Μετοχές και στοχαστική μοντελοποίηση των τιμών τους

1. ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΟΧΩΝ

Α. Ν. Γιαννακόπουλος

Ο.Π.Α

Εαρινό Εξάμηνο 2020

1. Εισαγωγή
2. Τα βασικά για τις μετοχές
3. Το διωνυμικό μοντέλο για τις τιμές των μετοχών
4. Ιδιότητες του διωνυμικού μοντέλου
5. Βαθμονόμηση του διωνυμικού μοντέλου

Εισαγωγή

- Θα παρουσιάσουμε ένα βασικό στοχαστικό μοντέλο για την εξέλιξη των τιμών των μετοχών, το διωνυμικό μοντέλο.
- Το μοντέλο αυτό αποτελεί ένα απλό μοντέλο, το οποίο όμως χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην πράξη για την μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών.
- Επίσης αποτελεί την βάση για το μοντέλο Black-Scholes που αποτελεί το θεμελιώδες μοντέλο για την μελέτη των τιμών των μετοχών και των τιμών των παραγώγων προιόντων.

Τα βασικά για τις μετοχές

Μία άλλη βασική κατηγορία χρηματοοικονομικών τίτλων είναι οι μετοχές.

Οι μετοχές εν γένει αποτελούν αξιώσεις επί των μελλοντικών κερδών μιας επιχείρησης.

Ο λόγος που μία εταιρεία εκδίδει μετοχές είναι για να χρηματοδοτήσει τα επενδυτικά της σχέδια, εισπράττοντας απο τους επενδυτές το αναγκαίο ποσό που χρειάζεται σήμερα για τις επενδύσεις της και υποσχόμενη να τους αποδώσει στο μέλλον μέρος των κερδών της σε μερίσματα.

Οι μετοχές εν γένει δεν είναι προσωπικές και ανταλλάσονται στο χρηματιστήριο αξιών σε τιμές που θεωρούμε ότι καθορίζονται απο την προσφορά και την ζήτηση τους. Κατά συνέπεια, η τιμή των μετοχών αντικατοπτρίζει την 'ιδέα' που έχουν οι διαφορετικοί επενδυτές σχετικά με την πορεία και την βιωσιμότητα της κάθε εταιρείας.

Οι μετοχές είναι τίτλοι οι οποίοι γενικά θεωρούνται ότι εμπεριέχουν μεγαλύτερο κίνδυνο ως προς τις αποδόσεις τους σε σχέση με τα ομόλογα.

Σε αντίθεση με τα ομόλογα τα οποία εγγυόνται, αν υποθέσουμε μηδενική πιθανότητα αθέτησης, μία ονομαστικη αξία και τα κουπόνια τα οποία πληρώνουν στους κατόχους τους, οι μετοχές δίνουν μερίσματα τα οποία όμως δεν είναι προσυμφωνημένα και εξαρτώνται απο την κερδοφορία της συγκεκριμένης εταιρείας η οποία δεν είναι βέβαιη.

Αν λοιπόν κάποιος επενδυτής αποφασίσει να κρατήσει ένα ομόλογο και να μην το μεταπωλήσει έχει σε κάθε περίπτωση να λαμβάνει τις ονομαστικές πληρωμές του ομολόγου οι οποίες είναι δεδομένες.

Δεν μπορεί να πει κανείς το ίδιο για μια μετοχή.

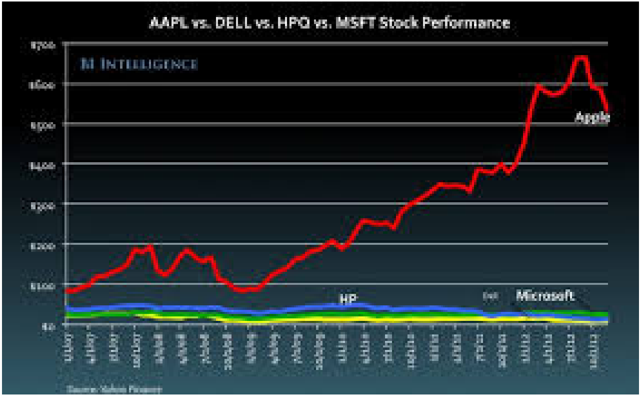
Επίσης, αν υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής αποφασίσει να μεταπωλήσει μια μετοχή ή ένα ομόλογο αυτό η τιμή που θα πάρει είναι η τρέχουσα αξία τους στην αντίστοιχη αγορά η οποία δεν είναι προκαθορισμένη αλλά εξαρτάται απο τις συνθήκες της οικονομίας.

Μία μόνο ματιά στις στήλες των οικονομικών εφημερίδων σε διαφορετικές ημέρες σχετικά με τις τιμές στις οποίες διαπραγματεύονται οι μετοχές στο χρηματιστήριο αξιών θα μας πείσει για αυτό.

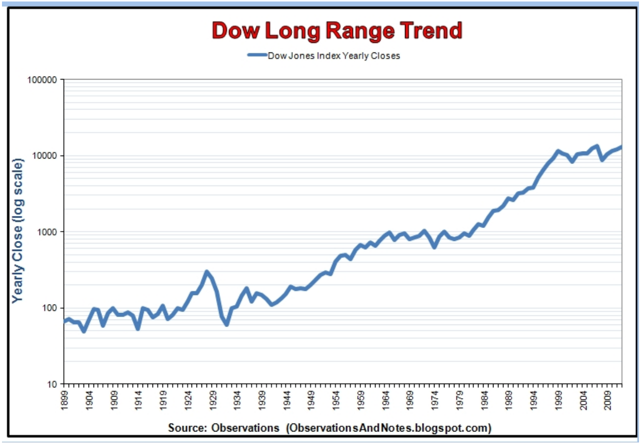
Οι τιμές των μετοχών παρουσιάζουν συνεχείς αυξομειώσεις, οι οποίες μας δείχνουν ξεκάθαρα τον κίνδυνο που εμπεριέχουν οι μετοχές.

