Mathematik fürs Informatikstudium und Abitur: Eine Zusammenfassung

Konstantin Lukas

Fassung vom 16. August 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen **4**
- 1.1 Vereinigung 4
- 1.2 Durchschnitt 4
- 1.3 Differenz 4
- 1.4 Symmetrische Differenz 5
- 1.5 Definierte Zahlenmengen 5

2 Elementare Rechengesetze, -verfahren und -notationen **5**
- 2.1 Brüche dividieren 5
- 2.2 Lösungsmenge 6
- 2.3 Normalform 6
  - 2.3.1 p-q-Formel 6
- 2.4 Intervalle 7
  - 2.4.1 Abgeschlossene Intervalle 7
  - 2.4.2 Offene Intervalle 7
  - 2.4.3 Halboffene Intervalle 7
- 2.5 Beträge 7
- 2.6 Binomische Formeln 7
- 2.7 Euklidischer Algorithmus 7
- 2.8 Potenzgesetze 8
- 2.9 Wurzelgesetze 8
  - 2.9.1 Wurzeltherme vereinfachen (Beispiele) 9
- 2.10 Logarithmusgesetze 11

3 Vereinfachungen zum Lösen von Gleichungen **11**
- 3.1 Quadratische Ergänzung 11
- 3.2 Faktorisieren 12
  - 3.2.1 Faktorisierung durch Ausklammern 12
  - 3.2.2 Faktorisierung mit binomischen Formeln 12
  - 3.2.3 Faktorisierung mit dem Satz von Viëta 12
- 3.3 Substitution 13

4 Ungleichungen **13**
- 4.1 Rechenregeln 13
- 4.2 Quadratische Ungleichungen 14

4.3 Ungleichungen mit Beträgen . . . 14
4.4 Ungleichungen mit Variable im Nenner – Teil I . . . 15
4.5 Ungleichungen mit Variable im Nenner – Teil II . . . 16

5 Lineare Gleichungssysteme . . . 17
5.1 Einsetzungsverfahren . . . 18
5.2 Additionsverfahren . . . 19
5.3 Gauß-Verfahren . . . 19
5.4 LGS mit Parameter . . . 20

6 Geometrie . . . 21
6.1 Rechtwinklige Dreiecke . . . 21
6.1.1 Kathetensatz . . . 21
6.1.2 Höhensatz . . . 22
6.1.3 Sinus, Kosinus und Tangens . . . 22
6.2 Rechnen mit Flächen (Formeln) . . . 22
6.2.1 Dreieck . . . 22
6.2.2 Kreis . . . 23
6.3 Rechnen mit Körpern (Formeln) . . . 23
6.3.1 Prisma . . . 23
6.3.2 Pyramide . . . 24
6.3.3 Zylinder . . . 24
6.3.4 Kegel . . . 24

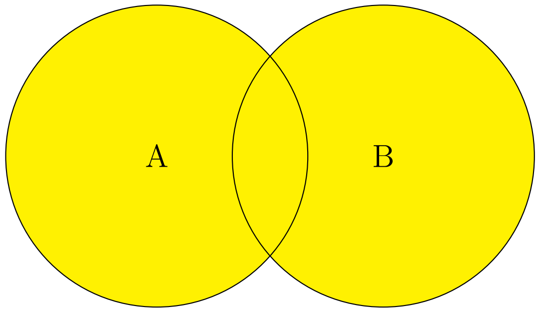
7 Funktionen . . . 25
7.1 Allgemeines . . . 25
7.1.1 Monotonie . . . 25
7.1.2 Besondere Stellen . . . 25
7.1.3 Symmetrie . . . 26
7.2 Potenz- und Wurzelfunktionen . . . 26
7.2.1 Wurzelgleichungen . . . 27
7.2.2 Wurzelgleichungen mit mehreren Wurzeln (Beispiel) . . . 29
7.3 Betragsfunktionen . . . 29
7.3.1 Betragsgleichungen mit mehreren Beträgen . . . 30
7.4 Polynomfunktionen . . . 32
7.4.1 Lösen durch Substitution . . . 32
7.4.2 Lösen durch Faktorisierung . . . 33
7.4.3 Lösen mit binomischen Formeln . . . 34
7.4.4 Lösen durch Polynomdivision . . . 35
7.5 Exponentialfunktionen . . . 36
7.5.1 Lösen von Exponentialgleichungen . . . 36
7.6 Logarithmusfunktionen . . . 37
7.6.1 Lösen von Logarithmusgleichungen . . . 37
7.7 Trigonometrische Funktionen . . . 38
7.8 Verkettete Funktionen . . . 39

8 Differenzialrechnung . . . 39
8.1 Die Ableitung . . . 39
8.1.1 Differenzenquotient . . . 40
8.1.2 Differentialquotient . . . 41
8.1.3 Eine Funktion und ihre Ableitungen . . . 41

8.2 Limes: Der Grenzwert 42
8.3 Differenzierbarkeit 44
8.3.1 Stetige Erweiterung 45
8.4 Rationalen Funktionen 46
8.5 Grenzverhalten von ganzrationalen Funktionen 46
8.6 Tangentengleichung 46
8.7 Kurvendiskussion 46

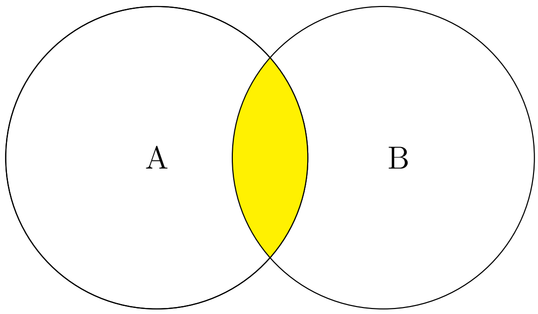
1 Mengen

1.1 Vereinigung



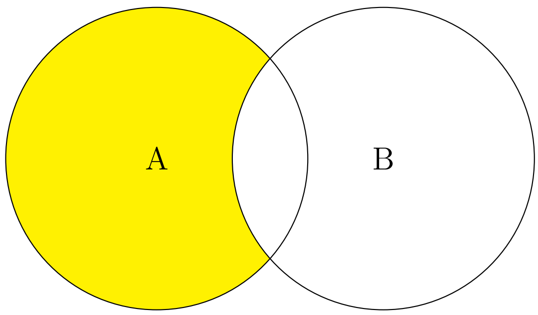
$A \cup B := \{x \mid x \in A \, oder \, x \in B\}$

1.2 Durchschnitt



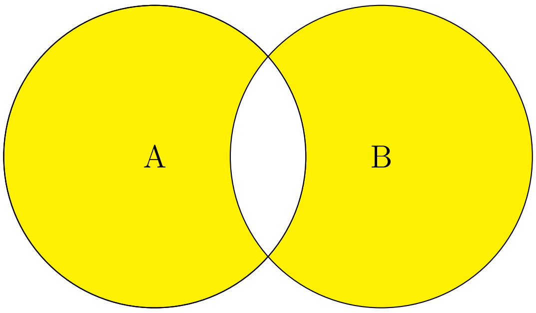
$A \cap B := \{x \mid x \in A \, und \, x \in B\}$

1.3 Differenz



$A \setminus B := \{x \mid x \in A \, und \, x \notin B\}$

1.4 Symmetrische Differenz



$A \triangle B := \{x \mid (x \in A) \veebar (x \in B)\}$ $A \triangle B := \{x \mid (x \in A) \nleftrightarrow (x \in B)\}$

1.5 Definierte Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$

Menge der Natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; ...\}$

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

Reelle Zahlen
Die reellen Zahlen umfassen die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen.

Irrationale Zahlen

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

2 Elementare Rechengesetze, -verfahren und -notationen

2.1 Brüche dividieren

Um zwei Brüche zu dividieren bildet man den Kehrwert vom Divisor und multipliziert diesen mit dem Dividend.

$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2}$

$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2}$

2.2 Lösungsmenge

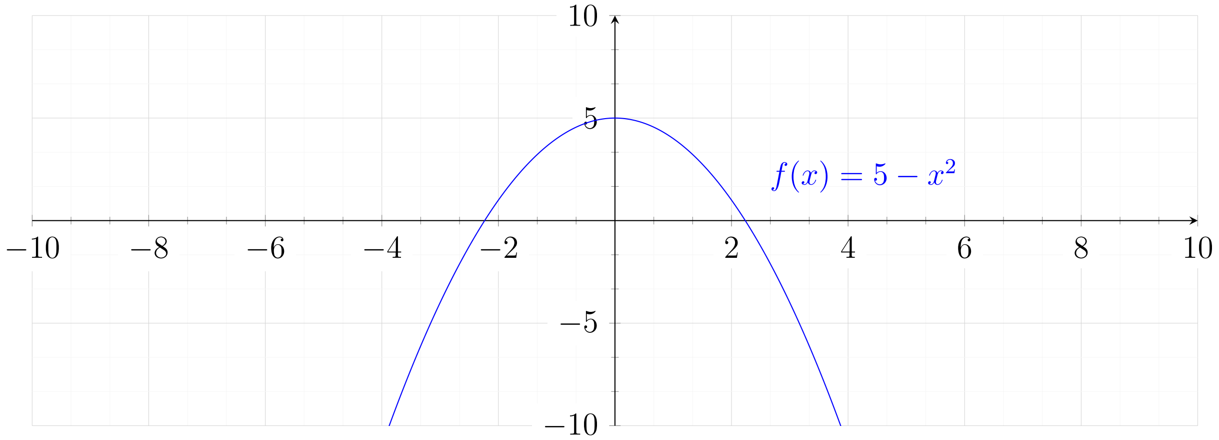
Beispiel 1 ($x^2 = -1$):
$\mathbb{L} = \emptyset$

Beispiel 2 ($x^2 = 4$):
$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$

Beispiel 3 ($sin(x) = 0$):
$\mathbb{L} = \{...; -2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; ...\}$

Beispiel 4 ($x^2 + y = 5$):
$\mathbb{L} = \{(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0^2 + y_0 = 5\} = \{(x_0; 5 - x_0^2) \mid x_0 \in \mathbb{R}^2\}$

In diesem Fall ist die Lösungsmenge die Funktion $y = 5 - x^2$.



2.3 Normalform

Eine Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$, heißt quadratisch. Spezial bezeichnet man $x^2 + px + q = 0$ mir $p, q \in \mathbb{R}$, als quadratische Gleichung in Normalform.

Man kann eine quadratische Gleichung in die Normalform überführen, indem man durch a teilt: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

2.3.1 p-q-Formel

Um die Nullstellen einer quadratischen Gleichung in der Normalform zu finden, kann man die p-q-Formel benutzen: $x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist die Diskriminante. Sie gibt Aufschluss über die Lösungsmenge.

$D > 0 \Rightarrow$ *Es gibt zwei Lsg.*

$D = 0 \Rightarrow$ *Es gibt eine Lsg.*

$D < 0 \Rightarrow$ *Es gibt keine Lsg.*

2.4 Intervalle

2.4.1 Abgeschlossene Intervalle

$[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

2.4.2 Offene Intervalle

$(a; b) =]a; b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

2.4.3 Halboffene Intervalle

Rechtsoffen
$[a; b) = \ [a; b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Linksoffen
$(a; b] =]a; b] \ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

2.5 Beträge

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$| - a| = |a|$

2.6 Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2.7 Euklidischer Algorithmus

Der euklidische Algorithmus findet den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen. Das eignet sich ausgezeichnet dazu, Brüche zu kürzen. Der vorletzte Rest bevor $R = 0$ eintritt, ist das Ergebnis.

$2160 : 2592 = 0 \quad R = 2160$
$2592 : 2160 = 1 \quad R = 432$
$2160 : 432 = 5 \quad R = 0$

$$\frac{2592}{2160} = \frac{6 \cdot 432}{5 \cdot 432} = \frac{6}{5}$$

2.8 Potenzgesetze

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

$$\frac{b^k}{b^m} = b^{k-m}$$

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$(a^k)^m = a^{k \cdot m}$$

Für $a > 0$ und jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q > 0$) ist

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

Beispiel: Bestimmen Sie m und n so, dass gilt: $(9x^7)^2 = mx^n$

$$(9x^7)^2 = mx^n$$
$$81x^{14} = mx^n$$

$m = 81$ und $n = 14$

2.9 Wurzelgesetze

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0, c > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Beispiel 1: Nach der dritten Binomischen Formel gilt für $a, b > 0, a \neq b$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} && \mid \cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \\
=&\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\
=&\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2} \\
=&\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{(1+a^2)\cdot(a-b)^2}}{\sqrt[4]{16(1+a^2)^2}} \\
=&\sqrt{\frac{(1+a)^2\cdot(a-b)^2}{\sqrt{16(1+a^2)^2}}} \\
=&\sqrt{\frac{(1+a)^2\cdot(a-b)^2}{4(1+a)^2}} \\
=&\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2} \\
=&\frac{\mid a-b \mid}{2}
\end{aligned}
$$

2.9.1 Wurzeltherme vereinfachen (Beispiele)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}+3} &= \sqrt{2}+\frac{2\cdot(2\sqrt{2}-])}{\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)} \\
&= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}-6}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-3^2} \\
&= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}-6}{-1} \\
&= \sqrt{2}-4\sqrt{2}+6 \\
&= 6-3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} &= \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{1+x^2-1} \\
&= \frac{2}{x^2}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3: Bestimmen Sie x und y, sodass $\frac{x}{y}$ vollständig gekürzt ist.

$$\begin{aligned}
\frac{2 \cdot 2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2 \cdot \frac{2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2 \cdot 2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2 \cdot 2^{\frac{9}{4}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2^{\frac{13}{4}} &= 2^{\frac{x}{y}}
\end{aligned}$$

Damit gilt $x = 13$ und $y = 4$.

2.10 Logarithmusgesetze

Die Logarithmusrechnung dient dazu das x im Term $b^x = a$ zu bestimmen. Es ist damit quasi das Gegenstück zur Potenzrechnung. Rechnen wir z. B. 9^3, kommen wir auf 729. Umgekehrt können wir jetzt aber auch $log_9 729$ rechnen und kommen auf 3. Es gibt außerdem die speziellen Notationen ln und lg, die jeweils *natürlicher Logarithmus* und *dekadischer Logarithmus* genannt werden.

