Mathematatik fürs Informatikstudium und Abitur: Zusammenfassung

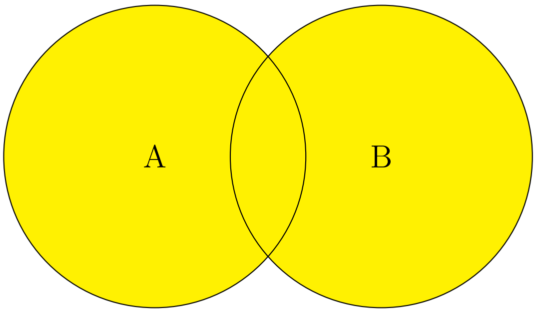
Konstantin Lukas

Fassung vom 16. Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

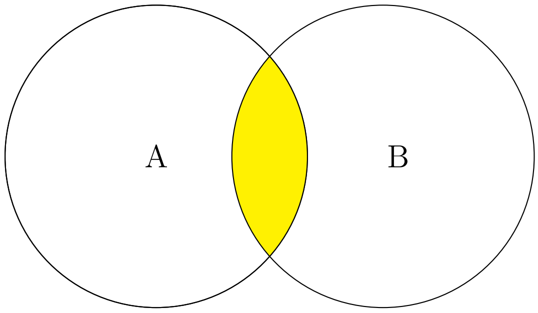
1 Mengen und Matrizen

Vereinigung



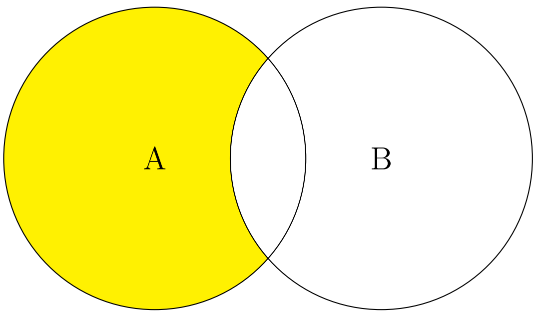
$A \cup B := \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$

Durchschnitt



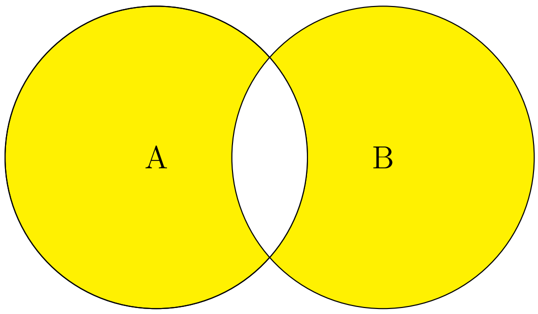
$A \cap B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

Differenz



$A \setminus B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

Symmetrische Differenz



$A \triangle B := \{x \mid (x \in A) \ \veebar \ (x \in B)\}$
$A \triangle B := \{x \mid (x \in A) \ \nleftrightarrow \ (x \in B)\}$

Noch ein paar Notationsnormen:

Anzahl der Elemente in einer Menge (Mächtigkeit):	$\lvert M \rvert = x$
Echte Teilmenge N von M:	$N \subsetneq M$
Teilmenge N von M, die gleich M sein kann:	$N \subseteq M$

Die Potenzmenge einer Menge $M = \{1; 2\}$ beinhaltet alle möglichen Teilmengen von M: $\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$.

Das Komplement einer Menge M in einem Universum U enthält alle Elemente, die nicht in M sind, aber im Universum U existieren. Sind das Universum z.B. die natürlichen Zahlen, so gilt: $M^C = \bar{M} = \mathbb{N} \setminus M$.

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder man eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ von den natürlichen Zahlen erzeugen kann. Alternativ kann man auch eine bijektive Abbildung zu den natürlichen Zahlen suchen. Die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ wäre z.B. abzählbar, weil sie endlich ist, aber auch folgende Menge ist abzählbar: $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y\}$. Das ist die Menge der geraden Zahlen. Intuitiv würde man sagen, diese Menge müsste halb so mächtig sein, wie die natürlichen Zahlen. Das ist jedoch nicht der Fall, da ich von jeder natürlichen Zahl durch Verdopplung auf die nächste gerade Zahl abbilden kann. So eine Menge heißt speziell abzählbar unendlich. Ist eine Menge hingegen nicht abzählbar, wie z.B. die reellen Zahlen, dann heißt sie überabzählbar unendlich. Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen wir übrigens mit Aleph Null angegeben: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

1.1 Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

Natürliche Zahlen mit Null

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Irrationale Zahlen

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ umfassen die rationalen und irrationalen Zahlen.

Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

1.2 Abbildungen

Abbildungen ordnen jedem Wert einer Menge X genau einen Wert aus der Menge Y mithilfe einer Vorschrift f zu. In der Analysis kommen Abbildungen in Form von Funktionen zum Einsatz. Man findet sie aber auch in der Geometrie, Stochastik oder der linearen Algebra. Die Notation ist wie folgt:

$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$

Dabei ist X der *Definitionsbereich* und Y der *Zielbereich* von f.

Die formale Definition für eine Abbildung lautet wie folgt:

$\forall x \in X \exists! y \in Y : f(x) = y$

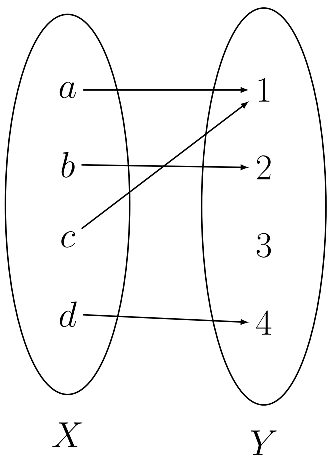
Wenn die Definition einer Abbildung erfüllt ist, spricht man auch von *wohldefiniert*. Die Abbildungsvorschrift $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \frac{m}{n} \mapsto m$ wäre z.B. nicht wohldefiniert und damit auch keine Abbildung. Der Grund dafür ist, dass man für dasselbe Argument unterschiedliche Werte kriegen kann. $\frac{1}{2}$ ist beispielsweise das gleiche wie $\frac{2}{4}$. Laut der Vorschrift, würden wir jedoch 1 und 2 als Werte kriegen. Damit ist jedem Wert der Definitionsmenge mehr als ein Wert der Zielmenge zugewiesen. Wenn man das Argument wie hier auf verschiedene Weisen darstellen kann, spricht man dabei von Repräsentanten. Ist jedem Repräsentanten dasselbe Element des Zielbereiches zugewiesen, sagt man, die Zuordnung ist *repräsentantenunabhängig*. Diese Unabhängigkeit ist Voraussetzung für Wohldefiniertheit, jedoch muss man auch noch überprüfen, ob die Abbildungsvorschrift für alle Elemente des Definitions- und Zielbereichs funktioniert. Das bedeutet konkret, dass z.B. eine Abbildung, die von x nach $\frac{1}{x}$ projiziert, nur dann wohldefiniert ist, wenn ihre Definitionsmenge die Null ausschließt. Außerdem muss man darauf achten, dass die abgebildeten Werte alle im Zielbereich liegen.

Eine besondere Art von Abbildung ist die identische Abbildung oder auch einfach Identität. Dabei handelt es sich um eine Funktion, die genau ihr Argument zurückgibt. $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist z.B. die identische Abbildung auf den reellen Zahlen.

1.2.1 Bild und Urbild

Die Menge der Werte aus dem Zielbereich Y, die f auf einer Teilmenge M des Definitionsbereiches tatsächlich abbildet, nennt man Bild von M unter f.

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Bild}(f) := f(X)$$

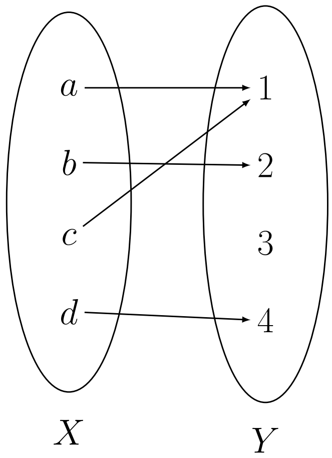


$$\mathsf{Bild}(f) = \{1, 2, 4\}$$

$$f(\{a, b, c\}) = \{1, 2\}$$

Im Gegensatz dazu existiert auch noch das Urbild. Das ist die Menge der Werte des Definitionsbereiches, die die Werte einer Teilmenge M des Zielbereichs erzeugen.

$$f^{-1}(M) := \{x \in X \mid f(x) \in M\}$$



$$f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b,c\}$$

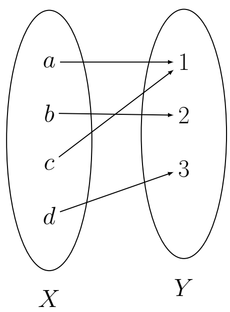
Achtung: Obwohl die Notation ähnlich ist, ist das Urbild von der Umkehrfunktion (S. 82) zu unterscheiden.

1.2.2 Abbildungseigenschaften

Es gibt drei sehr wichtige Begriffe für Abbildungen: Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Diese sind wie folgt definiert:

Surjektiv bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge ein nichtleeres Urbild hat.

$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$



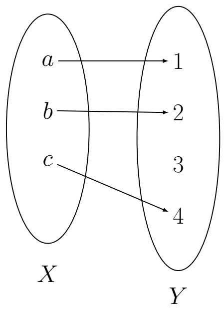
Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^4$

Definition von Surjektivität über die Identität

f ist surjektiv $\Leftrightarrow \exists (h : W \Rightarrow X) : f \circ h = id_W$

Injektiv bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge höchstens ein Element in seinem Urbild hat.

$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

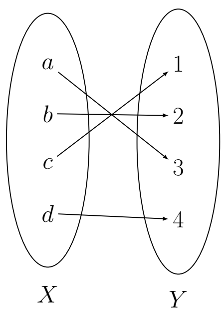


Beispiel: $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4$

Definition von Injektivität über die Identität

f ist injektiv $\Leftrightarrow \exists (h : W \Rightarrow X) : h \circ f = id_X$

Bijektiv bedeutet, die ist Funktion sowohl surjektiv als auch injektiv. Das heißt demnach auch, dass jedes Element der Zielmenge genau ein Element in seinem Urbild hat.



Beispiel: $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^4$

Wenn eine Abbildung bijektiv ist, ist sie auch umkehrbar (S. 82) und anders herum.

Des weiteren gelten folgende Regeln:

f und g sind injektiv $\Rightarrow g \circ f$ ist injektiv
$g \circ f$ ist injektiv $\Rightarrow f$ ist injektiv
f und g sind surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ ist surjektiv
$g \circ f$ ist surjektiv $\Rightarrow g$ ist surjektiv

1.2.3 Restriktion und Inklusion

Wenn man nicht den ganzen Definitionsbereich einer Abbildung betrachten will, kann man mithilfe einer Einschränkung (Restriktion) die Funktionen auf eine Teilmenge des ursprünglichen Definitionsbereichs begrenzen. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$ eine Teilmenge $\neq \emptyset$ des Definitionsbereiches, so gilt für die **Restriktion** von f auf A:

$f\mid_A : A \to Y$ mit $f\mid_A (x) := f(x)$ für $x \in A$

Es gibt außerdem noch die **Inklusion**. Dabei bildet man von einer Teilmenge auf den Definitionsbereich ab, wobei natürlich in diesem Fall der Definitionsbereich der Ursprungsfunktion gemeint ist.

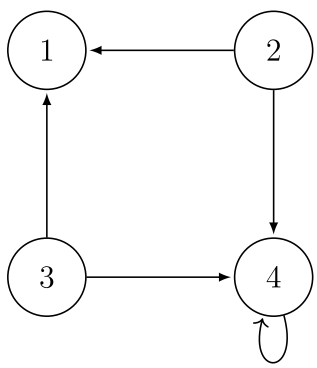
$$\begin{aligned} \text{Ursprungsfunktion: } & f : X \to Y, x \mapsto y \\ \text{Inklusion: } & g : A \to X, x \mapsto x \end{aligned}$$

Die Inklusion scheint auf den ersten Blick wenig nützlich, aber man kann mit ihr auch die Restriktion beschreiben. Geht man von A über X nach Y kommt man auf dasselbe hinaus, wie bei der Restriktion von f auf A. Es gilt nach den obigen Definitionen: $f\mid_A = f \circ g$.

1.2.4 Relationen

Wenn man zwei nichtleere Mengen hat A und B hat, dann nennt man das Tripel (A, B, R) Relation, wobei $R \subseteq A \times B$ ist. Ist ein Tupel $(a, b) \in R$, so sagt man, dass a in Relation zu b steht. Dafür schreibt man auch aRb. In diesem Fall handelt es sich um eine binäre Relation. Allgemein spricht man von n-stelligen Relationen für die Relation auf n Mengen: $R \subseteq A_1 \times ... \times A_n$. Wenn $A = B$ ist, dann kann man den Tripel auch gekürzt als Tupel schreiben: (A, R).

Hat man die Relation (A, R) mit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $R = \{(2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$, kann man diese auch graphisch darstellen:



Das ist aber nicht die einzige Möglichkeit Relationen darzustellen. Man kann z.B. auch eine Adjazenzmatrix oder eine Tabelle anlegen, in der die Zeilen für die linke Seite der Tupel und die Spalten für die rechte Seite der Tupel stehen. Die selbe Relation könnte man also auch so darstellen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1	-
2	1,4
3	1,4
4	4

Relationen können bestimmte Eigenschaften haben. Die obige Relation ist beispielsweise antisymmetrisch und transitiv. Hier ist eine Übersicht über die wichtigsten Eigenschaften von Relationen gezeigt anhand der Grundmenge $A = \{0, 1, 2\}$.

Eigenschaft	**Bedingung**	**Beispiel**
reflexiv	$\forall x \in A : xRx$	$\{(0,1),(0,0),(1,1),(2,2),(0,2)\}$
irreflexiv	$\forall x \in A : \neg xRx$	$\{(0,1),(1,2),(2,0),(1,0)\}$
symmetrisch	$\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$	$\{(0,0),(0,1),(1,0),(2,0),(0,2)\}$
antisymmetrisch	$\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	$\{(0,1),(2,0),(2,2),(1,1),(0,0)\}$
transitiv	$\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	$\{(0,1),(1,2),(0,2),(2,2)\}$

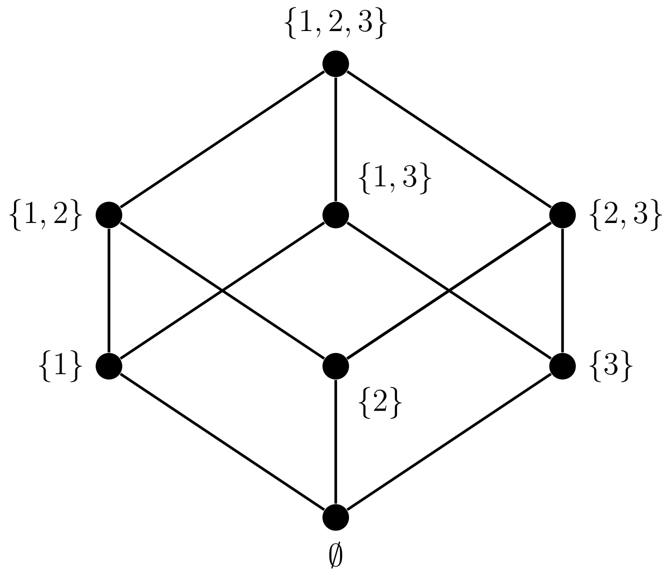
Wenn Relationen bestimmte Kombinationen von Eigenschaften haben, gibt man ihnen besondere Namen. Die wichtigsten sind die Äquivalenzrelation und die Ordnungsrelation.

Relationstyp	**reflexiv**	**symmetrisch**	**transitiv**	**antisym.**
Äquivalenzrelation	$\times$	$\times$	$\times$	
Ordnungsrelation	$\times$		$\times$	$\times$

Für diese beiden Relationstypen gelten noch einige Besonderheiten:

Ordnungsrelation
Wenn aRb oder bRa gilt, nennt man die Elemente a und b vergleichbar. Wenn alle Elemente miteinander vergleichbar sind, dann spricht man von einer totalen Ordnung, andernfalls von einer partiellen Ordnung. Als Tupel mit der Grundmenge (A, R) sagt man auch geordnete Menge, wenn R eine Ordnungsrelation ist.

Wenn man eine Halbordnung hat, wäre es aufgrund der Reflexivität und der Transitivität sehr mühsam alle Pfeile eines Digraphen einzuzeichnen. Deshalb lässt man, wenn klar ist, dass es sich um eine Halbordnung handelt, die transitiven und reflexiven Pfeile weg. Außerdem entfernt man noch die Pfeilspitzen und ordnet die Element so an, dass die unteren Elemente auf die darüber liegenden zeigen. Diese Vereinfachung nennt man Hasse Diagramm. Hier einmal eins für die Relationalstruktur $(\mathfrak{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$:



Wenn man eine Teilmenge $B \subseteq A$ und Elemente $b \in B$ und $a \in A$ betrachtet, sind folgende Begriffe wichtig, wenn es sich um eine Ordnung handelt:

Minimal	**Maximal**
$\forall b' \in B : b'Rb \Rightarrow b' = b$	$\forall b' \in B : bRb' \Rightarrow b' = b$
Minimum (min B)	**Maximum (max B)**
$\forall b' \in B : bRb'$	$\forall b' \in B : b'Rb$
Untere Schranken	**Obere Schranken**
$\forall b \in B : aRb$	$\forall b \in B : bRa$

Auf den ersten Blick würde man sagen, dass Maximum und maximal sowie Minimum und minimal gleichbedeutend sind. Dass das aber nicht der Fall ist für Ordnungen, sehen wir an einem Beispiel, wenn wir die Teilmenge $B = \{\{1,2\},\{1\},\{2\}\}$ der Grundmenge der obigen Ordnung betrachten.

B	min B	max B	maximal in B	minimal in B	untere Schranken	obere Schranken
$\{\{1,2\},\{1\},\{2\}\}$	-	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1\},\{2\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$

Übersetzt heißt das, dass maximale/minimale alle Elemente sind, die eben das sind. Maximum und Minimum sind die einzigen maximalen/minimalen Elemente. Gibt es da mehrere, haben wir auch kein Maximum/Minimum.

B heißt beschränkt, wenn obere und untere Schranken existieren.

Besitzen die oberen/unteren Schranken ein größtes bzw. kleinstes Element, wird dieses auch als **Supremum** (größte untere Schranke) bzw. **Infimum** (kleinste obere Schranke) bezeichnet.

Äquivalenzrelationen

Bei Äquivalenzrelationen kann man anstatt aRb auch schreiben $a \sim b$. Außerdem lassen sich Äquivalenzrelationen in sogenannte Äquivalenzklassen einteilen. Eine Äquivalenzklasse ist eine Menge von Elementen, auf die ein beliebiger Wert abbildet. Richtig formal definiert heißt das:

$[x]_\sim = [x] := \{y \mid x \sim y\}$

Alle x, die die selbe Äquivalenzklasse definieren, heißen Repräsentanten für die Klasse. Wenn man auf eine bestimmte Klasse zeigen will, kann man einen beliebigen Repräsentanten dafür nehmen.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Faktor- bzw. Quotientenmenge. Das ist die Menge aller Äquivalenzklassen.

$A/_\sim := \{[a]_\sim \mid a \in A\}$

Haben wir eine Familie an nichtleeren Teilmengen $\{B_i \in A \mid i \in I\}$, die A überdecken

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

und die paarweise disjunkt sind,

$$B_i \cap B_j = \emptyset$$

dann nennen wir diese Familie Partition. Da auch Äquivalenzklassen diese Eigenschaften erfüllen, sind auch sie Partitionen.

1.2.5 Lineare Abbildungen

Sind für eine Abbildung $T : V \to W$ mit V und W K-Vektorräume die Eigenschaften Additivität und Homogenität gegeben, sagt man die Abbildung ist K-linear. Formal heißt das:

$$\forall u, v \in V : T(u + v) = T(u) + t(v)$$
$$\forall v \in V\ \forall \lambda \in K : T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v)$$

Abgekürzt können wir auch sagen, eine Abbildung ist genau dann linear, wenn

$$\forall u, v \in V\ \forall \lambda, \mu \in K : T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$$

Lineare Abbildungen nennen wir auch Homomorphismen und schreiben dafür:

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{T : V \to W \mid T \text{ ist eine lineare Abbildung}\}$$
$$\mathrm{Hom}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V, V)$$

Je nach Eigenschaften des Homomorphismus T gibt es folgende Bezeichnungen:

- **Monomorphismus:** T ist injektiv
- **Epimorphismus:** T ist surjektiv
- **Isomorphismus:** T ist bijektiv
- **Endomorphismus:** $V = W$
- **Automorphismus:** $V = W$ und T ist bijektiv

Wichtig für lineare Abbildungen, sind außerdem folgende Begriffe:

Bild
$\mathrm{im}\ T := T(V)$

Kern/Nullraum
$\ker T := T^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$

Rang
$\mathrm{rank}\ T := \dim_K(\mathrm{im}\ T)$

Defekt
$\mathrm{def}\ T := \dim_K(\ker T)$

Wenn wir einen Homomorphismus auf einer Menge haben, der mit sich selbst verkettet wieder sich selbst ergibt, sprechen wir von einem Projektor: $p \in \mathrm{Hom}_K(V)$ und $p \circ p = p$. Ein Beispiel für einen Projektor ist die Identität oder auch eine Abbildung wie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (0,5x + 0,5y, 0,5x + 0,5y)$

Ganz ähnlich dazu definieren wir den Begriff Symmetrie als eine lineare Abbildung $s \in \mathrm{Hom}_K(V)$ mit $s \circ s = \mathrm{id}$.

1.2.6 Matrizen

Matrizen sind eine Anordnung von Skalaren $a_{ij} \in K$ mit $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., n$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$. Matrizen werden in Zeilen und Spalten aufgeteilt und entsprechen sagen wir zur Konkretisierung oft $m \times n$ Matrix.

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,...,m\\ j=1,...,n}} := (a_{ij})_{i,j} := A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wie Menge aller $m \times n$ Matrizen wird geschrieben als:

$K^{m \times n} := \{A \mid A \text{ ist eine } m \times n \text{ Matrix mit Einträgen in } K\}$

Wichtig zu unterscheiden ist, dass das i, also die linke Zahl des Indexes die Anzahl der Zeilen angibt und j die Anzahl der Spalten.

Wenn wir eine quadratische Matrix haben, können wir die Diagonale angeben mit:

$\mathrm{diag}(A) := (a_{11}, ..., a_{nn})$

Haben wir eine quadratische Matrix, auf deren Diagonale nur Einsen und ansonsten nur Nullen liegen, nennen wir diese Einheitsmatrix oder Identitätsmatrix.

$$I_n := (\delta_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Mithilfe von Matrizen können wir lineare Abbildungen definieren. Betrachten wir als Beispiel den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Möchte man beispielsweise Vektoren $90°$ um den Nullpunkt rotieren, kann man das mit dieser Abbildung tun:

$$T(v) = \begin{pmatrix} \cos(90)v_1 - \sin(90)v_2 \\ \sin(90)v_1 + \cos(90)v_2 \end{pmatrix}$$

Man kann das allerdings auch als Matrix A darstellen:

$$Av = \begin{pmatrix} \cos(90) - \sin(90) \\ \sin(90) + \cos(90) \end{pmatrix}$$

Da wir jetzt Abbildungen mit Matrizen darstellen können, können wir das Nutzen, um mit diesen Abbildungen zu rechnen.

Addition

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$

Skalare Multiplikation

$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i,j}$

Multiplikation

$$AC := \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}\right)_{i,j} = (c_{ij})_{i,j}$$

Anmerkung: Die Multiplikation zweier Matrizen funktioniert nur, wenn A genauso viele Zeilen hat, wie B Spalten.

Ein Beispiel für die Multiplikation zweier Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 56 & 26 \\ 39 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 12 & 35 & 16 \\ 34 & 45 & 28 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Unter der Voraussetzung, dass wie oben erwähnt die Anzahl der Zeilen und Spalten der Matrizen übereinstimmen, gelten folgenden Regeln:

$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB)$ $\quad$ $A(B + C) = AB + AC$

$(AB)C = A(BC)$ $\quad$ $(A + B)C = AC + BC$

Nehmen wir jede Spalte einer Matrix als eigenen Vektor und nehmen davon den Spann, dann erhalten wir das Bild von A.

$\text{im}A = (\{v_1, v_2, ..., v_n\})$

Den Rang einer Matrix, nennen wir entsprechend Spaltenrang. Nehmen wir den Spann der Zeilenvektoren, dann nennen wir dessen Dimension analog Zeilenrang. Generell gilt, dass Zeilenrang gleich Spaltenrang ist.

Eine wichtige Operation auf Matrizen ist das Transponieren.

Transponierte Matrix

$A = (a_{ij})_{i,j} \Rightarrow A^T = (a_{ji})_{j,i}$

Das heißt effektiv nur, dass man die Zeilen und Spalten vertauscht.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Wenn wir eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen gegeben haben, können wir mithilfe einer Darstellungsmatrix diese Abbildung bzgl. anderer Basen darstellen. Lineare Abbildungen sind standardmäßig bzgl. der kanonischen Basen der Vektorräume, weshalb sich bei anderen Basen auch die Abbildung ändert.

Darstellungsmatrix/Abbildungsmatrix

Seien V und W K-Vektorräume sowie $A = \{v_1, ..., v_n\}$ und $B = \{w_1, ..., w_m\}$ deren Basen. Dann existiert für jeden Homomorphismus T von V nach W genau eine Matrix

$M_T = (a_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$

sodass

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad \forall j = 1, ..., n$$

Die Darstellungs- oder auch Abbildungsmatrix wird definiert als

$M_B^A : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to K^{m \times n}, T \mapsto M_T$

von T bezüglich der Basen A und B.

Haben wir beispielsweise die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + y + 4z \end{pmatrix}$$

und die Basen

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad B := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dann kommen wir auf

$$M_B^A(T) = \begin{pmatrix} -9 & -14 & 2 \\ 21 & 29 & 0 \end{pmatrix}$$

denn

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 21\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\15\end{pmatrix} = -14\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 29\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$T\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Schritte für die Darstellungsmatrix

1. Für jeden Vektor aus Ausgangsbasis A: lineare Funktion T anwenden
2. Für jedes Ergebnis aus erstem Schritt Linearkombination mit Vektoren aus Zielbasis B suchen
3. Die Skalare der Linearkombination jedes Vektors sind die Komponenten für die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix

Eine Darstellungsmatrix ist für uns ein Shortcut, um weniger zu rechnen. Wir könnten die Abbildung T bzgl. der Basen A und B auch in drei Schritt ausführen. Dafür führen wir die Koordinatenabbildung ein:

Koordinatenabbildung

Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ Basis von V. Dann ist die Koordinatenabbildung bei Eingabe eines Vektors $v = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_n a_n \in V$ definiert als:

$\phi_A : V \to K^n, v \mapsto (\gamma_1, ..., \gamma_n)$

Die Koordinatenabbildung gibt uns also die Skalare aus der Linearkombination eines Vektors bzgl. einer Basis A.

Die drei Rechenschritte, die die Abbildungsmatrix in einem ausführt sind:

1. Wir betrachten unsere Eingabe als Skalare und machen mit ϕ_A^{-1} daraus einen Vektor bzgl. der Basis A
2. Wir wenden unsere Abbildung T auf diesen Vektor an
3. Mit ϕ_B ziehen wir jetzt aus dem transformierten Vektor wieder die Skalare raus

Hier einmal visuell, was das bedeutet:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "M_B^A(T)"] \arrow[d, "\phi_A^{-1}"'] & K^m \\ V \arrow[r, "T"'] & W \arrow[u, "\phi_B"'] \end{tikzcd}$$

Um das nachzuvollziehen, rechnen wir das beispielsweise einmal mit unserer Darstellungsmatrix, der linearen Abbildung und den Basen von eben. Schauen wir mal anhand dem Vektor $(1, 3, 2)^T$, ob wir über den komplizierten Weg dasselbe rauskriegen wie mit der Darstellungsmatrix.

Über die Darstellungsmatrix erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} -9 & -14 & 2 \\ 21 & 29 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ 108 \end{pmatrix}$$

So, und jetzt der komplizierte Weg: Zunächst der Schritt von K^n nach V:

$$\phi_A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Jetzt wenden wir darauf T an:

$$T\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ 61 \end{pmatrix}$$

Jetzt wenden wir noch ϕ_B an und sollten auf das gleiche Ergebnis kommen:

$$\phi_B\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 59 \end{pmatrix}\right) = -47\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 108\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ 108 \end{pmatrix}$$

Eine besondere Art von Darstellungsmatrix ist die **Basiswechselmatrix**. Darstellungsmatrizen waren ja bisher immer für eine Abbildung definiert. Bei einer Basiswechselmatrix ist diese Matrix speziell die Identität auf einem Vektorraum V. Eine Basiswechselmatrix T bzgl. der Basen A und B ist also definiert als:

$$T_B^A := M_B^A(\mathrm{id}_V)$$

Nehmen wir als Beispiel die Basen:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dann führen wir folgende Rechnung aus:

$$\mathrm{id}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{id}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{id}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Unsere Basiswechselmatrix ist damit:

$$\mathrm{id}_B^A = \begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{4} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0\end{pmatrix}$$

Ähnlich wie bei Abbildungen, wo es auch Umkehrabbildungen gibt, gibt es für Matrizen invertierte Matrizen.

Invertierbarkeit von Matrizen

Gibt es zu einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ mit $AB = I_n$, so nennen wir A invertierbar oder regulär, andernfalls singulär. Diese Inverse Bezeichnen wir mit A^{-1}.

Um die Inverse einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ zu berechnen, schreiben wir diese zunächst mit der Identität als erweiterte Koeffizientenmatrix auf $(A \mid I_n)$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\1 & 0 & 3\\5 & 2 & 9\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\5 & 2 & 9 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Um damit jetzt die inverse Matrix zu berechnen haben wir 2 Möglichkeiten.

Möglichkeit 1: LGS lösen

Bei dieser Variante müssen wir für jede Spalte der Matrix ein LGS lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 3 & 0 & 1\\1 & 0 & 3 & 0\\5 & 2 & 9 & 0\end{array}\right) = \begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\1 & 0 & 3\\5 & 2 & 9\end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\Rightarrow} x = \begin{pmatrix}1\\-1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 3 & 0 & 0\\1 & 0 & 3 & 1\\5 & 2 & 9 & 0\end{array}\right) = \begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\1 & 0 & 3\\5 & 2 & 9\end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\Rightarrow} x = \begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\-6\\-\frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 5 & 2 & 9 & 1\end{array}\right) = \begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 5 & 2 & 9\end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\Rightarrow} x = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 2\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Diese drei Lösungen sind jetzt die Spaltenvektoren unserer inversen Matrix:

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 5 & 2 & 9\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2}\\ -1 & -6 & 2\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Möglichkeit 2: Identität nach links bringen

Diese Variante eignet sich nur für sehr einfache Gleichungssystem, wo man sofort sieht, wie man die inverse Matrix erzeugen kann.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Für quadratische Matrizen gibt es noch weitere relevante Begriffe.

Symmetrische Matrix

$A = A^T$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$\forall i \neq j : a_{ij} = 0$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Obere/Untere Dreiecksmatrix

$\forall i > j : a_{ij} = 0, \forall i < j : b_{ij} = 0$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 7 & 4 & 0\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

Orthogonale Matrix

$A^{-1} = A^T$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Permutationsmatrix

In jeder Zeile/Spalte eine 1, sonst 0

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Projektor

$A = A^2$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0,5 & 0,5\\ 0 & 0,5 & 0,5\end{pmatrix}$$

Nilpotente Matrix

$\exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hermitische Matrix

$K = \mathbb{C} \wedge A = \bar{A}^T (\bar{A} = \text{konj. komplex})$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-3i \\ 1-i & 4 & 5+2i \\ 2+3i & 5-2i & 6 \end{pmatrix}$$

Positiv definite Matrix

$\forall x \in K^n \setminus \{0\} : x^T A x > 0$

Negativ definite Matrix

$\forall x \in K^n \setminus \{0\} : x^T A x < 0$

Positiv semidefinite Matrix

$\forall x \in K^n : x^T A x \geq 0$

Negativ semidefinite Matrix

$\forall x \in K^n : x^T A x \leq 0$

1.2.7 Determinanten

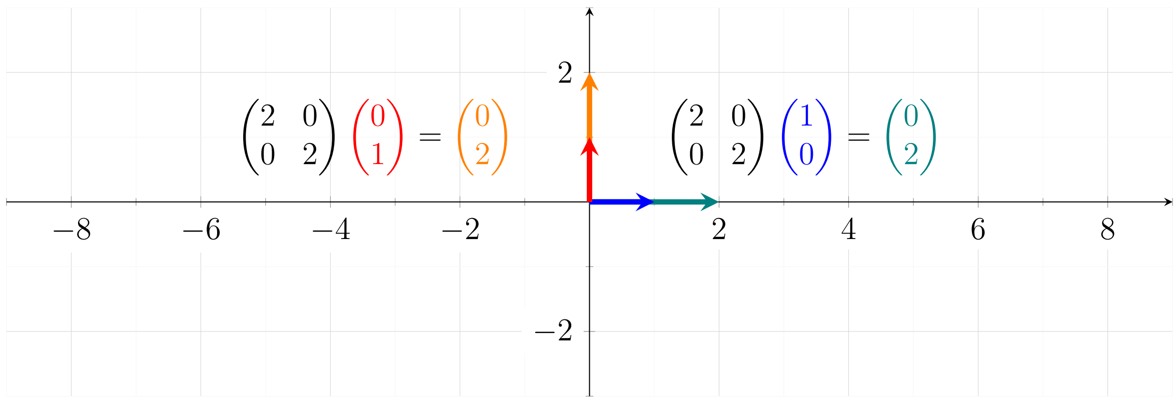
Wenn wir mit Transformationsmatrizen arbeiten, kann man sich das so vorstellen, als würde sich der verbiegen. Wobei verbiegen vielleicht nicht das richtige Wort ist, denn wenn wir von linearen Abbildungen reden, dann gibt es nur bestimmte Arten von Transformationen, die wir vornehmen können. Wir können z.B. den Raum strecken, rotieren oder scheren (d.h. quasi anhand eines Rechteckes eine Kante zu bewegen, s.d. man ein Parallelogramm erhält).

Die Determinante sagt uns, um welchen Faktor sich jede beliebige Fläche (für $\mathbb{R}^2$) oder einen Volumen (für $\mathbb{R}^3$) in unserem Raum durch die Transformation verändert.

Betrachten wir ein paar Beispiele in $\mathbb{R}^2$ angewandt auf unsere Einheitsvektoren e_1 und e_2 mit einer Transformation T:

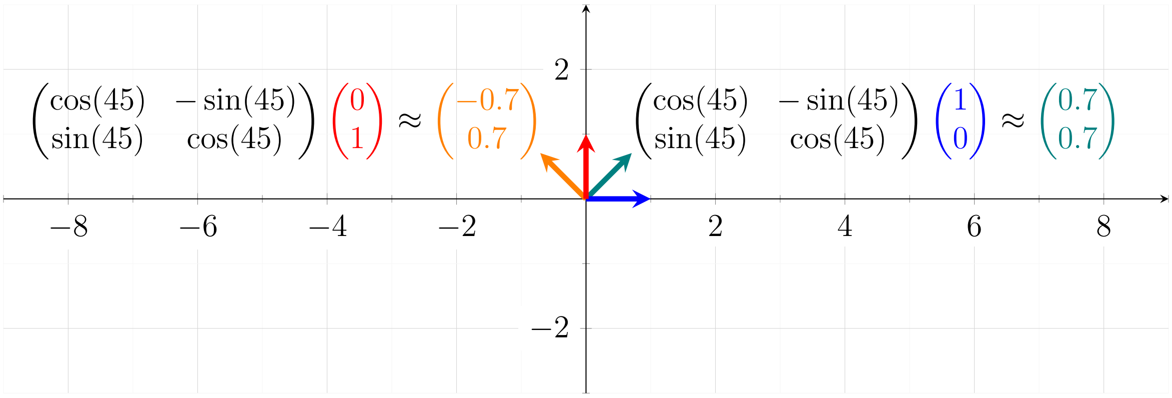
Skalierung

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T) = 4$$



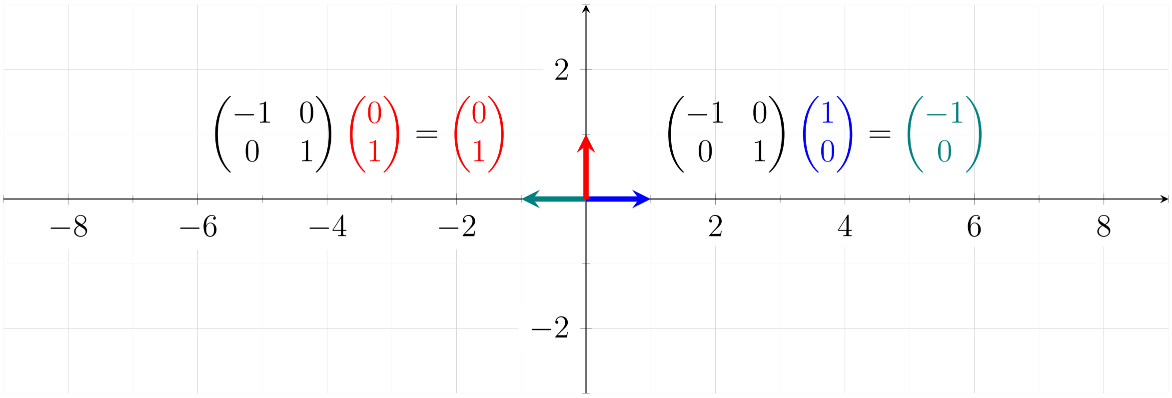
Rotation

$$T = \begin{pmatrix} \cos(45) & -\sin(45) \\ \sin(45) & \cos(45) \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T) = 1$$



Spiegelung

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T) = -1$$



Soweit so gut, aber wie ist die Determinante definiert und wie berechnet man sie? Zunächst ist die Determinante eine sogenannte multilineare Abbildung:

$$\det : \underbrace{K^m \times \ldots \times K^m}_{m\text{-mal}} \to K$$

Berechnen tun wir die Determinante folgendermaßen ($A \in K^{m \times m}$):

Definition der Determinante (rekursiv)

- $m = 1 \Rightarrow \ \det(A) := a_{11}$
- $m > 1$: Sei $A_{ik} \in K^{(m-1)\times(m-1)}$, bei der die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen wurde.

  $$\det(A) := \sum_{i=1}^{m} a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{i1})$$

Bei der obigen Definition wird immer die erste Spalte gestrichen, allerdings ist es egal, welche Spalte man streicht, solange man immer die gleiche Spalte nimmt. Genauso gut kann man auch immer eine feste Zeile streichen und unterschiedliche Spalten nehmen. Diese Art die Determinante zu berechnen, nennt man Laplacescher Entwicklungssatz.