Graph of stock price for Apple Computer from Mar. 25, 2004 to Mar. 24, 2005

Prices adjusted for 2 for 1 stock split on February 28, 2005


AAPL vs. DELL vs. HPQ vs. MSFT Stock Performance
Apple
HP
Microsoft


Nokia adjusted closing stock price
$30
20
10
0
2008
2009
2010
2011
2012
2013
Quartz | qz.com
Data: Yahoo Finance


Dow Long Range Trend
Dow Jones Index Yearly Closes
Yearly Close (log scale)
100000
10000
1000
100
10
1899
1904
1909
1914
1919
1924
1929
1934
1939
1944
1949
1954
1959
1964
1969
1974
1979
1984
1989
1994
1999
2004
2009
Source: Observations (ObservationsAndNotes.blogspot.com)

Οι μετοχές λοιπόν είναι ένα εντελώς διαφορετικό χρηματοοικονομικό εργαλείο σε σχέση με τα ομόλογα.

Δεν εγγυόνται ένα συγκεκριμένο ποσό σε δεδομένες χρονικές στιγμές και εν γένει περιέχουν περισσότερο κίνδυνο σε σχέση με τα ομόλογα.

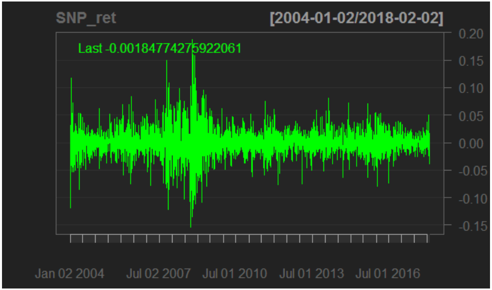
Βέβαια, οι αυξομειώσεις στις τιμές των μετοχών μπορεί να οδηγήσουν και σε υψηλότερες τιμές σε σχέση με αυτές που τις αγοράσαμε.

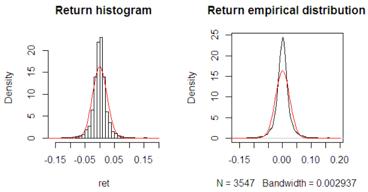
Συνεπώς, υπάρχει περίπτωση η αβεβαιότητα στις τιμές των μετοχών να οδηγήσει και σε υψηλές αποδόσεις, πολύ υψηλότερες σε σχέση με αυτές των ομολόγων, και φυσικά αυτός είναι ένας λόγος που θα μας ενδιέφερε να τοποθέτηθούμε σε μετοχές.

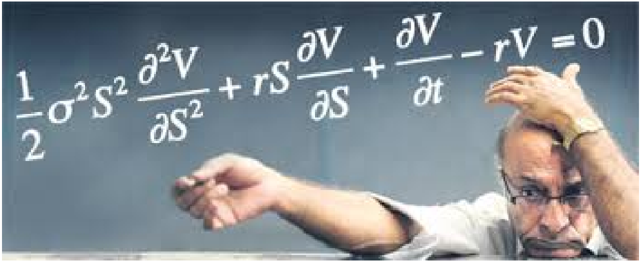
Επειδή όμως οι υψηλές τιμές μπορεί να οδηγήσουν τις επόμενες χρονικές στιγμές σε χαμηλές τιμές, θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί.

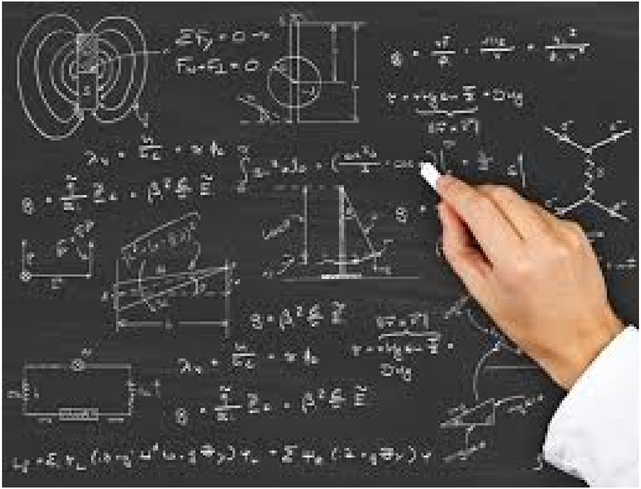
Αυτό που ειναι απαραίτητο, είναι να έχουμε ένα καλό μαθηματικό μόντέλο, πιθανοθεωρητικής φύσεως το οποίο να είναι ικανό να προβλέψει με σχετική ακρίβεια τις αυξομειώσεις των τιμών των μετοχών και να μας δώσει τις πιθανότητες να έχουμε τις διαφορετικές πιθανές αποδόσεις.


CI
SNP
[2004-01-02/2018-02-02]
Last 86.510002
140
120
100
80
60
40
Jan 02 2004
Jul 02 2007
Jul 01 2010
Jul 01 2013
Jul 01 2016


SNP_ret
[2004-01-02/2018-02-02]
Last -0.00184774275922061
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
Jan 02 2004
Jul 02 2007
Jul 01 2010
Jul 01 2013
Jul 01 2016


Return histogram
Density
0
5
10
15
20
-0.15
-0.05
0.05
0.15
ret
Return empirical distribution
Density
0
5
10
15
20
25
-0.15
0.00
0.10
0.20
N = 3547 Bandwidth = 0.002937

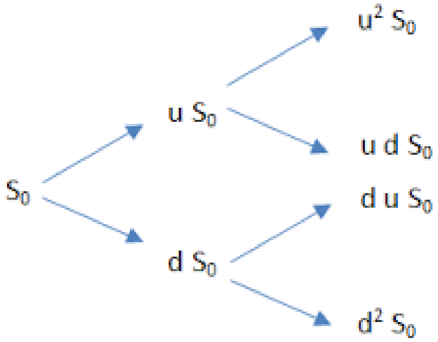

$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$



Το διωνυμικό μοντέλο για τις τιμές των μετοχών

Οι υποθέσεις του μοντέλου αυτού είναι οι ακόλουθες:

1. Οι διάφορες πράξεις στην αγορά στην οποία ανταλλάσσονται οι μετοχές αυτές γίνονται σε διακριτές χρονικές στιγμές $n = 0, 1, \cdots$.
2. Σε κάθε χρονική στιγμή n ακολουθούν την χρονική στιγμή $n+1$ δύο πιθανές καταστάσεις της οικονομίας, η ανοδική κατάσταση και η καθοδική κατάσταση, με πιθανότητα p και $1-p$ αντιστοίχως.
3. Στην ανοδική κατάσταση η τιμή της μετοχής γίνεται απο $S_n \to u\, S_n$
4. Στην καθοδική κατάσταση η τιμή της μετοχής $S_n \to d\, S_n$.
5. Το τι συμβαίνει στην κατάσταση της αγοράς μεταξύ των χρονικών στιγμών $n, n+1$ και $n+1, n+2$ είναι ανεξάρτητο για κάθε n.

