Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

Εισαγωγη στα ομόλογα

Α. Ν. Γιαννακόπουλος

Εαρινό Εξάμηνο 2020

Ο.Π.Α

Εισαγωγή

- Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με βασικές έννοιες απο την θεωρία των ομολογων
- Συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε τα βασικά τους χαρακτηριστικά
- Έννοιες όπως οι αποδόσεις τους και οι καμπύλες αποδοσεων
- Έννοιες που σχετίζονται με προθεσμιακά συμβόλαια και προθεσμιακές αποδόσεις
- Μοντέλα για τις αποδόσεις

Τα βασικά των ομολόγων

Ένα ομόλογο είναι ουσιαστικά ένα δάνειο το οποίο παίρνει κάποια εταιρεία ή κάποιο κράτος (εκδότης) από το κοινό.

Ο εκδοτης πουλάει στην αγορά ομολόγων τίτλους οι οποίοι υπόσχονται στον κάτοχο τους μία πληρωμή της ονομαστικής αξίας που αναγράφονται σε αυτούς την χρονική στιγμή της λήξης τους, καθώς και μία σειρά πληρωμών, περιοδικά πριν την λήξη, με την μορφή κουπονιών.

Το ομόλογο δεν είναι απαραίτητα προσωπικό, και ο κάτοχος του μπορεί να το μεταπωλήσει σε άλλους αν το επιθυμεί.

Ο εκδότης, σε αντάλλαγμα παίρνει σήμερα ένα ποσό. Αυτό το ποσό μπορεί να το χρησιμοποιήσει για την χρηματοδότηση των επενδυτικών του δραστηριοτήτων.

Τα ομόλογα δεν είναι απαραιτήτως προσωπικά, και μπορεί ο κάτοχος τους να τα μεταπωλήσει σε κάποιον άλλο αν δεν τα επιθυμεί.

Αυτό μπορεί να γίνει σε μία οργανωμένη αγορά, την αγορά ομολόγων.

Η τιμή των ομολόγων, θεωρητικά πάντα, καθορίζεται απο την προσφορά και την ζήτηση τους και συνεπώς μπορεί να έχει και διακυμάνσεις, ανάλογα με τις οικονομικές συνθήκες.

Με το ίδιο επιχείρημα, εφόσον η τιμή τους έχει διακυμάνσεις και εφόσον οι απολαβές απο αυτά είναι δεδομένες (τα προκαθορισμένα κουπόνια και η ονομαστική αξία) είναι λογικό και οι αποδόσεις τους να παρουσιάζουν διακυμάνσεις.

Συνεπώς, τα ομόλογα είναι τίτλοι που υπόκεινται σε κίνδυνο, αλλά επειδή οι απολαβές απο αυτά είναι προκαθορισμένες θεωρούμε ότι είναι τίτλοι οι οποίοι είναι πιο ασφαλείς

Αγορές ομολόγων και είδη ομολόγων

Ένα ομόλογο μπορεί να εκδοθεί είτε απο κράτη, είτε απο εταιρείες είτε απο χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς.

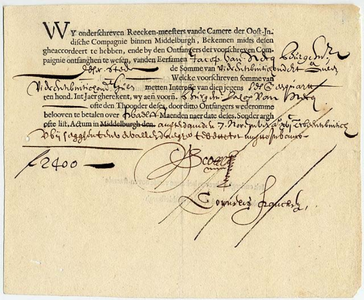
Είναι στην ουσία μια μορφή δανεισμού, κατά την οποία ο 'δανειστήσ' δηλαδη ο αγοραστής του ομολόγου πληρώνει σήμερα ένα ποσό (το ποσό της αγοράς του ομολόγου δηλαδή την τιμή του σήμερα) και θα λάβει απο τον εκδότη του ομολόγου (τον δανειζόμενο) ένα δεδομένο ποσό στην λήξη του

Τα βασικά χαρακτηριστικά του ομολόγου είναι τα ακόλουθα

- Το ποσό που πληρώνει στην λήξη - ονομαστική αξία του ομολόγου
- Ενδιάμεσες πληρωμές που μπορεί να κάνει με την μορφή κουπονιών (συνήθως % της ονομαστικής αξίας)
- Η τιμή του ομολόγου
- Η λήξη, ή ωρίμανση του ομολόγου

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές ομολόγων.

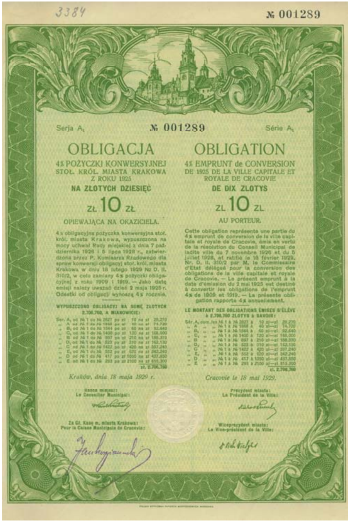
- Ομόλογα που δεν πληρώνουν κουπόνια - (zero coupon bonds)
- Ομόλογα που πληρώνουν κουπόνια και των οποίων τα κουπόνια είναι σταθερά
- Ομόλογα που πληρώνουν κουπόνια και των οποίων τα κουπόνια είναι μεταβαλλόμενα και ενδεχομένως συνδεδεμένα με κάποιον δείκτη επιτοκίων ή τον πληθωρισμό
- Ομόλογα οι πληρωμές των οποίων (ονομαστική αξία και κουπόνια αν υπάρχουν) είναι συνδεδεμένες με κάποιο άλλο περιουσιακό στοιχείο το οποίο και τις υποστηρίζει (π.χ. mortgage backed securities)
- Ομόλογα χωρίς λήξη - διηνεκή (Perpetuities) π.χ.CONSOLS 1888, West Shore Railroad λήξη 2361


WY onderschreven Reecken-meesters vande Camere der Oost-Jn-
dische Compagnie binnen Middelburgh, Bekennen midts desen
gheaccordeert te hebben, ende by den Ontfangers der voorschreven Com-
paignie ontfanghen te wesen, vanden Eersamen
de Somme van
Welcke voorschreven somme van
metten Interesse van dien jegens
ten hond. Int Jaer gherekent, wy aen voorn.
ofte den Thoonder deses, door ditto Ontfangers wederomme
belooven te betalen over Maenden naer date deses. Sonder argh
ofte list. Actum in ~~Middelburgh den.~~

f 2400

Σχήμα: Ομόλογο της Ολλανδικής εταιρείας των Δυτικών Ινδιών του 1623

Σχήμα: Ομόλογο της πολιτείας της Νοτίας Καρολίνας του 1888



Σχήμα: Ομόλογο του δήμου της Κρακοβίας του 1929

Τα ομόλογα μπορεί να είναι προσωπικά ή να μεταφέρονται.

Οι συναλλαγές σε ομόλογα γίνονται στις αγορές ομολόγων οι οποίες είναι καλά οργανωμένες αγορές που παρουσιάζουν εν γένει μεγάλη ρευστότητα.

Μια απο τις μεγαλύτερες τέτοιες αγορές είναι η αγορά της Νέας Υόρκης (NYSE) η οποία ειδικεύεται κυρίως σε εταιρικά ομόλογα, η αγορά της Φρανκφούρτης, κ.α.

Βασικοί επενδυτές σε ομόλογα είναι οι ασφαλιστικοί οργανισμοί καθώς και τα συνταξιοδοτικά ταμεία. Βέβαια στα ομόλογα επενδύουν και πολλοί ιδιώτες ή εταιρείες.

Μια συναφής μορφή αγορών είναι οι αγορές χρήματος (money market) .

Εκεί συναλλάσονται κυρίως συμβόλαια τα οποία έχουν μικρή διάρκεια.

Τέτοιου τύπου συμβόλαια είναι π.χ.

- Τα treasury bills, T-bills τα οποία είναι συμβόλαια λήξης μικρότερης του ενός έτους
- Τα commercial papers τα οποία είναι υποσχέσεις με προσυμφωνημένη λήξη απο 1-270 ημέρες, τα οποία εκδίδονται απο εταιρείες ή μεγάλες τράπεζες με σκοπό την χρηματοδότηση των βραχυπροθεσμων υποχρεώσεων τους. Τα συμβόλαια αυτά δεν υποστηρίζονται απο κάποιο άλλο περιουσιακό στοιχείο (collateral) και ενέχουν πιστωτικού κινδύνου οπότε και η αξία τους πολλές φορές είναι σε συνάρτηση με την αξιοπιστία της εταιρείας.
- Τα συμφωνητικά των τραπεζών (bankers acceptances, BA) Αυτά είναι αρχικά εντολές πληρωμής απο κάποιοαν προς τον φέροντα το συμφωνητικό οι οποίες αφού γινουν αποδεκτές απο την τράπεζα αποτελούν πλέον υποχρέωση της τράπεζας. Τα συμφωνητικά αυτά σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να συναλλάσσονται σε αγορές.

