέπει να απαλείψουμε την παράμετρο t ανάμεσα στις δύο εξισώσεις (πράγμα που δεν είναι πάντα δυνατό αλλά και όταν είναι δυνατό δεν θα δώσει τα ίδια αποτελέσματα, όπως θα δούμε…).

Από τα πλέον γνωστά παραδείγματα συνάρτηση γραμμένης με παραμετρικές εξισώσεις είναι οι παραμετρικές εκφράσεις του κύκλου και της έλλειψης:

α) Ο κύκλος: $x^2+y^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=R\sigma\upsilon\nu\ \theta \\ y=R\eta\mu\ \theta \end{cases}$ για $\theta\in 0,2\pi$

β) Η έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=R^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=a\sigma\upsilon\nu\ \theta \\ y=b\eta\mu\ \theta \end{cases}$ για $\theta\in 0,2\pi$

Θα δείξουμε τη σχέση που αφορά στην εξίσωση της έλλειψης, θεωρώντας πως ο αναγνώστης μπορεί να δείξει με τρόπο παρόμοιο την εξίσωση του κύκλου:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \\ x=a\sigma\upsilon\nu\ \theta \\ y=b\eta\mu\ \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{a^2\sigma\upsilon\nu^2\ \theta}{a^2}+\frac{b^2\eta\mu^2\ \theta}{b^2}=\sigma\upsilon\nu^2\ \theta+\eta\mu^2\ \theta=1$$

Η παραγώγιση (εφόσον διατηρηθεί η παραμετρική μορφή) περιγράφεται από την επόμενη, προφανή, σχέση:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t}$$

Παράδειγμα 1ο: Έστω η συνάρτηση που ορίζεται με τις παραμετρικές σχέσεις: $\begin{cases} x(t)=\sqrt{t} \\ y(t)=t^2-t-5 \end{cases}$

α) Με απαλοιφή να γραφεί η συνάρτηση *y=y(x)*.

β) Να υπολογισθεί η παράγωγος της στο *y(x)* σημείο *x*=0,5

Λύση:

1. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = t^2 - t - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x^2 \\ y\ \ x\ = x^4 - x^2 - 5 \end{cases}$

Να παρατηρήσουμε εδώ πως ενώ η συνάρτηση στην παραμετρική της μορφή δεν ορίζεται για *t*<0, οπότε και το *x(t)* δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, στην φυσιολογική της μορφή ορίζεται σε ολόκληρο το R (απόρροια της ύψωσης στο τετράγωνο).

2. Παραγώγιση της συνάρτησης στην κλασσική της μορφή:

$$y\ \ x\ = x^4 - x^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad y'\ \ x\ = 4x^3 - 2x \quad \Rightarrow \quad y'\ \ 0.5\ = 4*0.5^3 - 2*0.5 = -0.5$$

3. Παραγώγιση υπό την παραμετρική μορφή. Για να υπολογίσουμε την παράγωγο στο *x*=0,5 θα πρέπει να υπολογίσουμε την αντίστοιχη τιμή του t: $t = \left[x^2\right]_{x=0.5} = 0.5^2 = 0.25$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\ \ t^2 - t - 5\ }{\dfrac{d}{dt}\ \ \sqrt{t}\ } = \frac{2t-1}{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}} = 2\sqrt{t}\ \ 2t-1 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}\ \ 0.5\ = \left[2\sqrt{t}\ \ 2t-1\ \right]_{t=0.5} = -0.5$$

□

Παράδειγμα 2°: Έστω η συνάρτηση που ορίζεται με τις παραμετρικές σχέσεις: $\begin{cases} x(t) = \text{ημ}\ \ t \\ y(t) = \sqrt{t} \end{cases}$

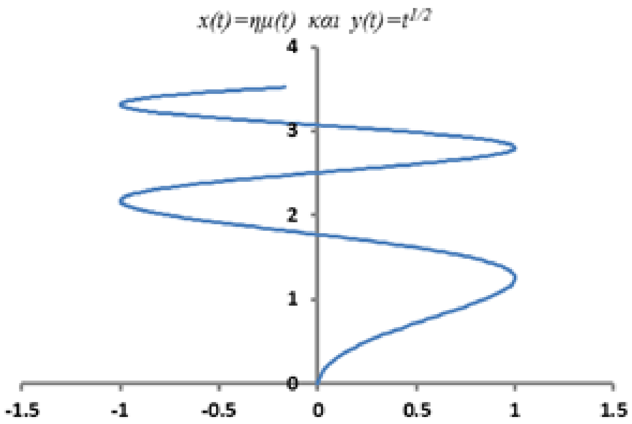
α) Με απαλοιφή να γραφεί η συνάρτηση *y*=*y(x)*.

β) Να υπολογισθεί η παράγωγος της στο *y(x)* σημείο *x*=0,5

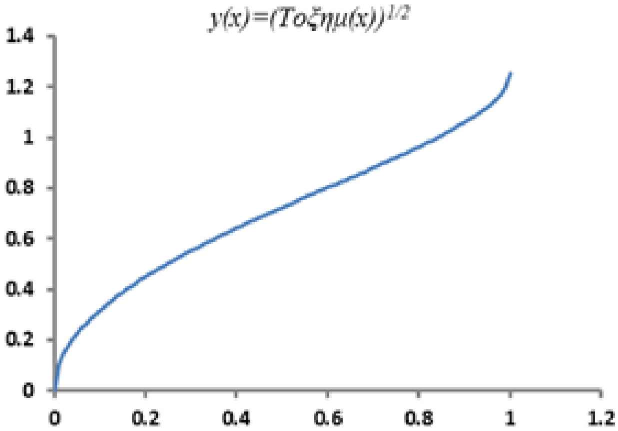
Λύση:

α) $\begin{cases} x(t) = \text{ημ}\ \ t \\ y(t) = \sqrt{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \text{Τοξημ}\ \ x \\ y\ \ x\ = \sqrt{\text{Τοξημ}\ \ x} \end{cases}$

Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε πως ενώ η συνάρτηση που ορίζεται παραμετρικά, ορίζεται για κάθε τιμή του $t \geq 0$, η συνάρτηση *y(x)* έχει σαν πεδίο ορισμού το διάστημα: [-1,1] και επιλέγοντας πάντα τόξο θετικό. Αυτή η μεγάλη διαφορά εμφανίζεται στο γράφημα της συνάρτησης στις δύο καταστάσεις και δείχνει τις μεγάλες δυνατότητες που δίνει ο ορισμός καμπύλων με παραμετρική μορφή (κάτι που θα δούμε κι αργότερα, κατά την παραγώγιση των διανυσματικών συναρτήσεων).



Εικόνα 3.6 *Γράφημα της παραμετρικής συνάρτησης*



Εικόνα 3.7 *Γράφημα της συνάρτησης y(x)*

- Παραγώγιση της συνάρτησης στην κλασσική της μορφή:

$$y(x)=\sqrt{\text{Τοξημ}(x)} \Rightarrow y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\text{Τοξημ}(x)}}\left(\sqrt{\text{Τοξημ}(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\text{Τοξημ}(x)}\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$y'(0.5)=\left[\frac{1}{2\sqrt{\text{Τοξημ}(x)}\sqrt{1-x^2}}\right]_{x=0.5}=\frac{1}{\sqrt{\pi/2}}$$

- Παραγώγιση υπό την παραμετρική μορφή:

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο στο x=0,5 θα πρέπει να υπολογίσουμε την αντίστοιχη τιμή του t:

$$t=\left[\text{Τοξημ}(x)\right]_{x=0.5}=\frac{\pi}{6}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\sqrt{t}}{\frac{d}{dt}\eta\mu\ t}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sigma\upsilon\nu\ t}=\frac{1}{2\sqrt{t}\sigma\upsilon\nu\ t}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}\ 0.5\ =\left[\frac{1}{2\sqrt{t}\sigma\upsilon\nu\ t}\right]_{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{\pi/2}}$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί η $\frac{dy}{dx}$ αν:

α) $x=\sqrt{t}$ **και** $y=t-\frac{\sqrt{t}}{t}$ **για t=4** **β)** $x=\eta\mu t\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2t}$ **και** $y=\sigma\upsilon\nu t\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2t}$ **για t=**$-\frac{\pi}{4}$

(Απ: α) 17/4 β) 1)

□

Άσκηση: Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογιστεί η $\frac{dy}{dx}$ αν:

α) $x=t^2+1$ **και** $y=t^3-1$ **β)** $x=3\sigma\upsilon\nu t$ **και** $y=3\eta\mu t$ **γ)** $x=t+\sqrt{t}$ **και** $y=t-\sqrt{t}$

δ) $x=2t^3+1$ **και** $y=t^2\sigma\upsilon\nu t$ **ε)** $x=te^{-t}$ **και** $y=2t^2+1$

(Απ: α) 3t/2 β)-σφt γ) $\frac{2\sqrt{t}-1}{2\sqrt{t}+1}$ **δ)** $\frac{2\sigma\upsilon\nu t-t\eta\mu t}{6t}$ **ε)** $\frac{4t}{e^{-t}(1-t)}$ **)**

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί η $\frac{dy}{dx}$ στο σημείο x=1 αν x=2t- 5 και $y=e^{-t^2}$ **.**

(Απ: -3/e^9)

□

Άσκηση: Αν $x=\frac{t^2}{2}-e^t+t$ **και** $y=\eta\mu t-t$ **να βρείτε την παράγωγο** $\frac{dy}{dx}$**.**

(Απ: $\frac{\sigma\upsilon\nu t+1}{e^t-t-1}$**)**

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί η $\frac{dy}{dx}$ αν x=θ-ημθ και y=1 - συνθ.

(Απ: $\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}$**)**

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί η $\frac{dy}{dx}$ αν x=t^3 και y=t^2-t.

(Απ: $\frac{2t-1}{3t^2}$)

□

Άσκηση: Οι εξισώσεις κίνησης στο επίπεδο xOy ενός κινητού είναι

x = φ(t) = t^2-1

y = g(t) = t^3-t με t>0.

Βρείτε τα σημεία της τροχιάς του κινητού, όπου να υπάρχουν οριζόντιες εφαπτομένες της καμπύλης αυτής.

(Απ: $\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3-\sqrt{\frac{1}{3}}\right),\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ **)**

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων y=f(x) που ορίζεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

α) $\begin{matrix} x=\text{τοξημ}\frac{t}{2} \\ y=1+t+t^2 \end{matrix}$ **β)** $\begin{matrix} x=\alpha\sigma\upsilon\nu^3 t \\ y=\beta\eta\mu^3 t \end{matrix}$

(Απ: α) $(2t+1)\sqrt{4-t^2}$ **β)** $-\frac{\beta\eta\mu t}{\alpha\sigma\upsilon\nu t}$ **)**

□

Άσκηση: Έστω η καμπύλη με εξισώσεις x=t^2-1, y=3t. Να βρεθεί η παράγωγος της y=f(x)

i) γενικά και ii) στο σημείο (0,3).

(Απ: α) 3/2t β) 3/2)

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης y=f(x) που ορίζεται παραμετρικά από τις εξισώσεις $\begin{matrix} x=t^2 \\ y=t+\frac{1}{t} \end{matrix}$

(Απ: $\frac{t^2-1}{2t^3}$)

□

Άσκηση: Έστω η καμπύλη με εξισώσεις x=ημ^{2}θ, y=2ημθ. Να βρεθεί η παράγωγος της y=f(x)

(Απ: 1/ημθ)

□

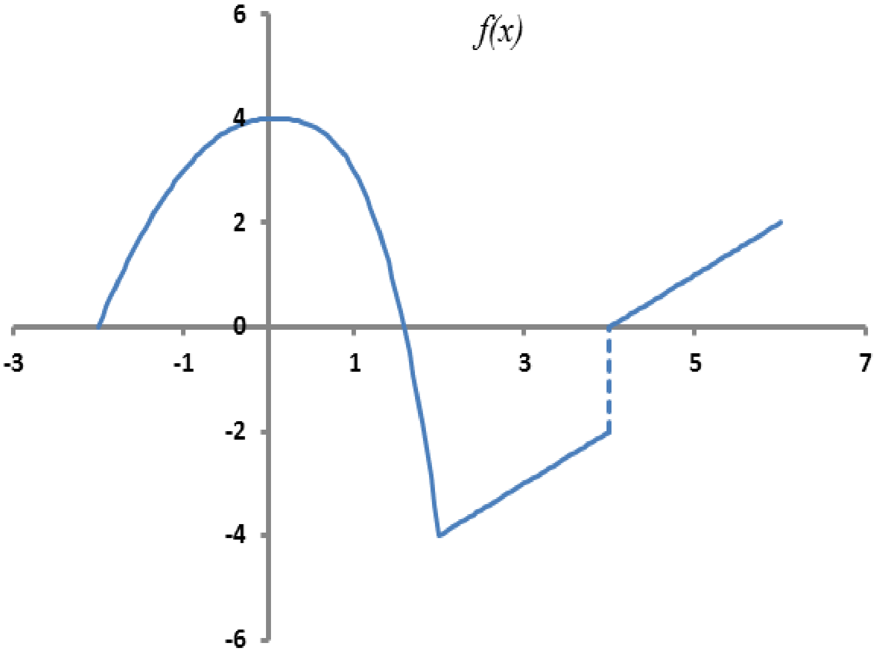
3.1.15 Συνέχεια και παραγωγισιμότητα

Από τον ορισμό της παραγώγου (σαν όριο) γίνεται φανερό πως μία συνάρτηση *f(x)* δεν έχει παράγωγο σε ένα σημείο, στο οποίο δεν είναι συνεχής. Όμως η συνέχεια της *f* σε ένα σημείο, ενώ είναι όρος αναγκαίος για την παραγωγισιμότητα της *f* στο σημείο αυτό, δεν είναι και ικανός,.

Παράδειγμα:

Λύση: Στο επόμενο γράφημα βλέπουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4 & \alpha\nu \quad x\le 0\\ -x^3+4 & \alpha\nu \quad 0<x\le 2\\ x-6 & \alpha\nu \quad 2<x\le 4\\ x-4 & \alpha\nu \quad x>4\end{cases}$$



Εικόνα 3.8 *Γράφημα της συνάρτησης f(x)*

Η f είναι συνεχής στο σημείο x=0, ενώ είναι και παραγωγίσιμη, διότι οι παράγωγοι των δύο σκελών της στο μηδέν (πλευρικές παράγωγοι) είναι και οι δύο ίσες με το μηδέν.

Πράγματι:

$$\lim_{x\to 0-}\left[f'\ 0\right] = -x^4+4\ '_{x=0} = -4x^3\ _{x=0} = 0 \quad \kappa\alpha\iota$$

$$\lim_{x\to 0+}\left[f'\ 0\right] = -x^3+4\ '_{x=0} = -3x^2\ _{x=0} = 0$$

Αντίθετα στο σημείο x=2 η f συνεχίζει να είναι συνεχής, δεν είναι όμως παραγωγίσιμη, διότι οι παράγωγοι των δύο σκελών της στο x=2 (πλευρικές παράγωγοι) είναι άνισες. Όπως και προηγουμένως να δείξετε πως η αριστερή είναι ίση με το -12 και η δεξιά είναι 1.

Τέλος, η f είναι ασυνεχής στο σημείο x=4 και, προφανώς, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

□

3.1.16 Εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται σε ένα σημείο καμπύλης

Πρόκειται για ένα εύκολο μα και αγαπητό πρόβλημα: Δίνεται η συνάρτηση f(x) και ζητείται η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη της *f*, σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της *f*. Η μέθοδος της λύσης είναι απλή:

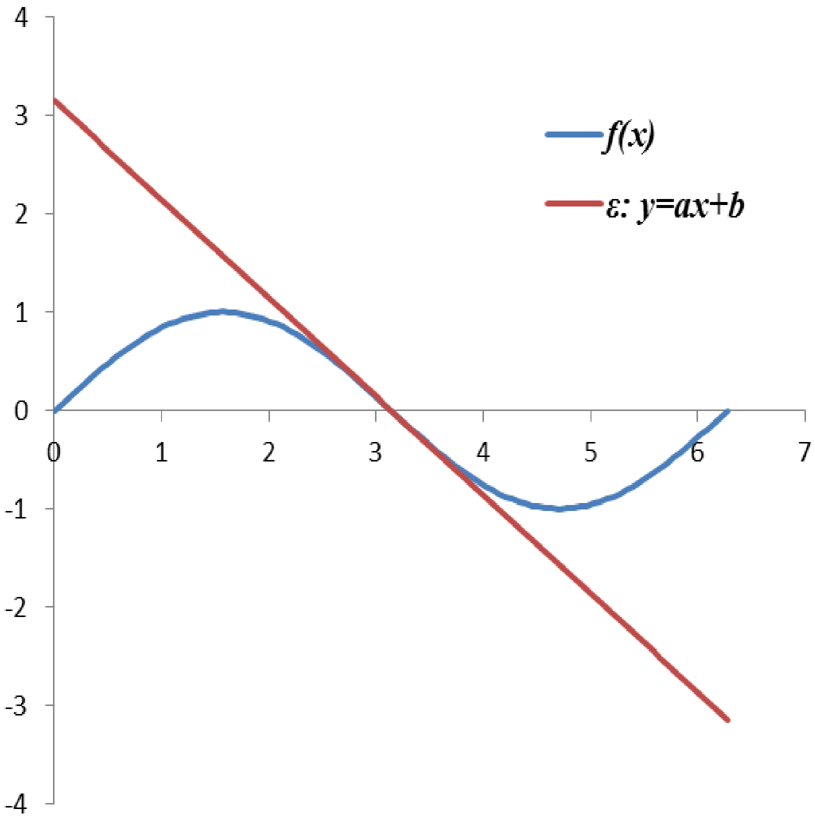
Εάν η εξίσωση της ευθείας είναι η ε:$y=ax+b$, τότε χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις που να αφορούν στις άγνωστες παραμέτρους *a* και *b*, έτσι ώστε να φθάσουμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τις δύο αυτές άγνωστες παραμέτρους. Τα δεδομένα που έχουμε:

1. Η κλίση της ευθείας ε είναι ίση με την κλίση της συνάρτησης *f* στο σημείο x_0. Επομένως θα έχουμε: $a = f'\ x_0$
2. Γνωρίζουμε ένα σημείο από το οποίο διέρχεται υποχρεωτικά η ε και αυτό είναι το σημείο επαφής με το γράφημα της *f*, οπότε:

   $$f\ \ x_0\ = ax_0 + b \quad \Rightarrow \quad b = f\ \ x_0\ - ax_0$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η εξίσωση της ευθείας ε, η οποία εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης *y*=ημ(*x*), στο σημείο *x*=π.

Λύση: Παρατηρώντας το επόμενο γράφημα, το οποίο περιγράφει το πρόβλημα, καταλήγουμε πως οι τιμές που περιμένουμε για τις παραμέτρους *a* και *b* της ευθείας ε είναι:



Εικόνα 3.9 *Γράφημα της συνάρτησης f(x)=ημx και της ευθείας ε*

- Το *a* περιμένουμε να είναι ίσο με το -1, διότι η ευθεία είναι φθίνουσα και «φαίνεται» να είναι παράλληλη με τη 2^{η} διχοτόμο του Καρτεσιανού συστήματος *y*=-*x*. Αυτό σημαίνει πως εκτιμούμε πως η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στον θετικό ημιάξονα των *x* και την ευθεία ε είναι περίπου ίση με φ=-45^o (**Προσοχή!** Μια τέτοια εκτίμηση μπορεί να είναι εντελώς λανθασμένη, εάν οι δύο άξονες δεν έχουν **την ίδια κλίμακα**!).

- Το *b* θα είναι λίγο μεγαλύτερο από το 3, μια και στο σημείο αυτό η ευθεία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα (**Προσοχή και πάλι!** Αυτό συμβαίνει μόνο στα γραφήματα όπου οι δύο άξονες τέμνονται στο σημείο (0,0)).