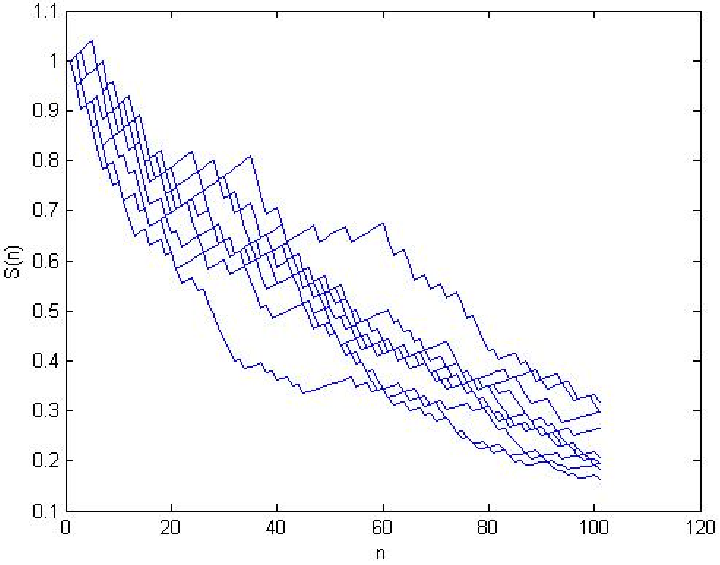

$u^2 S_0$
$u S_0$
$u d S_0$
S_0
$d u S_0$
$d S_0$
$d^2 S_0$

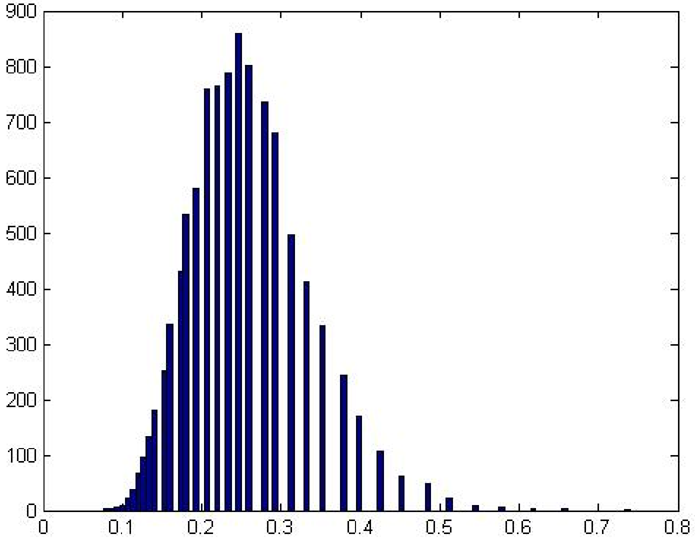
Το μοντέλο αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής

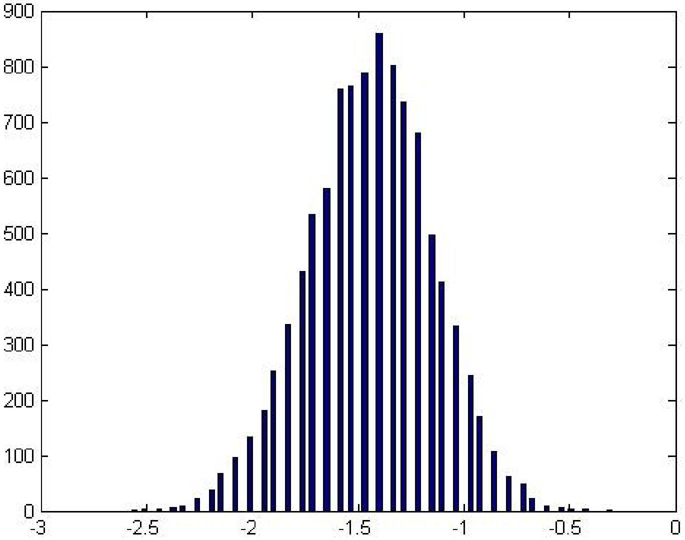
$$S_{n+1} = H_{n+1} \, S_n$$

όπου $\{H_n\}$ είναι μια ακολουθία απο ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει

$$P(H_n = u) = p, \quad P(H_n = d) = 1 - p, \quad n = 1, 2, \cdots$$


S(n)
n
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
20
40
60
80
100
120


900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8


900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0

Δομές πληροφορίας στο διωνυμικό μοντέλο

Ας κατασκευάσουμε ένα δέντρο το οποίο μπορεί να περιεχει όλα τα σενάρια σχετικά με την εξέλιξη της οικονομίας μέχρι και την χρονική περίοδο N.

Οι κορυφές αυτού του δέντρου θα μας δίνουν όλες τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η μετοχή μέχρι και την χρονική στιγμή n.

Ένα απλό επιχείρημα βασισμενο στην επαγωγή μας δείχνει ότι την χρονικη στιγμή N οι πιθανές τιμές της μετοχής θα είναι $m = 2^N - 1$ το πλήθος, και συγκεκριμένα οι

$$\{u^m S_0, u^{m-1}\, d\, S_0, \cdots, u\, d^{m-1}\, S_0, d^m S_0\}$$

Το σύνολο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ως τον χώρο ενδεχομένων για το πιθανοθεωρητικό μας μοντέλο.