Υπάρχουν επίσης αρκετά δημοφιλή παράγωγα συμβόλαια τα οποία έχουν ομόλογα σαν υποκείμενους τίτλους.

Τέτοια συμβόλαια μπορεί να είναι προθεσμιακά συμβόλαια, δικαιώματα αγοράς ή πώλησης, συμβόλαια ανταλλαγής (swaps) κ.α.

Αποτίμηση ομολόγων

Ας ξεκινήσουμε με το ερώτημα,

> *Πόσο θα ήταν διατεθειμένος ένας επενδυτής να πληρώσει σήμερα $(t = 0)$ για να αγοράσει ένα ομόλογο το οποίο του εγγυάται την ονομαστική αξία P_p σε n έτη και επιπλέον δίνει κουπόνια c_i ανά έτος.*

Το ερώτημα αυτό δεν είναι καθόλου απλό και για να το απαντήσουμε θα πρέπει να κάνουμε ορισμένες απλουστευτικές υποθέσεις.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει κάποιος βέβαιος τίτλος στην αγορά, ο εξειδανικευμένος τραπεζικός λογαριασμός που υποθέσαμε παραπάνω και του οποίου η ετήσια απόδοση είναι r.

Την απόδοση αυτή θα ονομάζουμε **βέβαιη απόδοση** της αγοράς ή καταχρηστικά το **επιτόκιο**.

Τονίζουμε ότι η υπόθεση αυτή είναι μία απλούστευμένη υπόθεση, εφόσον στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κανένας τίτλος σε μία αγορά με τις ιδιότητες αυτές.

Στην πραγματικότητα όλοι οι διαθέσιμοι τίτλοι, ακόμη οι τραπεζικοί λογαριασμοί ενέχουν κινδύνου και δεν εγγυώνται βέβαιες αποδόσεις ότιδήποτε και αν συμβεί.

Η τιμή P που είναι διατεθειμένος ένας επενδυτής να πληρώσει σήμερα για να αγοράσει το ομόλογο αυτό θα είναι

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+r)^i} + \frac{P_p}{(1+r)^n} \tag{1}$$

Η τιμή αυτή είναι ίση με την παρούσα αξία μιας ομολογίας που προεξοφλείται με τόκο r, δηλαδή είναι ίση με το πόσο αξίζουν σήμερα τα μελλοντικά μας κέρδη όταν ο προεξοφλητικός τόκος είναι ίσος προς r.

- Όταν το r είναι υψηλό η τωρινή αξία του μελοντικού μας κέρδους θα είναι χαμηλή επειδή ο τόκος εκφράζει στην ουσία τις προτιμήσεις μας για το παρόν και το μέλλον.
- Όταν το r είναι υψηλό προτιμούμε το παροόν απο το μέλλον και συνεπώς είναι εύλογο η σημερινή (παρούσα) αξία των μελλόντικών μας απολαβών να είναι χαμηλή.

Η τιμή P λοιπόν δεν είναι παρά η προεξοφλημενη αξία, την χρονική στιγμή $t = 0$, όλων των μελλοντικών πληρωμών.

Το πρώτο μέρος στον τύπο (1) είναι η παρούσα αξία των πληρωμών από τα κουπόνια ενώ το δεύτερο είναι η παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας του ομολόγου.

Το κουπόνι μπορεί να θεωρήσουμε ότι είναι ένα ποσοστό της ονομαστικής αξίας, δηλαδή $c_i = \alpha P_p$.

Πολλά ομόλογα πληρώνουν κουπόνια ανά εξάμηνο.

Αν η λήξη του ομολόγου είναι σε n έτη τότε η τιμή του την χρονική στιγμή $t = 0$ θα είναι ίση με

$$P = \sum_{i=1}^{2n} \frac{c_i/2}{(1 + r/2)^i} + \frac{P_p}{(1 + r/2)^{2n}}$$

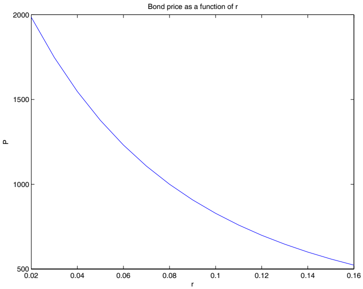
όπου θεωρήσαμε ότι η εξαμηνιαία βέβαιη απόδοση είναι ίση με $\frac{r}{2}$.

Αν το ομόλογο δεν έχει κουπόνια, δηλαδή είναι όπως λέμε ένα ομόλογο **μηδενικού κουπονιού** (zero coupon bond) τότε στους παραπάνω τύπους απλά αντικαθιστούμε $c_i = 0$.

Η αξία ενός ομολόγου εξαρτάται απο την βέβαιη απόδοση σε μια αγορά.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ένα ομόλογο 20 ετίας το οποίο πλήρωνει κουπόνια 8% ανά εξάμηνο επί της ονομαστικής αξίας του και έχει ονομαστική αξία 1000 ευρώ. Αν η βεβαιη αποδοση είναι 10% ανά έτος βρείτε την τιμή του ομολόγου αυτού. Πως μεταβάλλεται η τιμή του αν μεταβάλλεται η βέβαιη απόδοση r;



Σχήμα: Η τιμή του ομολόγου για κουπόνι 8% σαν συνάρτηση της βέβαιης ετήσιας απόδοσης.

Έχουμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα.

- Η αξία του ομολόγου στην περίπτωση που το κουπόνι δίνει το 8% της ονομαστικής αξίας ενώ η βέβαιη ετήσια απόδοση είναι 10% είναι 828.4091 ευρώ δηλαδή μικρότερη της ονομαστικής αξίας του. Αν η βέβαιη ετήσια αποδοση πέσει θα ανεβεί και η αξία του ομολόγου.
- Επίσης παρατηρούμε ότι η καμπύλη που δίνει την τιμή του ομολόγου σαν συνάρτηση της βέβαιης αποδοσης (σχήμα 4) είναι μία κυρτή καμπύλη. Αυτή η ιδιοτητα ονομάζεται κυρτότητα.

Αποδόσεις των ομολόγων

Ας προσπαθήσουμε να αντιστρέψουμε λίγο την παραπάνω ερώτηση, ταυτόχρονα εγκαταλείποντας και την πολύ περιοριστική μας υπόθεση της ύπαρξης τίτλου βέβαιης απόδοσης r, ή ισοδύναμα της ύπαρξης βέβαιου επιτοκίου r.

Συνεπώς, ένα ομόλογο πωλείται σε κάποιο τιμή P η οποία ανακοινώνεται στην αγορά (και υποθέτουμε ότι έχει καθοριστεί με κάποιο μηχανισμό της αγοράς (ενδεχομένως αποτελει κάποια τιμή στην οποία εξισώνεται η προσφορά με την ζήτηση του, δηλαδή είναι κάποια τιμή ισορροπίας ενδεχομένως όχι) και είναι δεδομένες οι πληρωμές που αυτό υποσχεται δηλαδή είναι δεδομένα τα κουπόνια c_i και η ονομαστικη αξία του P_p.

Αν η υπόθεση της ύπαρξης βέβαιης απόδοσης r ήταν σωστή θα έπρεπε τα P, c_i, P_p να συνδεόνται με την σχέση

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+r)^i} + \frac{P_p}{(1+r)^n}$$

ή το εξαμηνιαίο ανάλογο της.

Φυσικά αυτό δεν συμβαίνει, αλλά παρατηρώντας τις τιμές των ομολόγων σε μία αγορά μπορούμε να θέσουμε την ερώτηση:

> *Ποιά βέβαιη (μέση) απόδοση y θα μας έδινε την τιμή ενός ομολόγου όταν είναι γνωστά το ονομαστικό επιτόκιο που αναγράφεται στα κουπόνια του, η λήξη του και η ονομαστική του τιμή;*

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, αν υποθέσουμε ετήσιες πληρωμές κουπονιών, θα πρέπει να λύσουμε την αλγεβρική εξίσωση

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+y)^i} + \frac{P_p}{(1+y)^n} \tag{2}$$

ως προς τον άγνωστο y (θεωρώντας ότι P,P_p, n είναι γνωστά).

