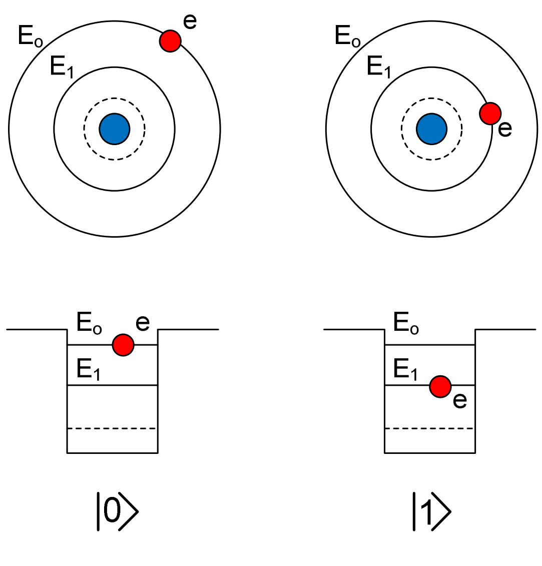
2. Αποθήκευση της κβαντικής πληροφορίας

Σύνοψη
Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγραφεί η μονάδα της κβαντικής πληροφορίας που είναι το κβαντικό bit (quantum bit). Θα περιγραφούν φυσικά συστήματα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κβαντικά bits. Θα δοθεί η μαθηματική περιγραφή του κβαντικού bit ως διανύσματος του χώρου Hilbert και η παράστασή του με χρήση της σφαίρας Bloch. Στη συνέχεια θα περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο πολλά κβαντικά bits μπορούν να αποτελέσουν έναν κβαντικό καταχωρητή, όπου αποθηκεύεται η κβαντική πληροφορία. Θα δοθεί η μαθηματική περιγραφή των κβαντικών καταχωρητών ως διανυσμάτων στον χώρο Hilbert.

Προαπαιτούμενη γνώση
Γραμμική άλγεβρα και το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου αυτού.

2.1 Το κβαντικό bit (qubit)

Στους κλασικούς υπολογιστές μονάδα πληροφορίας είναι το bit. Ένα bit πληροφορίας μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές την «0» και την «1». Στους κβαντικούς υπολογιστές μονάδα πληροφορίας είναι το κβαντικό bit (quantum bit) το οποίο για συντομία γράφεται ως qubit. Το qubit είναι ένα κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων, όπως το κβαντικό κέρμα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όπως θα θυμάστε, συμβολίσαμε τις δύο βασικές καταστάσεις του κβαντικού κέρματος με $|H\rangle$ και $|T\rangle$. Οι δύο βασικές καταστάσεις του qubit συμβολίζονται με $|0\rangle$ και $|1\rangle$



Σχήμα 2.1 Αναπαράσταση ενός qubit από δύο διακριτά ενεργειακά επίπεδα E_0 και E_1 σε ένα άτομο(επάνω) και σε μία κβαντική στιγμή (κάτω).

Υπάρχουν αρκετά κβαντικά συστήματα δύο καταστάσεων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως qubits (Rieffel & Polak, 2014). Για παράδειγμα, η κατάσταση του spin ενός σωματιδίου με spin ½, μπορεί να θεωρηθεί ως qubit, όπου η κατάσταση spin +½ αντιστοιχεί στην βασική κατάσταση $|0\rangle$ και η κατάσταση spin -½ στη βασική κατάσταση $|1\rangle$:

$$\left|+\frac{1}{2}\right\rangle \rightarrow |0\rangle \qquad \text{και} \qquad \left|-\frac{1}{2}\right\rangle \rightarrow |1\rangle \tag{2.1}$$

Επίσης, η διεύθυνση πόλωσης ενός φωτονίου μπορεί να αναπαραστήσει ένα qubit, όπου η οριζόντια πόλωση αντιστοιχεί στην κατάσταση $|0\rangle$ και η κάθετη στην $|1\rangle$. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-1, ένα qubit μπορεί να αναπαρασταθεί και από δύο διακριτά ενεργειακά επίπεδα, E_0 και E_1, σε ένα άτομο ή σε μία κβαντική στιγμή. Η παρουσία ενός ηλεκτρονίου με ενέργεια ίση με E_1 αντιστοιχεί στην κατάσταση $|1\rangle$ και η παρουσία ενός ηλεκτρονίου με ενέργεια ίση με E_0 αντιστοιχεί στην κατάσταση $|0\rangle$. Το qubit μπορεί ακόμα να παρασταθεί και από τον τρόπο ταλάντωσης δύο ιόντων που βρίσκονται μέσα σε μία παγίδα ιόντων. Η τεχνολογία κατασκευής των κβαντικών υπολογιστών θα καθορίσει ποιο φυσικό κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων θα επιλεγεί για να αναπαραστήσει το qubit (Williams & Clearwater, 2000). Εμείς θέλουμε να περιγράψουμε τα βασικά χαρακτηριστικά και τη λειτουργία των κβαντικών υπολογιστών ανεξάρτητα από την τεχνολογία κατασκευής, οπότε δε χρειάζεται να προσδιορίσουμε ποιο φυσικό κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων χρησιμοποιούμε ως qubit.

Όπως το κβαντικό κέρμα, το qubit μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε υπέρθεση των δύο βασικών καταστάσεων:

$$|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad \text{όπου} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{2.2}$$

Οι δύο βασικές καταστάσεις του qubit μπορούν να γραφούν ως πίνακες, όπως και οι βασικές καταστάσεις του κβαντικού κέρματος:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Το ίδιο και η υπέρθεση καταστάσεων:

$$|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Όπως και στο κβαντικό κέρμα, οι βασικές καταστάσεις ενός qubit είναι ορθογώνιες μεταξύ τους:

$$\begin{aligned} &\langle 0|0\rangle = 1 \qquad \langle 0|1\rangle = 0 \\ &\langle 1|0\rangle = 0 \qquad \langle 1|1\rangle = 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Οι αριθμοί a και b των εξισώσεων (2.2) και (2.4), που όπως θα θυμάστε ονομάζονται πλάτη πιθανότητας, είναι μιγαδικοί αριθμοί και το διάνυσμα κατάστασης $|q\rangle$ του qubit είναι ένα διάνυσμα στον χώρο Hilbert που έχει δύο διαστάσεις. Στο κεφάλαιο 2.5 περιγράφονται τα κύρια χαρακτηριστικά του χώρου Hilbert.