Ανάλογα με την χρονική στιγμή $n < N$ που είμαστε έχουμε και διαφορετική πληροφόρηση σχετικα με το τι έχει συμβεί μέχρι τώρα στην αγορά, και συνεπώς και διαφορετική διαμέριση του δειγματικού αυτού χώρου.

Όσο πιο πολύ έχει προχωρήσει ο χρόνος τόσο πιο λεπτή διαμέριση του δειγματικού χώρου έχουμε και συνεπώς τόσο περισσότερη πληροφόρηση σχετικα με την μελλοντική εξέλιξη της αγοράς.

Η πληροφορία αυτή ποσοτικοποιείται με την μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n$ που παράγεται απο την αντίστοιχη διαμέριση ή πιο απλά

$$\mathcal{F}_{n_1} = \sigma(S_0, S_1, \cdots, S_n).$$

Η υπο συνθήκη μέση τιμή

Ας θυμηθούμε τον ορισμό της υπο συνθήκη μέσης τιμής ως προς ένα γεγονός.

Ορισμός

Έστω A ένα γεγονός σε ένα διακριτό χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και X μια τυχαία μεταβλητή. Η υπο συνθήκη μέση τιμή της X ως προς το γεγονός A ορίζεται ως

$$\mathbb{E}_P[X \mid A] = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega)\, P(\omega)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πως έχουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή Y στον χώρο πιθανοτήτων αυτό.

Η τυχαία αυτή μεταβλητή παίρνει τις τιμές $Y = Y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ και ορίζουμε ως $A_i = \{\omega, Y(\omega) = Y_i\} \subset \Omega$ αυτά τα γεγονότα για τα οποία η τυχαία μεταβλητή Y παίρνει την τιμή Y_i.

Ορισμός

Η υπο συνθήκη μέση τιμή της X δεδομένης της Y είναι η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}_P[X \mid Y]$ η οποία ορίζεται ως

$$\mathbb{E}_P[X \mid Y](\omega) = \mathbb{E}_P[X \mid A_i] \ \textit{αν} \ \omega \in A_i$$

Η τυχαία αυτή μεταβλητή έχει την ιδιότητα

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X \mid Y]] = \mathbb{E}_P[X]$$

Ερμηνεία της υπο συνθήκη μέσης τιμής ως εκτιμήτρια

Επίσης η τιμή της τυχαίας μεταβλητή $\mathbb{E}_P[X \mid Y]$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη, με την έννοια της ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, της τυχαίας μεταβλητής X, δεδομένης της τιμής που έχει πάρει η τυχαία μεταβλητή Y.

Παρατηρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}_P[X \mid Y]$ απο τον ορισμό της δεν εξαρτάται απο τις τιμές που παίρνει η Y αυτές καθαυτές αλλά περισσότερο απο τα γεγονότα A_i τα οποία και καθορίζουν τις τιμές της.

Για παράδειγμα αν πάρουμε την τυχαία μεταβλητή Y

$$Y(\omega) = Y_i \ \text{ αν } \ \omega \in A_i, \ \ i = 1, \cdots, n$$

και Z

$$Z(\omega) = Z_i \ \text{ αν } \ \omega \in A_i, \ \ i = 1, \cdots, n$$

όπου τα A_i είναι τα ίδια και στις δύο περιπτώσεις και τέτοια ώστε $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ αλλά εν γένει $Y_i \neq Z_i$ τότε

$$\mathbb{E}_P[X \mid Y] = \mathbb{E}_P[X \mid Z]$$

Κατά συνέπεια η υπο συνθήκη μέση τιμή εξαρτάται μόνο απο την δομή των γεγονότων $\{A_i\}$ τα οποία είναι απαραίτητα για να καθορίσουν τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή και όχι απο την ίδια την τιμή της τυχαίας μεταβλητής, δηλαδη απο την $\sigma(Y) = \sigma(Z)$!

Η παραπάνω συζήτηση μας οδηγεί στο να ορίσουμε τελικά την έννοια της υπο συνθήκη μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής X ως προς ένα τέτοιο σύνολο γεγονότων, μια σ -άλγεβρα.

Ορισμός

Έστω $\sigma(A)$ μια σ-άλγεβρα που περιεχει τα γεγονότα $A = (A_1, \cdots, A_n)$. Η υπο συνθήκη μέση τιμή της X ως προς την $\sigma(A)$, ειναι μια τυχαία μεταβλητή $Z = \mathbb{E}[X \mid \sigma(A)]$ τέτοια ώστε

1. *Να μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως τις τιμές που παίρνει η Z γνωρίζοντας μόνο τα γεγονότα στο A (δηλαδή η Z είναι $\sigma(A)$-μετρήσιμη.*
2. *Για κάθε $B \in \sigma(A)$ να ισχύει*

$$\sum_{\omega \in B} Z\, P(\omega) = \sum_{\omega \in B} X\, P(\omega)$$

Η υπο συνθήκη μέση τιμή έχει τις εξής πολύ χρήσιμες ιδιότητες:

- Αν $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_N$ τότε $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_M] \mid \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_M]$.
- Αν $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_N$ τότε $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_N] \mid \mathcal{F}_M] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_M]$.
- Αν η τυχαία μεταβλητή X καθορίζεται πλήρως απο τα γεγονότα που περιλαμβάνονται στην $\mathcal{F}$, δηλαδή η X είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}$ τότε $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$.
- Αν η X είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}$ τότε $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$
- Η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

$$\min_{Y \in m(\sigma(A))} \mathbb{E}[(X - Y)^2],$$

είναι η $Z = \mathbb{E}[X \mid \sigma(A)]$, δηλαδή η Z είναι η καλύτερη εκτιμήτρια της $X \notin m(\sigma(A))$ (που θέλει περισσότερη πληροφορία απο αυτή που βρίσκεται στην $\sigma(A)$ για να εκτιμηθεί πλήρως) βάσει της (ελλιπούς) πληροφορίας που περιέχεται στην $\sigma(A)$.