  Ας τα υπολογίσουμε:

$$a = f'\ x_0\ = \ \eta\mu\ x\ \ '_{x=\pi} = \sigma\upsilon\nu\ \pi\ = -1$$

$$f\ \ x_0\ = ax_0 + b\ \ \Rightarrow\ \ b = f\ \ x_0\ - ax_0 = \eta\mu\ \pi\ -\ -1\ \pi = \pi$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι:

ε: y=-x+π

□

Άσκηση: Έστω α $\in$ R και έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \alpha\nu \ \ x \leq 0 \\ \eta\mu(\alpha x), & \alpha\nu \ \ x > 0 \end{cases}.$$

α) Για ποιες τιμές του α η f είναι συνεχής στο x_0=0;

β) Για ποιες τιμές του α η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0;

(Απ: α) $\forall \alpha \in R$ **β) 2)**

□

Άσκηση: Να υπολογισθεί η εξίσωση της ευθείας ε, η οποία εφάπτεται στο γράφημα του κύκλου $x^2+y^2=1$, στο σημείο x_0=0.5

(Απ: $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **)**

□

3.2 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης – Θεμελιώδη Θεωρήματα

3.2.1 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Η παράγωγος της παραγωγίσιμης συνάρτησης *f(x)* (που ονομάστηκε και πρώτη παράγωγος της *f*) είναι μία νέα συνάρτηση (η *f ΄(x)*), η οποία μπορεί να ξαναπαραγωγισθεί. Η πρώτη παράγωγος της πρώτης παραγώγου της *f* λέγεται δεύτερη παράγωγος ή παράγωγος δεύτερης τάξης της *f* και είναι επίσης μία νέα συνάρτηση. Ισχύουν οι συμβολισμοί:

$$\frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)=\frac{d}{dx}\left[\frac{df}{dx}\right]=\frac{d^2 f}{dx^2}=f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}\right]$$

Στην ιδιαίτερη περίπτωση παραγώγισης μιας συνάρτησης με μεταβλητή το χρόνο, αντικαθιστούμε, στον συμβολισμό, τους δύο τόνους με δύο τελείες, πάνω από το γράμμα της συνάρτησης:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\dot f(t+\Delta t)-\dot f(t)}{\Delta t}\right]=\ddot f(t)$$

Είναι προφανές πως και στον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου ισχύουν οι τύποι και οι ιδιότητες παραγώγισης, όπως αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο της πρώτης παραγώγου.

Όμοια, από την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης *f* προκύπτουν και οι επόμενης τάξης παράγωγοι:

$$f'''(x)=\frac{d^3 f}{dx^3},\qquad f^{(4)}(x)=\frac{d^4 f}{dx^4},\ \ldots\ldots,\qquad f^{(\nu)}(x)=\frac{d^\nu f}{dx^\nu}$$

όπου παρατηρούμε πως για το συμβολισμό των παραγώγων μεγαλύτερης τάξης της τρίτης δεν χρησιμοποιούνται τόνοι, αλλά αναγράφεται στον εκθέτη η τάξη παραγώγισης, μέσα σε μία παρένθεση (αλλιώς θα ήταν ο κλασσικός εκθέτης).

Παράδειγμα 1ο: Να βρεθεί η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=e^{x^2}$.

Λύση: Δεν είναι δυνατόν να υπολογισθεί άμεσα η τρίτη παράγωγος της *f*. Είμαστε υποχρεωμένοι να υπολογίσουμε όλες τις παραγώγους προηγούμενης τάξης:

$$f(x)=e^{x^2}\quad\Rightarrow$$

$$f'(x)=\left(e^{x^2}\right)'=e^{x^2}\left(x^2\right)'=2xe^{x^2}\quad\Rightarrow$$

$$f''(x)=\left(2xe^{x^2}\right)'=(2x)'e^{x^2}+2x\left(e^{x^2}\right)'=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=\left(4x^2+2\right)e^{x^2}\quad\Rightarrow$$

$$f'''(x)=\left(\left(4x^2+2\right)e^{x^2}\right)'=\left(4x^2+2\right)'e^{x^2}+\left(4x^2+2\right)\left(e^{x^2}\right)'=8xe^{x^2}+\left(8x^3+4x\right)e^{x^2}=\left(8x^3+12x\right)e^{x^2}$$

□

Παράδειγμα 2ο: Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης που ορίζεται πεπλεγμένα από τη σχέση:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=4$$

Λύση:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=4 \underset{d/dx}{\Rightarrow} 2(x-2)+2(y-1)y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x-2}{y-1} \Rightarrow$$

$$y''=-\frac{(x-2)'(y-1)-(x-2)(y-1)'}{(y-1)^2}=-\frac{(y-1)-(x-2)y'}{(y-1)^2}$$

όπου θα μπορούσαμε στην θέση του *y'* να θέσουμε το ίσο του, που υπολογίσαμε στην πρώτη παραγώγιση. Συχνά όμως το αφήνουμε στη μορφή αυτή.

□

Παράδειγμα 3°: Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης του κύκλου με ακτίνα 2, που ορίζεται με παραμετρικές εξισώσεις: $x(t)=2\sigma\upsilon\nu(t),\quad y(t)=2\eta\mu(t)$ **.**

Λύση: Όπως είδαμε, η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αυτής είναι η:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

την οποία πρέπει να παραγωγίσουμε και πάλι ως προς *x*:

$$y''(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

Αν θέλαμε να ερμηνεύσουμε το τελευταίο σκέλος της προηγούμενης ισότητας θα λέγαμε πως «αφού παραγωγίσουμε ως προς t, σαν κλάσμα το

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

(οπότε η παράγωγος *dx/dt* στον παρονομαστή θα υψωθεί στο τετράγωνο) θα το πολλαπλασιάσουμε και με το

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

με αποτέλεσμα ο παρονομαστής να υψωθεί εις την τρίτη». Επομένως καταλήγουμε στον τελικό τύπο:

$$y''(x)=\ldots=\frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left[\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\right]\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y_t''x_t'-y_t'x_t''}{(x_t')^3}$$

Ας δούμε όλα αυτά στην πράξη:

$$y'\ \ x\ = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\ 2\eta\mu t}{\frac{d}{dt}\ 2\sigma\upsilon\nu t} = -\frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t} = -\sigma\phi t$$

και

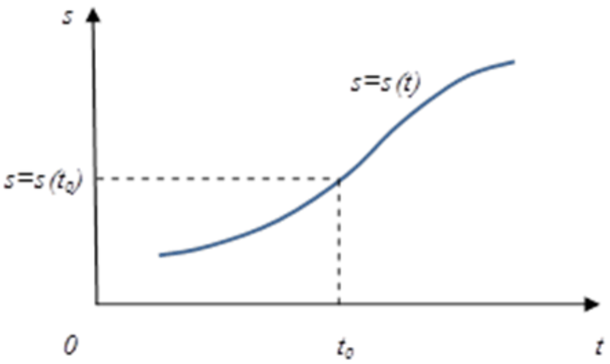
$$y''\ \ x\ = \frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{2\sigma\upsilon\nu t}{-2\eta\mu t}\right]\frac{1}{-2\eta\mu t} = \frac{-2\eta\mu t\ \ -2\eta\mu t\ \ -2\sigma\upsilon\nu t\ \ -2\sigma\upsilon\nu t}{-2\eta\mu t\ \ ^{2}}\,\frac{1}{-2\eta\mu t} =$$

$$= \frac{4}{-8\eta\mu^3 t} = -\frac{1}{2\eta\mu^3 t}$$

□

3.2.2 Φυσική Ερμηνεία της Δεύτερης Παραγώγου

Στο ξεκίνημα του κεφαλαίου των παραγώγων είδαμε πως η συνάρτηση *s=s(t)* μπορεί να θεωρηθεί σαν η συνάρτηση που δίνει την θέση *s* ενός κινητού, που κινείται πάνω σε μία ευθεία (εδώ ο κατακόρυφος άξονας) και η οποία ονομάστηκε «συνάρτηση θέσης του κινητού». Επίσης είδαμε πως η πρώτη της παράγωγος είναι μία νέα συνάρτηση, που σε κάθε χρονική στιγμή t δίνει την στιγμιαία ταχύτητα του κινητού.



Εικόνα 3.10 *Συνάρτηση θέσης του κινητού*

Τώρα μπορούμε να πούμε πως η δεύτερη παράγωγος του κινητού δίνει την «στιγμιαία ταχύτητα, με την οποία μεταβάλλεται η ταχύτητα του κινητού». Δηλαδή, η δεύτερη παράγωγος του κινητού ορίζει την συνάρτηση της ταχύτητας της ταχύτητας του κινητού και η οποία στη φυσική λέγεται «Επιτάχυνση».

Παράδειγμα: Στη Φυσική του Λυκείου αναφέρεται πως η κίνηση ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση, ξεκινώντας από τη θέση s_0 και έχοντας αρχική ταχύτητα v_0, περιγράφεται από τη σχέση:

$$s\ \ t\ = -\frac{1}{2}gt + v_0 t + s_0$$

όπου ο άξονας *s* αυξάνεται προς τα πάνω (άρα έχει αντίθετη φορά από την επιτάχυνση της βαρύτητας). Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δείξουμε πως η σταθερά *g* είναι η σταθερά της γήινης βαρύτητας. Παραγωγίζοντας δύο φορές την συνάρτηση θέσης έχουμε:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt + v_0 t + s_0 \quad \Rightarrow$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}gt + v_0 t + s_0\right) = -gt + v_0 \quad \Rightarrow$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}(t) = \frac{d}{dt}(-gt + v_0) = -g$$

Επομένως, η συνάρτηση που εξέφραζε τη θέση του κινητού, περιέγραφε μία κίνηση η οποία έχει στον πυρήνα της μία σταθερή επιτάχυνση (g), την επιτάχυνση της Βαρύτητας.

□

Άσκηση: Να βρεθεί η f'' (x) (αν υπάρχει) και η f'' (-1) για την συνάρτηση f(x)=$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & , x<0 \\ x & , x\geq 0 \end{cases}$

(Απ: α) f(x)=$\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} & , x<0 \\ 1 & , x\geq 0 \end{cases}$ β) f(x)=$\begin{cases} 0 , & x<0 \\ 1 , & x\geq 0 \end{cases}$)

□

Άσκηση: Αν $x = e^{-t}$ και $y = \eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t$ να δείξετε ότι: $x^2\dfrac{d^2 y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

□

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση f(x) = $e^{\alpha x}$

α) Να βρείτε τις f ΄, f ΄΄

β) Να βρείτε το α $\in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει f ΄΄(x) + 2f ΄(x) =3f(x)

(Απ: α) $\alpha e^{\alpha x}$, $\alpha^2 e^{\alpha x}$ β) – 3, 1)

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $y = (x-a)e^{-x}$ $a \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή του α, ώστε να ισχύει η σχέση: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = (x+1)e^{-x}$.

(Απ: - 3)

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος n-τάξης της συνάρτησης f(x)=ημx.

(Απ: Εξαρτάται από το υπόλοιπο της διαίρεσης n/4)

□

Άσκηση: Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της πεπλεγμένης συνάρτησης y που ορίζεται από την εξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$.

(Απ: $-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2 y^2}\left(y+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\dfrac{x^2}{y}\right)$ **)**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η παράγωγος n-τάξης της συνάρτησης f(x)=ln(1+x).

(Απ: $f^{(n)}\ x\ =(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$ **)**

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων y=f(x) που ορίζεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

α) $\begin{array}{l} x=\tau o\xi\eta\mu\dfrac{t}{2} \\ y=1+t+t^2 \end{array}$ **β)** $\begin{array}{l} x=\alpha\sigma\upsilon\nu^3 t \\ y=\beta\eta\mu^3 t \end{array}$

(Απ: α) – 4t ^{2} – t+8 β) 0)

□

Άσκηση: Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογιστεί η $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **αν**

α) $x=t^3+3t^2$ **και** $y=t^4-8t^2$ **β)** $x=3t^2+1$ **και** $y=t^3-2t^2$ **γ)** $x=\dfrac{1}{2}t^2+2$ **και** $y=\eta\mu(t+1)$

δ) $x=e^{-t}$ **και** $y=t^3+t+1$ **ε)** $x=3t^2+4t$ **και** $y=\eta\mu 2t$

(Απ: α) $\dfrac{4}{9t(t-2)}$ **β) 1/12t γ)** $-\dfrac{\eta\mu(t+1)t+\sigma\upsilon\nu(t+1)}{t^3}$ **δ)** $\dfrac{3t^2+6t+1}{e^{-2t}}$ **ε)** $-\dfrac{4\eta\mu 2t(6t+4)+12\sigma\upsilon\nu 2t}{(6t+4)^3}$ **)**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η n-οστή παράγωγος των συναρτήσεων

α) $y=e^{\alpha x}$ **β)** $y=\sqrt{x}$ **γ)** $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ **ε)** $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$

□

Άσκηση: Αν $y=x\sqrt{x^2+2}$ **δείξτε ότι:** $(1+y^2)\dfrac{d^2x}{dy^2}+y\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{4}$

□

3.2.3 Το Θεώρημα της Μονοτονίας

Υποθέτουμε πως η συνάρτηση *f* είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, σε μία περιοχή ενός σημείου x_0. Το Θεώρημα της Μονοτονίας περιγράφεται από τις φράσεις:

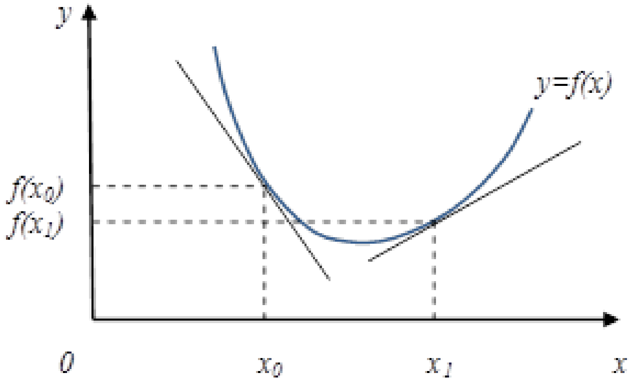
«Εάν η παράγωγος $f\,'(x_0)$ είναι θετική, τότε η συνάρτηση *f* είναι αύξουσα και αντίστροφα, αν η συνάρτηση *f* είναι αύξουσα, τότε η παράγωγος $f\,'(x_0)$ είναι θετική.

Αντίθετα, εάν η παράγωγος $f\,'(x_0)$ είναι αρνητική, τότε η συνάρτηση *f* είναι φθίνουσα και αντίστροφα».

Η μαθηματική η έκφραση του Θεωρήματος αυτού είναι η:

$\text{Αν} \quad f\,'(x_0) > 0 \quad \Leftrightarrow$ η *f* είναι αύξουσα στο x_0 και

$\text{αν} \quad f\,'(x_0) < 0 \quad \Leftrightarrow$ η *f* είναι φθίνουσα στο x_0



Εικόνα 3.11 *Θεώρημα μονοτονίας*

Η «απόδειξη» στηρίζεται στον ορισμό της παραγώγου:

$$f\,'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right]$$

στον οποίο παρατηρούμε πως εάν

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) > 0,$$

τότε (με δεδομένο πως το Δx>0) η συνάρτηση θα είναι αύξουσα, διότι ο αριθμητής θα είναι δετικός:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0+\Delta x) > f(x_0).$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε αν επιλέξουμε $\Delta x<0$, οπότε και ο αριθμητής πρέπει να είναι αρνητικός.

Η φυσική ερμηνεία του Θεωρήματος μπορεί να αποδοθεί από τη φράση: Όταν βαδίζουμε σε ανώμαλο δρόμο, κάθε φορά που ανηφορίζουμε ο δρόμος έχει θετική κλίση (αυξάνεται το υψόμετρο της θέσης μας), ενώ όταν κατηφορίζουμε ο δρόμος έχει αρνητική κλίση. Αντίστροφα, όταν βαδίζουμε σε ανώμαλο δρόμο με θετική κλίση, τότε ανηφορίζουμε, ενώ όταν ο δρόμος έχει αρνητική κλίση, κατηφορίζουμε.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτησης: $f(x) = e^{-x^2}$ **.**

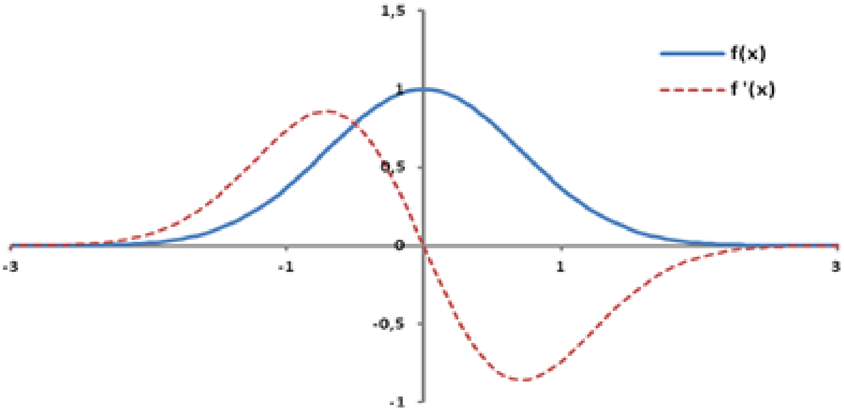
Λύση: Για να καθοριστεί η μονοτονία της *f* θα πρέπει να μελετηθεί ως προς το πρόσημό της η πρώτη της παράγωγος:

$$f(x)=e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^{-x^2}(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$$

Για να καθορίσουμε το πρόσημο της f' θα πρέπει να υπολογισθούν οι πραγματικές της ρίζες:

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad -2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

Παρατηρούμε πως η f' είναι θετική στο διάστημα $(-\infty,0)$, όπου η αρχική συνάρτηση θα είναι αύξουσα και αρνητική στο διάστημα $(0,\infty)$, όπου η αρχική συνάρτηση θα είναι φθίνουσα.



Εικόνα 3.12 *Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f '*

□

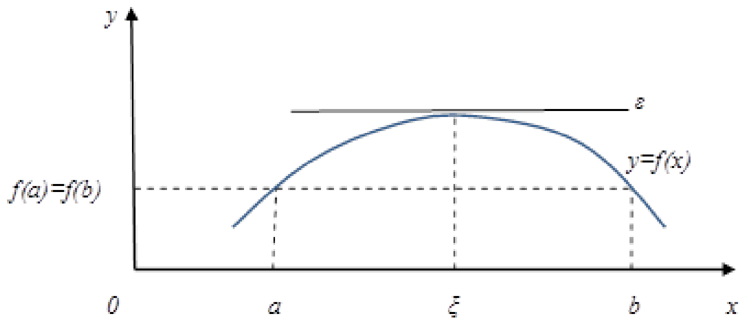
3.2.4 Το Θεώρημα του Rolle

Ορισμός. Έστω η συνάρτηση *f(x)* για την οποία ισχύουν:

- η *f(x)* είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,b]$
- η *f(x)* είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,b)
- *f(a)= f(b)*

Τότε υπάρχει **τουλάχιστον** ένα σημείο $\xi \in (a.b)$ για το οποίο ισχύει η ισότητα: $f(\xi)=0$

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle είναι η εξής: Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$ στο οποίο η ευθεία που εφάπτεται στο γράφημα της f (C_f) να είναι παράλληλη με τον άξονα x'x. Το συμπέρασμα αυτό παρουσιάζεται στο επόμενο γράφημα, όπου γίνεται φανερή η λογική με την οποία επιλέγεται το σημείο ξ του θεωρήματος.