$ln(b) := log_e(b)$

$lg(b) := log_{10}(b)$

$log_b(b) = 1$

$log_b(1) = 0$

$log_b(u \cdot v) = log_b(u) + log_b(v)$

$log_b\left(\frac{u}{v}\right) = log_b(u) - log_b(v)$

$log_b(u^v) = v \cdot log_b(u)$

$log_b(\sqrt[u]{v}) = \frac{log_b(v)}{u}$

$log_a(v) = \frac{log_b(v)}{log_b(a)}$

3 Vereinfachungen zum Lösen von Gleichungen

3.1 Quadratische Ergänzung

Die äquivalente Umformung der quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$ in $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ wird als quadratische Ergänzung bezeichnet. In anderen Worten fügt man den Term $+\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ hinzu.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
x^2 + 8x + 7 &= 0 \\
x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 7 &= 0 \\
x^2 + 8x + 4^2 + 4^2 + 7 &= 0 \\
(x+4)^2 + 4^2 + 7 &= 0 \\
(x+4)^2 - 9 &= 0 \qquad \mid +9 \\
(x+4)^2 &= 9 \qquad \mid \sqrt{} \\
x &= \pm\sqrt{9} - 4 \\
\mathbb{L} &= \{-1; -7\}
\end{aligned}$$

3.2 Faktorisieren

Um die Nullstellen eines Terms zu finden, bietet es sich an, ihn als Produkt einfacher Terme zu schreiben, denn ist ein Faktor 0, ist das Produkt ebenfalls 0. Den Term in so eine Form zu überführen, nennt sich Faktorisieren.

3.2.1 Faktorisierung durch Ausklammern

Beispiel:

$$\begin{aligned}
x^4 + 2x^3 + 3x^2 &= 0 \\
x^2(x^2 + 2x + 3) &= 0 \\
x^2 = 0 \textit{ oder } (x^2 + 2x + 3) &= 0 \\
\mathbb{L} &= \{0\}
\end{aligned}$$

Für $x^2 + 2x + 3 = 0$ existiert keine reelle Lösung $\Rightarrow$ p-q-Formel (S. 6).

3.2.2 Faktorisierung mit binomischen Formeln

Beispiel:

$$\begin{aligned}
9x^2 + 30x + 25 &= 0 \\
(3x+5)^2 &= 0 \\
3x + 5 &= 0 \qquad \mid -5 \\
3x &= -5 \qquad \mid : 3 \\
x &= -\frac{5}{3} \\
\mathbb{L} &= \left\{-\frac{5}{3}\right\}
\end{aligned}$$

3.2.3 Faktorisierung mit dem Satz von Viëta

Der Satz von Viëta besagt, dass $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ist. p und q lassen sich auf die Nullstellen zurückführen: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Daraus lässt sich $x_2 = \frac{q}{x_1}$ ableiten. Wenn man also durch Raten eine Nullstelle findet, kann man so die andere Nullstelle auch ganz einfach finden.

Beispiel (eine Nullstelle ist 1, die andere ergibt sich als $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$):

$$
\begin{aligned}
x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} &= 0 \\
(x - 1) \cdot (x + \sqrt{2}) &= 0 \\
\mathbb{L} &= \{1; -\sqrt{2}\}
\end{aligned}
$$

3.3 Substitution

Substitution erlaubt es uns manchmal Gleichungen zu vereinfachen, um leichter mit ihnen rechnen zu können.

Beispiel: $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$
Hier bietet es sich an x^4 durch u zu ersetzen.

$$
\begin{aligned}
u^2 - 15u - 16 &= 0 \\
u_\pm &= \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15}{2}\right)^2 + 6}
\end{aligned}
$$

Diesen Term wiederum können wir ganz einfach mit der p-q-Formel (S. 6) lösen. Dabei erhalten wir $u_+ = 16$ und $u_- = -1$. Um unsere endgültige Lösungsmenge zu bekommen, müssen wir noch resubstituieren.

$$
\begin{aligned}
x^4 &= u_+ = 16 \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= -2
\end{aligned}
$$

Da es kein x gibt, das $x^4 = -1$ erfüllt, haben wir bereits unsere komplette Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$.

4 Ungleichungen

4.1 Rechenregeln

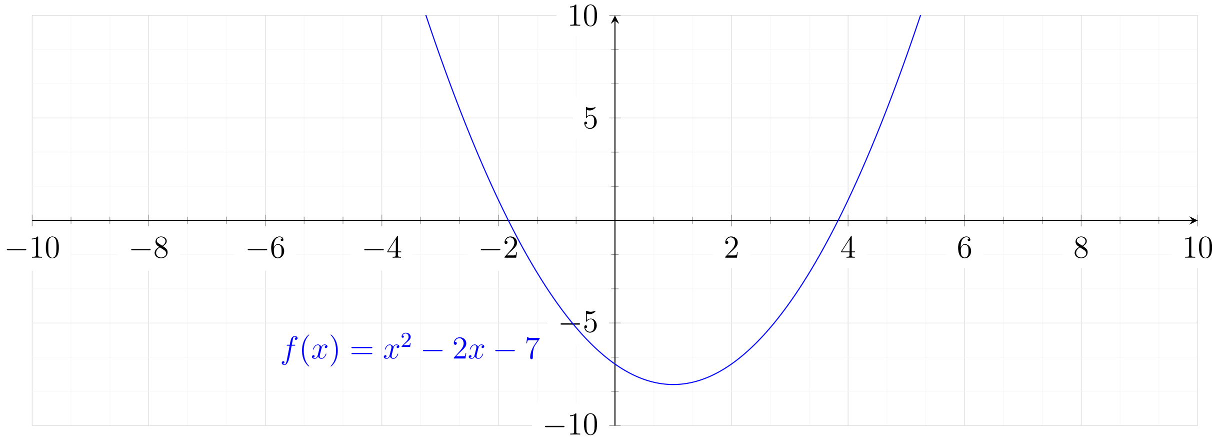
Wenn man ein Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch diese teilt, muss das Vergleichszeichen umgekehrt werden.

Für $c < 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
a < b &\iff c \cdot a > c \cdot b \\
a < b &\iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}
\end{aligned}
$$

4.2 Quadratische Ungleichungen

Um die Lösungsmenge einer quadratischen Ungleichung zu finden, formt man die Ungleichung zunächst so um, dass auf einer Seite 0 steht. Auf der anderen Seite hat man dann optimalerweise eine quadratische Funktion. Schauen wir uns mal das Beispiel $x^2 > 2x + 7$ an.



Wir stellen also zunächst um und erhalten $x^2 - 2x - 7 > 0$. Daraus ergibt sich auch die Funktion oben. An der Grafik erkennt man sehr gut, was wir eigentlich suchen. Denn unsere Lösungsmenge sind alle x, für die $f(x)$ größer als 0 ist. Und wie kriegen wir das raus? Indem wir die Nullstellen berechnen. Das Intervall von Unendlich bis zur linken Nullstelle ist ein Teil unserer Lösung und der andere ist das Intervall von der rechten Nullstelle bis unendlich. Dabei muss man stets verschiedene Fälle beachten. Für eine nach unten geöffnete Funktion $(-x^2)$ suchen wir den Bereich zwischen den Nullstellen. Für eine Funktion oberhalb der x-Achse, die keine Nullstellen hat, sind alle reellen Zahlen unsere Lösungsmenge, wohingegen eine Funktion ohne Nullstellen unterhalb der x-Achse eine leere Lösungsmenge liefern würde. Eine Funktion mit genau einer Nullstelle liefert hingegen eine Lösungsmenge aller reellen Zahlen außer der Nullstelle. Es gibt je nach Art der Funktion und Vergleichszeichen in unserer Ungleichung viele unterschiedliche Szenarien, weshalb es immer ratsam ist eine Skizze anzufertigen. Für das Beispiel oben können wir die p-q-Formel (S. 6) verwenden, um die Nullstellen zu berechnen.

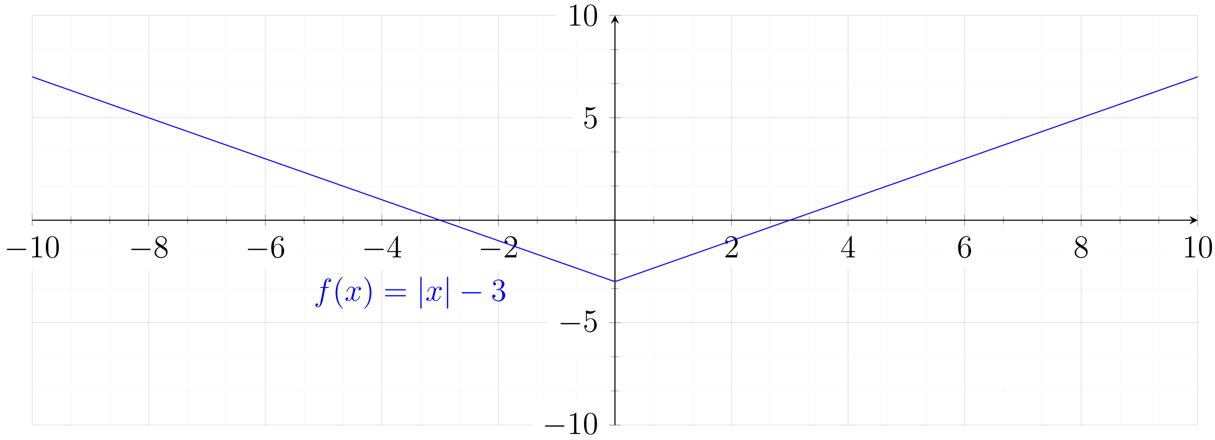
$$x_\pm = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 7}$$
$$x_1 = 1 - 2\sqrt{2}$$
$$x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$$

Jetzt, wo wir die Nullstellen haben, ist es nicht schwer die Lösungsmenge anzugeben. Dabei sollte man darauf achten, dass man abgeschlossene und offene Intervalle (S. 7) nicht verwechselt.

$$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \left[1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right] = \left(-\infty; 1 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(1 + 2\sqrt{2}\right)$$

4.3 Ungleichungen mit Beträgen

Das Vorgehen bei Betragsungleichungen ist im Grunde genommen dasselbe Prinzip, wie bei den quadratischen. Schauen wir uns das Beispiel $|x| - 3 < 0$ an.



Wir erkennen die Nullstellen in dem Fall sehr leicht. Das sind -3 und 3. Erkennt man das nicht sofort, muss man eine Fallunterscheidung (S. 29) durchführen. Jetzt können wir aber erst mal unsere Lösungsmenge definieren, denn wir wissen, dass wir alle x suchen für die $f(x) < 0$ gilt.

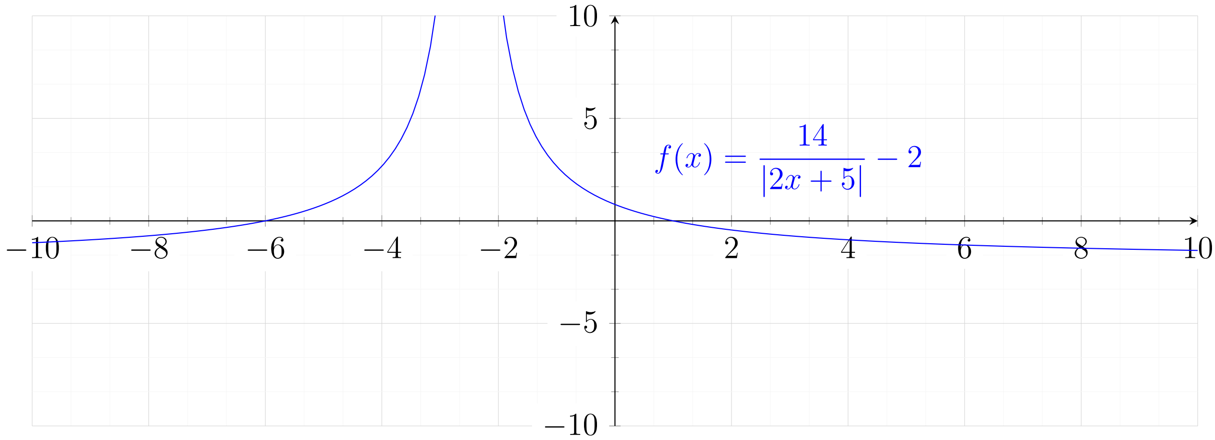
$\mathbb{L} = (-3; 3)$

Hinweis: Wäre unsere Ausgangsungleichung $|x| - 3 \leq 0$, sehe unsere Lösungsmenge jetzt so aus:

$\mathbb{L} = [-3; 3]$

4.4 Ungleichungen mit Variable im Nenner – Teil I

Aus den vorherigen Erklärungen kann man sich herleiten, wie man das macht. Deshalb ist hier nur noch mal ein erklärendes Beispiel: $2 \leq \frac{14}{|2x+5|}$.