Ιδιότητα *Markov*

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος θέλει να κάνει την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη σχετικά με την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $n+1$ έχοντας παρατηρήσει τις κινήσεις της αγοράς μέχρι και την χρονική στιγμή n.

Η ιστορία της αγοράς μέχρι και την χρονική στιγμή n θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}_n$ και στην ουσία θα περιέχει την πληροφορία που χρειάζεται κανείς για να περιγράψει τις τυχαίες μεταβλητές $\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$.

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n \, H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S_n \, \mathbb{E}[H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \\ S_n \, \mathbb{E}[H_{n+1}] = S_n \, (p \, u + (1-p) \, d)$$

Παρατηρούμε ότι η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή $n+1$ δεδομένης της ιστορίας της διαδικασίας μέχρι και την χρονική στιγμή n, είναι μια τυχαία μεταβλητή που για να την περιγράψουμε πλήρως αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή n, S_n, και όχι όλη την ιστορία της αγοράς άπο την χρονική στιγμή 0 ως και την χρονική στιγμή n.

Λέμε ότι η S_n έχει την ιδιότητα Markov .

Εξέλιξη των αναμενόμενων τιμών της μετοχής

Απο τον νόμο της ολικής πιθανότητας έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[S_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]] = (p\,u + (1-p)\,d)\,\mathbb{E}[S_n]$$

Ένα επιχείρημα επαγωγής μας δείχνει πολύ εύκολα ότι

$$\mathbb{E}[S_n] = (p\,u + (1-p)\,d)^n\,S_0$$

Αν ορίσουμε ως $S_n^* = (1+r)^{-n} S_n$, την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής μπορεί κανείς να δείξει με παρόμοια επιχειρήματα ότι

$$\mathbb{E}[S_n^*] = \left(\frac{p\,u + (1-p)\,d}{1+r}\right)^n S_0$$

- Αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} > 1$ τότε κατά μέση τιμή θα αυξάνει η τιμή της μετοχής στον χρόνο.
- Αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} < 1$ τότε κατά μέση τιμή θα ελαττώνεται η τιμή της μετοχής στον χρόνο.

Διαδικασίες *martingale* και η εξέλιξη της τιμής των μετοχών

Παρατηρούμε ότι

- αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} > 1$ τότε

$$\mathbb{E}[S^*_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r}\, S^*_n \geq S^*_n$$

- αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} < 1$ τότε

$$\mathbb{E}[S^*_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r}\, S^*_n \leq S^*_n$$

- αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} = 1$ τότε

$$\mathbb{E}[S^*_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r}\, S^*_n = S^*_n$$

Στοχαστικές διαδικασίες με τις ιδιότητες αυτές έχουν μελετηθεί ανεξάρτητα απο τα χρηματοοικονομικά και ονομάζονται διαδικασίες supermartingale , submartingale και martingale αντίστοιχα.

Ορισμός

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$ *και μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας* $\{\mathcal{F}_n\}$ *(δηλαδή μια ακολουθία τέτοια ώστε* $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$*) η οποία ονομάζεται διήθηση.*
Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$ *ονομάζεται martingale αν ικανοποιεί τις παρακάτω 3 συνθήκες*

1. *Η τυχαία μεταβλητή* X_n *είναι μετρήσιμη ως προς την* $\mathcal{F}_n$ *για κάθε* n.
2. *Για την τυχαία μεταβλητή* X_n *ισχύει ότι* $\mathbb{E}[\,|X_n|] < \infty$.
3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$.

Η συνθήκη (1) μας λέει ότι για να απαντήσουμε την ερώτηση τι τιμές μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή X_n αρκεί να έχουμε πρόσβαση στην πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_n$, δηλαδή η πληροφορία για την αγορά μέχρι την χρονική στιγμή n.

Η συνθήκη (3) μας λέει ότι η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την τιμή της X_{n+1} δεδομένης της πληροφορίας μέχρι και την χρονική στιγμή n είναι η τιμή της διαδικασία την χρονική στιγμή n, X_n.

Ορισμός

Εστω μια στοχαστικη διαδικασία $\{X_n\}$ και μια διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}$. Η $\{X_n\}$ ονομάζεται submartingale αν

1. *Η τυχαία μεταβλητή X_n είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_n$ για κάθε n.*
2. *Για την τυχαία μεταβλητή X_n ισχύει ότι $\mathbb{E}[\,|X_n|] < \infty$.*
3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq X_n$.

Ορισμός

Εστω μια στοχαστικη διαδικασία $\{X_n\}$ και μια διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}$. Η $\{X_n\}$ ονομάζεται supermartingale αν

1. *Η τυχαία μεταβλητή X_n είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_n$ για κάθε n.*
2. *Για την τυχαία μεταβλητή X_n ισχύει ότι $\mathbb{E}[\,|X_n|] < \infty$.*
3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n$.

Πρόταση

Αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r}=1$ *η προεξοφλημένη διαδικασία των τιμών της μετοχής είναι martingale.*

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

Πρόταση

(1) Αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} \geq 1$ *η προεξοφλημένη διαδικασία των τιμών της μετοχής είναι submartingale.*
(1) Αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} \leq 1$ *η προεξοφλημένη διαδικασία των τιμών της μετοχής είναι supermartingale.*

Το ισοδύναμο μέτρο *martingale*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποιος που θέλει να δραστηριοποιηθεί στην αγορά των μετοχών, γνωρίζει μεν ότι σε κάθε χρονική περίοδο η τιμή της μετοχής μπορεί είτε να είναι ανοδική με απόδοση u είτε καθοδική με απόδοση d αλλά δεν γνωρίζει την πιθανότητα με την οποία αυτό μπορεί να συμβεί.

Ας υποθέσουμε ότι q είναι η πιθανότητα την οποία θα δώσει στην ανοδική κατάσταση και $1-q$ αντίστοιχα η πιθανότητα της καθοδικής κατάστασης.