Την λύση της εξίσωσης αυτής θα την συμβολίζουμε με y απο τον αγγλικό όρο yield που σημαίνει απόδοση.

Η εξίσωση αυτή θα πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα αν θεωρήσουμε εξαμηνιαίες πληρωμές κουπονιών.

Στην περίπτωση όπου το ομόλογο δεν δίνει κουπόνια ο υπολογισμός της ποσότητας αυτής μπορεί να γίνει αναλυτικά.

Απλή άλγεβρα μας δίνει ότι για ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού

$$y = \left(\frac{P_p}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Αν το ομόλογο πληρώνει και κουπόνια, η αλγεβρική εξίσωση

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+y)^i} + \frac{P_p}{(1+y)^n} \tag{3}$$

μπορεί να λυθεί μόνο αριθμητικά.

Ένας τρόπος επίλυσης της είναι χρησιμοποιώντας κάποια επαναληπτική προσεγγιστική διαδικασία π.χ. την διαδικασία Newton-Raphson.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $f(x) = 0$.

Αν υποθέσουμε ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη τότε μπορεί να δείξουμε ότι η επαναληπτική διαδικασία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

κάτω απο ορισμένες συνθήκες συγκλίνει στην λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Συνεπώς ξεκινώντας απο μία αρχική προσέγγιση x_0 για την λύση της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική αυτή διαδικασία μέχρις ότου το $\mid x_{n+1} - x_n \mid < \epsilon$ για κάποιο δεδομένο περιθώριο σφάλματος ϵ μπορούμε να πάρουμε μία καλή προσέγγιση της x^* για την οποία $f(x^*) = 0$.
Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ δεν είναι ανάγκη να υπολογιστεί αναλυτικά, μπορεί να προσεγγιστεί από την έκφραση $(f(x + dx) - f(x))/dx$ για αρκετά μικρό dx.

Απο τα παραπάνω, φαίνεται ότι ακόμα και αν εγκαταλείψουμε την περιοριστική μας υποθεση, της ύπαρξης βέβαιων αποδοσεων r, και αν θεωρήσουμε οτι οι τιμές των ομολόγων P που παρατηρούνται στην αγορά, αντανακλούν την αβεβαιότητα της αγοράς, και πάλι θα πρέπει να επιδιώξουμε να μάθουμε την ‘μέση’ απόδοση του ομολόγου y κάνοντας τους παραπάνω υπολογισμούς.

Το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα αντανακλά την αβεβαιότητα της αγοράς και εν γένει θα παρουσιάζει διακυμάνσεις.

Το αποτέλεσμα που θα πάρουμε με την μεθοδολογία που περιγράφουμε εδώ ονομάζεται **απόδοση στην λήξη** (yield to maturity).

Είναι η αποδοση που προσφέρει ένα ομόλογο αν ο κάτοχος του το κρατήσει μέχρι την λήξη του.

Είναι πολύ λογικό να θεωρήσει κανείς ότι ο κάτοχος μπορεί να επιλέξει να το πουλήσει πριν την λήξη του, έχοντας εισπράξει ορισμένα μόνο απο τα κουπόνια.

Στην περίπτωση αυτή η απόδοση του ομολόγου θα είναι διαφορετική.

Θα υποθέσουμε για ευκολία ότι μελετάμε ομόλογα μηδενικού κουπονιού, που χωρίς βλάβη της γενικότητας, έχουν ονομαστική αξία $P_p = 1$ και λήξη T.

Ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή t ένας επενδυτής αγοράζει ένα τέτοιο ομόλογο.

Αν η βέβαιη απόδοση είναι ίση προς r, η τιμή του τίτλου αυτού θα είναι

$$P(t;T) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}$$

ή για να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό που έχει επικρατήσει σήμερα διεθνώς, αν ορίσουμε με $\tau = T - t$ το χρόνο απο την λήξη και θεωρώντας την τιμή σαν μια συνάρτηση του χρόνου t στον οποίο έγινε η αγορά του ομολόγου και του χρόνου τ που απομένει μέχρι την λήξη του έχουμε

$$P(t,\tau) = \frac{1}{(1+r)^{\tau}}.$$

Ας επαναλάβουμε τώρα τα βήματα που κάναμε παραπάνω, και ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή t παρατηρούμε στην αγορά ομολόγων την τιμή των ομολόγων μηδενικού κουπονιού και (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ονομαστικής αξίας 1, τα οποία έχουν ακόμα τ έτη μεχρι την λήξη τους.

Ας συμβολίσουμε με $P(t,\tau)$ την παρατηρούμενη τιμή των ομολόγων αυτών.

Μπορούμε λοιπόν να ρωτήσουμε ποιά θα είναι η απόδοση $y(t,\tau)$ που αντιστοιχεί στις παρατηρούμενες τιμές αυτών των ομολόγων.

Η απόδοση αυτή θα είναι λύση της εξίσωσης

$$P(t,\tau) = \frac{1}{(1+y(t,\tau))^{\tau}}.$$

η οποία είναι ίση προς

$$y(t,\tau) = \left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{1}{\tau}} - 1.$$

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες απο τα δεδομένα της αγοράς, θα δούμε ότι το $y(t, \tau)$ εξαρτάται τόσο απο το t όσο και απο το τ.

Συνεπώς για να περιγράψουμε πλήρως τις αποδόσεις απο ένα ομόλογο πρέπει να γνωρίζουμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών την $y(t, \tau)$, δηλαδή μία συνάρτηση τόσο της χρονικής στιγμής που μας ενδιαφέρει όσο και του χρόνου που απομένει μέχρι την λήξη του ομολόγου.

Αν για δεδομένη χρονική στιγμή t υπολογίσουμε τις αποδοσεις όλων των ομολόγων για διαφορετικές λήξεις T, τότε θα πάρουμε μία καμπύλη $y(t,\tau)$ (σαν συνάρτηση του $\tau = T - t$) η οποία ονομάζεται καμπύλη των αποδοσεων (yield curve).

Η καμπύλη αυτή αντανακλά τις συνθήκες που επικρατούν στην αγορά την χρονική περίοδο αυτή, τις πεποιθήσεις των επενδυτών σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί κλπ.

Φυσικά, οι συνθήκες της αγοράς μεταβάλλονται με τον χρόνο.

Αν λοιπόν, μία άλλη χρονική στιγμή $t^{'}$, απο τα δεδομένα της αγοράς (δηλαδή απο τις τιμές που παρατηρούνται για τα ομόλογα διαφορετικών λήξεων T) υπολογίσουμε τις αποδόσεις $y(t^{'},\tau)$ και τις σχεδιάσουμε σαν συνάρτηση του χρόνου που απομένει απο την λήξη $(\tau = T - t^{'})$ θα πάρουμε μία διαφορετική καμπύλη απο την $y(t,\tau)$.

Κατά συνέπεια, η πλήρης περιγραφή των αποδόσεων των ομολόγων, απαιτεί την κατασκευή μίας οικογένειας απο καμπύλες $Y_t(\tau)$, μία για κάθε t, για τις οποίες θα ισχύει $Y_t(\tau) = y(t, \tau)$.

Η εξάρτηση της απόδοσης (yield) ενός ομολόγου από τον χρόνο μέχρι την ωρίμανση ονομάζεται στην βιβλιογραφία term structure of interest rates.

Η καμπύλη $y(t, \tau)$ για δεδομένο t μπορεί να είναι αύξουσα ή φθίνουσα ανάλογα με την περίπτωση, ή μπορεί και να μην παρουσιάζει μονοτονία.

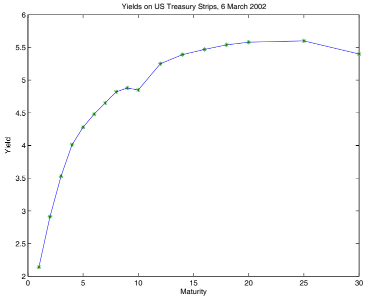
Επίσης, η καμπύλη αυτή δεν εξαρτάται μόνο απο τον χρόνο μέχρι την λήξη αλλά και απο τα κουπόνια τα οποία μπορεί να δίνει αυτό το ομόλογο.

Το απλούστερο συνήθως είναι να σχεδιάζουμε τις καμπύλες των επιτοκίων (term structure) για ομόλογα με μηδενικά κουπόνια.