Wichtig ist, dass wir zunächst alle x ausschließen, für die im Nenner 0 rauskommt. In diesem Fall ist dass $-\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} 2 &\leq \frac{14}{|2x+5|} \\ 2|2x+5| &\leq 14 \\ |2x+5| &\leq 7 \end{aligned}$$

Fall 1: $2x + 5 > 0$

$$\begin{aligned} 2x + 5 &\leq 7 \\ 2x &\leq 2 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

Fall 2: $2x + 5 < 0$

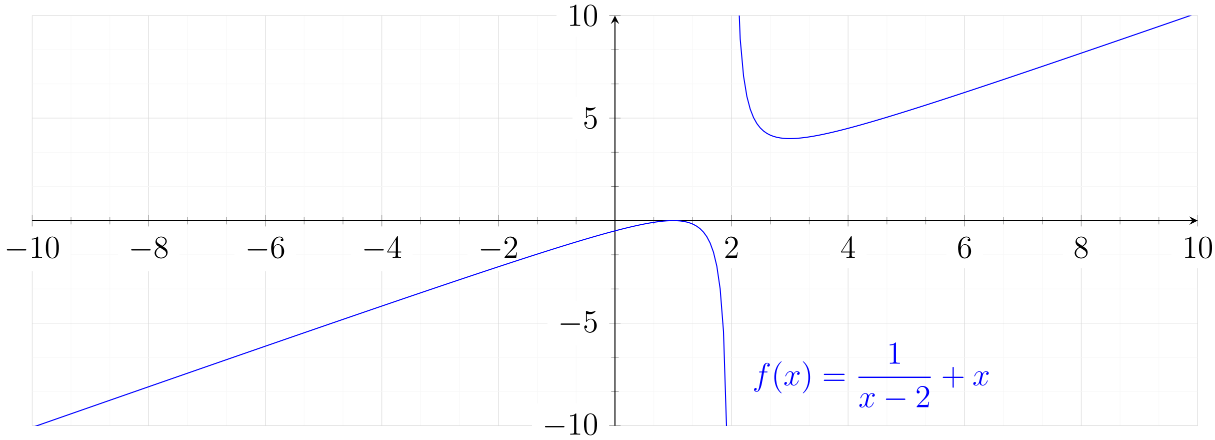
$$\begin{aligned}
-2x - 5 &\leq 7 \\
-2x &\leq 12 \\
x &\geq -6
\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left[-6; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; 1\right]$$

4.5 Ungleichungen mit Variable im Nenner – Teil II

Wenn wir uns an die Rechenregeln (S. 13) für Ungleichungen erinnern, könnte man sich fragen, was passiert, wenn der Nenner mit einer Variable sowohl positiv als auch negativ sein kann. Denn wenn wir mit einer negativen Zahl multiplizieren, müssten wir das Vorzeichen umkehren. Hier muss man wieder verschiedene Fälle unterscheiden.

Beispiel: $\frac{1}{x-2} \leq -x$



Der Fall $x = 2$ ist aufgrund des x im Nenner wieder auszuschließen. Fall 1: $x > 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} &\leq -x \\
1 &\leq -x(x-2) \\
1 &\leq -x^2 + 2x \\
x^2 - 2x + 1 &\leq 0 \\
(x-1)^2 &\leq 0
\end{aligned}$$

Dieser Fall gilt für $x = 1$. Das widerspricht allerdings der Bedingung $x > 2$ und das Ergebnis ist entsprechend nicht Teil unserer Lösungsmenge.

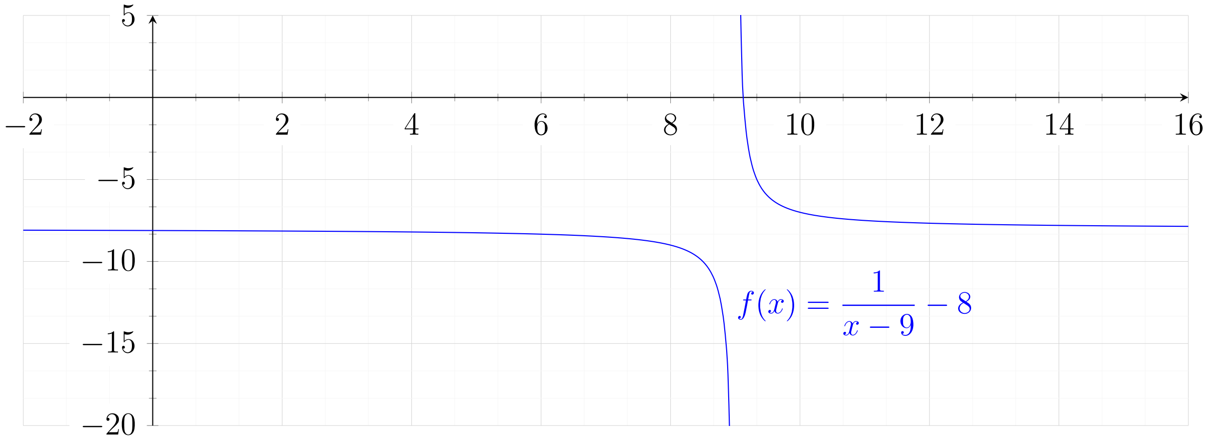
Fall 2: $x < 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} &\leq -x \\
1 &\geq -x(x-2) \\
1 &\geq -x^2 + 2x \\
x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\
(x-1)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Dieser Fall ist für alle x erfüllt, daher gehören alle $x < 2$ zur Lösungsmenge.

$\mathbb{L} = (-\infty; 2)$

Beispiel: $\frac{1}{x-9} \leq 8$



Fall 1: $x > 9$

$$\frac{1}{x-9} \leq 8$$
$$1 \leq 8x - 72$$
$$8x \geq 73$$
$$x \geq \frac{73}{8}$$

Fall 2: $x < 9$

$$\frac{1}{x-9} \leq 8$$
$$1 \geq 8x - 72$$
$$8x \leq 73$$
$$x \leq \frac{73}{8}$$

$$\mathbb{L} = (-\infty; 9) \cup \left[\frac{73}{8}; \infty\right)$$

5 Lineare Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem ist eine Sammlung an Gleichungen, für die man eine gemeinsame Lösung sucht. Für das Beispiel unten, ist die Lösung $x = 2, y = 3, z = -4$ oder anders ausgedrückt $\mathbb{L} = \{(2; 3; -4)\}$. Wie man darauf kommt, wird unten erklärt.

$$(I) \qquad x + 2y + z = 4$$
$$(II) \qquad x - y + \frac{3}{2}z = -7$$
$$(III) \qquad -4x + 2y = -2$$

5.1 Einsetzungsverfahren

Eine Möglichkeit hat man, wenn man eine Funktion nach einer beliebigen Variable umstellt und diese dann in einer anderen Funktion einsetzt.

(III)

$$\begin{aligned}
-4x + 2y &= -2 \\
-4x &= -2 - 2y \\
x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y
\end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned}
x + 2y + z &= 4 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y + 2y + z &= 4 \\
\frac{1}{2} + \frac{5}{2}y + z &= 4 \\
z &= 3,5 - \frac{5}{2}y
\end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}
x - y + \frac{3}{2}z &= -7 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - y + \frac{3}{2}\left(3,5 - \frac{5}{2}y\right) &= -7 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - y + 5,25 - \frac{15}{4}y &= -7 \\
5,75 - \frac{1}{2}y - \frac{15}{4}y &= -7 \\
-\frac{17}{4}y &= -\frac{51}{4} \\
y &= 3
\end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned}
-4x + 2y &= -2 \\
-4x + 2 \cdot 3 &= -2 \\
-4x + 6 &= -2 \\
-4x &= -8 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned}
x + 2y + z &= 4 \\
2 + 2 \cdot 3 + z &= 4 \\
z &= -4
\end{aligned}$$

5.2 Additionsverfahren

Eine andere Möglichkeit ist es, eine oder mehrere Gleichungen mit einer Zahl zu multiplizieren, sodass eine Variable entfällt, wenn man zwei Gleichungen addiert.

$(I) - (III)$

$$\begin{aligned} 5x + z &= 6 \\ z &= 6 - 5x \end{aligned}$$

$(I) + 2(II)$

$$\begin{aligned} 3x + 4z &= -10 \\ 3x + 4(6 - 5x) &= -10 \\ 3x + 24 - 20x &= -10 \\ -17x &= -34 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} -4x + 2y &= -2 \\ -4 \cdot 2 + 2y &= -2 \\ -8 + 2y &= -2 \\ 2y &= 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2 + 2 \cdot 3 + z &= 4 \\ z &= -4 \end{aligned}$$

Hinweis: sind zwei Gleichungen identisch, so gibt es unendlich viele Lösungsmengen und man muss nur die entsprechende Notation für die Lösungsmenge kennen.

$$\begin{aligned} &(I) & -4x - 2y &= -14 \\ &(II) & 4x + 2y &= 14 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{(x; 7 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

5.3 Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren ist eine bestimmte Vorgehensweise fürs Additionsverfahrens, bei dem man die Gleichungen so umformt, dass man das LGS in die Stufenform bringt und es einfach lösen kann.

$$\begin{aligned} &(I) & x + 2y + z &= 4 \\ &(II) & x - y + \frac{3}{2}z &= -7 \qquad \mid -\frac{3}{2}(I) \\ &(III) & -4x + 2y &= -2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(I) && x + 2y + z = 4 \\
&(II) && -\frac{1}{2}x - 4y = -13 \\
&(III) && -4x + 2y = -2 \qquad \mid +\frac{1}{2}(II)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(I) && x + 2y + z = 4 \\
&(II) && -\frac{1}{2}x - 4y = -13 \\
&(III) && -\frac{17}{4}x = -\frac{17}{2}
\end{aligned}
$$

(III)

$$
\begin{aligned}
-\frac{17}{4}x &= -\frac{17}{2} \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

(II)

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x - 4y &= -13 \\
-1 - 4y &= -13 \\
-4y &= -12 \\
y &= 3
\end{aligned}
$$

(I)

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= 4 \\
2 + 6 + z &= 4 \\
z &= -4
\end{aligned}
$$

5.4 LGS mit Parameter

Kommt in einem LGS ein Parameter vor, dann muss man eine Fallunterscheidung vornehmen und den Parameter in die Lösungsmenge mit einbeziehen.

$$
\begin{aligned}
&(I) && x - 2y = 0 \\
&(II) && y + \frac{1}{3}z = -1 \\
&(III) && (a-3)y = 1
\end{aligned}
$$

Wenn $a = 3$, dann kommt bei der letzten Gleichung $0 = 1$ raus. Dadurch können wir schon mal sagen, was die Lösungsmenge für den Fall $a = 3$ ist.

$\mathbb{L} = \emptyset, falls\ a = 3$

Als nächstes schauen wir uns den Fall $a \neq 0$ an.

(III)

$$
\begin{aligned}
(a-3)y &= 1 \\
y &= \frac{1}{a-3}
\end{aligned}
$$

(II)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-3} + \frac{1}{3}z &= -1 \\
\frac{1}{3}z &= -\frac{1}{a-3} - 1 \\
z &= 3\left(-\frac{1}{a-3} - 1\right) \\
z &= -\frac{3}{a-3} - \frac{3a-9}{a-3} \\
z &= \frac{6-3a}{a-3}
\end{aligned}$$

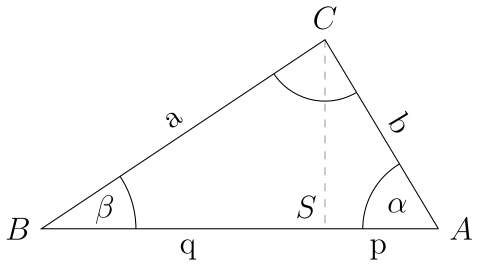
(I)

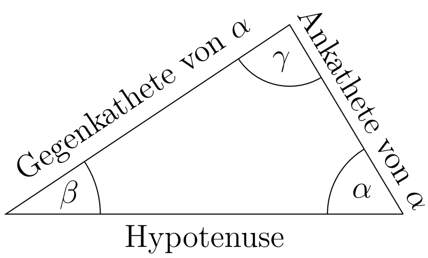
$$\begin{aligned}
x - 2y &= 0 \\
x - 2\left(\frac{1}{a-3}\right) &= 0 \\
x &= \frac{2}{a-3}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{2}{a-3}; \frac{1}{a-3}; \frac{6-3a}{a-3}\right)\right\}, \; falls \; a \neq 3$$

6 Geometrie

6.1 Rechtwinklige Dreiecke





6.1.1 Kathetensatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich zu dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$b^2 = p \cdot c$
$a^2 = q \cdot c$

6.1.2 Höhensatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich zu dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$h^2 = p \cdot q$

6.1.3 Sinus, Kosinus und Tangens

Sinus, Kosinus und Tangens ordnen einem Winkel im rechtwinkligen Dreieck die Längenverhältnisse der Katheten und Hypotenuse zu.

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\textit{Gegenkathete von } \alpha}{\textit{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\textit{Ankathete von } \alpha}{\textit{Hypothenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\textit{Gegenkathete von } \alpha}{\textit{Ankathete von } \alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$\sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha)$

$\cos(90 - \alpha) = \sin(\alpha)$

$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$

6.2 Rechnen mit Flächen (Formeln)

6.2.1 Dreieck

Für ein Dreieck mit der Grundseite c und der Höhe h_c gilt:

$F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

6.2.2 Kreis

Für einen Kreis mit dem Radius r, dem Umfang U und der Fläche F gilt:

$U = 2\pi r$

$F = \pi r^2$

Für einen Kreissektor mit dem Radius r, der Bogenlänge b, der Fläche F und dem Winkel α gilt:

$F = \frac{br}{2}$

Für ein Kreissegment mit dem Radius r, der Bogenlänge b, der Fläche F und dem Winkel α gilt:

$F = \frac{br}{2} - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin(\alpha)$

6.3 Rechnen mit Körpern (Formeln)

6.3.1 Prisma

Für ein Prisma mit der Mantelfläche M, der Grundfläche A, dem Grundflächenumfang U, der Oberfläche O, dem Volumen V und der Höhe h gilt:

$V = A \cdot h$

$M = U \cdot h$

$O = 2 \cdot A + M$

6.3.2 Pyramide

Für eine Pyramide mit der Mantelfläche M, der Grundfläche A, der Oberfläche O, dem Volumen V und der Höhe h gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$$

$$O = 2 \cdot A + M$$

6.3.3 Zylinder

Für einen Zylinder mit der Grundfläche A, dem Radius der Grundfläche r, der Oberfläche O, dem Volumen V und der Höhe h gilt:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Für einen geraden Zylinder gilt außerdem:

$$O = 2\pi r \cdot (r + h)$$

6.3.4 Kegel

Für einen Kegel mit der Grundfläche A, dem Radius der Grundfläche r, der Oberfläche O, dem Volumen V, dem Abstand der Spitze zu einem Punkt der Kreislinie s und der Höhe h gilt:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Für einen geraden Kegel gilt außerdem:

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$O = \pi r \cdot (r + s)$$

7 Funktionen

7.1 Allgemeines

7.1.1 Monotonie

Seien x_1 und x_2 zwei Argumente einer Funktion, so gelten folgende Definitionen:

Monoton wachsend

wenn $x_1 \leq x_2$ *und* $f(x_1) \leq f(x_2)$

Streng monoton wachsend

wenn $x_1 < x_2$ *und* $f(x_1) < f(x_2)$

Monoton fallend

wenn $x_1 \leq x_2$ *und* $f(x_1) \geq f(x_2)$

Streng monoton fallend

wenn $x_1 < x_2$ *und* $f(x_1) > f(x_2)$

Des Weiteren kann man, das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe ihrer Ableitung (S. 39) bestimmen. Ist die Ableitung f' einer Funktion größer oder gleich Null, so ist sie monoton wachsend. Ist sie größer als und ungleich Null, ist sie sogar streng monoton wachsend. Dasselbe gilt umgekehrt für monoton fallende Funktion, wenn ihre Ableitung an der untersuchten Stelle negativ ist.