Αν η q επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\frac{q\,u+(1-q)\,d}{1+r}=1 \implies q=\frac{1+r-d}{u-d}$$

τότε η προεξόφλημένη διαδικασία τιμών S_n^* γίνεται μια διαδικασία martingale.

Θέτωντας την πιθανότητα q στην ανοδική κατάσταση της οικονομίας και την πιθανότητα $1-q$ στην καθοδική κατάσταση της οικονομίας μπορεί λοιπόν κανείς να πει ότι η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $n+1$ λαμβάνοντας υπόψιν την ιστορία της αγοράς μέχρι και την χρονική στιγμή n, δηλαδή την $\mathcal{F}_n$ είναι η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή n,

$$\mathbb{E}_Q[S^*_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S^*_n$$

όπου με $\mathbb{E}_Q[X]$ συμβολίζουμε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X αν θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα των δύο καταστάσεων του κόσμου είναι q και $1-q$ αντίστοιχα.

Με μαθηματικούς όρους, έχουμε **αλλάξει το μέτρο πιθανότητας κάτω απο το οποίο παρατηρούμε την οικονομία**.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αλλαγή μέτρου, και όπως θα δούμε στην συνέχεια των διαλέξεων αυτών παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην τιμολόγηση συγκυριακών συμβολαίων.

Αν όλοι οι επενδυτές έχουν αυτή την άποψη για την οικονομία, δηλαδή ότι η πιθανότητα ανοδικής πορείας της μετοχής είναι q και η πιθανότητα καθοδικής πορείας της μετοχής είναι $1-q$ τότε με απλή άλγεβρα παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}_Q[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = (1+r)\, S_n$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{S_{n+1}}{S_n} \mid \mathcal{F}_n\right] = (1+r)$$

Η αναμενόμενη τιμή της απόδοσης της μετοχής κάτω απο το μέτρο Q είναι ίση με την απόδοση του βέβαιου τίτλου.

Το μέτρο Q δίνει την πιθανότητα q στην κατάσταση 1, ανοδική πορεία της οικονομίας, και την πιθανότητα $1-q$ στην κατάσταση 2, καθοδική πορεία της οικονομίας.

Αν κατάνοήσουμε το νέο μέτρο σαν μια εναλλακτική θεώρηση του κόσμου, δηλαδή σαν ένα εναλλακτικό σενάριο για την οικονομία, θα πρέπει το εναλλακτικό σενάριο αυτό, Q, να είναι **συμβατό** με το αρχικό σενάριο P.

Η έννοια της συμβατότητας είναι να είμαστε σίγουροι ότι το νεό σενάριο Q, συνεχίζει να δίνει 2 πιθανές καταστάσεις για την οικονομία, δηλάδή ότι $q > 0$ και $1 - q > 0$.

Αυτό είναι ισοδύναμο με την συνθήκη

$$0 < q < 1$$

και απο τον ορισμό του q αυτό μας δίνει ότι

$$d < 1 + r < u$$

Η συνθήκη αυτή είναι πολύ λογική.

Αν δεν συνέβαινε π.χ. αν είχαμε ότι $d < u < 1 + r$ τότε η μετοχή δεν θα είχε λογο ύπαρξης ως τίτλος.

Η συνθήκη $q > 0$, $1 - q > 0$ αν (και μόνο αν) $p > 0$, $1 - p > 0$ μπορεί να ερμηνευθεί ως το ότι τα δύο μέτρα Q και P δίνουν θετική (αλλά όχι την ίδια) πιθανοτητα στα ίδια γεγονότα.

Λέμε ότι τα μέτρα P και Q είναι **ισοδύναμα**.

Ορισμός

Το μέτρο Q, που ορίστηκε παραπάνω, ονομάζεται **ισοδύναμο μέτρο martingale**.

Arbitrage και ισοδύναμο μέτρο *martingale*

Ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη

$$d < 1 + r < u$$

δεν ισχύει.

Τότε είναι δυνατόν κάποιος επενδυτής χρησιμοποιώντας τον βέβαιο τίτλο και την μετοχή να κατασκευάσει μια επενδυτική στρατηγική η οποία παρέχει βέβαιο κέρδος.

Μια τέτοια στρατηγική ονομάζεται arbitrage.

Ας υποθέσουμε π.χ. ότι $1 + r < d < u$.

Στην περίπτωση αυτή οι αποδόσεις της μετοχής είναι και στις δύο πιθανές καταστάσεις του κόσμου μεγαλύτερες απο την απόδοση του βέβαιου τίτλου.

Μπορεί λοιπόν κανείς να δανειστεί απο την τράπεζα ένα ποσό, π.χ. 1 ευρώ, και με το ποσό αυτό να αγοράσει $1/S_0$ κομμάτια της μετοχής.

Το ποσό που θα χρωστάει στην τράπεζα την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι το ποσό $(1 + r)$.

Αν η οικονομία πάει καλά (κατάσταση 1) η μετοχή του θα έχει αξία $u > 1 + r$.

Συνεπώς, επιστρέφει το δάνειο των $1 + r$ στην τράπεζα και του μένει $u - (1 + r) > 0$ καθαρό κέρδος.

Αν η οικονομία δεν πάει καλά (κατάσταση 2) η μετοχή του θα έχει αξία $d > 1 + r$.

Επιστρέφει λοιπόν το δάνειο των $1 + r$ στην τράπεζα και του μένει $d - (1 + r) > 0$ καθαρό κέρδος.

Σε κάθε πιθανή περίπτωση λοιπόν ο επενδυτής αυτός μπορεί να κατασκευάσει μια στρατηγική που θα του επιφέρει καθαρό κέρδος, δηλαδή μπορεί να κατασκευάσει ένα arbitrage.

Με όμοιο τρόπο μπορεί να εργαστεί κανείς στην περίπτωση $d < u < 1 + r$.

Η μόνη περίπτωση να μην μπορεί να κατασκευάσει κάποιος μια στρατηγική arbitrage στο διωνυμικό μοντέλο είναι το να ισχύει $d < 1 + r < u$ δηλαδή το να υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale.