Παράδειγμα

Από το φύλλο της Wall Street Journal της 6-3-2002 μπορούμε να δούμε τις αποδόσεις yields των αμερικανικών κρατικών ομολόγων για διαφορετικές λήξεις.

Στο σχήμα σχεδιάζουμε την καμπύλη των αποδόσεων των ομολόγων για διαφορετικές λήξεις.



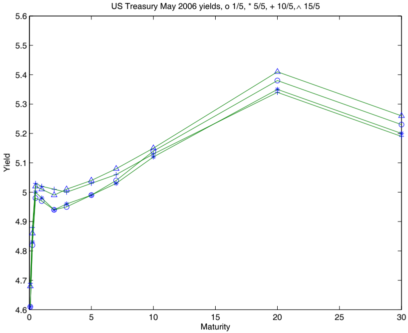
Σχήμα: Η καμπύλη των αποδόσεων για τα ομόλογα του Αμερικανικού δημοσίου, 6 Μαρτίου 2002

Φυσικά τα δεδομένα αυτά μεταβάλλονται και με την συγκεκριμένη χρονική στιγμή την οποία λαμβάνουμε υπόψην, δηλαδή με την συγκεκριμένη χρονικη στιγμή στην οποία έχουμε τις τιμές των ομολόγων.

Για παράδειγμα άλλη καμπύλη θα βρούμε για τις αποδόσεις στις 6-3-2002 άλλη στις 7-3-2002 κ.τ.λ.

Παράδειγμα

Από την ιστοσελίδα του US Treasury βρήκαμε τις αποδόσεις των Αμερικανικών ομολόγων κατά τον μήνα Μαιο του έτους 2006 για διαφορετικές λήξεις.



Παρατηρούμε ότι η καμπύλη των αποδόσεων είναι διαφορετική κάθε ημέρα.

Οι σχέσεις για τις αποδόσεις των ομολογων μπορεί να απλοποιηθούν αρκετά αν θεωρήσουμε την υποθεση του συνεχούς ανατοκισμού.

Κάτω απο την υποθεση αυτή

$$y(t,\tau) = -\frac{\ln(P(t,\tau)}{\tau}$$

ή ισοδύναμα

$$P(t,\tau) = \exp\left(-\tau\, y(t,\tau)\right).$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και ως συνάρτηση της λήξης T ως εξής

$$y(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t}$$

ή ισοδύναμα

$$P(t,T) = \exp\left(-(T-t)\, y(t,T)\right).$$

Η ερμηνεία της σχέσης αυτής είναι, οπως άλλωστε και στην περίπτωση του διακριτού ανατοκισμού, ότι αν επενδύσουμε 1 ευρώ σε ένα ομόλογο λήξης T, για $T-t$ έτη η μέση απόδοση θα είναι $y(t,T)$, για την περίοδο αυτή.

Αν υποθέσουμε ομόλογα που η λήξη τους είναι πολύ κοντινή, δηλαδή αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να πάρουμε το όριο $T \to t$ τότε παίρνουμε μια ποσότητα η οποία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για την μοντελοποίηση των αποδοσεων των ομολόγων.

Η ποσοτητα αυτή οριζεται ως

$$r(t) = \lim_{T \to t} y(t, T) = y(t, t)$$

και ονομάζεται short rate.

Η ποσότητα αυτή είναι η στιγμιαία απόδοση μιας επένδυσης (π.χ. η ημερήσια απόδοση που δίνει μια εμπορική τράπεζα) και εν γένει υπόκειται σε διακυμάνσεις.

Απο το short rate μπορούμε να αναπαράγουμε τις τιμές των ομολόγων, αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι βέβαιο, σύμφωνα με τον τύπο

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r(s)\, ds\right)$$

Αν υποθέσουμε ότι το short rate υπόκειται σε διακυμάνσεις τότε η τιμή ενός ομολόγου την χρονικη στιγμή t το οποίο πληρώνει 1 ευρώ την χρονική στιγμή T, $t < T$, θα πρέπει να είναι κατά κάποιο τρόπο η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη των short rates που θα πραγματοποιηθούν απο την χρονικη στιγμή t και μετά.

Η πρόβλεψη αυτή όμως δεν θα πρέπει να γίνει σύμφωνα με την πραγματική κατανομή των σεναρίων σχετικά με τις πραγματοποιήσεις των στιγμιαίων αποδοσεων αλλά χρησιμοποιώντας μια διαφορετική κατανομή των σεναρίων που θα είναι συμβατή με την υπόθεση ότι η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία.

Προθεσμιακά συμβόλαια και προθεσμιακές αποδόσεις

Τέλος ενδιαφέρον έχει να δούμε και μια κατηγορία συμβολαίων, τα οποία ονομάζονται προθεσμιακά συμβόλαια.

Τα συμβόλαια αυτά είναι ιδιαίτερα δημοφιλή και είναι συμφωνίες βάσει των οποίων αναλαμβάνεται η υποχρέωση την χρονική στιγμή t να επενδυθεί 1 ευρώ την χρονική στιγμή T το οποίο θα επιστρέψει το ποσό των $\exp((S - T)\,F(t, T, S))$ την χρονική στιγμή S, $t < T < S$.

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο λοιπον καθορίζει το επιτόκιο μεταξύ των χρονικών στιγμών T και S απο την χρονική στιγμή t.

Η άποδοση $F(t, T, S)$ είναι λοιπόν η προθεσμιακή απόδοση μεταξύ των χρονικών στιγμών T και S, όπως αυτή έχει προκαθοριστεί την χρονική στιγμή $t < T < S$.

Τα προθεσμιακά συμβόλαια χρησιμοποιούνται πολύ στην πράξη και διαπραγματεύονται σε αγορές οι οποίες έχουν εν γένει μεγάλη ρευστότητα.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι προθεσμιακές αποδόσεις δεν είναι ανεξάρτητες απο τις αποδόσεις των ομολόγων, γιατί έτσι θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει τα συμβόλαια αυτά για κερδοσκοπία συνδυάζοντας τα κατάλληλα με τα αντίστοιχα ομόλογα μηδενικού κουπονιού.

Μπορεί κανείς να δείξει ότι για να μην υπάρχουν τέτοιες ευκαιρίες κερδοσκοπίας θα πρέπει οι προθεσμιακές αποδόσεις να συνδέονται με τις τιμές των αντιστοίχων ομολόγων μέσω της σχέσης

$$F(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \ln \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} \right)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η λήξη του προθεσμιακού συμβολαίου S είναι κοντά στην αρχή του T, μπορούμε να ορίσουμε την ποσοτητα της στιγμιαίας προθεσμιακής απόδοσης την χρονική στιγμή t, για επένδυση την χρονικη στιγμή T ως

$$f(t, T) = \lim_{S \to T} F(t, T, S) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$$

ή ισοδύναμα

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s)\, ds\right)$$

Το short rate σχετίζεται με τη στιγμιαία προθεσμιακή απόδοση βάσει του τύπου

$$r(t) = f(t, t)$$

Κίνδυνοι που σχετίζονται με τα ομόλογα και ποσοτικοποίηση τους

Παρότι εν γένει τα ομόλογα θεωρούνται απο τις πιο ασφαλείς επενδύσεις (π.χ. σε σχέση με τις μετοχές) πάντοτε υπάρχουν κίνδυνοι που σχετίζονται με αυτά.

Ορισμένοι απο αυτούς είναι κίνδυνοι που σχετίζονται με την αθέτηση της υπόσχεσης πληρωμής (default, credit risk) , κίνδυνοι που σχετίζονται με τις συναλλαγματικές ισοτιμίες, κίνδυνοι αλλαγής της χρηματορροής από ένα ομόλογο κατά την διάρκεια της ζωής του, κίνδυνοι που σχετίζονται με τον πληθωρισμό κ.α.

Όμως ο πιο σημαντικός κίνδυνος που μπορει να σχετιστεί με τα ομόλογα είναι ο κίνδυνος που σχετίζεται με τα επιτόκια (interest rate risk).

Αν για παράδειγμα, κάποιος έχει δεσμεύσει τα χρήματα του σε ένα ομόλογο το οποίο δίνει κουπόνια στα π.χ 8% και τα ονομαστικά επιτόκια ανέβουν τότε αυτός ο επενδυτής θα χάσει εφόσον θα μπορούσε να τοποθετήσει τα χρήματα του σε πιο αποδοτικές επενδύσεις.

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε και μία πτώση της τιμής του ομολόγου αυτού.

Οι τιμές των ομολόγων λοιπόν αναμένουμε να είναι ευαίσθητες στις διακυμάνσεις των επιτοκίων.