Monoton wachsend: $f'(x) \geq 0$

Streng monoton wachsend: $f'(x) > 0$

Monoton fallend: $f'(x) \leq 0$

Streng monoton fallend: $f'(x) < 0$

7.1.2 Besondere Stellen

Für manche Stellen einer Funktion werden besondere Begriffe benutzt. Hinweis: D_f ist der Definitionsbereich der Funktion und I ein beliebig kleiner offener Intervall, der x_{max} bzw. x_{min} beinhaltet.

Globale Maximalstelle

wenn $f(x_{max}) \geq f(x)$ *aller* $x \in D_f$

Lokale Maximalstelle

wenn $f(x_{max}) \geq f(x)$ *aller* $x \in D_f \cap I$

Globale Minimalstelle

wenn $f(x_{max}) \leq f(x)$ *aller* $x \in D_f$

Lokale Minimalstelle

wenn $f(x_{max}) \leq f(x)$ *aller* $x \in D_f \cap I$

Strikte Extrema

Ersetzt man bei den obigen Definitionen das $\geq$ bzw. $\leq$ durch $>$ bzw. $<$, spricht man von einem strickten Maximum oder Minimum.

Hinweis: Maximal- und Minimalstellen werden auch als Extremalstellen bezeichnet.

7.1.3 Symmetrie

Wenn man Funktionen untersucht, schaut man sich auch oft an, wie deren Symmetrie ist. Ist eine Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse, spricht man von *gerade* und wenn sie punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist, von *ungerade*.

Gerade

wenn $f(-x) = f(x)$

Ungerade

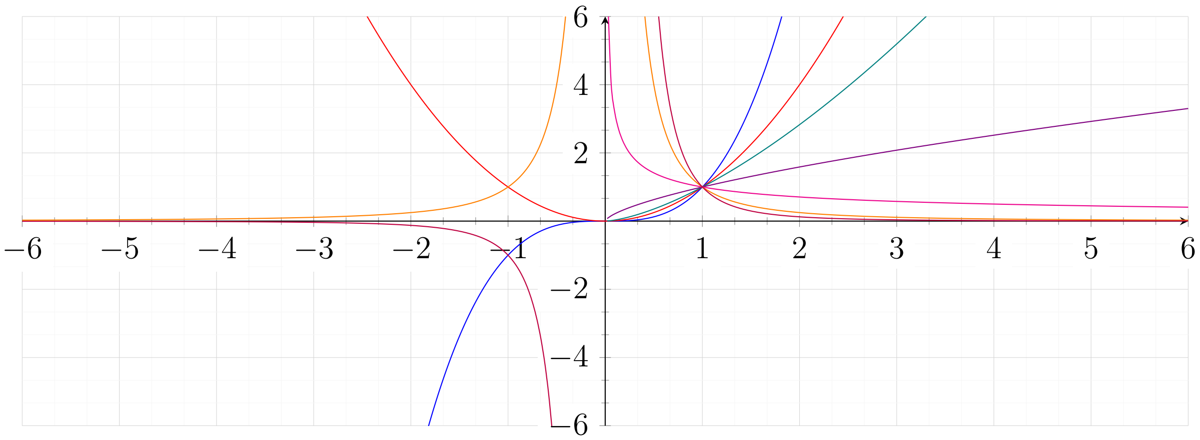
wenn $f(-x) = -f(x)$

Achtung: Eine Funktion kann nur gerade oder ungerade sein, wenn ihr Definitionsbereich symmetrisch zur Nullpunkt auf der x-Achse ist.

7.2 Potenz- und Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen in der Form $f(x) = x^m$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $D_f = \mathbb{R}$ heißen **Monome** (im Gegensatz zu Polynomen). Potenzfunktionen mit der Form $x^{\frac{m}{n}}$ sind **Wurzelfunktionen**, wenn $n \geq 2$ gilt und der Bruch keine ganze Zahl ist. An der Potenz kann man erkennen, ob eine Funktion gerade (x^{2n}) oder ungerade (x^{2n-1}) ist. Hier sind einige Beispiele für Graphen von

Wurzelfunktionen:



$f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ $f(x) = x^{-3}$

$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $f(x) = x^{-2}$

7.2.1 Wurzelgleichungen

Bei Wurzelgleichungen wird zuerst der Definitionsbereich bestimmt werden, also die Menge an reellen Zahlen, für die der Radikand positiv oder gleich Null ist. Zur Lösung von Wurzelgleichungen wird die Wurzel auf einer Seite der Gleichung isoliert. Dann werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten (im Falle der Quadratwurzel also mit 2) so lange potenziert, bis alle Wurzeln eliminiert sind. Man bekommt also unter Umständen durch das Quadrieren (das Potenzieren mit einer geraden Zahl ist keine Äquivalenzumformung) neue Lösungen (Scheinlösungen) hinzu, die die ursprüngliche Gleichung nicht hatte. Die Probe ist folglich für Wurzelgleichungen unverzichtbar!

Beispiel ($\sqrt{2x+1} = x - 17$):

$$\begin{aligned} 2x + 1 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit haben wir den Definitionsbereich. Jetzt kann man nach der Lösung suchen.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= x - 17 \\ 2x + 1 &= (x-17)^2 \\ 2x + 1 &= x^2 - 34x + 289 \\ x^2 - 36x + 288 &= 0 \\ x_1 &= 12 \\ x_2 &= 24 \end{aligned}$$

Jetzt MUSS man das Ergebnis noch überprüfen, indem man die Werte x_1 und x_2 in die ursprüngliche Gleichung einsetzt.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x_1+1} &= x_1 - 17 \\
\sqrt{2\cdot 12+1} &= 12 - 17 \\
\sqrt{25} &= -5 \\
5 &= -5
\end{aligned}$$

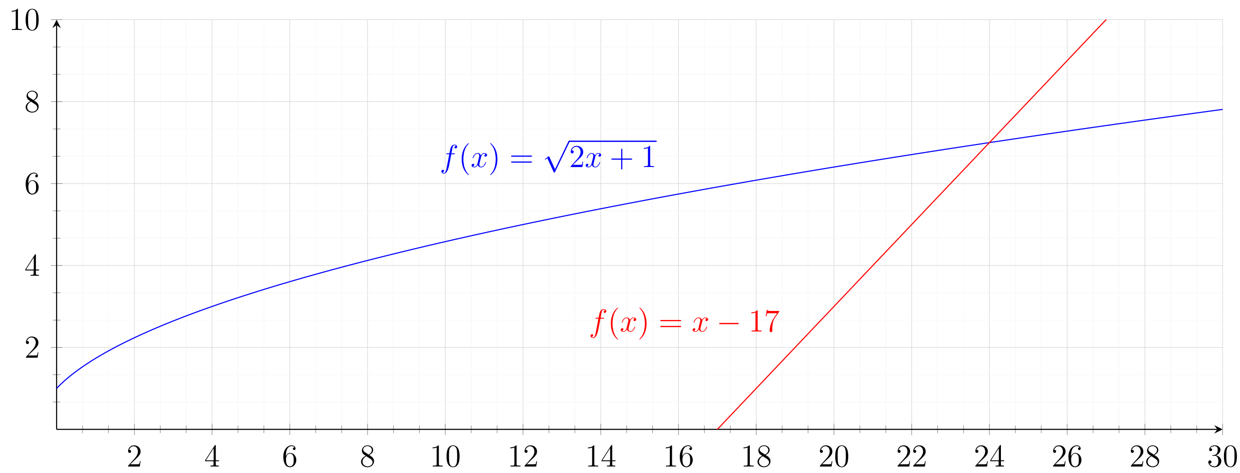
Das Einsetzen von x_1 liefert keine wahre Aussage und ist somit nicht Teil der Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x_2+1} &= x_2 - 17 \\
\sqrt{2\cdot 24+1} &= 24 - 17 \\
\sqrt{49} &= 7 \\
7 &= 7
\end{aligned}$$

Da x_2 im Definitionsbereich liegt und beim Einsetzen eine wahre Aussage ergibt, ist es in der Lösungsmenge enthalten.

$\mathbb{L} = \{24\}$

Übrigens: Wenn man mehrere Wurzeln in der Gleichung hat, muss man den Definitionsbereich für den Radikanden jeder Wurzel bestimmen.



Mithilfe dieser Grafik kann man das Ergebnis wunderbar visualisieren, denn das Ergebnis ist der x-Wert des Schnittpunkts der beiden Funktionen, die man aus der linken und rechten Seite der Wurzelgleichung entnehmen kann.

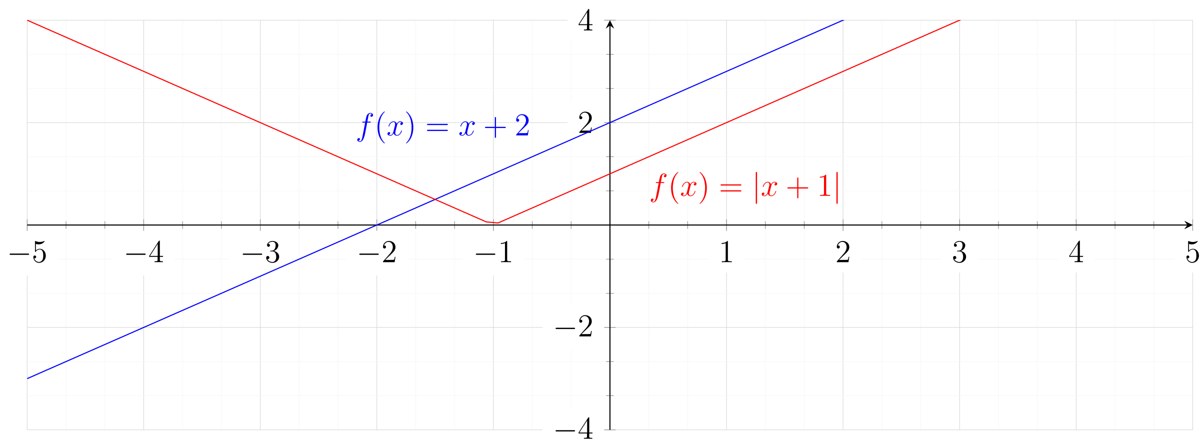
7.2.2 Wurzelgleichungen mit mehreren Wurzeln (Beispiel)

$$\begin{aligned}
\sqrt{8x-14}+\sqrt{5x-2} &= \sqrt{27x-36}\\
(\sqrt{8x-14}+\sqrt{5x-2})^2 &= 27x-36\\
8x-14+2\sqrt{(8x-14)(5x-2)}+5x-2 &= 27x-36\\
2\sqrt{(8x-14)(5x-2)} &= 14x-20\\
\sqrt{(8x-14)(5x-2)} &= 7x-10\\
40x^2-86x+28 &= (7x-10)^2\\
40x^2-86x+28 &= 49x^2-140x+100\\
0 &= 9x^2-54x+72\\
0 &= x^2-6x+8
\end{aligned}$$

Jetzt kann man die p-q-Formel (S. 6) anwenden und erhält die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{2;4\}$.

7.3 Betragsfunktionen

Um mit Betragsgleichungen oder auch Betragsfunktionen rechnen zu können muss man mehrere Fälle betrachten. Nämlich einmal den Fall, dass im Betrag ein Wert größer oder gleich 0 entsteht und einmal den Fall, dass das Ergebnis im Betrag kleiner als Null ist. Betrachten wir einmal ein Beispiel, wo man den Schnittpunkt zwischen $f(x)=|x+1|$ und $f(x)=x+2$ finden soll.



Zunächst setzen wir unsere Funktionen gleich und erhalten eine Betragsgleichung. Dann betrachten wir die verschiedenen Fälle für den Betrag.

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & Fall\ x\geq -1\\ -(x+1) & Fall\ x<-1\end{cases}$$

Durch die Fallunterscheidung kann man die Betragsstriche weglassen, indem man jeden Fall einzeln betrachtet. Hinterher muss man aber noch überprüfen, ob das Ergebnis der Bedingung für x in dem Fall entspricht.

Fall $x\geq -1$ ($x+1$ ist positiv):

$$\begin{aligned} x+1 &= x+2 \qquad\qquad | -x\\ 1 &= 2\end{aligned}$$

Für den Fall $x \geq -1$ gibt es keine Lösung, also weiter zum nächsten Fall.