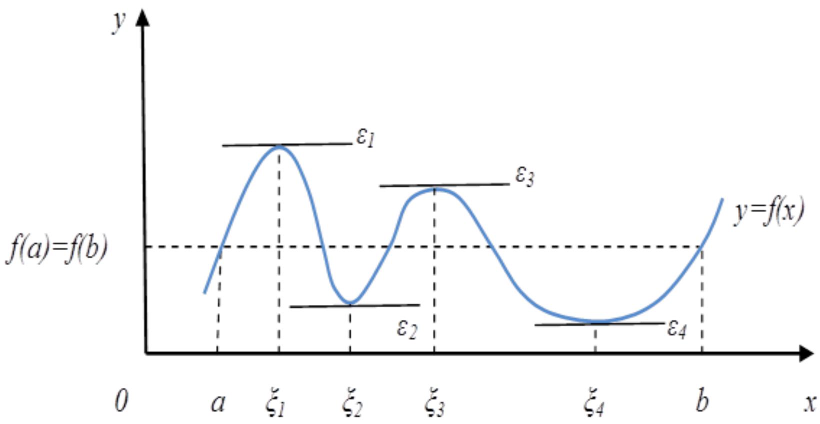


Εικόνα 3.13 *Θεώρημα του Rolle*

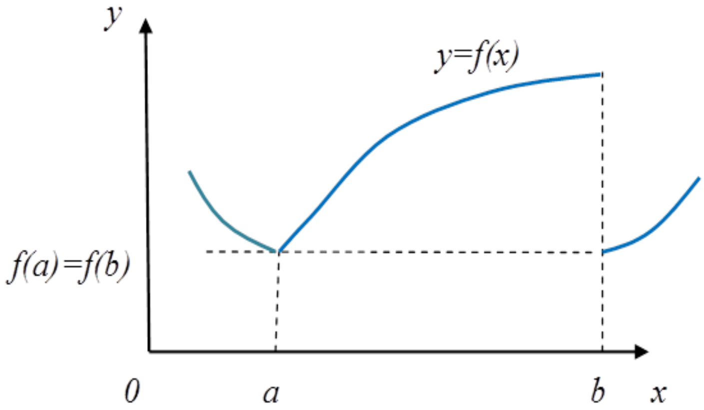
Παρατηρούμε πως στο εν λόγω σημείο έχουμε:

$$f'(\xi) = \eta\ \kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \xi = \kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\upsilon\vartheta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \varepsilon = 0$$

Στα επόμενα σχήματα παρατηρούμε τον λόγο όπου το Θεώρημα δηλώνει πως μπορούν να υπάρξουν περισσότερα του ενός ξ, και το γιατί στις προϋποθέσεις του Θεωρήματος αρκεί η παραγωγισιμότητα στο ανοικτό διάστημα (α,b), αλλά απαιτείται η συνέχεια στο κλειστό διάστημα $[\alpha,b]$.



Εικόνα 3.14 *Μηδενισμός της παραγώγου σε πολλαπλά σημεία*



Εικόνα 3.15 *Μη παραγωγισιμότητα και ασυνέχεια*

Στο 2^{ο} γράφημα (3.15) παρατηρούμε πως η μη παραγωγισιμότητα της συνάρτησης f στο σημείο a, δεν θέτει πρόβλημα ισχύος του Θεωρήματος του Rolle ενώ, αντίθετα, η μη συνέχεια στο σημείο b επιτρέπει την ύπαρξη συνάρτησης, όπου το Θεώρημα δεν ισχύει.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και την ισχύ του Θεωρήματος του Rolle η συνάρτηση: $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 10$**.**

Λύση: Για να καθοριστεί η μονοτονία της f θα πρέπει να μελετηθεί ως προς τις ρίζες και το πρόσημό της η πρώτη της παράγωγος:

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 10 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

Επομένως οι τρεις ρίζες της παραγώγου είναι: $\rho_1=0$ και $\rho_{2,3}=2$ (διπλή). Η διερεύνηση του προσήμου της παραγώγου διευκολύνεται από τον επόμενο πίνακα:

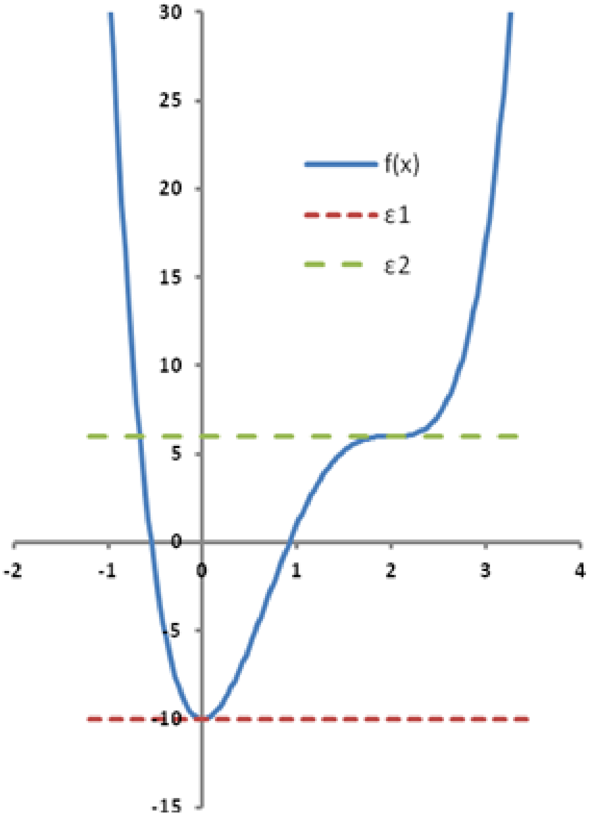
	$-\infty$ 0 2 ∞		
f ‘(x)	–	+	+
Παρατηρήσεις για την *f(x)*	Η *f* είναι φθίνουσα συνάρτηση	Η *f* είναι αύξουσα συνάρτηση	Η *f* είναι αύξουσα συνάρτηση

Παρατήρηση: Το πρόσημο που διατηρεί μια συνάρτηση στο διάστημα που ορίζεται από δύο διαδοχικές πραγματικές ρίζες, υπολογίζεται (και) με τον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης (εδώ της πρώτης παραγώγου) σε μία, οποιαδήποτε, τιμή του διαστήματος αυτού. Έτσι, έχουμε για παράδειγμα πως

$f'(-1)=-108<0$

Επίσης, να παρατηρήσουμε πως το πρόσημο της *f ‘* δεν μεταβάλλεται εκατέρωθεν της ρίζας *x*=2 και αυτό γιατί η ρίζα ρ=2 είναι διπλή ρίζα της *f ‘*.

Γραφική παράσταση:



Εικόνα 3.16 *Γράφημα της συνάρτησης f(x)*

Παρατηρούμε πως το Θεώρημα του Rolle εποβεβαιώνεται για το σημείο *x*=0. Όμως παρατηρούμε πως η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται και στο σημείο *x*=2, χωρίς να υπάρχουν (με προφανή τρόπο) οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος. Όπως είπαμε ήδη, η μονοτονία της *f(x)* δεν μεταβάλλεται, διότι η ρίζα ρ είναι διπλή ρίζα της *f ‘*. Όμως γι’ αυτό θα μιλήσουμε αργότερα με τρόπο εκτενέστερο.

□

Άσκηση: Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Rolle στη συνάρτηση $y=|x+1|$ που είναι ορισμένη στο διάστημα [-2,0].

Άσκηση: Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^x(x^2-1)$ημx, με τετμημένη $\xi\in(-1,1)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

□

Άσκηση: Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Rolle στη συνάρτηση f: $[-1,3]\to R$, όπου $f(x)=x^3-4x^2+x+11$ $\forall x\in[-1,3]$.

□

Άσκηση: Βρείτε τα διαστήματα στα οποία βρίσκονται οι ρίζες της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ χωρίς να υπολογιστεί η παράγωγος.

□

3.2.5 Το Θεώρημα της Μέσης Τιμής (ΘΜΤ)

Ορισμός. Έστω η συνάρτηση *f(x)* για την οποία ισχύουν:

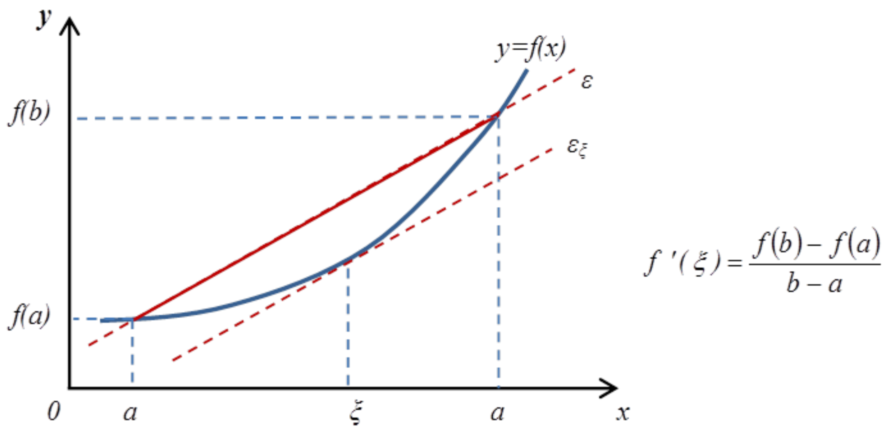
- η *f(x)* είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,b]$ και
-
- η *f(x)* είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,b)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi\in\ a.b$ για το οποίο ισχύει η ισότητα:

$$f\ '(\xi)=\frac{f\ \ b\ -f\ \ a}{b-a}$$

□

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής είναι η εξής: Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ στο οποίο η ευθεία ε_ξ που εφάπτεται στο γράφημα της f (C_f) να είναι παράλληλη προς την ευθεία ε, που διέρχεται από τα σημεία (α,f(α)) και (β,f(β)) και παρουσιάζεται στο επόμενο γράφημα, όπου γίνεται φανερή η λογική με την οποία επιλέγεται το σημείο ξ του θεωρήματος.



Εικόνα 3.17 *Θεώρημα Μέσης Τιμής*

Πράγματι, το κλάσμα $\frac{f\ \ b\ -f\ \ a}{b-a}$ ισούται με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία *(a,f(a))* και *(b,f(b))* (δηλαδή με την κλίση της ευθείας ε στο γράφημα). Άρα το ΘΜΤ εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου ξ, στο οποίο η κλίση της συνάρτησης είναι ίση με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο άκρα της καμπύλης (επομένως οι ευθείες ε και $ε_ξ$ είναι παράλληλες).

Η εξήγηση για το

- γιατί μπορούν να υπάρξουν περισσότερα του ενός ξ, και το
- γιατί στις προϋποθέσεις του Θεωρήματος αρκεί η παραγωγισιμότητα στο ανοικτό διάστημα (α, b), αλλά απαιτείται η συνέχεια στο κλειστό διάστημα $[\alpha, b]$

είναι παρόμοια με το προηγούμενο Θεώρημα (Rolle).

Η φυσική ερμηνεία του ΘΜΤ είναι απλή: Ένα αυτοκίνητο που σε μία ώρα διανύει 100 Km και ως εκ τούτου έχει μέση ταχύτητα $V_{μέση}$=100 Km/h, θα έχει τουλάχιστον μία χρονική στιγμή $t_ξ$ και σαν στιγμιαία ταχύτητα τα 100 Km/h ($V(t_ξ)=V_{μέση}$).

Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

1η) Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής σε ένα διάστημα
- f ‘ (x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

2η) Αν δυο συναρτήσεις f και g

- είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και
- f ‘(x) = g’(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: f(x) = g(x) + c (δηλαδή οι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μία σταθερά, όντας «παράλληλες»).

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση *f(x)=x³* στο διάστημα [-1,1].

α) Να βρεθούν όλα τα σημεία $ξ_j$ τα οποία επαληθεύουν το ΘΜΤ.

β) Να υπολογισθεί η εξίσωση των ευθειών που εφάπτονται στην καμπύλη της *f* στα σημεία $ξ_j$ του προηγούμενου ερωτήματος.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση.

Λύση:

α) Αρχικά πρέπει να υπολογισθεί η εξίσωση (και άρα ο συντελεστής διεύθυνσης – κλίση) της ευθείας που ενώνει τα δύο άκρα της καμπύλης στο δοσμένο διάστημα:

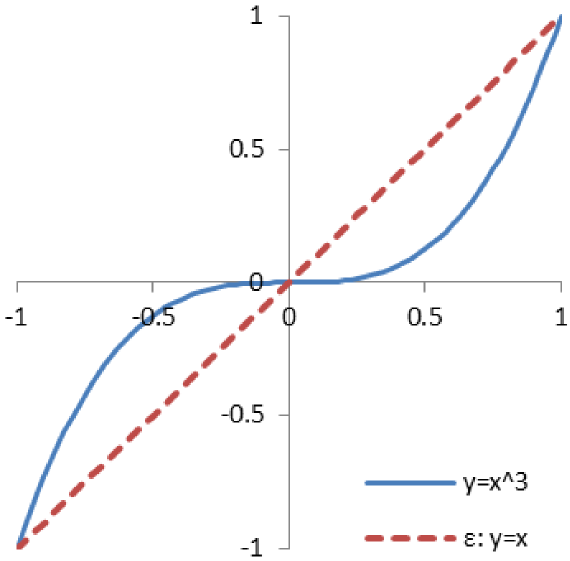
Οι συντεταγμένες των άκρων:

(-1,*f(-1)*), (1,*f(1)*) επομένως (-1,-1) και (1,1)

Η κλίση *k* της ευθείας ε:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

β) Υπολογισμός των $ξ_j$:



Εικόνα 3.18 *Γράφημα της συνάρτησης f(x) και της ευθείας που ενώνει τα άκρα της*

Αναζητούμε τα σημεία x για τα οποία η παράγωγος της συνάρτησης f είναι ίση με την κλίση της ευθείας ε:

$$f'(x)=1 \qquad \Rightarrow \qquad (x^3)'=3x^2=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\xi_j=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad =\pm 0.57735$$

γ) Οι εξισώσεις των δύο εφαπτόμενων ευθειών:

1) Η πρώτη ευθεία (ε_1) έχει συντελεστή διεύθυνσης α=1 (όπως και η δεύτερη ευθεία ε_2), ενώ διέρχεται από το σημείο:

$$(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας ε_1: $y=1x+b$ υπολογίζουμε την τιμή του b:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+b \qquad \Rightarrow \qquad b=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

και η εξίσωση είναι: $\varepsilon_1 : y=ax+b=x-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

2) Η δεύτερη ευθεία (ε_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης α=1, ενώ διέρχεται από το σημείο:

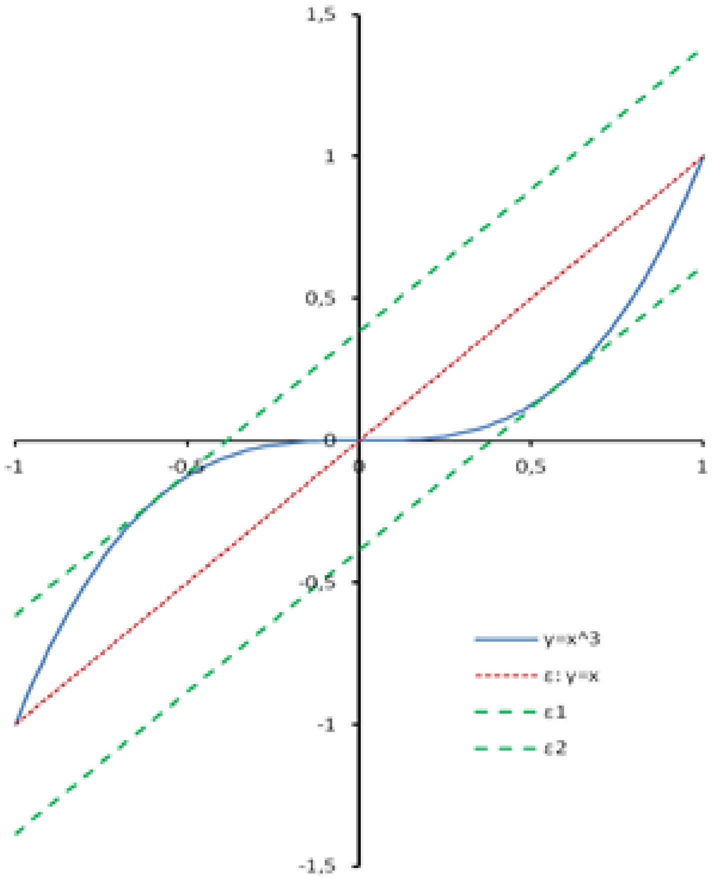
$$(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας ε_1: $y=1x+b$ υπολογίζουμε την τιμή του b:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}+b \qquad \Rightarrow \qquad b=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

και η εξίσωση είναι: $\varepsilon_1 : y=ax+b=x-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

δ) Γραφική παράσταση



Εικόνα 3.19 *Εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στην f(x)*

□

Άσκηση: Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = x^3+1 ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [1,2] και να βρεθούν οι τιμές του ξ που ικανοποιούν το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα αυτό.

(Απ: $\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ **)**

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση *f* με $f(x)=x^3+x-1\,,x\in\ 0,2$ **. Να βρείτε αριθμό** $\xi\in\ 0,2$ **, που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος μέσης τιμής για την *f* .**

(Απ: $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **)**

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x^3 στο διάστημα [-2,2]. Να βρεθούν οι τιμές του ξ που ικανοποιούν το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα αυτό.

(Απ: $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **)**

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x-3}$ **,** $x\in 1,2$ **. Να βρείτε αριθμό** $\xi\in 1,2$ **, που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος μέσης τιμής για την *f* .**

(Απ: $2\pm\sqrt{2}$ **)**

□

Άσκηση: Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα ξ ∈(α, β) για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

α) $f(x)=x^2+2x$ **, στο [0,4]**

β) $f(x)=3\eta\mu(2x)$, **στο** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

γ) $f(x)=\begin{cases}2x+2, & \alpha\nu\ x\leq -1\\ x^3-x, & \alpha\nu\ x>1\end{cases}$ **, στο [-3,2]**

(Απ: α) 2 β) κπ/2 γ) ± 1 **)**

3.2.6 Το Θεώρημα (Κανόνας) του De l' Hopital

Ο κανόνας του De l' Hopital αποτελεί ένα ισχυρότατο εργαλείο στον υπολογισμό ορίων, όπου εμφανίζεται απροσδιόριστη μορφή. Στη γενική περίπτωση ονομάζουμε απροσδιόριστη μορφή όταν, κατά τη διαδικασία υπολογισμού ενός ορίου, εμφανίζονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0*(\pm\infty), \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Ορισμός: Εάν για τις συναρτήσεις *f(x)* και *g(x)* ισχύουν οι προϋποθέσεις:

- οι συναρτήσεις *f* και *g* είναι παραγωγίσιμες σε μια περιοχή του σημείου x_0,
- $f(x_0)=g(x_0)=0$ ή $\lim_{x\to x_0} f\ x = \lim_{x\to x_0} g\ x = \infty$

τότε ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f\ x}{g\ x}\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f'\ x}{g'\ x}\right]$$

εφόσον υπάρχει το δεύτερο όριο.

□

Παρατηρήσεις:

1η) Στην περίπτωση της απροσδιόριστης μορφής $0*\infty$ υπάρχει η δυνατότητα υπαγωγής στον κανόνα του De l' Hopital, μέσω της πράξης:

$$0*\infty=\begin{cases}\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}=\dfrac{0}{0}\\[2ex]\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}=\dfrac{\infty}{\infty}\end{cases}$$

2η) Εάν, μετά την υλοποίηση του κανόνα του De l’ Hopital, εμφανιστεί πάλι απροσδιόριστη μορφή και ισχύουν οι προϋποθέσεις του κανόνα για το κλάσμα $\dfrac{f'\ x}{g'\ x}$, τότε ο κανόνας επαναλαμβάνεται.

3η) Ο κανόνας του De l’ Hopital εφαρμόζεται και στην περίπτωση που συναντάται απροσδιόριστη μορφή, όταν η μεταβλητή τείνει στο άπειρο.