Dabei redet man je nachdem wie man es macht von der Entwicklung nach Spalte oder Zeile.

Entwicklung nach der j-ten Spalte

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Entwicklung nach der i-ten Zeile

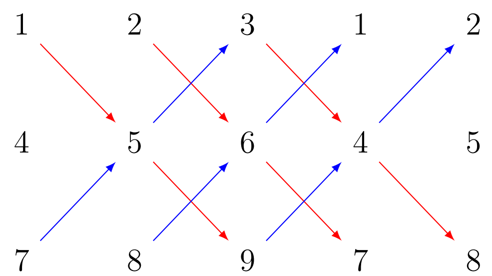
$$\det(A) := \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Die Summanden, die wir dabei addieren (also $a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$) nennen wir übrigens Adjunkte.

Die Determinante einer Matrix wird auch manchmal mit vertikalen Strichen gekennzeichnet. Da auch die Formel schwer zu visualisieren ist, betrachten wir ein Beispiel:

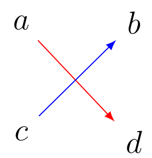
$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Um das im Kopf zu machen gibt es die Regel von Sarrus. Ausgehend von den Elementen der oberen Zeilen multiplizieren wir diagonal alles zusammen und ziehen davon die Produkte der Diagonalen von unten her ab. Dafür müssen wir die Matrix rechts erweitern, indem wir sie rechts quasi anhängen.



$$\begin{aligned} &(1 \cdot 5 \cdot 9) + (2 \cdot 6 \cdot 7) + (3 \cdot 4 \cdot 8) - (7 \cdot 5 \cdot 3) - (8 \cdot 6 \cdot 1) - (9 \cdot 4 \cdot 2) \\ =\ & 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 \\ =\ & 225 - 225 \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

Vorsicht: Die Regel von Sarrus gilt nur für 3×3- und 2×2-Matrizen! Für 2×2-Matrizen ist sie jedoch etwas einfacher:



Für die Determinante gelten einige besondere Eigenschaften. Betrachten wir die Matrizen $A, B \in K^{m\times m}$ mit den Spaltenvektoren $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{a}_m$ für A und den Skalar $\lambda \in K$ sowie die Vektoren $\mathfrak{b}_k, \mathfrak{c}_k \in K^m$:

Besondere Eigenschaften der Determinante

- $\det(\lambda A) = \lambda^m \det(A)$
- $\det(\mathfrak{a}_1 ... \mathfrak{a}_{k-1} \lambda \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_{k+1} ... \mathfrak{a}_m) = \lambda \det(A)$
- Vertauscht man zwei Spalten, ändert sich das Vorzeichen von $\det(A)$.
- $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{b}_k + \mathfrak{c}_k \Rightarrow \det(A) = \det(\mathfrak{a}_1 ... \mathfrak{a}_{k-1} \mathfrak{b}_k \mathfrak{a}_{k+1} ... \mathfrak{a}_m) + \det(\mathfrak{a}_1 ... \mathfrak{a}_{k-1} \mathfrak{c}_k \mathfrak{a}_{k+1} ... \mathfrak{a}_m)$
- $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_l \wedge 1 \leq k \neq l \leq m \Rightarrow \det(A) = 0$
- Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen, bleibt $\det(A)$ gleich.
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$
- A ist regulär (invertierbar) $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

1.2.8 Cramersche Regeln

Regel zur Matrixinversion

Zunächst gilt laut Cramer:

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär

Und für eine Inverse einer regulären Matrix A gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & \dots & (-1)^{m+1}\det(A_{m1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+m}\det(A_{1m}) & \dots & (-1)^{m+m}\det(A_{mm}) \end{pmatrix}$$

Regel für lineare Gleichungssysteme

Hat man ein LGS $Ax = b$ mit gleich vielen Unbekannten wie Gleichungen, wobei A regulär ist, gilt für alle Komponenten des Lösungsvektors:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Dabei bezeichnet A_i, die Matrix, in der man die i-te Spalte durch b ersetzt hat.

1.2.9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wie immer betrachten wir zunächst einen K-Vektorraum V. Außerdem sei ϕ ein Endomorphismus (S. 14) bzw. $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix für ϕ. Dann heißt ein Skalar $\lambda \in K$ Eigenwert von ϕ und der Vektor $v \in V$ Eigenvektor zu λ, wenn gilt:

$\exists v \in V \setminus \{\vec{0}\} : \phi(v) = \lambda v$

bzw.

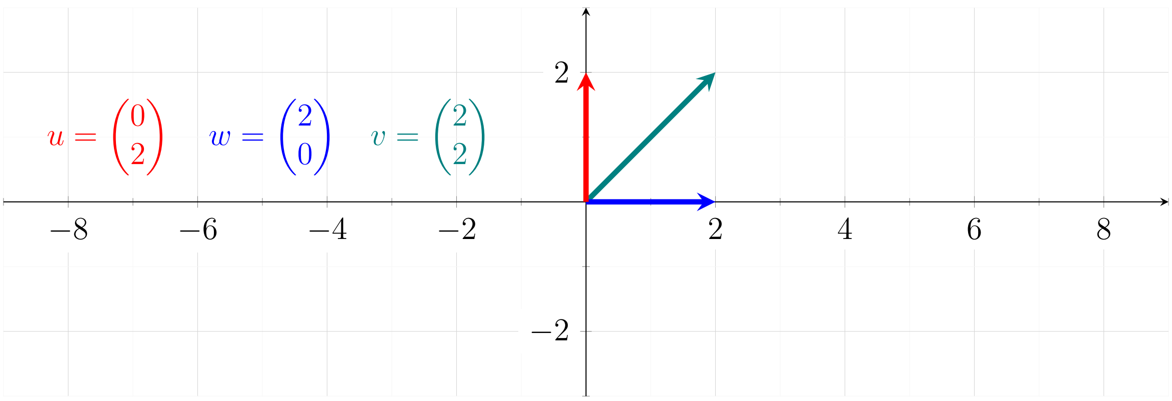
$\exists v \in V \setminus \{\vec{0}\} : Av = \lambda v$

Graphisch gesehen ist ein Eigenvektor ein Vektor, der nach einer linearen Transformation immer noch auf seinem ursprünglichen Spann liegt. Eigenvektoren werden also nur skaliert. Der Faktor um den ein Eigenvektor skaliert wird, nennen wir Eigenwert. Für eine Rotation im $\mathbb{R}^3$ beispielsweise bestimmen wir mit einem Eigenvektor die Rotationsachse.

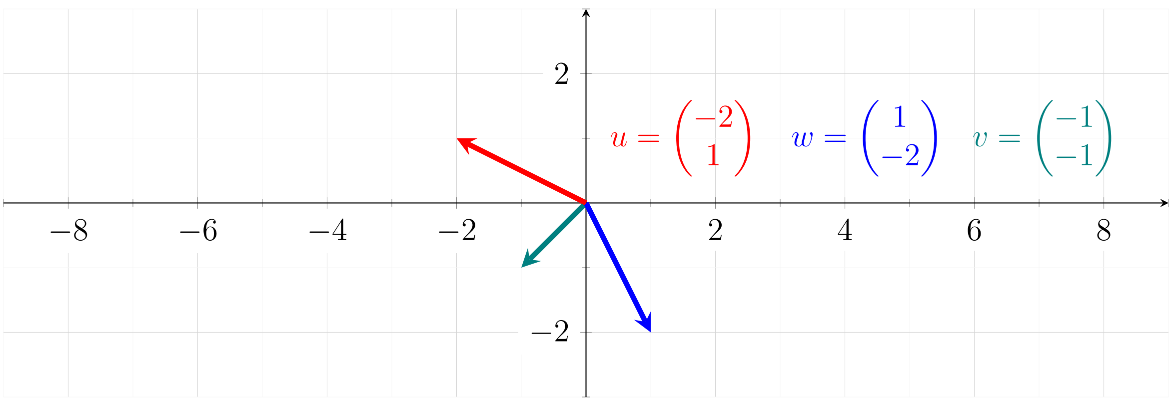
Betrachten wir dazu einmal ein Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix}$

Vor der Transformation



Nach der Transformation



In diesem Fall sehen, wir dass v auf seinem Spann bleibt. Damit ist v unser Eigenvektor und wir sehen auch schnell, dass v um einen Faktor von $-0,5$ skaliert wird, was unser Eigenvektor für A ist.

Es ist natürlich nicht immer so einfach diese Werte zu errechnen, deswegen nochmal etwas allgemeiner. Prinzipiell müssen wir die Gleichung

$Av = \lambda v$

lösen. Wir können uns das durch geschickte Umformungen etwas einfacher machen:

$$\begin{aligned}
&Av = \lambda v \\
\Leftrightarrow &Av = (\lambda I_n)v \\
\Leftrightarrow &Av - (\lambda I_n)v = \vec{0} \\
\Leftrightarrow &(A - \lambda I_n)v = \vec{0}
\end{aligned}$$

Das sieht vielleicht erst mal kompliziert aus, es hilft uns jedoch unsere Eigenwerte zu errechnen.

Machen wir das einmal für unsere Matrix aus dem Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} v = \lambda v \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} v = (\lambda I_n)v \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} v - (\lambda I_n)v = \vec{0} \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} v - \lambda I_n v = \vec{0} \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 0,5 - \lambda & -1 \\ -1 & 0,5 - \lambda \end{pmatrix} v = \vec{0}
\end{aligned}$$

Nun ist ein λ genau dann Eigenwert von A, wenn die Determinante (S. 22) von $A - \lambda I_n$ gleich Null ist. Das liegt daran, dass wir ja gerade ein Lösung für die Gleichung $(A - \lambda I_n)v = \vec{0}$ finden wollen und nicht den Nullvektor betrachten. Das heißt ein Vektor kann durch die Transformation mit der Matrix $A - \lambda I_n$ nur zum Nullvektor werden, wenn diese Transformation die Dimension reduziert, z.B. für den $\mathbb{R}^2$, indem alles auf eine Gerade gequetscht wird.

Die Determinante von $A - \lambda I_n$ bezeichnen wir als charakteristisches Polynom. Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ handelt es sich dabei um ein Polynom n-ten Grades. Wir bezeichnen das charakteristische Polynom von A mit $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix A.

Gehen wir also weiter in dem Beispiel:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0,5 - \lambda & -1 \\ -1 & 0,5 - \lambda \end{vmatrix} &= (0,5 - \lambda)(0,5 - \lambda) - (-1) \cdot (-1) \cdot \\
&= (0,5 - \lambda)^2 - 1
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass wir auch rechnerisch auf den Eigenwert $\lambda = -0,5$ kommen. Andere Matrizen haben aber mehrere Eigenwerte. Wenn wir die Eigenwerte von A zusammenfassen, nennen wir das **Spektrum** (σ) von A.

$$\sigma(A) := \{\lambda \in K \mid \exists v \in K^n \setminus \{\vec{0}\} : Av = \lambda v\}$$

Der der Betrag des Eigenwertes mit dem größten Betrag wird als Spektralradius (ρ) bezeichnet:

$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Die Lösungen, die wir anhand der Eigenwerte berechnen, fassen in sogenannten **Eigenräumen** zusammen.

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda) := \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda I_n)$$

Wenn wir jetzt eine Lösung für $(A - 0,5I_n)v = \vec{0}$ berechnen wir damit den Kern von $A - 0,5I_n$, also all die Elemente, die auf den Nullvektor abbilden.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,5 - (-0,5) & -1 & 0 \\ -1 & 0,5 - (-0,5) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Auch ohne das Gleichungssystem zu lösen sehen wir direkt, dass eine Lösung existiert, wenn die erste Komponente gleich minus der zweiten ist. Damit ist unser Eigenraum bestimmt:

$$\mathrm{Eig}(A, -0,5) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x = y \right\} = \text{ span } \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer linear unabhängig. Das folgt daraus, dass die Eigenräume von verschiedenen Eingenwert nur den Nullvektor im Schnitt haben:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \ \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(A, \lambda_2) = \{\vec{0}\}$$

Diagonalisierbarkeit

Wenn eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ genau n viele paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda \in K$ hat, sagen wir, dass A diagonalisierbar ist.

Für eine diagonalisierbare Matrix $A \in K^{n \times n}$ existiert eine reguläre Matrix $U \in K^{n \times n}$, sodass

$$U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Die Matrix U ist dabei die Matrix der Eigenvektoren zu λ_1 bis λ_n als Spaltenvektoren in derselben Reihenfolge.

Eine Basis ist außerdem immer diagonalisierbar, wenn es für K^n eine Basis nur aus den Eigenvektoren von A gibt.

Zwischen $A \in K^{n \times n}$ und $B = U^{-1}AU$ ändert sich das charakteristische Polynom nicht. Es gilt:

$$\forall \lambda \in K : \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$$

Die Dimension eines Eigenraumes nennen wir die **geometrische Vielfachheit**.

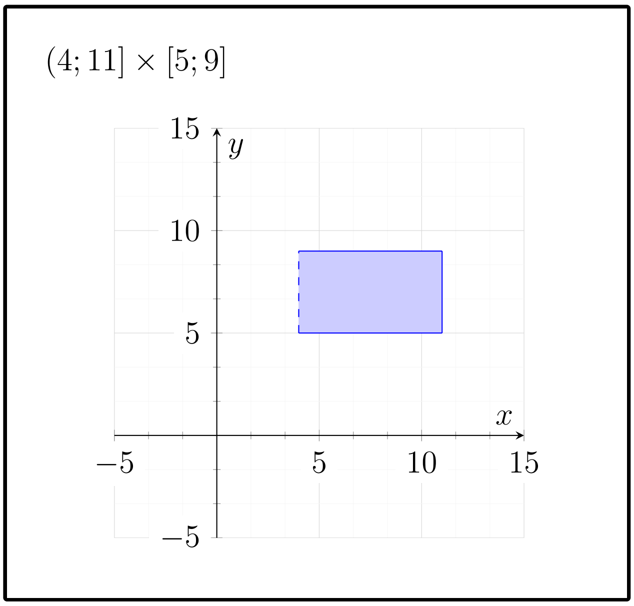
Jedes komplexe Polynom vom Grad n lässt sich mithilfe seiner $r \leq n$ Nullstellen $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$ folgendermaßen darstellen:

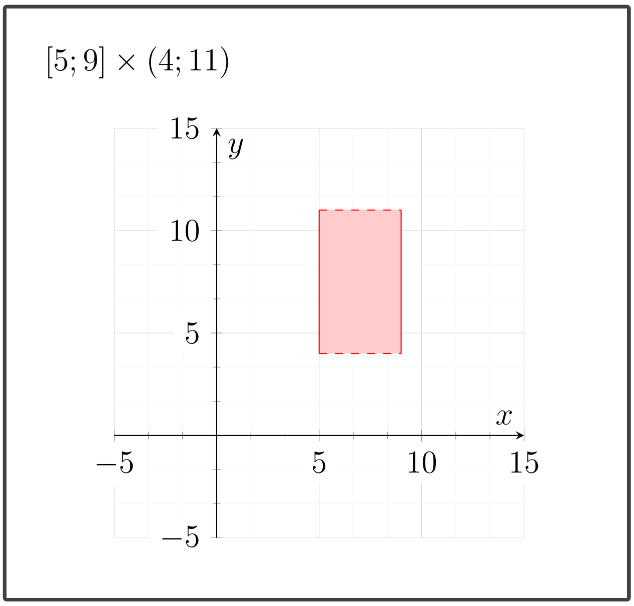
$$P(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{m_i}$$

Die Zahl m_i nennen wir dabei die Vielfachheit der Nullstelle x_i. Die Vielfachheiten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms (also der Eigenwerte) nennen wir **algebraische Vielfachheiten**.

1.3 Kartesisches Produkt

Hat man ein Zahlenpaar, wie eine 2D-Koordinate $(x; y)$, so spricht man von einem geordneten Paar, denn die Reihenfolge der Zahlen ist relevant. Wenn man zwei Mengen A und B hat, dann nennt man die Menge aller möglichen Paare (x, y) mit x aus A und y aus B das kartesische Produkt der Mengen A und B. Die entsprechende Notation dafür ist $A \times B$. Wenn A und B gleich sind, schreibt man stattdessen auch A^2. Obwohl hier von einem Produkt die Rede ist, ist es nicht egal, wie herum man die Faktoren schreibt. $A \times B$ ist nicht das Gleiche, wie $B \times A$.





Hinweis: Wenn man das kartesische Produkt in ein Koordinatensystem einzeichnet, verwendet man gestrichelte Linien, um zu zeigen, dass der jeweilige Wert genau nicht mehr Teil des kartesischen Produktes ist.

1.4 Mengensysteme

Ein Mengensystem ist eine Menge, deren Elemente ebenfalls Mengen sind. Eines der besten Beispiele für ein Mengensystem ist die Potenzmenge, deren Elemente alle Teilmengen sind, die sich mit den Elemente einer Grundmenge erzeugen lassen. Haben wir beispielsweise die Grundmenge $\Omega = \{1, 2, 3\}$, dann ist ihre Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Wenn man jetzt den Durchschnitt oder die Vereinigung aller dieser Teilmenge bilden möchte, wäre es sehr mühsam alle Mengen einzeln aufzuschreiben. Deshalb benutzt man den großen Durchschnitt und die große Vereinigung. Diese haben eine sehr einfach Notation, die es uns erlaubt, einfach ein Zeichen vor das Mengensystem zu setzen und so eine Operation auf alle Elemente durchzuführen. Für ein Mengensystem M gilt allgemein:

Großer Durchschnitt: $\bigcap M = \{x \mid \forall m \in M : x \in m\}$

Große Vereinigung: $\bigcup M = \{x \mid \exists m \in M : x \in m\}$

Nehmen wir als Beispiel noch mal unsere Potenzmenge von oben. Wenden wir den großen Durchschnitt an erhalten wir die leeren Menge, denn es gibt keine Elemente in den Mengenelemente der Potenzmenge, die in jedem Mengenelement enthalten sind: $\bigcap \mathfrak{P}(\Omega) = \emptyset$. Wenn wir die Potenzmenge groß vereinigen, erhalten wir wieder Omega: $\bigcup \mathfrak{P}(\Omega) = \{1, 2, 3\} = \Omega$.

2 Algebraische Strukturen

Algebraische Strukturen ermöglichen es uns bestimmte Operationen auf Mengen zu definieren, sodass wir Grundrechenarten festlegen können, mit denen wir rechnen.

Haben wir zwei Mengen A und B, dann nennt man $(A, \circ)$ und $(A, \square)$ algebraische Strukturen. $\circ$ und $\square$ sind dabei Abbildungen, die wie folgt definiert sind:

Innere Algebraische Verknüpfung

$\circ : A \times A \to A$

Äußere Algebraische Verknüpfung

$\square : B \times A \to A$

Ein Beispiel für eine innere algebraische Verknüpfung ist z.B. $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (n, m) \mapsto n + m$.

Ein Beispiel für eine äußere algebraische Verknüpfung ist $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2), (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$.

Weitere wichtige Begriffe, um Verknüpfungen zu beschreiben sind:

Kommutativ

$\forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$

Assoziativ

$\forall x, y, z \in A : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

Neutrales Element (e aus A)

$\forall x \in A : x \circ e = e \circ x = x$

Inverses Element

$x^{-1} \in A \wedge x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$

Invertierbar

Alle x, die ein inverses Element besitzen.

Außerdem nennt man eine Menge abgeschlossen bezüglich einer Verknüpfung, wenn das Ergebnis auch wieder Teil dieser Menge ist.

Abgeschlossenheit

$\forall x, y \in A : x \circ y \in A$

Beispielsweise sind die ganzen Zahlen bzgl. + abgeschlossen, die ungeraden Zahlen jedoch nicht.

2.1 Gruppen

$(G, \circ)$ heißt Gruppe, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall x, y \in G : x \circ y \in G$ (innere Verknüpfung, abgeschlossen)

2. $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (assoziativ)

3. $\exists e \in G : \forall x \in G : x \circ e = e \circ x = x$ (neutrales Element existiert)

4. $\forall x \in G\ \exists y \in G : x \circ y = y \circ x = e$ (inverses Element existiert für alle Elemente)

Ist eine Gruppe außerdem kommutativ, nennt man sie auch abelsche Gruppe. Beispielsweise wäre $(\mathbb{R}, +)$ so eine abelsche Gruppe.

Sobald die Abbildung einer Struktur assoziativ ist, ist sie eine Halbgruppe, ungeachtet, ob die anderen Bedingungen erfüllt sind. Besitzt die Halbgruppe außerdem noch ein neutrales Element, spricht man von Monoid.

Nimmt man eine Teilmenge $H \subseteq G$ der Menge einer Gruppe $(G, \circ)$ und dieselbe Verknüpfung spricht man von einer Untergruppe von $(G, \circ)$, wenn diese auch die Anforderungen an eine Gruppe erfüllt.

Um zu zeigen, dass eine Untergruppe wirklich ein Gruppe ist, muss man jedoch nicht die vier Bedingungen von oben beweisen. Es reicht, wenn man eine dieser beiden Sachen zeigt:

$\forall x, y \in H : x \circ y^{-1} \in N$
oder
$\forall x, y \in H : x \circ y \in H \wedge \forall x \in H : x^{-1} \in H$

Beispiel:

Seien $x, y \in \mathbb{Q}$

$\exists p, \tilde{p} \in \mathbb{Z}, q, \tilde{q} \in \mathbb{N} : x = \frac{p}{q} \wedge y = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$

$$\Rightarrow -y = \frac{-\tilde{p}}{\tilde{q}} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow y + (-y) = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} + \frac{-\tilde{p}}{\tilde{q}} = \frac{\tilde{p} + (-\tilde{p})}{\tilde{q}} = 0$$

$$\Rightarrow x + (-y) = \frac{p}{q} + \frac{-\tilde{p}}{\tilde{q}} = \frac{p \cdot \tilde{q} + q(-\tilde{p})}{q \cdot \tilde{q}}$$

$$\Rightarrow q \cdot \tilde{q} \in \mathbb{N} \wedge p \cdot \tilde{q} + q(-\tilde{p}) \in \mathbb{Z}$$

2.2 Ringe

Man spricht bei einem Tripel $(R, +, \cdot)$ von einem Ring, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $+$ und $\cdot$ sind innere Verknüpfungen
2. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
3. $(R, \cdot)$ ist assoziativ
4. Es gelten die Distributivgesetze $((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c)$

Ist $(R, \cdot)$ zusätzlich kommutativ, spricht man auch von einem kommutativen Ring.

Im Kontext eines Ringes nennt man außerdem das neutrale Element von $\cdot$ **Einselement** (in diesem Fall die 1) und das neutrale Element von $+$ **Nullelement** (in diesem Fall die 0).

Ein Beispiel für einen kommutativen Ring ist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit dem Einselement 1 und dem Nullelement 0.

Wenn es ein Element b in dem Ring gibt, sodass $a \cdot b = 0$ ist, spricht man dabei von einem Nullteiler. $(R, +, \cdot)$ ist nullteilerfrei.

2.3 Körper

Wenn man einen kommutativen Ring $(K, +, \cdot)$ hat, dann nennt man diesen Körper, falls $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Körper sind immer nullteilerfrei, d.h. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Beispiele für Körper sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ oder $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Unterkörper

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann heißt G Unterkörper von K, falls $G \subseteq K$ und folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $a, b \in G : a + b \in G$
2. $a, b \in G : a \cdot b \in G$
3. $0 \in G \wedge 1 \in G$
4. $\forall a \in G : -a \in G$
5. $\forall a \in G : a^{-1} \in G$

Das heißt übersetzt, dass G bzgl. Addition und Multiplikation abgeschlossen ist, das Einselement und das Nullelement von K enthält und die inversen Elemente bzgl. Addition und Multiplikation enthält. Zum Beispiel ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Unterkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

2.4 Vektorräume

Haben wir eine nichtleere Menge V und einen Körper $(K, +_K, \cdot_K)$, sowie eine innere Verknüpfung $+_V : V \times V \to V$ auf V und eine äußere Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V$, dann nennen wir $(V, +_V, \cdot)$ einen linearen Raum bzw. Vektorraum über K oder auch K-Vektorraum, wenn folgende Eigenschaften gegeben sind:

1. $V, +_V$ ist eine abelsche Gruppe
2. $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$
3. $\forall \alpha, \beta \in K \; \forall v \in V : (\alpha +_K \beta) \cdot v = \alpha \cdot v +_V \beta \cdot v$
4. $\forall \alpha \in K \; \forall v, w \in V : \alpha \cdot (v +_V w) = \alpha \cdot v +_V \alpha \cdot w$
5. $\forall \alpha, \beta \in K \; \forall v \in V : (\alpha \cdot_K \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

Das heißt also, wir brauchen das Einselement von K, außerdem müssen die Distributiv- und Assoziativgesetze gelten.

Unterraum

Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ mit $W \neq \emptyset$. Dann heißt $(W, +, \cdot)$ K-Untervektorraum oder (linearer) Unterraum von $(V, +, \cdot)$, wenn folgende Eigenschaften vorliegen:

1. $\forall v, w \in W : v + w \in W$
2. $\forall \alpha \in K \; \forall v \in W : \alpha v \in W$

Man muss also nur auf Abgeschlossenheit prüfen. Wenn man mehrere Vektorräume schneidet, dann ist das Ergebnis auch wieder ein Vektorraum und es gilt: Sei F ein System von Unterräumen, dann ist

$$U := \bigcap_{W \in F} W$$

ebenfalls ein Unterraum. Man kann übrigens auch die Summe aus zwei Unterräumen W_1 und W_2 eines gemeinsamen Vektorraums bilden:

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \land w_2 \in W_2\}$$

Diese Summe ist auch wieder ein Unterraum von V Wenn der Schnitt aus W_1 und W_2 nur den Nullvektor enthält, dann spricht man von der direkten Summe $W_1 \oplus W_2$. Dann bezeichnet man W_2 auch als Komplement zu W_1. Hat man beispielsweise die horizontale und die vertikale Gerade aus $\mathbb{R}^2$, dann sind das die Unterräume $\{(x, 0) \mid \in \mathbb{R}\}$ und $\{(0, x) \mid \in \mathbb{R}\}$, deren direkt Summe zusammen wieder $\mathbb{R}^2$ ergibt.

2.4.1 Linearkombination

Betrachtet man einen Vektorraum, dann kann man Vektoren aus der Summe mehrere anderer Vektoren darstellen. Möchte man beispielsweise von A nach C kann man anstatt $\overrightarrow{AC}$ abzugehen auch erst den Punkt B besuchen. In diesem Fall wäre es sehr einfach zu sehen, dass $1 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Es kann aber auch sein, dass man noch mehr als zwei Vektoren hat oder andere Skalare als 1 benutzen muss.

Linearkombination

$$v := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Die Menge aller Linearkombinationen wird lineare Hülle oder auch Spann oder Erzeugnis genannt. Das nennt man so, da z.B. die lineare Hülle einer Menge mit zwei Vektoren eine Ebene aufspannt bzw. erzeugt.

Lineare Hülle

$$\operatorname{span}(W) = L(W) = \langle W \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \middle| \lambda_i \in K, v_i \in W \right\}$$

$$\operatorname{span}(\{\emptyset\}) := \{0\} \text{ (Nullvektor)}$$

Um herauszufinden, ob ein Vektor eine Linearkombination von mehreren Vektoren ist, kann man einfach ein Gleichungssystem aufstellen.

Erzeugendensystem und Basis

Ist W aus $\operatorname{span}(W)$ eine Untermenge von V, dann heißt W Erzeugendensystem von V. Ist das Erzeugendensystem linear unabhängig, spricht man auch von einer Basis.

Die leere Menge ist beispielsweise Erzeugendensystem und die Basis des Nullraumes $\{0\}$. Ein Erzeugendensystem und Basis für $\mathbb{R}^3$ wäre zum Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}\right)$$

Sind in einer Basis nur die Einheitsvektoren, nennt man das auch Standardbasis oder kanonische Basis. Die Anzahl der Elemente in der Basis wird auch Dimension ($\dim_K V = n$) genannt, wobei V ein K-Vektorraum ist. Ein Vektorraum V heißt (un)endlich erzeugt, falls er (un)endliches Erzeugendensystem besitzt. Damit man ein sinnvolles Erzeugendensystem kriegt, sollten die Vektoren linear unabhängig sein.

Lineare Abhängigkeit

Lässt sich der Nullvektor als Linearkombination der Vektoren aus einer Menge nur erzeugen, indem man alle Skalare als 0 wählt, sagt man die Menge ist linear unabhängig. Es würde in diesem Fall Folgendes gelten:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n\} : \alpha_i = 0$$

Hinweis: Um herauszufinden, ob eine unendliche Menge linear abhängig ist, muss man betrachten, ob jede Teilmenge linear unabhängig ist.

2.4.2 Euklidische Vektorräume

Reele Vektorräume mit einem Skalarprodukt heißen euklidische Vektorräume. Komplexe Vektorräume mit Skalarprodukt hingegen nennt man unitär. Für diese Räume definieren wir den Begriff des Skalarproduktes.

Skalarprodukt reeller Vektorräume

Das Skalarprodukt ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

wenn die folgenden Eigenschaften gegeben sind:

Linearität

- $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Symmetrie

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Positive Definitheit

- $\forall x \in V \langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

Kanonisches Skalarprodukt

Das kanonische Skalarprodukt in $V = \mathbb{R}^n$ ist:

$$\langle x, y \rangle := x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Das Skalarprodukt gibt uns Information über den Winkel zwischen zwei Vektoren. Wenn es 0 ist, wissen wir, dass die Vektoren orthogonal sind, also im rechten Winkel zueinander stehen. Dafür schreiben wir kurz $x \perp y$ genau dann, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ gilt.

Ein weiterer wichtiger Begriff, den man kennen sollte, ist der Begriff der Norm, der uns Aussage über die Länge eines Vektors gibt. Dieser ist für reelle und komplexe Räume gleich definiert.

Norm

Für ein K-Vektorraum mit $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathbb{R}$ wird eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to K$ Norm genannt, wenn für $x, y \in V$ und $\alpha \in K$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Definitheit

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Absolute Homogenität

- $\|\alpha x\| = |a|\|x\|$

Subadditivität

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Interessanterweise, können wir, wenn wir ein Skalarprodukt gegeben haben, daraus immer eine Norm ableiten:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Dazu sagen wir, dass diese Norm durch das Skalarprodukt eingeführt wurde.

Eine besondere Norm ist die sogenannte euklidische Norm $\|x\|_2$, die durch das kanonische Skalarprodukt eingeführt wird. Die Definition dafür sollte man mit dem bereits Bekannten im Falle $V = \mathbb{R}^n$ nachvollziehen können. Außerdem gibt es noch ein Hand voll anderer häufig benutzter Normen.

Euklidische Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Vorsicht: Der Index 2 wird manchmal auch weggelassen, wenn klar ist, worum es geht.

Allgemein gilt für Normen:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Für die ∞-Norm gilt:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Wir können uns die Norm als den Abstand zwischen zwei Vektoren vorstellen. Dafür müssen wir die Differenz bilden:

Abstand von Vektoren

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Etwas abstrakter können wir damit auch den Unterschied zwischen der echten Lösung und der geschätzten Lösung von LGSen bestimmen, da die Lösung x von $Ax = b$ immer ein Vektor ist.

Wir können einen Vektor normieren, d.h. ihn so skalieren, dass seine Norm 1 ist, indem wir ihn durch seine Norm teilen:

$$x' := \frac{x}{\|x\|}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Bzgl. dem kanonischen Skalarprodukt und der euklidischen Norm gilt:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Immer dann, wenn x und y linear abhängig sind, gilt die Gleichheit.

Aus dieser Ungleichung lässt sich eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren ableiten:

Winkel zwischen Vektoren

$$\phi = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

Beispiel:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \arccos \frac{-13}{\sqrt{14}\sqrt{41}} \approx \underline{\underline{122,86^\circ}}$$

2.4.3 Orthogonalität

Stehen zwei Vektoren im rechten Winkel zueinander, sind sie orthogonal. Das ist für Vektorräume mit mehr als 3 Dimensionen etwas abstrakt, deswegen hier die richtige Definition:

Orthogonalität von Vektoren

Seien $u, v \in V$ Vektoren eines gemeinsamen Vektorraumes. Dann sind sie orthogonal ($u \perp v$) gdw. ihr Skalarprodukt gleich Null ist.

$\langle u, v \rangle \Leftrightarrow u \perp v$

Orthogonalität von Unterräumen

Seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume eines gemeinsamen Vektorraumes. Dann sind sie orthogonal, wenn $\forall u \in U, w \in W : \langle u, w \rangle = 0$ gilt.

Für eine Teilmenge $U \subseteq V$, bezeichnen wir $U^\perp$ als das orthogonale Komplement von U:

$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : \langle u, v \rangle = 0\}$

Für das orthogonale Komplement können wir uns merken, dass dieses auch wieder ein Unterraum von V ist.

U und $U^\perp$ ergeben zusammen wieder V ($V = U \oplus U^\perp$).

Haben wir eine kanonische Basis, deren Vektoren paarweise orthogonal sind, sprechen wir von einer sogenannten Orthonormalbasis.

Orthonormalbasis

Sei B Basis eines euklidischen oder unitären Vektorraums. Dann bezeichnen wir diese also Orthonormalbasis, wenn:

$\forall u, v \in B : u \neq v \Rightarrow u \perp v \wedge u = v \Rightarrow \|u\| = 1$

Erfüllt eine Teilmenge B eines euklidischen oder unitären Vektorraums V die Anforderungen an eine Orthonormalbasis, aber nicht die an eine Basis ($\text{span}(B) = V$), dann ist sie natürlich keine Orthonormalbasis. Wir nennen sie dann aber trotzdem immer noch ein Orthonormalsystem.

Daraus können wir auch folgern, dass jedem Menge deren Elemente paarweise orthogonal sind, linear unabhängig sind. Ansonsten wäre die Orthonormalbasis gar keine Basis.

Haben wir eine Orthonormalbasis $B = \{u_1, ..., u_n\}$ eines endlich dimensionalen Raumes gegeben und wollen für einen Vektor v den Koordinatenvektor (S. 18) $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ finden, können wir jede Komponente wie folgt ausrechnen:

$$\gamma_i = \langle u_i, v \rangle \qquad \text{für } v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i$$

Haben wir beispielsweise die Basis $B = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ und betrachten den Vektor $(1, 3)^T$, rechnen wir:

$$\gamma_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$
$$\gamma_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 3$$
$$\Rightarrow \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man kann mithilfe eines Algorithmus nach Gram-Schmidt aus jedem linear unabhängigen System eines euklidischen oder unitären Vektorraums ein Orthogonalsystem erzeugen, dessen linearer Hülle gleich der des ursprünglichen Systems ist.

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Gegeben sei eine linear unabhängige Menge an Vektoren $\{u_1, ..., u_n\}$. Dann bilden die Vektoren $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Orthonormalbasis für $\operatorname{span}(\{u_1, ..., u_n\})$. Für die Berechnung gilt:

$$v_i := \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

Dabei gilt:

$$w_1 := u_1, \qquad w_i := u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_j, u_i \rangle v_j$$

Nehmen wir als einfaches Beispiel:

Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow\ w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\ w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{2-1} \langle v_j, u_i \rangle v_j = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle v_1, u_2 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 3,328201177 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,23 \\ -1,85 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\ v_2 \approx \frac{1}{2,22} \begin{pmatrix} 1,23 \\ -1,85 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{41}{74} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\ \text{Orthonormalbasis: } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{41}{74} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \right\}$$

Hinweis: Die Norm von v_2 ist nicht ganz 1 aufgrund des Rundens.

Orthogonalprojektion

Sei $B = \{u_1, ..., u_n\}$ ein ONS in einem endlich dimensionalen Vektorraum V, der euklidisch oder unitär ist. Außerdem spannt B eine Teilmenge von V auf. Es gilt:

$$\forall v \in V \exists! u \in U, w \in U^\perp : v = u + w$$

Diese Elemente sind eindeutig bestimmt und benannt:

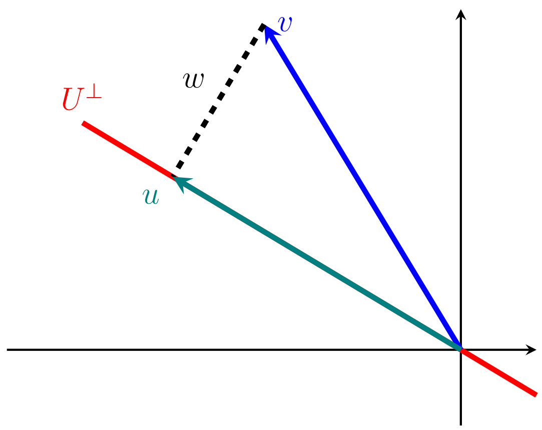
Orthogonale Projektion

$$P_U(v) := u = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v \rangle u_i \in U$$

Lot

$$w = v - \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v \rangle u_i \in U^\perp$$

Grundlegend ist die orthogonale Projektion eine Abbildung, die das Ergebnis ist, wenn man einen Vektor orthogonal auf einen Unterraum projiziert.