Fall $x < -1$ ($x+1$ ist negativ):

$$\begin{aligned} -x-1 &= x+2 && \mid +x-2 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

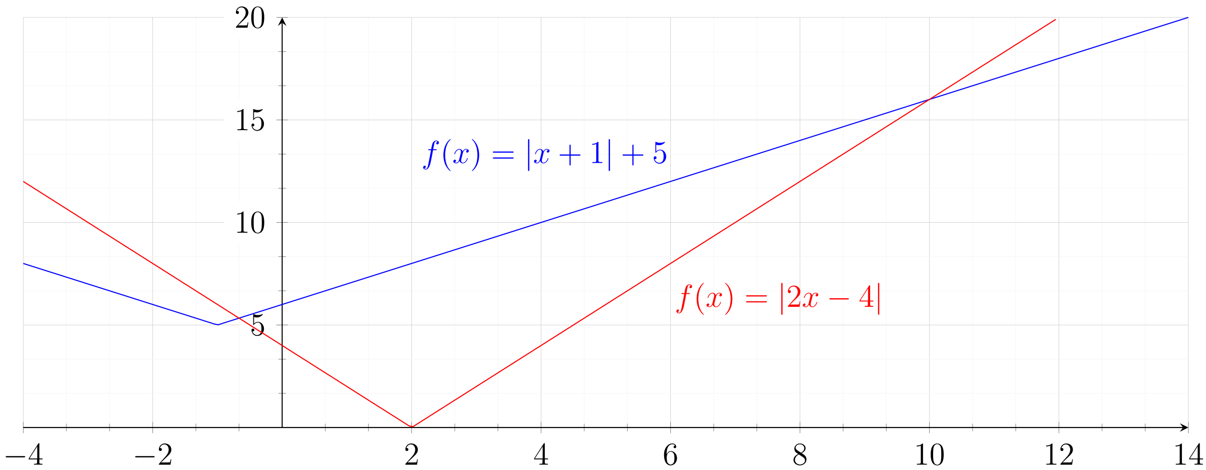
Damit haben wir unsere Lösungsmenge, denn wir bekommen für den Fall $-(x < -1)$ ein Ergebnis, welches dem Kriterium $x < -1$ entspricht.

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

Durch einsetzen dieser x-Koordinate, finden wir auch den dazugehörigen y-Wert: $P\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$:

7.3.1 Betragsgleichungen mit mehreren Beträgen

Haben wir mehrere Beträge in unserer Gleichung, haben wir auch mehrere Fälle zu betrachten. Schon wir uns das an einem Beispiel an, indem wir die Schnittpunkte von $f(x) = |x+1| + 5$ und $f(x) = |2x-4|$ suchen.



Zunächst setzen wir die Funktionen wieder gleich.

$$|x+1| + 5 = |2x-4|$$

Die Fälle müssen wir alle einzeln betrachten. Das heißt, wir haben insgesamt 4 Fälle. Wir schauen uns zunächst die beiden Fälle eines Betrages an und dann innerhalb dieser Fälle betrachten wir die Fälle für den zweiten Betrag.

1. Fall für $|x+1|$: $x \geq -1$ ($x+1$ ist positiv)

$$\begin{aligned} x+1+5 &= |2x-4| \\ x+6 &= |2x-4| \end{aligned}$$

Innerhalb dieses ersten Falles unterscheiden wir jetzt noch einmal für den übrigen Betrag.

1. Fall für $|2x-4|$: $x \geq 2$ ($2x-4$ ist positiv)

$$\begin{aligned} x+6 &= 2x-4 \\ x+10 &= 2x \\ 10 &= x \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir überprüfen, ob $x \geq 2$ und $x \geq -1$ für $x = 10$ gelten. Das ist der Fall daher haben wir schon mal einen Teil unserer Lösungsmenge. Auf der Grafik kann man auch sehen, dass sich die beiden Graphen dort schneiden.

2. Fall für $|2x-4|$: $x < 2$ ($2x-4$ ist negativ)

$$\begin{aligned} x+6 &= -(2x-4) \\ x+6 &= -2x+4 \\ 3x+6 &= 4 \\ 3x &= -2 \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Wir überprüfen jetzt wieder, ob $x < 2$ und $x \geq -1$ für $x = -\frac{2}{3}$ gelten. Da das der Fall ist, können wir auch dieses x zu unserer Lösungsmenge hinzufügen.

2. Fall für $|x+1|$: $x < -1$ ($x+1$ ist negativ)

$$\begin{aligned} -(x+1)+5 &= |2x-4| \\ -x+4 &= |2x-4| \end{aligned}$$

1. Fall für $|2x-4|$: $x \geq 2$ ($2x-4$ ist positiv)

In diesem Fall müssen wir gar nicht erst versuchen x auszurechnen, denn es gibt keine Zahl, die sowohl $x \geq 2$, als auch $x < -1$ erfüllt.

2. Fall für $|2x-4|$: $x < 2$ ($2x-4$ ist negativ)

$$\begin{aligned} -x+4 &= -(2x-4) \\ -x+4 &= -2x+4 \\ -x &= -2x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben jetzt $x = 0$ als Lösung, jedoch erfüllt dieses Ergebnis nicht die Bedingung $x < -1$ und ist daher auch nicht in der Lösungsmenge enthalten.

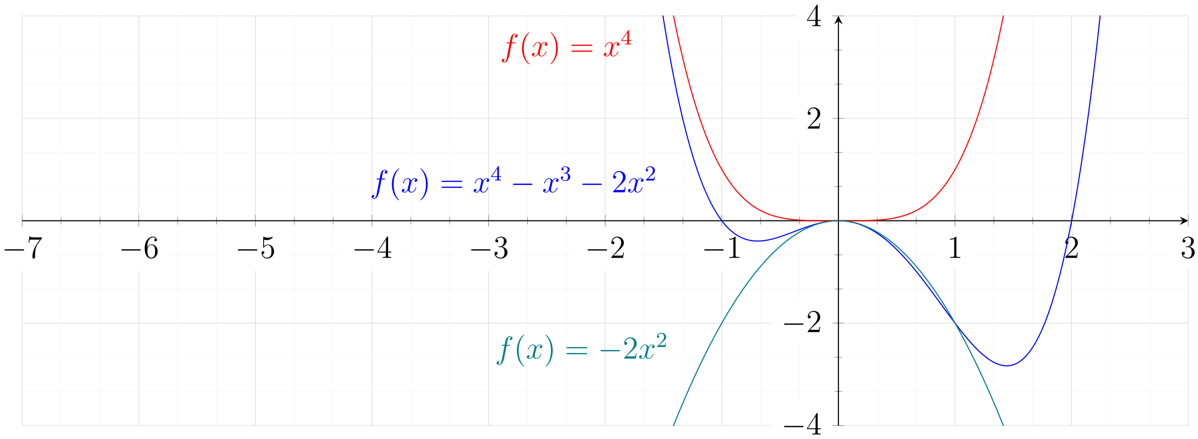
Abschließend können wir feststellen, dass unsere Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{10; -\frac{2}{3}\right\}$ ist. Durch Einsetzen in eine der beiden Funktionen erhalten wir dann unsere Schnittpunkte $P_1(10 \mid 16)$ und $P_2\left(-\frac{2}{3} \mid \frac{16}{3}\right)$.

7.4 Polynomfunktionen

Polynome sind die Summe aus den Vielfachen von Monomen. Eine Polynomfunktion mit den Koeffizienten a_n hat folgende Form:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + 1_0$

Das Verhalten einer Polynomfunktion hängt für $x \to \infty$ vom Summanden mit der höchsten Potenz und für $x \to 0$ vom Summanden mit der niedrigsten Potenz ab.



Nullstellen

Polynome n-ten Grades haben maximal n Nullstellen.

$p(x) = a_{2k-1} x^{2k-1} + ... + a_1 x + a_0,\ wenn\ a_{2k-1} \neq 0$

Polynome ungeraden Grades haben mindestens eine Nullstelle.

$p(x) = a_{2k} x^{2k} + ... + a_2 x^2 + a_0,\ wenn\ a_{2k} \geq 0\ und\ a_0 > 0$

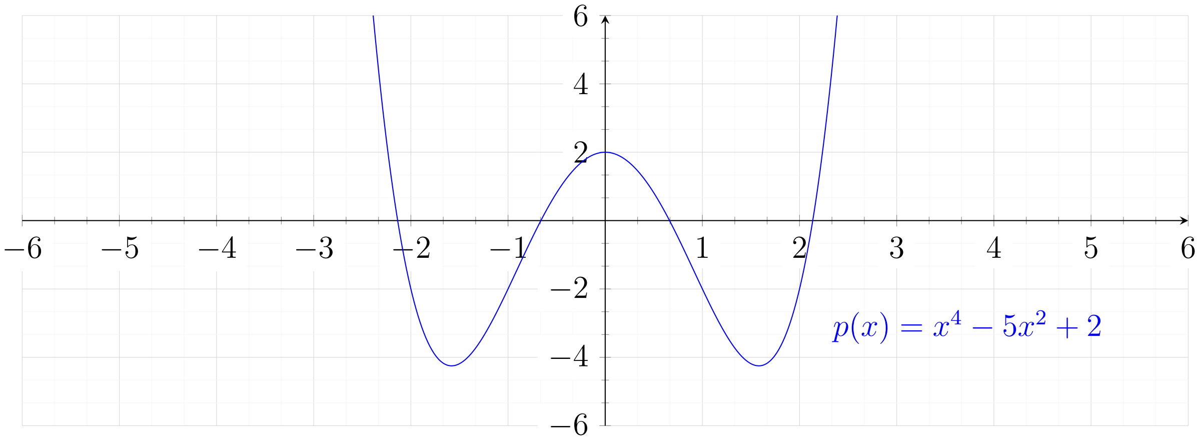
Polynome geraden Grades besitzen keine Nullstellen.

Symmetrie

Für die Symmetrie der Funktion gilt wie bei Monomen weiterhin, dass bei geraden Potenzen eine gerade Funktion vorliegt und bei ungeraden Potenzen eine ungerade Funktion. Hat ein Polynom jedoch sowohl gerade, wie auch ungerade Exponenten, so kann man beides ausschließen.

7.4.1 Lösen durch Substitution

In diesem Beispiel werden die Nullstellen der Funktion mithilfe von Substitution (S. 13) und anschließendem Anwenden der p-q-Formel (S. 6) ermittelt.



$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^4 - 5x^2 + 2 \\
0 &= x^4 - 5x^2 + 2 \\
0 &= u^2 - 5u + 2 \\
u_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2} \\
u_1 &= \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \\
u_2 &= \frac{5 - \sqrt{17}}{2}
\end{aligned}
$$

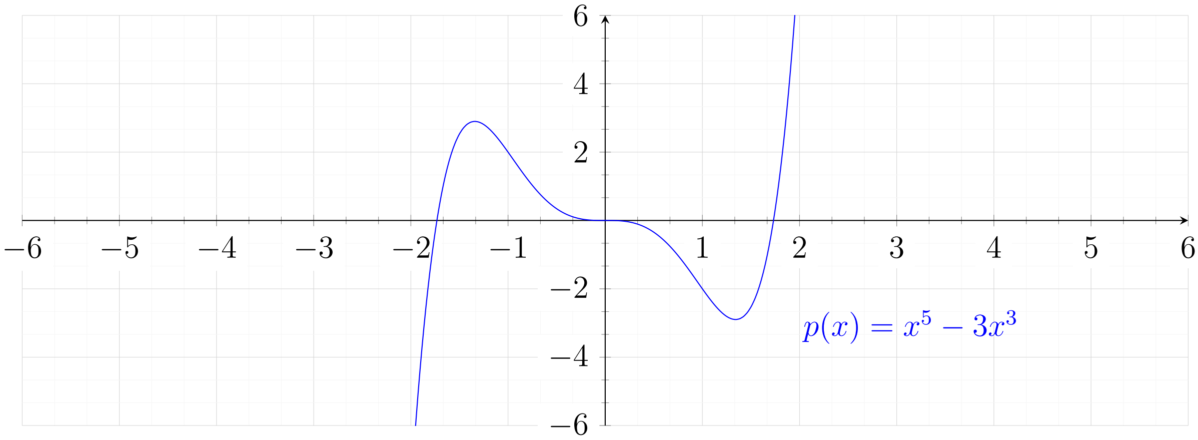
$$
\begin{aligned}
x_{1,2}^2 &= \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \\
x_{1,2}^2 &= \pm 2,135779205
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{3,4}^2 &= \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \\
x_{3,4}^2 &= 0,6621534469
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{L} = \{-2,135779205; -0,6621534469; 0,6621534469; 2,135779205\}$$

7.4.2 Lösen durch Faktorisierung

In diesem Beispiel werden die Nullstellen der Funktion mithilfe von Faktorisierung durch Ausklammern (S. 12) ermittelt.



$p(x) = x^5 - 3x^3$

$0 = x^5 - 3x^3$

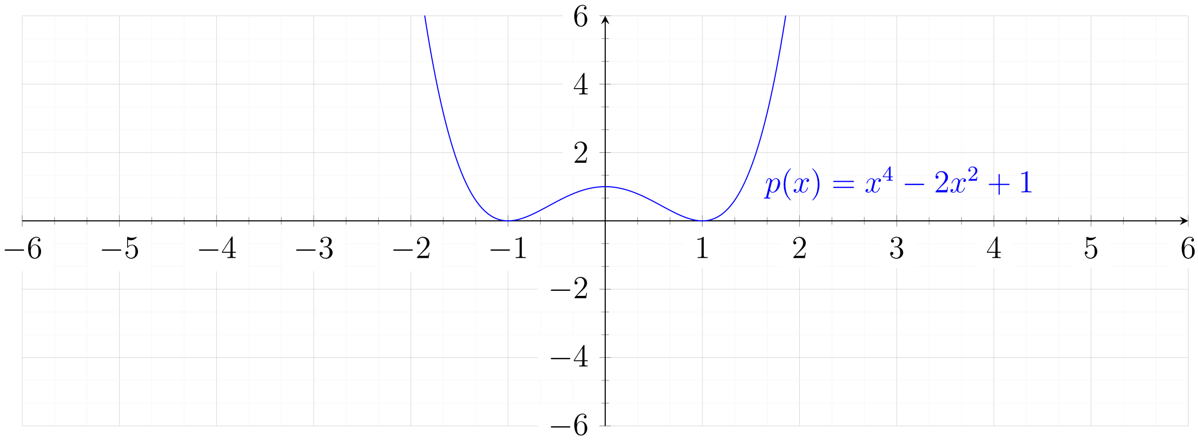
$0 = x^2(x^2 - 3)$

$0 = x^2(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})$

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$

7.4.3 Lösen mit binomischen Formeln

In diesem Beispiel wird Funktion mithilfe der binomischen Formeln (S. 7) so vereinfacht, dass man die Nullstellen ganz einfach ablesen kann.