2.2 Η σφαίρα Bloch

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παραστήσαμε το διάνυσμα κατάστασης ενός κβαντικού συστήματος δύο καταστάσεων, όπως το qubit, με τα Σχήματα 1-2 και 1-3. Όμως, μία τέτοια αναπαράσταση είναι χρήσιμη μόνο όταν τα a και b είναι πραγματικοί αριθμοί. Όταν τα πλάτη πιθανότητας είναι, όπως συνήθως, μιγαδικοί αριθμοί, τότε χρειαζόμαστε έναν χώρο Hilbet δύο διαστάσεων ή έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο τεσσάρων διαστάσεων για να αναπαραστήσουμε το διάνυσμα κατάστασης του qubit (Brooks, 1999).

Αφού λοιπόν τα πλάτη πιθανότητας a και b είναι μιγαδικοί αριθμοί, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (2.2) με μια πιο γενική μορφή:

$$|q\rangle = e^{i\gamma}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\delta}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \tag{2.6}$$

όπου, οι γωνίες γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί. Αφού θυμηθούμε ότι $\left|e^{i\omega}\right|^2 = 1$ για κάθε ω, έχουμε:

$$\left|e^{i\gamma}\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 + \left|e^{i\delta}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 + \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 = 1 \tag{2.7}$$

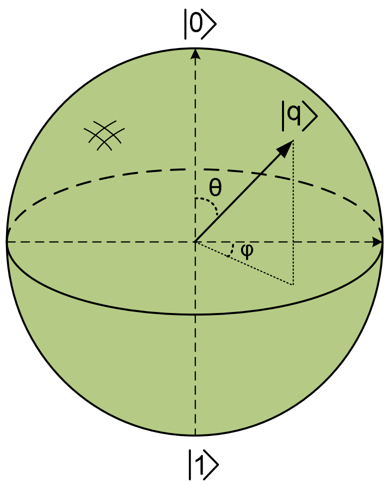
Η εξίσωση (2.6) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$|q\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i(\delta-\gamma)}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right) \tag{2.8}$$

Αν δεν λάβουμε υπόψη τον γενικό όρο φάσης *exp(iγ)*, και ονομάσουμε φ τη διαφορά των γωνιών δ και γ, (φ=δ-γ), η κατάσταση του qubit γράφεται:

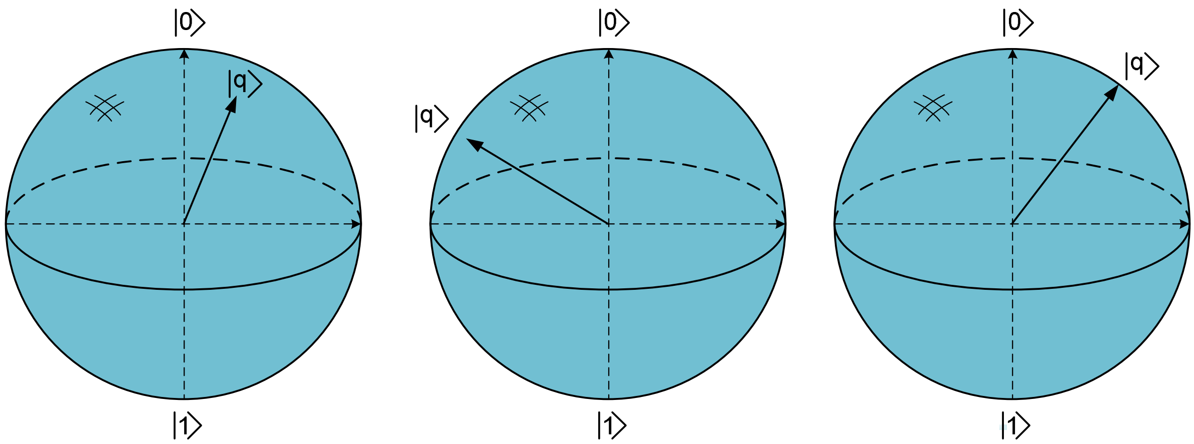
$$|q\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \tag{2.9}$$

Το διάνυσμα κατάστασης του qubit, όπως περιγράφεται από την εξίσωση (2.9) μπορεί να αναπαρασταθεί σε τρεις διαστάσεις με τη χρήση μίας σφαίρας που ονομάζεται σφαίρα Bloch.



Σχήμα 2-2 Το διάνυσμα $|q\rangle$ στη σφαίρα Bloch

Η σφαίρα Bloch έχει ακτίνα ίση με τη μονάδα και το διάνυσμα κατάστασης $|q\rangle$ του qubit, έχει την αρχή του στο κέντρο της σφαίρας και το τέλος του στο σημείο της επιφάνειας της σφαίρας που καθορίζεται από τις γωνίες θ και φ. Φυσικά, το μήκος του $|q\rangle$ είναι ίσο με τη μονάδα (D'Espagnat, 1999). Στο Σχήμα 2-2 φαίνονται τρία διαφορετικά διανύσματα κατάστασης. Όταν το qubit βρίσκεται στη βασική κατάσταση $|0\rangle$, το διάνυσμά του είναι κατακόρυφο με φορά προς τα επάνω και, όταν βρίσκεται στη βασική κατάσταση $|1\rangle$, το διάνυσμά του είναι κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω. Προσέξτε ότι, ενώ οι καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, στη σφαίρα Bloch εμφανίζονται στην ίδια γραμμή. Η σφαίρα Bloch απεικονίζει σχεδόν όλα τα χαρακτηριστικά του qubit (Keyl, 2002). Η γωνία θ καθορίζει τις τιμές των πλατών πιθανότητας. Η γωνία φ ονομάζεται γωνία φάσης. Στο Σχήμα 2-3 φαίνονται τρία διαφορετικά διανύσματα κατάστασης σε σφαίρες Bloch.

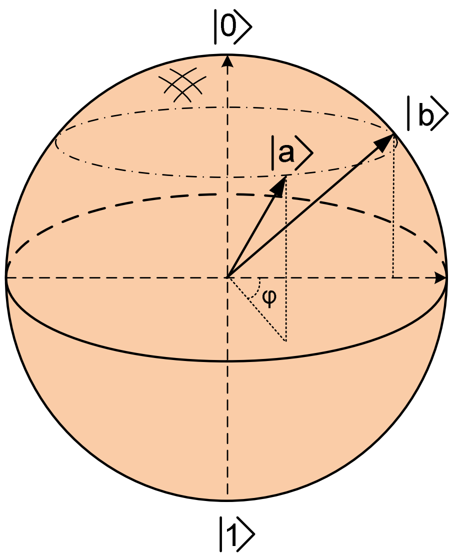


Σχήμα 2-3 Τρία διανύσματα κατάστασης σε σφαίρες Bloch.