Παράδειγμα 1ο: Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\eta\mu\ kx}{x}\right]\qquad k\in R$

Λύση:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu\ kx}{x}\right]=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu\ kx\ '}{x'}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{k\sigma\upsilon\nu\ kx}{1}\right]=\frac{k}{1}=k$$

□

Παράδειγμα 2ο: Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\ x}{x^3}\right]$

Λύση:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sigma\upsilon\nu\ x}{x^3}\right]=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sigma\upsilon\nu\ x\ '}{x^3\ '}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu\ x}{3x^2}\right]=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu\ x\ '}{3x^2\ '}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu\ x}{6x}\right]=\left(\frac{1}{0}\right)$$

Παρατηρούμε πως φθάσαμε σε ένα όριο που δεν έχει απροσδιόριστη μορφή κι επομένως πρέπει να λυθεί με τα όσα ειπώθηκαν στην παράγραφο του Ορίου Συνάρτησης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα διαπιστώσουμε πως έχουμε πλευρικά όρια διαφορετικά, οπότε δεν υπάρχει το κεντρικό όριο:

$$\lim_{x\to 0-}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu\ x}{6x}\right]=\frac{1}{-0}=-\infty\qquad \kappa\alpha\iota\qquad \lim_{x\to 0+}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu\ x}{6x}\right]=\frac{1}{+0}=\infty$$

□

Παράδειγμα 3ο: Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2e^{-x}\right]$$

Λύση:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2e^{-x}\right]=\ \infty*0\ =\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{e^x}\right]=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{e^x}\right]=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{e^x}\right]=\frac{2}{\infty}=0$$

□

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$ **β)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}$ **γ)** $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x+\eta\mu 2x}{\eta\mu 5x-\eta\mu 2x}$ **δ)** $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x^2-x}{x^3-x^2}$ **ε)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}$

στ) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **ζ)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x}$ **η)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ **θ)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{e^x-1}$

(Απ: α) 1/2 β) 1/6 γ) 2 δ) 1 ε) 0 στ) 1 ζ) 1 η) 1/2 θ) 1)

□

Άσκηση: Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ **β)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\phi x}{x}$ **γ)** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ **δ)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$

ε) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha\theta)-\sigma\upsilon\nu(\beta\theta)}{\theta^2}$ **στ)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\tau o\xi\varepsilon\phi 2x}$ **ζ)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}$ **η)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)}$

(Απ: α) 3/5 β) $+\infty$ γ) 4 δ) 1/8 ε) (β^2-α^2)/2 στ) 1/2 ζ) 0 η) 1)

□

Άσκηση: Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2}$ **β)** $\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x}{e^x-ex}$ **γ)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$ **δ)** $\lim_{x\to 0}\frac{x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x^2}$

ε) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln x}$ **στ)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ **ζ)** $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-1}$ **η)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}$

(Απ: α) 12 β) 2/e γ) –1 δ) 3/2 ε) $+\infty$ στ) 1 ζ) 1/3 η) 0)

□

Άσκηση: Αν $\lim_{x\to 0}\frac{x+\eta\mu\alpha x}{e^x-\sigma\upsilon\nu x}=3$ **να βρείτε την τιμή του α.**

(Απ: 2)

□

Άσκηση: Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1/\eta\mu x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x+\ln x}$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{100}}{e^{x}}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi 2x}$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\varepsilon\varphi\pi x}$ **η)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+\ln x}{x+\ln x}$

(Απ: α) 1 β) 0 γ) 0 δ) $+\infty$ ε) 0 στ) 2 ζ) 0 η) 3)

□

Άσκηση: Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\ln(\sqrt{x}+2)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^{\kappa}}$, $\kappa\in\mathbb{N}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+\eta\mu x}{e^x+x+2}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^3+x^2+x+1)\ln x}{e^{2x}}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}+x+3}$

(Απ: α) 1 β)∞ γ) 0 δ) $-\infty$ ε) 1/4)

□

Άσκηση: **Να υπολογιστούν τα όρια:**

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+e^x}{x^2+e^x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x+\ln x}{3x+\ln x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\ln x}{e^x}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln x}{x}$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x+2)}{x}$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+2)}{\ln(x^2+5)}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$

(Απ: α) 1 β) 2 γ) 0 δ) 1 ε) 0 στ) 1 ζ) 1 η) 1)

3.2.7 Το Διαφορικό Συνάρτησης

Μία πρακτική εξήγηση της σχέσης του διαφορικού μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης προκύπτει από τη θεώρηση του συμβολισμού *df/dx* σαν ένα κλάσμα, με αποτέλεσμα να μπορεί να λάβει μέρος σε αλγεβρικές πράξεις. Τότε μπορούμε να γράψουμε τη σχέση:

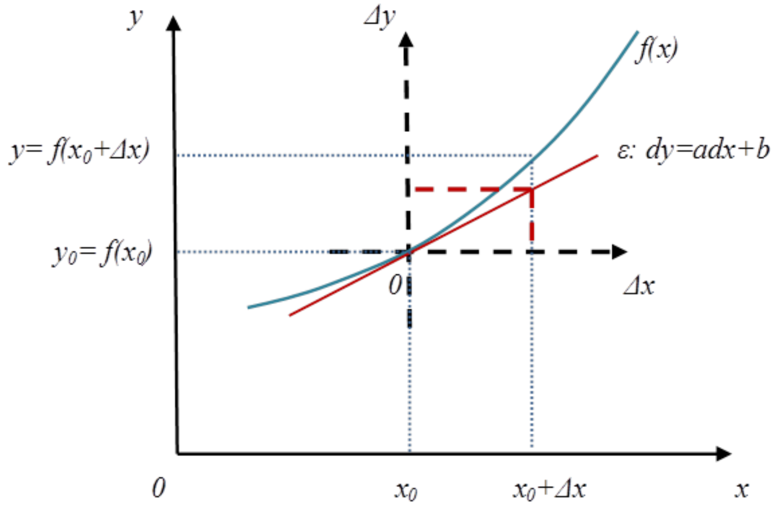
$$\frac{df\ \ x}{dx} = f'\ x \qquad \Rightarrow \qquad df\ \ x = f'\ x\ dx$$

Ορισμός: Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε ονομάζουμε Διαφορικό της συνάρτησης f το γινόμενο της πρώτης παραγώγου της f, επί το διαφορικό της μεταβλητής της συνάρτησης.

□

Γεωμετρική ερμηνεία του Διαφορικού

Έστω η συνάρτηση *f(x)*. Υπολογίζουμε την παράγωγό της στο σημείο x_o και χαράζουμε την ευθεία ε που εφάπτεται στην *f(x)* στο σημείο $(x_o,f(x_o))$ κι έχει κλίση $\kappa_0 = f\,'(x_o)$. Χαράζουμε τώρα ένα νέο σύστημα αξόνων με κέντρο το σημείο $(x_o,f(x_o))$, με τον άξονα *dx* παράλληλο μ' αυτόν των *x* και τον άξονα *dy* παράλληλο με τον αντίστοιχο των *y*.



Εικόνα 3.20 ***Το*** *Διαφορικό της συνάρτησης f(x)*

Παρατηρώντας το προηγούμενο σχήμα (3.20) αντιλαμβανόμαστε πως όταν από το «κεντρικό» σημείο $(x_o,f(x_o))$ μεταβαίνουμε σε ένα διπλανό $(x_o+dx,f(x_o+dx))$, τότε στον άξονα *Odx* μετριέται η οριζόντια απόσταση του νέου σημείου από τα παλιό, ενώ στον άξονα *Ody* μετριέται η αντίστοιχη κατακόρυφη απόσταση. Αξίζει να παρατηρήσουμε πως οι τιμές *dx* και *dy* μπορεί να είναι αρνητικές, όταν το νέο σημείο βρίσκεται αριστερότερα ή χαμηλότερα από το παλιό.

Στο νέο σύστημα αξόνων, η εξίσωση της ευθείας ε είναι η σχέση με την οποία ορίστηκε η έννοια του διαφορικού της συνάρτησης *f* , στο σημείο x_0:

$$dy = f\,'(x_o)dx$$

όπου στον άξονα *dx* μετριέται η μεταβολή στα *x* (με κέντρο το x_o) , ενώ στον *dy* η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης *y* (με κέντρο το y_o).

Ερμηνεύοντας αλγεβρικά και γεωμετρικά τη σχέση $df(x)= f\,'(x)dx$ θα λέγαμε πως:

Το διαφορικό προσεγγίζει την μεταβολή της τιμής της συνάρτησης *f(x)*, όταν περνούμε από το σημείο x_o σε κάποιο διπλανό, το x_o+dx. Μόνο που τη μεταβολή της τιμής δεν την υπολογίζει από την καμπύλη της συνάρτησης, αλλά από την ευθεία που εφάπτεται στο (κεντρικό) σημείο (x_o,y_o) [όπου $y_o= f(x_o)$]. Προφανώς ο υπολογισμός αυτός είναι προσεγγιστικός και ισχύει για μικρές τιμές του *dx*. Έτσι η σχέση του διαφορικού «διαβάζεται»:

Η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης *f (x)*, όταν περνούμε από το σημείο *x* στο σημείο *x+dx*, δίνεται, προσεγγιστικά, από το γινόμενο της παραγώγου της *f* (στο κεντρικό σημείο) με το ποσό της μεταβολής του *x (dx)*.

Είναι φανερό πως εάν ζητείται η νέα τιμή στο σημείο x_o+dx, αυτή ισούται με το άθροισμα της παλιάς τιμής με τη διαφορά *dy*:

$$f(x_o+dx) = f(x_o) + dy = f(x_o) + f\,'(x_o)dx$$

Παράδειγμα 1^o: Να υπολογισθεί προσεγγιστικά, με τη βοήθεια του διαφορικού η τιμή $y = \sqrt[3]{26,82}$ **.**

Λύση:

α) Ορισμός της κατάλληλης συνάρτησης:

Η μορφή της παράστασης, μας οδηγεί στη συνάρτηση: $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$.

β) Το διαφορικό της γράφεται:

$$dy = [\sqrt[3]{x}]'dx = [x^{1/3}]'dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

γ) Ορισμός του κατάλληλου κεντρικού σημείου:

Το κεντρικό σημείο στο οποίο θα καθορίσουμε την τιμή της παραγώγου (και του διαφορικού), είναι ένα σημείο βολικό στον υπολογισμό της τιμής των δύο ριζικών (συνάρτησης και παραγώγου) και ταυτόχρονα πολύ κοντά στο *x* που μας ενδιαφέρει: 26,82. Προφανώς πρόκειται για το σημείο x_o=27:

δ) Υπολογισμός του διαφορικού στο κεντρικό σημείο:

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}dx = \frac{dx}{27}$$

ε) Υπολογισμός της προσεγγιστικής τιμής του Δy:

Η τιμή του dx ισούται με την απόσταση του σημείου *x*=26,82 και του κεντρικού σημείου x_o = 27:

dx = 26,82 – 27 = -0,18 οπότε

$$dy = \frac{-0,18}{27} = -\frac{0,02}{3}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως η τιμή της μεταβολής dx μπορεί να είναι και αρνητική (όπως συμβαίνει και στο τρέχον παράδειγμα).

στ) Τελικός υπολογισμός

Προφανώς η τιμή του $y = \sqrt[3]{26,82}$ υπολογίζεται εάν στην τιμή της συνάρτησης στο κεντρικό σημείο (x_o=27) προστεθεί η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης *dy*. Έχουμε λοιπόν:

$y = \sqrt[3]{26,82}$ = *f*(26,82) = *f*(27) + *dy* = 3 – 0,0066667 = 2,993333

αντί του ακριβούς

y = $\sqrt[3]{26,82}$ = 2,993318

□

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση *y=f(x)*=ημx. Να υπολογισθεί η τιμή του ημ(2.9 rad), με τη βοήθεια της σχέσης του διαφορικού.

Υπόδειξη: Διαλέξτε σαν κεντρική τιμή το π.

(Απ: 0.2392)

□

Άσκηση: Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η τιμή $\sqrt[10]{1020}$.

(Απ: 1.9992)

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση y=ln(1+e^{10x})+Τοξεφ(e^{5x}). Υπολογίστε την τιμή του διαφορικού στο x=0 και την αύξηση Δy της y προσεγγιστικά αν dx=0,02.

(Απ: dy=0,11)

□

3.3. Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού στη Μελέτη Συναρτήσεων

Ένας σημαντικός τομέας εφαρμογής του Διαφορικού Λογισμού είναι και η μελέτη των συναρτήσεων. Στη μελέτη αυτή θα εφαρμοσθούν πολλά από τα πορίσματα που απορρέουν από τα Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

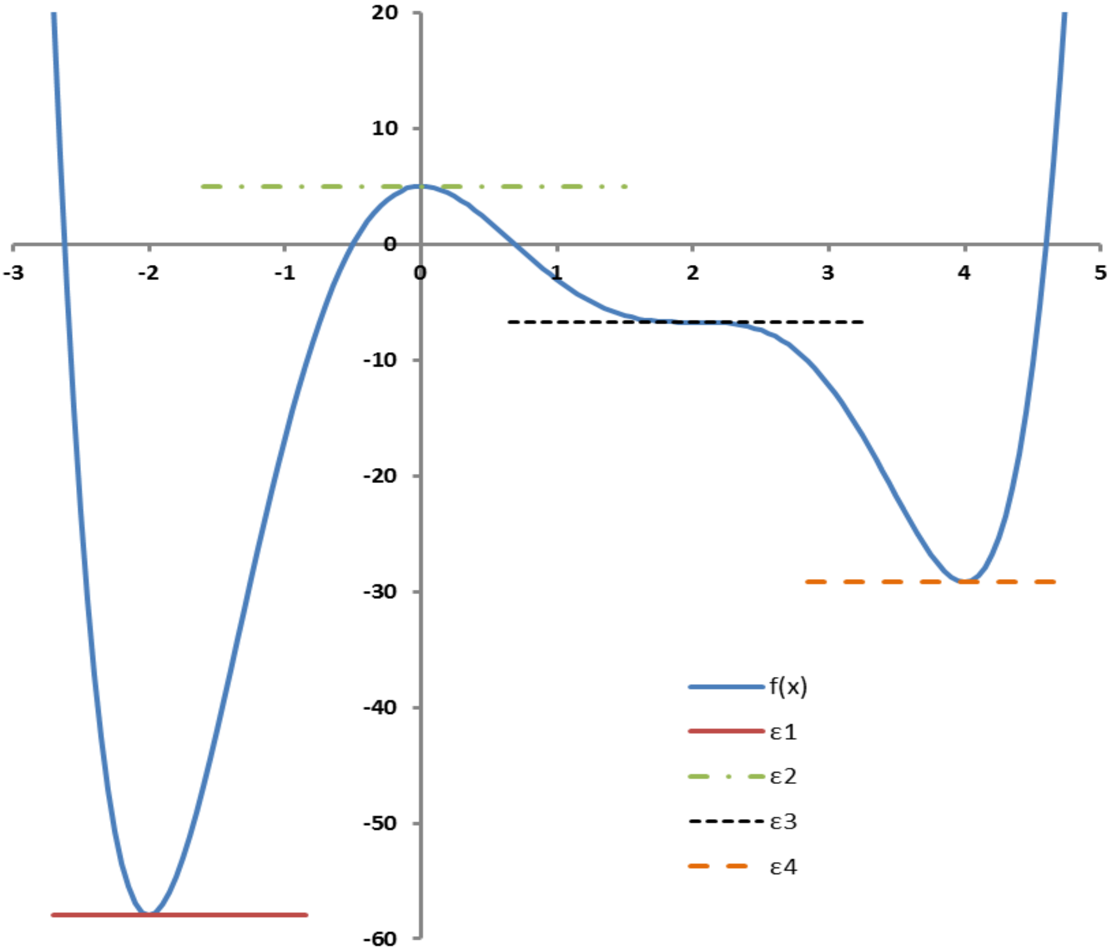
3.3.1 Συμπεράσματα που εξάγονται για μία συνάρτηση από τις παραγώγους της

Ακρότατα και σημεία καμπής

α) Από την πρώτη παράγωγο (υπολογισμός ακρότατων):

Στον επόμενο πίνακα έχουμε δεδομένα για τις πραγματικές ρίζες και το πρόσημο της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης *f(x)*:

x	$-\infty$	$\rho_1=-2$	$\rho_2=0$	$\rho_3=2$	$\rho_4=4$	∞
$f'(x)$	–	+	–	–	+	
$f(x)$	Φθίνουσα	Αύξουσα	Φθίνουσα	Φθίνουσα	Αύξουσα	
		Τοπικό μέγιστο	Τοπικό ελάχιστο	Δεν είναι ακρότατο	Τοπικό μέγιστο	



Εικόνα 3.21 *Συμπεράσματα για* ***το*** *γράφημα μιας συνάρτησης από την πρώτη παράγωγο*

Παρατηρήσεις:

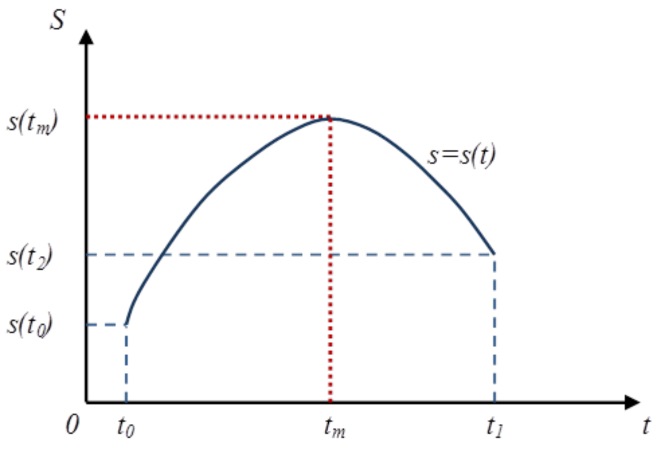
1η) Ορισμός: Λέμε πως η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο x_0, όταν υπάρχει μία περιοχή με κέντρο το x_0, της μορφής (x_0–ε, x_0+ε), για την οποία ισχύει η ανίσωση $f(x)<f(x_0)$, για κάθε x που να ανήκει στην περιοχή αυτή. Αντίστοιχα, λέμε πως η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο x_0 όταν υπάρχει μία περιοχή με κέντρο το x_0, γ ια την οποία ισχύει η ανίσωση $f(x)>f(x_0)$, για κάθε x που να ανήκει στην εν λόγω περιοχή. Η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο σημείο x_0, όταν παρουσιάζει στο σημείο αυτό είτε τοπικό μέγιστο, είτε τοπικό ελάχιστο.

2η) Η παράγωγος $f'(x)$ έχει πραγματικές ρίζες στο ρ_1 (στο γράφημα $\rho_1= -2$), στο ρ_2 (=0), στο ρ_3 (=2) και στο ρ_4 (=4).

- Στο διάστημα ($-\infty$,–2) το πρόσημο της $f'(x)$ είναι αρνητικό, με αποτέλεσμα η συνάρτηση f να είναι φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα.
- Στο διάστημα (–2,0) το πρόσημο της $f'(x)$ είναι θετικό, με αποτέλεσμα η συνάρτηση f να είναι αύξουσα στο διάστημα αυτό.
- Από τη στιγμή που η f είναι φθίνουσα μέχρι το –2 και αύξουσα μετά από αυτό, συμπεραίνουμε πως στο σημείο αυτό (το –2) η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.
- Με ανάλογη λογική η f είναι αύξουσα μέχρι το 0 και φθίνουσα μετά από αυτό, με αποτέλεσμα να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=0.
- Τέλος, όμοια, η f είναι φθίνουσα μέχρι το 4 και αύξουσα μετά από αυτό, με αποτέλεσμα να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=4.

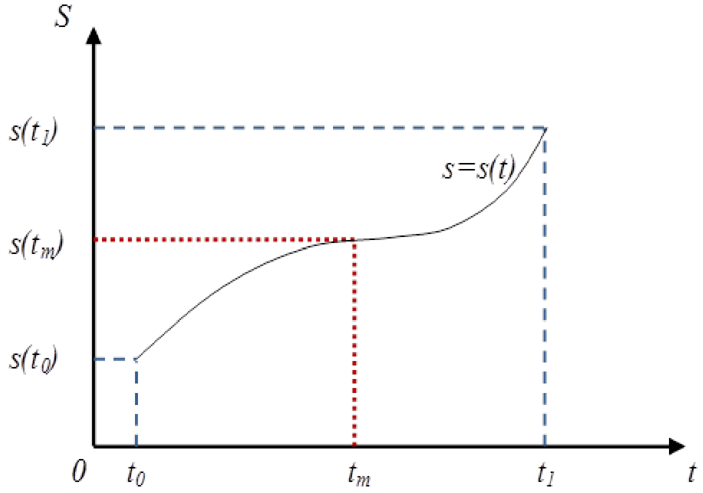
3η) Η περίπτωση της ρίζας ρ_3=2 είναι ιδιαίτερη. Παρόλο που η παράγωγος $f'(x)$ έχει ρίζα στο 2, δεν αλλάζει το πρόσημό της. Αυτό συμβαίνει γιατί η ρίζα ρ=2 είναι πολλαπλή, άρτιας τάξης (διπλή, τετραπλή κλπ). Στο σημείο αυτό, ενώ η παράγωγος μηδενίζεται, πράγμα που σημαίνει πως η κλίση της αρχικής συνάρτησης f μηδενίζεται, εντούτοις η μονοτονία δεν μεταβάλλεται, οπότε η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατο.