$p(x) = x^4 - 4x^2 + 1$

$0 = x^4 - 4x^2 + 1$

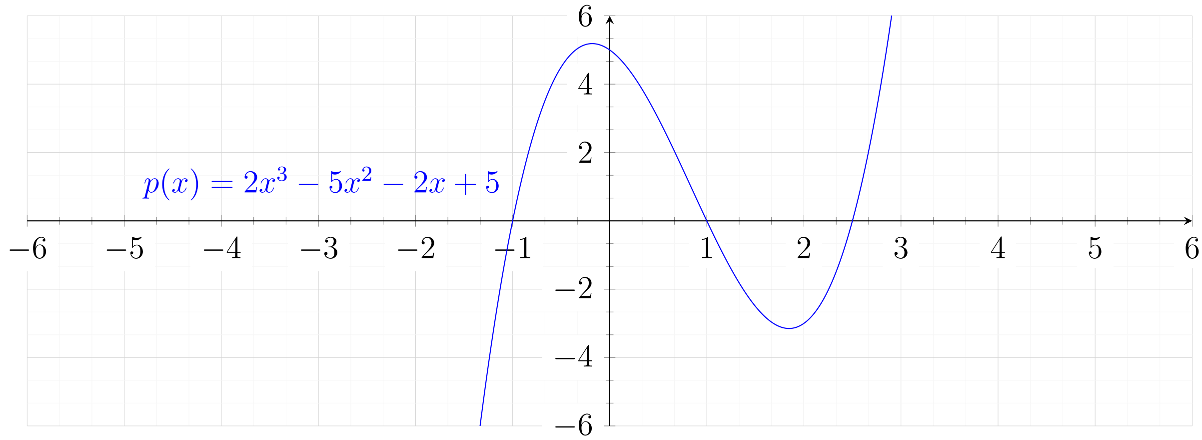
$0 = (x^2 - 1)^2$

$x = \pm 1$

$\mathbb{L} = \{-1; 1\}$

7.4.4 Lösen durch Polynomdivision

Wenn alle anderen Stränge reißen, ist man leider gezwungen die Polynomdivision durchzuführen. Um damit beginnen zu können, braucht man aber mindestens eine Nullstelle, die man durch Raten findet. Für das Beispiel unten finden wir so heraus, dass eine Nullstelle $x_1 = 1$ ist. Jetzt stellen wir $x = 1$ nach 0 um und erhalten $0 = x - 1$. Anschließend teilen wir unser Polynom durch $x - 1$.



$(2x^3 - 5x^2 - 2x + 5) : (x - 1)$

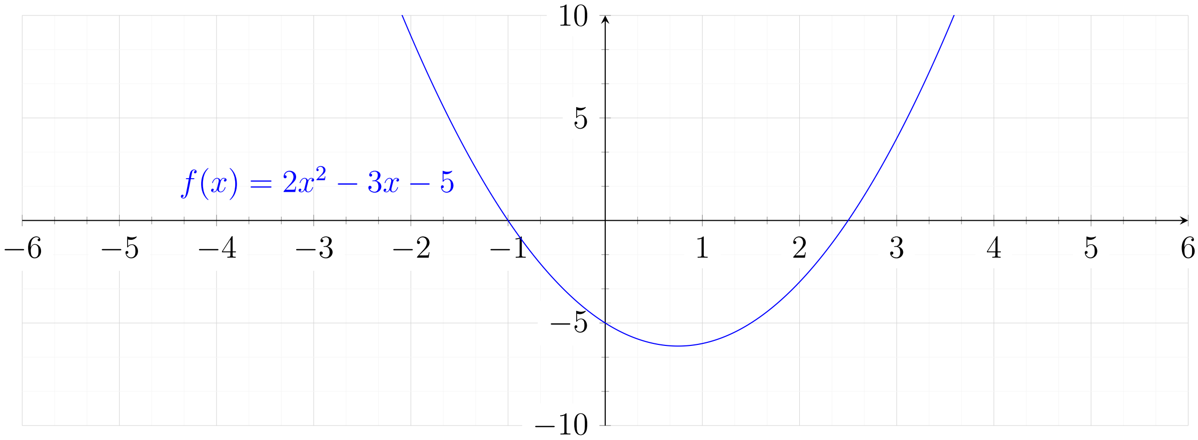
Zunächst teilt man den Term mit der höchsten Potenz $2x^3$ durch x und erhält $2x^2$. Das ist der erste Teil unseres Ergebnisses.

$(2x^3 - 5x^2 - 2x + 5) : (x - 1) = 2x^2...$

Jetzt muss man zurück multiplizieren, indem man den Term $2x^2$, den wir gerade bekommen haben, mit unserem ursprünglichen Divisor $x - 1$ multiplizieren. Das Ergebnis ziehen wir von unserem Polynom ab und holen anschließend den nächsten Ausdruck runter. Diesen Prozess wiederholen wir jetzt so oft, wie möglich.

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5\big) : \big(x - 1\big) = 2x^2 - 3x - 5 \\
\underline{-\,2x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad -\,3x^2 - 2x \\
\qquad\quad \underline{\,3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\qquad -\,5x + 5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\,5x - 5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

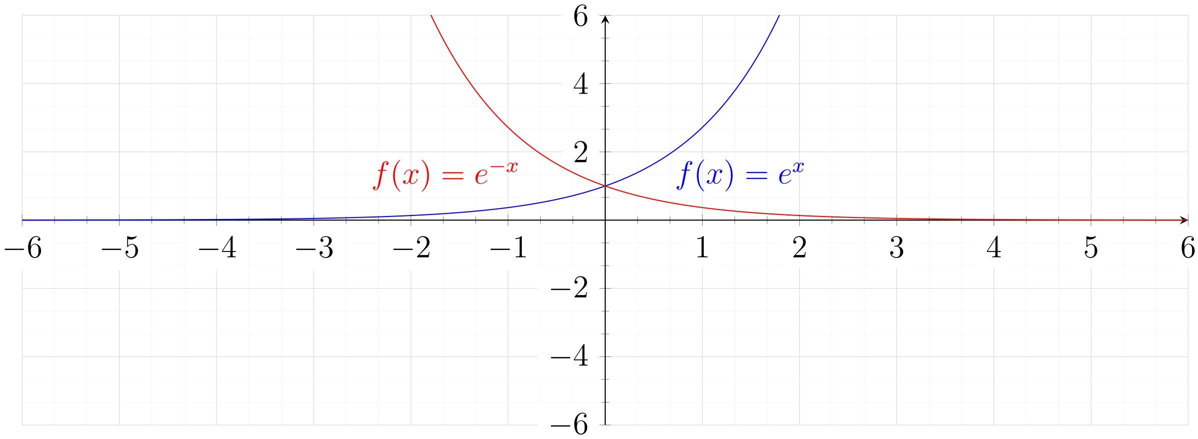
Mit der Funktion, die wir jetzt haben, können wir ganz einfach die restlichen Nullstellen errechnen.



$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 3x - 5 \\
0 &= 2x^2 - 3x - 5 \\
0 &= x^2 - 1,5x - 2,5 \\
x_{1,2} &= \frac{1,5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1,5}{2}\right)^2 + 2,5} \\
x_1 &= 2,5 \\
x_2 &= -1 \\
\mathbb{L} &= \{-1; 1; 2,5\}
\end{aligned}
$$

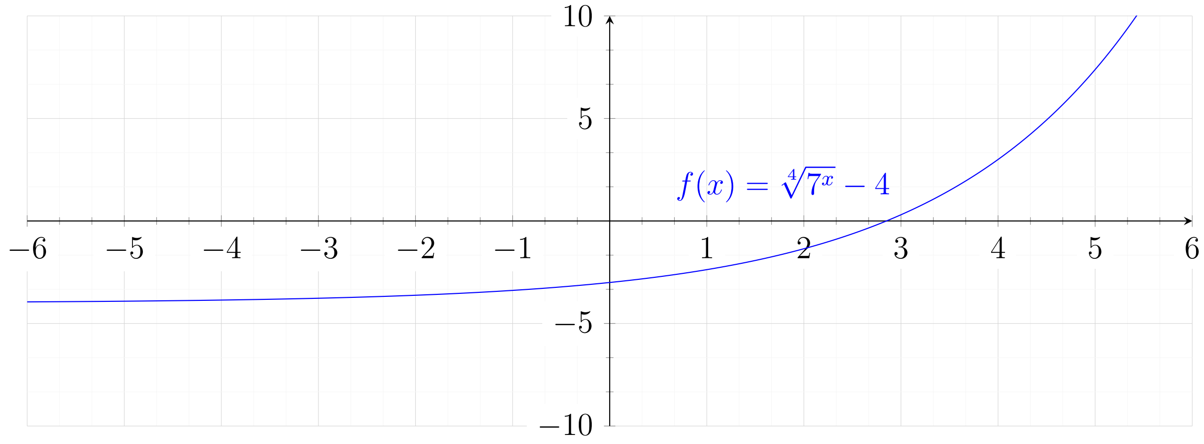
7.5 Exponentialfunktionen

Eine Funktion der Form $f(x) = a^x$ wird als Exponentialfunktion bezeichnet, denn die Variable x steht im Exponenten. Speziell wird die Funktion $f(x) = e^x$ als *natürliche Exponentialfunktion* bezeichnet.



7.5.1 Lösen von Exponentialgleichungen

Zum Lösen von Exponentialgleichungen brauchen wir in der Regel den Logarithmus (S. 11). Wie das funktioniert, sehen wir an dem Beispiel hier drunter. Dabei ist die Nullstelle der Funktion zu bestimmen. In diesem Beispiel sollte man sich außerdem nochmal daran erinnern, dass $\sqrt[n]{x}$ dasselbe ist, wie $x^{\frac{1}{n}}$.

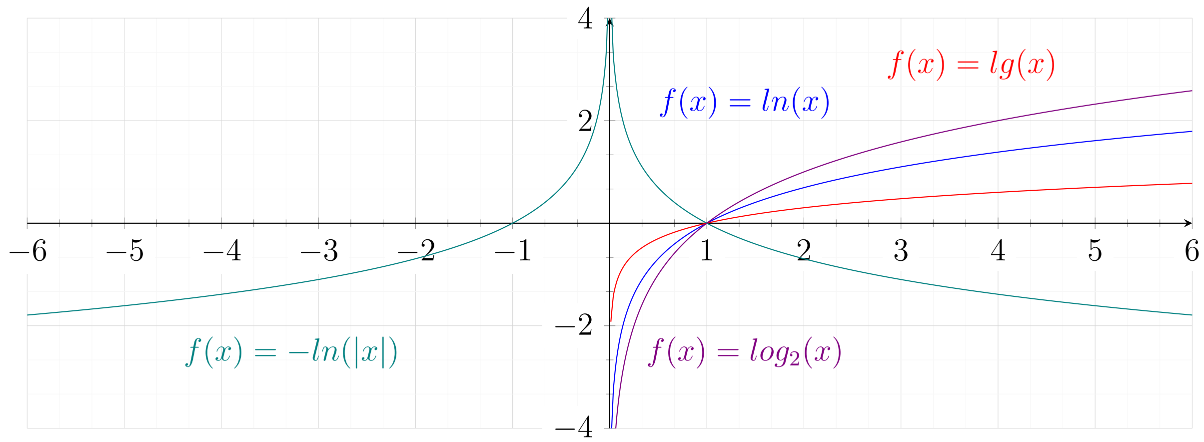


$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[4]{7^x} - 4 \\
0 &= \sqrt[4]{7^x} - 4 && \mid +4 \\
4 &= 7^{\frac{x}{4}} && \mid log_7() \\
0,7124143742 &= \frac{x}{4} && \mid \cdot 4 \\
x &= 2,849657497
\end{aligned}
$$

$\mathbb{L} = \{2,849657497\}$

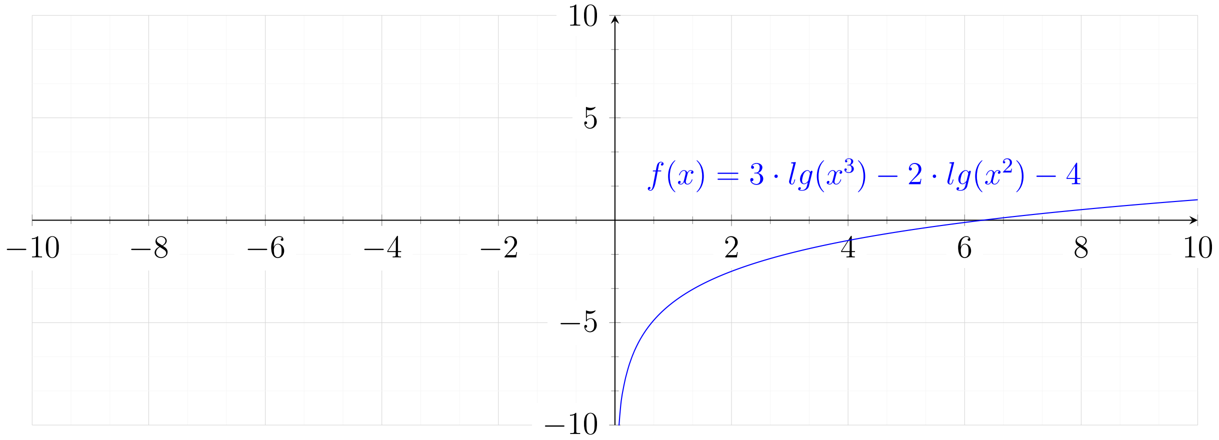
7.6 Logarithmusfunktionen

Funktionen wie $f(x) = log_3(x^2)$ werden als Logarithmusfunktionen bezeichnet, da sie einen oder mehrere Logarithmen beinhalten. Speziell bezeichnet man $f(x) = ln(x)$ als *natürliche Logarithmusfunktion* und $f(x) = lg(x)$ als *dekadische Logarithmusfunktion*.