Στο Σχήμα 2-4 φαίνονται δύο qubits, τα $|a\rangle$ και $|b\rangle$ τα οποία έχουν την ίδια γωνία θ, αλλά το πρώτο έχει γωνία φάσης φ και το δεύτερο μηδενική γωνία φάσης. Οι καταστάσεις τους δίνονται από:

$$|a\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$|b\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \tag{2.10}$$



Σχήμα 2-4 Δύο qubits $|a\rangle$ και $|b\rangle$ τα οποία έχουν την ίδια γωνία θ, αλλά το πρώτο έχει γωνία φάσης φ και το δεύτερο μηδενική γωνία φάσης.

Αν μετρήσουμε, η πιθανότητα να βρούμε το καθένα από τα δύο αυτά qubits στην κατάσταση $|0\rangle$ είναι ίση με $|\cos(\theta/2)|^2$ και η πιθανότητα να βρούμε το καθένα από τα δύο αυτά qubits στην κατάσταση $|1\rangle$ είναι ίση με $|\sin(\theta/2)|^2$. Δηλαδή, είναι αδύνατο να ξεχωρίσουμε με μία μέτρηση δύο qubits που διαφέρουν μόνο κατά τη γωνία φάσης. Παρά το γεγονός ότι η γωνία φάσης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της μέτρησης παίζει, όπως θα δούμε, σημαντικό ρόλο κατά την εκτέλεση των κβαντικών υπολογισμών, διότι προκαλεί αλληλεπίδραση μεταξύ των qubits.

Παράδειγμα 2.1

Δίνονται τα παρακάτω qubits. Μπορείτε να τα ξεχωρίσετε μετρώντας την κατάστασή τους;

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)|1\rangle$$

Η πιθανότητα να βρούμε τα qubits $|a\rangle$ και $|b\rangle$ στην κατάσταση $|0\rangle$ είναι και για τα δύο ίση με $\left|1/\sqrt{2}\right|^2 = 0.5$. Η πιθανότητα να βρούμε το $|a\rangle$ στην κατάσταση $|1\rangle$ είναι επίσης 0.5. Η πιθανότητα να βρούμε το $|b\rangle$ στην κατάσταση $|1\rangle$ είναι:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2}\right)^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 0.5$$

δηλαδή ίση με την πιθανότητα να βρούμε το $|a\rangle$ στην κατάσταση $|1\rangle$.Επομένως τα δύο qubits διαφέρουν μόνο κατά τη γωνία φάσης και δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε. ♦

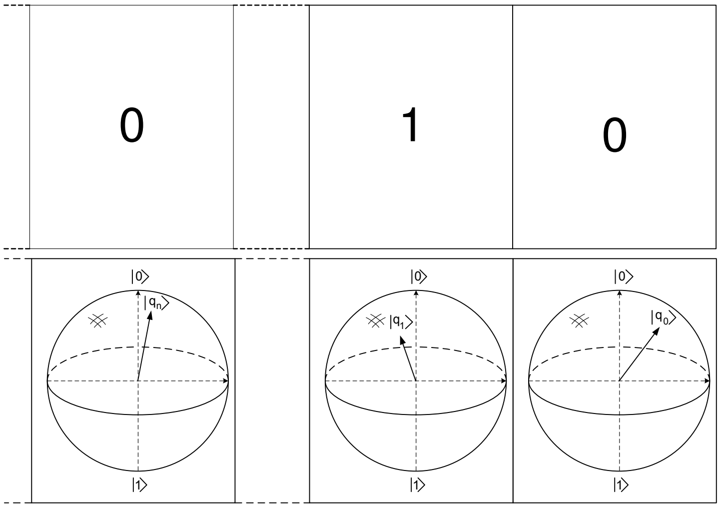
Ας συνοψίσουμε:

- Η μονάδα πληροφορίας στους κβαντικούς υπολογιστές είναι το qubit.
- Το qubit είναι ένα κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων. Οι βασικές του καταστάσεις συμβολίζονται με $|0\rangle$ και $|1\rangle$.
- Το qubit είναι ένα διάνυσμα στον χώρο Hilbert που έχει δύο διαστάσεις και απεικονίζεται ως διάνυσμα στη σφαίρα Bloch.
- Είναι αδύνατο να ξεχωρίσουμε δύο qubits που διαφέρουν μόνο κατά τη γωνία φάσης μετρώντας την κατάστασή τους.

2.3 Ο κβαντικός καταχωρητής

Στους κλασικούς υπολογιστές ένα σύνολο bits αποτελεί έναν καταχωρητή. Στους καταχωρητές αποθηκεύονται συνήθως οι τιμές κάποιων μεταβλητών. Αντίστοιχα, στους κβαντικούς υπολογιστές ένα σύνολο qubits (τα οποία είναι συνήθως διατεταγμένα σε σειρά) αποτελεί έναν κβαντικό καταχωρητή. Στο Σχήμα 2-5 φαίνονται σχηματικά ένας κλασικός και ένας κβαντικός καταχωρητής. Προσέξτε ότι η αρίθμηση των qubits γίνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά (Lewin, 2001).

Σε έναν κβαντικό καταχωρητή μπορούμε να αποθηκεύσουμε πολύ περισσότερη πληροφορία από όση στον κλασικό καταχωρητή. Ας το δούμε αυτό αρχίζοντας από την απλούστερη περίπτωση του κβαντικού καταχωρητή που αποτελείται από δύο μόνο qubits, τα $|q_1\rangle$ και $|q_0\rangle$.



Σχήμα 2-5 Στο πάνω μέρος του σχήματος φαίνεται ένας κλασικός και στο κάτω ένας κβαντικός καταχωρητής.