4η) Τα σημεία που αποτελούν πραγματικές ρίζες της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης f ονομάζονται **σημεία στάσης**. Την εξήγηση του όρου μας την δίνει το επόμενο γράφημα στο οποίο παρουσιάζεται η συνάρτηση θέσης $s=s(t)$. Η μετακίνηση συμβαίνει στο χρονικό διάστημα (t_0,t_1), ενώ το κινητό (κινούμενο πάνω στον άξονα S) ξεκινάει από το σημείο $s(t_0)$ για να καταλήξει στο $s(t_1)$. Στο διάστημα (t_0,t_m) η συνάρτηση θέσης είναι αύξουσα, ενώ στο χρονικό διάστημα (t_m,t_1) είναι φθίνουσα. Επομένως το κινητό, ξεκινώντας από την αρχική θέση $s(t_0)$, μεγαλώνει διαρκώς την απόστασή του από το σημείο Ο μέχρι την θέση $s(t_m)$, όπου φθάνει στη μεγαλύτερη απόσταση από το κέντρο Ο. Εκεί η ταχύτητά του (η πρώτη παράγωγος) μηδενίζεται (**σημείο στάσης**) και αλλάζει πρόσημο, στρέφοντας το κινητό προς τα πίσω. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν πως στο σημείο t_m η απόσταση του κινητού από το σημείο Ο (πάντα στο συγκεκριμένο παράδειγμα) μεγιστοποιείται, δηλαδή η συνάρτηση θέσης παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο.



Εικόνα 3.22 *Σημείο στάσης στη συνάρτηση θέσης s=s(t)*

5η) Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου μια ρίζα της πρώτης παραγώγου είναι άρτιας τάξης πολλαπλότητας, τότε στο σημείο αυτό (t_m στο επόμενο γράφημα) η ταχύτητα μετακίνησης μηδενίζεται στιγμιαία και αμέσως μετά συνεχίζεται η πορεία προς την ίδια κατεύθυνση. Θυμίζει το στιγμιαίο σταμάτημα ενός αυτοκινήτου σε αυτόματα διόδια, για να συνεχίσει αμέσως μετά την προηγούμενη πορεία του.



Εικόνα 3.23 *Η πρώτη παράγωγος έχει ρίζα άρτιας τάξης πολλαπλότητας*

Τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω, αλλά με την αντίστροφη λογική, εκφράζονται από το Θεώρημα του Fermat:

Ορισμός. Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Εάν

- η *f* είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και
- η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0

τότε:

$f'(x_0) = 0$

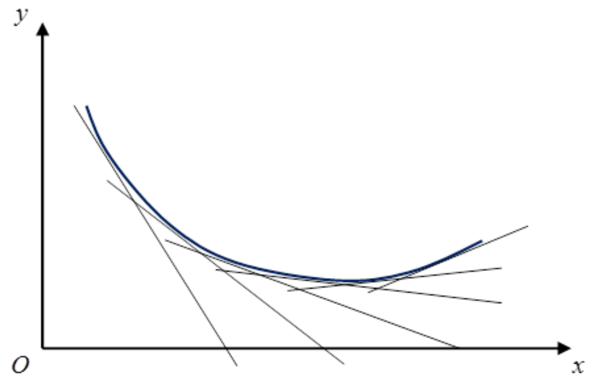
Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Fermat είναι η εξής: Αν μια συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε αυτό, η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι οριζόντια (δηλαδή παράλληλη προς τον άξονα $x'x$).

□

β) Πληροφορίες που αντλούνται για τη συνάρτηση από τη δεύτερη παράγωγο (σημεία καμπής).

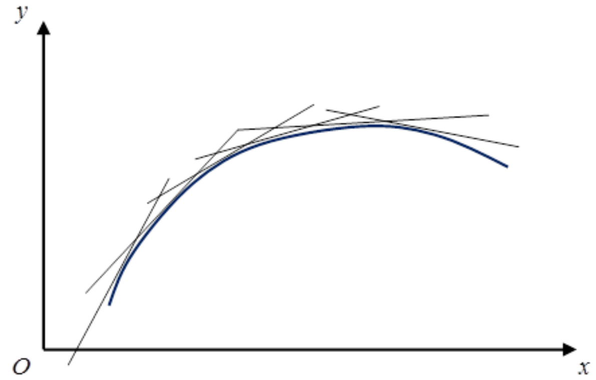
Η βασική ιδέα είναι πως η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ είναι η πρώτη παράγωγος της πρώτης παραγώγου $f'(x)$. Άρα ισχύουν τα παρακάτω:

- Εάν για κάθε x που ανήκει σε ένα διάστημα $(a,b,)$ ισχύει πως $f''(x)>0$, τότε η $f'(x)$ είναι αύξουσα. Επομένως, η αρχική συνάρτηση $f(x)$ έχει τέτοια μορφή, ώστε η κλίση της να αυξάνει (καθώς αυξάνει το x). Άρα, θα έχει την μορφή της συνάρτησης του επόμενου γραφήματος, η οποία περιγράφεται από την έκφραση: «**Η συνάρτηση *f(x)*, στο διάστημα (*a,b*) στρέφει τα κοίλα προς τα άνω**».



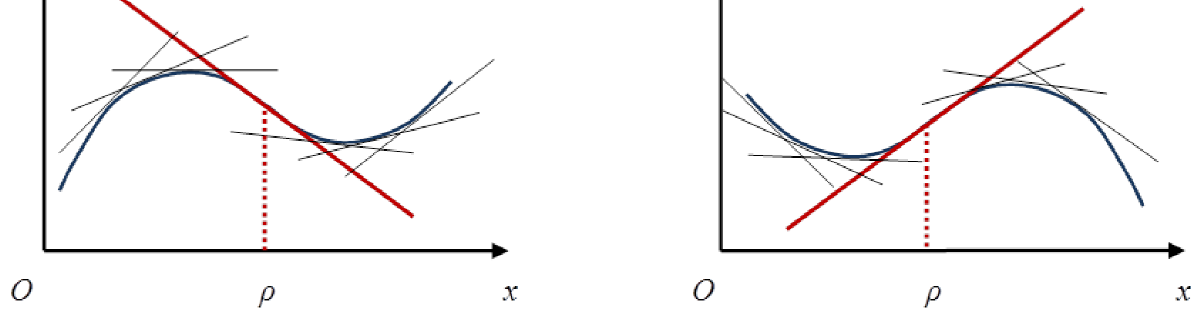
Εικόνα 3.24 *Η f(x) στρέφει τα κοίλα άνω*

- Αντίθετα, εάν για κάθε *x* που ανήκει σε ένα διάστημα *(a,b)* η *f''(x)*<0, τότε η *f'(x)* είναι φθίνουσα. Επομένως η αρχική συνάρτηση *f(x)* έχει τέτοια μορφή ώστε η κλίση της να μειώνεται (καθώς αυξάνει το *x*). Άρα θα έχει την μορφή της συνάρτησης του επόμενου γραφήματος, η οποία περιγράφεται από την έκφραση: «**Η συνάρτηση *f(x)*, στο διάστημα (*a,b*) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω**».



Εικόνα 3.25 *Η f(x) στρέφει τα κοίλα κάτω*

- Εάν η δεύτερη παράγωγος *f''(x)* έχει πραγματική ρίζα το ρ (περιττής τάξης πολλαπλότητας – μονή, τριπλή κλπ), οπότε αλλάζει το πρόσημό της εκατέρωθεν του ρ, τότε η πρώτη παράγωγος θα παίρνει ακρότατη τιμή στο σημείο *x*=ρ. Στο επόμενο σχήμα (δεξί γράφημα) υπάρχει το γράφημα μιας συνάρτησης *f(x)* της η δεύτερη παράγωγος *f''(x)* είναι θετική πριν το *x*=ρ και αρνητική μετά. Άρα η αρχική συνάρτηση θα στρέφει τα κοίλα προς τα άνω πριν από το *x*=ρ και προς τα κάτω, αμέσως μετά. Στην περίπτωση αυτή (όπως και στην αντίθετη) το σημείο *x*=ρ λέγεται **σημείο καμπής**.



Εικόνα 3.26 *Σημείο Καμπής*

γ) Καθορισμός του είδους των σημείων στάσης συνάρτησης με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου.

Αρχικά να αναφερθούμε σε ένα πόρισμα που αφορά στην παραγώγιση των πολυωνυμικών συναρτήσεων: Εάν μία πολυωνυμική συνάρτηση παρουσιάζει πολλαπλή ρίζα στο σημείο x=ρ, με τάξη πολλαπλότητας ν, τότε

- η πρώτη της παράγωγος έχει την τιμή ρ ρίζα με τάξη πολλαπλότητας ν-1,
- η δεύτερή της παράγωγος έχει την τιμή ρ ρίζα με τάξη πολλαπλότητας ν-2,…
- η ν-1 παράγωγος έχει την τιμή ρ απλή ρίζα και
- η $ν^{η}$ παράγωγος δεν έχει σαν ρίζα την τιμή ρ.

Αντί για απόδειξη θα δώσουμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα $1^{ο}$:

Η πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)=(x-a)(x-\rho)^3$ έχει τριπλή ρίζα την τιμή ρ.

Η πρώτη της παράγωγος:

$$p'(x)=(x-\rho)^3+3(x-a)(x-\rho)^2=(x-\rho)^2[3(x-a)+(x-\rho)] =(x-\rho)^2(4x-3a-\rho)$$

έχει διπλή ρίζα τη τιμή ρ κλπ.

□

Παράδειγμα $2^{ο}$:

Υποθέτουμε πως η τιμή x=ρ είναι σημείο στάσης της συνάρτησης f, δηλαδή ισχύει η ισότητα: $f'(x)=0$. Αξίζει να αναφερθούμε στην παρακάτω διερεύνηση:

	Διερεύνηση
Εάν το σημείο x=ρ είναι σημείο στάσης της $f(x)$ $f'(\rho)=0$	Εάν $f''(\rho)>0$ τότε το σημείο στάσης είναι ελάχιστο (η συνάρτηση στο σημείο στάσης στρέφει τα κοίλα προς τα άνω)
	Εάν $f''(\rho)<0$ τότε το σημείο στάσης είναι μέγιστο (η συνάρτηση στο σημείο στάσης στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω)
	Εάν $f''(\rho)=0$ τότε ο χαρακτηρισμός του σημείου στάσης χρειάζεται η παρακάτω διερεύνηση:
	Εάν $f''(\rho)=0$ και η πρώτη μη μηδενική παράγωγος είναι άρτιας τάξης, τότε στο σημείο ρ η f παρουσιάζει ακρότατο (μέγιστο εάν η παράγωγος είναι αρνητική κι ελάχιστο αν είναι θετική)
	Εάν $f''(\rho)=0$ και η πρώτη μη μηδενική παράγωγος είναι περιττής τάξης, τότε στο σημείο ρ η f παρουσιάζει σημείο καμπής. Αν η πρώτη μη μηδενική παράγωγος είναι θετική, τότε αριστερά του σημείου καμπής η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και δεξιά προς τα άνω, και αντίστροφα
	Για πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούμε να πούμε πως: Εάν η τιμή ρ είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου $f'(x)$, με άρτιο βαθμό πολλαπλότητας, τότε στο σημείο ρ η f παρουσιάζει σημείο καμπής. Αντίθετα, αν η ρίζα ρ έχει περιττό βαθμό πολλαπλότητας, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο.

Παρατήρηση: Αξίζει, ίσως, να σκεφτούμε το εξής, υπό τη μορφή παραδείγματος. Έστω αναζητούμε το είδος του σημείου στάσης x=ρ της συνάρτησης f και έστω ότι η τιμή ρ είναι ρίζα της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ παραγώγου, ενώ $f^{(5)}(\rho)>0$. Με βάση την προηγούμενη διερεύνηση η αρχική συνάρτηση f έχει σημείο καμπής στο σημείο x=ρ. Όμως η $f^{(5)}(x)$ είναι η τέταρτη παράγωγος της f', πράγμα που δηλώνει πως η f' έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο ρ. Άρα η αρχική συνάρτηση πλησιάζοντας από τα αριστερά το σημείο καμπής έχει κλίση που μειώνεται (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω), φθάνει σε ένα σημείο ελάχιστης κλίσης (σημείο καμπής) και στη συνέχεια η κλίση της αυξάνει (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω).

□

Παράδειγμα: Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα και τα σημεία καμπής η συνάρτηση:

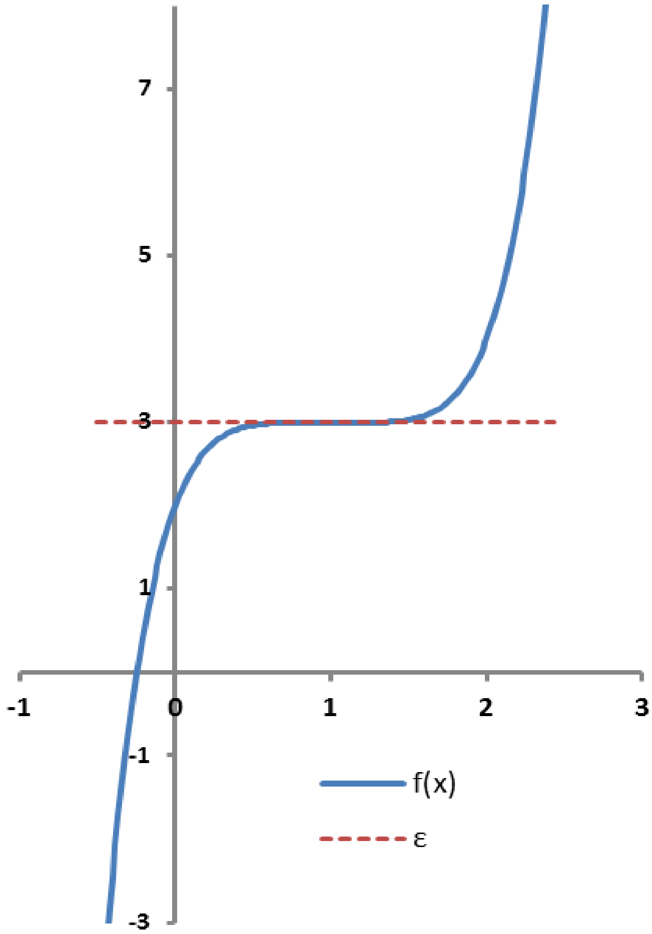
$f(x)=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x+2$

Λύση:

$f'(x)=5x^4-20x^3+30x^2-20x+5=5(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)=5(x-1)^4=0$

Αξίζει να σημειωθεί πως στην παραγοντοποίηση του τεταρτοβάθμιου πολυωνύμου μας βοήθησε η παρατήρηση της εμφάνισης των διωνυμικών συντελεστών. Επομένως η πρώτη παράγωγος έχει μία τετραπλή ρίζα, την ρ=1, το οποίο αποτελεί το μοναδικό σημείο στάσης της συνάρτησης $f(x)$. Σύμφωνα με την προηγούμενη διερεύνηση, η συνάρτηση f στο σημείο στάσης παρουσιάζει σημείο καμπής (η μοναδική ρίζα της πρώτης παραγώγου είναι πολλαπλή (άρτιας τάξης - τετραπλή)).

Πράγματι, παρατηρούμε πως η πρώτη παράγωγος $f'(x)=5(x-1)^4$ είναι παντού θετική, ενώ μηδενίζεται στο σημείο x=1. Άρα η συνάρτηση f θα είναι παντού αύξουσα. Επομένως η f θα έχει σημείο καμπής στο x=1. Η γραφική της παράσταση που ακολουθεί, το επιβεβαιώνει.



Εικόνα 3.27 *Γράφημα της συνάρτησης f(x)*

Θέλοντας να επιβεβαιώσουμε την διερεύνηση που προηγήθηκε, υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$f'(x)=5(x-1)^4$

$f''(x)=20(x-1)^3$

f'''(x)=60(x-1)^2

f$^{(4)}$*(x)=120(x-1)*

f$^{(5)}$*(x)=120>0*

Η πρώτη μη μηδενική παράγωγος (η πέμπτη) είναι θετική. Άρα, η *f(x)* στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω μέχρι το σημείο *x*=1και προς τα άνω μετά από αυτό. Το σημείο καμπής έχει συντεταγμένες (1, *f(1)*)=(1,3).

□

Άσκηση: Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=x^3+x^2+x+1 δεν έχει τοπικά ακρότατα.

□

Άσκηση: Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f(x)=x^3-27x+36.

(Απ: (3,-18),(-3,90))

□

Άσκηση: Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων στάσης σε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις, που ορίζονται παραμετρικά:

α) $x=2t^3+1$ **και** $y=te^{-2t}$ **β)** $x=\sqrt{t}+1$ **και** $y=t^3-12t$ **για t>0** **γ)** $x=5t^4$ **και** $y=5t^6-t^5$ **για t>0**

δ) $x=t^2+t$ **και** $y=\eta\mu t$ **για 0<t<π** **ε)** $x=te^{2t}$ **και** $y=t^2e^{-t}$ **για t>0**

(Απ: α) (5/4,1/2e) β) (1,0),($\sqrt{2}+1,-16$**) γ) (0,0),(5/1296,-1/46656) δ) (**$\dfrac{\pi^2+2\pi}{4}$**,1) ε) (0,0),(2e^4,4/e^2))**

□

Άσκηση: Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f(x)=ημ^{2}x+συνx στο διάστημα [0,π].

(Απ: (π/3,5/4),)

□

Άσκηση: Δίνεται ότι το άθροισμα δύο θετικών αριθμών x και y είναι 18. Να βρεθεί το μέγιστο του xy^2.

Υπόδειξη: Εκφράστε την ποσότητα xy^2 σαν συνάρτηση του x.

(Απ: (6, 864))

□

Άσκηση: Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$

β) $g(x)=x^3-3x+2$

γ) $h(x)=2x^3-3x^2-1$

(Απ: α) Αύξουσα-Σημείο Καμπής στο (1,2)-Αύξουσα

β) Αύξουσα-Μέγιστο στο (-1,4)-Φθίνουσα-Ελάχιστο στο (1,0)-Αύξουσα

γ) Αύξουσα-Μέγιστο στο (0,-1)-Φθίνουσα-Ελάχιστο στο (1,-2)-Αύξουσα)

□

Άσκηση: Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=e^x-x$ **β)** $f(x)=x^x,\ x>0.$

(Απ: α) Φθίνουσα-Ελάχιστο στο (0,1)-Αύξουσα

β) Φθίνουσα-Ελάχιστο στο (1/e,1/$\sqrt[e]{e}$)-Αύξουσα)

□

Άσκηση: Να βρείτε τις τιμές των α, β ϵ R για τις οποίες η συνάρτηση f(x) = $\alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$. Να καθορίσετε το είδος των ακρότατων.

(Απ: α=1,β=0, Μέγιστο στο (-1,3), Ελάχιστο στο (1,1))

□

Άσκηση: Αν $\alpha \in R$, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο καμπής στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο:

$$g\;\;x\;=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+\;\alpha^3+7\;\;x-5\alpha^2$$

□

Άσκηση: Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x)=x^2-\frac{x^3}{4}$, 0 < x < 3. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x, να γίνει μέγιστος.

(Απ: 4/3 mgr)

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 2ημx − x + 3, x ϵ [0,π]. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και ακρότατα.

(Απ: Αύξουσα-Μέγιστο στο (π/3, 3+$\sqrt{3}$ -π/3)-Φθίνουσα)

□

Άσκηση: Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f(x)=lnx+x-1.

(Απ: Αύξουσα)

□

Άσκηση: Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω δύο συναρτήσεις στρέφουν τα κοίλα άνω ή κάτω (είναι κυρτές ή κοίλες).

