Unimathematik für den Studiengang: ???
Zusammenfassung

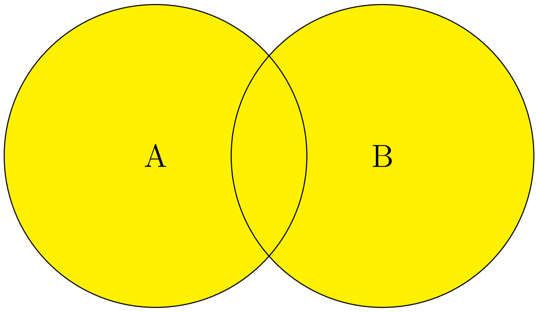
Konstantin Lukas

02.08.2021

Contents

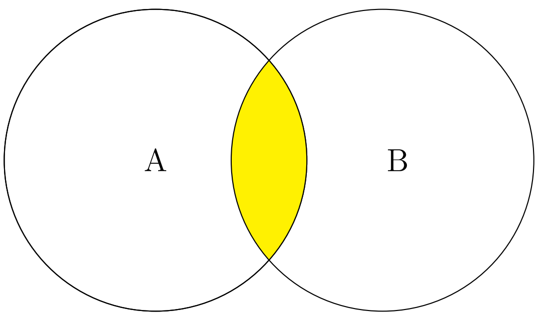
1 Mengen

1.1 Vereinigung



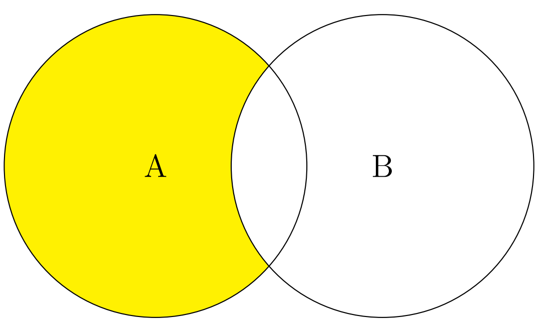
$A \cup B := \{x \mid x \in A \, oder \, x \in B\}$

1.2 Durchschnitt



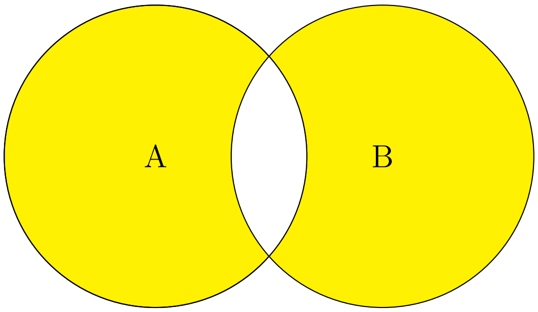
$A \cap B := \{x \mid x \in A \, und \, x \in B\}$

1.3 Differenz



$A \setminus B := \{x \mid x \in A \, und \, x \notin B\}$

1.4 Symmetrische Differenz



$A \triangle B := \{x \mid (x \in A) \veebar (x \in B)\}$ $\qquad$ $A \triangle B := \{x \mid (x \in A) \nleftrightarrow (x \in B)\}$

1.5 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$

1.6 Menge der Natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; ...\}$

1.7 Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

1.8 Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

1.9 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen umfassen die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen.

1.10 Irrationale Zahlen

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

2 Betrag

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$|-a| = |a|$

3 Intervalle

3.1 Abgeschlossene Intervalle

$[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

3.2 Offene Intervalle

$(a; b) =]a; b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

3.3 Halboffene Intervalle

Rechtsoffen
$[a; b) = [a; b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Linksoffen
$(a; b] =]a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

4 Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

5 Euklidischer Algorithmus

Der euklidische Algorithmus findet den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen. Das eignet sich ausgezeichnet dazu, Brüche zu kürzen. Der vorletzte Rest bevor $R = 0$ eintritt, ist das Ergebnis.

$2160 : 2592 = 0 \quad R = 2160$

$2592 : 2160 = 1 \quad R = 432$

$2160 : 432 = 5 \quad R = 0$

$$\frac{2592}{2160} = \frac{6 \cdot 432}{5 \cdot 432} = \frac{6}{5}$$

6 Brüche dividieren

Um zwei Brüche zu dividieren bildet man den Kehrwert vom Divisor und multipliziert diesen mit dem Dividend.
$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2}$

$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2}$

7 Potenzgesetze

$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$

$\frac{b^k}{b^m} = b^{k-m}$

$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$

$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$

$(a^k)^m = a^{k \cdot m}$

Für $a > 0$ und jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q > 0$) ist

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

Beispiel: Bestimmen Sie m und n so, dass gilt: $(9x^7)^2 = mx^n$

$$\begin{aligned} (9x^7)^2 &= mx^n \\ 81x^{14} &= mx^n \end{aligned}$$

$m = 81$ und $n = 14$

8 Wurzelgesetze

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0, c > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Beispiel: Nach der dritten Binomischen Formel gilt für $a, b > 0, a \neq b$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} && \cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \\
=&\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\
=&\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2} \\
=&\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{(1+a^2)\cdot(a-b)^2}}{\sqrt[4]{16(1+a^2)^2}} \\
=&\sqrt{\frac{(1+a)^2\cdot(a-b)^2}{\sqrt{16(1+a^2)^2}}} \\
=&\sqrt{\frac{(1+a)^2\cdot(a-b)^2}{4(1+a)^2}} \\
=&\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2} \\
=&\frac{\mid a-b \mid}{2}
\end{aligned}
$$

8.1 Wurzeltherme vereinfachen (Beispiele)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}+3} &= \sqrt{2}+\frac{2\cdot(2\sqrt{2}-])}{\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)} \\
&= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}-6}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-3^2} \\
&= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}-6}{-1} \\
&= \sqrt{2}-4\sqrt{2}+6 \\
&= 6-3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} &= \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{1+x^2-1} \\
&= \frac{2}{x^2}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3: Bestimmen Sie x und y, sodass $\frac{x}{y}$ vollständig gekürzt ist.

$$\begin{aligned}
\frac{2 \cdot 2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2 \cdot \frac{2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2 \cdot 2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2 \cdot 2^{\frac{9}{4}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2^{\frac{13}{4}} &= 2^{\frac{x}{y}}
\end{aligned}$$

Damit gilt $x = 13$ und $y = 4$.