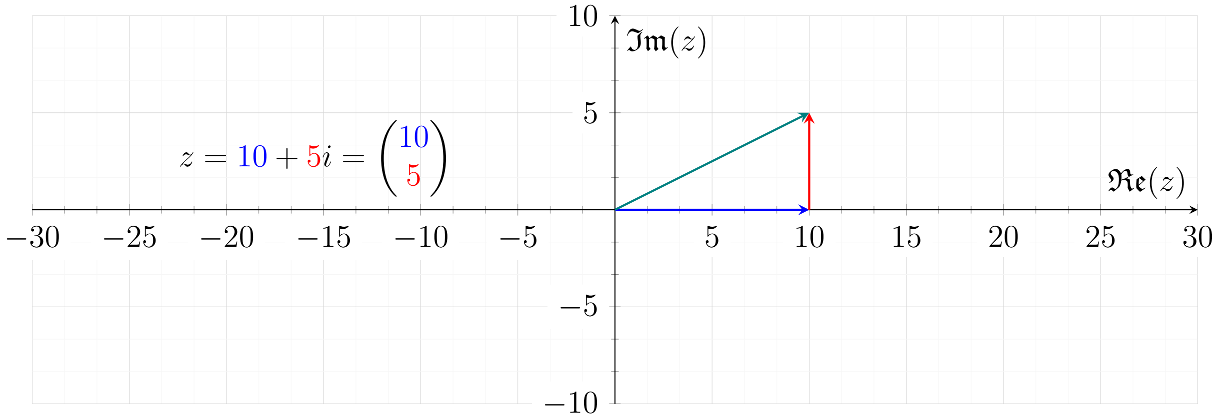
Für die Norm vom Lot gilt interessanterweise folgendes:

$$\|w\| = \|v - u\| = \min\{\|v - x\| \mid x \in U\}$$

3 Komplexe Zahlen

Mit den reellen Zahlen war es uns bisher nicht möglich die Gleichung $x^2 = -1$ zu lösen. Deshalb gibt es den Zahlenbereich $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Darin wird $i := \sqrt{-1}$ definiert. i alleine ist aber noch nicht unbedingt eine komplexe Zahl, denn $i := \sqrt{-1}$ alleine hilft uns immer noch nicht z.B. $x^2 = -9$ zu lösen. Um also verschiedene Gleichungen zu lösen, gibt es eine andere Notationsform: Eine komplexe Zahl hat die Form $z = a + b \cdot i$, wobei a und b reelle Zahlen sind. Dabei wird a als *Realteil*, b als *Imaginärteil*, i als *imaginäre Einheit* und $b \cdot i$ als *imaginäre Zahl* bezeichnet. Anders als die reellen Zahl werden die komplexen Zahlen nicht auf einem Zahlenstrahl dargestellt, sondern der Zahlenstrahl der reellen Zahlen wird noch um die Achse des Imaginärteils erweitert. Dieses System nennt man auch *gaußsche Zahlenebene*. Da i eine definierte Einheit (also immer gleich) ist, können wir mit den reellen Zahlen a und b

die komplexen Zahlen als Vektoren (S. 70) darstellen. Das Praktische daran ist, dass wir die komplexen Zahl aus dieser Ebene ganz einfach ablesen können.



Für die kartesische Form ($z = a + b \cdot i$) gelten alle gängigen Rechengesetze. Es gibt jedoch auch etwas neues, das sich *komplexe Konjugation* nennt. Das klingt komplizierter als es ist, denn man dreht nur das Vorzeichen der imaginären Zahl um schreibt zur Markierung einen Strich über die Zahl: $z = a + b \cdot i \Rightarrow \bar{z} = a - b \cdot i$. Was beim Rechen mit komplexen Zahl besonders interessant ist, ist wie wir damit wieder auf reelle Zahlen kommen. Da $i = \sqrt{-1}$ festgelegt ist, gilt somit auch $i^2 = -1$. Das heißt z.B., das Produkt aus $1+i$ und $-1-i$ ist $-1-i-i-i^2 = -2i$. Etwas schwieriger wird es bei der Division, da es durch das i schwer werden kann zurück auf die kartesische Form zu kommen. Dafür gibt es einen kleinen Trick, denn es gilt $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. Das kann man ganz einfach durch Nachrechnen allgemein prüfen:

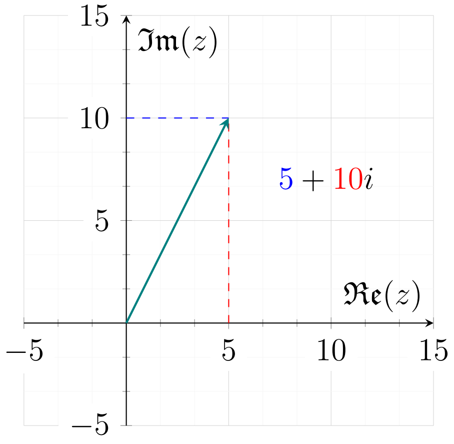
$$
\begin{aligned}
& z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) \\
\Leftrightarrow \quad & = a^2 - abi + abi - (bi)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 \qquad | \text{ denk daran, dass } i^2 = -1 \text{ gilt} \\
\Leftrightarrow \quad & = a^2 - abi + abi + b^2 \\
\Leftrightarrow \quad & = a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

Das ist übrigens auch der Betrag der Zahl bzw. die Länge des Vektors ins Quadrat, denn wir erinnern uns, die Länge eines Vektors beträgt $\sqrt{a^2 + b^2}$. Gut, aber wie hilft uns das jetzt zwei komplexe Zahlen zu dividieren? Nun, wenn wir in einer Gleichung mal Eins rechnen ist das ja eine Äquivalenzumformung, bzw. eigentlich verändern wir ja gar nichts wirklich, denn $1 \cdot x$ ist x. Und was wollen erreichen? Dass im Nenner des Bruches kein i mehr steht. Das bedeutet für die Rechnung $\frac{z_1}{z_2}$, wir multiplizieren mit $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$. Dazu ein praktisches Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& \frac{2+9i}{3-6i} = \frac{2+9i}{3-6i} \cdot \frac{3+6i}{3+6i} \\
\Leftrightarrow \quad & = \frac{(2+9i) \cdot (3+6i)}{(3-6i) \cdot (3+6i)} \\
\Leftrightarrow \quad & = \frac{6 + 12i + 27i + 54i^2}{3^2 + 6^2} \\
\Leftrightarrow \quad & = \frac{-48 + 39i}{45} \\
\Leftrightarrow \quad & = \underline{\underline{-\frac{16}{15} + \frac{13}{15} i}}
\end{aligned}
$$

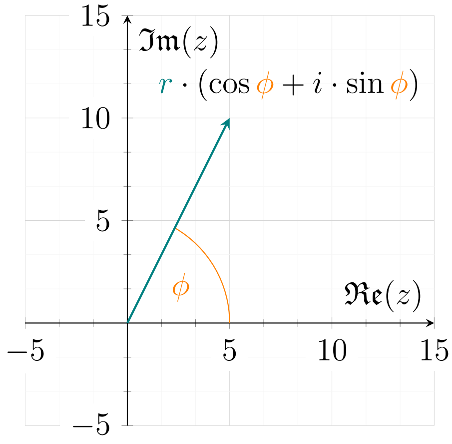
3.1 Darstellungsformen

Kartesische Form



$$z = a + b \cdot i$$

Polarform



$$z = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi) = r \cdot e^{i\phi}$$

Bis hierhin haben wir die kartesische Form benutzt, die uns ganz einfach die Koordinaten in der gaußschen Zahlenebene ablesen lässt. Eine komplexe Zahl lässt sich jedoch auch auf andere Weise genau festlegen, nämlich mit der *Polarform*. Dabei wird die Zahl durch die Länge des Vektors und dem Winkel zwischen Abszisse und Vektor festgelegt.

Hinweis: $r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$ wird auch trigonometrische Darstellung und $r \cdot e^{i\phi}$ auch als Exponentialdarstellung der Polarform bezeichnet. ϕ wird auch als Argument der Zahl z bezeichnet.

Natürlich gibt es auch Regeln, wie man zwischen kartesischer und Polarform umwandeln kann. Größtenteils sind diese sehr einfach, da sie sich aus dem Rechnen mit dem rechtwinkligen Dreieck (S. 66) herleiten, jedoch ein kleiner Hinweis: $\operatorname{sgn}(b)$ (Signum) meint das Vorzeichen von b und arccos ist dasselbe wie $\cos^{-1}$ auf dem Taschenrechner.

Für die Umrechnung zwischen kartesischer Form und Polarform gelten folgende Gleichungen:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\phi = \operatorname{sgn}(b) \cdot \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$a = r \cdot \cos(\phi)$

$b = r \cdot \sin(\phi)$

Noch mal der Hinweis, wie sgn definiert ist:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

Der Grund dafür, dass wir hier das Vorzeichen benötigen, ist dass für den Kosinus in einem Intervall zwei Lösungen existieren. Die Kosinusfunktion hat z.B. bei $\frac{\pi}{2}$ und bei $\frac{3\pi}{2}$ eine Nullstelle. Das Vorzeichen hilft uns die richtige Lösung zu finden. Wenn wir nämlich $-\frac{\pi}{2}$ rauskriegen, rechnen wir 2π (eine Periode) drauf und erhalten $\frac{3\pi}{2}$.

Mithilfe der Exponentialdarstellung, können wir einige einfache Rechenregeln aufstellen, mit denen wir komplexe Zahlen sehr viel schneller berechnen können:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$
$$\sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$$
$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$$
$$\overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}$$

3.2 Komplexe Zahlen potenzieren

Möchte man eine komplexe Zahl mit einer sehr hohen Zahl potenzieren, ist es ratsam, sie zunächst in die Polarform zu bringen. Das hat den Hintergrund, dass wir dann die Potenzgesetze (S. 48) anwenden können, allerdings nur, wenn die Potenz eine ganze Zahl ist. Dieser Zusammenhang wurde erstmals von Abraham de Moivre entdeckt und entsprechend benannt.

$$r^n \cdot e^{in\phi} = r^n \cdot (\cos(n\phi) + i \cdot \sin(n\phi))$$

Satz von de Moivre

$(\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi))^n = \cos(n \cdot \phi) + i \cdot \sin(n \cdot \phi) = e^{in\phi}$ wenn $n \in \mathbb{Z}$

Zur Anwendung dieser Formel, hier ein Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{20} \\
& r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & = 1 \\
& \phi = \operatorname{sgn}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) && \mid \text{Achtung: Bogenmaß verwenden!} \\
\Leftrightarrow \quad & = -\frac{1}{4}\pi \\
& z = (1 \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i})^{20} \\
\Leftrightarrow \quad & = e^{-5\pi i} = e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = \underline{\underline{-1}}
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis einer solchen Rechnung wird i.d.R. so gekürzt, dass der Winkel zwischen 0 und 2π bzw. $0°$ und $360°$ liegt, indem man jeweils eine Umdrehung dazu rechnet oder abzieht ($\pm 2\pi$ oder $\pm 360°$). Das hat den Hintergrund, dass eine Drehung des Vektors um mehr als $360°$ nur unnötig kompliziert wäre, denn man braucht in der Ebene nur maximal $360°$ und kann seinen Vektor in jede Richtung zeigen lassen.

3.3 Komplexe Zahlen radizieren

Wie wir wurzeln aus einer komplexen Zahl ziehen, können wir uns mit den Potenzgesetzen (S. 48) herleiten. Der große Unterschied zum Potenzieren mit einer ganzen Zahl ist, dass wir mehrere Ergebnisse erhalten. Beim Rechnen der n-ten Wurzel, gibt es n Ergebnisse um genau zu sein. Welchen Hintergrund das hat, schauen wir uns hier an. Anschließend folgt ein Beispiel. Hinweis: für dieses Kapitel solltest du das Kapitel zum Potenzieren (S. 43) von komplexen Zahlen gelesen haben.

Zunächst ist es wieder sehr hilfreich, die komplexe Zahl in der Polarform vorliegen zu haben. Außerdem wissen wir, dass wir beliebig oft um 2π drehen können, weshalb wir zum Winkel ϕ Umdrehungen der Anzahl k hinzufügen: $2\pi k$.

$r \cdot e^{i\phi} = r \cdot e^{i(\phi + 2\pi k)}$

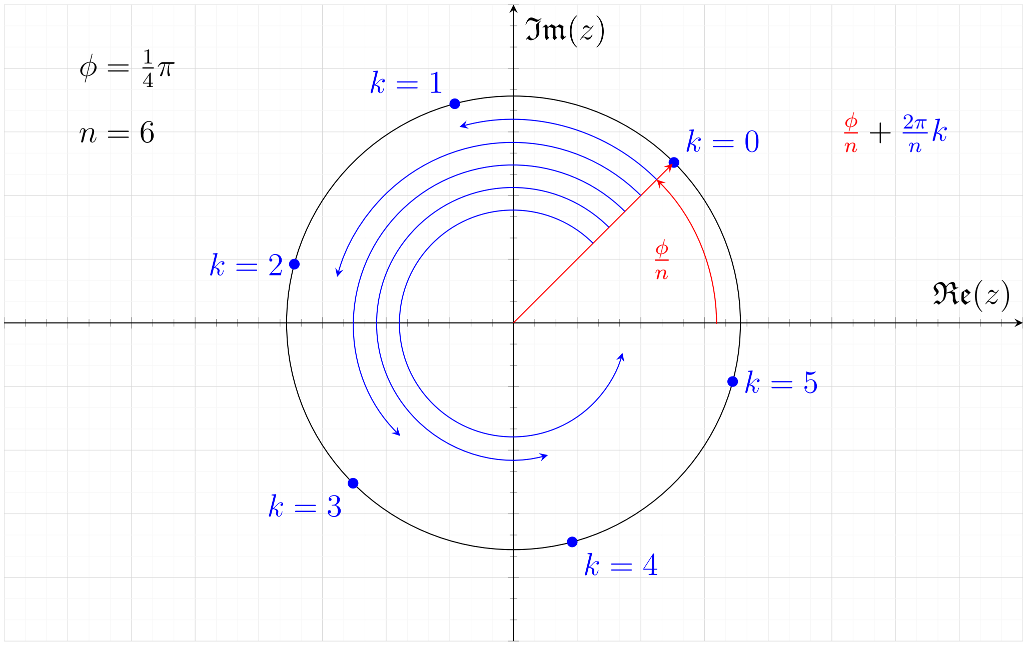
Wenn wir jetzt die n-te Wurzel ziehen sollen, erhalten wir:

$\sqrt[n]{r \cdot e^{i(\phi+2\pi k)}}$

Laut Potenzgesetze können wir das auch schreiben als:

$$
\begin{aligned}
& (r \cdot e^{i(\phi+2\pi k)})^{\frac{1}{n}} \\
= & r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{1}{n}(\phi + 2\pi k)} \\
= & r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)}
\end{aligned}
$$

Von Interesse ist die letzte Zeile. Das r lassen wir mal außen vor, da es für alle Ergebnisse gleich ist und die folgende Erklärung nur dem Winkel gelten soll. Wir haben ja in der Polarform in der Exponentialschreibweise normalerweise zu stehen $i\phi$. Jetzt wo wir unseren Term so umgeformt haben, ist unser Winkel ϕ gleich $\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n} k$.



Was die obige Abbildung bedeutet ist folgendes: Der Term $\frac{\phi}{n}$ bleibt konstant; er ist unser Startwinkel. In diesem Fall sind das 45 Grad. Jetzt addieren wir noch $\frac{2\pi}{n}k$ dazu und das für jedes k zwischen 0 und $n-1$. In diesem Fall addieren wir jedes Mal 60 Grad drauf. Für $k = 1$ hätten wir z.B. einen Winkel von 105 Grad. So kriegen wir am Ende 6 verschiedene Lösungen, deren Beträge zwar alle gleich sind, aber deren Argumente (Winkel) sich unterscheiden.

Wie versprochen dazu noch ein Beispiel:

$$
\begin{aligned}
z^3 &= 2 + 2i \\
r &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\
\phi &= \operatorname{sgn}(2) \cdot \arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}\pi \\
&\Downarrow \\
z^3 &= 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i} \\
\Rightarrow \quad z &= \sqrt[3]{2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}} = \left(2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{1}{4}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} \\
\Rightarrow \quad z_k &= e^{i\left(\frac{\frac{1}{4}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right)} \\
&\Downarrow \\
z_0 &= \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{12}\pi i}}} \\
z_1 &= \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}}} \\
z_2 &= \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{17}{12}\pi i}}}
\end{aligned}
$$

4 Elementarmathematik

4.1 Brüche dividieren

Um zwei Brüche zu dividieren bildet man den Kehrwert vom Divisor und multipliziert diesen mit dem Dividenden.

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2}$$

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2}$$

4.2 Lösungsmenge

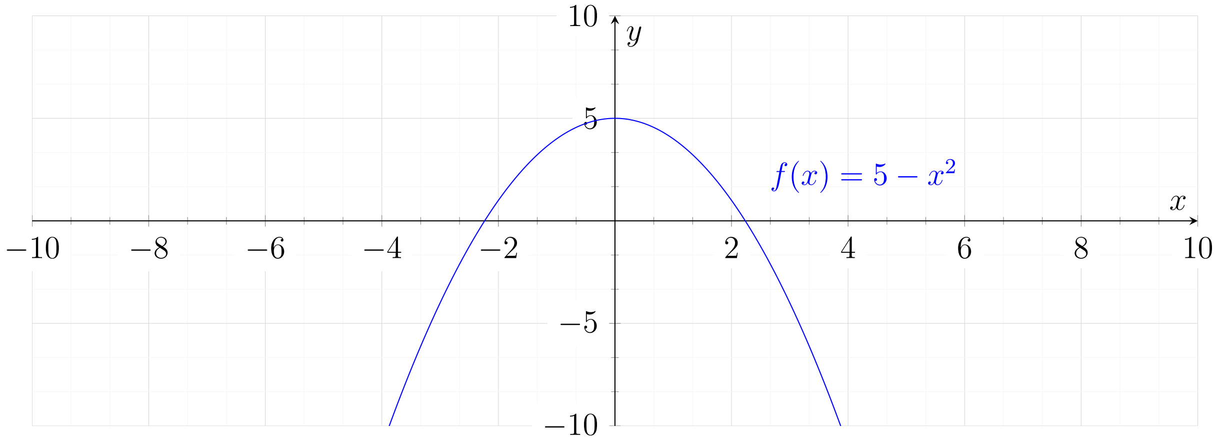
Beispiel 1 ($x^2 = -1$):
$\mathbb{L} = \emptyset$

Beispiel 2 ($x^2 = 4$):
$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$

Beispiel 3 ($sin(x) = 0$):
$\mathbb{L} = \{...; -2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; ...\}$

Beispiel 4 ($x^2 + y = 5$):
$\mathbb{L} = \{(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0^2 + y_0 = 5\} = \{(x_0; 5 - x_0^2) \mid x_0 \in \mathbb{R}^2\}$

In diesem Fall ist die Lösungsmenge die Funktion $y = 5 - x^2$.



4.3 Normalform

Eine Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$, heißt quadratisch. Speziell bezeichnet man $x^2 + px + q = 0$ mir $p, q \in \mathbb{R}$ als quadratische Gleichung in Normalform.

Man kann eine quadratische Gleichung in die Normalform überführen, indem man durch a teilt: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

4.3.1 p-q-Formel

Um die Nullstellen einer quadratischen Gleichung in der Normalform zu finden, kann man die p-q-Formel benutzen: $x_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist die Diskriminante. Sie gibt Aufschluss über die Lösungsmenge.

$D > 0 \Rightarrow$ Es gibt zwei Lösungen
$D = 0 \Rightarrow$ Es gibt eine Lösung
$D < 0 \Rightarrow$ Es gibt keine Lösungen

4.4 Intervalle

Abgeschlossene Intervalle
$[a; b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Offene Intervalle
$(a; b) =]a; b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Halboffene Intervalle
Rechtsoffen
$[a; b) = \ [a; b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Linksoffen
$(a; b] =]a; b] \ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

4.5 Beträge

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$|-a| = |a|$

4.6 Binomischer Lehrsatz

In der einfachsten Anwendung gibt uns der binomische Lehrsatz die allgemein bekannten binomischen Formeln.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Es ist allerdings auch möglich solche Binome mit höheren Potenzen einfach auszumultiplizieren.

Dafür nutzen wir folgende Formel:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

4.7 Euklidischer Algorithmus

Der euklidische Algorithmus findet den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen. Das eignet sich ausgezeichnet dazu, Brüche zu kürzen. Der vorletzte Rest, also bevor $R = 0$ eintritt, ist das Ergebnis.

$$2160 : 2592 = 0 \quad R = 2160$$
$$2592 : 2160 = 1 \quad R = 432$$
$$2160 : 432 = 5 \quad R = 0$$

$$\frac{2592}{2160} = \frac{6 \cdot 432}{5 \cdot 432} = \frac{6}{5}$$

4.8 Potenzgesetze

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

$$\frac{b^k}{b^m} = b^{k-m}$$

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$(a^k)^m = a^{k \cdot m}$$

Für $a > 0$ und jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q > 0$) ist

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Beispiel: Bestimme m und n, sodass gilt: $(9x^7)^2 = mx^n$

$$(9x^7)^2 = mx^n$$
$$81x^{14} = mx^n$$

$m = 81$ und $n = 14$

4.9 Wurzelgesetze

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0, c > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Beispiel 1: Nach der dritten Binomischen Formel gilt für $a, b > 0, a \neq b$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} && \mid \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \\
=&\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\
=&\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2} \\
=&\underline{\underline{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}}}
\end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{(1 + a^2) \cdot (a - b)^2}}{\sqrt[4]{16(1 + a^2)^2}} \\
=&\sqrt{\frac{(1 + a)^2 \cdot (a - b)^2}{\sqrt{16(1 + a^2)^2}}} \\
=&\sqrt{\frac{(1 + a)^2 \cdot (a - b)^2}{4(1 + a)^2}} \\
=&\frac{1}{2}\sqrt{(a - b)^2} \\
=&\underline{\underline{\frac{\mid a - b \mid}{2}}}
\end{aligned}$$

4.9.1 Wurzeltherme vereinfachen (Beispiele)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}+3} &= \sqrt{2}+\frac{2\cdot(2\sqrt{2}-])}{\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)} \\
&= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}-6}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-3^2} \\
&= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}-6}{-1} \\
&= \sqrt{2}-4\sqrt{2}+6 \\
&= \underline{\underline{6-3\sqrt{2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} &= \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}-\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{1+x^2-1} \\
&= \underline{\underline{\frac{2}{x^2}}}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3: Bestimme x und y, sodass $\frac{x}{y}$ vollständig gekürzt ist.

$$
\begin{aligned}
\frac{2\cdot 2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2\cdot\frac{2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2\cdot 2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
2\cdot 2^{\frac{9}{4}} &= 2^{\frac{x}{y}} \\
\underline{\underline{2^{\frac{13}{4}} = 2^{\frac{x}{y}}}}
\end{aligned}
$$

Damit gilt $x = 13$ und $y = 4$.

4.10 Logarithmusgesetze

Die Logarithmusrechnung dient dazu, das x im Term $b^x = a$ zu bestimmen. Es ist damit quasi das Gegenstück zur Potenzrechnung. Rechnen wir z.B. 9^3, kommen wir auf 729. Umgekehrt können wir jetzt aber auch $log_9 729$ rechnen und kommen auf 3. Es gibt außerdem die speziellen Notationen ln und lg, die jeweils *natürlicher Logarithmus* und *dekadischer Logarithmus* genannt werden.

$ln(b) := log_e(b)$	$lg(b) := log_{10}(b)$	$log_b(b) = 1$
$log_b(1) = 0$	$log_b(u\cdot v) = log_b(u)+log_b(v)$	$log_b\left(\frac{u}{v}\right) = log_b(u) - log_b(v)$
$log_b(u^v) = v\cdot log_b(u)$	$log_b(\sqrt[u]{v}) = \frac{log_b(v)}{u}$	$log_a(v) = \frac{log_b(v)}{log_b(a)}$

4.11 Modulo (ganzer Zahlen)

Mit dem Modulo bestimmen wir den Rest der bei der Division von ganzen Zahlen übrig bleibt. Für natürliche Zahlen ist das ganz einfach. Dazu ein paar Beispiele:

$$
\begin{aligned}
&11 \bmod 7 = 4\\
&9 \quad \bmod 5 = 4\\
&0 \quad \bmod 4 = 0\\
&4 \quad \bmod 8 = 4\\
&42 \bmod 7 = 0
\end{aligned}
$$

Man nimmt so viele Vielfache von der rechten Zahl, wie man kann ohne, dass dieses Vielfache größer wird als die linke Zahl. Die Differenz, die dann übrig bleibt ist der Rest. Etwas verrückter wir das ganze, wenn negative Zahlen involviert sind.

$$
\begin{aligned}
&-11 \bmod 7 = 3\\
&\ \ 11 \bmod -7 = -3\\
&-11 \bmod -7 = -4\\
&-9 \quad \bmod 5 = 1\\
&\ \ 9 \quad \bmod -5 = -1\\
&-9 \quad \bmod -5 = -4\\
&-4 \quad \bmod -8 = -4
\end{aligned}
$$

Wenn die linke Zahl negativ ist, rechnet man solange die rechte Zahl drauf, bis man eine nicht negative Zahl (also auch Null) hat und das ist dann das Ergebnis. Ist nur die rechte Zahl negativ, ist der Prozess genau umgekehrt, denn dort zieht man ab, bis man eine negative Zahl oder Null hat. Sind beide Zahlen negativ ist das Ergebnis das gleiche als wären beiden Zahlen positiv mal minus eins.

Anmerkung: $x \bmod 0$ ist nicht definiert und $0 \bmod x$ ist immer Null.

4.12 Kongruenz (Zahlentheorie)

Die Kongruenz der Zahlentheorie (nicht zu verwechseln mit der Kongruenz der Geometrie) sagt aus, dass zwei Zahlen a und b beim Teilen durch eine weitere Zahl m den gleichen Rest haben. Dafür gibt es mehrere Schreibweisen, die aber alle das gleiche bedeuten:

$$
\begin{aligned}
&a \equiv_m b\\
&a \equiv b(m)\\
&a \equiv b \mod m
\end{aligned}
$$

Beispielsweise wäre $4 \equiv_3 7$ eine wahre Aussagen, denn sowohl 4, wie auch 7 haben bei der Division durch 3 den Rest 1. Das wäre übrigens das Gleiche wie $4 \mod 3 = 7 \mod 3$.

Da es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation handelt, kann man diese in Äquivalenzklassen aufteilen. Für die Division modulo m, nennt man diese Äquivalenzklassen auch Restklassen. Als Repräsentanten reicht es aus die Werte zwischen 0 und m zu wählen. Die Faktormenge wäre also: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], ..., [m-1]\}$.

5 Gleichungen vereinfachen

5.1 Quadratische Ergänzung

Die äquivalente Umformung der quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$ in $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ wird als quadratische Ergänzung bezeichnet. In anderen Worten fügt man den Term $+\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ hinzu. Das darf man, da dieser Wert an sich Null ergibt und die Gleichung nicht verändert.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
x^2 + 8x + 7 &= 0 \\
x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 7 &= 0 \\
x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 + 7 &= 0 \\
(x+4)^2 - 4^2 + 7 &= 0 \\
(x+4)^2 - 9 &= 0 \qquad | +9 \\
(x+4)^2 &= 9 \qquad | \sqrt{\ } \\
x &= \pm\sqrt{9} - 4 \\
\mathbb{L} &= \{-1; -7\}
\end{aligned}$$

5.2 Faktorisieren

Um die Nullstellen eines Terms zu finden, bietet es sich an, ihn als Produkt einfacher Terme zu schreiben, denn ist ein Faktor 0, ist das Produkt ebenfalls 0. Den Term in so eine Form zu überführen, nennt sich Faktorisieren.

5.2.1 Faktorisierung durch Ausklammern

Beispiel:

$$\begin{aligned}
x^4 + 2x^3 + 3x^2 &= 0 \\
x^2(x^2 + 2x + 3) &= 0 \\
x^2 = 0 &\text{ oder } (x^2 + 2x + 3) = 0 \\
\mathbb{L} &= \{0\}
\end{aligned}$$

Für $x^2 + 2x + 3 = 0$ existiert keine reelle Lösung ⇒ p-q-Formel (S. 47).

5.2.2 Faktorisierung mit binomischen Formeln

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
9x^2 + 30x + 25 &= 0 \\
(3x+5)^2 &= 0 \\
3x + 5 &= 0 \qquad |-5 \\
3x &= -5 \qquad |:3 \\
x &= -\frac{5}{3} \\
\mathbb{L} &= \left\{-\frac{5}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

5.2.3 Faktorisierung mit dem Satz von Viëta

Der Satz von Viëta besagt, dass $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ist. p und q lassen sich auf die Nullstellen zurückführen: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Daraus lässt sich $x_2 = \frac{q}{x_1}$ ableiten. Wenn man also durch Raten eine Nullstelle findet, kann man so die andere Nullstelle auch ganz einfach finden.

Beispiel (eine Nullstelle ist 1, die andere ergibt sich als $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$):

$$
\begin{aligned}
x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} &= 0 \\
(x-1) \cdot (x + \sqrt{2}) &= 0 \\
\mathbb{L} &= \{1; -\sqrt{2}\}
\end{aligned}
$$

5.3 Substitution

Substitution erlaubt es uns manchmal Gleichungen zu vereinfachen, um leichter mit ihnen rechnen zu können.

Beispiel: $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ (Hier bietet es sich an x^4 durch u zu ersetzen.)

$$u^2 - 15u - 16 = 0$$

$$u_\pm = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15}{2}\right)^2 + 6}$$

Diesen Term wiederum können wir ganz einfach mit der p-q-Formel (S. 47) lösen. Dabei erhalten wir $u_+ = 16$ und $u_- = -1$. Um unsere endgültige Lösungsmenge zu bekommen, müssen wir noch die Resubstitution durchführen.

$$
\begin{aligned}
x^4 &= u_+ = 16 \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= -2
\end{aligned}
$$

Da es kein x gibt, das $x^4 = -1$ erfüllt, haben wir bereits unsere Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$.

6 Ungleichungen

6.1 Rechenregeln

Wenn man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch diese teilt, muss das Vergleichszeichen umgekehrt werden.

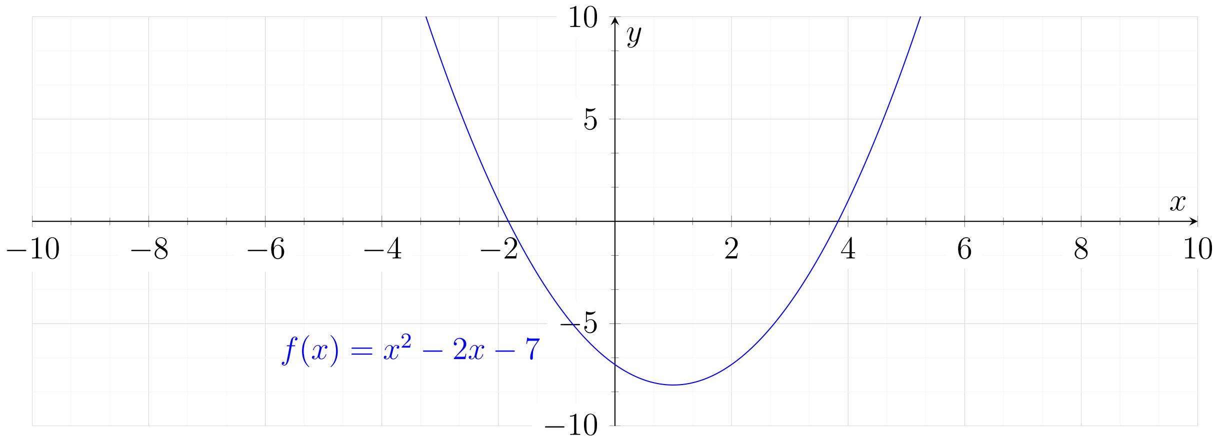
Für $c < 0$ gilt:

$$a < b \iff c \cdot a > c \cdot b$$

$$a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

6.2 Quadratische Ungleichungen

Um die Lösungsmenge einer quadratischen Ungleichung zu finden, formt man die Ungleichung zunächst so um, dass auf einer Seite 0 steht. Auf der anderen Seite hat man dann optimalerweise eine quadratische Funktion. Schauen wir uns mal das Beispiel $x^2 > 2x + 7$ an.



Wir stellen also zunächst um und erhalten $x^2 - 2x - 7 > 0$. Daraus ergibt sich auch die Funktion oben. An der Grafik erkennt man sehr gut, was wir eigentlich suchen. Denn unsere Lösungsmenge sind alle x, für die $f(x)$ größer als 0 ist. Und wie kriegen wir das raus? Indem wir die Nullstellen berechnen. Das Intervall von Unendlich bis zur linken Nullstelle ist ein Teil unserer Lösung und der andere ist das Intervall von der rechten Nullstelle bis unendlich. Dabei muss man stets verschiedene Fälle beachten. Für eine nach unten geöffnete Funktion ($-x^2$) suchen wir den Bereich zwischen den Nullstellen. Für eine Funktion oberhalb der x-Achse, die keine Nullstellen hat, sind alle reellen Zahlen unsere Lösungsmenge, wohingegen eine Funktion ohne Nullstellen unterhalb der x-Achse eine leere Lösungsmenge liefern würde. Eine quadratische Funktion mit genau einer Nullstelle liefert hingegen eine Lösungsmenge aller reellen Zahlen außer der Nullstelle. Es gibt je nach Art der Funktion und Vergleichszeichen in unserer Ungleichung viele unterschiedliche Szenarien, weshalb es immer ratsam ist eine Skizze anzufertigen. Für das Beispiel oben können wir die p-q-Formel (S. 47) verwenden, um die

Nullstellen zu berechnen.

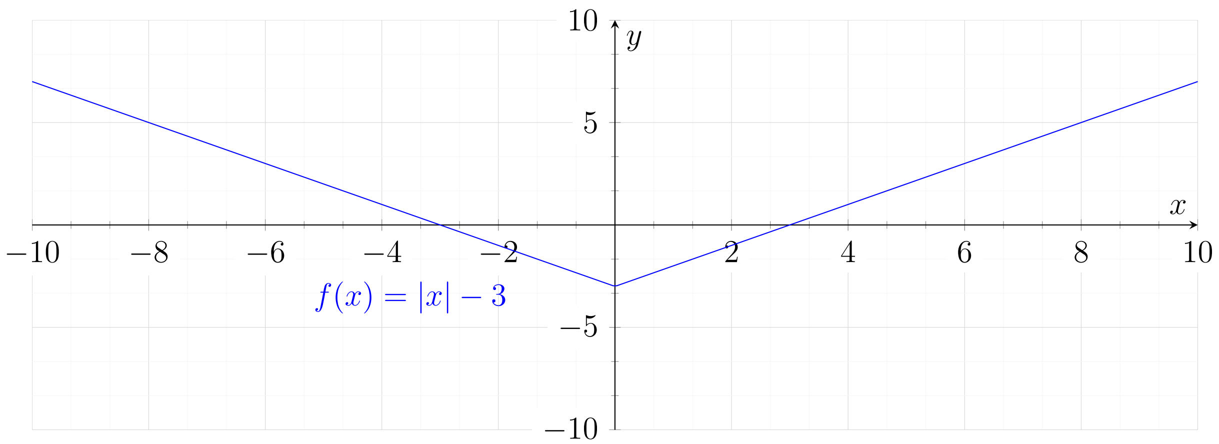
$$x_{\pm} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 7}$$
$$x_1 = \underline{\underline{1 - 2\sqrt{2}}}$$
$$x_2 = \underline{\underline{1 + 2\sqrt{2}}}$$

Jetzt, wo wir die Nullstellen haben, ist es nicht schwer die Lösungsmenge anzugeben. Dabei sollte man darauf achten, dass man abgeschlossene und offene Intervalle (S. 47) nicht verwechselt.

$$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \left[1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right] = \left(-\infty; 1 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(1 + 2\sqrt{2}; \infty\right)$$

6.3 Ungleichungen mit Beträgen

Das Vorgehen bei Betragsungleichungen ist im Grunde genommen dasselbe Prinzip, wie bei den quadratischen. Schauen wir uns das Beispiel $|x| - 3 < 0$ an.



Wir erkennen die Nullstellen in dem Fall sehr leicht. Das sind -3 und 3. Erkennt man das nicht sofort, muss man eine Fallunterscheidung (S. 88) durchführen. Jetzt können wir aber erst mal unsere Lösungsmenge definieren, denn wir wissen, dass wir alle x suchen für die $f(x) < 0$ gilt.

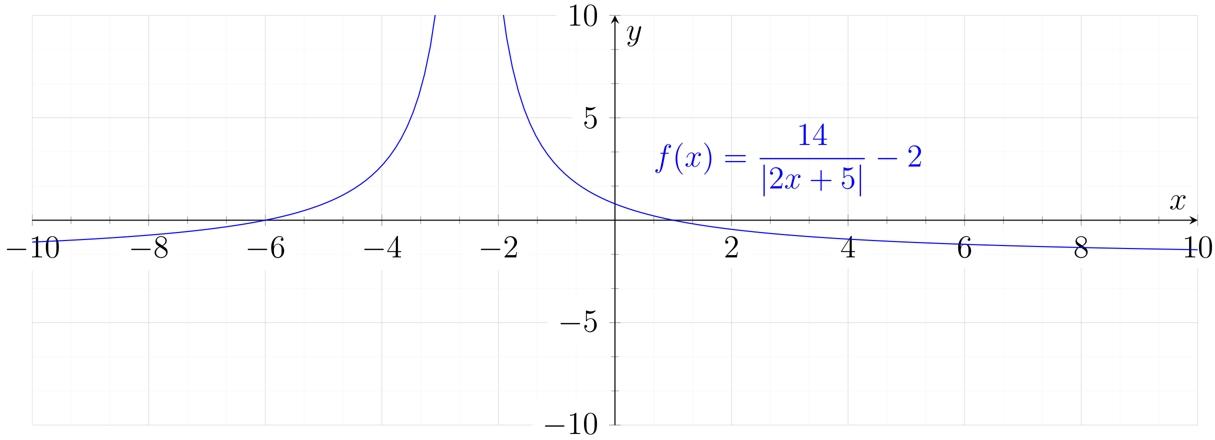
$$\mathbb{L} = (-3; 3)$$

Hinweis: Wäre unsere Ausgangsungleichung $|x| - 3 \leq 0$, sehe unsere Lösungsmenge jetzt so aus:

$$\mathbb{L} = [-3; 3]$$

6.4 Ungleichungen mit Variable im Nenner – Teil I

Aus den vorherigen Erklärungen kann man sich herleiten, wie man das macht. Deshalb ist hier nur noch mal ein erklärendes Beispiel: $2 \leq \frac{14}{|2x+5|}$.