Στην περίπτωση αυτή, η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή $|q_R\rangle$ δίνεται από το τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων των qubits που τον αποτελούν και γράφεται ως εξής:

$$|q_R\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = |q_1\rangle |q_0\rangle = |q_1 q_0\rangle \tag{2.11}$$

όπου το $\otimes$ συμβολίζει το τανυστικό γινόμενο. Τα $|q_1\rangle \otimes |q_0\rangle$, $|q_1\rangle|q_0\rangle$ και $|q_1 q_0\rangle$ συμβολίζουν το ίδιο πράγμα. Τι είναι όμως το τανυστικό γινόμενο; Επειδή οι κβαντικοί υπολογιστές εκτελούν υπολογισμούς, μας ενδιαφέρει η έκφραση του τανυστικού γινομένου με μορφή πινάκων. Αν λοιπόν έχουμε δύο πίνακες με μία στήλη, τον *A* και τον *B*:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

τότε, το τανυστικό γινόμενο των δύο αυτών πινάκων είναι ένας πίνακας με μία στήλη, ο *C* που δίνεται από:

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c \\ a \cdot d \\ b \cdot c \\ b \cdot d \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Δηλαδή, ο *C* έχει αριθμό στοιχείων ίσο με το άθροισμα του αριθμού των στοιχείων του *A* και του *B*. Το πρώτο του στοιχείο είναι το γινόμενο του πρώτου στοιχείου του *A* επί το πρώτο στοιχείο του *B*. Το δεύτερο στοιχείο του *C* είναι το γινόμενο του πρώτου στοιχείου του *A* επί το δεύτερο στοιχείο του *B*. Το τρίτο και τέταρτο στοιχείο του *C* είναι το γινόμενο του δεύτερου στοιχείου του *A* επί το πρώτο και το δεύτερο στοιχείο του *B* αντίστοιχα (Lloyd, 1993). Δηλαδή, αν οι καταστάσεις των δύο qubits δίνονται από:

$$
\begin{aligned}
|\, q_1 \rangle &= a\,|0\rangle + b\,|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
|\, q_0 \rangle &= c\,|0\rangle + d\,|1\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή δίνεται από:

$$
\begin{aligned}
|\, q_R \rangle &= |\, q_1 \rangle \otimes |\, q_0 \rangle = \big(a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\big) \otimes \big(c\,|0\rangle + d\,|1\rangle\big) \\
&= (a \cdot c)|0\rangle \otimes |0\rangle + (a \cdot d)|0\rangle \otimes |1\rangle + (b \cdot c)|1\rangle \otimes |0\rangle + (b \cdot d)|1\rangle \otimes |1\rangle \\
&= c_0\,|00\rangle + c_1\,|01\rangle + c_2\,|10\rangle + c_3\,|11\rangle
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Στην (2.15) αντικαταστήσαμε τα $a \cdot c$, $a \cdot d$, $b \cdot c$ και $b \cdot d$ με τα c_0, c_1, c_2 και c_3 αντίστοιχα. Δηλαδή, ο κβαντικός καταχωρητής που αποτελείται από δύο qubits είναι ένα σύστημα τεσσάρων βασικών καταστάσεων. Η κάθε μία από τις βασικές του καταστάσεις προκύπτει ως τανυστικό γινόμενο των βασικών καταστάσεων των qubits. Οι βασικές καταστάσεις σε μορφή πινάκων δίνονται από:

$$
\begin{aligned}
|\,0\,\rangle \otimes |\,0\,\rangle &= |\,0\,\rangle|\,0\,\rangle = |\,00\,\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
|\,0\,\rangle \otimes |\,1\,\rangle &= |\,0\,\rangle|\,1\,\rangle = |\,01\,\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
|\,1\,\rangle \otimes |\,0\,\rangle &= |\,1\,\rangle|\,0\,\rangle = |\,10\,\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
|\,1\,\rangle \otimes |\,1\,\rangle &= |\,1\,\rangle|\,1\,\rangle = |\,11\,\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

και είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Ας γράψουμε τη (2.15) με πίνακες λαμβάνοντας υπόψη τη (2.16):

$$|q_R\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cdot c \\ a\cdot d \\ b\cdot c \\ b\cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$= c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_0 |00\rangle + c_1 |01\rangle + c_2 |10\rangle + c_3 |11\rangle \tag{2.17}$$

Στις (2.15) και (2.17) τα c_0, c_1, c_2 και c_3 είναι τα πλάτη πιθανότητας των αντίστοιχων βασικών καταστάσεων και είναι μιγαδικοί αριθμοί. Αν ο κβαντικός καταχωρητής των δύο qubits βρίσκεται σε υπέρθεση των τεσσάρων βασικών καταστάσεων, μία μέτρηση της κατάστασης του θα δώσει μία από τις τέσσερις βασικές καταστάσεις με πιθανότητα ίση με το τετράγωνο του μέτρου των c_0, c_1, c_2 και c_3. Δηλαδή, μία μέτρηση της κατάστασής του θα δώσει ως αποτέλεσμα το $|00\rangle$ με πιθανότητα ίση με $|c_0|^2$, το $|01\rangle$ με πιθανότητα ίση με $|c_1|^2$, το $|10\rangle$ με πιθανότητα ίση με $|c_2|^2$ και το $|11\rangle$ με πιθανότητα ίση με $|c_3|^2$. Αφού αυτά είναι τα μόνα δυνατά αποτελέσματα, το άθροισμα των τεσσάρων προηγούμενων πιθανοτήτων πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα:

$$|q_R\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle, \qquad |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1 \tag{2.18}$$

Το διάνυσμα κατάστασης αυτού του κβαντικού καταχωρητή υπάρχει σε έναν χώρο Hilbert τεσσάρων διαστάσεων και το μήκος του είναι ίσο με τη μονάδα.

Σε έναν κλασικό καταχωρητή των δύο bits μπορούμε να αποθηκεύσουμε **ή** το δυαδικό αριθμό 00, **ή** τον 01, **ή** τον 10 **ή** τον 11. Όμως, σε έναν κβαντικό καταχωρητή των δύο qubits που βρίσκεται σε υπέρθεση βασικών καταστάσεων μπορούμε να αποθηκεύσουμε **και** το δυαδικό αριθμό 00 **και** τον 01 **και** τον 10 **και** τον 11, δηλαδή ο κβαντικός καταχωρητής των δύο qubits μπορεί να κρατήσει ταυτόχρονα τέσσερις αριθμούς (Nielsan & Chuang, 2000). Μπορούμε να γράψουμε τη (2.18) και με τον εξής τρόπο:

$$|q_R\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle = \sum_{i=0}^{3} c_i|i\rangle \tag{2.19}$$

όπου οι δυαδικοί αριθμοί που συμβολίζουν τις βασικές καταστάσεις αντικαταστάθηκαν με τους αντίστοιχους δεκαδικούς. Δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια αλλαγή συμβολισμού.