7.6.1 Lösen von Logarithmusgleichungen

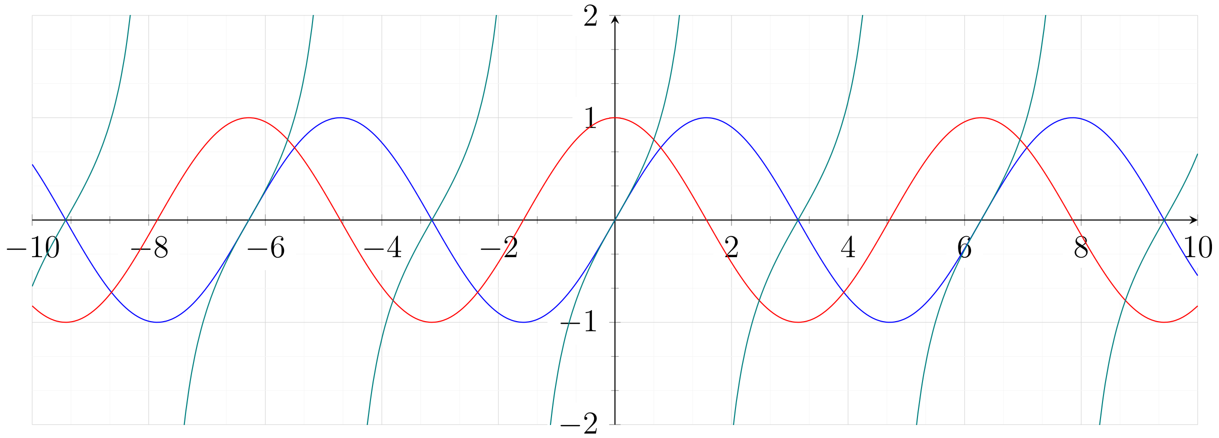
Gesucht wird hier die Nullstelle einer Logarithmusfunktion gesucht. Hinweis: Um einen Logarithmus aufzulösen musst du beide Seiten der Gleichung als Exponent zur Basis des jeweiligen Logarithmus setzen. Um dort hinzu kommen hilft es enorm, die Gleichung zunächst umzuformen. Wenn du Schwierigkeiten mit den Umformungen in diesem Beispiel hast, schaue dir noch einmal die Potenzgesetze (S. 8) und Logarithmusgesetze (S. 11) an.



$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3 \cdot lg(x^3) - 2 \cdot lg(x^2) - 4 \\
0 &= 3 \cdot lg(x^3) - 2 \cdot lg(x^2) - 4 \\
0 &= lg((x^3)^3) - lg((x^2)^2) - 4 && \mid +4 \\
lg\left(\frac{x^9}{x^4}\right) &= 4 \\
lg(x^5) &= 4 && \mid 10^{()} \\
10^{lg(x^5)} &= 10^4 \\
x^5 &= 10^4 && \mid \sqrt[5]{} \\
x &= 6{,}309573445 \\
\mathbb{L} &= \{6{,}309573445\}
\end{aligned}
$$

7.7 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen oder auch Winkelfunktionen genannt, beinhalten die aus der Geometrie (S. 21) bekannten winkelabhängigen Funktionen, wie Sinus, Kosinus und Tangens. Dabei sind diese Funktionen hier allerdings abhängig von der Variable x und damit im Bogenmaß, nicht im Gradmaß. Beim Taschenrechner muss man darauf achten, dass der richtige Modus eingestellt ist, ansonsten kann es sein, dass man versehentlich im falschen Maß rechnet. Auf dem CASIO fx-86DE PLUS, drückt man Shift, dann Setup und wählt dort die 3:Deg (engl. degree) für Gradmaß oder 4:Rad (engl. radian) fürs Bogenmaß.

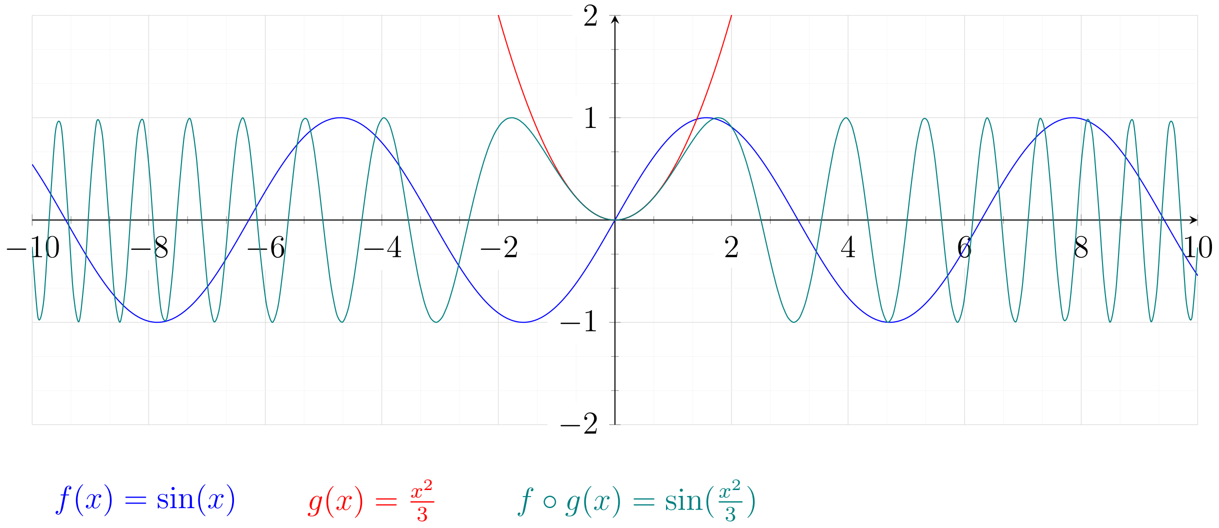


$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x)$

Anmerkung: Die Nullstellen des Sinus sind die Extremstellen des Kosinus und umgekehrt. Ebenso habe Sinus und Tanges dieselben Nullstellen.

7.8 Verkettete Funktionen

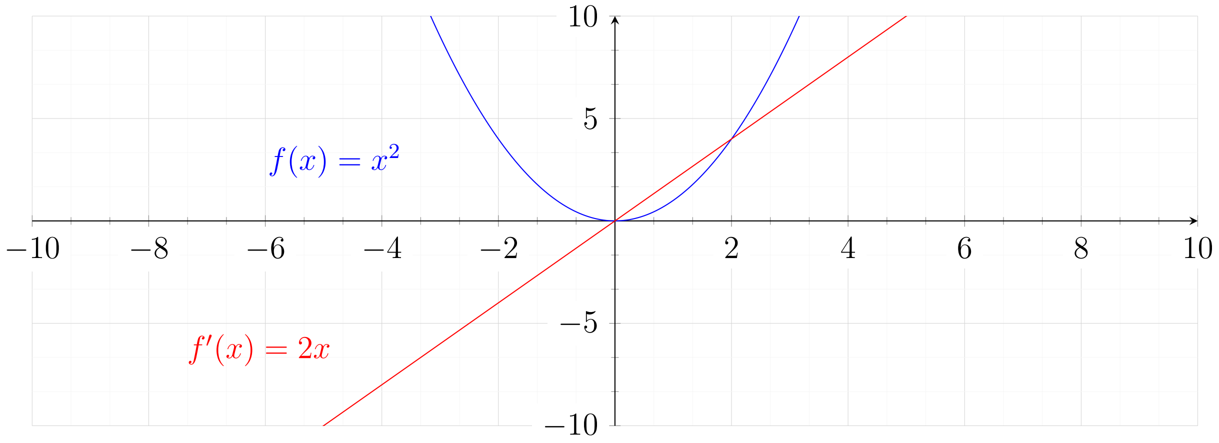
Verkettungen sind eigentliche keine eigene Funktionsart, sondern eine Möglichkeit Funktionen durch Zusammensetzung zu transformieren. Man schreibt das als $f \circ g$ ("f nach g"). Man spricht hier bei g auch von der *inneren Funktion*, da sie als Argument in die *äußere Funktion* f eingesetzt wird.



8 Differenzialrechnung

8.1 Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion gibt Aufschluss über ihr Monotonieverhalten (S. 25) und die Veränderung ihres Anstiegs, denn die Werte der Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ entsprechen dem Anstieg einer Tangente an derselben Stelle von $f(x)$. Das kann man auch an dem unten stehenden Beispiel erkennen. Um eine Potenzfunktion abzuleiten, nehmen wir den Exponenten von jedem x und holen ihn hinunter, um ihn vor das jeweilige x zu schreiben. Anschließend reduzieren wir den Exponenten um 1. Dabei ist zu beachten, dass die Ableitung einer reinen Zahl ohne x immer 0 ist und, dass die Ableitung von $x = 1$ ist, denn x^0 entspricht 1.



Hinweis: Um Fehler zu vermeiden, sollte man zunächst alle Terme so umformen, dass man einfach ableiten kann. Dafür solltest du die wichtigsten Rechengesetze (S. 5) beherrschen.

Ableitungsregeln

Neben der oben genannten Regel zur Ableitung von Funktionen, gibt es noch einige andere, die einem das Leben erleichtern:

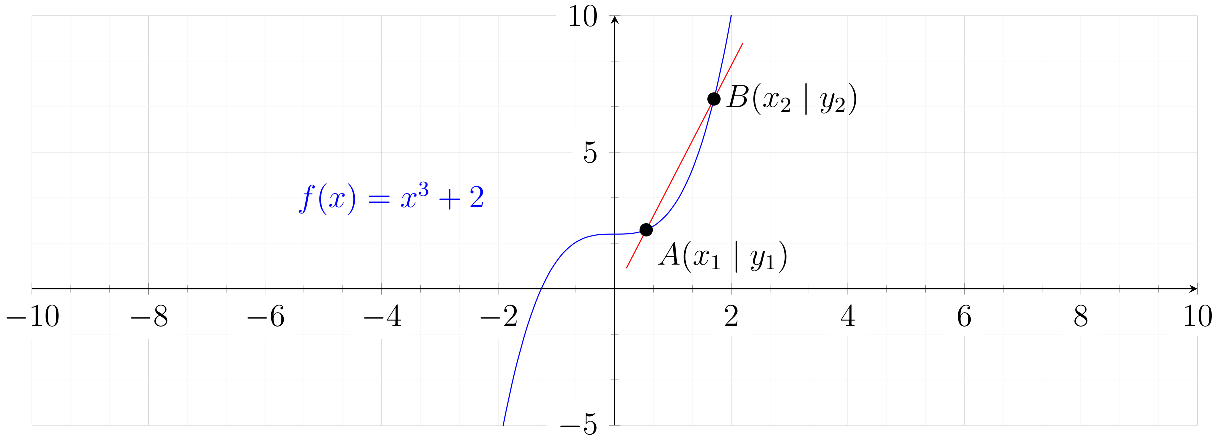
c	$\rightarrow 0$	$\sin(x)$	$\rightarrow \cos(x)$
x^n	$\rightarrow nx^{n-1}$	$\cos(x)$	$\rightarrow -\sin(x)$
$\sqrt{x}$	$\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\tan(x)$	$\rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	$\rightarrow e^x$	$u(x) \cdot v(x)$	$\rightarrow u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$ln(x)$	$\rightarrow \frac{1}{x}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\rightarrow \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
$a^x (a > 0)$	$\rightarrow ln(a \cdot a^x)$	$(u \circ v)(x)$	$\rightarrow u'(v(x)) \cdot v'(x)$
$\frac{1}{x^n}$	$\rightarrow -\frac{n}{x^{n+1}}$		

Tipp: Solltest du es einmal nicht schaffen, eine Funktion mit den Ableitungsregeln abzuleiten oder diese vergessen haben, kannst du die Ableitung immer noch mithilfe des Differentialquotionen! (S. 41) bestimmen.

8.1.1 Differenzenquotient

Um die Steigung einer Sekante zwischen zwei Punkten zu berechnen, benutzen wir den Differenzenquotient. Dieser Quotient berechnet sich indem man x und y der beiden Punkte jeweils voneinander abzieht und dann y durch x teilt.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Allgemeiner ausgedrückt, gilt die Formel:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dabei ist h eine beliebige Zahl, mit deren Hilfe wir uns jetzt an die genaue Steigung in einem Punkt annähern können. Je kleiner wir den Abstand h wählen, desto genauer kommen wir an die Tangente oder auch Steigung der Stelle x.

8.1.2 Differentialquotient

Der Differenzenquotient erlaubt es uns die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle zu bestimmen. Im Abschnitt über den Differenzenquotient (S. 40) haben wir schon geklärt, das wir näher an den Anstieg an der Stelle x kommen, wenn wir den Abstand h verringern. Der kleinstmögliche Abstand wäre 0. Das geht allerdings nicht, da wir nicht $h = 0$ in die Formel für den Differenzenquotient einsetzen und den Divisor somit gleich 0 setzen dürfen. Um ums zu überlegen, was also für ein minimal kleines h passieren würde, brauchen wir den Limes.

$$\lim_{h \to 0} m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

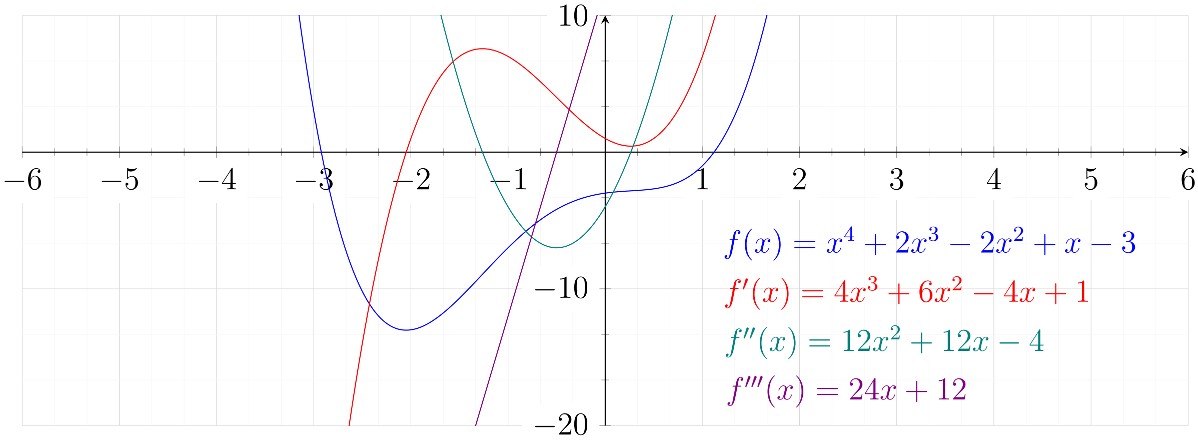
Da setzen wir jetzt unsere Funktion $f(x) = x^3 + 2$ ein und formen solange um, bis wir das h aus dem Divisor kriegen, damit wir für h die Zahl 0 einsetzen können. Hinweis: Nachdem du für h die Zahl 0 eingesetzt hast, darfst du nicht mehr Limes davor schreiben!