Η ευαίσθησία αυτή είναι λογικό να εξαρτάται και απο την ωρίμανση του ομολόγου.

Για παράδειγμα ένα βραχυχρόνιο ομόλογο (δηλαδή ένα ομόλογο που ωριμάζει γρήγορα) θα είναι πιο ασφαλές ως προς τον κίνδυνο που προέρχεται απο τις διακυμάνσεις των επιτοκίων σε σχέση με ένα ομόλογο το οποίο είναι πιο μακροχρόνιο (ωριμάζει αργότερα).

Θα ασχοληθούμε λίγο με την ποσοτικοποίηση του κινδύνου αυτού.

Διάρκεια

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την τιμή ενός ομολόγου P σαν συνάρτηση της απόδοσης y θεωρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους του (π.χ. τα κουπόνια και την ωρίμανση) σταθερές.

Ο κίνδυνος που σχετίζεται με τα επιτόκια, μπορεί να εκφρασθεί με την μεταβολή της αξίας του ομολόγου σε σχέση με την μεταβολή της απόδοσης y.

Μία τέτοια ποσοτητα θα μπορούσε να ήταν η παράγωγος $\frac{\partial P}{\partial y}$ αλλά ένα τέτοιο μέτρο εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης της αξίας του ομολόγου και δεν είναι πολύ εύχρηστη.

Ένα καλύτερο μέγεθος για την μέτρηση του κινδύνου που σχετίζεται με τα επιτοκια είναι η διάρκεια κατα Macaulay (Macaulay duration)D.

Ορισμός

Για ένα ομόλογο το οποίο πληρώνει κουπόνια αξίας c κάθε χρονική περίοδο για n περιόδους και την n περίοδο δίνει και την ονομαστική αξία P_p η διάρκεια κατά Macaulay είναι η ποσότητα

$$D = \frac{1}{P}\left(\frac{1 \times c}{(1+y)} + \frac{2 \times c}{(1+y)^2} + \frac{3 \times c}{(1+y)^3} + \cdots + \frac{n \times (c + P_p)}{(1+y)^n}\right) \tag{4}$$

Το μέγεθος αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας δείκτης της απόκρισης της αξίας του ομολόγου στην απόδοση y και είναι ένας καλός δείκτης γιατί δεν εξαρτάται από την χρηματική μονάδα στην οποία μετράμε την αξία του ομολόγου.

Το μέγεθος αυτό αντιθέτως έχει εκφρασθεί σε μονάδες χρονου και δεν μετράει μόνο τις πληρωμές που γίνονται αλλά και το πότε αυτές πραγματοποιούνται.

Ο δείκτης αυτός μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\begin{aligned} D &= \sum_{t=1}^{n} w_t t \\ w_t &= \frac{1}{P} \frac{c}{(1+y)^t} \end{aligned}$$

όπου τα w_t έχουν την ιδιοτητα

$$\sum_{t=1}^{n} w_t = 1$$

Τα w_t μπορεί να θεωρηθούν σαν σταθμίσεις που δίνουν τον λόγο της παρούσας αξίας του κουπονιού που θα αποφέρει το ομόλογο την χρονική στιγμή t ως προς την παρούσα αξία του.

Αν λοιπόν εκφράσουμε τον δείκτη του Macaulay με την μορφή αυτή μπορούμε να δούμε οτι εκφράζει περίπου τον μέσο χρονο (σταθμισμένο κατάλληλα) μέχρι την είσπραξη των εκάστοτε πληρωμών του ομολόγου.

Μία ακραία περίπτωση είναι τα ομόλογα μηδενικού κουπονιού για τα οποία $D = n$ δηλαδή η διάρκεια ισούται με την λήξη.

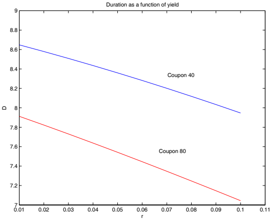
Για τα ομόλογα με κουπόνια η διάρκεια είναι μικροτερη απο την λήξη.

Υπό αυτό το πρίσμα, η διάρκεια μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μέγεθος της αναμενόμενης λήξης του ομολόγου, δηλαδή σαν ένα μέγεθος του χρονικού ορίζοντα που το ομόλογο θα έχει αποπληρώσει την αξία του.

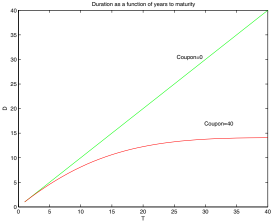
Άρα αναμένουμε η διάρκεια να είναι ένα βασικό μέγεθος στην διαχείριση χαρτοφυλακίων με ομόλογα.

Κάνοντας χρήση του τύπου (4) μπορούμε να υπολογίσουμε το D για διαφορετικά ομόλογα και να κάνουμε τις ακολουθες γενικές παρατηρήσεις

- Για ομόλογα τα οποία έχουν την ίδια απόδοση μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το D μειώνεται με την αύξηση του κουπονιού. Αυτό συμβαίνει γιατί μεγαλύτερο μέρος από τη συνολικη χρηματοροή έρχεται συντομότερα με την μορφή πληρωμών κουπονιών.
- Τα ομόλογα μηδενικού κουπονιού, έχουν $D = n$ όπου n ειναι η λήξη.
- Η αύξηση του χρόνου απο την λήξη αυξάνει το D
- Η αύξηση της απόδοσης στην λήξη εν γένει μειώνει το D



Σχήμα: Η διάρκεια σαν συνάρτηση της απόδοσης για διαφορετικά κουπόνια.



Σχήμα: Η διάρκεια σαν συνάρτηση του χρόνου ως την λήξη για διαφορετικά

Με την χρήση στοιχειώδους διαφορικού λογισμού μπορούμε να δούμε ότι το D σχετίζεται με το $\frac{\partial P}{\partial y}$ με την ακόλουθη σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -\frac{D}{1+y}. \tag{5}$$

Η σχέση (5) είναι πολύ σημαντική γιατί συσχετίζει την μεταβολή της τιμής (αξίας) ενός ομολόγου, με την μεταβολή της απόδοσης του.

Ο συντέλεστης που συνδέει αυτές τις δύο μεταβολές είναι η διάρκεια κατά Macaulley D διαιρεμένη με την απόδοση.

Όσο πιο μεγάλο είναι το D τόσο πιο μεγάλη είναι η απόκριση της τιμής του ομολόγου στις μεταβολές της απόδοσης, δηλαδή τόσο πιο ευαίσθητη θα είναι η αξία του ομολόγου P στις μεταβολές της αποδοσης y.

Αντίθετα όσο πιο μικρή είναι η διάρκεια D του ομολόγου, τόσο λιγότερο ευαίσθητη θα είναι η αξία του P ως προς τις μεταβολές της απόδοσης y.

Εφόσον οι μεταβολες της απόδοσης σχετίζονται με τις διακυμάνσεις των επιτοκίων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διάρκεια σαν ένα ποσοτικό μέτρο για τον κίνδυνο των ομολόγων ως προς τις διακυμάνσεις των επιτοκίων.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ομόλογο 10ετίας, το οποίο έχει ονομαστική αξία 1000 ευρώ και πληρώνει ετήσια κουπόνια των 40 ευρώ.

Οι αποδόσεις θεωρούμε ότι είναι $y = 8\%$.

Ποιά θα είναι η μεταβολή της αξίας του ομολόγου αν έχουμε μία πτώση των αποδόσεων στο $y' = 7.8\%$;

Θα υπολογίσουμε πρώτα την διάρκεια του ομολόγου αυτού. Μία απλή εφαρμογή του τύπου (4) για $n = 10, y = 0.08, P_p = 1000, c = 40$ μας δίνει ότι $D = 8.1184$.

Επίσης η τιμή του ομολόγου θα είναι $P = 731.5967$ ευρώ.

Συνεπώς,

$$\Delta P = -D\,\frac{1}{1+y}\,P\,\Delta y = -8.1184 \times \frac{1}{1.08} \times 731.5967\,(-0.002) = 10.9989,$$

δηλαδή θα έχουμε μία αύξηση της τιμής του ομολόγου κατά 10.9989 ευρώ.

Αν υπολογίσουμε την μεταβολή της τιμής του ομολόγου ακριβώς παίρνουμε $\Delta P = 11.1039$, άρα η γραμμική προσέγγιση της μεταβολής, κάνοντας χρήση της διάρκειας είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση της μεταβολής της τιμής του ομολόγου.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε και ένα εναλλακτικό ορισμό της διάρκειας, την **τροποποιημένη διάρκεια**.