Η δυνατότητα να κρατηθούν ταυτόχρονα και οι τέσσερις βασικές καταστάσεις, δηλαδή τέσσερις αριθμοί, από ένα κβαντικό καταχωρητή αποτελεί τη βάση της κβαντικής παραλληλίας. Υποθέστε ότι έχουμε μία συνάρτηση *F(x)* με τη μεταβλητή *x* να παίρνει τις τιμές *0, 1, 2* και *3*. Για να γίνει με έναν κλασικό υπολογιστή παράλληλος υπολογισμός των τιμών της F(x), για x = 0, 1, 2, 3, χρειάζονται τέσσερις καταχωρητές των δύο bits και τέσσερις υπολογισμοί της τιμής της *F(x)*. Για να γίνει σειριακός υπολογισμός, ένας καταχωρητής των δύο bits φορτώνεται τέσσερις φορές με τους αριθμούς 0, 1, 2 και 3 και κάθε φορά εκτελείται υπολογισμός της τιμής της F(x). Αντίθετα, σε έναν κβαντικό υπολογιστή χρειάζεται μόνο ένας κβαντικός καταχωρητής των δύο qubits και ένας μόνο υπολογισμός της συνάρτησης που μας δίνει και τις τέσσερις τιμές:

$$F(|q_R\rangle) = c_0 F(|00\rangle) + c_1 F(|01\rangle) + c_2 F(|10\rangle) + c_3 F(|11\rangle) = \sum_{i=0}^{3} c_i F(|i\rangle) \tag{2.20}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δούμε και τον κβαντικό καταχωρητή που αποτελείται από τρία qubits τα $|q_2\rangle$, $|q_1\rangle$ και $|q_0\rangle$:

$$|q_2\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$|q_1\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$|q_0\rangle = e|0\rangle + f|1\rangle = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Η κάθε μία από τις βασικές καταστάσεις του κβαντικού καταχωρητή προκύπτει ως τανυστικό γινόμενο των βασικών καταστάσεων των qubits. Το τανυστικό γινόμενο τριών πινάκων με μία στήλη είναι:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \cdot e \\ c \cdot f \\ d \cdot e \\ d \cdot f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c \cdot e \\ a \cdot c \cdot f \\ a \cdot d \cdot e \\ a \cdot d \cdot f \\ b \cdot c \cdot e \\ b \cdot c \cdot f \\ b \cdot d \cdot e \\ b \cdot d \cdot f \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Θα υπολογίσουμε ως παράδειγμα τον πίνακα που αντιστοιχεί στη βασική κατάσταση $|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle = |101\rangle$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Όμοια υπολογίζονται και οι άλλοι πίνακες. Ας γράψουμε τώρα την κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή με πίνακες, όπως κάναμε και με τη (2.17):

$$\left|q_R\right\rangle = \left|q_2\right\rangle \otimes \left|q_1\right\rangle \otimes \left|q_0\right\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c\cdot e \\ c\cdot f \\ d\cdot e \\ d\cdot f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cdot c\cdot e \\ a\cdot c\cdot f \\ a\cdot d\cdot e \\ a\cdot d\cdot f \\ b\cdot c\cdot e \\ b\cdot c\cdot f \\ b\cdot d\cdot e \\ b\cdot d\cdot f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix}$$

$$= c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_0\left|000\right\rangle + c_1\left|001\right\rangle + \cdots + c_7\left|111\right\rangle \tag{2.24}$$

Στη (2.24) αντικαταστήσαμε τα $a \cdot c \cdot e$, $a \cdot c \cdot f, \ldots, b \cdot d \cdot f$ με τα $c_0, c_1, \ldots, c_7$ αντίστοιχα. Μπορούμε να γράψουμε τη (2.24) και με τον εξής τρόπο:

$$\left|q_R\right\rangle = c_0\left|000\right\rangle + c_1\left|001\right\rangle + c_2\left|010\right\rangle + c_3\left|011\right\rangle + c_4\left|100\right\rangle + c_5\left|101\right\rangle + c_6\left|110\right\rangle + c_7\left|111\right\rangle$$

$$= c_0\left|0\right\rangle + c_1\left|1\right\rangle + c_2\left|2\right\rangle + c_3\left|3\right\rangle + c_4\left|4\right\rangle + c_5\left|5\right\rangle + c_6\left|6\right\rangle + c_7\left|7\right\rangle = \sum_{i=0}^{7} c_i\left|i\right\rangle \tag{2.25}$$

Και εδώ το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι ίσο με τη μονάδα:

$$\left|c_0\right|^2 + \left|c_1\right|^2 + \left|c_2\right|^2 + \left|c_3\right|^2 + \left|c_4\right|^2 + \left|c_5\right|^2 + \left|c_6\right|^2 + \left|c_7\right|^2 = 1 \tag{2.26}$$

Το διάνυσμα κατάστασης του κβαντικού καταχωρητή που αποτελείται από τρία qubits υπάρχει σε έναν χώρο Hilbert οκτώ διαστάσεων και το μήκος του είναι ίσο με τη μονάδα. Ο κβαντικός αυτός καταχωρητής είναι ένα κβαντικό σύστημα με οκτώ βασικές καταστάσεις που είναι όλες ορθογώνιες μεταξύ τους. Όταν βρίσκεται σε υπέρθεση βασικών καταστάσεων, μπορεί να κρατήσει ταυτόχρονα οκτώ αριθμούς.

Γενικά, η κατάσταση ενός κβαντικού καταχωρητή που αποτελείται από *n* qubits δίνεται από:

$$\left|q_R\right\rangle = \left|q_{n-1}\right\rangle \otimes \cdots \otimes \left|q_1\right\rangle \otimes \left|q_0\right\rangle = \left|q_{n-1} \cdots q_1 q_0\right\rangle \tag{2.27}$$

Το διάνυσμα κατάστασής του υπάρχει σε ένα χώρο Hilbert με 2^n διαστάσεις και έχει 2^n βασικές καταστάσεις που είναι όλες ορθογώνιες μεταξύ τους. Αν θεωρήσουμε τη δεκαδική αναπαράσταση των καταστάσεων μπορούμε αυτό να το γράψουμε ως εξής:

$$\langle k \mid m \rangle = \delta_{km}, \qquad k, m \in \{0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1\} \tag{2.28}$$

Όταν ο καταχωρητής αυτός τεθεί σε υπέρθεση κρατά ταυτόχρονα *2*^{n} αριθμούς:

$$\begin{aligned} \left| q_R \right\rangle &= c_0 \left| 0\cdots000 \right\rangle + c_1 \left| 0\cdots001 \right\rangle + c_2 \left| 0\cdots010 \right\rangle + \cdots + c_{2^n-1} \left| 111\cdots1 \right\rangle \\ &= c_0 \left| 0 \right\rangle + c_1 \left| 1 \right\rangle + c_2 \left| 2 \right\rangle + \cdots + c_{2^n-1} \left| 2^n - 1 \right\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i \left| i \right\rangle \end{aligned} \tag{2.29}$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς από *0* έως 2^n*-1*.