α) f (x)= x^3

β) f (x)= x^3- $3x^2$+ 1

(Απ: α) κοίλα κάτω στο ($-\infty$,0), κοίλα άνω στο (0,$+\infty$)

β) κοίλα κάτω στο ($-\infty$,1), κοίλα άνω στο (1,$+\infty$))

□

Άσκηση: Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα και σημεία καμπής των παρακάτω συναρτήσεων

α) f(x)=x^3-3x **β) f(x)=x^3** **γ) f(x)=$x+\frac{4}{x^2}$**

δ) f(x)=$x-\frac{4}{x^2}$ **ε) f(x)=x^2(3-x)** **στ) f(x)=(x-3)(2x+1)**

ζ) $f(x)=x^4$ **η) $f(x)=x^2(x^2-2)$** **θ) $f(x)=x^2(3+2x-3x^2)$**

(Απ: α) Μέγιστο στο (-1,2), Ελάχιστο στο (1,-2), Σημείο Καμπής στο (0,0)

β) Σημείο Καμπής στο (0,0)

γ) Ελάχιστο στο (2,3)

δ) Μέγιστο στο (-2,-3)

ε) Μέγιστο στο (2,4), Ελάχιστο στο (0,0), Σημείο Καμπής στο (1,2)

στ) Ελάχιστο στο (5/4,- 49/8)

ζ) Ελάχιστο στο (0,0)

η) Μέγιστο στο (0,0), Ελάχιστα στο (-1,-1) και (1,-1), Σημεία Καμπής στο $(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{5}{9})$ **και στο** $(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{5}{9})$

θ) Μέγιστα στο (-1/2,5/16) και (1,2), Ελάχιστο στο (0,0), Σημεία Καμπής στο $(\frac{1}{6}(1-\sqrt{7}),\frac{1}{108}(71-20\sqrt{7}))$ **και** $(\frac{1}{6}(1+\sqrt{7}),\frac{1}{108}(71+20\sqrt{7}))$ **)**

□

Άσκηση: Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=xe^{-x}$

(Απ: Αύξουσα-Μέγιστο στο (1, 1/e)-Φθίνουσα)

□

Άσκηση: Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-\frac{\ell nx}{2\sqrt{x}}\ ,\ x>0$

(Απ: Φθίνουσα-Ελάχιστο στο (1,1)-Αύξουσα)

□

Άσκηση: Να βρεθούν οι τιμές των α , β $\in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)= x^2+\alpha x+\beta \ln x$ να έχει ακρότατα στα σημεία x=1 και x=3. Μετά να καθορίσετε το είδος των ακρότατων.

(Απ: α= - 8, β=6, Μέγιστο στο (1,-7), Ελάχιστο στο (3,-15+6ln3))

3.3.2 Ασύμπτωτες Ευθείες Συνάρτησης

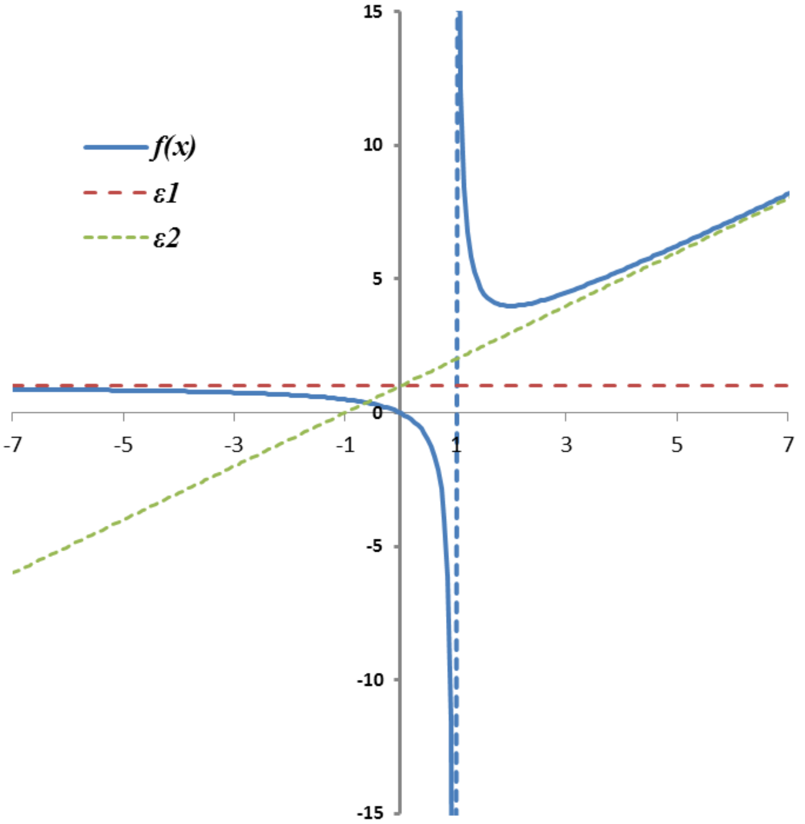
Στην παράγραφο αυτή προσπαθούμε να απαντήσουμε στην ερώτηση: «Μπορούμε να περιγράψουμε, με τη βοήθεια ευθειών, τη μορφή του γραφήματος μιας συνάρτησης *f(x)*, στα σημεία όπου το γράφημα πηγαίνει στο άπειρο;» Η ερώτηση αυτή περιλαμβάνει την περίπτωση όπου στην περιοχή ενός σημείου x_0 η *f* απειρίζεται, αλλά και αυτήν όπου η μεταβλητή *x* τείνει στο άπειρο.

Στη παρακάτω γραφική παράσταση υπάρχουν τρεις ευθείες που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο κατευθύνεται το γράφημα της συνάρτησης προς το άπειρο.

1. Η κατακόρυφη ευθεία *x*=1 περιγράφει την κατεύθυνση της συνάρτησης, στην περιοχή του *x*=1 και λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη.

2. Η οριζόντια ευθεία $y=1$ περιγράφει την κατεύθυνση της συνάρτησης όταν το x τείνει στο μείον άπειρο και λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη.

3. Η ευθεία $y=x+1$ περιγράφει την κατεύθυνση της συνάρτησης όταν το x τείνει στο άπειρο και λέγεται πλάγια ασύμπτωτη.



Εικόνα 3.28 *Ασύμπτωτες Ευθείες*

Ορισμός: Μία ευθεία ε λέγεται ασύμπτωτη της συνάρτησης f όταν η απόσταση ανάμεσα σε ένα σημείο Σ της καμπύλης και στην ευθεία ε τείνει στο μηδέν, όσο το σημείο Σ απομακρύνεται προς το άπειρο.

α) Κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Η ευθεία $x=k$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(x)$, εάν αληθεύει τουλάχιστον ένα από τα επόμενα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to k-}\left[f(x)\right]=\pm\infty \ , \qquad \lim_{x\to k+}\left[f(x)\right]=\pm\infty$$

□

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις που έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι, συνήθως, κλασματικές, των οποίων η τιμή k είναι ρίζα του παρονομαστή (και όχι του αριθμητή. Βέβαια υπάρχουν και μη κλασματικές συναρτήσεις που έχουν κατακόρυφη ασύμπτωτη, όπως η συνάρτηση $\ln(x)$, με ασύμπτωτη τον άξονα των y.

Παράδειγμα 1^{ο}: Να ορισθεί, εάν υπάρχει, η κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης:

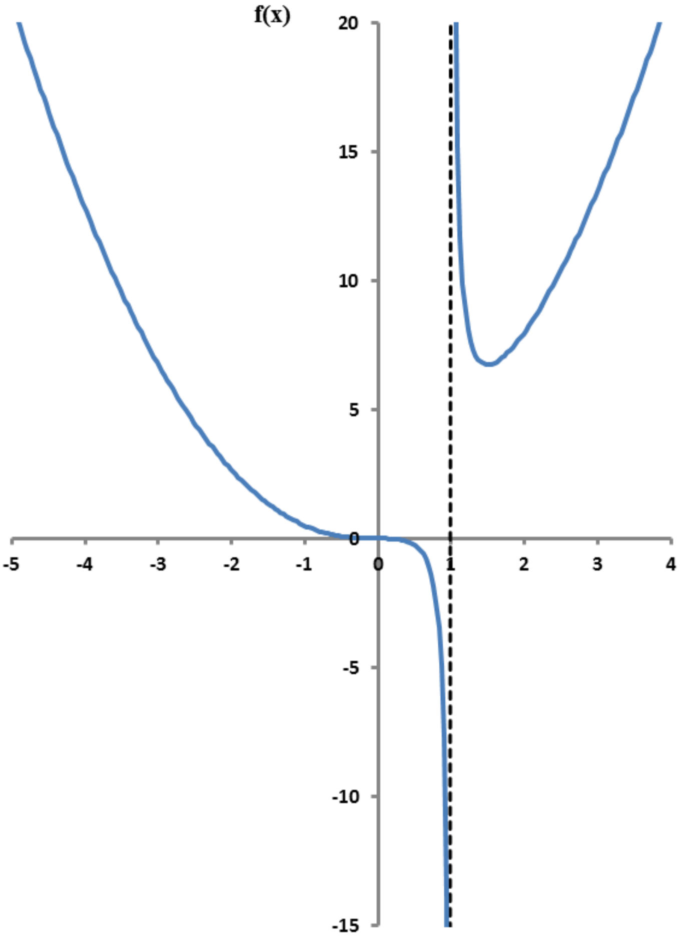
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x-1} & \alpha\nu \ \ x\neq 1\\ 0 & \alpha\nu \ \ x=0\end{cases}$$

Λύση: Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 1-}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to 1-}\left[\frac{x^3}{x-1}\right]=\frac{1}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to 1+}\left[\frac{x^3}{x-1}\right]=\frac{1}{+0}=\infty$$

Άρα η δοσμένη συνάρτηση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, την x=1, όπως αυτό γίνεται φανερό από την διπλανή γραφική παράσταση.



Εικόνα 3.29 *Γράφημα της συνάρτησης f(x) και η κατακόρυφη ασύμπτωτή της*

β) Οριζόντιες ασύμπτωτες.

Η ευθεία $y=b$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(x)$, εάν αληθεύει τουλάχιστον ένα από τα επόμενα όρια:

$$\lim_{x\to -\infty}\left[f(x)\right]=b\ , \qquad \lim_{x\to \infty}\left[f(x)\right]=b$$

όπου η τιμή b μπορεί να είναι ίση και με το μηδέν, οπότε έχουμε σαν οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα των x.

□

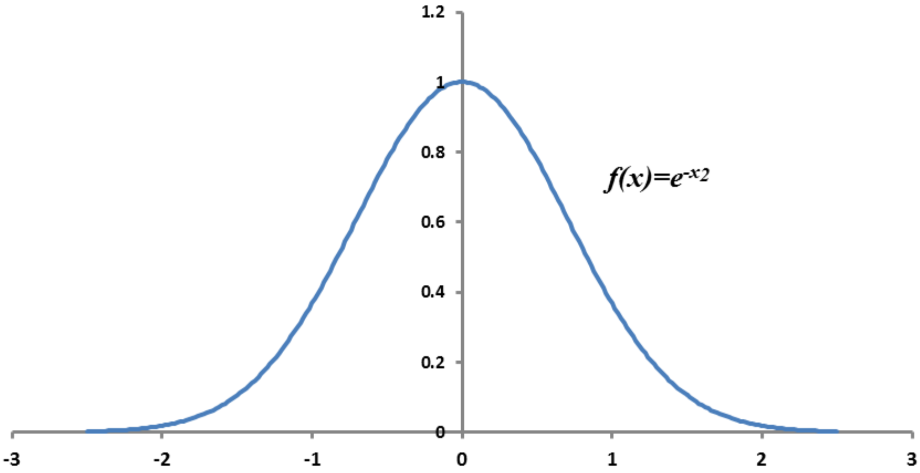
Παράδειγμα 2^{ο}: Να ορισθεί, εάν υπάρχει, η οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης:

$$f(x)=e^{x^2}$$

Λύση: Υπολογίζουμε το (διπλό) όριο:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[e^{-x^2}\right]=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$$

Άρα η δοσμένη συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη, την *y*=0, δηλαδή τον άξονα των *x*, όπως αυτό γίνεται φανερό από την διπλανή γραφική παράσταση.



Εικόνα 3.30 *Γράφημα της συνάρτησης f(x) και η οριζόντια ασύμπτωτή της*

□

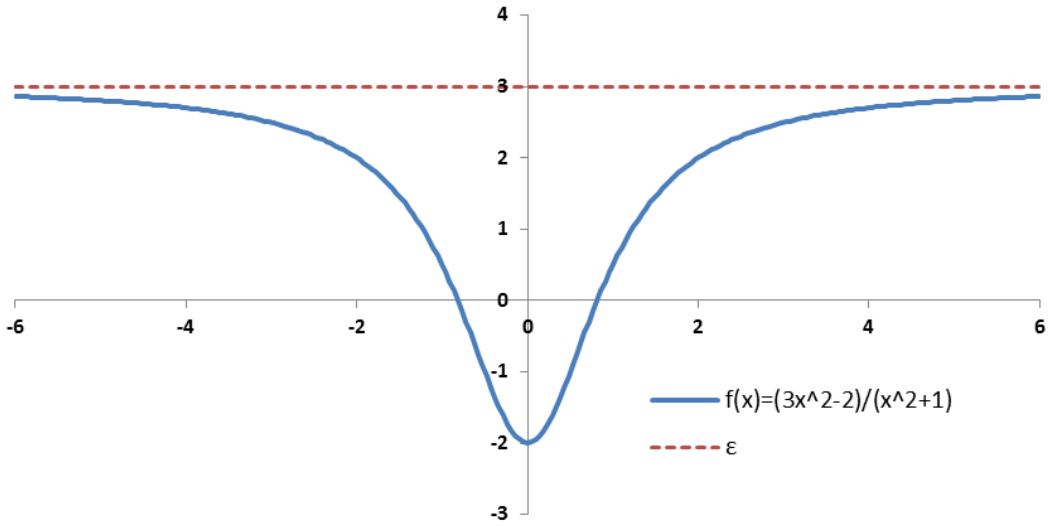
Παράδειγμα 3ο: Να ορισθεί, εάν υπάρχει, η οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης:

$$f\left(x\right)=\frac{3x^2-2}{x^2+1}, \quad x\in R$$

Λύση: Υπολογίζουμε το (διπλό) όριο:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x^2-2}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{3}{1}=3$$

Άρα η δοσμένη συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη, την y=3, όπως αυτό γίνεται φανερό από την επόμενη γραφική παράσταση.



Εικόνα 3.31 *Γράφημα της συνάρτησης f(x) και η οριζόντια ασύμπτωτή της*

□

γ) Πλάγιες ασύμπτωτες

Μία πλάγια ασύμπτωτη είναι μία ευθεία με εξίσωση ε:$y=ax+b$ και αποτελεί μια γενική περίπτωση των οριζόντιων ασύμπτωτων. Μία πλάγια ασύμπτωτη είναι μία ευθεία προς την οποία πλησιάζει το γράφημα της συνάρτησης όταν η μεταβλητή της τείνει στο αρνητικό ή στο θετικό άπειρο. Αυτό σημαίνει πως η απόσταση καμπύλης και ευθείας γίνεται οσοδήποτε μικρή όταν η μεταβλητή της συνάρτησης τείνει προς κάποιο από τα δύο αυτά άπειρα.

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν πως μία συνάρτηση, η οποία έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία ε:$y=ax+b$, θα έχει την ίδια κλίση με την ε (δηλαδή θα έχει κλίση ίση με το a) όταν το x θα τείνει στο ανάλογο άπειρο. Όμως, γνωρίζουμε πως η κλίση μιας συνάρτησης περιγράφεται από την πρώτη της παράγωγο. Επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$\alpha = \lim_{x\to\infty}\left[f'\ \ x \right]$$

ή

$$\alpha = \lim_{x\to-\infty}\left[f'\ \ x \right]$$

όπου το α είναι μια πραγματική σταθερά.

Επίσης, η αναγκαιότητα μηδενισμού της απόστασης ευθείας-καμπύλης, όταν το x θα τείνει στο ανάλογο άπειρο, οδηγεί στη ν ισότητα:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f\ \ x\ -ax-b \right]=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\left[f\ \ x\ -ax \right]=b$$

ή

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f\ \ x\ -ax-b \right]=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to-\infty}\left[f\ \ x\ -ax \right]=b$$

και η εξίσωση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της σταθεράς b, με δεδομένο πως προηγουμένως έχει υπολογισθεί η τιμή του a.

□

Παρατήρηση: Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του συντελεστή διεύθυνσης a της ευθείας ε δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

η οποία γίνεται κατανοητή εάν φανταστούμε πως όταν το x τείνει στο ανάλογο άπειρο, η καμπύλη «ταυτίζεται οριακά» με την ευθεία ε. Άρα η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{ax+b}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[a+\frac{b}{x}\right] = a$$

Πρακτικός Κανόνας: Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)$ (δηλαδή κλασματική συνάρτηση με αριθμητή και παρονομαστή πολυωνυμικές συναρτήσεις). Εάν ν_α είναι ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης του αριθμητή και ν_π ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης του παρονομαστή, τότε ισχύει η επόμενη διερεύνηση:

- Εάν $\nu_\alpha<\nu_\pi$, τότε η συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα των x $(y=0)$.
- Εάν $\nu_\alpha=\nu_\pi$, τότε η συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=b$, όπου b είναι το κλάσμα στον αριθμητή του οποίου τίθεται ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του αριθμητή και στον παρονομαστή ο αντίστοιχος συντελεστής του παρονομαστή.
- Εάν $\nu_\alpha=\nu_\pi+1$, τότε η συνάρτηση έχει πλάγια ασύμπτωτη, η οποία υπολογίζεται κατά τα γνωστά.

□

Παράδειγμα: Να μελετηθεί ως προς την ύπαρξη ασύμπτωτων η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3+2x-1}{x^2-4}, \quad x\in R-\{-2,2\}$$

Λύση:

α) Αναζητούμε τα πλευρικά όρια της f στα δύο σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της:

$$\lim_{x\to-2-}\left[f(x)\right] = \lim_{x\to-2-}\left[\frac{x^3+2x-1}{x^2-4}\right] = \frac{-13}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2+}\left[f(x)\right] = \lim_{x\to-2+}\left[\frac{x^3+2x-1}{x^2-4}\right] = \frac{-13}{-0} = \infty$$

και

$$\lim_{x\to2-}\left[f(x)\right] = \lim_{x\to2-}\left[\frac{x^3+2x-1}{x^2-4}\right] = \frac{11}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2+}\left[f(x)\right] = \lim_{x\to2+}\left[\frac{x^3+2x-1}{x^2-4}\right] = \frac{11}{+0} = \infty$$

Επομένως υπάρχουν δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες, την $x=-2$ και $x=2$.

β) Παρατηρώντας πως η δοσμένη συνάρτηση είναι ρητή, με τον αριθμητή να έχει βαθμό κατά μία μονάδα μεγαλύτερο του παρονομαστή, συμπεραίνουμε (βάση του προηγούμενου πρακτικού κανόνα) πως υπάρχει τουλάχιστον μία πλάγια ασύμπτωτη. Θεωρώντας πως η εξίσωσή της είναι η ε: $y=ax+b$, αρχικά υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης:

$1^{ος}$ τρόπος:

$$f(x)=\frac{x^3+2x-1}{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{(3x^2+2)(x^2-4)-2x(x^3+2x-1)}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-14x^2+2x-8}{x^4-8x^2+16}$$

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f'(x)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^4-14x^2+2x-8}{x^4-8x^2+16}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^4\left(1-\frac{14}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{8}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}\right)}\right]=\frac{1}{1}=1$$

$2^{ος}$ τρόπος:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\frac{x^3+2x-1}{x^2-4}}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+2x-1}{x(x^2-4)}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+2x-1}{x^3-4x}\right]=...=1$$

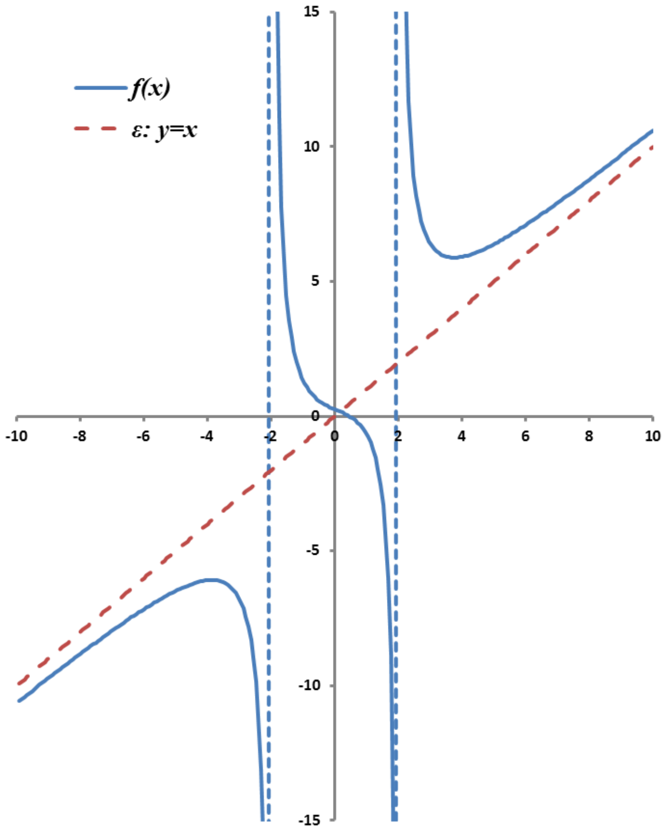
Στη συνέχεια υπολογίζουμε το b:

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right] \quad \Rightarrow$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+2x-1}{x^2-4}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+2x-1-x^3+4x}{x^2-4}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{6x-1}{x^2-4}\right]=...=0$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη είναι η ε: $y=x$.

Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται στην επόμενη γραφική παράσταση:



Εικόνα 3.32 *Γράφημα της συνάρτησης f(x) με τις δύο κατακόρυφες και την μία πλάγια ασύμπτωτη*

Άσκηση: Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ **β)** $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$

(Απ: α) x=1 β) x=2)

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση g **με** $g(x)=\dfrac{3x^{\nu}}{x^2+\mu}$ $\nu\in\mathbb{N}^*$ **και** $\mu\in R$**.**

α) Για ποιες τιμές του μ η γραφική παράσταση της g **έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη ;**

β) Αν $\mu=1$ **και το ν παίρνει διαδοχικά τις τιμές 1,2,3, να βρείτε τις ασύμπτωτες στη γραφική παράσταση της** g **σε κάθε περίπτωση.**

(Απ: α) μ<0 β) y=0, y=3, y=3x)

□

Άσκηση: Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(x)=\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$

(Απ: y=2)

□

Άσκηση: Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των

α) $f(x)=2x+3+\dfrac{5e^x}{1+e^x}$ **β)** $g(x)=3x-2+\dfrac{\eta\mu x}{x}$

(Απ: α) y=2x+8 β) y=3x-2)

□

Άσκηση: Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x, & \alpha\nu \;\; x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \alpha\nu \;\; x>0 \end{cases}$ **β)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

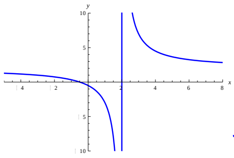
(Απ: α) x=0 β) x=0)

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\kappa x+1}{\mu x-2}$**. Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την x=2 και οριζόντια την y=2.**

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και μ.

β) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της f.

(Απ: α) κ=2, μ=1 β) )

□

Άσκηση: Να βρείτε τις οριζόντιες κατακόρυφες και πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) f(x)= $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ β) f(x)= $\frac{x^2-x-2}{x-1}$ γ) f(x)= $\frac{x^2-3}{x-2}$ δ) f(x)= $\sqrt{x^2+x}$

ε) f(x)= $\sqrt{x^2+1}-x$

(Απ: α) y=1 β) x=1 γ) x=2 δ) y=x+1/2 ε) y=0)

□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{x^2+2x+2}$

Να δείξετε ότι η ευθεία ε_1: y= -x-1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και η ε_2: y=x+1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

□

Άσκηση: Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι πλάγιες – οριζόντιες - κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) f(x)= $\frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}$ β) f(x)= $\sqrt{x^2+4x+5}$

(Απ: α) y=2x+10 , x=2 β) y=x+2, y= -x-2)

Ά□

Άσκηση: Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x+\frac{1}{x}$

(Απ: x=0, y=x)

□

Άσκηση: Να βρεθούν οι ασύμπτωτες (κατακόρυφες – πλάγιες –οριζόντιες) των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων, όπου υπάρχουν

α) f(x)= $\frac{x^3+2x^2-5x+6}{x^2-1}$ β) f(x)= εφx , x $\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ γ) f(x)= σφx , x $\in(0,\pi)$

δ) f(x)= $\frac{\ln x}{x}$ ε) f(x)= $x-xe^{-x^2}$ στ) f(x)= $e^{\frac{1}{x}}$

ζ) f(x)=x+ $\frac{\eta\mu x}{e^x}$, x ≥ 0 η) f(x)= x $e^{\frac{1}{x}}$, x $\in(0,1]$ θ) f(x)= $\frac{(x^3+x^2+x+1)\ln x}{e^{2x}}$, x ≥ 1

(Απ:α) y=x+2, x=1 β) x= $\pm\pi/2$ γ)x=0, x=π δ) x=0, y=0 ε) y=x στ) x=0, y=0 ζ) y=x η) x=0, y=x+1 θ) y=0)

3.3.3 Μελέτη Συνάρτησης

Ονομάζουμε Μελέτη Συνάρτησης ένα σύνολο εργασιών, τις οποίες υλοποιούμε στην προσπάθεια να υπολογίσουμε κάποια βασικά στοιχεία και παραμέτρους μιας συνάρτησης. Το σύνολο αυτών των εργασιών για μία δοσμένη συνάρτηση είναι τα επόμενα:

1. Ορισμός του Πεδίου Ορισμού
2. Μελέτη της Συνέχειας
3. Μελέτη της Παραγωγισιμότητας
4. Διερεύνηση για την ύπαρξη ασύμπτωτων
5. Μελέτη της μονοτονίας και των σημείων στάσης (μέσω της πρώτης παραγώγου)
6. Μελέτη των κατεύθυνσης των κοίλων και των σημείων καμπής (μέσω της δεύτερης παραγώγου)
7. Κατασκευή κεντρικού πίνακα
8. Γραφική παράσταση

Παράδειγμα: Να γίνει η πλήρης μελέτη της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x}{x+3} & \alpha\nu\ x\leq 0\ \kappa\alpha\iota\ x\neq -3 \\ 0 & \alpha\nu\ x=-3 \\ \dfrac{x^2}{x-2} & \alpha\nu\ x>0\ \kappa\alpha\iota\ x\neq 2 \\ 0 & \alpha\nu\ x=2 \end{cases}$$

Λύση:

1) Το πεδίο ορισμού

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, διότι όλα τα σκέλη της συνάρτησης είναι ρητές συναρτήσεις, οι οποίες είναι συνεχείς σε ολόκληρο το R, με εξαίρεση τα σημεία που μηδενίζουν τον παρονομαστή τους. Ταυτόχρονα, στα σημεία όπου οι παρονομαστές μηδενίζονται, η συνάρτηση ορίζεται με άλλο σκέλος.

2) Μελέτη συνέχειας.

Η συνάρτηση ορίζεται, ουσιαστικά, από δύο σκέλη, που το καθένα του είναι μία ρητή συνάρτηση. Οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις (σαν κλάσματα πολυωνυμικών συναρτήσεων, οι οποίες είναι συνεχείς), με εξαίρεση τα σημεία που αποτελούν ρίζες του παρονομαστή. Επομένως πρέπει να μελετηθεί η συνέχεια στα δύο κρίσιμα σημεία (το x=–3 και το x=2), καθώς επίσης και στο σημείο όπου αλλάζει σκέλος η συνάρτηση (το x=0).

α) Στο x=-3

$$\lim_{x\to -3-}\left[f\ x\right]=\lim_{x\to -3-}\left[\frac{4x}{x+3}\right]=\frac{-12}{-0}=\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to -3+}\left[f\ x\right]=\lim_{x\to -3+}\left[\frac{4x}{x+3}\right]=\frac{-12}{+0}=-\infty\quad \kappa\alpha\iota$$

$$f\ -3\ =0$$

Τα πιο πάνω πλευρικά όρια αποδεικνύουν πως (i) η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο σημείο x=-3 και (ii) η ευθεία x=–3 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

β) Στο x=2

$$\lim_{x\to 2-}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to 2-}\left[\frac{x^2}{x-2}\right]=\frac{4}{-0}=-\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 2+}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to 2+}\left[\frac{x^2}{x-2}\right]=\frac{4}{+0}=\infty \quad \text{και}$$

$$f(2)=0$$

Τα πιο πάνω πλευρικά όρια αποδεικνύουν πως (i) η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο σημείο x=2 και (ii) η ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

γ) Στο x=0

$$\lim_{x\to 0-}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to 0-}\left[\frac{4x}{x+3}\right]=\frac{0}{3}=0\ ,$$

$$\lim_{x\to 0+}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to 0+}\left[\frac{x^2}{x-2}\right]=\frac{0}{-2}=0 \quad \text{και}$$

$$f(0)=\left[\frac{4x}{x+3}\right]_{x=0}=\frac{0}{3}=0$$

Τα πιο πάνω πλευρικά όρια αποδεικνύουν πως η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο x=0.

3) Παραγωγισιμότητα.

Μία ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Στην δοσμένη συνάρτηση θα πρέπει να μελετήσουμε την παραγωγισιμότητα στα σημεία αλλαγής σκέλους. Στα κρίσιμα σημεία (το x=–3 και το x=2, όπου η συνάρτηση απειρίζεται) η f δεν είναι παραγωγίσιμη διότι, όπως είδαμε, δεν είναι συνεχής στα σημεία αυτά. Στη συνέχεια πρέπει να εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα στο σημείο αλλαγής σκέλους της συνάρτησης, στο x=0.

$$f'(0-)=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{x+3}\right)\right]=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{4}{(x+3)^2}\right]=\frac{4}{3}$$

$$f'(0+)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x-2}\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right]=\frac{0}{2}=0$$

Παρατηρούμε πως οι δύο πλευρικές παράγωγοι στο σημείο x=0 είναι διαφορετικές, κάτι που αποδεικνύει πως η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

4) Ασύμπτωτες.

Ήδη αναφερθήκαμε στις δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες, την x=–3 και την x=2. Με βάση τα όσα ειπώθηκαν στην παράγραφο των πλάγιων ασύμπτωτων και αφορούσαν στις ρητές συναρτήσεις, αναμένουμε την ύπαρξη μιας οριζόντιας ασύμπτωτης στα αριστερά (όταν το x τείνει στο μείον άπειρο) και μιας πλάγιας στα δεξιά (όταν το x τείνει στο θετικό άπειρο). Πράγματι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4x}{x+3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4x}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right]=4$$

Οπότε στα αριστερά του γραφήματος υπάρχει η οριζόντια ασύμπτωτη $y=4$. Στα δεξιά, αναζητούμε την πλάγια ασύμπτωτη (ε: $y=ax+b$) που αντιστοιχεί στο 2$^{\text{ο}}$ σκέλος της συνάρτησης:

$$a=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x-2}\right]=...=1 \quad \text{και}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x-2}\right]=...=2$$

Έχουμε λοιπόν την πλάγια ασύμπτωτη ε: $y=x+2$.

5) Μονοτονία και σημεία στάσης.

Αρχικά υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{(x+3)^2} & \text{αν } x<0\\[2ex] \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2} & \text{αν } x>0\end{cases}$$

υπενθυμίζοντας, ταυτόχρονα πως η παράγωγος δεν ορίζεται στα σημεία: $x=-3$, $x=0$ και $x=2$.

Υπολογισμός των ριζών της παραγώγου:

$$\frac{3}{(x+3)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad 3=o \quad \text{αδύνατο}$$

$$\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x=x(x-4)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \text{ (απορρίπτεται) και } x=4$$

Η μονοτονία και τα σημεία στάσης αναδεικνύονται με τη βοήθεια του επόμενου πίνακα:

X	$-\infty$		-3		0		2		4		∞
f΄(x)		+	‖	+	‖	–	‖	–		+	
f(x)		↗	‖	↗	‖	↘	‖	↘		↗	

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως αν και στα σημεία –3, 0 και 2 η παράγωγος δεν ορίζεται, εντούτοις στο σημείο x=0, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής, παρουσιάζει σημείο στάσης και μάλιστα τοπικό μέγιστο (η συνάρτηση είναι αύξουσα αριστερά του μηδενός και φθίνουσα στα δεξιά, ενώ υπάρχει και συνέχεια).

Αντίθετα, στο σημείο x=4 έχουμε σημείο στάσης και μάλιστα πρόκειται για τοπικό ελάχιστο.

6) Μελέτη των κατεύθυνσης των κοίλων και των σημείων καμπής.

Αρχικά υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[\begin{cases}\dfrac{3}{(x+3)^2} & \alpha\nu\ \ x<0\\[2ex] \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2} & \alpha\nu\ \ x>0\end{cases}\right]=\begin{cases}-\dfrac{6(x+3)}{(x+3)^4} & \alpha\nu\ \ x<0\\[2ex] \dfrac{(2x-4)(x-2)^2-2(x^2-4x)(x-2)}{(x-2)^2} & \alpha\nu\ \ x>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{6}{(x+3)^3} & \alpha\nu\ \ x<0\\[2ex] \dfrac{8}{(x-2)^3} & \alpha\nu\ \ x>0\end{cases}$$

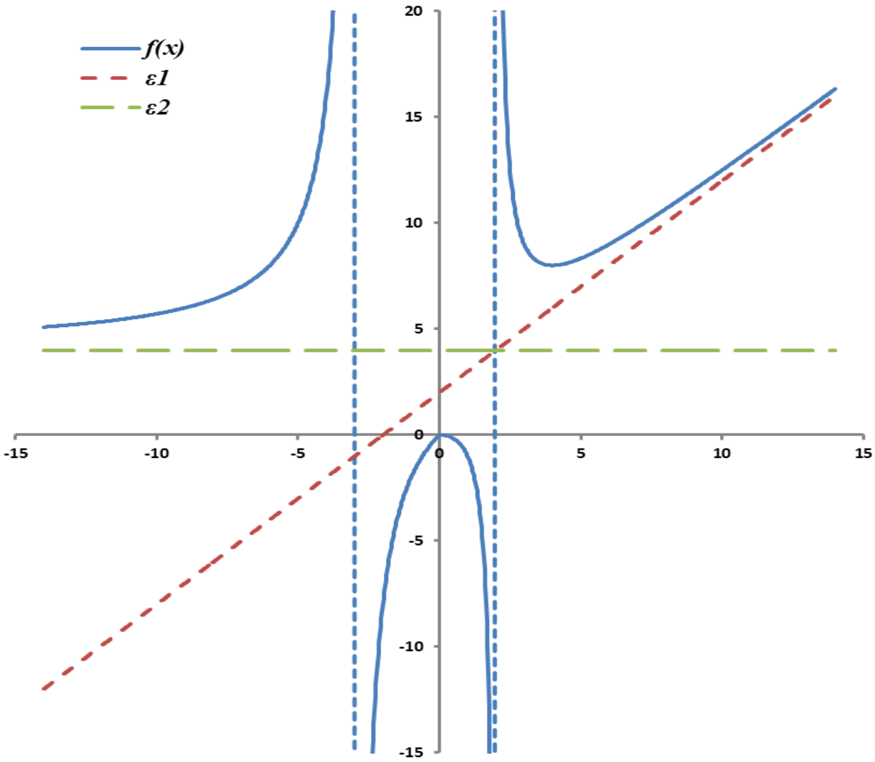
υπενθυμίζοντας και πάλι πως η δεύτερη παράγωγος δεν ορίζεται στα σημεία: *x=–3, x=0* και *x=2.* Παρατηρούμε πως η δεύτερη παράγωγος δεν έχει ρίζες, άρα δεν θα έχει και σημεία καμπής. Ο επόμενος πίνακας μας επιτρέπει να μελετήσουμε την φορά των κοίλων της συνάρτησης:

X	$-\infty$		–3		0		2		∞
f ''(x)		+		–		–		+	
f(x)		∪		∩		∩		∪	

7) Κατασκευή κεντρικού πίνακα

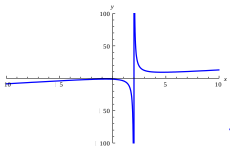
X	$-\infty$		–3		0		2		4		∞
f ''(x)		+		-		–		+		+	
f '(x)		+		+		–		–		+	
f(x)		∪		∩		∩		∪		∪	
		↗		↗		↘		↘		↗	
					0				8		

8) Γραφική παράσταση



Εικόνα 3.33 *Γράφημα της συνάρτησης f(x)*

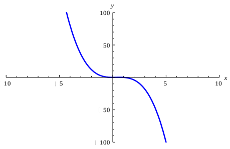
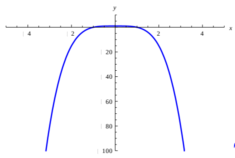
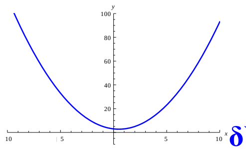
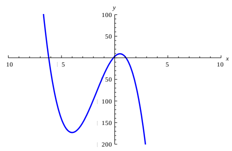
Άσκηση: Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2}$.

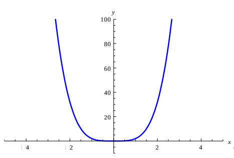
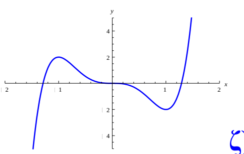
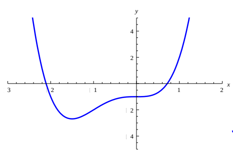
(Απ:  **)**

Άσκηση: Να γίνει η μελέτη και να σχεδιαστούν τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2-x^3$ **β)** $f(x)=1-x^4$ **γ)** $f(x)=x^2-x+3$ **δ)** $f(x)=-4x^3-21x^2+24x+3$

ε) $f(x)=2x^4$ **στ)** $f(x)=3x^5-5x^3$ **ζ)** $f(x)=x^4+2x^3-1$

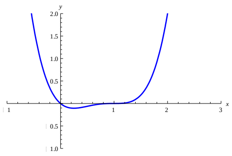
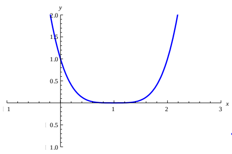
(Απ: α)  **β)**  **γ)**  **δ)** 

ε)  **στ)**  **ζ)**  **)**

□

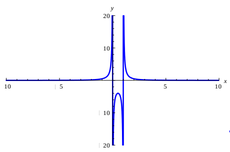
Άσκηση: Να γίνει η μελέτη και να σχεδιαστούν τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x(x-1)^3$ β) $f(x)=(x-1)^4$

(Απ:α)  **β)**  **)**

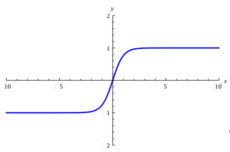
□

Άσκηση: Να μελετηθεί η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ **.**

(Απ:  **)**

□

Άσκηση: Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ **.**

(Απ:  **)**

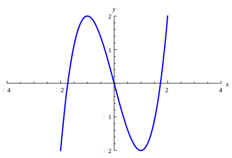
□

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση f **με** $f(x)=x^3-3x+\lambda$ με $x\in\mathbb{R}$ και λ **σταθερό.**

α) Να μελετήσετε την f **ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.**

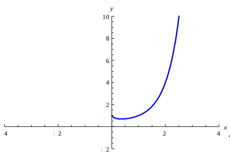
β) Αν λ=0 να κατασκευάσετε την γραφική της παράσταση

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η καμπύλη εφάπτεται του άξονα xx΄.

(Απ: β)  **γ) λ=2 και λ=-2)**

□

Άσκηση: Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=x^x$ **, x> 0.**

(Απ:  **)**

3.4 Παραγώγιση διανυσματικών συναρτήσεων

Στο Κεφάλαιο των συναρτήσεων αναφερθήκαμε στις διανυσματικές συναρτήσεις και είδαμε αρκετά παραδείγματα, έχοντας την ευκαιρία να διαπιστώσουμε τις πολύ μεγάλες δυνατότητες που δίνουν οι συναρτήσεις αυτές, επιτρέποντας την έκφραση με απλό τρόπο, ιδιαίτερα σύνθετων καμπύλων.