Πρόταση

*Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage στο διωνυμικό μοντέλο **αν και μόνο αν** υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale.*

Το όριο του διωνυμικού μοντέλου για μεγάλο αριθμό περιόδων

Τη χρονική στιγμή n η πιθανές τιμές της μετοχής θα είναι οι $\{S_0\,u^n, S_0 d\, u^{n-1}, \cdots, S_0 d^j\, u^{n-j}, \cdots, d^n\}$.

Η πιθανότητα η τιμή της μετοχής την χρονικη στιγμή n να είναι $S_0\,u^j\, d^{n-j}$ είναι

$$P(S_n = S_0\, u^j\, d^{n-j}) = \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j\,(1-p)^{n-j}$$

δηλαδή η S_n ακολουθεί την διωνυμική κατανομή.

Είναι γνωστό οτι σε συγκεκριμένα όρια η διωνυμική κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί απο την κανονική κατανομή.

Το κεντρικό οριακό θεώρημα

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι $X_1, X_2, \cdots$ *ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε* $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ *και* $\mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2 < \infty$.

Τότε για αρκετά μεγάλα n *η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής* $T = X_1 + \sum X_n$ *μπορεί να προσεγγιστεί απο την κανονική κατανομή με μέσο* $\mu\, n$ *και διασπορά* $\sigma^2 n$.

Ας υποθέσουμε ότι $n \to \infty$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $n\,\delta t = T$.

Σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο έχουμε ότι $S_{n+1} = H_{n+1}\,S_n$.

Παίρνουμε λογαρίθμους και καταλήγουμε στο ότι

$$\ln(S_{n+1}) - \ln(S_n) = \ln(H_{n+1})$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $X_n := \ln(H_{n+1})$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες.

Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[X_n] = p\,\ln(u) + (1-p)\,\ln(d) := \mu < \infty$$

και

$$\mathbb{E}[(X_n - \mu)^2] = p\,(\ln(u)^2 - \ln(u)) + (1-p)\,(\ln(d)^2 - \ln(d)) := \sigma^2 < \infty$$

Παρατηρούμε ότι ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή n μπορεί να γραφεί ως το τηλεσκοπικό άθροισμα

$$\begin{aligned} \ln(S_n) &= (\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})) + \cdots + (\ln(S_1) - \ln(S_0)) \\ &= \ln(H_n) + \cdots + \ln(H_1) = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{aligned}$$

Συνεπώς απο το κεντρικό οριακό θεώρημα, για αρκετά μεγάλο n ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής, σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο θα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu\, n$ και διασπορά $\sigma^2\, n$.

Κατά συνέπεια η ασυμπτωτική κατανομή της τιμής της μετοχής θα είναι η λογαριθμικοκανονική κατανομή.

Βαθμονόμηση του διωνυμικού μοντέλου

Στην πράξη παρατηρούμε χρονοσειρές απο τις αποδόσεις των μετοχών.

Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε ένα χρονικό ορίζοντα $[0, T]$, να χωρίσουμε τον χρονικό αυτό ορίζοντα σε N διακριτές χρονικές στιγμές $t_i = i/N$, $i = 0, 1, , N$ οι οποίες απέχουν μεταξύ τους κατά $\delta t = T/N$.

Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη χρονική κλίμακα η χρονική στιγμή n θα αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή $\delta t\, n \in [0, T]$.

Απο ιστορικά δεδομένα της αγοράς μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες

$$\begin{aligned} \mu &:= \frac{1}{T}\,\mathbb{E}_P\left[\ln\frac{S(T)}{S(0)}\right], \\ \sigma^2 &:= \frac{1}{T}\,Var_P\left[\ln\frac{S(T)}{S(0)}\right] \end{aligned}$$

όπου με $S(T)$ συμβολίζουμε την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή T ή με την παραμετροποίηση του χρόνου στην S_N.

Αν το διωνυμικό μοντέλο αποτελεί πιστή αναπαράσταση της πραγματικότητας οι ποσότητες μ και σ^2 θα έπρεπε να παίρναν την μορφή

$$\mathbb{E}_P\left[\ln\frac{S(T)}{S(0)}\right] = N\,p\,\ln u + N\,(1-p)\,\ln d$$

$$Var_P\left[\ln\frac{S(T)}{S(0)}\right] = N\,p\,(1-p)\,(\ln u - \ln d)^2$$

Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε τα u, d, p κατά τρόπο ώστε οι δύο αυτές διαφορετικές εκφράσεις να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Αυτό μας δίνει ένα σύστημα εξισώσεων με 3 αγνώστους οπότε εν γένει η λύση δεν αναμένεται να είναι μοναδική.

Δηλαδή, μπορούμε να προσεγγίσουμε την εξέλιξη μιας μετοχής με παραπάνω του ενός διωνυμικά μοντέλα.

Για να επιλεξουμε ένα απο αυτά θέτουμε την εξτρα συνθήκη

$$u\,d = 1$$

σύμφωνα με την οποία αν μια ανοδική κίνηση ακολουθηθεί απο μια καθοδική κίνηση η τιμή της μετοχής θα παραμείνει αμετάβλητη.

Με την έξτρα αυτή συνθήκη οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή

$$
\begin{aligned}
(2p-1)\ln u &= \frac{T}{N}\mu, \\
4\,p\,(1-p)(\ln u)^2 &= \frac{T}{N}\,\sigma^2
\end{aligned}
$$

οι οποίες δίνουν ότι

$$
\begin{aligned}
\ln u &= \sqrt{\frac{T}{N}\,\sigma^2 + \frac{T^2}{N^2}\,\mu^2} \\
\ln d &= -\sqrt{\frac{T}{N}\,\sigma^2 + \frac{T^2}{N^2}\,\mu^2}
\end{aligned}
$$

Μετά μπορούμε να υπολογίσουμε και το p ως

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{N}{T} + \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-1/2}$$

Για N αρκετά μεγάλο μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους $1/N^2$ σε σχέση με τους όρους $1/N$, και έτσι να πάρουμε τις προσεγγίσεις

$$u \simeq \exp(\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma),$$
$$d \simeq \exp(-\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma),$$

και

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}}$$

Το όριο του διωνυμικού μοντέλου για μεγάλο αριθμό περιόδων II

Με την παραμετροποίηση αυτή για το διωνυμικό μοντέλο μπορούμε να ξαναδούμε το όριο του διωνυμικού μοντέλου για μεγάλο αριθμό περιόδων.