Wichtig ist, dass wir zunächst alle x ausschließen, für die im Nenner 0 rauskommt. In diesem Fall ist dass $-\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} 2 &\leq \frac{14}{|2x+5|} \\ 2|2x+5| &\leq 14 \\ |2x+5| &\leq 7 \end{aligned}$$

Fall 1: $2x + 5 > 0$

$$\begin{aligned} 2x + 5 &\leq 7 \\ 2x &\leq 2 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

Fall 2: $2x + 5 < 0$

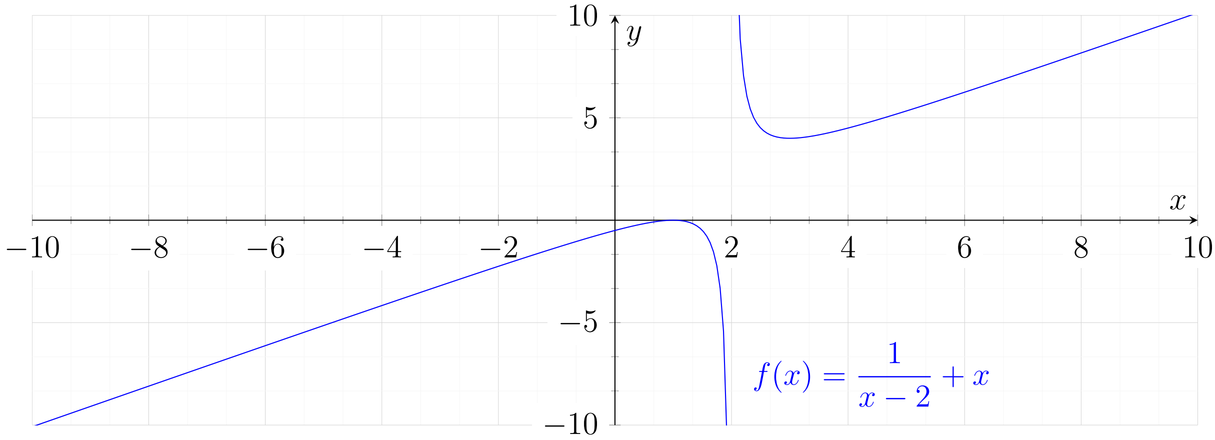
$$\begin{aligned} -2x - 5 &\leq 7 \\ -2x &\leq 12 \\ x &\geq -6 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left[-6; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; 1\right]$$

6.5 Ungleichungen mit Variable im Nenner – Teil II

Wenn wir uns an die Rechenregeln (S. 54) für Ungleichungen erinnern, könnte man sich fragen, was passiert, wenn der Nenner mit einer Variable sowohl positiv als auch negativ sein kann. Denn wenn wir mit einer negativen Zahl multiplizieren, müssten wir das Vorzeichen umkehren. Hier muss man wieder verschiedene Fälle unterscheiden.

Beispiel: $\frac{1}{x-2} \leq -x$



Der Fall $x = 2$ ist aufgrund des x im Nenner wieder auszuschließen. Fall 1: $x > 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} &\leq -x \\
1 &\leq -x(x-2) \\
1 &\leq -x^2 + 2x \\
x^2 - 2x + 1 &\leq 0 \\
(x-1)^2 &\leq 0
\end{aligned}$$

Dieser Fall gilt für $x = 1$. Das widerspricht allerdings der Bedingung $x > 2$ und das Ergebnis ist entsprechend nicht Teil unserer Lösungsmenge.

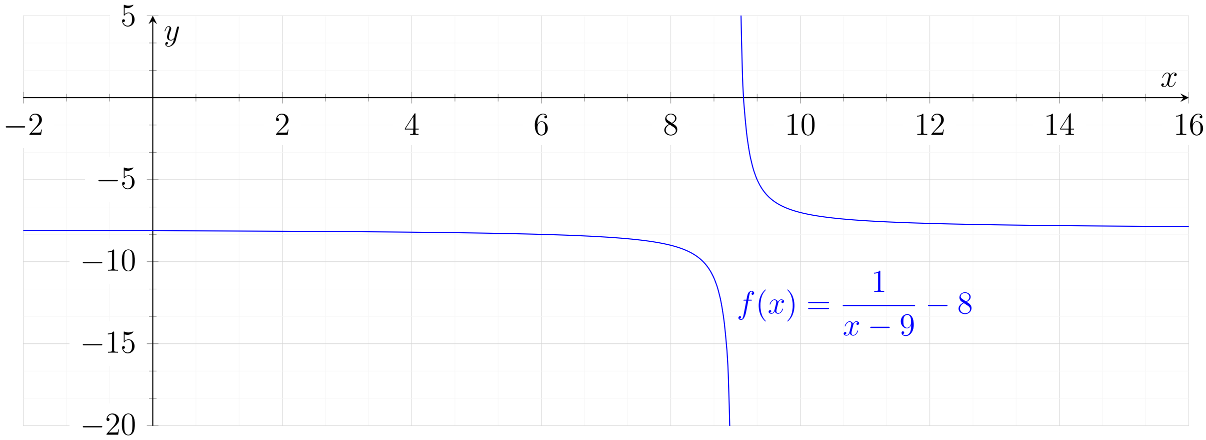
Fall 2: $x < 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} &\leq -x \\
1 &\geq -x(x-2) \\
1 &\geq -x^2 + 2x \\
x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\
(x-1)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Dieser Fall ist für alle x erfüllt, daher gehören alle $x < 2$ zur Lösungsmenge.

$\mathbb{L} = (-\infty; 2)$

Beispiel: $\frac{1}{x-9} \leq 8$



Fall 1: $x > 9$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-9} &\leq 8\\ 1 &\leq 8x - 72\\ 8x &\geq 73\\ x &\geq \frac{73}{8}\end{aligned}$$

Fall 2: $x < 9$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-9} &\leq 8\\ 1 &\geq 8x - 72\\ 8x &\leq 73\\ x &\leq \frac{73}{8}\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = (-\infty; 9) \cup \left[\frac{73}{8}; \infty\right)$$

7 Lineare Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem ist eine Sammlung an Gleichungen, für die man eine gemeinsame Lösung sucht. Für das Beispiel unten, ist die Lösung $x = 2, y = 3, z = -4$ oder anders ausgedrückt $\mathbb{L} = \{(2;3;-4)\}$. Wie man darauf kommt, wird unten erklärt.

$$\begin{aligned} (I) \qquad & x + 2y + z = 4 \\ (II) \qquad & x - y + \frac{3}{2}z = -7 \\ (III) \qquad & -4x + 2y = -2 \end{aligned}$$

Wir nennen ein lineares Gleichungssystem homogen, wenn auf der rechten Seite einer jeden Gleichung nur die Null steht. Das Gegenteil von homogen ist inhomogen.

7.1 Einsetzungsverfahren

Eine Möglichkeit hat man, wenn man eine Funktion nach einer beliebigen Variable umstellt und diese dann in einer anderen Funktion einsetzt.

(III)

$$\begin{aligned} -4x + 2y &= -2 \\ -4x &= -2 - 2y \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y + 2y + z &= 4 \\ \frac{1}{2} + \frac{5}{2}y + z &= 4 \\ z &= 3,5 - \frac{5}{2}y \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} x - y + \frac{3}{2}z &= -7 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - y + \frac{3}{2}\left(3,5 - \frac{5}{2}y\right) &= -7 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - y + 5,25 - \frac{15}{4}y &= -7 \\ 5,75 - \frac{1}{2}y - \frac{15}{4}y &= -7 \\ -\frac{17}{4}y &= -\frac{51}{4} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} -4x + 2y &= -2 \\ -4x + 2 \cdot 3 &= -2 \\ -4x + 6 &= -2 \\ -4x &= -8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2 + 2 \cdot 3 + z &= 4 \\ z &= -4 \end{aligned}$$

7.2 Additionsverfahren

Eine andere Möglichkeit ist es, eine oder mehrere Gleichungen mit einer Zahl zu multiplizieren, sodass eine Variable entfällt, wenn man zwei Gleichungen addiert.

$(I) - (III)$

$$\begin{aligned} 5x + z &= 6 \\ z &= 6 - 5x \end{aligned}$$

$(I) + 2(II)$

$$\begin{aligned} 3x + 4z &= -10 \\ 3x + 4(6 - 5x) &= -10 \\ 3x + 24 - 20x &= -10 \\ -17x &= -34 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} -4x + 2y &= -2 \\ -4 \cdot 2 + 2y &= -2 \\ -8 + 2y &= -2 \\ 2y &= 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2 + 2 \cdot 3 + z &= 4 \\ z &= -4 \end{aligned}$$

Hinweis: sind zwei Gleichungen identisch, so gibt es unendlich viele Lösungen und man muss nur die entsprechende Notation für die Lösungsmenge kennen.

$$\begin{array}{ll} (I) & -4x - 2y = -14 \\ (II) & 4x + 2y = 14 \end{array}$$

$\mathbb{L} = \{(x; 7 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

7.3 Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren ist eine bestimmte Vorgehensweise fürs Additionsverfahrens, bei dem man die Gleichungen so umformt, dass man das LGS in die Stufenform bringt und es einfach lösen kann.

$$\begin{aligned} (I) \qquad & x + 2y + z = 4 \\ (II) \qquad & x - y + \frac{3}{2}z = -7 \qquad \mid -\frac{3}{2}(I) \\ (III) \qquad & -4x + 2y = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \qquad & x + 2y + z = 4 \\ (II) \qquad & -\frac{1}{2}x - 4y = -13 \\ (III) \qquad & -4x + 2y = -2 \qquad \mid +\frac{1}{2}(II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \qquad & x + 2y + z = 4 \\ (II) \qquad & -\frac{1}{2}x - 4y = -13 \\ (III) \qquad & -\frac{17}{4}x = -\frac{17}{2} \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} -\frac{17}{4}x &= -\frac{17}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x - 4y &= -13 \\ -1 - 4y &= -13 \\ -4y &= -12 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2 + 6 + z &= 4 \\ z &= -4 \end{aligned}$$

7.4 Lineare Gleichungssysteme mit Parameter

Kommt in einem LGS ein Parameter vor, dann muss man eine Fallunterscheidung vornehmen und den Parameter in die Lösungsmenge mit einbeziehen.

$$\begin{aligned} (I) \qquad & x - 2y = 0 \\ (II) \qquad & y + \frac{1}{3}z = -1 \\ (III) \qquad & (a-3)y = 1 \end{aligned}$$

Wenn $a = 3$, dann kommt bei der letzten Gleichung $0 = 1$ raus. Dadurch können wir schon mal sagen, was die Lösungsmenge für den Fall $a = 3$ ist.

$\mathbb{L} = \emptyset$, falls $a = 3$

Als nächstes schauen wir uns den Fall $a \neq 0$ an.

(III)

$$\begin{aligned}(a-3)y &= 1\\ y &= \frac{1}{a-3}\end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-3} + \frac{1}{3}z &= -1\\ \frac{1}{3}z &= -\frac{1}{a-3} - 1\\ z &= 3\left(-\frac{1}{a-3} - 1\right)\\ z &= -\frac{3}{a-3} - \frac{3a-9}{a-3}\\ z &= \frac{6-3a}{a-3}\end{aligned}$$

(I)

$$\begin{aligned}x - 2y &= 0\\ x - 2\left(\frac{1}{a-3}\right) &= 0\\ x &= \frac{2}{a-3}\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{2}{a-3}; \frac{1}{a-3}; \frac{6-3a}{a-3}\right)\right\},\ falls\ a \neq 3$$

7.5 Matrixschreibweise

Da die normale Notation von Gleichungssystemen wird of schnell unübersichtlich. Man kann die Koeffizienten auch in eine Matrix schreiben. Das hat den Vorteil, dass man die Variablen nicht ständig schreiben muss und eine geordnete Anordnung der Elemente hat.

$$\begin{array}{ll} (I) & x + 2y + z = 4\\ (II) & x - y + \frac{3}{2}z = -7\\ (III) & -4x + 2y = -2\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann man jetzt auch so schreiben:

$$\begin{array}{l} \text{(I)}\\ \text{(II)}\\ \text{(III)}\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4\\ 1 & -1 & \frac{3}{2} & -7\\ -4 & 2 & 0 & -2\end{array}\right)$$

Die Hintergrund dieser Darstellung ist, dass ein Gleichungssystem mit Matrizen so dargestellt werden kann:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

Die Matrix A nennen wir Koeffizientenmatrix. Dann ist es logisch, dass wir die Matrix $(A|b) \in K^{m\times(n+1)}$ erweiterte Koeffizientenmatrix nennen.

7.6 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn

$b \in \operatorname{span}(\{Ae_1, ..., Ae_k\})$

wobei e_n der Einheitsvektor mit 1 in der Zeile n ist. Da heißt also Ae_n ist immer die n-te Spalte von A.

Außerdem ist eine Matrix immer genau dann lösbar, wenn

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$

gilt.

Für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ können wir die Lösungsmenge auch so schreiben:

$\mathcal{L}(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$

Man kann die Anzahl der Lösungen für ein LGS sehr einfach feststellen in dem man es in die Stufenform bringt. Dabei gibt es drei Szenarios.

1. Szenario: Eine Lösung

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

2. Szenario: Keine Lösung

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3. Szenario: Unendlich viele Lösung

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hat ein Gleichungssystem unendliche viele Lösungen, ersetzt man eine der Variablen durch einen Parameter und macht die Lösung davon abhängig.

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid -\frac{1}{2} \cdot \text{(II)} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jetzt legt man fest, dass z bzw. x_3 je nachdem, wie man es nennen will, gleich λ ist und gibt die Lösungsmenge an, indem man nach x und y umstellt.

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{3}{8}\lambda + \frac{3}{4}; \frac{1}{2} - \frac{9}{4}\lambda; \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Alternativ kann man das auch als Geradengleichung angeben.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{9}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir können auch anhand des Matrixranges von A feststellen, wie es um die Lösbarkeit eines LGS $Ax = b$ steht.

- Wenn $\text{rank}A = m$ ist, dann ist $Ax = b$ lösbar.
- Wenn $\text{rank}A = n$ ist, dann hat $Ax = b$ höchstens eine Lösung.
- Wenn $\text{rank}A = n = m$, dann ist $Ax = b$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist dann $x = A^{-1}b$.

Betrachten wir ein Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array}$$

Hier hat A den Rang 2. Da A aber eine 3×3 ($m = 3, n = 3$) Matrix ist, ist dieses LGS nicht lösbar. Das sehen wir auch, wenn wir den gaußschen Algorithmus anwenden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 14 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)}' = \text{(II)} + 2 \cdot \text{(I)} \\ \text{(III)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 14 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)}' \\ \text{(III)}' = \text{(III)} - \frac{2}{7} \cdot \text{(II)}' \end{array}$$

Anhand der Determinante und des Matrixranges können wir auch feststellen, wie viele Lösungen ein LGS hat, welches parameterabhängig ist. Zunächst können wir anhand der Determinante feststellen, für welche Parameter das LGS eindeutig lösbar ist. Es gilt nämlich für $Ax = b$ mit einer $n \times n$-Matrix:

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n \Leftrightarrow A$ ist eindeutig lösbar

Für quadratische Matrizen sind nämlich folgende Aussagen äquivalent:

- A ist invertierbar

- $\text{rank}A = n$
- $\ker A = \{\vec{0}\}$

Betrachten wir das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 4 \\ 9 & 3a \end{pmatrix} \qquad\qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ a \end{pmatrix}$$

Der erste Schritt ist vollkommen unabhängig von b. Wir gucken für welche Werte die Determinante Null wird:

$$\begin{aligned} \det(A) = 0 =& (a-2)\cdot 3a - 36 \\ \Leftrightarrow 0 =& 3a^2 - 6a - 36 \\ \Leftrightarrow 0 =& a^2 - 2a - 12 \\ \overset{\text{p-q}}{\Rightarrow} x_{\pm} =& 1 \pm \sqrt{13} \end{aligned}$$

Damit ist dass LGS eindeutig lösbar für alle a außer $a = 1+\sqrt{13}$ oder $a = 1-\sqrt{13}$. Da A quadratisch ist, ist das System für diese beiden Werte nicht lösbar, denn $\text{rank}A \neq n$ impliziert allgemein $\text{rank}A \neq n$ und $A \neq m$ für eine quadratische $m \times n$ Matrix mit $m = n$. Wir können aber auch zeigen, dass das nicht funktionieren kann mithilfe von Gauß:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a-2 & 4 & 9 \\ 9 & 3a & a \end{array}\right)$$

$$Z_2 \to Z_2 - \frac{9}{a-2} Z_1$$

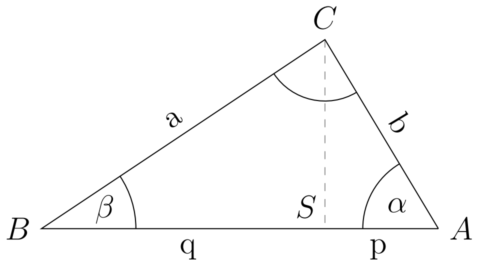
$$\left(\begin{array}{cc|c} a-2 & 4 & 9 \\ 90 & 3a - \frac{36}{a-2} & a - \frac{81}{a-2} \end{array}\right)$$

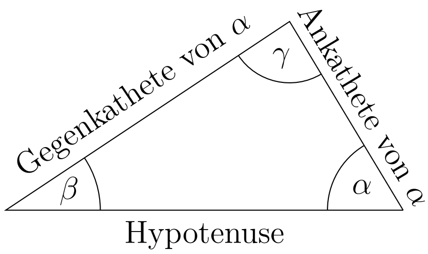
Setzen wir jetzt x_+ oder x_- ein, erhalten wir für beide ein nicht lösbares LGS:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 \pm \sqrt{13} & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{23+23\sqrt{13}}{4} \end{array}\right)$$

8 Geometrie

8.1 Rechtwinklige Dreiecke





8.1.1 Kathetensatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich zu dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$b^2 = p \cdot c$
$a^2 = q \cdot c$

8.1.2 Höhensatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich zu dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$h^2 = p \cdot q$

8.1.3 Sinus, Kosinus und Tangens

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\textit{Gegenkathete von } \alpha}{\textit{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\textit{Ankathete von } \alpha}{\textit{Hypothenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\textit{Gegenkathete von } \alpha}{\textit{Ankathete von } \alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Um mit trigonometrischen Funktionen (S. 99) umgehen zu können, hilft es außerdem einige Regeln zu kennen, die beim Vereinfachen und Umformen von trigonometrischen Termen helfen.

Sinus, Kosinus und Tangens Umformen und Vereinfachen

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\tan(x)}$
$\cos(x + \pi) = -\cos(\pi)$
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
$\tan(x + \pi) = \tan(x)$

8.2 Rechnen mit Flächen (Formeln)

8.2.1 Dreieck

Für ein Dreieck mit der Grundseite c und der Höhe h_c gilt:

$$F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

8.2.2 Kreis

Für einen Kreis mit dem Radius r, dem Umfang U und der Fläche F gilt:

$$U = 2\pi r$$

$$F = \pi r^2$$

Für einen Kreissektor mit dem Radius r, der Bogenlänge b, der Fläche F und dem Winkel α gilt:

$$F = \frac{br}{2}$$

Für ein Kreissegment mit dem Radius r, der Bogenlänge b, der Fläche F und dem Winkel α gilt:

$$F = \frac{br}{2} - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin(\alpha)$$

8.3 Rechnen mit Körpern (Formeln)

8.3.1 Prisma

Für ein Prisma mit der Mantelfläche M, der Grundfläche A, dem Grundflächenumfang U, der Oberfläche O, dem Volumen V und der Höhe h gilt:

$V = A \cdot h$

$M = U \cdot h$

$O = 2 \cdot A + M$

8.3.2 Pyramide

Für eine Pyramide mit der Mantelfläche M, der Grundfläche A, der Oberfläche O, dem Volumen V und der Höhe h gilt:

$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$

$O = 2 \cdot A + M$

8.3.3 Zylinder

Für einen Zylinder mit der Grundfläche A, dem Radius der Grundfläche r, der Oberfläche O, dem Volumen V und der Höhe h gilt:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Für einen geraden Zylinder gilt außerdem:

$O = 2\pi r \cdot (r + h)$

8.3.4 Kegel

Für einen Kegel mit der Grundfläche A, dem Radius der Grundfläche r, der Oberfläche O, dem Volumen V, dem Abstand der Spitze zu einem Punkt der Kreislinie s und der Höhe h gilt:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Für einen geraden Kegel gilt außerdem:

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$O = \pi r \cdot (r + s)$$

9 Einfache Vektorgeometrie

Vektoren kommen häufig in der Physik zum Einsatz, denn oftmals interessieren wir uns nicht nur für eine Größe an sich, sondern auch für ihre Richtung. Vektoren werden durch Pfeile gekennzeichnet $\vec{v}$, ihr Betrag $|\vec{v}|$ gibt uns ihre Länge. Wenn zwei gleichlange Vektoren in genau die entgegengesetzte Richtung zeigen ($\vec{v}$ und $-\vec{v}$), sprechen wir von *Gegenvektoren*. Ein Vektor mit der Länge Null, wird auch als *Nullvektor* bezeichnet. Neben Vektoren, sind Pfeile ein wichtiger Begriff. Diese werden definiert durch ihren Anfangspunkt sowie, ihrem Endpunkt bzw. ihrer Länge und Richtung. Alle Pfeile der selben Länge und Richtung können in einer *Pfeilklasse* zusammengefasst werden. Vektoren können als Pfeilklassen interpretiert werden, denn sie werden nicht durch ihren Anfangspunkt definiert, sondern nur durch Richtung und Länge. Vektoren können jedoch einen festen Anfangspunkt besitzen. In diesem Fall spricht man von *gebundenen Vektoren*, andernfalls von *freien Vektoren*. Außerdem existiert eine besondere Art von gebundenen Vektoren, die sogenannten *Ortsvektoren*, die ihren Anfangspunkt im Koordinatenursprung haben. Der Koordinatenursprung wird mit $O = (0; 0)$ bezeichnet.

Vektoren werden folgendermaßen notiert:

2D: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3D: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

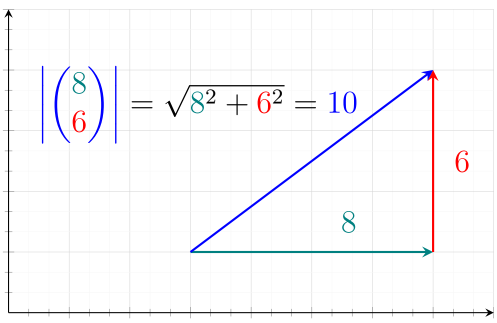
Diese Notation dient dazu sie von Punkten zu unterscheiden. Man spricht hierbei von *Spaltenvektoren*.

Die Länge eines Vektors können wir mithilfe des Satz des Pythagoras berechnen, denn wir können einen Vektor auch als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sehen, bei dem die Katheten die x- und y-Werte sind.

Für die Berechnung der Länge eines Vektors gelten folgende Formeln:

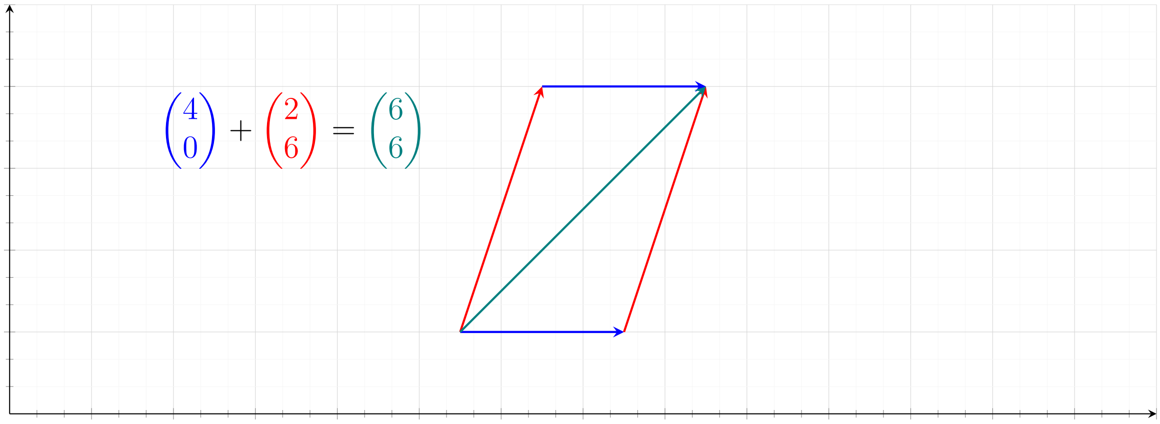
2D: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

3D: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

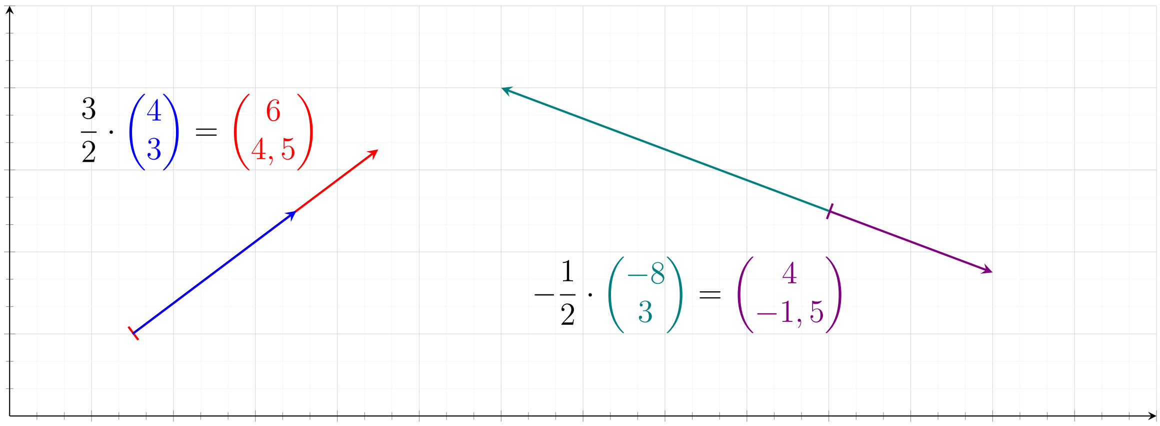


9.1 Rechnen mit Vektoren

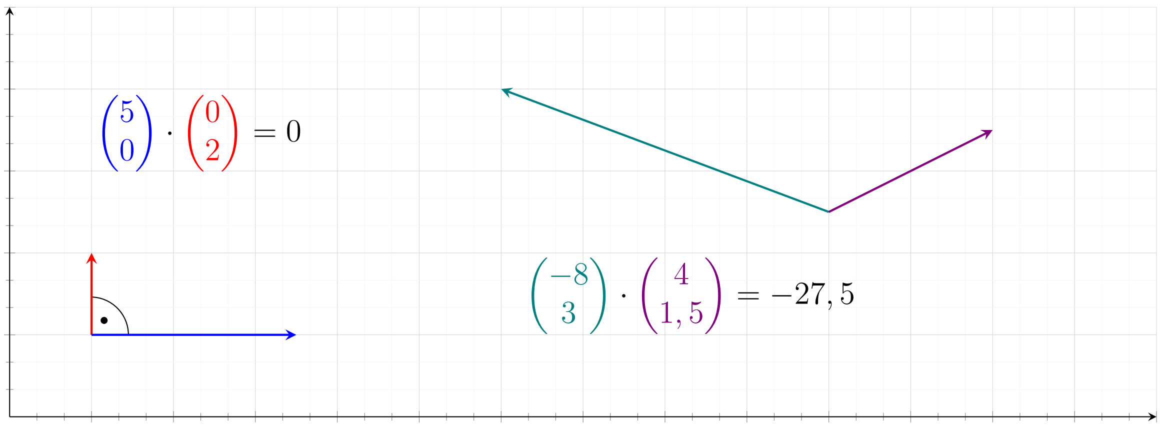
Wenn wir Vektoren addieren wollen, können wir das ganz einfach tun, indem wir ihre jeweiligen Werte miteinander addieren. Die untere Abbildung zeigt, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge wir das tun und auch, dass die Position von Vektoren keine Rolle spielt.



Ebenso können wir Vektoren ganz einfach mit einer Zahl (Skalar) multiplizieren. Dabei spricht man von *skalarer Multiplikation*. Dabei können sagen, dass zwei Vektoren parallel sind, wenn es ein λ gibt, welches $\lambda \cdot \vec{c} = \vec{w}$ erfüllt. Das gilt jedoch nicht für den Nullvektor.



Neben der Multiplikation mit einer Zahl, können wir auch zwei Vektoren miteinander multiplizieren. Das ist das Skalarprodukt, welches man nicht mit skalarer Multiplikation verwechseln sollte. Das Skalarprodukt kann man benutzen, um die Länge von Vektoren sowie, den Winkel zwischen ihnen zu bestimmen. Insbesondere gilt: Wenn das Skalarprodukt gleich Null ist, dann haben wir einen rechten Winkel und die Vektoren sind orthogonal bzw. liegen senkrecht aufeinander. Das Skalarprodukt heißt übrigens so, weil unser Ergebnis ein Skalar ist.



Wenn das Skalarprodukt nicht Null ist, können wir trotzdem den Winkel bestimmen, es ist nur etwas komplizierter. Dafür rechnet man das Skalarprodukt durch das Produkt der beiden Vektorlängen und erhält damit den Kosinuswert.

Winkelberechnung zwischen Vektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Nehmen wir dazu das Beispiel $\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1,5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 1,5 \end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{-27,5}{\sqrt{73} \cdot \frac{\sqrt{73}}{2}} \\
&= \frac{-27,5}{\frac{73}{2}} \\
&= -\frac{55}{73} \\
\Rightarrow \alpha &\approx \underline{\underline{138,9^\circ}}
\end{aligned}$$

Achtung: Achte darauf, dass du im Taschenrechner das Gradmaß und nicht das Bogenmaß eingestellt hast!

Mit dem Skalarprodukt finden wir alternativ zum Satz des Pythagoras auch die Länge eines Vektors, denn es gilt $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$. Wenn wir also das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selber bilden und anschließend die Wurzel vom Betrag des Skalarproduktes ziehen, erhalten wir die Länge des Vektors.

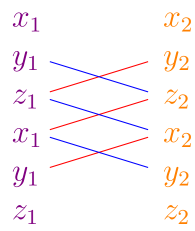
Beispiel:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right|^2 &= 17 \\
\Rightarrow \sqrt{17} &\approx \underline{\underline{4,123}}
\end{aligned}$$

Hinweis: All die oben genannten Rechengesetze, wie z.B. das Skalarprodukt lassen sich im dreidimensionalen Raum genauso anwenden wie im zweidimensionalen.

Neben dem Skalarprodukt gibt es im $\mathbb{R}^3$ noch eine Möglichkeit das Produkt aus zwei Vektoren zu bilden, nämlich das sogenannte *Kreuzprodukt*. Mit dem Kreuzprodukt, oder auch Vektorprodukt genannt, kriegen wir den Normalenvektor heraus, dessen Länge genau dem Parallelogramm, der beiden Ursprungsvektoren entspricht. Das ist ein Vektor, der Orthogonal zu den beiden ursprünglichen Vektoren ist. Um Das Kreuzprodukt zu berechnen, schreibt man nebeneinander die Werte der Vektoren jeweils zwei mal übereinander und multipliziert wie unten angeben über Kreuz: Erst die blauen Linien und dann Minus die roten.

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$



Anmerkung: Um den Normalenvektor zu ermitteln, kann man alternativ auch ein Gleichungssystem aufstellen, indem man sagt, dass das Skalarprodukt aus dem Normalenvektor und jeweils einem der beiden Richtungsvektoren Null ergibt. Man hätte dann zwei Gleichungen der Form $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

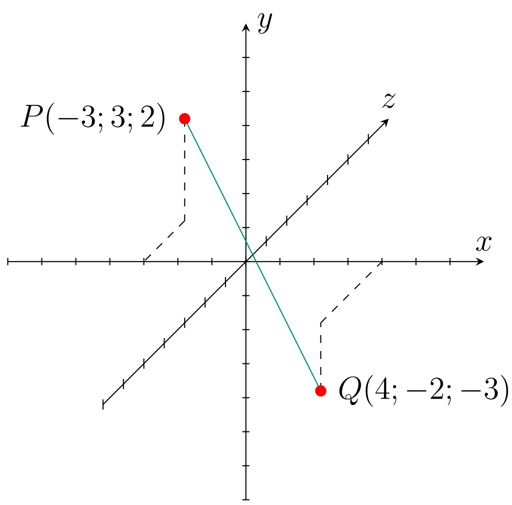
9.2 Geraden

Um eine Gerade aufzustellen, braucht man zwei von einander verschiedene Punkte.

Koordinatenform

Diese Notation ist wahrscheinlich am einfachsten zu verstehen, denn man hat zwei Punkte, zwischen denen man eine Gerade zeichnen kann.

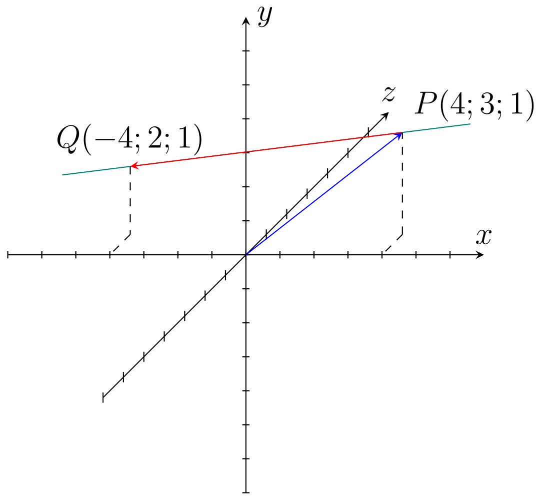
$$g : ax + by = c$$



Parameterform

Bei dieser Notationsform wird an einen Ortsvektor – genannt Stützvektor – ein Richtungsvektor angelegt. Dieser Vektor liegt jetzt auf einer Geraden. Da die Länge des Richtungsvektors egal ist, nimmt man noch den Skalar r hinzu.

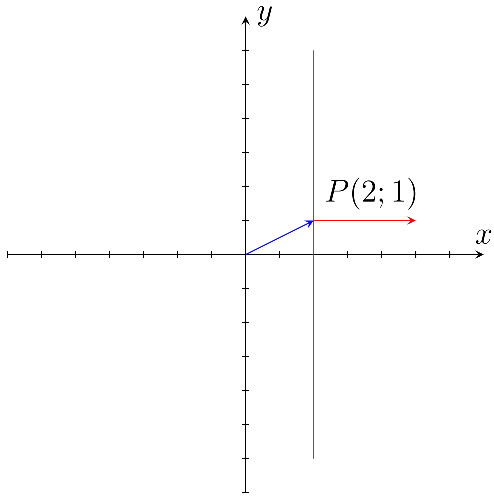
$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ}$$



Normalenform

Bei dieser Notationsform braucht einen Stützvektor und einen Normalenvektor, der orthogonal zu einer Geraden ist. Die Normalenform für Geraden existiert nur in $\mathbb{R}^2$, denn in drei Dimension gibt es keinen eindeutigen Normalenvektor, der orthogonal zum Stützvektor ist.

$$g : \vec{n} \cdot [\vec{x} - \overrightarrow{OP}] = 0$$



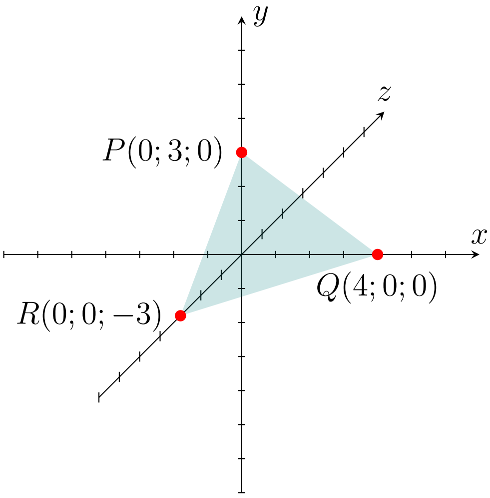
9.3 Ebenen

Um eine Ebene aufzustellen, braucht man drei Punkte, die paarweise verschieden sind und nicht auf einer Geraden liegen.

Koordinatenform

Diese Notation ist wahrscheinlich am einfachsten zu verstehen, denn man hat drei Punkte, die zusammen eine Ebene aufspannen. Genauer gesagt, handelt es sich um die Spurpunkte, d.h. die Schnittpunkte mit den Achsen.

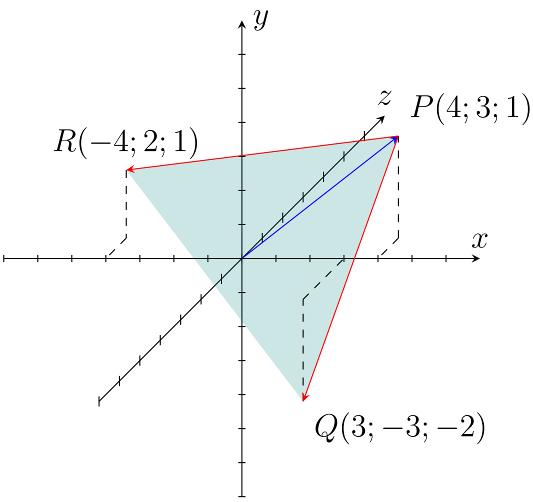
$$E : ax + by + cz = d$$



Parameterform

Bei dieser Notationsform werden an einen Ortsvektor – genannt Stützvektor – zwei Richtungsvektoren oder auch Spannvektoren angelegt. Diese beiden Vektoren liegen jetzt auf einer Ebene. Da die Länge der Spannvektoren egal ist, nimmt man noch die Skalaren r und s hinzu.

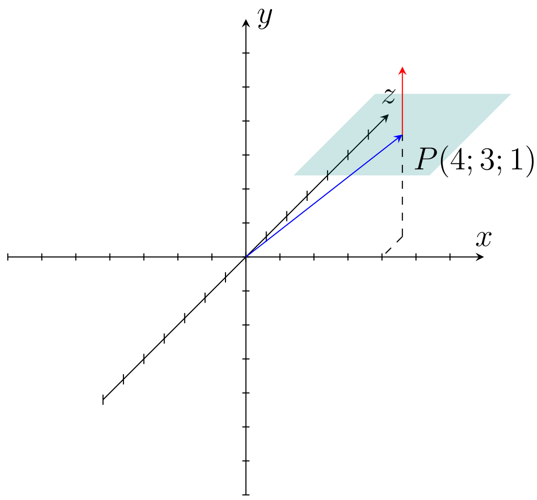
$$E : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR}$$



Normalenform

Bei dieser Notationsform braucht man nur zwei Vektoren: Einmal den Stützvektor und einmal den Normalenvektor. Der Normalenvektor ist ein Vektor, der orthogonal zur Ebene liegt. Da durch ihn die Ebene eindeutig identifiziert werden kann, kann er die beiden Spannvektoren ersetzen.

$$E : \vec{n} \cdot [\vec{x} - \overrightarrow{OP}] = 0$$



9.4 Umwandeln von Ebenengleichungen

Manchmal muss man zwischen den verschiedenen Formeln umwandeln, daher hier eine Übersicht. Dazu sei gesagt, dass diese Tabelle für Ebenen- und Geradengleichung gleichermaßen gilt.

Von	**Nach**	**Wie?**
Parameterform	Normalenform	Normalenvektor aufstellen mithilfe der Richtungsvektoren: Entweder Kreuzprodukt bilden oder Gleichungssystem aufstellen (Kreuzprodukt geht nicht bei Geradengleichungen)
Normalenform	Koordinatenform	Den kompletten Term ausmultiplizieren
Koordinatenform	Parameterform	x durch r und y durch s ersetzen (soweit vorhanden) und dann nach z umstellen und Parameterform aufstellen
Koordinatenform	Normalenform	Normalenvektor ablesen (Koeffizienten vor xyz) und Stützvektor berechnen, indem man die Gleichung der Koordinatenform löst

Für die nicht aufgeführten Umwandlungen muss man erst in eine andere Form als Zwischenschritt umwandeln. Zum besseren Verständnis folgt für jede Umwandlung noch ein Beispiel.