3.4.1 Γενικά

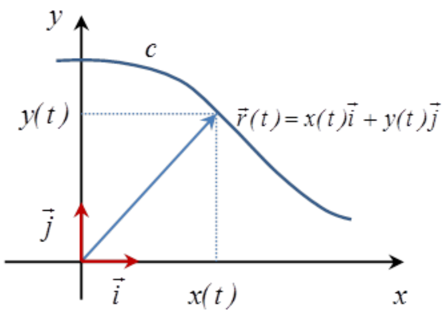
Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τον τρόπο παραγώγισης των διανυσματικών συναρτήσεων. Όμως, θεωρούμε απαραίτητο, ο αναγνώστης να ξαναρίξει μια ματιά στην παράγραφο 2.5.5.

Να θυμίσουμε πως στο επίπεδο O*xy*, ορίζουμε τις διανυσματικές μονάδες $\vec{i}$ και $\vec{j}$, στους άξονες των x και y, αντίστοιχα.

Μία συνάρτηση της μορφής:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

όπου το t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή (συνήθως ο χρόνος) λέγεται διανυσματική συνάρτηση και ορίζει τη θέση ενός διανύσματος **r**=$\vec{r}(t)$, *όπου, για* λόγους ευκολίας γραφής ας μας επιτρέψει ο αναγνώστης να δηλώνουμε ένα διάνυσμα με την έντονη γραφή, χωρίς το κλασσικό βελάκι από πάνω.



Εικόνα 3.34 *Γραφική παράσταση διανυσματικής συνάρτησης.*

Ο τρόπος αυτός ορισμού μιας καμπύλης στο επίπεδο, σαν συνάρτησης του t είναι ιδιαίτερα βολικός στην περιγραφή μιας κίνησης στο επίπεδο αυτό. Εύκολα διαπιστώνουμε πως με τον ίδιο τρόπο μπορεί να οριστεί μια καμπύλη στο χώρο των τριών διαστάσεων, με τη μορφή:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

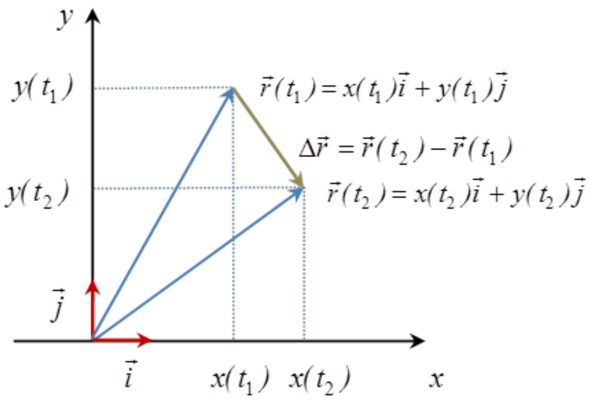
όπου **k** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα z.

Το μέτρο της διανυσματικής συνάρτησης δίνεται από τον γνωστό τύπο της Ευκλείδειας απόστασης:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad \Rightarrow$$
$$\left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

για τις δύο διαστάσεις και ο επόμενος, για τις τρεις διαστάσεις:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \Rightarrow$$
$$\left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$



Εικόνα 3.35 *Μέτρο του διανύσματος διαφοράς.*

Θεωρούμε τώρα τα διανύσματα $\vec{r}(t_1)$ και $\vec{r}(t_2)$ της διανυσματικής συνάρτησης **r**, σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για το μέτρο της διαφοράς τους έχουμε:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)=x(t_2)\vec{i}+y(t_2)\vec{j}-x(t_1)\vec{i}+y(t_1)\vec{j}=$$
$$= x(t_2)-x(t_1)\ \vec{i}+\ y(t_2)-y(t_1)\ \vec{j} \qquad \Rightarrow$$

$$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{x(t_2)-x(t_1)^{\ 2}+\ y(t_2)-y(t_1)^{\ 2}}$$

3.4.2 Παραγώγιση των διανυσματικών συναρτήσεων

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης αυτής:

$$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)\vec{i}+y(t+\Delta t)\vec{j}-x(t)\vec{i}-y(t)\vec{j}}{\Delta t}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[x(t+\Delta t)-x(t)]\vec{i}+[y(t+\Delta t)\vec{j}-y(t)]\vec{j}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}\right] \qquad \Rightarrow$$

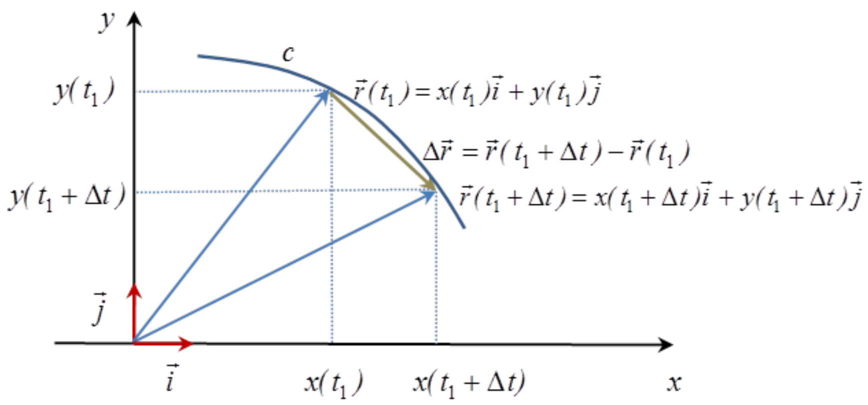
$$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}$$

πράγμα που σημαίνει πως «**για να παραγωγίσουμε μια διανυσματική συνάρτηση, παραγωγίζουμε τις συναρτήσεις που είναι συντελεστές των μοναδιαίων διανυσμάτων**».

Παρατηρώντας το σχήμα 3.35 και σκεπτόμενοι πως η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης **r**(t) προκύπτει από το όριο

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

αντιλαμβανόμαστε πως η παράγωγος αυτή είναι ένα διάνυσμα παράλληλο και ομόρροπο του διανύσματος Δ**r**, δηλαδή **ένα διάνυσμα που εφάπτεται στην καμπύλη c που ορίζεται από την διανυσματική ακτίνα** r(t).



Εικόνα 3.36 *Η διανυσματική παράγωγος είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη c της διανυσματικής συνάρτησης.*

Μπορούμε λοιπόν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η διανυσματική ακτίνα **r**(t) «χαράσσει» στο επίπεδο Oxy μια καμπύλη c, σαν συνάρτηση της μεταβλητής t, που θα μπορούσε να περιγράφει την κίνηση ενός σημείου πάνω στο επίπεδο αυτό.
- Η παράγωγος της **r**(t) είναι μια διανυσματική συνάρτηση η οποία δίνει την ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται το σημείο πάνω στην καμπύλη c.
- Το διάνυσμα της ταχύτητας εφάπτεται στην καμπύλη c. Δηλαδή το

  το διάνυσμα $\dot{\vec{r}}(t_1)$ **εφάπτεται στην καμπύλη c, στο σημείο:** $\vec{r}(t_1)$

Με όμοια μέθοδο υπολογίζεται η δεύτερη παράγωγος (η παράγωγος της πρώτης παραγώγου – της διανυσματικής ταχύτητας):

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$

Η δεύτερη παράγωγος περιγράφει την επιτάχυνση της κίνησης την οποία ορίζει η διανυσματική συνάρτηση **r**(t), λειτουργώντας σαν συνάρτηση θέσης. Ισχύουν δηλαδή οι σχέσεις:

Συνάρτηση θέσης: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Συνάρτηση ταχύτητας: $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$

Συνάρτηση επιτάχυνσης: $\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$

Παράδειγμα: Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = t\sigma\upsilon\nu(\mathrm{t})\vec{i} + t\eta\mu(t)\vec{j} = t\ \ \sigma\upsilon\nu(\mathrm{t})\vec{i} + \eta\mu(t)\vec{j}$$

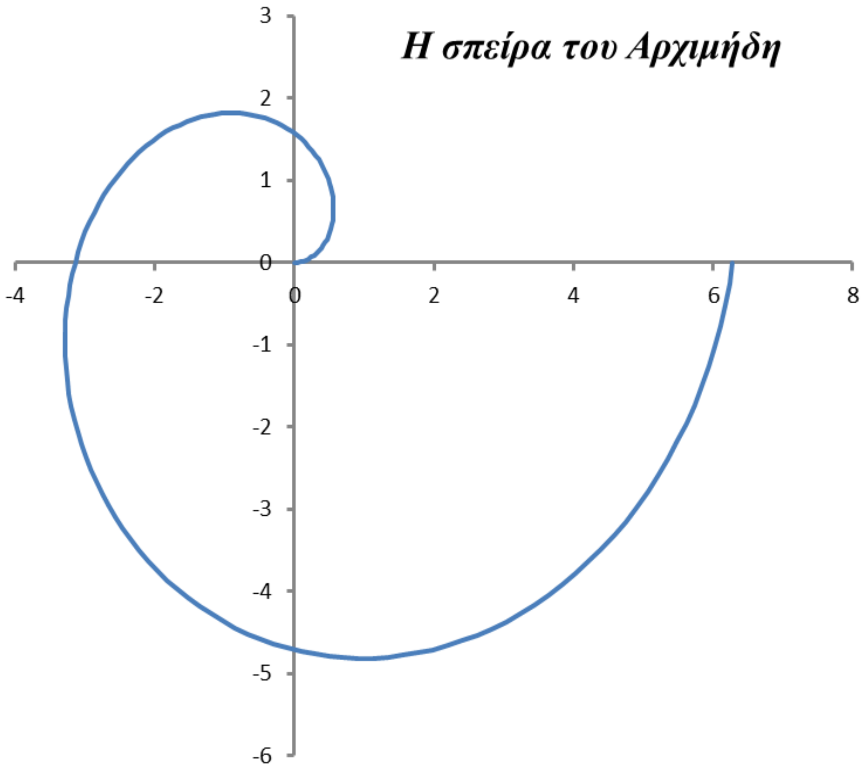
- **Να γίνει η γραφική της παράσταση.**
- **Να υπολογιστούν η πρώτη και η δεύτερη παράγωγός της.**

Λύση:

Αρχικά, κάνουμε έναν πίνακα τιμών, της μορφής:

t	x(t)=tσυνt	y(t)=tημt
0	0	0
0.1	0.0995	0.009983
0.2	0.196013	0.039734
…	…	…
2π	2π	0

με τη βοήθεια του οποίου έχουμε την γραφική παράσταση μιας καμπύλης, η οποία λέγεται «Σπείρα του Αρχιμήδη»:



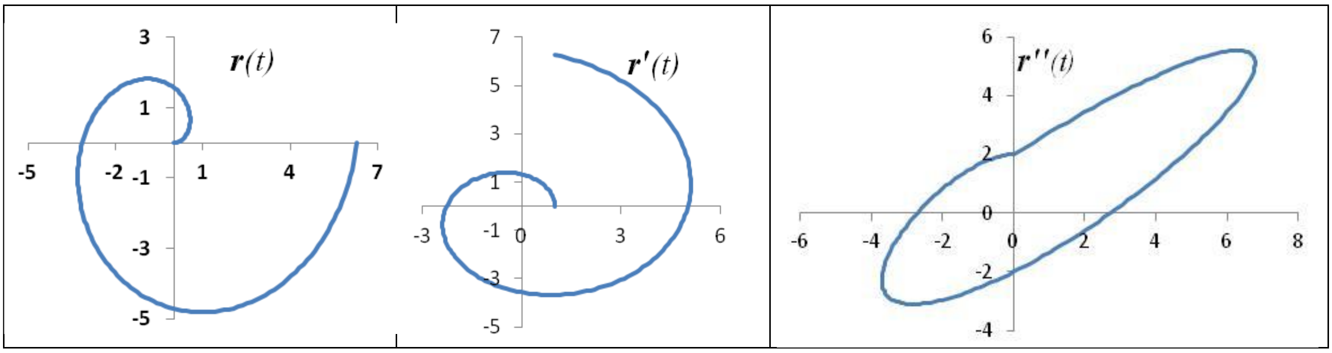
Εικόνα 3.37 *Η σπείρα του Αρχιμήδη.*

Οι παράγωγοι της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = t\sigma\upsilon\nu(t)\vec{i} + t\eta\mu(t)\vec{j} \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\sigma\upsilon\nu(t) - t\eta\mu(t)\right)\vec{i} + \left(\eta\mu(t) + t\sigma\upsilon\nu(t)\right)\vec{j} \qquad \Rightarrow$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \left(-2\eta\mu(t) - t\sigma\upsilon\nu(t)\right)\vec{i} + \left(2\sigma\upsilon\nu(t) - t\eta\mu(t)\right)\vec{j}$$



Εικόνα 3.38 *Η σπείρα του Αρχιμήδη υπό τη μορφή διανυσματικής συνάρτησης και η πρώτη (στο μέσον) και η δεύτερη (δεξιά) παράγωγός της ως προς τον χρόνο.*

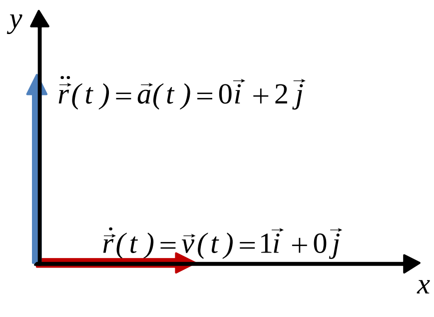
Παρατήρηση: Αξίζει να παρατηρήσουμε πως στο ξεκίνημα της σπείρας (t=0), το διάνυσμα της ταχύτητας είναι το

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = 1\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{i}\ ,$$

δηλαδή το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα των *x* και άρα εφαπτόμενο στην καμπύλη της σπείρας στο σημείο εκείνο. Αντίθετα, στο ίδιο σημείο το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι το

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = 0\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{j}$$

το οποίο είναι κάθετο στην καμπύλη της σπείρας, στο σημείο εκείνο (κεντρομόλος επιτάχυνση).



Εικόνα 3.39 Τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της διανυσματικής συνάρτησης του παραδείγματος η οποία διαγράφει τη σπείρα του Αρχιμήδη.

□

3.4.3 Η Γωνιακή ταχύτητα

Παρατηρώντας την γραφική παράσταση της σπείρας του Αρχιμήδη, αντιλαμβανόμαστε πως αυτού του είδους οι καμπύλες διανυσματικών συναρτήσεων, «γράφονται» μέσω της περιστροφής του διανύσματος **r**(*t*). Πολύ συχνά, είναι ουσιαστικός ο ρυθμός με τον οποίο περιστρέφεται το διάνυσμα **r**(t), γύρω από το κέντρο Ο των αξόνων.

Τίθεται, λοιπόν, το ζήτημα του μαθηματικού καθορισμού αυτού του ρυθμού περιστροφής, στον οποίο (καθορισμό) κυρίαρχο ρόλο κατέχει ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ, η οποία ορίζεται από τον άξονα των x και το διάνυσμα **r**(t).

Η γνώση της τιμής της γωνία θ σε κάθε χρονική στιγμή συμβαίνει μέσω μιας συνάρτησης θ=θ(t). Ονομάζουμε Γωνιακή Ταχύτητα το ρυθμό μεταβολής της τιμής της συνάρτησης θ(t), δηλαδή την πρώτη της παράγωγο, η οποία συχνά συμβολίζεται με το ω:

Γωνιακή Ταχύτητα: $\omega(t) = \dot{\theta}(\mathrm{t}) = \dfrac{d\theta}{dt}$

Παράδειγμα:

Η διανυσματική συνάρτηση:

$$\vec{r}(t) = \sigma\upsilon\nu\ \ \theta(\mathrm{t})\ \ \vec{i} + \eta\mu\ \ \theta(t)\ \ \vec{j}$$

αντιστοιχεί (όπως είδαμε στην παράγραφο 2.5.5) σε ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο περιστρέφεται με τον ρυθμό που καθορίζει η θ(t) (θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε και συνάρτηση θέσης της γωνίας).

□

3.4.4 Ομαλή κυκλική κίνηση

Αρχικά, να αναφέρουμε πως ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση όπου η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή:

$$\theta(t) = \omega_0 t \quad \text{ή} \quad \theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

$$\dot{\theta}(\mathrm{t}) = \frac{d}{dt}\ \omega_0 t + \theta_0\ = \omega_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Ένα υλικό σημείο που διαγράφει με σταθερή γωνιακή ταχύτητα την περιφέρεια ενός κύκλου, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Ο όρος αυτός σημαίνει πως η «επιβατική» ακτίνα του υλικού σημείου περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (ω=στ.), Άρα η γωνία της επιβατικής ακτίνας δίνεται από τη σχέση:

θ(t) = ωt + θ_0 (= ωt εάν θ_0=0)

Εάν λοιπόν R είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε θα πολλαπλασιάσουμε με το R την έκφραση της διανυσματικής μονάδας που περιστρέφεται:

$$\vec{r}(t) = R[\sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{i} + \eta\mu(\omega t)\vec{j}]$$

Η παράγωγος της συνάρτησης αυτής, μας δίνει την διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει το διάνυσμα της ταχύτητας ενός σημείου της περιφέρειας του κύκλου:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R[-\omega\eta\mu(\omega t)\vec{i} + \omega\sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{j}] = R\omega[-\eta\mu(\omega t)\vec{i} + \sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{j}]$$

της οποίας το μέτρο ισούται με

$$\left|\vec{v}(t)\right| = \left|-R\omega\eta\mu(\omega t)\vec{i} + R\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t)\ \vec{\mathrm{j}}\right| = \sqrt{R^2\omega^2\eta\mu^2(\omega t) + R^2\omega^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)} =$$

$$= \sqrt{R^2\omega^2\ \ \eta\mu^2(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)\ } = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega$$

με κατεύθυνση η οποία είναι κάθετη στην κατεύθυνση της διανυσματικής ακτίνας **r**(t). Η φορά της εξαρτάται από το πρόσημο της γωνιακής ταχύτητας ω.

Παραγωγίζοντας για δεύτερη φορά την διανυσματική συνάρτηση θέσης, υπολογίζεται η διανυσματική έκφραση της επιτάχυνσης της κίνησης:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = R[-\omega^2\sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{i} - \omega^2\eta\mu(\omega t)\vec{j}] = R\omega^2[-\sigma\upsilon\nu(\omega t)\vec{i} - \eta\mu(\omega t)\vec{j}]$$

της οποίας το μέτρο ισούται με $\alpha=\omega^2 R$, με κατεύθυνση η οποία είναι αντίθετη της κατεύθυνσης της διανυσματικής ακτίνας **r**(t), έχει δηλαδή κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου και γι’ αυτό καλείται κεντρομόλος επιτάχυνση.

□

Άσκηση: Να υπολογισθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης της έλλειψης:

$$\vec{r}(t) = a\sigma\upsilon\nu\ \ \omega t\ \ \vec{i} + b\eta\mu\ \ \omega t\ \ \vec{j}$$

με ημιάξονες τον *a (στα x)* και τον *b (στα y)*.

□

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία για Περαιτέρω Μελέτη

Αυγολούπης, Σ.Ι. (1992), *Διαφορικός Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Αριστοτελείου Πανεπιστημίου

Δημητρακούδης, Θεοδώρου, Κικίλιας, Κουρής, Παλαμούρδας (2002*), Διαφορικός* - *Ολοκληρωτικός Λογισμός,* Αθήνα: Εκδόσεις Δηρός

Κατωπόδης, Μακρυγιάννης, Σάσσαλος, (1994), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική Ε.Π.Ε

Παπαδήμας, Ο. (1997), *Εισαγωγή Στο Μαθηματικό Λογισμό*, Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλη

Τερζίδης, Χ. (2006), *Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής με Στοιχεία Διανυσματικής & Γραμμικής Άλγεβρας*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Χριστοδουλίδου

Finney, R.L., Weir, M.D., Giordano, F.R. (2009), *Απειροστικός Λογισμός Τόμος I*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Piskounov, N. (1980), *Calcul Différentiel et Intégral*, Paris: Editions de Moscou