Θεωρούμε λοιπόν ότι ο χρόνος μετριέται σε ακέραια πολλαπλάσια της χρονικής κλίμακας δt, δηλαδή ότι η χρονική στιγμή $t = \delta\, n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και οποιοδήποτε $t \in [0, T]$.

Θα θεωρήσουμε επίσης ότι

$$
\begin{aligned}
u &= exp(\sigma \sqrt{\delta t}), \\
d &= exp(-\sigma \sqrt{\delta t}), \\
p &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\delta t}\right)
\end{aligned}
$$

σύμφωνα με την παραμετροποίηση του μοντέλου που προτείναμε.

Ορίζουμε τώρα τις τυχαίες μεταβλητές $X_i = \mathbf{1}_{\{H_i=u\}}$ ως εξής

$$X_i = \mathbf{1}_{\{H_i=u\}} = \begin{cases} 1 & H_i = u, \\ 0 & H_i = d \end{cases}$$

Η τυχαία μεταβλητή $\sum_i^n X_i$ μας δίνει τον συνολικό αριθμό των ανοδικών κινήσεων της οικονομίας εως και την χρονική στιγμή n (που σε πραγματικό χρόνο αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή $t = n\,\delta t$).

Αν πάρουμε τώρα την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $U_n := \sum_i^n X_i$ για $n = 1, 2, \cdots$ αυτή είναι μια στοχαστική διαδικασία η οποία μας δίνει (μετράει) τον συνολικό αριθμό ανοδικών κινήσεων της οικονομίας σε n επαναλήψεις του μοντέλου.

Είναι προφανές απο τον ορισμό της διαδικασίας αυτής ότι $0 \leq U_n \leq n$ για κάθε n.

Επίσης η στοχαστική διαδικασία $D(n) = n - U(n)$ μετράει τον συνολικό αριθμό καθοδικών κινήσεων της οικονομίας σε n επαναλήψεις του μοντέλου.

Απο την κατασκευή του διωνυμικού μοντέλου η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = n\delta t$ θα είναι ίση προς

$$S(n\delta t) = S_n = S(0)\, u^{U_n}\, d^{D_n}$$

Αυτό μπορεί να γραφεί με καλύτερο τρόπο ως

$$S(n\delta t) = S(0)\, d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{U_n}$$

και αν θυμηθούμε τον ορισμό του $\delta t = t/n$ θέτουμε όπου $n = t/\delta t$ και παίρνοντας λογαρίθμους

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \frac{t}{\delta t}\ln(d) + \ln\left(\frac{u}{d}\right)\sum_{i=1}^{t/\delta t} X_i$$

Αν θυμηθούμε την παραμετροποίηση που έχουμε υιοθετήσει για τα u, d, παίρνει την μορφή

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = -\frac{\sigma\, t}{\sqrt{\delta t}} + 2\sigma\sqrt{\delta t}\sum_{i=1}^{t/\delta t} X_i$$

Μας ενδιαφέρει το συνεχές όριο του μοντέλου δηλαδή το όριο καθώς το $\delta t \to 0$.

Επειδή $n = t/\delta t$ εφόσον το t είναι φραγμένο, το όριο αυτό θα αντιστοιχεί στο όριο $n \to \infty$ οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα για την μελέτη της συμπεριφοράς της οικογένειας τυχαίων μεταβλητών (στοχαστικής διαδικασίας) $Y(t) := -\frac{\sigma t}{\sqrt{\Delta}} + \sum_{i=1}^{t/\delta t} X_i$ στο όριο αυτό.

Παρατηρούμε ότι η μεταβλητή αυτή αποτελείται απο 2 όρους, και ο πρώτος και ο δεύτερος τείνουν στο άπειρο στο όριο $\delta t \to 0$ $(n \to \infty)$ αλλά όπως θα δούμε λόγω της κατάλληλης παραμετροποίησης του μοντέλου ο ρυθμός με τον οποίο οι δύο αυτοί όροι τείνουν στο άπειρο είναι τέτοιος ώστε τελικά οι πρώτες 2 ροπές της μεταβλητής αυτής να είναι πεπερασμένες.

Πράγματι

$$\mathbb{E}P[Y(t)] = \frac{-\sigma t}{\sqrt{\delta t}} + 2\sigma\sqrt{\delta t}\sum_{i=1}^{t\delta t}\mathbb{E}[X_i]$$
$$\frac{-\sigma t}{\sqrt{\delta t}} + 2\sigma\sqrt{\delta t}\,\frac{t}{\delta t}\,p = \mu\, t$$

και

$$\begin{aligned} Var_P[Y(t)] &= 4\sigma^2\,\delta t\sum_{i=1}^{t/\delta t} Var_P(X_i) \\ &= 4\,\sigma^2\,t\,p(1-p) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με την παραμετροποίηση αυτή οι δύο πρώτες ροπές είναι πεπερασμένες και μάλιστα ανάλογες της χρονικής περιόδου που έχει περάσει δηλαδή του t.

Αν θεωρήσουμε το δt πάρα πολύ μικρό τότε $p \simeq \frac{1}{2}$ συνεπώς $Var_P[Y(t)] \simeq \sigma^2\, t$.

Άρα στο όριο όπου $\delta t \to 0$ $(n \to \infty)$ και εφόσον $t = \delta t\, n$ πεπερασμένο το διωνυμικό μοντέλο μας δίνει

$$\mathbb{E}_P \left[\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) \right] = \mu\, t$$
$$Var_P \left(\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) \right) = \sigma^2 t$$

Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα μπορούμε να δούμε ότι στο όριο καθώς $\delta t \to 0$ η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Y(t)$ θα συγκλίνει σε κατανομή στην ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Z(t) \sim N(\mu t, \sigma^2\, t)$.