Ένας κβαντικός καταχωρητής που αποτελείται από 2, 3, 4, … n qubits μπορεί να κρατήσει ταυτόχρονα 4, 8, 16, … 2^n αριθμούς.

Αν σε έναν κβαντικό καταχωρητή των *n* qubits που μπορεί να κρατήσει 2^n αριθμούς προστεθεί ένα ακόμη qubit, τότε ο κβαντικός καταχωρητής κρατά διπλάσιους αριθμούς, δηλαδή 2^{n+1} αριθμούς. Στην ιδιότητα αυτή των κβαντικών καταχωρητών βασίζεται η δυνατότητα των κβαντικών υπολογιστών να επεξεργάζονται ποσότητες δεδομένων τις οποίες είναι αδύνατον να επεξεργαστούν οι κλασικοί υπολογιστές, να ψάχνουν σε πολύ μεγάλες βάσεις δεδομένων και να αντιμετωπίζουν πολύπλοκα υπολογιστικά προβλήματα.

2.4 Μερική μέτρηση ενός κβαντικού καταχωρητή

Γνωρίζουμε ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός κβαντικού καταχωρητή θα είναι μία από τις βασικές του καταστάσεις. Τι γίνεται όμως αν αντί να μετρήσουμε όλα τα qubits ενός κβαντικού καταχωρητή μετρήσουμε κάποιο ή κάποια από αυτά; Αυτή η μέτρηση ονομάζεται μερική και θα δούμε πώς επηρεάζει την κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή. Θα περιγράψουμε την μερική μέτρηση σε έναν καταχωρητή των δύο qubits. Η έννοια της μερικής μέτρησης εύκολα επεκτείνεται και σε καταχωρητές με περισσότερα qubits.

Έστω ότι έχουμε έναν κβαντικό καταχωρητή των δύο qubits ο οποίος βρίσκεται στην παρακάτω υπέρθεση βασικών καταστάσεων:

$$\left| q_R \right\rangle = c_0 \left| 00 \right\rangle + c_1 \left| 01 \right\rangle + c_2 \left| 10 \right\rangle + c_3 \left| 11 \right\rangle \tag{2.30}$$

και μετράμε μόνο το δεύτερο (αριστερό) qubit. Η πιθανότητα να μετρήσουμε την κατάσταση $\left|1\right\rangle$ είναι:

$$P(1) = \left|c_2\right|^2 + \left|c_3\right|^2 \tag{2.31}$$

και η πιθανότητα να μετρήσουμε την κατάσταση $\left|0\right\rangle$ είναι:

$$P(0) = \left|c_0\right|^2 + \left|c_1\right|^2 \tag{2.32}$$

Θέλουμε να δούμε ποια θα είναι η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή μετά την μέτρηση αυτού του qubit. Θα δούμε και τις δύο περιπτώσεις. Αν μετρήσουμε και βρούμε την κατάσταση $\left|1\right\rangle$, τότε η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή μετά τη μερική μέτρηση θα είναι:

$$\left| q_R \right\rangle = a \left|10\right\rangle + b \left|11\right\rangle = \left|1\right\rangle \otimes \left(a \left|0\right\rangle + b \left|1\right\rangle \right) \tag{2.33}$$

Τα νέα πλάτη πιθανότητας *a* και *b* πρέπει να εξαρτώνται από τα πλάτη πιθανότητας της κατάστασης πριν την μέτρηση και επίσης, το άθροισμα των μέτρων τους πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Για να ικανοποιηθούν και οι δύο αυτές απαιτήσεις, τα νέα πλάτη πιθανότητας είναι:

$$\alpha = \frac{c_2}{\sqrt{|c_2|^2 + |c_3|^2}} \qquad b = \frac{c_3}{\sqrt{|c_2|^2 + |c_3|^2}} \tag{2.34}$$

Για το άθροισμα των μέτρων ισχύει:

$$|\alpha|^2 + |b|^2 = \frac{|c_2|^2}{|c_2|^2 + |c_3|^2} + \frac{|c_3|^2}{|c_2|^2 + |c_3|^2} = 1 \tag{2.35}$$

Δηλαδή η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή μετά τη μέτρηση του δεύτερου (αριστερού) qubit που έδωσε ως αποτέλεσμα $|1\rangle$ είναι:

$$|q_R\rangle = |1\rangle \otimes \left(\frac{c_2}{\sqrt{|c_2|^2 + |c_3|^2}} |0\rangle + \frac{c_3}{\sqrt{|c_2|^2 + |c_3|^2}} |1\rangle \right) = \frac{c_2}{\sqrt{|c_2|^2 + |c_3|^2}} |10\rangle + \frac{c_3}{\sqrt{|c_2|^2 + |c_3|^2}} |11\rangle \tag{2.36}$$

Όμοια, η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή μετά τη μέτρηση του δεύτερου (αριστερού) qubit που έδωσε ως αποτέλεσμα $|0\rangle$ είναι:

$$|q_R\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{c_0}{\sqrt{|c_0|^2 + |c_1|^2}} |0\rangle + \frac{c_1}{\sqrt{|c_0|^2 + |c_1|^2}} |1\rangle \right) = \frac{c_0}{\sqrt{|c_0|^2 + |c_1|^2}} |00\rangle + \frac{c_1}{\sqrt{|c_0|^2 + |c_1|^2}} |01\rangle \tag{2.37}$$

Παράδειγμα 2.2

Έστω ότι έχουμε έναν κβαντικό καταχωρητή των δύο qubits ο οποίος βρίσκεται στην παρακάτω υπέρθεση βασικών καταστάσεων:

$$|q_R\rangle = \frac{3}{\sqrt{30}} |00\rangle + \frac{4}{\sqrt{30}} |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{30}} |10\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}} |11\rangle$$