Von Parameterform nach Normalenform

$$
\begin{aligned}
E &: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow E &: \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \\
\Rightarrow E &: \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0
\end{aligned}
$$

Von Normalenform nach Koordinatenform

$$
\begin{aligned}
E &: \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \\
\Rightarrow E &: \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
\Rightarrow E &: 7x - 3y + 6z = 11
\end{aligned}
$$

Von Koordinatenform nach Parameterform

$$
\begin{aligned}
E &: 7x - 3y + 6z = 11 \\
\Rightarrow E &: 7r - 3s + 6z = 11 \\
\Rightarrow E &: 6z = 11 - 7r + 3s \\
\Rightarrow E &: z = \frac{11}{6} - \frac{7}{6}r + \frac{1}{2}s \\
\Rightarrow E &: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \\ \frac{11}{6} & -\frac{7}{6}r & \frac{1}{2}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{11}{6} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Hinweis: Sollten von x, y und z nicht alle gegeben sein, einfach an der entsprechenden Stelle 0 einsetzen. Übrigens nicht wundern, dass nicht dasselbe wie bei den vorherigen Beispielen rauskommt. Es gibt schließlich unendliche viele Möglichkeiten eine Ebenengleichung aufzustellen.

Von Koordinatenform nach Normalenform

$$
\begin{aligned}
E &: 7x - 3y + 6z = 11 \\
\Rightarrow E &: \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0
\end{aligned}
$$

Hinweis: Für den Stützvektor können auch komplett andere Werte benutzt werden, solange sie die Gleichung in Koordinatenform erfüllen.

9.5 Lagebeziehungen

In der analytischen Geometrie schaut man sich oft an, wie Punkte, Geraden und Ebenen zueinander stehen. Von Interesse ist u.a., ob sich Geraden schneiden, ob Punkte auf einer Geraden liegen oder auch, ob Ebenen parallel sind. Für dieses Kapitel solltest du Gleichungssysteme (S. 59) lösen können. Vorab noch eine kleine Begriffsklärung: *Windschief* bedeutet, dass zwei Geraden sich weder schneiden, noch parallel sind.

9.5.1 Punkt – Punkt

Für die Beziehung zwischen zwei Punkten gibt es nur ein Szenario: Entweder sie sind gleich oder nicht und das ist wirklich einfach zu überprüfen. Haben zwei Punkte dieselben Koordinaten, so sind sie gleich.

9.5.2 Punkt – Gerade/Ebene

Ein Punkt kann auf einer Geraden bzw. einer Ebene liegen oder nicht. Das überprüft man, indem man den Punkt für $\vec{x}$ in die Parameterform einsetzt und daraus ein Gleichungssystem aufstellt. Ist dieses lösbar, so liegt der Punkt auf der Geraden oder auf der Ebene. Dazu ein Beispiel mit dem Punkt $P(-3;-2;5)$ und einer Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(I) \quad -3 &= 4 + 2s \\
(II) \quad -2 &= 1 + s && \mid -1 \\
(III) \quad 5 &= 3 - 2s && \mid (II) \text{ einsetzen} \\
&\Downarrow \\
(III) \quad 5 &= 3 - 2(-2-1) \\
5 &= 9
\end{aligned}$$

Wir erhalten eine unwahre Aussage. Damit ist das Gleichungssystem nicht lösbar und der Punkt liegt nicht auf der Geraden.

9.5.3 Gerade – Gerade/Ebene

Schnittpunkt

Um zu überprüfen, ob sich zwei Geraden schneiden oder sich eine Gerade mit einer Ebene schneidet, so setzt man diese gleich und stellt daraus ein Gleichungssystem auf. Es gilt ganz einfach, dass wenn das Gleichungssystem lösbar ist, dann existiert auch ein Schnittpunkt. Vorsicht, denn man darf für den Skalar s im Gleichungssystem nicht den gleichen Buchstaben verwenden, denn unsere Richtungsvektoren dürfen unterschiedlich skaliert werden. Wenn es kein Ergebnis gibt, dann heißt das für den Fall Gerade/Ebene, dass diese parallel zueinander liegen.

$$\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrl}
(I) & 4+2s = & 1-2r & \\
(II) & 1+s = & 2-r & \mid -1 \\
(III) & 3-2s = & 4+3r & \mid (II) \text{ einsetzen}
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrl}
(III) & 3-2(1-r) = & 4+3r \\
\Leftrightarrow & 1+2r = & 4+3r \\
\Leftrightarrow & -3 = & r
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrll}
(I) & 4+2s = & 1-2r & \mid (II) \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow & 4+2(1-r) = & 1-2r & \mid (III) \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow & 4+2(1+3) = & 1+6 & \\
\Leftrightarrow & 12 = & 7 &
\end{array}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Damit schneiden sich die beiden Geraden nicht.

Parallelität (nur Geraden)
Sind die Richtungsvektoren von zwei Geraden Vielfache voneinander, so verlaufen sie parallel. Das kann man wieder mit einem Gleichungssystem ganz einfach beweisen.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrl}
(I) & 2 = & -2a \\
(II) & 1 = & -1a \\
(III) & -2 = & 3a
\end{array}$$

Für dieses Beispiel sind die Geraden nicht parallel, denn für (I) und (II) erhält man die Lösung 1, diese erfüllt jedoch nicht die dritte Gleichung. Folglich sind diese beiden Vektoren und damit auch mögliche in Verbindung stehende Geraden nicht parallel zueinander.

Achtung: Windschief sind sie erst, wenn man auch bewiesen hat, dass sie keinen Schnittpunkt haben.

9.5.4 Ebene – Ebene

Der größte Unterschied bei der Betrachtung des Lageverhältnisses zwischen zwei Ebenen, besteht bei der Interpretation des Ergebnisses. Kriegt man am Ende ein unwahre Aussage, liegen die Ebenen logischerweise parallel zu einander aber nicht aufeinander. Bekommen wir eine wahre Aussage als Ergebnis, sind die Ebenen identisch. Sollten am Ende ein oder zwei Parameter übrig bleiben, existiert eine Schnittgerade der beiden Ebenen. In diesem Fall rechnet es sich am einfachsten, wenn man eine Gleichung in der Koordinatenform und die andere in der Parameterform hat. Dazu ein Beispiel:

$$E_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$E_2: 3x + y + 2z = 10$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2r + 3s \\ y &= 1 + 2r \\ z &= -2 + 2r - 0,5s \end{aligned}$$

Diese Werte aus E_1 setzen wir jetzt in E_2 ein.

$$\begin{aligned} & 3x + y + 2z = 10 \\ \Rightarrow\quad & 3(3 + 2r + 3s) + 1 + 2r + 2(-2 + 2r - 0,5s) = 10 \\ \Leftrightarrow\quad & 9 + 6r + 9s + 1 + 2r - 4 + 4r - s = 10 \\ \Leftrightarrow\quad & 12r + 8s = 4 \end{aligned}$$

Mithilfe dieses Ergebnisses kann man jetzt eine Schnittgeradengleichung aufstellen. Dafür muss man zunächst nach r oder nach s umstellen.

$$\begin{aligned} & 12r + 8s = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 8s = 4 - 12r \\ \Leftrightarrow\quad & s = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}r \end{aligned}$$

Dieses s setzt man jetzt in die Ebenengleichung in Parameterform ein und erhält damit die Schnittgerade.

$$\begin{aligned} & g_s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & g_s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r\right) \\ 0 \\ -0,5\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r\right) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & g_s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{9}{2}r \\ 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}r \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & g_s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1 \\ -2,25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 2 \\ 2,75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9.6 Linearkombination

Wenn ein Vektor mithilfe von Vektoraddition und Skalarmultiplikation erzeugt wird, nennt man das Linearkombination. So ist ein Vektor $\vec{v}$ gleich der Summe aller Vektoren a_i multipliziert mit den Skalaren λ_i.

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$$

Man nimmt sich also eine Anzahl n an Vektoren und addiert diese ggf. unter Benutzung von Skalaren. Diese Summe nennt man Linearkombination.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = 5 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -5 \\ 37 \end{pmatrix}$

9.7 Lineare Abhängigkeit

Hat man Vektoren, deren Linearkombination den Nullvektor erzeugen kann, spricht man von linearer Abhängigkeit unter der Voraussetzung, dass mindestens einer der genutzten Skalare nicht Null ist. Hat man mehr als zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ oder mehr als drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$, sind diese Vektoren immer linear abhängig. Des Weiteren sind zwei Vektoren immer dann linear voneinander abhängig, wenn sie parallel sind. Für drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gilt außerdem, dass sie sich auf einer Ebene befinden, wenn sie linear voneinander abhängig sind.

Beispiel: Sind die drei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren linear voneinander abhängig?

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid -\text{(I)} \\ \mid -2 \cdot \text{(I)} \end{array}$$

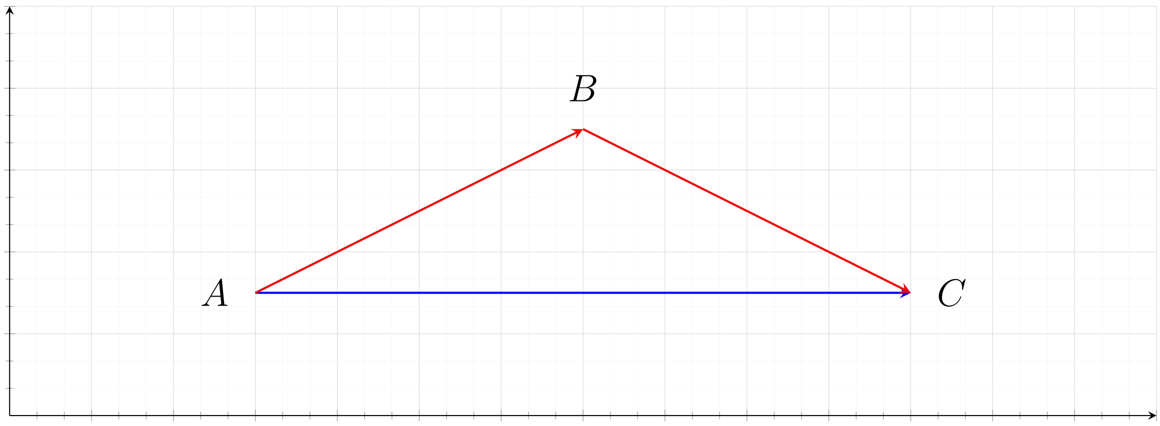
$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot 8 \mid -10 \cdot \text{(II)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem bietet unendlich viele Lösungen, d.h., diese drei Vektoren sind linear abhängig.

9.8 Dreiecksungleichung

Wenn man einen Vektor $\overrightarrow{AC}$ betrachtet, dann ist dessen Betrag immer kleiner oder gleich den Beträgen aus $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Das liegt einfach daran, dass die Strecke zwischen A und C nicht größer sein kann als die zwischen A, B und C. Sie kann auch nur dann genauso groß sein, wenn der Punkt B auf der Strecke zwischen A und C liegt.



Daraus kann man zwei Ungleichungen aufstellen, die man sehr häufig braucht, z.B. um Beweise (S. 125) zu führen.

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| \leq \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|$$
$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| \leq \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|$$

10 2D-Koordinatensystem

10.1 Allgemeines

10.1.1 Monotonie

Seien x_1 und x_2 zwei Argumente einer Funktion und M eine Teilmenge des Definitionsbereiches, so gelten folgende Definitionen für das Monotonieverhalten über M:

Monoton wachsend

$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Streng monoton wachsend

$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Monoton fallend

$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Streng monoton fallend

$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Des Weiteren kann man, das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe ihrer Ableitung (S. 102) bestimmen. Ist die Ableitung f' einer Funktion größer oder gleich Null, so ist sie monoton wachsend. Ist sie größer als und ungleich Null, ist sie sogar streng monoton wachsend. Dasselbe gilt umgekehrt für monoton fallende Funktion, wenn ihre Ableitung an der untersuchten Stelle negativ ist.

Monoton wachsend: $f'(x) \geq 0$

Streng monoton wachsend: $f'(x) > 0$

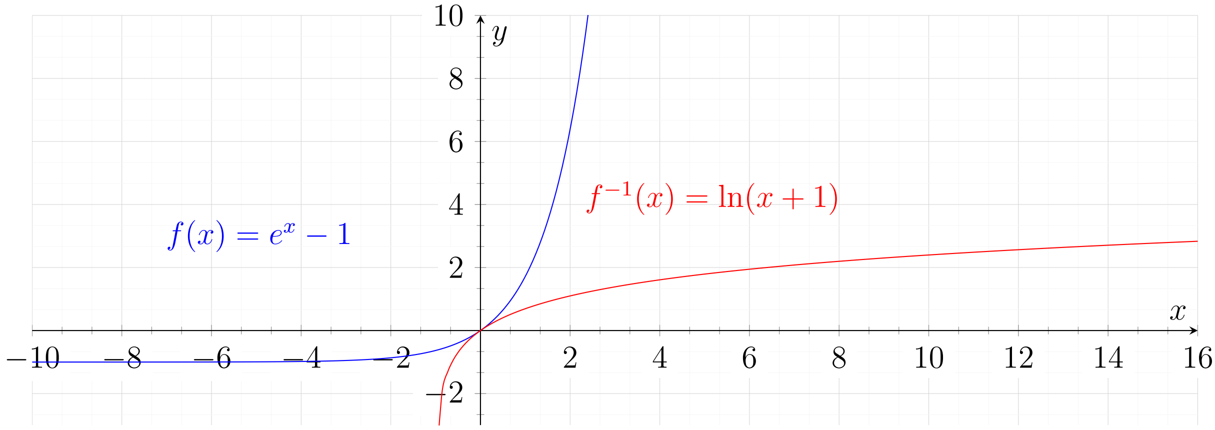
Monoton fallend: $f'(x) \leq 0$

Streng monoton fallend: $f'(x) < 0$

10.1.2 Umkehrbarkeit

Bei der Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f werden quasi Abszissen und Ordinaten vertauscht. Das heißt quasi, dass die Funktion von der y-Achse auf die x-Achse gelegt wird. Da es aber für jedes x nur ein y geben darf, gelten besondere Regeln für die Umkehrbarkeit von Funktionen: Eine Funktion ist in einem Intervall umkehrbar, wenn sie in diesem Intervall entweder nur streng monoton fallend oder nur streng monoton wachsend ist. In anderen Worten, darf

es für jeden y-Wert maximal einen x-Wert geben, der auf ersteren verweist. Diese Eigenschaft nennt man auch *Injektivität*. Um das zu überprüfen kann man mithilfe der Ableitung (S. 102) die Extremstellen der Funktion untersuchen. Die Funktion sollte außerdem *surjektiv* sein, d.h. Jeder y-Wert hat mindestens einen x-Wert zu gewiesen. Wenn beides gegeben ist, braucht jeder y in anderen Worten genau einen x-Wert. Das wird auch als *bijektiv* bezeichnet.
Wenn man sich also sicher ist, dass die Funktion im jeweiligen Intervall bijektiv ist, darf man auch eine Umkehrfunktion bilden. Das ist je nach Funktionstyp gar nicht so schwer, denn man muss die Funktion nur nach y umstellen und dann x und y vertauschen. Hier ein Beispiel für eine Funktion und ihre Umkehrfunktion:



10.1.3 Besondere Stellen

Für manche Stellen einer Funktion werden besondere Begriffe benutzt. Hinweis: D_f ist der Definitionsbereich der Funktion und I ein beliebig kleiner offener Intervall, der x_{max} bzw. x_{min} beinhaltet.

Globale Maximalstelle

wenn $f(x_{max}) \geq f(x)$ aller $x \in D_f$

Lokale Maximalstelle

wenn $f(x_{max}) \geq f(x)$ aller $x \in D_f \cap I$

Globale Minimalstelle

wenn $f(x_{max}) \leq f(x)$ aller $x \in D_f$

Lokale Minimalstelle

wenn $f(x_{max}) \leq f(x)$ aller $x \in D_f \cap I$

Strikte Extrema

Ersetzt man bei den obigen Definitionen das $\geq$ bzw. $\leq$ durch $>$ bzw. $<$, spricht man von einem strickten Maximum oder Minimum.

Hinweis: Maximal- und Minimalstellen werden auch als Extremalstellen bezeichnet.

10.1.4 Symmetrie

Wenn man Funktionen untersucht, schaut man sich auch oft an, wie deren Symmetrie ist. Ist eine Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse, spricht man von *gerade* und wenn sie punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist, von *ungerade*.

Gerade

wenn $f(-x) = f(x)$

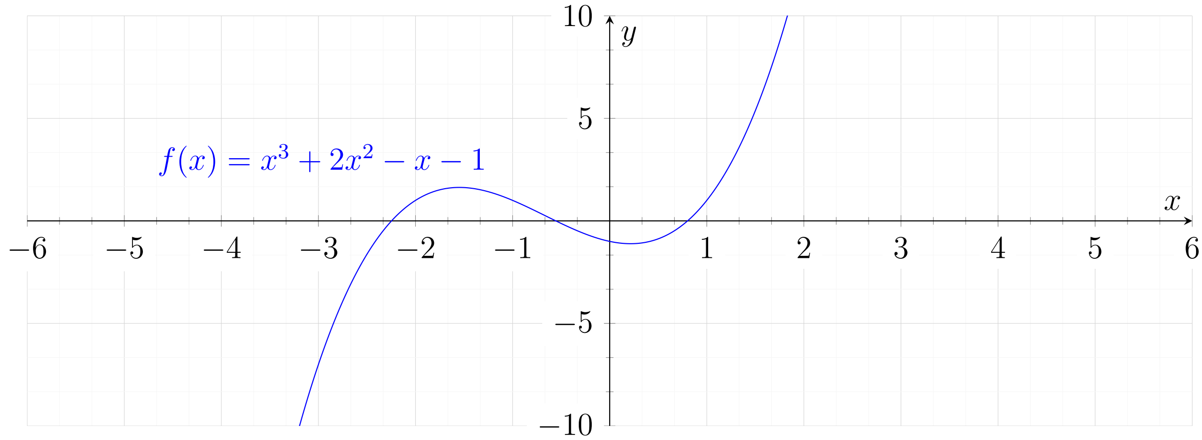
Ungerade

wenn $f(-x) = -f(x)$

Achtung: Eine Funktion kann nur gerade oder ungerade sein, wenn ihr Definitionsbereich symmetrisch zur Nullstelle auf der x-Achse ist.

10.1.5 Newtonverfahren

Bei komplizierten Funktion kann es passieren, dass – obwohl welche existieren – man keine Nullstellen findet. Manchmal nicht einmal durch Raten. Eine ganzrationale Funktion zu vereinfachen durch Polynomdivision ist z.B. ebenfalls erst möglich, wenn man eine Nullstelle gefunden hat. Dennoch findet man online viele Rechner, die einem die Nullstellen geben, aber wie machen die das? In diesem Fall hilft das Newtonverfahren, sich einem Wert zu nähern. Hier ist ein Beispiel für so einen Fall:



Als erstes legt man eine Wertetabelle an, um die grobe Positionen der Nullstellen zu finden. Dabei will man wissen, zwischen welchen Stellen das Vorzeichen wechselt.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-7	1	1	-1	1	13	41

Wir untersuchen jetzt einmal die Nullstelle zwischen -1 und 0. Um uns der Nullstelle anzunähern, teilen wir die Funktion durch ihre Ableitung an einer der beiden Stellen, zwischen denen unsere gesuchte Nullstelle liegt. Es gilt folgende Formel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Um diese Formel anzuwenden, brauchen wir als erstes die Ableitung und dann wiederholen wir diesen Prozess solange, bis wir genügend Nachkommastellen oder die tatsächliche Nullstelle gefunden haben.

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$$x_1 = (-1) - \frac{(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 1}{3(-1)^2 + 4(-1) - 1} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = (-\frac{1}{2}) - \frac{(-\frac{1}{2})^3 + 2(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 1}{3(-\frac{1}{2})^2 + 4(-\frac{1}{2}) - 1} = -\frac{5}{9}$$
$$x_3 = (-\frac{5}{9}) - \frac{(-\frac{5}{9})^3 + 2(-\frac{5}{9})^2 - (-\frac{5}{9}) - 1}{3(-\frac{5}{9})^2 + 4(-\frac{5}{9}) - 1} = -\frac{929}{1674}$$
$$x_4 = (-\frac{929}{1674}) - \frac{(-\frac{929}{1674})^3 + 2(-\frac{929}{1674})^2 - (-\frac{929}{1674}) - 1}{3(-\frac{929}{1674})^2 + 4(-\frac{929}{1674}) - 1} = -0,5549581321$$
$$x_5 = ... = -0,5549581321$$

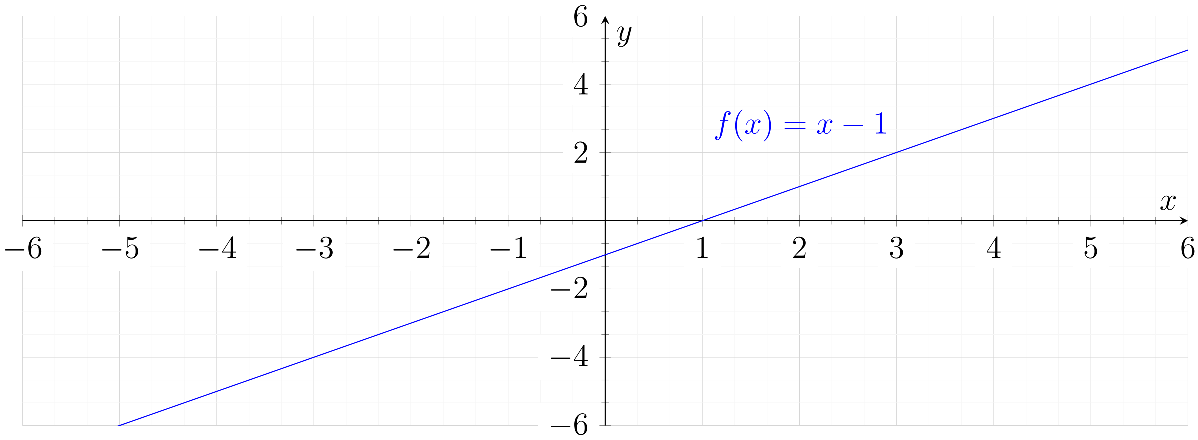
Wenn man zwei Mal den gleichen Wert bekommt, weiß man, dass man den endgültigen Wert erreicht hat.

10.2 Lineare Funktionen

Lineare Funktionen haben die allgemeine Form $f(x) = mx + n$ und ihre Graphen ziehen eine gerade Linie durch das Koordinatensystem.

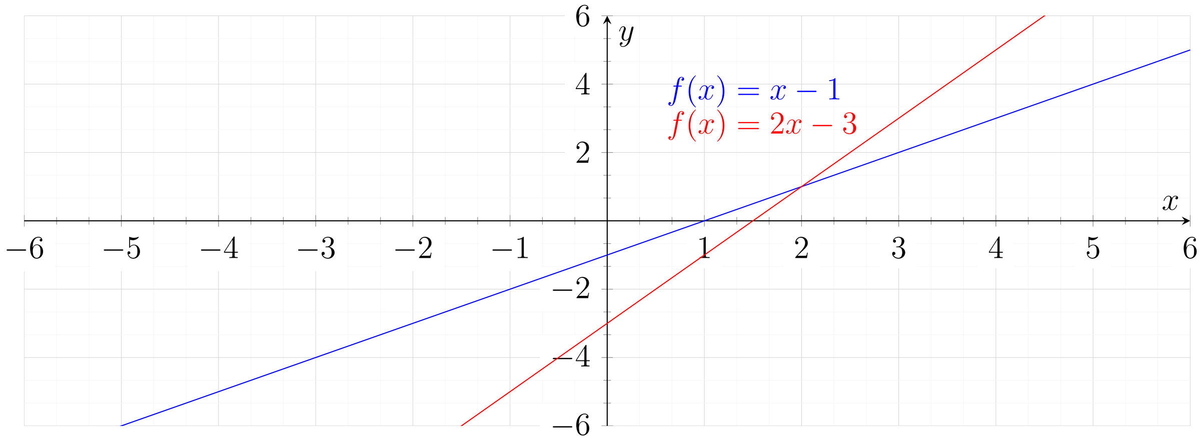
10.2.1 Schnittwinkel berechnen

Um den Winkel zwischen einer linearen Funktion und der Abszisse zu berechnen, verwendet man die Formel $\tan(\alpha) = m$. Man muss also nur den Arkustangens aus dem Anstieg der Funktionen nehmen. Sollte der Anstieg negativ sein, muss man ggf. das Ergebnis von 180 abziehen, um so den richtigen Winkel zu erhalten.



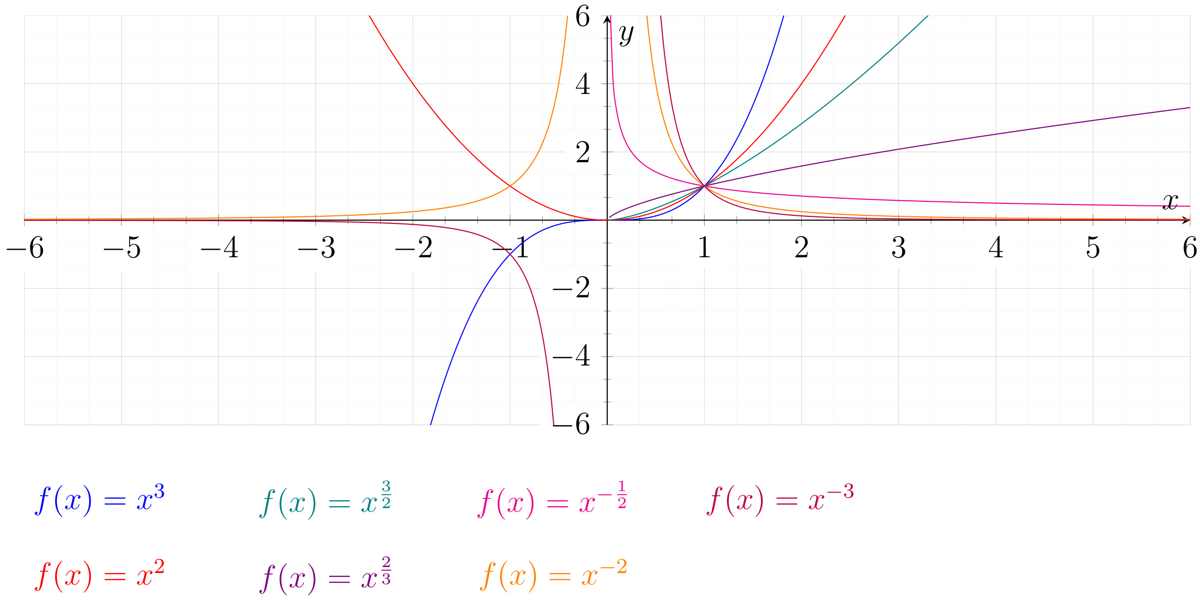
In dem obigen Beispiel beträgt der Winkel 45°, da $\arctan(1) = 45$.

Man kann auch den Schnittwinkel zwischen zwei linearen Funktionen berechnen. Dafür gibt es die Formel $\tan(\alpha) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$. Für das folgende Beispiel beträgt der Schnittwinkel gerundet 18°.



10.3 Potenz- und Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen in der Form $f(x) = x^m$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $D_f = \mathbb{R}$ heißen **Monome** (im Gegensatz zu Polynomen). Potenzfunktionen mit der Form $x^{\frac{m}{n}}$ sind **Wurzelfunktionen**, wenn $n \geq 2$ gilt und der Bruch keine ganze Zahl ist. An der Potenz kann man erkennen, ob eine Funktion gerade (x^{2n}) oder ungerade (x^{2n-1}) ist. Hier sind einige Beispiele für Graphen von Potenz- und Wurzelfunktionen:



10.3.1 Wurzelgleichungen

Bei Wurzelgleichungen wird zuerst der Definitionsbereich bestimmt, also die Menge an reellen Zahlen, für die der Radikand positiv oder gleich Null ist. Zur Lösung von Wurzelgleichungen wird die Wurzel auf einer Seite der Gleichung isoliert. Dann werden beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten (im Falle der Quadratwurzel also mit 2) so lange potenziert, bis alle

Wurzeln eliminiert sind. Man bekommt also unter Umständen durch das Quadrieren (das Potenzieren mit einer geraden Zahl ist keine Äquivalenzumformung) neue Lösungen (Scheinlösungen) hinzu, die die ursprüngliche Gleichung nicht hatte. Die Probe ist folglich für Wurzelgleichungen unverzichtbar!

Beispiel ($\sqrt{2x+1} = x - 17$):

$$\begin{aligned} 2x + 1 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit haben wir den Definitionsbereich. Jetzt kann man nach der Lösung suchen.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= x - 17 \\ 2x + 1 &= (x-17)^2 \\ 2x + 1 &= x^2 - 34x + 289 \\ x^2 - 36x + 288 &= 0 \\ x_1 &= 12 \\ x_2 &= 24 \end{aligned}$$

Jetzt MUSS man das Ergebnis noch überprüfen, indem man die Werte x_1 und x_2 in die ursprüngliche Gleichung einsetzt.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x_1+1} &= x_1 - 17 \\ \sqrt{2 \cdot 12 + 1} &= 12 - 17 \\ \sqrt{25} &= -5 \\ 5 &= -5 \end{aligned}$$

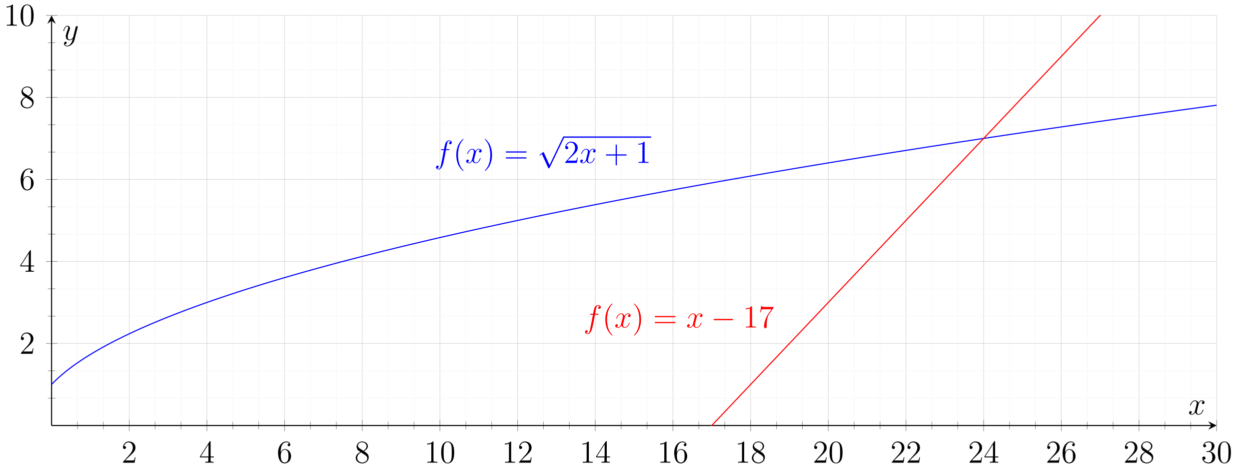
Das Einsetzen von x_1 liefert keine wahre Aussage und ist somit nicht Teil der Lösungsmenge.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x_2+1} &= x_2 - 17 \\ \sqrt{2 \cdot 24 + 1} &= 24 - 17 \\ \sqrt{49} &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Da x_2 im Definitionsbereich liegt und beim Einsetzen eine wahre Aussage ergibt, ist es in der Lösungsmenge enthalten.

$\mathbb{L} = \{24\}$

Übrigens: Wenn man mehrere Wurzeln in der Gleichung hat, muss man den Definitionsbereich für den Radikanden jeder Wurzel bestimmen.



Mithilfe dieser Graphen kann man das Ergebnis wunderbar visualisieren, denn das Ergebnis ist der x-Wert des Schnittpunkts der beiden Funktionen, die man aus der linken und rechten Seite der Wurzelgleichung entnehmen kann.

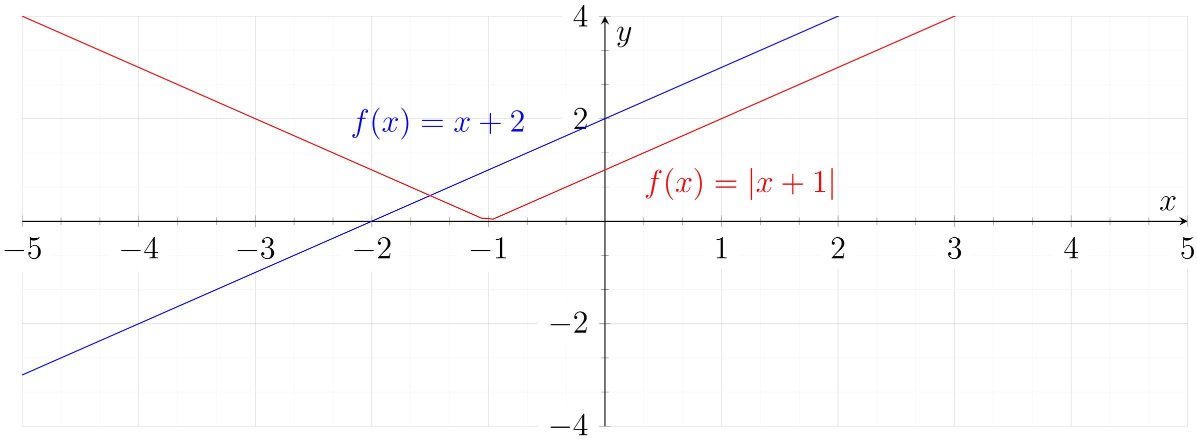
10.3.2 Wurzelgleichungen mit mehreren Wurzeln (Beispiel)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{8x-14} + \sqrt{5x-2} &= \sqrt{27x-36} \\
(\sqrt{8x-14} + \sqrt{5x-2})^2 &= 27x - 36 \\
8x - 14 + 2\sqrt{(8x-14)(5x-2)} + 5x - 2 &= 27x - 36 \\
2\sqrt{(8x-14)(5x-2)} &= 14x - 20 \\
\sqrt{(8x-14)(5x-2)} &= 7x - 10 \\
40x^2 - 86x + 28 &= (7x-10)^2 \\
40x^2 - 86x + 28 &= 49x^2 - 140x + 100 \\
0 &= 9x^2 - 54x + 72 = x^2 - 6x + 8
\end{aligned}
$$

Jetzt kann man die p-q-Formel (S. 47) anwenden und erhält die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{2; 4\}$.

10.4 Betragsfunktionen

Um mit Betragsgleichungen oder auch Betragsfunktionen rechnen zu können muss man mehrere Fälle betrachten. Nämlich einmal den Fall, dass im Betrag ein Wert größer oder gleich 0 entsteht und einmal den Fall, dass das Ergebnis im Betrag kleiner als Null ist. Betrachten wir ein Beispiel, bei dem man den Schnittpunkt zwischen $f(x) = |x+1|$ und $f(x) = x+2$ finden soll.



Zunächst setzen wir unsere Funktionen gleich und erhalten eine Betragsgleichung. Dann betrachten wir die verschiedenen Fälle für den Betrag.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{falls } x < -1 \end{cases}$$

Durch die Fallunterscheidung kann man die Betragsstriche weglassen, indem man jeden Fall einzeln betrachtet. Hinterher muss man aber noch überprüfen, ob das Ergebnis der Bedingung für x in dem Fall entspricht.

Fall $x \geq -1$ ($x+1$ ist positiv):

$$\begin{aligned} x+1 &= x+2 \qquad && \mid -x \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

Für den Fall $x \geq -1$ gibt es keine Lösung, also weiter zum nächsten Fall.

Fall $x < -1$ ($x+1$ ist negativ):

$$\begin{aligned} -x-1 &= x+2 \qquad && \mid +x-2 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

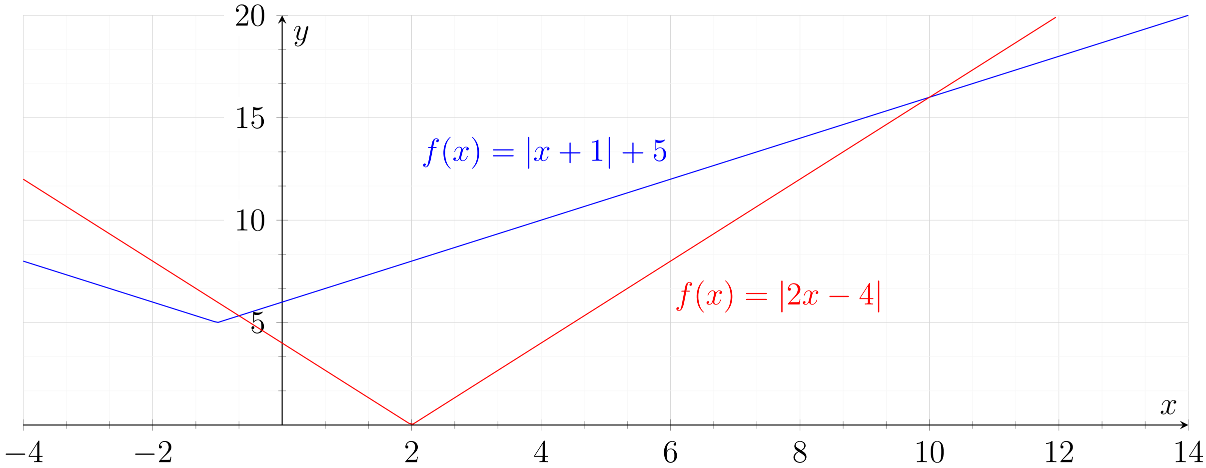
Damit haben wir unsere Lösungsmenge, denn wir bekommen für den Fall $-(x < -1)$ ein Ergebnis, welches dem Kriterium $x < -1$ entspricht.

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

Durch einsetzen dieser x-Koordinate, finden wir auch den dazugehörigen y-Wert: $P\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$:

10.4.1 Betragsgleichungen mit mehreren Beträgen

Haben wir mehrere Beträge in unserer Gleichung, haben wir auch mehrere Fälle zu betrachten. Schon wir uns das an einem Beispiel an, indem wir die Schnittpunkte von $f(x) = |x+1| + 5$ und $f(x) = |2x-4|$ suchen.



Zunächst setzen wir die Funktionen wieder gleich.

$|x+1|+5=|2x-4|$

Die Fälle müssen wir alle einzeln betrachten. Das heißt, wir haben insgesamt 4 Fälle. Wir schauen uns zunächst die beiden Fälle eines Betrages an und dann innerhalb dieser Fälle betrachten wir die Fälle für den zweiten Betrag.