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + 2 - x^3 - 2}{h} \\
=&\lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 2xh^2 + h^3 + 2 - x^3 - 2}{h} \\
=&\lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 2xh^2 + h^3}{h} \\
=&\lim_{h \to 0} (3x^2 + 2xh + h^2) \\
=&3x^2
\end{aligned}$$

Das, was wir jetzt haben ist die erste Ableitung $f'(x)$. Sofern nicht anders gewünscht, kann man diese oft auch wesentlich leichter bestimmen, indem man die Ableitungsregeln (S. 39) kennt.

8.1.3 Eine Funktion und ihre Ableitungen

Leitet man die Ableitung einer Funktion noch mal ab, erhält man die zweite Ableitung $f''(x)$. Ebenso verhält es sich mit der dritten und allen weiteren Ableitungen. In der folgenden Abbildung sieht man eine Funktion und ihre erste, zweite sowie dritte Ableitung.



Man spricht bei den Bedingungen zur Bestimmung besonderer Punkte von notwendigen Bedingungen. Es existieren zudem weitere Bedingungen, mit deren Hilfe man diese Punkt genauer untersuchen kann, die sogenannten hinreichenden Bedingungen. Die obige Abbildung soll helfen, diese Bedingungen nachzuvollziehen.

Notwendige Bedingungen

Wenn $f'(x) = 0$ gilt, dann ist bei x ein Extremal- o. Sattelpunkt von f.

Wenn $f''(x) = 0$ gilt, dann ist bei x ein Wendepunkt von $f(x)$.

Hinreichende Bedingungen

Wenn $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ gilt, besitzt f eine Extremalpunkt bei x.

Wenn $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$ gilt, dann ist bei x ein Minimum von f.

Wenn $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$ gilt, dann ist bei x ein Maximum von f.

Wenn $f''(x) = 0 \wedge f'(x) = 0$ gilt, besitzt f einen Sattelpunkt bei x.

Wenn $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) < 0$ gilt, dann ist bei x eine Links-Rechts-Krümmung.

Wenn $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) > 0$ gilt, dann ist bei x eine Rechts-Links-Krümmung.

Hinweis: Das Zeichen $\wedge$ bedeutet »und«, während $\vee$ »oder« bedeutet.

8.2 Limes: Der Grenzwert

Für manche Funktionen ist es nicht möglich den Werte einer bestimmten Stelle zu errechnen. Manchmal will man auch das Verhalten einer Funktion wissen, wenn x gegen unendlich geht.

In u.a. diesen Fällen braucht man dem Limes. Um den Grenzwert einer Funktion für $x \to a$ zu ermitteln muss man den links- und den rechtsseitigen Grenzwert betrachten. Es gilt Folgendes:

> Um zu überprüfen, ob für eine Funktion mit x gegen a ein Grenzwert existiert, schaut man sich jeweils den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert an. Sind diese gleich, so existiert ein Grenzwert. Sind sie unterschiedlich, existiert kein Grenzwert.

Beim Grenzwert setzt man Zahlen ein, die sich in die Richtung von a bewegen. Nehmen wir beispielsweise $f(x) = \frac{1}{x}$. 0 können wir ja nicht für x einsetzen, da wir nicht durch Null teilen dürfen. Was wir aber machen können ist sehr kleine Zahlen einsetzen, um zu schauen, ob wir eine Tendenz feststellen können.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ f(0,1) &= \frac{1}{0,1} = 10 \\ f(00,1) &= \frac{1}{00,1} = 100 \\ f(000,1) &= \frac{1}{000,1} = 1000 \\ \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} &= \infty \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass sich unsere Funktion für x gegen Null Unendlich nähert. Das, was wir uns jetzt angeguckt haben, ist aber nur der rechtsseitige Grenzwert, da wir Werte größer als 0 eingesetzt haben und uns somit von rechts angenähert haben. Jetzt machen wir das Ganze noch einmal von links.

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{-1} = -1 \\ f(-0,1) &= \frac{1}{-0,1} = -10 \\ f(-00,1) &= \frac{1}{-00,1} = -100 \\ f(-000,1) &= \frac{1}{-000,1} = -1000 \\ \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} &= -\infty \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\infty \neq -\infty$ gilt. Somit haben wir keinen Grenzwert für $x \to 0$. Übrigens gibt es für den links- und rechtsseitigen Grenzwert unterschiedliche Notationen. Ich benutze hier, die Variante mit den diagonalen Pfeilen, da ich finde, dass sie gut darstellt, was man bei der Annäherung mit dem x anstellt.

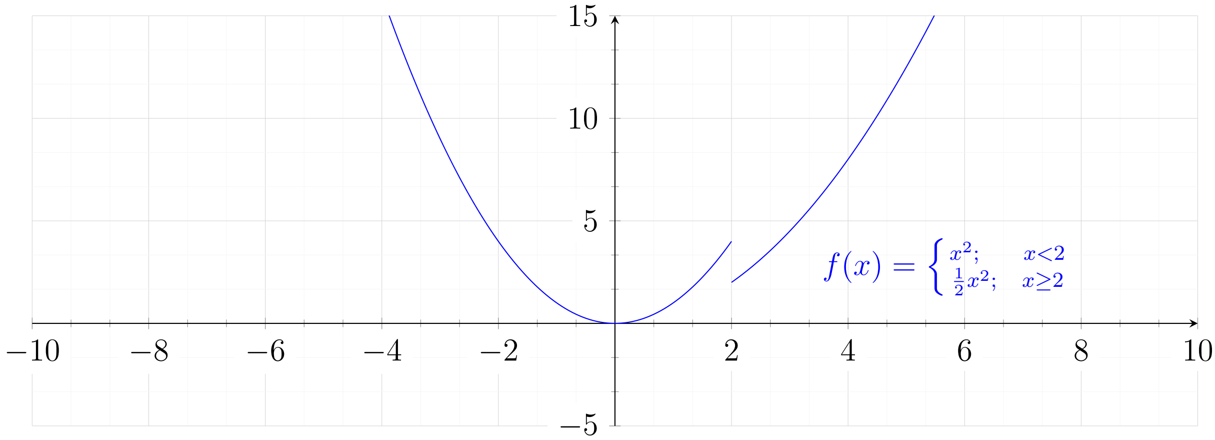
Linksseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \to a^-} \; oder \; \lim_{x \uparrow a} \; oder \; \lim_{x \nearrow a} \; oder \; \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}}$$

Rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \to a^+} \; oder \; \lim_{x \downarrow a} \; oder \; \lim_{x \searrow a} \; oder \; \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}}$$

8.3 Differenzierbarkeit



Was uns an dem obigen Beispiel jetzt speziell interessiert, ist die Stelle $x = 2$. Wir wollen wissen, ob f in dieser Stelle stetig bzw. differenzierbar ist. Das heißt quasi, dass wir wissen wollen, ob man die Funktion zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Aber Achtung: Das ist keine sehr akkurate Definition, denn es gibt auch Funktionen, die stetig sind, obwohl man sie nicht durchzeichnen kann. Deshalb hier die mathematischen Bedingungen, die erfüllt sein müssen.

Wenn eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 folgende Bedingungen erfüllt, so ist sie in dieser Stelle *differenzierbar* bzw. *stetig*.

1. $x_0 \in \mathbb{D}$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existiert*

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Sind die obigen Bedingungen für alle x der Definitionsmenge erfüllt, so spricht man von einer *stetigen Funktion*.

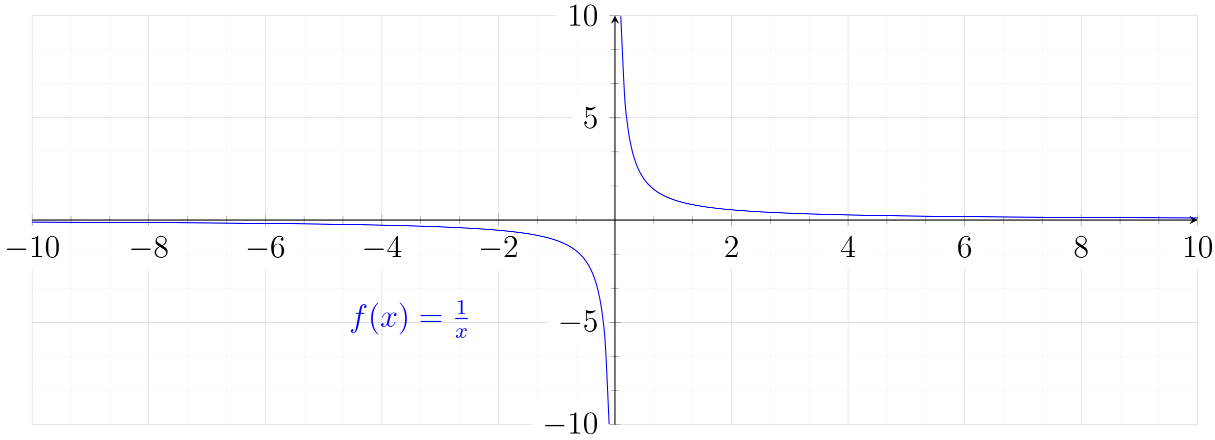
Schauen wir uns das einmal für unser Beispiel an. Die erste Bedingung ist erfüllt, denn für $x = 2$ ist x definiert und es gilt $f(2) = \frac{1}{2}(2)^2 = 2$. Als nächsten prüfen wir die zweite Bedingung.

$$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \nearrow 2} x^2 = 2^2 = 4 \qquad \lim_{x \searrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$$

Unsere zweite Bedingung ist somit nicht erfüllt. Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert sind unterschiedlich und somit existiert an dieser Stelle auch kein Grenzwert. Daher brauchen wir die letzte Bedingung gar nicht erst überprüfen und können es sogar nicht, da uns der Grenzwert fehlt.

8.3.1 Stetige Erweiterung

Eine Funktion wie z. B. $f(x) = \frac{1}{x}$ hat zwar keinen Grenzwert für $x \to 0$, allerdings ist sie trotzdem stetig, da ihr Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die 0 ausschließt. Das ist wichtig zu wissen bei der Bestimmung der Differenzierbarkeit.

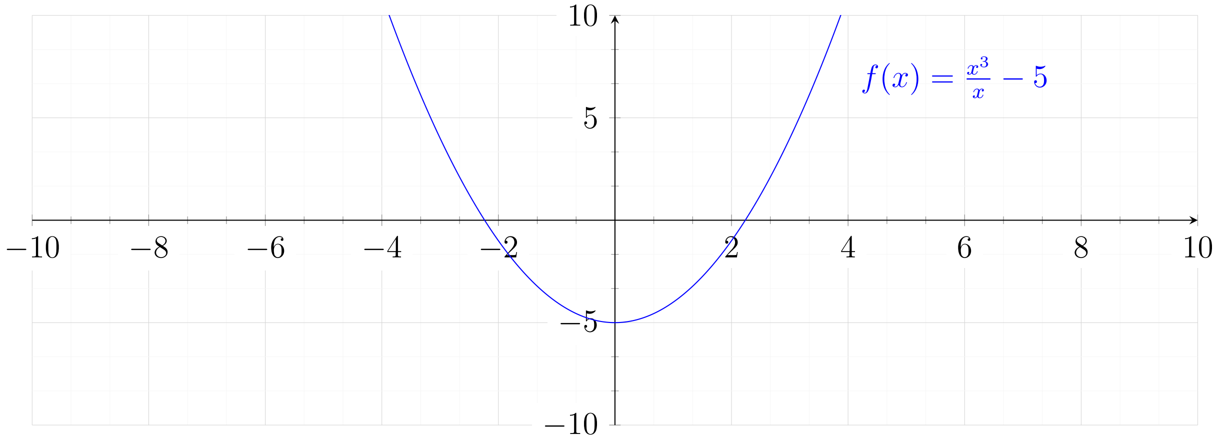


Jetzt kann es aber sein, dass wir gerne die Definitionslücken unserer Funktion definieren wollen. Das geht sogar mithilfe der stetigen Erweiterung, allerdings nicht für jede Lücke. Eine Lücke, die man bestimmen kann, nennt man (be)hebbar. Damit eine Lücke behebbar ist, müssen die Bedingungen für die Differenzierbarkeit gegeben sein, außer der, dass x_0 nicht im Definitionsbereich liegt. Würde x im Definitionsbereich liegen hätten wir natürlich auch keine Lücke. Logisch. Das Kriterium, dass der Grenzwert dem Funktionswert an der Stelle x_0 entspricht entfällt dementsprechend auch.

Ist eine Lücke einer Funktion *(be)hebbar*, so sind folgende Bedingungen erfüllt:

1. $x_0 \notin \mathbb{D}$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existiert*

Für $x \to 0$ bei $f(x) = \frac{1}{x}$ haben wir keinen Grenzwert, somit ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht stetig erweiterbar. Es folgt noch ein Beispiel einer stetig erweiterbaren Lücke.



Diese Funktion verhält sich jetzt wie eine Normalparabel. Leider ist sie für $x = 0$ nicht definiert, da wir nicht durch 0 teilen dürfen, also schauen wir, ob wir sie an dieser Stelle stetig erweitern können. In diesem Fall können wir uns den Test für links- und rechtsseitigen Grenzwert sparen, denn ich denke, man erkennt hier, dass wir einen Grenzwert haben.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} - 5 &= \lim_{x\to 0}(x^2 - 5)\\ &= -5\end{aligned}$$

Mit dem Grenzwert können wir jetzt eine zusammengesetzte Funktion aufstellen.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x}; & x \neq 0 \\ -5; & x = 0 \end{cases}$$

8.4 Rationalen Funktionen

8.5 Grenzverhalten von ganzrationalen Funktionen

8.6 Tangentengleichung

8.7 Kurvendiskussion