και μετράμε μόνο το δεύτερο (αριστερό) qubit. Αν η μέτρηση δώσει ως αποτέλεσμα το $|1\rangle$, η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή μετά την μέτρηση θα είναι:

$$|q_R\rangle = |1\rangle \otimes \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{30}}}{\sqrt{\frac{1}{30} + \frac{4}{30}}} |0\rangle + \frac{\frac{2}{\sqrt{30}}}{\sqrt{\frac{1}{30} + \frac{4}{30}}} |1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} |10\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} |11\rangle$$

Αν η μέτρηση δώσει ως αποτέλεσμα το $|0\rangle$, η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή μετά τη μέτρηση θα είναι:

$$\left| q_R \right\rangle = \left| 0 \right\rangle \otimes \left(\frac{\frac{3}{\sqrt{30}}}{\sqrt{\frac{9}{30}+\frac{16}{30}}} \left| 0 \right\rangle + \frac{\frac{4}{\sqrt{30}}}{\sqrt{\frac{9}{30}+\frac{16}{30}}} \left| 1 \right\rangle \right) = \frac{3}{5} \left| 00 \right\rangle + \frac{4}{5} \left| 11 \right\rangle \ \blacklozenge$$

2.5 Βασικά στοιχεία του χώρου Hilbert

Η κατάσταση κάθε κβαντικού συστήματος αντιπροσωπεύεται από ένα διάνυσμα στον χώρο Hilbert. Ο χώρος Hilbert είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή, είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος (complex vector space). Τα στοιχεία που αποτελούν τον χώρο αυτό είναι ένα σύνολο διανυσμάτων $\{ \left| a \right\rangle, \left| b \right\rangle, \left| c \right\rangle, \ldots \}$ τα οποία έχουν τις παρακάτω ιδιότητες (Riefel & Polak, 2014):

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\left| a \right\rangle$ και $\left| b \right\rangle$ υπάρχει ένα διάνυσμα $\left| c \right\rangle$ το οποίο ονομάζεται άθροισμα των $\left| a \right\rangle$ και $\left| b \right\rangle$:

$$\left| a \right\rangle + \left| b \right\rangle = \left| c \right\rangle \tag{2.38}$$

$$\left| a \right\rangle + \left| b \right\rangle = \left| b \right\rangle + \left| a \right\rangle \tag{2.39}$$

$$(\left| a \right\rangle + \left| b \right\rangle) + \left| c \right\rangle = \left| a \right\rangle + (\left| b \right\rangle + \left| c \right\rangle) \tag{2.40}$$

Υπάρχει το μηδενικό διάνυσμα $\left| 0 \right\rangle$ με ιδιότητα:

$$\left| a \right\rangle + \left| 0 \right\rangle = \left| a \right\rangle \tag{2.41}$$

Για κάθε διάνυσμα $\left| a \right\rangle$ του χώρου Hilbert υπάρχει το αντίστροφο $\left| -a \right\rangle$, και για τα δύο αυτά διανύσματα ισχύει:

$$\left| a \right\rangle + \left| -a \right\rangle = \left| 0 \right\rangle \tag{2.42}$$

Αν μ και ν είναι δύο τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mu (\left| a \right\rangle + \left| b \right\rangle) = \mu \left| a \right\rangle + \mu \left| b \right\rangle \tag{2.43}$$

$$(\mu + \nu) \left| a \right\rangle = \mu \left| a \right\rangle + \nu \left| a \right\rangle \tag{2.44}$$

$$\mu \ \nu \left| a \right\rangle = \mu \ (\nu \left| a \right\rangle) \tag{2.45}$$

$$1 \left| a \right\rangle = \left| a \right\rangle \tag{2.46}$$

Στο χώρο Hlibert ορίζεται εσωτερικό γινόμενο το οποίο συμβολίζεται ως εξής:

$$(\left| a \right\rangle , \left| b \right\rangle) = \left\langle a \middle| b \right\rangle \tag{2.47}$$

Το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων στον χώρο Hilbert είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Το εσωτερικό γινόμενο έχει τις εξής ιδιότητες:

$$(|a\rangle\ ,\ \lambda\,|b\rangle) = \lambda\,(|a\rangle\ ,\ |b\rangle),\ \text{όπου } \lambda \text{ είναι ένας τυχαίος μιγαδικός αριθμός} \tag{2.48}$$

$$(\lambda\,|a\rangle\ ,\ |b\rangle) = \lambda^{*}\,(|a\rangle\ ,\ |b\rangle) \tag{2.49}$$

$$(|a\rangle\ ,\ |b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle\ ,\ |b\rangle) + (|a\rangle\ ,\ |c\rangle) = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle \tag{2.50}$$

$$(|a\rangle + |b\rangle\ ,\ |c\rangle) = (|a\rangle\ ,\ |c\rangle) + (|b\rangle\ ,\ |c\rangle) = \langle a|c\rangle + \langle b|c\rangle \tag{2.51}$$

$$(|a\rangle\ ,\ |b\rangle) = (|b\rangle, |a\rangle)^{*} \quad \text{ή} \quad \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^{*} \tag{2.52}$$

Το μέτρο ενός διανύσματος $|a\rangle$ ορίζεται ως:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{|q_n\rangle\}$ στον χώρο Hilbert αποτελεί ένα ορθοκανονικό σύστημα αν:

$$\langle q_n|q_m\rangle = \delta_{nm} \tag{2.53}$$

Ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων στον χώρο Hilbert, $\{|q_n\rangle\}$, είναι πλήρες, όταν κάθε τυχαίο διάνυσμα του χώρου, $|\psi\rangle$, μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα των διανυσμάτων αυτών:

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |q_n\rangle \tag{2.54}$$

όπου α_n είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Γενικά, αν α_n και α_m είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$a_m = \langle q_m|\psi\rangle = \left\langle q_m \middle| \sum_n a_n |q_n\rangle \right\rangle = \sum_n a_n \langle q_m|q_n\rangle = \sum_n a_n\,\delta_{nm} = a_m \tag{2.55}$$

Επομένως η (2.54) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$|\psi\rangle = \sum_n |q_n\rangle\langle q_n|\psi\rangle \tag{2.56}$$

Ένα ορθοκανονικό σύστημα n διανυσμάτων $\{|q_n\rangle\}$, μπορεί να αποτελέσει τη βάση ενός χώρου Hilbert *n* διαστάσεων.