1. Fall für $|x+1|$: $x \geq -1$ ($x+1$ ist positiv)

$$\begin{aligned} x+1+5 &= |2x-4| \\ x+6 &= |2x-4| \end{aligned}$$

Innerhalb dieses ersten Falles unterscheiden wir jetzt noch einmal für den übrigen Betrag.

> 1. Fall für $|2x-4|$: $x \geq 2$ ($2x-4$ ist positiv)
>
> $$\begin{aligned} x+6 &= 2x-4 \\ x+10 &= 2x \\ 10 &= x \end{aligned}$$
>
> Jetzt müssen wir überprüfen, ob $x \geq 2$ und $x \geq -1$ für $x = 10$ gelten. Das ist der Fall daher haben wir schon mal einen Teil unserer Lösungsmenge. Auf der Grafik kann man auch sehen, dass sich die beiden Graphen dort schneiden.
>
> 2. Fall für $|2x-4|$: $x < 2$ ($2x-4$ ist negativ)
>
> $$\begin{aligned} x+6 &= -(2x-4) \\ x+6 &= -2x+4 \\ 3x+6 &= 4 \\ 3x &= -2 \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$
>
> Wir überprüfen jetzt wieder, ob $x < 2$ und $x \geq -1$ für $x = -\frac{2}{3}$ gelten. Da das der Fall ist, können wir auch dieses x zu unserer Lösungsmenge hinzufügen.

2. Fall für $|x+1|$: $x < -1$ ($x+1$ ist negativ)

$$\begin{aligned} -(x+1)+5 &= |2x-4| \\ -x+4 &= |2x-4| \end{aligned}$$

1. Fall für $|2x-4|$: $x \geq 2$ ($2x-4$ ist positiv)

In diesem Fall müssen wir gar nicht erst versuchen x auszurechnen, denn es gibt keine Zahl, die sowohl $x \geq 2$, als auch $x < -1$ erfüllt.

2. Fall für $|2x-4|$: $x < 2$ ($2x-4$ ist negativ)

$$\begin{aligned} -x+4 &= -(2x-4) \\ -x+4 &= -2x+4 \\ -x &= -2x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben jetzt $x = 0$ als Lösung, jedoch erfüllt dieses Ergebnis nicht die Bedingung $x < -1$ und ist daher auch nicht in der Lösungsmenge enthalten.

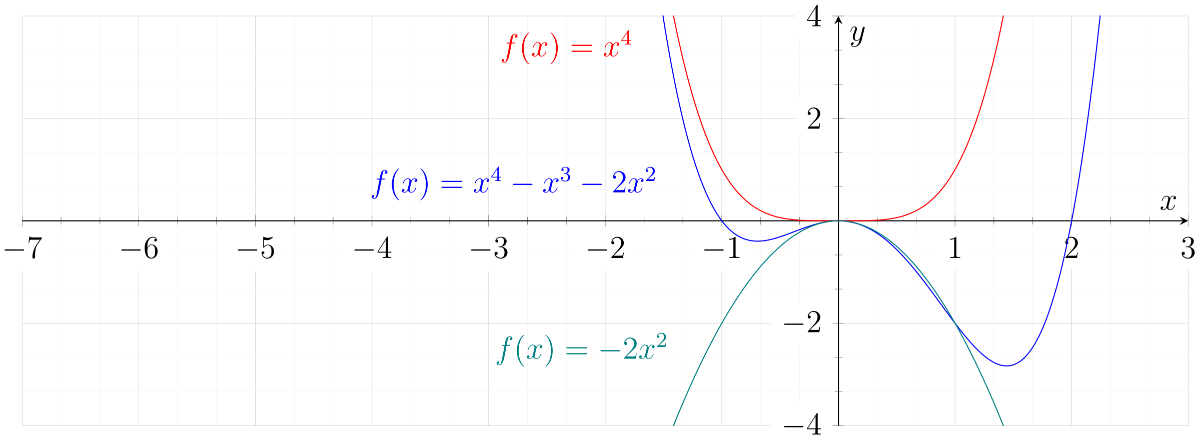
Abschließend können wir feststellen, dass unsere Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{10; -\frac{2}{3}\right\}$ ist. Durch Einsetzen in eine der beiden Funktionen erhalten wir dann unsere Schnittpunkte $P_1(10 \mid 16)$ und $P_2\left(-\frac{2}{3} \mid \frac{16}{3}\right)$.

10.5 Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen)

Polynome sind die Summe aus den Vielfachen von Monomen. Eine Polynomfunktion oder auch ganzrationale Funktion genannt mit dem Koeffizienten a_n hat folgende Form:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + 1_0$

Das Verhalten einer Polynomfunktion hängt für $x \to \pm\infty$ vom Summanden mit der höchsten Potenz und für $x \to 0$ vom Summanden mit der niedrigsten Potenz ab.



Nullstellen

Polynome n-ten Grades haben maximal n Nullstellen.

$p(x) = a_{2k-1}x^{2k-1} + ... + a_1x + a_0$, wenn $a_{2k-1} \neq 0$

Polynome ungeraden Grades haben mindestens eine Nullstelle.

$p(x) = a_{2k}x^{2k} + ... + a_2x^2 + a_0$, wenn $a_{2k} \geq 0$ *und* $a_0 > 0$

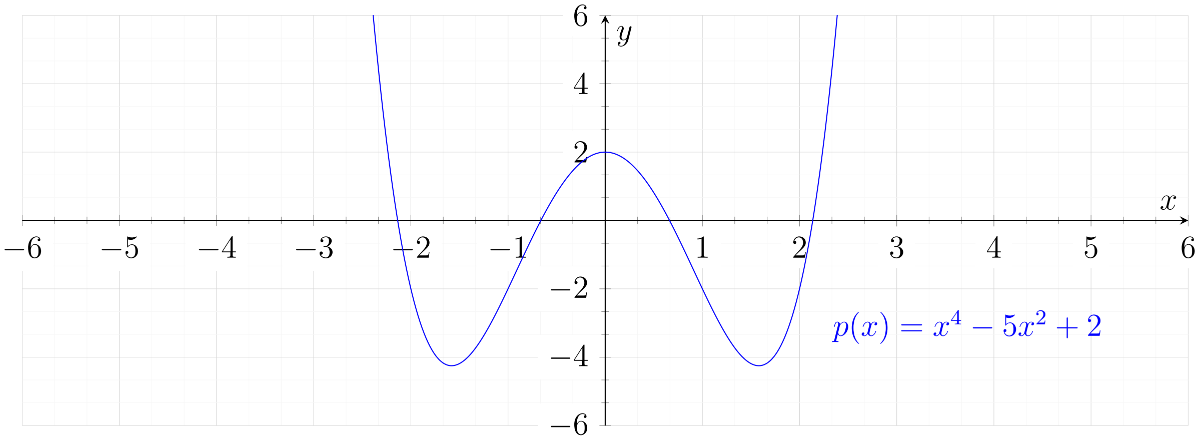
Polynome geraden Grades besitzen manchmal keine Nullstellen.

Symmetrie

Für die Symmetrie der Funktion gilt wie bei Monomen weiterhin, dass bei geraden Potenzen eine gerade Funktion vorliegt und bei ungeraden Potenzen eine ungerade Funktion. Hat ein Polynom jedoch sowohl gerade, wie auch ungerade Exponenten, so kann man beides ausschließen.

10.5.1 Lösen durch Substitution

In diesem Beispiel werden die Nullstellen der Funktion mithilfe von Substitution (S. 53) und anschließendem Anwenden der p-q-Formel (S. 47) ermittelt.



$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^4 - 5x^2 + 2 \\
0 &= x^4 - 5x^2 + 2 \\
0 &= u^2 - 5u + 2 \\
u_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2} \\
u_1 &= \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \\
u_2 &= \frac{5 - \sqrt{17}}{2}
\end{aligned}
$$

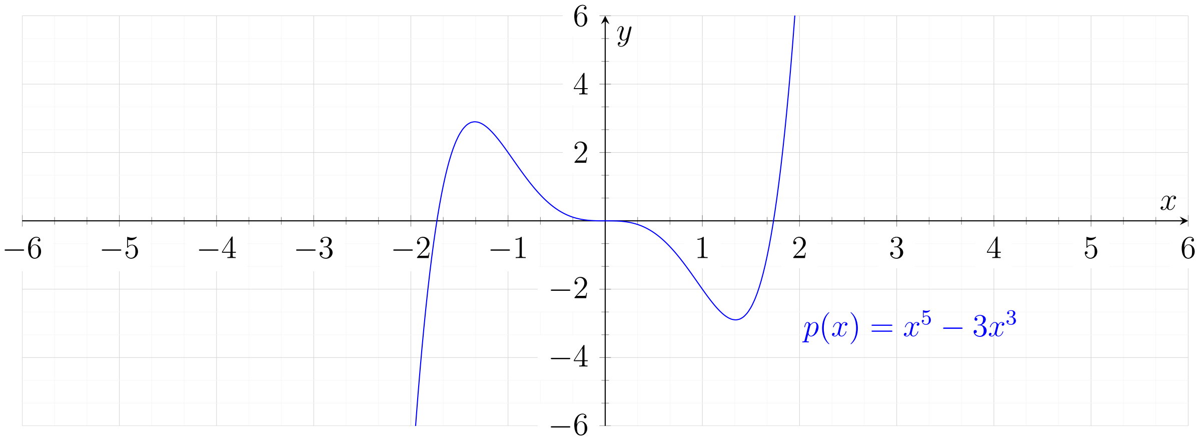
$$
\begin{aligned}
x_{1,2}^2 &= \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \\
x_{1,2}^2 &= \pm 2,135779205
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{3,4}^2 &= \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \\
x_{3,4}^2 &= 0,6621534469
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{L} = \{-2,135779205; -0,6621534469; 0,6621534469; 2,135779205\}$$

10.5.2 Lösen durch Faktorisierung

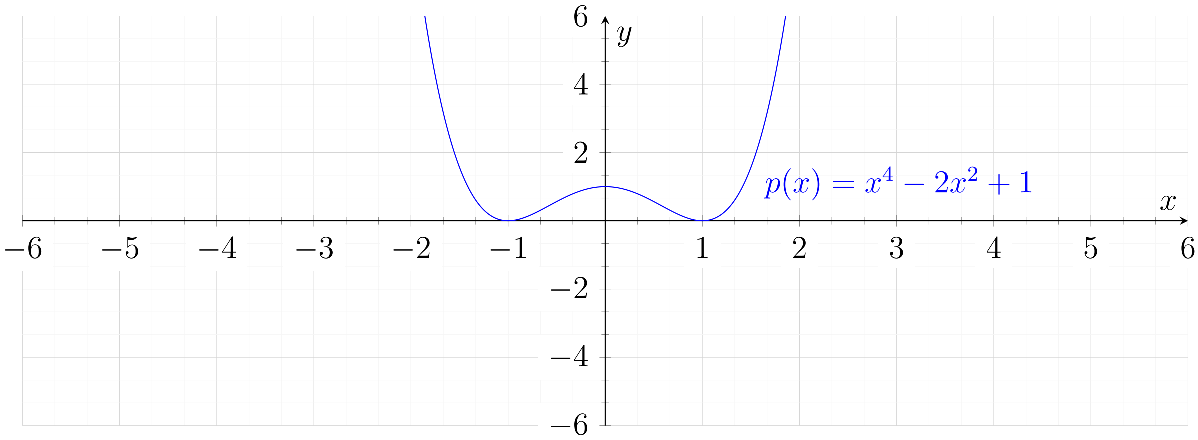
In diesem Beispiel werden die Nullstellen der Funktion mithilfe von Faktorisierung durch Ausklammern (S. 52) ermittelt.



$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^5 - 3x^3 \\
0 &= x^5 - 3x^3 \\
0 &= x^2(x^2 - 3) \\
0 &= x^2(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}) \\
\mathbb{L} &= \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}
\end{aligned}
$$

10.5.3 Lösen mit binomischen Formeln

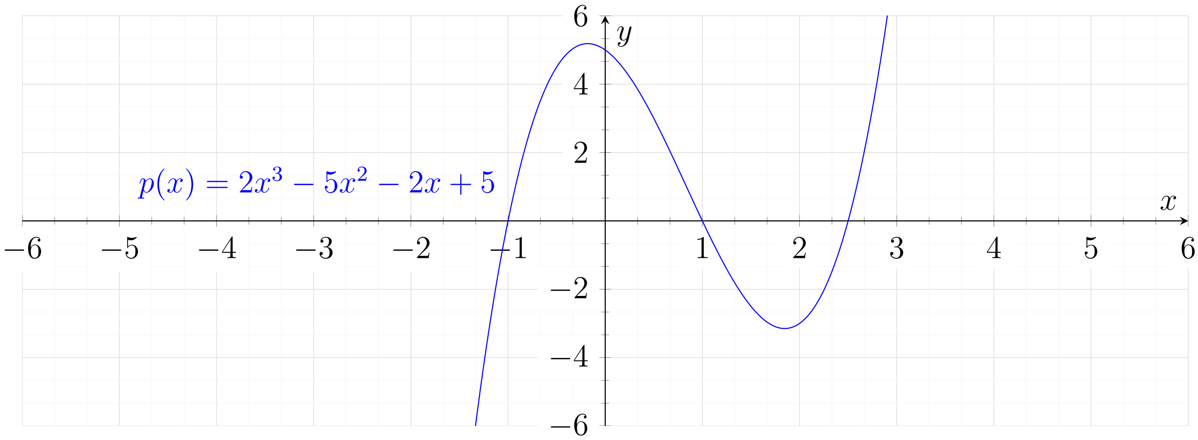
In diesem Beispiel wird Funktion mithilfe der binomischen Formeln (S. 48) so vereinfacht, dass man die Nullstellen ganz einfach ablesen kann.



$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 4x^2 + 1 \\ 0 &= x^4 - 4x^2 + 1 \\ 0 &= (x^2 - 1)^2 \\ x &= \pm 1 \\ \mathbb{L} &= \{-1; 1\} \end{aligned}$$

10.5.4 Lösen durch Polynomdivision

Wenn alle anderen Stränge reißen, ist man leider gezwungen die Polynomdivision durchzuführen. Um damit beginnen zu können, braucht man aber mindestens eine Nullstelle, die man durch Raten findet. Für das Beispiel unten finden wir so heraus, dass eine Nullstelle $x_1 = 1$ ist. Jetzt stellen wir $x = 1$ nach 0 um und erhalten $0 = x - 1$. Anschließend teilen wir unser Polynom durch $x - 1$.



$(2x^3 - 5x^2 - 2x + 5) : (x - 1)$

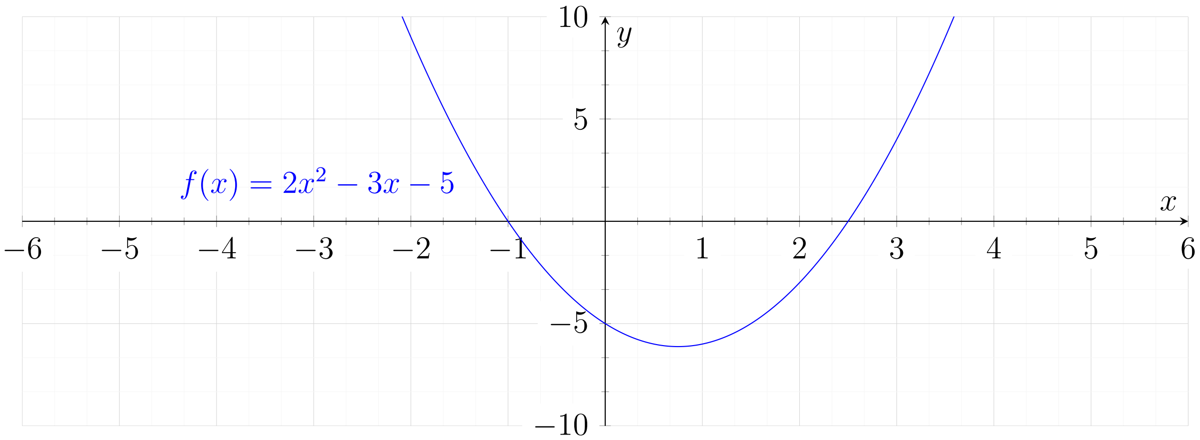
Zunächst teilt man den Term mit der höchsten Potenz $2x^3$ durch x und erhält $2x^2$. Das ist der erste Teil unseres Ergebnisses.

$(2x^3 - 5x^2 - 2x + 5) : (x - 1) = 2x^2 ...$

Jetzt muss man zurück multiplizieren, indem man den Term $2x^2$, den wir gerade bekommen haben, mit unserem ursprünglichen Divisor $x - 1$ multiplizieren. Das Ergebnis ziehen wir von unserem Polynom ab und holen anschließend den nächsten Ausdruck runter. Diesen Prozess wiederholen wir jetzt so oft, wie möglich.

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5\big) : \big(x - 1\big) = 2x^2 - 3x - 5 \\
\underline{\;-2x^3 + 2x^2\;} \\
\qquad\quad -3x^2 - 2x \\
\qquad\quad \underline{\;\;3x^2 - 3x\;} \\
\qquad\qquad\quad -5x + 5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\;\;5x - 5\;} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

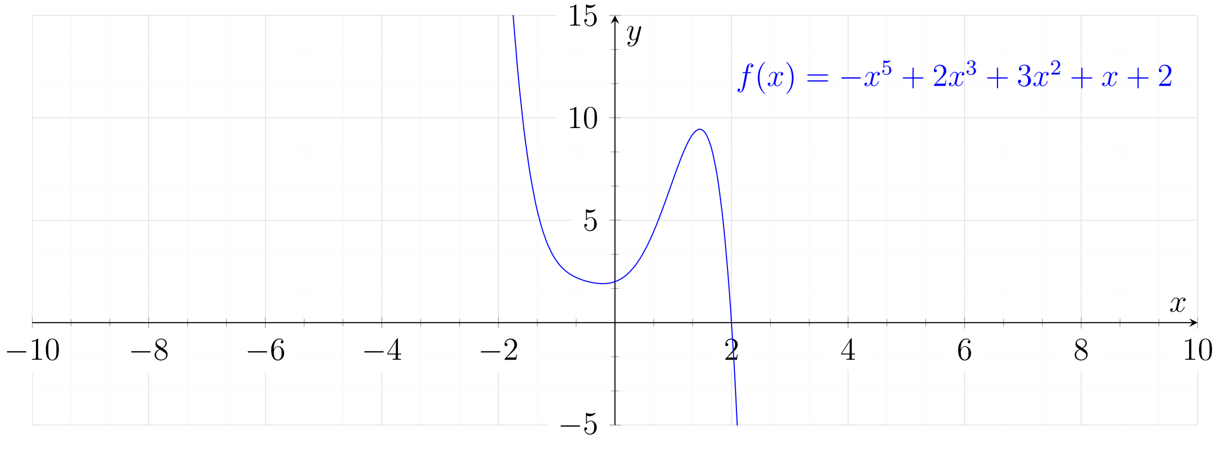
Mit der Funktion, die wir jetzt haben, können wir ganz einfach die restlichen Nullstellen errechnen.



$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 3x - 5 \\
0 &= 2x^2 - 3x - 5 \\
0 &= x^2 - 1,5x - 2,5 \\
x_{1,2} &= \frac{1,5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1,5}{2}\right)^2 + 2,5} \\
x_1 &= 2,5 \\
x_2 &= -1 \\
\mathbb{L} &= \{-1; 1; 2,5\}
\end{aligned}
$$

10.5.5 Grenzverhalten von ganzrationalen Funktionen

Hat man eine Funktion wie z.B. $f(x) = -x^5 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2$ und untersucht, wie sie sich gegen (minus) Unendlich verhält, würde man intuitiv sagen, sie nähert sich (minus) Unendlich an. Hier soll es darum gehen, wie man das auch rechnerisch herausfinden kann und sicher unterscheidet, ob nun plus oder minus Unendlich richtig ist. Der Trick bei Funktionen dieser Form ist es, das x mit dem höchsten Exponenten auszuklammern.



$$\lim_{x\to\infty} -x^5 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2$$
$$\lim_{x\to\infty} x^5(\frac{-x^5}{x^5} + \frac{2x^3}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} + \frac{x}{x^5} + \frac{2}{x^5})$$
$$\lim_{x\to\infty} x^5(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^5})$$

Wir sehen, dass sich die Brüche in der Klammer alle Null annähern, somit bleibt dort nur noch -1. Währenddessen nähert sich x^5 Unendlich an. Multipliziert mit -1 ergibt das dann minus Unendlich.

$$\begin{aligned}
&\infty^5(-1 + \frac{2}{\infty^2} + \frac{3}{\infty^3} + \frac{1}{\infty^4} + \frac{2}{\infty^5})\\
=&\infty^5(-1 + 0 + 0 + 0 + 0)\\
=&-\infty
\end{aligned}$$

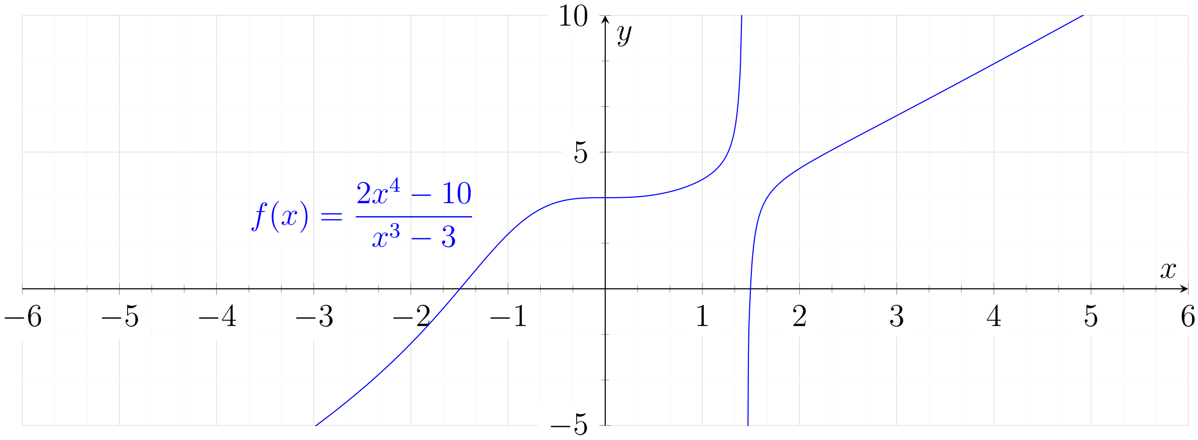
Dasselbe kann man jetzt natürlich auch für $x \to -\infty$ testen.

$$\begin{aligned}
&-\infty^5(-1 - \frac{2}{\infty^2} - \frac{3}{\infty^3} - \frac{1}{\infty^4} - \frac{2}{\infty^5})\\
=&-\infty^5(-1 - 0 - 0 - 0 - 0)\\
=&\infty
\end{aligned}$$

Hinweis: Wenn man mit $x \to (-)\infty$ arbeitet, setzt man ∞ normalerweise nicht in die Funktion ein. Hier habe ich es einmal gemacht, damit man das Ergebnis besser nachvollziehen kann. Wenn man ausführlicher arbeiten will/muss, kann man den Limes von jedem Term einzeln aufstellen, um das Endergebnis zu begründen.

10.6 (Gebrochen)rationale Funktionen

Wenn wir von (gebrochen)rationalen Funktionen reden, meinem wir eine Funktion mit einem Polynom im Nenner eines Bruches. $f(x) = \frac{2}{x^3}$ ist z.B. eine rationale Funktion, $f(x) = \frac{x^3}{2}$ jedoch nicht.



Das Besondere an rationalen Funktionen der Form $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist, dass wir zum Bestimmen von Nullstellen und Definitionslücken den Zähler und Nenner einzeln betrachten können. Mithilfe des Zählers bestimmen wir ganz einfach Nullstellen der Funktion.

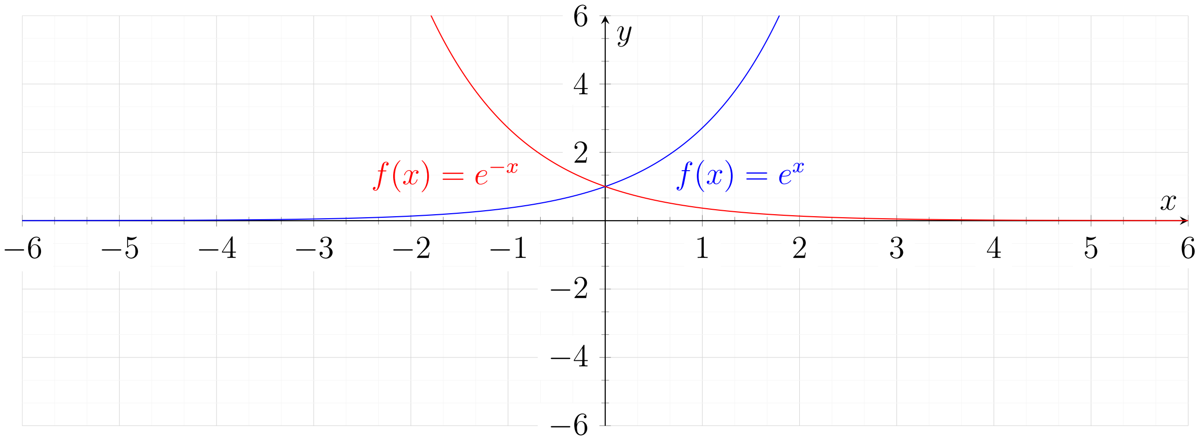
$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
0 &= 2x^4 - 10 \\
10 &= 2x^4 \\
5 &= x^4 \\
x &= \pm\sqrt[4]{5} \\
\mathbb{L} &= \{-\sqrt[4]{5}; \sqrt[4]{5}\}
\end{aligned}
$$

Mithilfe des Nenners bestimmen wir Definitionslücken.

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 0 \\
0 &= x^3 - 3 \\
3 &= x^3 \\
x &= \sqrt[3]{3} \\
\mathbb{L} &= \{\sqrt[3]{3}\}
\end{aligned}
$$

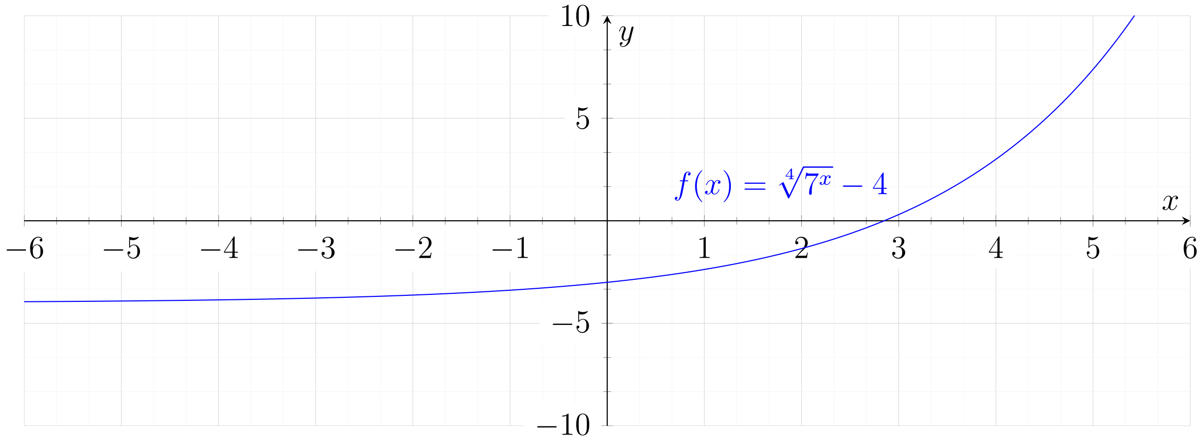
10.7 Exponentialfunktionen

Eine Funktion der Form $f(x) = a^x$ wird als Exponentialfunktion bezeichnet, denn die Variable x steht im Exponenten. Speziell wird die Funktion $f(x) = e^x$ als *natürliche Exponentialfunktion* bezeichnet.



10.7.1 Lösen von Exponentialgleichungen

Zum Lösen von Exponentialgleichungen brauchen wir in der Regel den Logarithmus (S. 50). Wie das funktioniert, sehen wir an dem Beispiel hier drunter. Dabei ist die Nullstelle der Funktion zu bestimmen. In diesem Beispiel sollte man sich außerdem nochmal daran erinnern, dass $\sqrt[n]{x}$ dasselbe ist, wie $x^{\frac{1}{n}}$.

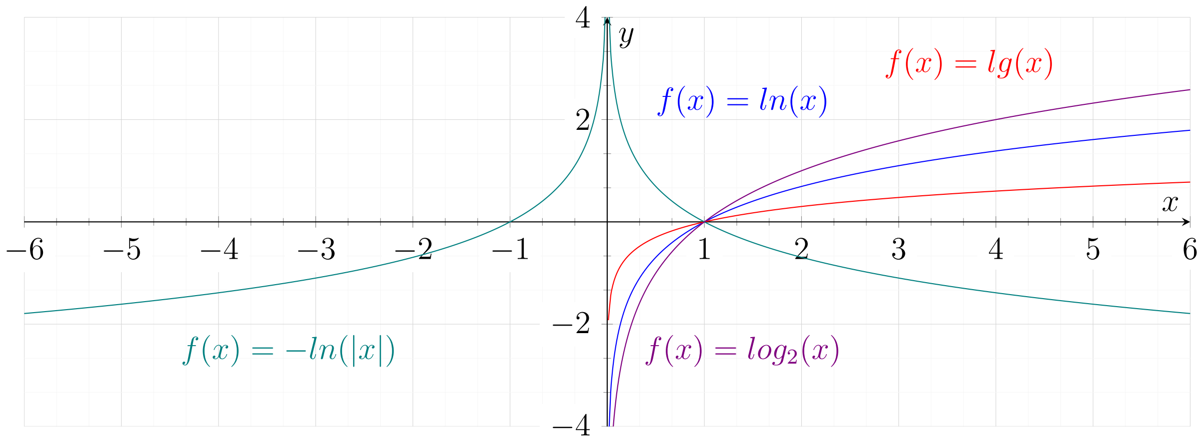


$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[4]{7^x} - 4 && \\
0 &= \sqrt[4]{7^x} - 4 && \mid +4 \\
4 &= 7^{\frac{x}{4}} && \mid log_7() \\
0,7124143742 &= \frac{x}{4} && \mid \cdot 4 \\
x &= 2,849657497 &&
\end{aligned}
$$

$\mathbb{L} = \{2,849657497\}$

10.8 Logarithmusfunktionen

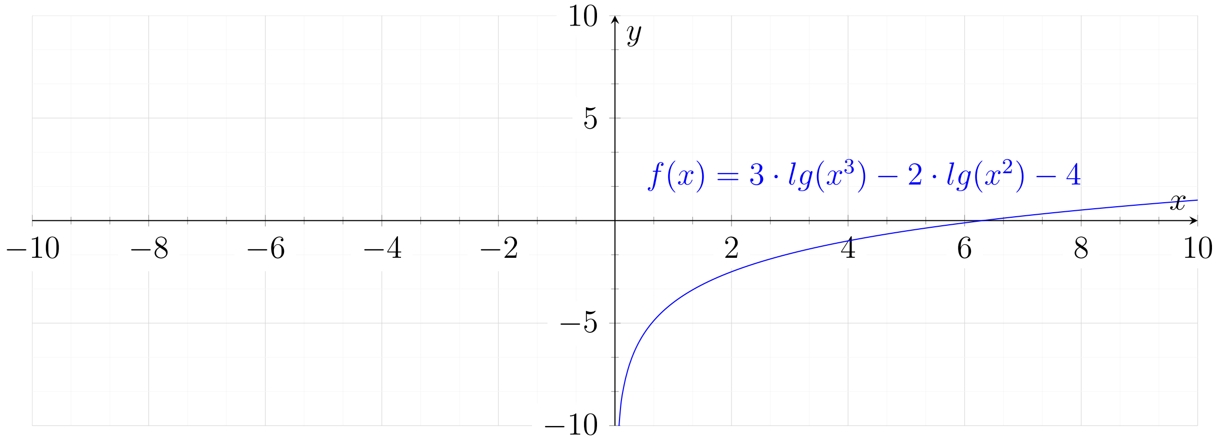
Funktionen wie $f(x) = log_3(x^2)$ werden als Logarithmusfunktionen bezeichnet, da sie einen oder mehrere Logarithmen beinhalten. Speziell bezeichnet man $f(x) = ln(x)$ als *natürliche Logarithmusfunktion* und $f(x) = lg(x)$ als *dekadische Logarithmusfunktion*.



10.8.1 Lösen von Logarithmusgleichungen

Gesucht wird hier die Nullstelle einer Logarithmusfunktion. Hinweis: Um einen Logarithmus aufzulösen, musst du beide Seiten der Gleichung als Exponent zur Basis des jeweiligen Logarithmus setzen. Um dorthin zu kommen, hilft es enorm, die Gleichung zunächst umzuformen.

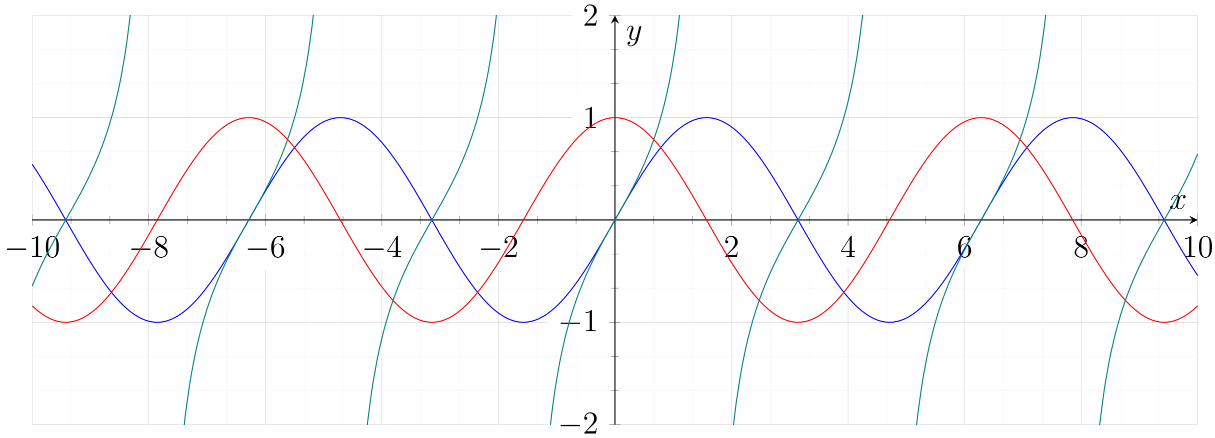
Wenn du Schwierigkeiten mit den Umformungen in diesem Beispiel hast, schaue dir noch einmal die Potenzgesetze (S. 48) und Logarithmusgesetze (S. 50) an.



$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3 \cdot lg(x^3) - 2 \cdot lg(x^2) - 4 \\
0 &= 3 \cdot lg(x^3) - 2 \cdot lg(x^2) - 4 \\
0 &= lg((x^3)^3) - lg((x^2)^2) - 4 && \mid +4 \\
lg\left(\frac{x^9}{x^4}\right) &= 4 \\
lg(x^5) &= 4 && \mid 10^{()} \\
10^{lg(x^5)} &= 10^4 \\
x^5 &= 10^4 && \mid \sqrt[5]{\ } \\
x &= 6,309573445 \\
\mathbb{L} &= \{6,309573445\}
\end{aligned}
$$

10.9 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen oder auch Winkelfunktionen genannt, beinhalten die aus der Geometrie (S. 66) bekannten winkelabhängigen Funktionen, wie Sinus, Kosinus und Tangens. Dabei sind diese Funktionen hier allerdings abhängig von der Variable x und damit im Bogenmaß, nicht im Gradmaß. Beim Taschenrechner muss man darauf achten, dass der richtige Modus eingestellt ist, ansonsten kann es sein, dass man versehentlich im falschen Maß rechnet. Auf dem CASIO fx-86DE PLUS, drückt man Shift, dann Setup und wählt dort die 3:Deg (engl. degree) für Gradmaß oder 4:Rad (engl. radian) fürs Bogenmaß.

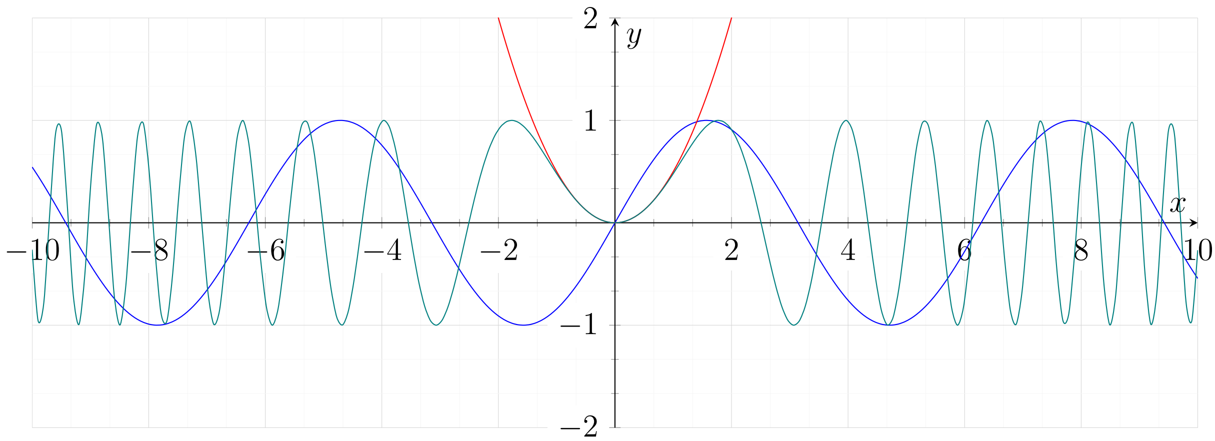


$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x)$

Anmerkung: Die Nullstellen des Sinus sind die Extremstellen des Kosinus und umgekehrt. Ebenso haben Sinus und Tanges dieselben Nullstellen.

10.10 Verkettete Funktionen

Verkettungen sind eigentliche keine eigene Funktionsart, sondern eine Möglichkeit Funktionen durch Zusammensetzung zu transformieren. Man schreibt das als $f \circ g$ ("f nach g"). Man spricht hier bei g auch von der *inneren Funktion*, da sie als Argument in die *äußere Funktion* f eingesetzt wird. $f \circ g$ wäre also dasselbe, wie $f(g(x))$. Für Abbildungen (S. 7) ganz allgemein, nennt man Verkettungen auch *Kompositionen*.