Ορισμός

Η τροποποιημένη διάρκεια (modified duration) ενός ομολόγου είναι η ποσότητα $D_m = \frac{D}{1+y}$. *Η τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου δινει την σχέση της μεταβολής της απόδοσης με την μεταβολή της τιμής του ομολόγου ως εξής*

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -D_m$$

Παράδειγμα

Επαναλάβετε το παράδειγμα κάνοντας χρήση της τροποποιημένης διάρκειας.

Το αποτέλεσμα είναι $D_m = 7.5171$ *και*

$$\Delta P = -D_m P \Delta y = -7.5171 \times 731.5967 \times (-0.002) = 10.9989,$$

δηλαδή το ίδιο όπως και προηγουμένως.

Η χρήση του D ή του D_m μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο ομολόγων, το οποίο να εξουδετερώνει τον κίνδυνο που σχετίζεται με τις διακυμάνσεις των αποδόσεων.

Κυρτότητα

Η διάρκεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ποσοτικοποιήσει τις μεταβολές της τιμής των ομολόγων εξαιτίας των μικρών διακυμάνσεων των αποδόσεων, και στην ουσία δεν είναι τίποτε άλλο από την γραμμική προσέγγιση της καμπύλης $P = P(y)$ από την εφαπτομένη της σε ένα σημείο y.

Όπως είναι φυσικό, η προσέγγιση αυτή αν και μπορεί να είναι επαρκής για να ποσοτικοποιήσει τις μεταβολές των τιμών των ομολόγων για μικρές μεταβολές των αποδόσεων, σίγουρα δεν είναι επαρκής για να περιγράψει την μεταβολή των τιμών για μεγάλες μεταβολές των αποδόσεων.

Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να λάβουμε υπόψη την μη γραμμικότητα της καμπύλης $P(y)$ και να ποσοτικοποιήσουμε με κάποιο μέτρο τις αποκλίσης της καμπύλης $P(y)$ απο την ευθεία.

Ένα μέτρο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου σε χαρτοφυλάκια με ομόλογα για μεγάλες μεταβολές των αποδόσεων είναι η **κυρτότητα** (convexity).

Ορισμός

*Η **κυρτότητα** για κάποιο ομόλογο ορίζεται ως η ποσότητα*

$$C = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2}$$

Η κυρτότητα είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας της σχέσης μεταξύ τιμής και απόδοσης δηλαδή μας δείχνει το πόσο η καμπύλη αυτή αποκλίνει απο μια ευθεία γραμμή. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι είναι ένα μέτρο της μεταβολής του D ως συνάρτηση του y.

Η μεταβολή της τιμής ενός ομολόγου ΔP, εξαιτίας της μεταβολής των αποδόσεων του κατά Δy δίνεται τώρα απο την τετραγωνική σχέση

$$\Delta P = -D_m\, P\, \Delta y \; + \; \frac{1}{2}\, C\, P\, (\Delta y)^2.$$

Η σχέση αυτή προκύπτει απο την εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor στην συνάρτηση $P(y)$, για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της ποσότητας $P(y + \Delta y) - P(y)$.

Η κυρτότητα μπορεί επίσης να υπολογιστεί αναλυτικά με την χρήση του τύπου

$$C = \frac{1}{P}\frac{1}{(1+y)^2}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{c_i}{(1+y)^t}(t^2+t) + \frac{P_p}{(1+y)^n}(n^2+n)\right]. \qquad (6)$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει απο την παραγώγιση του τύπου (3) που συνδέει την τιμή του ομολόγου P με την απόδοση y, ως προς την απόδοση.

Αν θεωρήσουμε κουπόνια εξαμηνιαία ο τύπος πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα.

Παράδειγμα

Υπολογίστε την κυρτότητα για ένα ομόλογο 10ετίας με ονομαστική αξία 1000 ευρώ το οποίο πληρώνει ετήσια κουπόνια 40 εύρω όταν οι αποδόσεις είναι στο 8%.

Με βάση αυτό υπολογίστε την μεταβολή της τιμής του ομολόγου αν οι αποδόσεις έχουν μία πτώση στο 7.5%.

Στο τύπο (6) αντικαθιστούμε $n = 10$, $P_p = 1000$, $c = 40$ και μετά απο πράξεις βρίσκουμε ότι $C = 71.2235$.

Απο τα προηγούμενα παραδείγματα γνωρίζουμε ότι $P = 731.5967$ και ότι $D_m = 7.5171$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \Delta P &= -D_m\, P\, \Delta y + \frac{1}{2}\, C\, P\, (\Delta y)^2 \\ &= -7.5171 \times 731.5967\, (-0.005) + \frac{1}{2} \times 71.2235 \times 731.5967 \times (-0.005)^2 = 28. \end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε ακριβώς την μεταβολή της τιμής θα έχουμε:

$$\Delta P = P(0.075) - P(0.8) = 28.1604$$

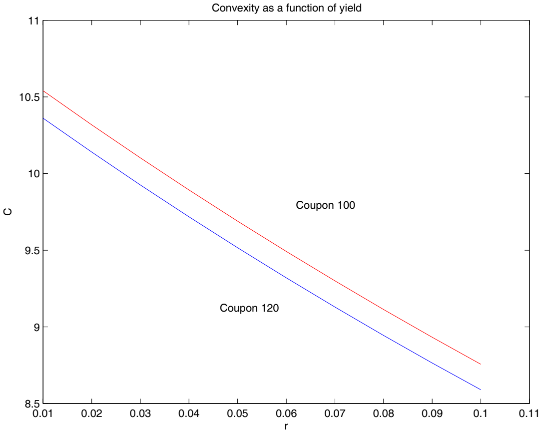
Η γραμμική προσέγγιση θα μας έδινε

$$(\Delta P)_{lin} = -D_m\, P\, \Delta y = 27.4974$$

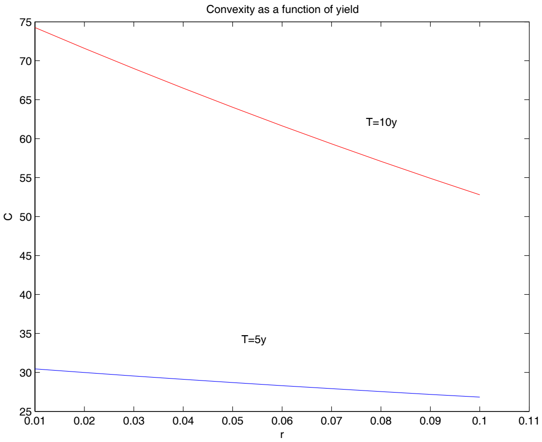
δηλαδή θα υποτιμούσε την άνοδο της αξίας του ομολόγου λόγω της πτώσης των αποδοσεων.

Οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν για την κυρτότητα.

- Χαμηλά κουπόνια αντιστοιχούν σε υψηλότερη κυρτότητα.
- Υψηλότερες λήξεις δίνουν και υψηλότερη κυρτότητα.
- Υπάρχει αντίστροφη σχέση μεταξύ απόδοσης και κυρτότητας.



Σχήμα: Η κυρτότητα σαν συνάρτηση της απόδοσης για διαφορετικά κουπόνια.



Σχήμα: Η κυρτότητα σαν συνάρτηση της απόδοσης για διαφορετικες λήξεις.

Χρήση των μέτρων αυτών για τον υπολογισμό του κινδύνου θέσεων απο ομόλογα

Η σχέση

$$\Delta P = -D_m \, P \, \Delta y \, + \, \frac{1}{2} \, C \, P \, (\Delta y)^2. \tag{7}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συσχετίσει τις μεταβολές στις αποδόσεις με την μεταβολή της αξίας μιας θέσης σε ομόλογα.

Οι καμπύλες των αποδόσεων των ομολόγων είναι τυχαίες μεταβλητές, οποτε και οι μεταβολές των αποδόσεων (της καμπύλης των αποδόσεων) είναι και αυτές τυχαίες μεταβλητές.

Συγκεκριμένα αν γνωρίζουμε την κατανομή του Δy χρησιμοποιώντας τον τύπο (7) μπορούμε να βρούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής ΔP. Απο την κατανομή αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα μέτρα κινδύνου π.χ. την διασπορά ή τον δυνητικό κίνδυνο (αξία σε κίνδυνο, value at risk).