Για τους τελεστές στον χώρο Hilbert ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$\hat{A}\left(a|\psi\rangle + b|\phi\rangle \right) = a\hat{A}|\psi\rangle + b\hat{A}|\phi\rangle \quad (2.57)$$

$$\left(\hat{A} + \hat{B} \right)|\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle + \hat{B}|\psi\rangle \quad (2.58)$$

$$\left(\hat{A} \cdot \hat{B} \right)|\psi\rangle = \hat{A} \cdot \left(\hat{B}|\psi\rangle \right) \quad (2.59)$$

Γενικά ισχύει:

$$\hat{A} \cdot \hat{B} \neq \hat{B} \cdot \hat{A} \quad (2.60)$$

Υπάρχει ο τελεστής μονάδας $\hat{1}$ ο οποίος, όταν δρα σε ένα διάνυσμα το αφήνει αναλλοίωτο:

$$\hat{1}|\phi\rangle = |\phi\rangle \quad (2.61)$$

Υπάρχει ο μηδενικός τελεστής $\hat{0}$ για τον οποίο ισχύει:

$$\hat{0}|\phi\rangle = 0 \quad (2.62)$$

Αν στο διάνυσμα $|\psi\rangle$ δρα πρώτα ο τελεστής $\hat{A}$, μετά ο $\hat{B}$ και μετά ο $\hat{C}$, η σειρά αναγραφής των τελεστών είναι:

$$\hat{C}\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle \quad (2.63)$$

Αν η δράση ενός τελεστή $\hat{A}$ στο διάνυσμα $|\psi\rangle$ έχει ως αποτέλεσμα τον πολλαπλασιασμό του διανύσματος με έναν αριθμό c:

$$\hat{A}|\psi\rangle = c|\psi\rangle \quad (2.64)$$

τότε το διάνυσμα ονομάζεται ιδιοάνυσμα και ο αριθμός c ιδιοτιμή του τελεστή $\hat{A}$. Γενικά ο αριθμός c είναι μιγαδικός. Αν ο τελεστής $\hat{A}$ είναι Ερμιτιανός, τότε ο αριθμός c είναι πραγματικός.

Βιβλιογραφία

Brooks M. (Ed.), *Quantum computing and communications*, Sringer-Verlag, 1999.

D' Espagnat B., *Conceptual foundations of quantum mechanics*, Perseus Books, 1999.

Keyl M., Fundamentals of quantum information theory, *Physics Reports*, vol. 369, pp. 431-548, 2002.

Lewin D. I., Searching for the elusive qubit, *IEEE Computers*, July/August issue, pp. 4-7, 2001.

Lloyd S., Review of Quantum Computation, *Vistas in Astronomy*, vol. 37, pp. 291-295, 1993.

Nielsen M. A. & Chuang I. L., *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, 2000.

Rieffel E. G., & Polak W. H., *Quantum computing: a gentle introduction*, The MIT Press, 2014.

Williams C. P. & Clearwater S. H., *Ultimate zero and one. Computing at the quantum frontier*, Copernicus, Spinger-Verlag, 2000.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1

Δίνονται τα παρακάτω qubits. Μπορείτε να τα ξεχωρίσετε μετρώντας την κατάστασή τους;

$$|a\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$$

$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Άσκηση 2.2

Δίνονται τα παρακάτω qubits. Μπορείτε να τα ξεχωρίσετε μετρώντας την κατάστασή τους;

$$|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$$

$$|b\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - i\frac{1}{2}|1\rangle$$

Άσκηση 2.3

Δίνονται τα παρακάτω qubits. Μπορείτε να τα ξεχωρίσετε μετρώντας την κατάστασή τους;

$$|a\rangle = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}\right)|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$$

$$|b\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right)|1\rangle$$

Άσκηση 2.4

Να δείξετε ότι οι βασικές καταστάσεις ενός κβαντικού καταχωρητή που αποτελείται από δύο qubits είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Άσκηση 2.5

Ποια από τα παρακάτω διανύσματα είναι διανύσματα κατάστασης ενός κβαντικού καταχωρητή που αποτελείται από δύο qubits;

α. $|q_R\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$

β. $|q_R\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{3}{\sqrt{6}}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{\sqrt{2}}{4}|11\rangle$

γ. $|q_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$

Άσκηση 2.6

Να υπολογίσετε τους πίνακες που αντιστοιχούν στις βασικές καταστάσεις $|100\rangle$, $|001\rangle$ και $|111\rangle$.

Άσκηση 2.7

Να ελέγξετε αν τα παρακάτω ζεύγη καταστάσεων είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

α. $|100\rangle$, $|001\rangle$

β. $|001\rangle$, $|101\rangle$

Άσκηση 2.8

Να γράψετε την κατάσταση ενός κβαντικού καταχωρητή που αποτελείται από 4 qubits ως υπέρθεση όλων των βασικών του καταστάσεων, δηλαδή με τη μορφή της εξίσωσης (2.27).

Άσκηση 2.9

Έστω ότι έχουμε έναν κβαντικό καταχωρητή των δύο qubits ο οποίος βρίσκεται στην παρακάτω υπέρθεση βασικών καταστάσεων:

$$|q_R\rangle = \frac{3}{\sqrt{30}}|00\rangle + \frac{4}{\sqrt{30}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{30}}|10\rangle + \frac{2}{\sqrt{30}}|11\rangle$$

και μετράμε μόνο το πρώτο (δεξιό) qubit. Αν η μέτρηση δώσει ως αποτέλεσμα το $|1\rangle$, να βρείτε την κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή μετά τη μέτρηση.

Άσκηση 2.10

Έστω ότι έχουμε έναν κβαντικό καταχωρητή των δύο qubits ο οποίος βρίσκεται στην παρακάτω υπέρθεση βασικών καταστάσεων:

$$\left| q_R \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{54}} \left| 00 \right\rangle + \frac{2}{\sqrt{54}} \left| 01 \right\rangle + \frac{5}{\sqrt{54}} \left| 10 \right\rangle + \frac{4}{\sqrt{54}} \left| 11 \right\rangle$$

και μετράμε μόνο το δεύτερο (αριστερό) qubit. Αν η μέτρηση δώσει ως αποτέλεσμα το $\left|1\right\rangle$ να βρείτε την κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή μετά τη μέτρηση.