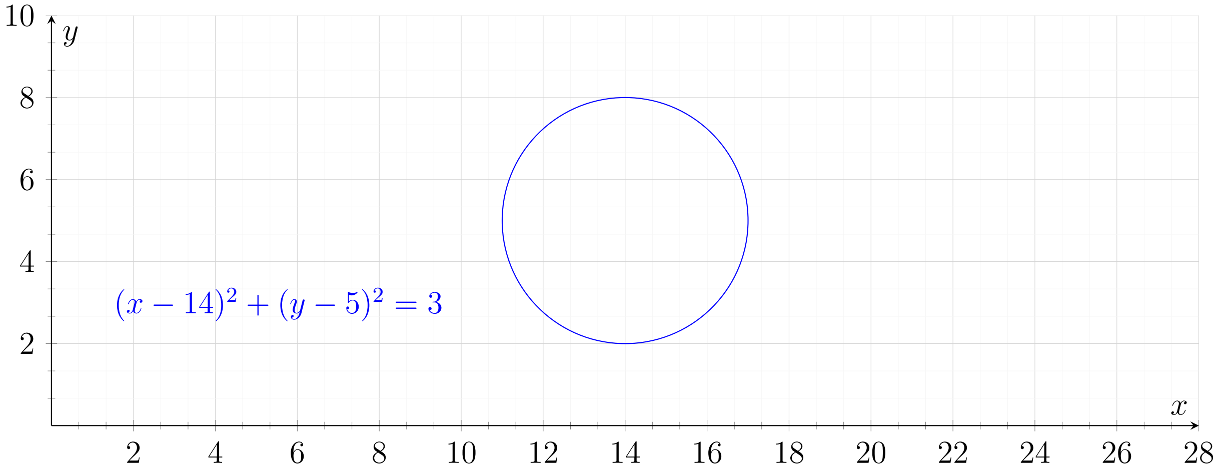
$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \frac{x^2}{3}$ $(f \circ g)(x) = \sin(\frac{x^2}{3})$

10.11 Kreisgleichungen

Bei Funktionen ist es so, dass jeder Abszisse (x-Achsenwert) genau eine Ordinate (y-Achsenwert) zugeordnet werden kann. Das ist eine Besonderheit von Funktionen und nicht des Koordinatensystems an sich, da Funktionen Abbildungen (S. 7) sind. Im Koordinatensystem können wir noch viele andere Gebilde darstellen, so z.B. auch einen Kreis.

Für die Koordinatenform eines Kreises mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $M(x_m \mid y_m)$ gilt folgende Notation:

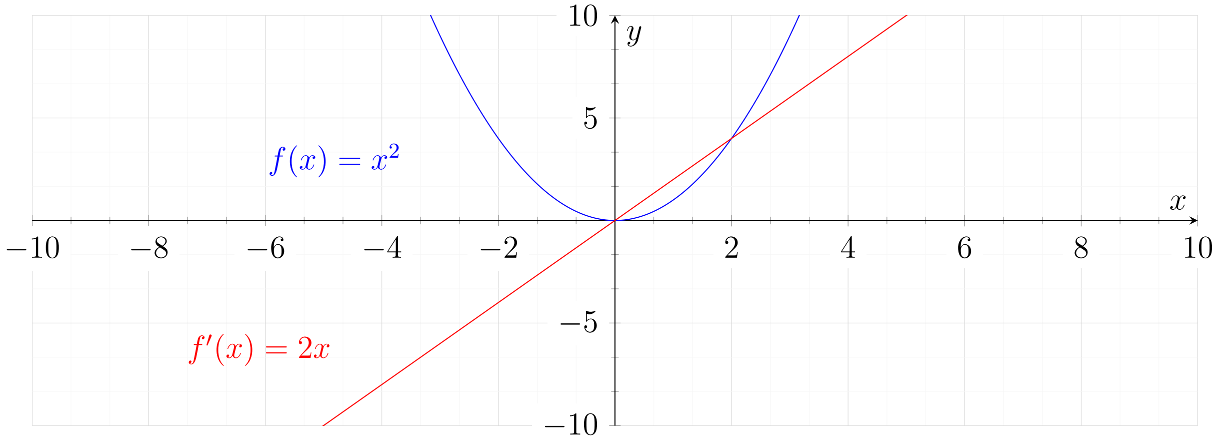
$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$



11 Differenzialrechnung

11.1 Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion gibt Aufschluss über ihr Monotonieverhalten (S. 82) und die Veränderung ihres Anstiegs, denn die Werte der Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ entsprechen dem Anstieg einer Tangente an derselben Stelle von $f(x)$. Das kann man auch an dem unten stehenden Beispiel erkennen. Um eine Potenzfunktion abzuleiten, nehmen wir den Exponenten von jedem x und holen ihn hinunter, um ihn vor das jeweilige x zu schreiben. Anschließend reduzieren wir den Exponenten um 1. Dabei ist zu beachten, dass die Ableitung einer reinen Zahl ohne x immer 0 ist und, dass die Ableitung von $x = 1$ ist, denn x^0 entspricht 1.



Hinweis: Um Fehler zu vermeiden, sollte man zunächst alle Terme so umformen, dass man einfach ableiten kann. Dafür solltest du die wichtigsten Rechengesetze (S. 46) beherrschen.

Ableitungsregeln

Neben der oben genannten Ableitungsregel von Funktionen, gibt es noch einige andere, die einem das Leben erleichtern:

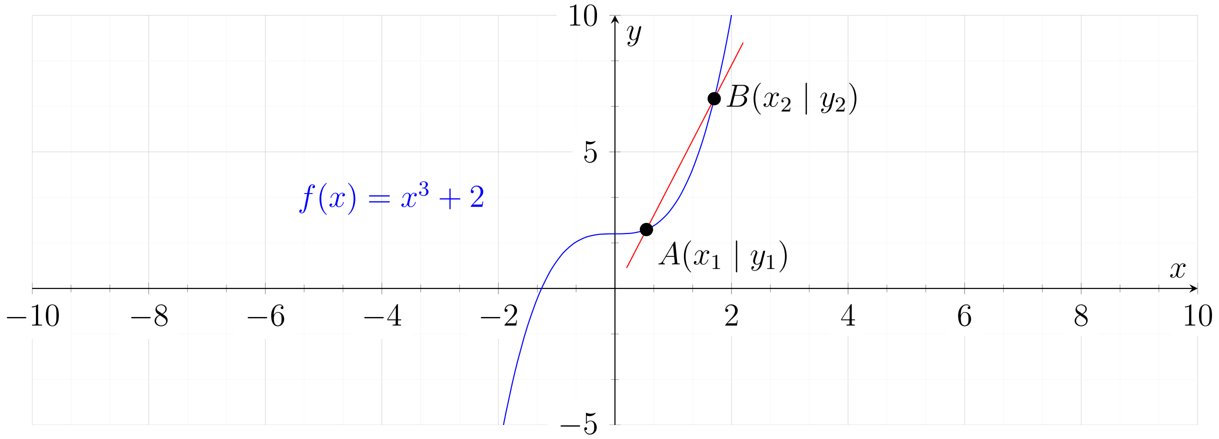
c	$\rightarrow 0$	$\sin(x)$	$\rightarrow \cos(x)$
x^n	$\rightarrow nx^{n-1}$	$\cos(x)$	$\rightarrow -\sin(x)$
$\sqrt{x}$	$\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\tan(x)$	$\rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	$\rightarrow e^x$	$u(x) \cdot v(x)$	$\rightarrow u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$ln(x)$	$\rightarrow \frac{1}{x}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\rightarrow \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
$a^x (a > 0)$	$\rightarrow a^x \cdot \ln a$	$(u \circ v)(x)$	$\rightarrow u'(v(x)) \cdot v'(x)$
$\frac{1}{x^n}$	$\rightarrow -\frac{n}{x^{n+1}}$		

Tipp: Solltest du es einmal nicht schaffen, eine Funktion mit den Ableitungsregeln abzuleiten oder diese vergessen haben, kannst du die Ableitung immer noch mithilfe des Differentialquotienten (S. 103) bestimmen.

11.1.1 Differenzenquotient

Um die Steigung einer Sekante zwischen zwei Punkten zu berechnen, benutzen wir den Differenzenquotient. Dieser Quotient berechnet sich indem man x und y der beiden Punkte jeweils voneinander abzieht und dann y durch x teilt.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Allgemeiner ausgedrückt, gilt die Formel:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dabei ist h eine beliebige Zahl, mit deren Hilfe wir uns jetzt an die genaue Steigung in einem Punkt annähern können. Je kleiner wir den Abstand h wählen, desto genauer kommen wir an die Tangente oder auch Steigung der Stelle x.

11.1.2 Differentialquotient

Der Differenzenquotient erlaubt es uns die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle zu bestimmen. Im Abschnitt über den Differenzenquotient (S. 103) haben wir schon geklärt, dass wir näher an den Anstieg an der Stelle x kommen, wenn wir den Abstand h verringern. Der kleinstmögliche Abstand wäre theoretisch 0. Das geht allerdings nicht, da wir nicht $h = 0$ in die Formel für den Differenzenquotient einsetzen und den Divisor somit gleich 0 setzen dürfen. Um ums zu überlegen, was also für ein minimal kleines h passieren würde, brauchen wir den Limes.

$$\lim_{h \to 0} m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

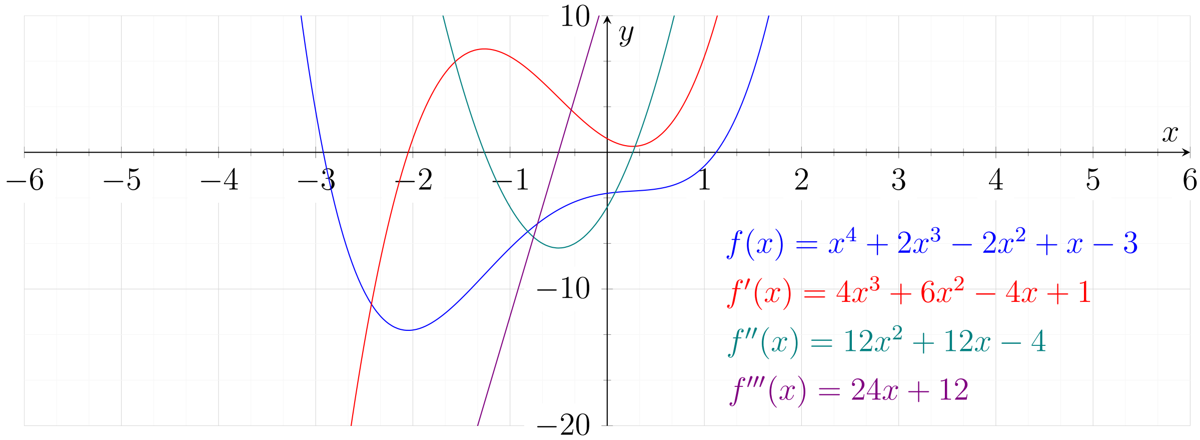
Da setzen wir jetzt unsere Funktion $f(x) = x^3 + 2$ ein und formen solange um, bis wir das h aus dem Divisor kriegen, damit wir für h die Zahl 0 einsetzen können. Hinweis: Nachdem du für h die Zahl 0 eingesetzt hast, darfst du nicht mehr Limes davor schreiben!

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + 2 - x^3 - 2}{h} \\
=&\lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 2xh^2 + h^3 + 2 - x^3 - 2}{h} \\
=&\lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 2xh^2 + h^3}{h} \\
=&\lim_{h \to 0} (3x^2 + 2xh + h^2) \\
=&3x^2
\end{aligned}$$

Das, was wir jetzt haben, ist die erste Ableitung $f'(x)$. Sofern nicht anders gewünscht, kann man diese oft auch wesentlich leichter bestimmen, indem man die Ableitungsregeln (S. 102) kennt.

11.1.3 Extrem- und Wendepunkte

Leitet man die Ableitung einer Funktion noch mal ab, erhält man die zweite Ableitung $f''(x)$. Ebenso verhält es sich mit der dritten Ableitung und allen weiteren. In der folgenden Abbildung sieht man eine Funktion und ihre erste, zweite sowie dritte Ableitung.



Man spricht bei den Bedingungen zur Bestimmung besonderer Punkte von notwendigen Bedingungen. Es existieren zudem weitere Bedingungen, mit deren Hilfe man diese Punkt genauer untersuchen kann, die sogenannten hinreichenden Bedingungen. Die obige Abbildung soll helfen, diese Bedingungen nachzuvollziehen.

Notwendige Bedingungen

Wenn $f'(x) = 0$ gilt, dann ist bei x ein Extremal- o. Sattelpunkt von f.

Wenn $f''(x) = 0$ gilt, dann ist bei x ein Wendepunkt von $f(x)$.

Hinreichende Bedingungen

Wenn $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ gilt, besitzt f eine Extremalpunkt bei x.

Wenn $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$ gilt, dann ist bei x ein Minimum von f.

Wenn $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$ gilt, dann ist bei x ein Maximum von f.

Wenn $f''(x) = 0 \wedge f'(x) = 0$ gilt, besitzt f einen Sattelpunkt bei x.

Wenn $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) < 0$ gilt, dann ist bei x eine Links-Rechts-Krümmung.

Wenn $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) > 0$ gilt, dann ist bei x eine Rechts-Links-Krümmung.

Hinweis: Das Zeichen $\wedge$ bedeutet »und«, während $\vee$ »oder« bedeutet.

11.2 Limes: Der Grenzwert

Für manche Funktionen ist es nicht möglich den Werte einer bestimmten Stelle zu errechnen. Manchmal will man auch das Verhalten einer Funktion wissen, wenn x gegen Unendlich geht. In u.a. diesen Fällen braucht man dem Limes. Um den Grenzwert einer Funktion für $x \to a$ zu ermitteln muss man den links- und den rechtsseitigen Grenzwert betrachten. Es gilt Folgendes:

Um zu überprüfen, ob für eine Funktion mit x gegen a ein Grenzwert existiert, schaut man sich jeweils den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert an. Sind diese gleich, so existiert ein Grenzwert. Sind sie unterschiedlich, existiert kein Grenzwert.

Beim Grenzwert setzt man Zahlen ein, die sich in die Richtung von a bewegen. Nehmen wir beispielsweise $f(x) = \frac{1}{x}$. 0 können wir ja nicht für x einsetzen, da wir nicht durch Null teilen dürfen. Was wir aber machen können, ist, sehr kleine Zahlen einzusetzen, um zu schauen, ob wir eine Tendenz feststellen können.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ f(0,1) &= \frac{1}{0,1} = 10 \\ f(00,1) &= \frac{1}{00,1} = 100 \\ f(000,1) &= \frac{1}{000,1} = 1000 \\ \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} &= \infty \end{aligned}$$

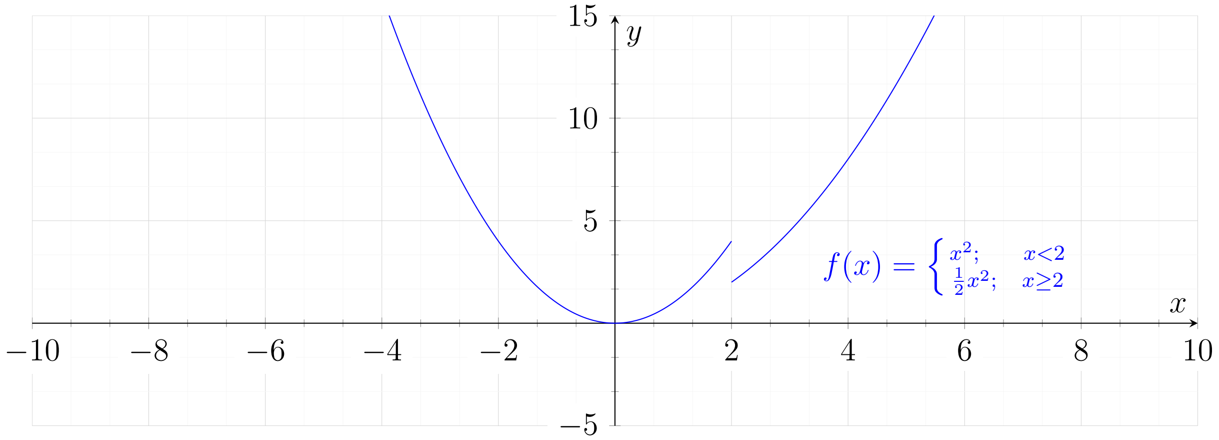
Wir sehen also, dass sich unsere Funktion für x gegen Null Unendlich nähert. Das, was wir uns jetzt angeguckt haben, ist aber nur der , da wir Werte größer als 0 eingesetzt haben und uns somit von rechts angenähert haben. Jetzt machen wir das Ganze noch einmal von links.

$$
\begin{aligned}
f(-1) &= \frac{1}{-1} = -1 \\
f(-0,1) &= \frac{1}{-0,1} = -10 \\
f(-00,1) &= \frac{1}{-00,1} = -100 \\
f(-000,1) &= \frac{1}{-000,1} = -1000 \\
\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} &= -\infty
\end{aligned}
$$

Wir sehen, dass $\infty \neq -\infty$ gilt. Somit haben wir keinen Grenzwert für $x \to 0$. Übrigens gibt es für den links- und rechtsseitigen Grenzwert unterschiedliche Notationen. Ich benutze hier, die Variante mit den diagonalen Pfeilen, da ich finde, dass sie gut darstellt, was man bei der Annäherung mit dem x anstellt.

Linksseitiger Grenzwert	**Rechtsseitiger Grenzwert**
$\lim\limits_{x \to a^-}$ *oder* $\lim\limits_{x \uparrow a}$ *oder* $\lim\limits_{x \nearrow a}$ *oder* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}}$	$\lim\limits_{x \to a^+}$ *oder* $\lim\limits_{x \downarrow a}$ *oder* $\lim\limits_{x \searrow a}$ *oder* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}}$

11.3 Differenzierbarkeit



Was uns an dem obigen Beispiel jetzt speziell interessiert, ist die Stelle $x = 2$. Wir wollen wissen, ob f in dieser Stelle stetig bzw. differenzierbar ist. Das heißt quasi, dass wir wissen wollen, ob man die Funktion zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Aber Achtung: Das ist keine sehr akkurate Definition, denn es gibt auch Funktionen, die stetig sind, obwohl man sie nicht durchzeichnen kann. Deshalb hier die mathematischen Bedingungen, die erfüllt sein müssen.

Wenn eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 folgende Bedingungen erfüllt, so ist sie in dieser Stelle *differenzierbar* bzw. *stetig*.

1. $x_0 \in \mathbb{D}$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Sind die obigen Bedingungen für alle x der Definitionsmenge erfüllt, so spricht man von einer *stetigen Funktion*.

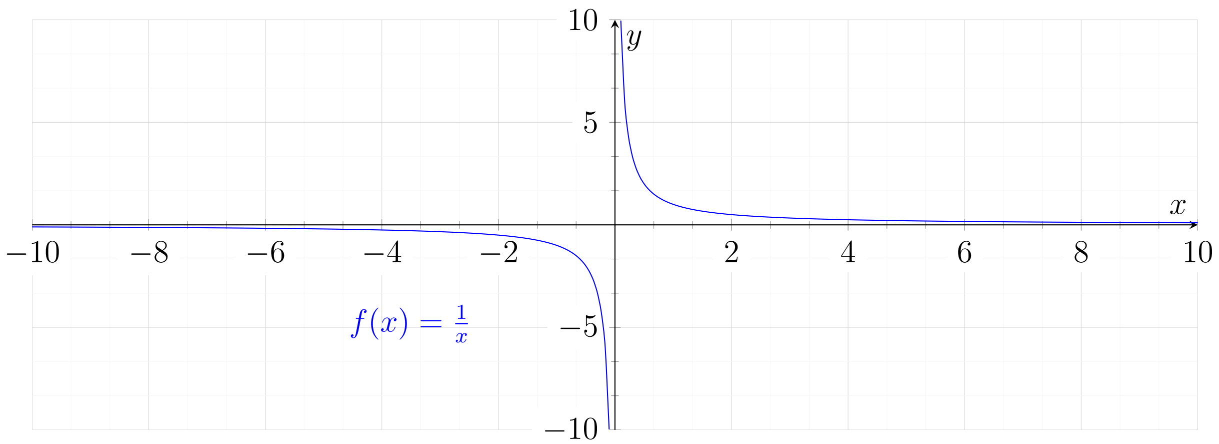
Schauen wir uns das einmal für unser Beispiel an. Die erste Bedingung ist erfüllt, denn für $x = 2$ ist x definiert und es gilt $f(2) = \frac{1}{2}(2)^2 = 2$. Als nächsten prüfen wir die zweite Bedingung.

$$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \nearrow 2} x^2 = 2^2 = 4 \qquad \lim_{x \searrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$$

Unsere zweite Bedingung ist somit nicht erfüllt. Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert sind unterschiedlich und somit existiert an dieser Stelle auch kein Grenzwert. Daher brauchen wir die letzte Bedingung gar nicht erst überprüfen und können es sogar nicht, da uns der Grenzwert fehlt.

11.3.1 Stetige Erweiterung

Eine Funktion wie z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ hat zwar keinen Grenzwert für $x \to 0$, allerdings ist sie trotzdem stetig, da ihr Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die 0 ausschließt. Das ist wichtig zu wissen bei der Bestimmung der Differenzierbarkeit.

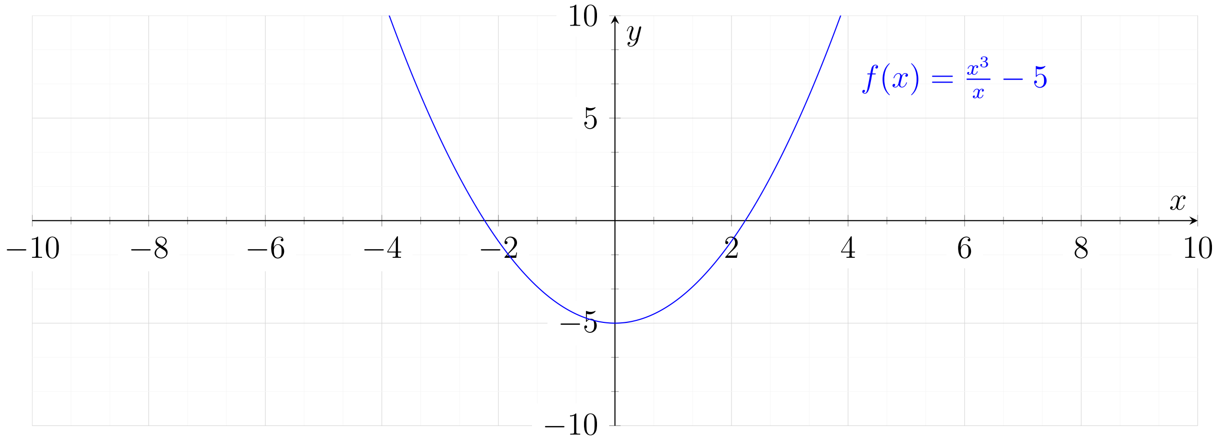


Jetzt kann es aber sein, dass wir gerne die Definitionslücken unserer Funktion definieren wollen. Das geht sogar mithilfe der stetigen Erweiterung, allerdings nicht für jede Lücke. Eine Lücke, die man bestimmen kann, nennt man (be)hebbar. Damit eine Lücke behebbar ist, müssen die Bedingungen für die Differenzierbarkeit gegeben sein, außer der, dass x_0 nicht im Definitionsbereich liegt. Würde x im Definitionsbereich liegen hätten wir natürlich auch keine Lücke.

Logisch. Das Kriterium, dass der Grenzwert dem Funktionswert an der Stelle x_0 entspricht entfällt dementsprechend auch.

> Ist eine Lücke einer Funktion *(be)hebbar*, so sind folgende Bedingungen erfüllt:
>
> 1. $x_0 \notin \mathbb{D}$
>
> 2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert

Für $x \to 0$ bei $f(x) = \frac{1}{x}$ haben wir keinen Grenzwert, somit ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht stetig erweiterbar. Es folgt noch ein Beispiel einer stetig erweiterbaren Lücke.



Diese Funktion verhält sich jetzt wie eine Normalparabel. Leider ist sie für $x = 0$ nicht definiert, da wir nicht durch 0 teilen dürfen, also schauen wir, ob wir sie an dieser Stelle stetig erweitern können. In diesem Fall können wir uns den Test für links- und rechtsseitigen Grenzwert sparen, denn ich denke, man erkennt hier, dass wir einen Grenzwert haben.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} - 5 &= \lim_{x \to 0} (x^2 - 5) \\ &= -5\end{aligned}$$

Mit dem Grenzwert können wir jetzt eine zusammengesetzte Funktion aufstellen.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ -5 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

11.4 Tangentengleichung

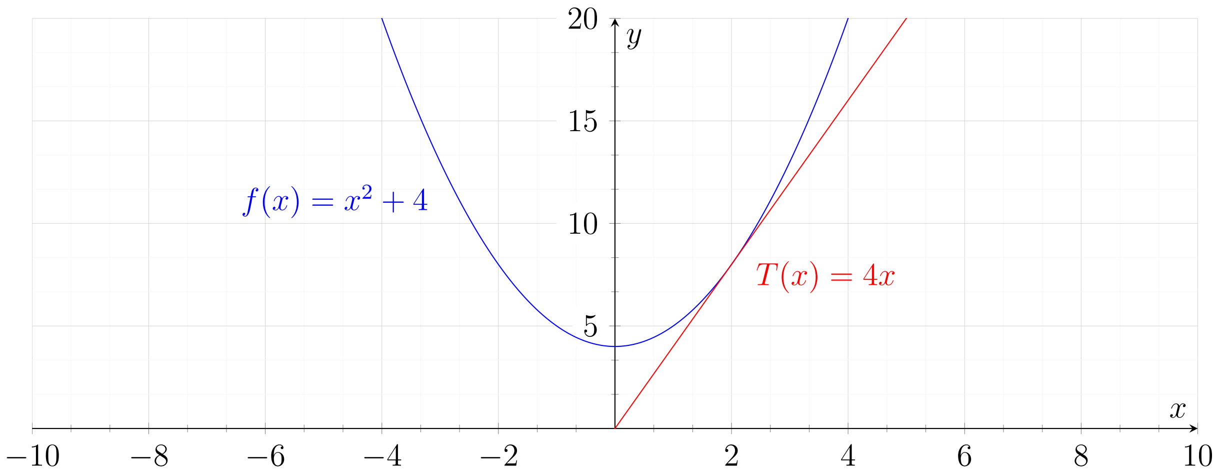
Wenn man Extremal- und Wendepunkte untersucht, kann es vorkommen, dass man eine Tangente für diese Punkte bestimmen soll. Das ist nicht schwer, denn man muss nur zwei Konstanten bestimmen. Da eine Tangente eine lineare Funktion ist, hat sie die grundlegende Form $T(x) = mx + n$. Sagen wir, wir wollen die Tangentengleichung an der Stelle $x = 2$ der Funktion $f(x) = x^2 + 4$ aufstellen. Um m zu bestimmen brauchen wir den Anstieg an der Stelle x. Diesen können wir mit der ersten Ableitung an der Stelle x ermitteln.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4 \\ f'(x) &= 2x \\ f'(2) &= 4 \end{aligned}$$

Das können wir schon mal in unsere Gleichung einsetzen und erhalten $T(x) = 4x + n$. Jetzt fehlt uns noch n, welches wir durch Umstellen bestimmen können, nachdem wir x und $T(x)$ eingesetzt haben. Gesucht ist ja die Tangente an der Stelle $x = 2$. Den x-Wert haben wir also schon mal und $f(x)$ bzw. $T(x)$ (Punkt existiert auf beiden Funktionen) können wir ganz einfach durch Einsetzen in die Funktion berechnen.

$$\begin{aligned} f(2) &= 8 = T(2) \\ T(2) &= 4 \cdot 2 + n \\ 8 &= 4 \cdot 2 + n \\ n &= 0 \end{aligned}$$

Da $n = 0$ ist, können wir es weglassen und haben bereits unsere vollständige Tangentengleichung. Hier nochmal eine Abbildung, um zu zeigen, dass das Ergebnis auch wirklich richtig ist.



11.5 Kurvendiskussion

In einer Kurvendiskussion untersucht man verschiedene Eigenschaften einer Funktion. Wie man diese Eigenschaften jeweils untersucht wird an anderen Stellen erklärt, die auch noch mal genannt werden. Im Folgenden wird einmal eine komplette Kurvendiskussion beispielhaft durchgeführt. Da man normalerweise keine Abbildung zur Verfügung hat, weil man die Funktion selber skizzieren soll, gibt es den Graphen der Funktion erst am Ende. Die zu untersuchende Funktion ist:

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$$

11.5.1 Symmetrie

Für diesen Teil der Kurvendiskussion solltest du wissen, wie man die Symmetrie (S. 84) einer Funktion bestimmt.

Aufgabe:
Bestimme begründet, ob die Funktion gerade, ungerade oder weder noch ist.

Lösung:
Dazu müssen wir $f(-x)$ betrachten. Ist es gleich $f(x)$ haben wir eine gerade Funktion, ist es gleich $-f(x)$ haben wir eine ungerade Funktion, ansonsten haben wir weder noch.

$$f(-x) = (-x)^5 - 3 \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)$$
$$f(-x) = -x^5 + 3x^3 - 2x$$
$$-f(x) = -(x^5 - 3x^3 + 2x)$$
$$-f(x) = -x^5 + 3x^3 - 2x$$

Da $f(-x) = -f(x)$ gilt, liegt hier eine ungerade Funktion vor.

11.5.2 Nullstellen

Für diesen Teil der Kurvendiskussion solltest du wissen, wie man Gleichungen (S. 52) lösen kann.

Aufgabe:
Bestimme alle Nullstellen der Funktion.

Lösung:

$$\begin{aligned}
& x^5 - 3x^3 + 2x = 0 && \mid \text{Faktorisierung durch Ausklammern von } x \\
\Leftrightarrow\ & x(x^4 - 3x^2 + 2) = 0 && \\
\Rightarrow\ & x^4 - 3x^2 + 2 = 0 && \mid \text{Substitution: } u = x^2 \\
\Rightarrow\ & u^2 - 3u + 2 = 0 && \mid \text{p-q-Formel} \\
\Rightarrow\ & u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2} && \\
\Rightarrow\ & u_1 = 2 && \mid \text{Resubstitution: } u = x^2 \\
\Rightarrow\ & x^2 = 2 && \\
\Rightarrow\ & x_{1,2} = \pm\sqrt{2} && \\
\Rightarrow\ & u_2 = 1 && \mid \text{Resubstitution: } u = x^2 \\
\Rightarrow\ & x^2 = 1 && \\
\Rightarrow\ & x_{3,4} = \pm 1 &&
\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{2}; -1; 0; 1; \sqrt{2}\right\}$$

11.5.3 Schnittpunkt mit y-Achse

Den y-Achsenschnittpunkt zu bestimmen, ist ganz einfach. Man muss nur $x = 0$ einsetzen und das Ergebnis ausrechnen.

Aufgabe:
Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse der Funktion.

Lösung:
In diesem Fall müssen wir eigentlich gar nicht rechnen, da wir bereits wissen, dass bei $x = 0$ eine Nullstelle vorliegt. Trotzdem ist hier noch einmal der rechnerische Nachweis.

$$\begin{aligned} & f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x \\ \Rightarrow \quad & f(0) = 0^5 - 3 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 \\ \Leftrightarrow \quad & f(0) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist der Schnittpunkt mit der y-Achse der Punkt $S(0 \mid 0)$.

11.5.4 Grenzverhalten

Für diesen Teil der Kurvendiskussion solltest du wissen, wie man den Limes (S. 105) benutzt.

Aufgabe:
Bestimme das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.

Lösung:
Zunächst stellen wir die Funktion so um, dass wir den Grenzwert jedes Terms leicht einzeln betrachten können.

$$\begin{aligned} & f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x && \mid x^5 \text{ ausklammern} \\ \Leftrightarrow \quad & = x^5 \left(\frac{x^5}{x^5} - \frac{3x^3}{x^5} + \frac{2x}{x^5} \right) \\ \Leftrightarrow \quad & = x^5 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) \end{aligned}$$

Durch das Umstellen ist der Grenzwert der Funktion wesentlich einfacher zu zeigen.

$$\lim_{x \to -\infty} x^5 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} x^5 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = \infty$$

11.5.5 Extrema

Für diesen Teil der Kurvendiskussion solltest du wissen, wie man Extrema (S. 104) bestimmt.

Aufgabe:
Bestimme alle Extrempunkte der Funktion und gib an, ob es sich jeweils um Maxima oder Minima handelt.

Lösung:
In den folgenden Abschnitten werden wir die Ableitungen benötigen, daher hier einmal alle Funktionen gesammelt:

$$\begin{aligned} & f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x \\ \Rightarrow \quad & f'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 2 \\ \Rightarrow \quad & f''(x) = 20x^3 - 18x \\ \Rightarrow \quad & f'''(x) = 60x^2 - 18 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 2 \\
\Rightarrow \quad & 0 = 5x^4 - 9x^2 + 2 && \mid \text{Substitution: } u = x^2 \\
\Rightarrow \quad & 0 = 5u^2 - 9u + 2 && \mid : 5 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = u^2 - 1,8u + 0,4 && \mid \text{p-q-Formel} \\
\Rightarrow \quad & u_{1,2} = \frac{1,8}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1,8}{2}\right)^2 - 0,4} \\
\Rightarrow \quad & u_1 = \frac{9+\sqrt{41}}{10} && \mid \text{Resubstitution: } u = x^2 \\
\Rightarrow \quad & x^2 = \frac{9+\sqrt{41}}{10} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1,241093237 \\
\Rightarrow \quad & u_2 = \frac{9-\sqrt{41}}{10} && \mid \text{Resubstitution: } u = x^2 \\
\Rightarrow \quad & x^2 = \frac{9-\sqrt{41}}{10} \Rightarrow x_{3,4} = \pm 0,5095955026
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der ermittelten x-Werte, bekommen wir auch die y-Werte für die Punkte.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L} = \{ & (-1,241093237; 0,3082564193), (-0,5095955026; -0,656550059), \\
& (0,5095955026; -0,656550059), (1,241093237; 0,3082564193)\}
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung für Maxima: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Hinreichende Bedingung für Minima: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$

$f''(-1,241093237) = 20 \cdot (-1,241093237)^3 - 18 \cdot (-1,241093237) = -15,89374835 < 0$
$f''(-0,5095955026) = 20 \cdot (-0,5095955026)^3 - 18 \cdot (-0,5095955026) = 6,526006628 > 0$

Da unsere Funktion ungerade ist, können wir darauf schließen, dass die Extrema auf der anderen Seite der y-Achse genau gegenteilig sind. Daher gilt also:

$$
\begin{aligned}
x = -1,241093237 \Rightarrow & \quad \text{Maximalstelle} \\
x = -0,5095955026 \Rightarrow & \quad \text{Minimalstelle} \\
x = 0,5095955026 \Rightarrow & \quad \text{Maximalstelle} \\
x = 1,241093237 \Rightarrow & \quad \text{Minimalstelle}
\end{aligned}
$$

11.5.6 Wendepunkte

Für diesen Teil der Kurvendiskussion solltest du wissen, wie man Wendepunkte (S. 104) bestimmt.

Aufgabe:
Bestimme alle Wendepunkte der Funktion und gib ihr Krümmungsverhalten an.

Lösung:
Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
& f''(x) = 20x^3 - 18x \\
\Rightarrow \quad & 0 = 20x^3 - 18x && \mid \text{Faktorisierung durch Ausklammern von } x \\
\Rightarrow \quad & 0 = x(20x^2 - 18) && \mid \text{Ein Wendepunkt ist } x_1 = 0 \\
\Rightarrow \quad & 0 = 20x^2 - 18 && \mid +18 \\
\Leftrightarrow \quad & 18 = 20x^2 && \mid : 20 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{9}{10} = x^2 && \mid \sqrt{} \\
\Rightarrow \quad & x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{9}{10}}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{L} = \left\{ \left(-\sqrt{\frac{9}{10}}; -0,1043551628 \right), (0;0), \left(\sqrt{\frac{9}{10}}; 0,1043551628 \right) \right\}
$$

Hinreichende Bedingung für Links-Rechts-Krümmung: $f'(x) = 0 \wedge f'''(x) < 0$
Hinreichende Bedingung für Rechts-Links-Krümmung: $f'(x) = 0 \wedge f'''(x) > 0$

$$
f'''\left(-\sqrt{\frac{9}{10}}\right) = 60 \cdot \left(-\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 - 18 = 36 > 0
$$
$$
f'''(0) = 60 \cdot (0)^2 - 18 = -18 < 0
$$
$$
f'''\left(\sqrt{\frac{9}{10}}\right) = 60 \cdot \left(\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 - 18 = 36 > 0
$$

$$
\begin{aligned}
& x = -\sqrt{\frac{9}{10}} \Rightarrow && \text{Rechts-Links-Krümmung} \\
& x = 0 \Rightarrow && \text{Links-Rechts-Krümmung} \\
& x = \sqrt{\frac{9}{10}} \Rightarrow && \text{Rechts-Links-Krümmung}
\end{aligned}
$$

11.5.7 Tangentengleichungen der Wendepunkte

Für diesen Teil der Kurvendiskussion solltest du wissen, wie man eine Tangentengleichung (S. 108) aufstellt.

Aufgabe:
Stelle eine Tangentengleichung für die Wendestelle mit dem kleinsten x-Wert auf.