Αν υποθέσουμε ότι οι μεταβολές των αποδόσεων είναι κανονικά κατανεμημένες, τοτε η γραμμική προσέγγιση

$$\Delta P = -D_m \, P \, \Delta y \tag{8}$$

μας εξασφαλίζει ότι και οι μεταβολές της αξίας της θέσης του χαρτοφυλακίου των ομολογων που επάγονται απο αυτή την μεταβολή των αποδόσεων θα ακολουθούν και αυτές την κανονική κατανομή, κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε την διασπορά του ΔP απο την διασπορά του Δy.

Η μη γραμμική προσέγγιση δημιουργεί προβλήματα ως προς την χρήση της κανονικής κατανομής τα οποία μπορεί να λυθούν σχετικά εύκολα με την χρήση μεθοδων προσομοίωσης.

Μοντέλα για τις αποδόσεις των ομολόγων

Είναι πολύ χρήσιμο για διάφορες εφαρμογές να μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και να προβλέψουμε τις καμπύλες των αποδόσεων των ομολόγων.

Φυσικά, αυτό είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα που απαιτεί προχωρημένες τεχνικές απο την στατιστική και απο την θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών.

Συνήθως, στα μοντέλα των αποδόσεων των ομολόγων μοντελοποιούνται οι προθεσμιακές αποδόσεις ή οι στιγμιαίες προθεσμιακές αποδόσεις $f(t, T)$.

Ένας απο τους λόγους που γίνεται αυτό είναι επειδή η αγορά των προθεσμιακών συμβολαίων προσφέρει μεγάλη ρευστότητα, έχουμε μεγάλο αριθμό δεδομένων τα οποία και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την βαθμονόμηση των στατιστικών μας μοντέλων.

Η ποσότητες $f(t,T)$ είναι τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες εξαρτώνται τόσο απο την χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει όσο και απο την λήξη του ομολόγου.

Μία αρκετά διαδεδομένη κατηγορία μοντέλων για τις $f(t,T)$ είναι τα παραμετρικά μοντέλα.

Σύμφωνα με αυτά, θεωρούμε ότι τα $f(t,T) = f(t,\tau)$ μπορεί να περιγραφούν απο οικογένειες συναρτήσεων δύο μεταβλητών $t, \tau = T - t$ οι οποίες παραμετροποιούνται απο μία σειρά παραμέτρων $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_N)$ δηλαδή ότι $f(t,\tau) = f(t,\tau;\mathbf{z})$.

Το ποιό ακριβώς απο τα μέλη αυτής της οικογένειας θα επιλεγεί το καθορίζουμε με διαδικασίες προσαρμογής (fitting) βασιζόμενοι στα δεδομένα της αγοράς.

Οι διαδικασίες αυτές είναι τυπικές διαδικασίες της παραμετρικής στατιστικής.

Μία διαδεδομένη οικογένεια μοντέλων για τον σκοπό αυτό είναι η οικογένεια συναρτήσεων των Nelson και Siegel που χρησιμοποιεί 4 παραμέτρους και αποτελείται απο συναρτήσεις της μορφής

$$f_{NS}(t,\tau;\mathbf{z}) = z_1 + \left(z_2 + z_3\,\tau\right) e^{-z_4\,\tau}$$

όπου οι παράμετροι z_1, z_2, z_3, z_4 θεωρούνται ότι εξαρτώνται απο την χρονικη στιγμή t που γίνεται η εκτίμηση του μοντέλου.

Το μοντέλο αυτό είναι ικανό να δίνει τόσο κυρτές όσο και κοίλες καμπύλες αποδόσεων.

Η οικογένεια αυτή χρησιμοποιείται απο διάφορες τράπεζες και οργανισμούς για την μοντελοποίηση των καμπύλων αποδόσεων, κυρίως στην Ιταλία και την Φινλανδία.

Μια άλλη κατηγορία μοντέλων είναι αυτή για τις οποίες θεωρούμε ότι γνωρίζουμε τις αποδόσεις $y(t, T; \omega)$ σαν μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών για δεδομένο T και για μεταβαλλόμενο t.

Συνεπώς, αν έχουμε δεδομένη ωρίμανση των ομολόγων την χρονική στιγμή T, θεωρούμε ότι οι αποδόσεις y είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών (που εξαρτώνται απο τις καταστάσεις της οικονομίας) όπου για κάθε διαφορετικό t έχουμε και ένα διαφορετικό μέλος της οικογένειας.

Με άλλα λόγια μοντελοποιούμε τις αποδόσεις για δεδομένη ωρίμανση των ομολόγων με την χρήση της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών. Τέτοιου τύπου μοντέλα θα συναντήσουμε παρακάτω για τις μετοχές.

Τα μοντέλα αυτά μας καθορίζουν την κατανομή των $y(t, T; \omega)$ για δεδομένο t.

Τα μοντέλα αυτά συνήθως ξεκινούν απο την μοντελοποίηση του short rate $r(t)$, και απο την ποσότητα αυτή παράγουν τις υπόλοιπες ποσοτητες που χρειάζονται.

Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε π.χ. το μοντέλο του Dothan σύμφωνα με το οποίο η $r(t; \omega)$ ικανοποιεί την λογαριθμικοκανονική κατανομή και συγκεκριμένα $\ln r(t; \omega) \sim N(\alpha t, \beta t)$ για κατάλληλα επιλεγμένα α, β και για δεδομένο T.

Το διωνυμικό μοντέλο για τις αποδόσεις των ομολόγων

Θα παρουσιάσουμε τώρα πως το διωνυμικό μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί για την μελέτη των αποδοσεων των ομολόγων ή την μελέτη της καμπύλης των αποδοσεων.

Η γνώση της εξέλιξης της καμπύλης των αποδόσεων είναι πολύ βασική για τον υπολογισμό της τιμής διαφόρων χαρτοφυλακίων ομολόγων, της τιμής διαφόρων παραγώγων συμβολαίων που σχετίζονται με ομόλογα, την διαχείριση κινδύνου χαρτοφυλακίων ομολόγων κ.α.

Η διατύπωση του μοντέλου προυποθέτει τις τιμές των ομολόγων και τις τιμές των διαφόρων προθεσμιακών συμβολαίων ή τις διάφορες προθεσμιακές αποδοσεις.

Με $P(t,T)$ συμβολίζουμε την τιμή την χρονικη στιγμή t ενός ομολογου που αποδίδει 1 την χρονική στιγμή T $(t<T)$.

Με $F(t,T^*,T)$, $t<T^*<T$ συμβολίζουμε την τιμή ενός προθεσμιακού συμβολαίου βάσει του οποίου την χρονική στιγμή t συμφωνούμε να δώσουμε το ποσό $F(t,T^*,T)$ την χρονική στιγμή T^* για να μας παραδωθεί ένα ομόλογο με λήξη T.

Μπορεί κανείς να δείξει εύκολα ότι

$$F(t,T^*,T)=\frac{P(t,T)}{P(t,T^*)}$$

Η βασική υποθεση του μοντέλου είναι ότι

$$P(1,T) = \begin{cases} u(0,T)\,\frac{P(0,T)}{P(0,1)} = u(0,T)\,F(0,1,T), & \omega = u \\ d(0,T)\,\frac{P(0,T)}{P(0,1)} = d(0,T)\,F(0,1,T), & \omega = d \end{cases}$$

δηλαδή ότι υπάρχουν 2 πιθανές καταστάσεις της οικονομίας ως προς τις αποδοσεις, η ανοδική και η καθοδική.

Το ίδιο σενάριο συνεχίζεται και τις επόμενες χρονικές στιγμές, δηλαδή

$$P(t+1,T) = \begin{cases} u(t,T-t)\,\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} = u(t,T-t)\,F(t,t+1,T), & \omega = u \\ d(t,T-t)\,\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} = d(t,T-t)\,F(t,t+1,T), & \omega = d \end{cases}$$

Για απλοποίηση της διαδικασίας θεωρούμε ότι τα $u(t, T-t)$, $d(t, T-t)$ δεν εξαρτώνται ούτε απο τις τιμές των ομολόγων ούτε απο τις χρονικές στιγμές t, δηλαδή $u(t, T-t) = u(T-t)$ και $d(t, T-t) = d(T-t)$. Αυτό μας φέρνει σε ένα μοντέλο το οποίο μοιάζει με το διωνυμικό μοντέλο.

Θα πρέπει να επιλεγούν τα $u(T), d(T)$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε το μοντέλο να μην παρουσιάζει ευκαιρίες για arbitrage.

Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει ως ακολούθως

$$u(T) = \frac{1-(1-q)\, d(T)}{q}, \quad 0 < q < 1$$

Για λόγους περισσοτερο υπολογιστικούς θα κατασκευάσουμε ένα διωνυμικό μοντέλο το οποίο είναι επανασυνδεόμενο (recombining)).

Ας συμβολίσουμε με $P_i(t, T)$ την τιμή την χρονική στιγμή t ενος ομολόγου του οποίο αποδίδει 1 την χρονική στιγμή T δεδομένου ότι έχουν προηγηθεί i καθοδικές κινήσεις της οικονομίας και $t - i$ ανοδικές κινήσεις της οικονομίας μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και t.

Το ζητούμενο είναι να σχεδιαστεί το μοντέλο κατα τέτοιο τρόπο ώστε οι τιμές να εξαρτώνται μόνο απο τον συνολικό αριθμό ανοδικών και καθοδικών κινήσεων και όχι απο την σειρά με την οποία αυτές εμφανίζονται, δηλαδη π.χ. οι τιμές για την συνολική κίνηση της οικονομίας $u - d$ και οι τιμές για την συνολική κίνηση της οικονομίας $d - u$ θα πρέπει να ταυτίζονται.

Με άλλα λόγια το μοντέλο δίνει αποτελέσματα τα οποία καθορίζονται απο την κατάσταση της οικονομίας και όχι απο τον τρόπο (το μονοπάτι) το οποίο μας οδήγησε στην κατάσταση αυτή.

Αυτό μας οδηγεί στο να έχουμε ότι

$$\frac{d(T)}{u(T)} = k^{T-1}, \quad 0 < k < 1$$

όπου

$$k = \frac{P_1(1,2)}{P_0(1,2)} = \frac{d(2)}{u(2)}$$

κατά συνέπεια όλο το μοντέλο μπορεί να κατασκευαστεί με την γνώση μόνο μιας παραμέτρου της παραμέτρου k.

Αυτή μπορεί να υπολογιστεί απο στοιχεία της αγοράς.

Η συνθήκη απουσίας arbitrage προυποθέτει ότι

$$q\,u(T) + (1-q)\,d(T) = 1$$

για κάποιο $0 < q < 1$ οπότε

$$u(T) = \frac{1}{(1-q)\,k^{T-1} + q}, \quad d(T) = \frac{k^{T-1}}{(1-q)\,k^{T-1} + q}$$

Το μοντέλο αυτό μπορεί να μας δώσει όλα τα πιθανά σενάρια σχετικά με τις τιμές και τις αποδόσεις των ομολόγων στις διαφορετικές πιθανές καταστάσεις της οικονομίας.

Έχοντας το μοντέλο για τα $P(t, T)$ μπορούμε στην συνέχεια να πάρουμε τις τιμές των προθεσμιακών συμβολαίων και τις καμπύλες των προθεσμιακών αποδόσεων.

Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση των τύπων

$$F(t, T-1, T) = ln\left(\frac{P(t, T-1)}{P(t, T)}\right)$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να κατασκευάσουμε το short rate απο τον τύπο

$$r(t) = F(t, t, t+1)$$

Το $r(t)$ που προβλέπεται απο το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί σε ένα τυχαίο περίπατο με σταθερή μεταβλητότητα και ταχύτητα που μεταβάλλεται χρονικά.

Επίσης μπορούμε να κατασκευάσουμε και την καμπύλη των αποδοσεων με την χρήση του τύπου

$$R(t, T) = -\frac{ln(P(t, T))}{T - t}$$

Το μοντέλο του Vasicek για το short rate

Το μοντέλο του Vasicek αποτελεί ένα μοντέλο για το short rate $r(t)$.

Βασιζεται στην διαδικασια Ornstein -Uhlenbeck και είναι της μορφής

$$dr(t) = a(\beta - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad a, b, \sigma > 0.$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$P(t, T) = \exp(A(T-t) - B(T-t)r(t)),$$

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a},$$

$$A(\tau) = (B(\tau) - \tau)\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) = \frac{\sigma^2}{4a}B^2(\tau)$$

Επίσης

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t, T) = -\frac{A(T-t)}{T-t} + \frac{B(T-t)}{T-t}r(t)$$

Ο υπολογισμος του $P(t,T)$ βασίζεται στην σχέση

$$P(t,T) = \mathbb{E}[\exp(-\int_t^T r(s)ds \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\exp(-\int_t^T r(s)ds \mid r(t)],$$

(το τελευταιο λόγω της ιδιότητας Markov)

Δεδομένου ότι η διαδικασια $r(t)$ μπορεί να εκφραστεί κάνοντας χρηση του λήμματος του Itō αναλυτικά σαν μία διαδικασία Gauss ο υπολογισμός της εκθετικής αυτής ροπής μπορεί να γίνει αναλυτικα οδηγώντας στο παραπάνω αποτέλεσμα.

Εναλλακτικα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P(t,T) = V(T-t, r(t))$ για κάποια συναρτηση $V(\tau, r)$.

Εφαρμοζοντας το λήμμα του Itō στην στοχαστικη διαδικασία $Y(t) = V(T-t, r(t)$ μπορούμε να δούμε ότι

$$dY(t) = -\frac{\partial V(\tau,r)}{\partial \tau}dt + \frac{\partial V(\tau, r(t))}{\partial r}dr(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(\tau, r(t)}{\partial r^2}dr(t)^2$$

$$= \left(-\frac{\partial V}{\partial \tau} + (a(b-r))\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\sigma^2\right)(\tau, r(t))dt + \frac{\partial V}{\partial r}(\tau, r(t))\sigma dW(t)$$

Η ανάμενόμενη μεταβολή του $P(t,T,r(t))$ θα πρέπει να είναι ίση προς $dP(t,T,r(T)) = r(t)P(t,T,r(t))$ δηλαδή το θα πρέπει

$$dE[Y(t)] = r(t)Y(t)$$

και αυτό είναι δυνατόν εάν

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial \tau} + (a(b-r))\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\sigma^2\right) = rV(\tau, r)$$

Η συναρτηση $V(\tau, r)$ που ψάχνουμε θα λύνει την παραπάνω διαφορική εξίσωση και επιπλέον θα πρέπει $V(T - T, r(T)) = V(0, r(T)) = 1$ οποιαδήποτε τιμή και αν παίρνει το $r(T)$, εφόσον $P(T, T) = 1$.

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε μια λύση της εξίσωσης αυτής της μορφής

$$V(\tau, r) = \exp(A(\tau) - B(\tau)r).$$

όπου $A(\tau), B(\tau)$ συναρτήσεις που θα επιλέξουμε κατάλληλα ώστε $B(0) = 0$ και $A(0) = 0$ και τέτοιες ώστε η $V(\tau, r)$ να ικανοποιεί την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην διαφορικη εξίσωση βρισκουμε 2 συνήθεις διαφορικες εξισώσεις για τις A και B η λύση των οποίων μας δινει τα παραπάνω αποτελέσματα.

Το μοντέλο Cox-Ingersol-Ross

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό

$$dr(r) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Για το μοντέλο αυτό ισχύει

$$f(r(T) \mid r(t)) = c\,\chi^2_{2q+2,2u}(2c\,r(t)),$$

$$q = \frac{2ab}{\sigma^2} - 1,\ \ u = cr(t)e^{-a(T-t)},\ \ c = \frac{2a}{\sigma^2(1 - e^{-a(T-t)})},$$

όπου $\chi^2_{n,m}$ ειναι η κατανομή χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας m.

Επειδή η κατανομή αυτή έχει μεσο $n+m$ και διασπορά $2(n+2m)$,

$$\mathbb{E}[r(T) \mid r(t)] = r(t)e^{-a(T-t)} + b(1 - e^{-a(T-t)},$$

$$Var(r(T) \mid r(t)) = \frac{\sigma^2 r(t)}{a}(e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)}) + \frac{\sigma^2 b}{2a}(1 - e^{-a(T-t)})^2.$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$
\begin{aligned}
P(t, T) &= \exp(A(T-t) - B(T-t)\, r(t)), \\
B(\tau) &= \frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}, \\
A(\tau) &= \frac{2ab}{\sigma^2} \ln\left(\frac{2\gamma e^{\frac{1}{2}(\gamma+a)\tau}}{(\gamma+a)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}\right), \\
\gamma &= \sqrt{a^2+2\sigma^2}
\end{aligned}
$$