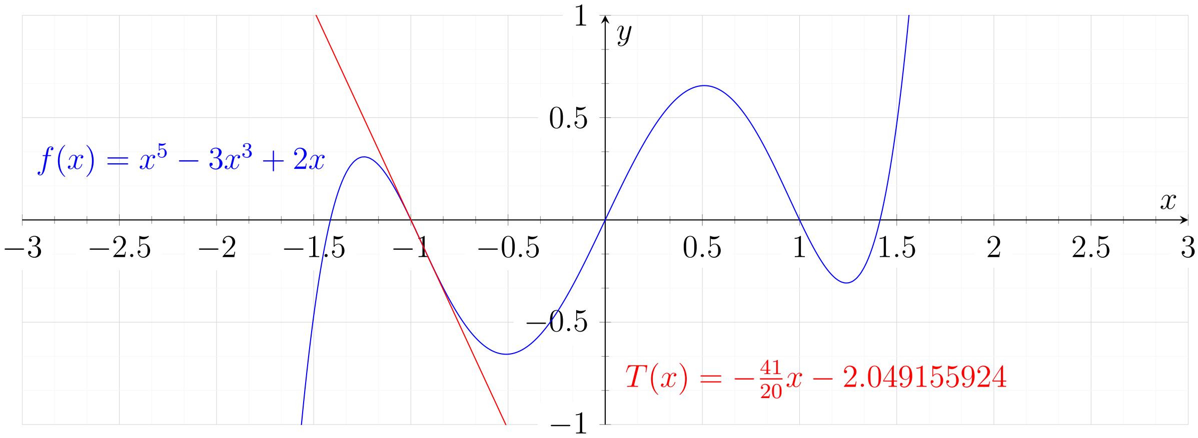
Lösung:
Die Grundgleichung für eine lineare Funktion ist $T(x) = mx + n$. Wir müssen dafür m und n bestimmen. Den Anstieg m erhalten wir aus der ersten Ableitung an der Wendestelle.

$$
\begin{aligned}
& & f'(x) =& 5x^4 - 9x^2 + 2 \\
\Rightarrow & & f'\left(-\sqrt{\frac{9}{10}}\right) =& 5\left(-\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^4 - 9\left(-\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 + 2 \\
\Leftrightarrow & & =& -\frac{41}{20}
\end{aligned}
$$

Jetzt, wo wir m bestimmt haben, können wir die Koordinaten von unserem Wendepunkt einsetzen und nach n umstellen.

$$
\begin{aligned}
& -0,1043551628 = -\frac{41}{20} \cdot \left(-\sqrt{\frac{9}{10}}\right) + n \\
\Leftrightarrow \quad & -0,1043551628 = 1,944800761 + n \qquad \mid -1,944800761 \\
\Leftrightarrow \quad & n = -2,049155924
\end{aligned}
$$

Damit ist unsere Tangentengleichung $T(x) = -\frac{41}{20}x - 2.049155924$. Mit den ermittelten Informationen können wir folgende Abbildung zeichnen:



11.5.8 Flächenberechnung

Für diesen Teil der Kurvendiskussion solltest du wissen, wie man Integralrechnung (S. 117) durchführt.

Aufgabe:
Berechne die Fläche, die zwischen den äußersten Nullstellen von Funktion und x-Achse eingeschlossen wird.

Lösung:
Zunächst müssen wir die Stammfunktion bilden. Diese lautet $F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + x^2 + k$. Anschließend bilden wir das Integral mit den Grenzen $-\sqrt{2}$ und -1, sowie mit den Grenzen 0 und 1. Welche Flächen wir damit berechnen, kann man an der obigen Skizze gut erkennen. Da durch die Punktsymmetrie der Funktion zum Nullpunkt diese Flächen jeweils zwei Mal

vorliegen, müssen wir das Ergebnis nur verdoppeln und haben die Gesamtfläche.

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{2}}^{-1}(x^5-3x^3+2x)dx &= \left[\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{4}x^4+x^2+k\right]_{-\sqrt{2}}^{-1} \\
&= \frac{1}{6}(-1)^6-\frac{3}{4}(-1)^4+(-1)^2+k-\left(\frac{1}{6}(-\sqrt{2})^6-\frac{3}{4}(-\sqrt{2})^4+(-\sqrt{2})^2+k\right) \\
&= \frac{5}{12}+k-(0,\overline{3}+k) \\
&= \frac{5}{12}+k-0,\overline{3}-k)=\underline{\underline{\frac{1}{12}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1}(x^5-3x^3+2x)dx &= \left[\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{4}x^4+x^2+k\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{6}(1)^6-\frac{3}{4}(1)^4+(1)^2+k-\left(\frac{1}{6}(0)^6-\frac{3}{4}(0)^4+(0)^2+k\right) \\
&= \frac{5}{12}+k-(0+k) \\
&= \frac{5}{12}+k-0-k)=\underline{\underline{\frac{5}{12}}}
\end{aligned}$$

$F=2\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{5}{12}\right)=1$ Flächeneinheit

11.6 Optimierungsaufgaben

Manchmal muss man anhand einer gegebenen Situation ein Optimum berechnen. Wir schauen uns folgendes Beispiel an: Gesucht ist das Rechteck mit einem Umfang von $100m$, das die größtmögliche Fläche hat. Wie lang sind die Seiten dieses Dreiecks und wie groß ist sein Flächeninhalt? Dabei handelt sich eigentlich um eine ganz simple Aufgabe der Differenzialrechnung. Die Kunst besteht darin aus dem Text die richtige Funktion aufzustellen. Anhand der Aufgabenstellung können wir 2 Aussagen über unsere Zielfunktion treffen:

$A(a,b)=ab$
$100=2a+2b$

Durch einfaches Umstellen und Einsetzen verbinden wir jetzt diese zwei Bedingungen zu einer Funktion:

$$\begin{aligned}
& 100 = 2a+2b \\
\Leftrightarrow\quad & b = 50-a \\
\Rightarrow\quad & A(a)=a(50-a)=-a^2+50a
\end{aligned}$$

Jetzt berechnen wird das Maximum dieser Funktion mithilfe der Ableitung.

$$\begin{aligned}
\text{Notwendige Bedingung: } A'(a) &= 0 \\
0 &= -2a+50 \\
\Leftrightarrow a &= 25
\end{aligned}$$

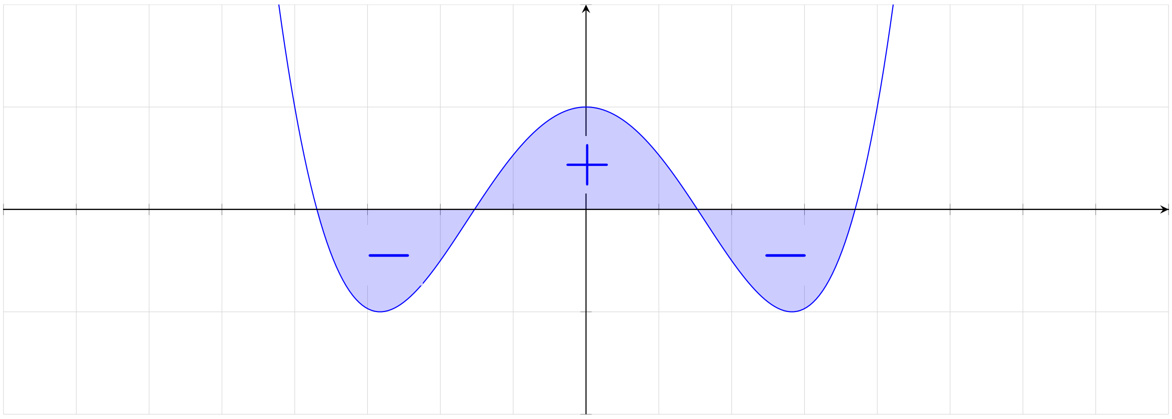
Hinreichende Bedingung: $A'(a) = 0 \wedge A''(a) < 0$

$$A''(25) = -2$$

Jetzt haben wir das Maximum für eine Seite berechnet und können dieses einfach in unsere Gleichung vom Anfang einsetzen: $b = 50 - a \Rightarrow b = 50 - 25 = 25$. Das größtmögliche Rechteck ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge $25cm$ und einer Fläche von $625cm^2$.

12 Integralrechnung

Ein Integral gibt den Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse in einem bestimmten Intervall wieder. Dabei ist zu beachten, dass die Flächen unterhalb der x-Achse negativ sind, weshalb man jeden Abschnitt einzeln berechnen und anschließend addieren sollte.



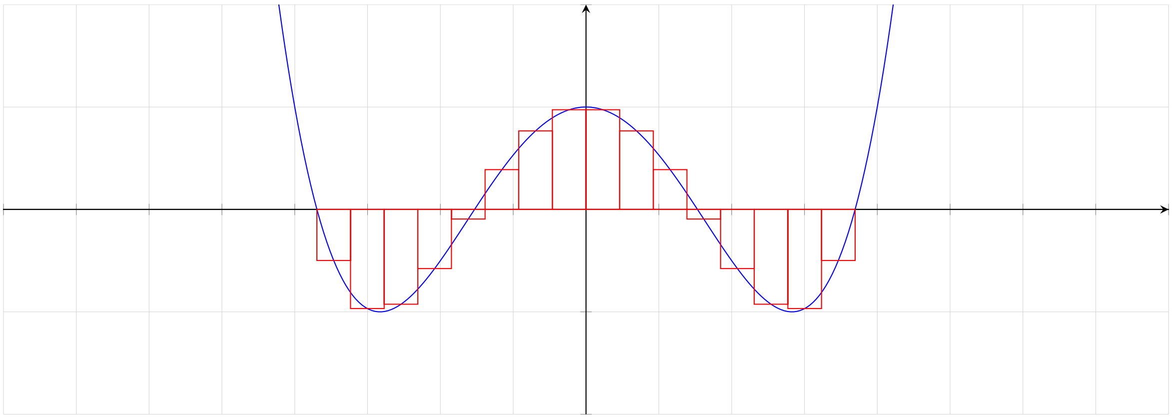
Das unbestimmte Integral ist die Menge der Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

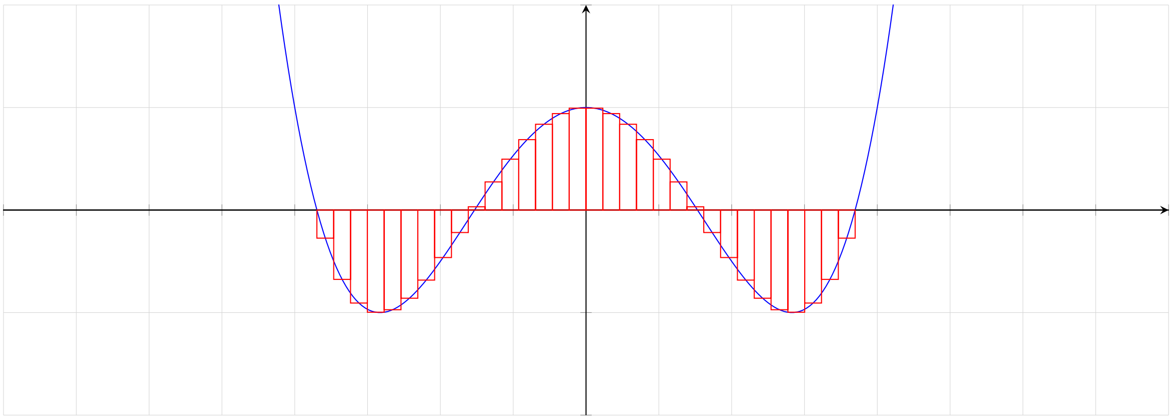
Für das bestimmte Integral mit den Integrationsgrenzen a und b, sowie der Integrationsvariable x und dem Differential dx gilt folgende Notation:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Um das zu verstehen, müssen wir uns erst einmal angucken, was das überhaupt bedeutet. Wenn wir die Fläche unter einer linearen Gleichung berechnen wollten, wäre das ziemlich einfach, da wir schnell ein Drei- oder Viereck konstruieren können, dessen Fläche wir berechnen. Mit anderen Funktionstypen ist das aber nicht so einfach. Wir können die Fläche annähernd berechnen, wenn wir sie mit Formen füllen, deren Flächen wir einfach berechnen können. Dafür nehmen wir Rechtecke. Die breite der Rechtecke nennen wir Δx. Das bedeutet quasi nur $x_2 - x_1$.



Wenn wir unsere Rechtecke schmaler und schmaler machen, dann wird unser Ergebnis immer akkurater. Wenn wir unsere Rechtecke minimal klein machen schreiben wir anstatt Δx jedoch dx.



Genau diese immer kleiner werdenden Rechteck werden durch das Integral dargestellt. Man rechnet die Stammfunktion an der obereren Grenze minus die Stammfunktion an der unteren Grenze. In der Kurvendiskussion gibt es ein rechnerisches Beispiel (S. 114) für die Anwendung des Integrals.

12.1 Die Stammfunktion

Das Gegenteil vom Differenzieren ist das Integrieren. Damit kann man von einer Ableitung auf die nächst niedrigere Ableitung schließen, z.B. von $f''(x)$ auf $f'(x)$. Die Funktion, die man daraus erhält, nennt man Stammfunktion. Auch eine nicht abgeleitete Funktion besitzt eine Stammfunktion. Diese wird mit einem großen $F(x)$ bezeichnet. Da das Integrieren das Gegenteil des Differenzieren ist, gelten dieselben Regeln (S. 102), jedoch umgekehrt. Anstatt z.B. den Exponenten um 1 zu reduzieren und mit ihm zu multiplizieren, wird er um 1 erhöht und durch ihn geteilt. Beim Integrieren fügt man jedoch noch k für eine beliebige Zahl hinzu, denn beim Ableiten geht diese verloren. Daher sind Stammfunktionen nicht eindeutig, wie es die Ableitungen sind. Die Stammfunktion von $f(x) = 2x$ ist beispielsweise $F(x) = x^2 + k$.

Integrationsregeln

Da es manchmal schwierig sein kann, umgekehrt zu denken, hier noch mal die wichtigsten Regeln zur Bildung der Stammfunktion:

$$
\begin{array}{lll}
c & \to & c \cdot x + k \\
x^n & \to & \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k \\
\frac{1}{x} & \to & \ln|x| + k \\
\sqrt[n]{x} & \to & \frac{1}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1} + k \\
e^x & \to & e^x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
ln(x) & \to & -x + x \cdot \ln(x) + k \\
\sin(x) & \to & -\cos(x) + k \\
\cos(x) & \to & \sin(x) + k \\
\tan(x) & \to & -\ln|\cos(x)| + k \\
\frac{f'(x)}{f(x)} & \to & \ln f(x) + k
\end{array}
$$

Die lineare Substitution

Haben wir eine verkettete Funktion deren innere Funktion eine lineare Funktion ist, so gilt folgende Integrationsregel:

$$\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + k$$

12.2 Partielle Integration

Wenn man ein Produkt integrieren möchte, braucht man die partielle Integration. Abgeleitet aus der Produktregel der Differentialrechnung, ergibt sich folgende Formel:

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

Zum besseren Verständnis noch mal ein Beispiel: $\int x \cdot e^x dx$.

$$
\begin{aligned}
&\int (x \cdot e^x)dx \\
=&e^x \cdot x - \int (e^x \cdot 1)dx \\
=&e^x \cdot x - e^x + k \\
=&e^x \cdot (x-1) + k
\end{aligned}
$$

12.3 Integration durch Substitution

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(g(u)) \cdot g'(u)\, du$$

Möchte man eine verkettete Funktion oder besonders schwierige Funktion integrieren, wird es mit den bisherigen Regeln schwierig. Wir müssen hier substituieren, um eine Stammfunktion zu erzeugen. Die obenstehende Regel, gibt uns einige wichtige Unterregeln. Dabei ist vor allem Folgendes wichtig:

$$x = g(u)$$
$$dx = g'(x)\, du$$

Damit können wir jetzt unsere Substitution durchführen. Als erstes ersetzen wir den Term, der uns das Integrieren so schwer macht durch eine Variable.

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-2x}\, dx \quad \mid u = 1-2x$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} \sqrt{u}\, dx$$

Da wir gerade noch nach x integrieren, müssen wir jetzt noch das du und die Grenzen ersetzen. Laut den obigen Formeln ist $dx = g'(u)\, du$. Das heißt, um auf dx zu kommen, brauchen wir nur die Ableitung $g'(u)$. Wir wissen, dass x gleich $g(u)$ ist. In diesem Fall ist $u = 1 - 2x$. Wenn wir diese Gleichung nach x umstellen kommen wir auch auf $g(x)$, welches wir anschließend ableiten, um das Differential zu ersetzen.

$$\begin{aligned}
& u = 1-2x \\
\Leftrightarrow \quad & -2x = u-1 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{-u+1}{2} = g(u) \\
\Rightarrow \quad & g'(u) = -\frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad & \int_{-1}^{0} \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\, du
\end{aligned}$$

Jetzt muss man bei einem bestimmten Integral noch die Grenzen ersetzen. Das tut man, indem man die Grenzen für x in die Gleichung von u einsetzt.

$$
\begin{aligned}
& u = 1-2x \\
\Rightarrow \quad & u = 1-2\cdot 0 = 1 \\
\Rightarrow \quad & u = 1-2\cdot(-1) = 3 \\
\Rightarrow \quad & \int_3^1 \sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\,du \\
\Leftrightarrow \quad & \left[-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_3^1 \approx 1{,}399
\end{aligned}
$$

Hinweis: Hat man ein bestimmtes Integral, muss man nicht resubstituieren. Hat man ein unbestimmtes Integral, muss man für u wieder den ursprünglichen Wert einsetzen:

$$\int \left(\sqrt{1-2x}\right) dx = \left[-\frac{1}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}} + k\right]$$

In der Kurzzusammenfassung funktioniert Integration durch Substitution so:

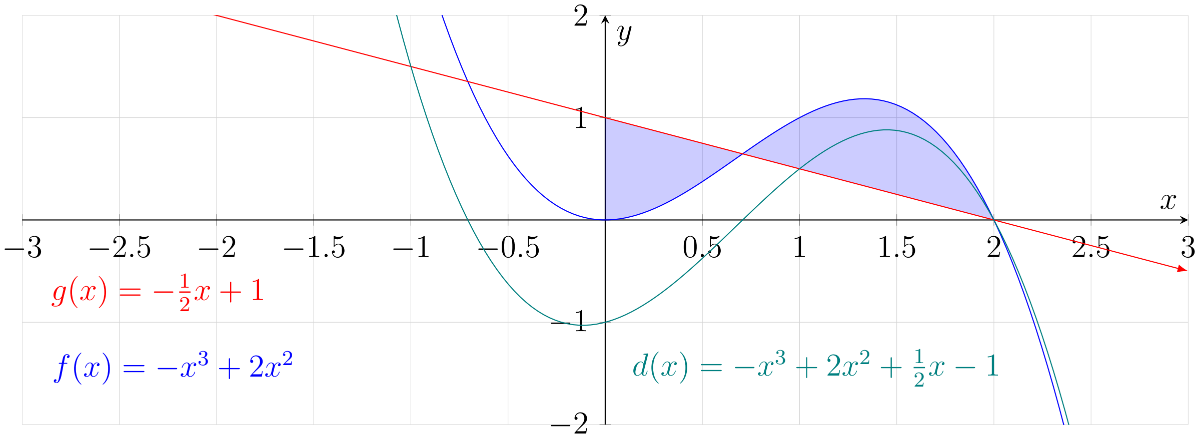
1. Schwierigen Term durch u ersetzen
2. u-Gleichung nach x umstellen ($x = g(x)$)
3. Umgestellten Term ableiten ($dx = g'(u)\ du$) und Differential ersetzen
4. Bestimmtes Integral: Grenzen anpassen, indem man Werte in u einsetzt
4. Unbestimmtes Integral: Resubstitution

12.4 Die Fläche zwischen zwei Graphen

Wollen wir die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen, bilden wir einfach das Integral der Differenzfunktion dieser zwei Funktionen.

$$\left|\int_a^b f(x) - g(x)dx\right|$$

Achtung: Wenn die Differenzfunktion Nullstellen hat, bzw. die Funktionen sich schneiden, muss die Fläche schrittweise ermittelt werden. Dazu ein Beispiel:



Gesucht ist die blau markierte Fläche im Intervall $[0, 2]$. Wenn wir den gezeichneten Graphen nicht vorliegen hätten, dann müssten wir erst testen, ob eine Nullstelle in diesem Intervall vorliegt. Dazu können wir z.B. eine Wertetabelle anlegen.

x	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-1	-0,375	0,5	0,875	0

Jetzt können wir das Newtonverfahren (S. 84) anwenden, um die Nullstelle zu finden. Dafür brauchen wir die Ableitung der Differenzfunktion $d'(x) = -3x^2 + 4x + \frac{1}{2}$.

$$x_1 = (0,5) - \frac{-(0,5)^3 + 2(0,5)^2 + \frac{1}{2}(0,5) - 1}{-3(0,5)^2 + 4(0,5) + \frac{1}{2}} = \frac{5}{7}$$

$$x_2 = \left(\frac{5}{7}\right) - \frac{-(\frac{5}{7})^3 + 2(\frac{5}{7})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{7}) - 1}{-3(\frac{5}{7})^2 + 4(\frac{5}{7}) + \frac{1}{2}} = \frac{886}{1253}$$

$$x_3 = \left(\frac{886}{1253}\right) - \frac{-(\frac{886}{1253})^3 + 2(\frac{886}{1253})^2 + \frac{1}{2}(\frac{886}{1253}) - 1}{-3(\frac{886}{1253})^2 + 4(\frac{886}{1253}) + \frac{1}{2}} = 0,7071067812$$

$$x_4 = (0,7071067812) - \frac{-(0,7071067812)^3 + 2(0,7071067812)^2 + \frac{1}{2}(0,7071067812) - 1}{-3(0,7071067812)^2 + 4(0,7071067812) + \frac{1}{2}}$$
$$= 0,7071067812$$

Der Einfachheit halber kürzen wir die Nullstelle auf $x_0 = 0,707$, bevor die Teilintegrale berechnen.

$$\int_0^{0,707} \left(-x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + k\right]_0^{0,707} \approx -0,408$$

$$\int_{0,707}^{2} \left(-x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + k\right]_{0,707}^{2} \approx 0,742$$

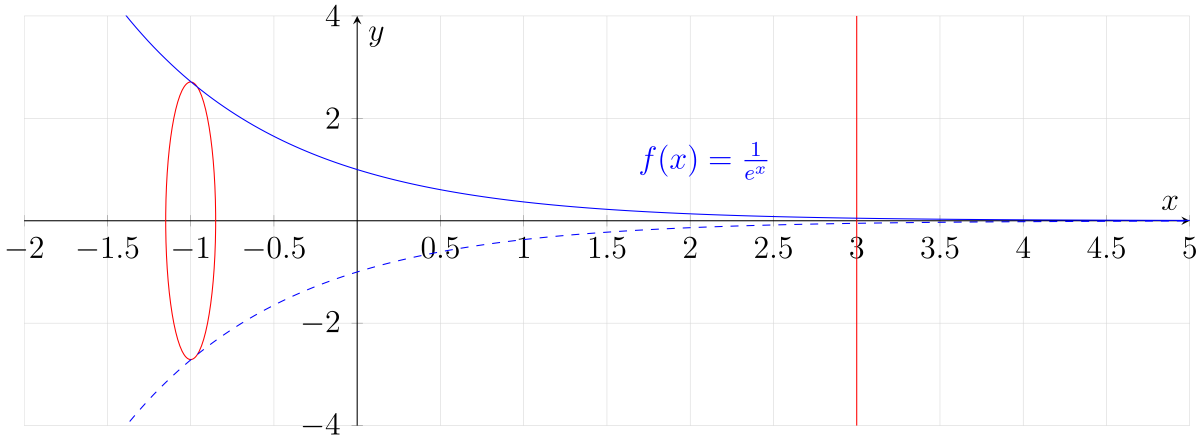
Damit ist die gesuchte Fläche $|-0,408| + 0,742$ bzw. $1,15$ Flächeneinheiten groß.

12.5 Rotationsvolumen

Neben der Fläche kann man mit dem Integral auch das Volumen berechnen. Dafür muss man nur eine ganz einfache Formel anwenden:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Dazu ein Beispiel: Gesucht ist das Volumen der abgebildeten Vase, im Bereich -1 bis 3.



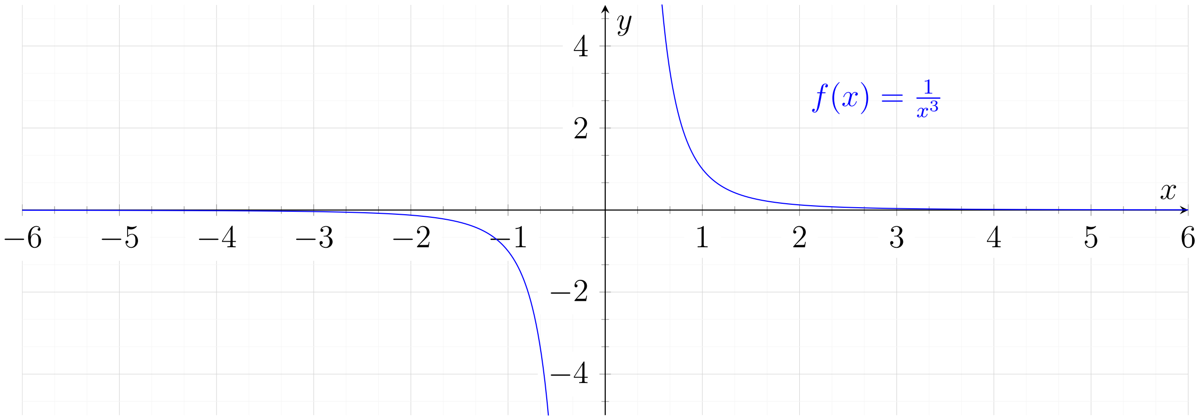
$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{1}{e^x} \\
& \Downarrow \\
V =& \pi \cdot \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 dx \\
=& \pi \cdot \left[-e^{-x} + k\right]_{-1}^{3} \\
=& \pi \cdot (-e^{-3} + k + e^1 - k) \\
\approx& 2,67 \cdot \pi \\
\approx& 8,38
\end{aligned}$$

Hinweis: Wenn um die y-Achse rotiert werden soll, muss man diese Formel auf die Umkehrfunktion (S. 82) anwenden!

12.6 Uneigentliche Integrale

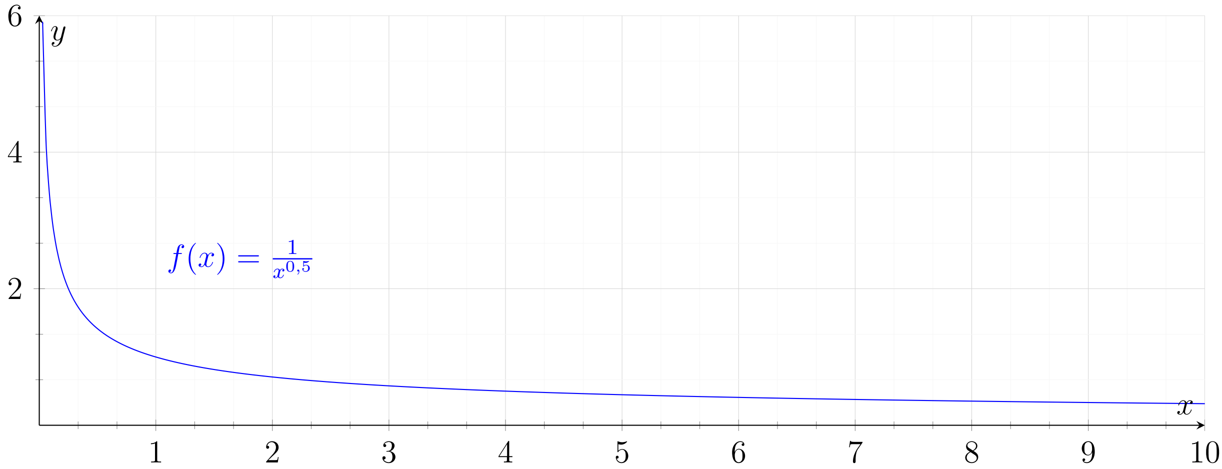
Möchte man das Integral einer Funktion über einem unbeschränkten Intervall oder einer unbeschränkten Funktion berechnen, muss dann den Limes verwenden um herauszufinden, welchem Wert sich das Integral annähert. Das nennt man uneigentliches Integral.

12.6.1 Unbeschränktes Intervall



$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx &= \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{1}{x^3}dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^k \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

12.6.2 Unbeschränkte Funktion



$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{k\to 0} \int_k^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \lim_{k\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_k^3 \\ &= \lim_{k\to 0} \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{k}\right) \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

13 Logik

Die Grundlagen der Logik ähneln stark der Logik in Programmiersprachen, jedoch mit andern Symbolen. Die wichtigsten Begriffe sind zunächst einmal Negation ($\neg$, »nicht«), Konjunktion ($\wedge$, »und«), Disjunktion ($\vee$, »oder«), Kontravalenz ($\not\Leftrightarrow$, »entweder oder«), Äquivalenz ($\Leftrightarrow$) und Implikation ($\Rightarrow$). Außerdem redet man bei W (wahr) und F (falsch) von Wahrheitswerten. Ob Aussagen wahr oder falsch sind, wird oft in Wahrheitstafeln dargestellt. Dazu eine Übersicht:

A	B		$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \not\Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$
W	W		F	W	W	F	W	W
W	F		F	F	W	W	F	F
F	W		W	F	W	W	F	W
F	F		W	F	F	F	W	W

Übrigens eine Eselsbrücke, um die Zeichen für Konjunktion und Disjunktion zu unterscheiden, sind die drei O: »Oder Oben Offen«. Und noch ein Hinweis: Die Implikation hat kein genaues Äquivalent in der Programmierung. Am besten merkt man sicher, dass eine Implikation immer wahr ist, außer für den Fall $W \Rightarrow F$.

Außerdem noch ein Hinweis zur Implikation: $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$. Daraus kann man schließen, dass die Negation der Implikation $\neg(A \Rightarrow B)$ äquivalent ist zu $A \wedge \neg B$.

Wenn eine Formel in jedem Szenario (für alle Bewertungen) wahr ist, dann spricht man von einer Tautologie. Beispielsweise ist $A \vee \neg A$ eine solche Tautologie. Anders herum nennt man $A \wedge \neg A$ einen Widerspruch.

Man kann des weiteren Aussagen auch von Elementen einer Menge abhängig machen. Dabei unterscheidet man, für wie viele Elemente die Aussage gelten soll. Dazu noch mal eine Übersicht über die sogenannten Quantoren:

Alle x	Mindestens ein x	Genau ein x	Kein x
$\forall x \in M : A(x)$	$\exists x \in M : A(x)$	$\exists! x \in M : A(x)$	$\nexists x \in M : A(x)$

Ein Beispiel: $A(x) = x$ ist eine natürliche Zahl
Die Aussage $\exists x \in \mathbb{Z} : A(x)$ ist wahr, da die ganzen Zahlen die natürlichen Zahlen beinhalten. Wenn die Aussage jedoch $\forall x \in \mathbb{Z} : A(x)$ wäre, wäre sie falsch, da z.B. $A(-1)$ dem widerspricht. Wenn man mehrere Quantoren benutzt, kann man gleiche auch zusammen fassen. So kann man anstatt

$\forall a \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : a > b$

auch Folgendes schreiben:

$\forall a, b \in \mathbb{N} : a > b$.

13.1 Beweise

Oft reicht es in der Mathematik nicht aus nur ein Ergebnis zu berechnen, sondern man muss auch beweisen, dass das was man da gemacht hat, stimmt. Beweise zu finden ist nicht so trivial, wie Zahlen in eine Formel einzusetzen. Man muss ein bisschen kreativ sein und viel üben. Dafür gibt es verschiedene Herangehensweisen, die man kennen sollte.

13.1.1 Direkter Beweis

Beim direkten Beweis versucht man über Zwischenschritte zu zeigen, dass aus A auch wirklich B folgt. Die Idee ist simpel, aber einen Beweis zu finden ist nicht immer einfach, deshalb ein Beispiel:

Zu beweisen ist, dass für ein ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n^2 - 1$ durch 4 teilbar ist.

$$
\begin{aligned}
n \text{ ungerade} &\Rightarrow \text{Es gibt ein } k \in \mathbb{N}, \text{ dass } n = 2k + 1 \text{ erfüllt.}\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 - 1 = 4k^2 + 4k\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 - 1 = 4(k^2 + k)\\
&\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n^2 - 1 = 4m\\
&\Rightarrow n^2 - 1 \text{ ist durch 4 teilbar, da es das Vierfache einer natürlich Zahl } m \text{ ist.}
\end{aligned}
$$

q.e.d

13.1.2 Indirekter Beweis und Beweis durch Kontraposition

Anders als beim direkten Beweis zeigt man beim indirekten Beweis oder Beweis durch Kontraposition nicht, dass $A \Rightarrow B$ gilt, sondern $\neg B \Rightarrow \neg A$ oder auch $A \wedge \neg B \Rightarrow F$. Dass diese Ausdrücke äquivalent sind, kann man anhand einer Wahrheitstafel überprüfen, denn sind alle Bewertungen gleich, sind die Ausdrücke äquivalent.

A	B		$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$ (Kontrapos.)	$A \wedge \neg B \Rightarrow F$ (indirekt)
W	W		W	W	W
W	F		F	F	F
F	W		W	W	W
F	F		W	W	W

Dazu nochmal ein Beispiel: $\sqrt{2}$ ist irrational.

$\sqrt{2}$ ist irrational. $\Rightarrow \sqrt{2} \neq \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, p und q teilerfremd.

$$\Updownarrow$$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, p und q teilerfremd. $\Rightarrow \sqrt{2}$ ist rational.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}\\
&\Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}\\
&\Leftrightarrow 2q^2 = p^2\\
&\Rightarrow p^2 \text{ ist gerade.} \Rightarrow p \text{ ist gerade.}\\
&\Rightarrow p = 2k\\
&\Rightarrow 2q^2 = 4k^2\\
&\Leftrightarrow q^2 = 2k^2\\
&\Rightarrow q^2 \text{ ist gerade.} \Rightarrow q \text{ ist gerade.}\\
&\Rightarrow \sqrt{2} \text{ ist irrational, da p und q beide gerade und ergo nicht teilerfremd sind}
\end{aligned}
$$

q.e.d

13.1.3 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion wird oft genutzt um Aussagen der Form $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ zu beweisen. Das wird in zwei Schritten getan. Zunächst beweist man durch Einsetzen (Induktionsanfang), dass die Aussage für das kleinstmögliche n wahr ist. Wenn man dann im Indikationsschritt zeigen kann, dass die Aussage, wenn sie für n gilt auch für $n+1$ gilt, hat man einen Beweis. Das kommt daher, dass man für das kleinste n eindeutig durch einsetzen bewiesen hat. Dieses n beweist dann, dass $n+1$ die Aussage erfüllt. Dieses wiederum beweist, dass $n+2$ die Aussage erfüllt und so weiter. Auch das erklärt sich am besten wieder mal mit einem Beispiel:

Zu beweisen ist diese Aussage:

$$A(n) = \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Induktionsanfang

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$
$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Damit haben schon einmal bewiesen, dass es ein n gibt, dass diese Aussage erfüllt.

2. Induktionsvoraussetzung (1. Teil des Indikationsschritts)

$$\exists n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Induktionsbehauptung (2. Teil des Indikationsschritts)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Um jetzt zu zeigen, dass die Aussage für $n+1$ ebenfalls stimmt, wenn sie für n stimmt, setzen wir sie gleich mit der Aussage für n plus den Teil, der den Unterschied zwischen den beiden bildet $(n+1)$. Das ist logisch, da wir nur noch den fehlenden Summanden drauf rechnen.

4. Beweis der Induktionsbehauptung

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Ich glaube, wir können uns darauf einigen, dass die obige Gleichung allgemein-mathematisch wahr ist. Wenn wir jetzt die Summenzeichen durch unsere zu zeigenden Formeln ersetzen, müsste die Gleichung – sofern die Aussage vom Anfang wahr ist – immer noch wahr sein. Dann hätten wir gezeigt, dass die Aussage für $n+1$ dasselbe ist, wie die Aussage für n plus den fehlenden Teil $(n+1)$.

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
$$\Leftrightarrow (n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1)$$
$$\Leftrightarrow n+2 = n+2$$

Wir sehen jetzt ganz klar, dass wir eine wahre Aussage haben. Jetzt haben wir gezeigt, dass unter der Voraussetzung, dass es ein n gibt, dass die Aussage erfüllt, auch $n+1$ die Aussage erfüllt. Da wir am Anfang bewiesen haben, dass $n=1$ die Gleichung erfüllt, ist sie somit auch für $n=2$ erfüllt und wenn wir wissen, dass sie für $n=2$ erfüllt ist, ist sie auch für $n=3$ erfüllt und so weiter!

q.e.d.

13.1.4 Supremum/Infimum beweisen

Soll man das Supremum/Infimum einer Menge beweisen geht das in zwei Schritten. Zuerst zeigen wir, dass unser vermutetes Supremum/Infimum eine obere/untere Schranke für die Menge ist. Anschließend zeigt man, dass es kein Element gibt, dass größer bzw. kleiner als die gewählt Schranke ist.

Betrachte das Beispiel: $M = \{5 + \frac{2}{n} \mid \in \mathbb{N}\}$ und zeige das Supremum.

Wir sehen natürlich, dass 7 das Supremum ist. Wir können folgendermaßen zeigen, dass 7 obere Schranke ist:

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \Rightarrow n &\geq 1 \\ &\Rightarrow 2n \geq 2 \\ &\Rightarrow 2 \geq \frac{2}{n} \\ &\Rightarrow 7 \geq 5 + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Damit muss 7 obere Schranke sein, da alle Zahlen in der Menge kleiner gleich 7 sind. Da die 7 wegen $5 + \frac{2}{1}$ auch in der Menge enthalten ist, muss sie das Supremum sein.

Um jetzt weiter zu zeigen, dass 5 untere Schranke ist, können etwas ganz ähnliches tun:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{2}{n} \Rightarrow\ 5 \leq 5 + \frac{2}{n} \Rightarrow\ \forall x \in M : 5 \leq x$$

Um zu zeigen, dass 5 das Infimum ist, kann man den Satz von Eudoxos benutzen.

> **Satz von Eudoxos**
>
> $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Mithilfe dieser Aussage können wir jetzt einen Widerspruchsbeweis führen. Wir wollen zeigen, dass 5 die größte untere Schranke ist. Also nehmen wir an, es gibt ein $t > 5$, dass ebenfalls unterer Schranke ist.

$$\begin{aligned} t > 5 &\Rightarrow t - 5 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{t-5}{2} > 0 \\ &\overset{\text{Eudox.}}{\Rightarrow} \frac{1}{n} < \frac{t-5}{2} \\ &\Rightarrow t > 5 + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Wäre t untere Schranke, dann wären alle Elemente aus M größer als t. Wir haben aber gezeigt, dass $5 + \frac{2}{n}$ kleiner ist und da dieses in der Menge enthalten ist, kann t keine untere Schranke sein.

14 Stochastik

Einem stochastischen Modell liegt zunächst die Grundmenge oder auch das Universum Ω zu Grunde. Das ist eine Menge, die alle möglichen Ausgänge für das jeweilige Zufallsexperiment beinhaltet. Für einen Würfelwurf wäre die Grundmenge bspw. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Die Elemente in Ω (groß Omega) werden mit ω (klein Omega) bezeichnet und heißen Ergebnisse. Jede Teilmenge von Ω wird als Ereignis bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird mit einem P für Probabilität angegeben: $P(\{\omega\})$. Wenn die Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse gleich ist und nur endliche viele mögliche Ergebnisse existieren, spricht man von einem Laplace-Experiment.

14.1 Kombinatorik

Von großer Bedeutung, wenn es um Kombinatorik geht, sind die Fakultät $n!$ und der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$. Diese sind wie folgt definiert:

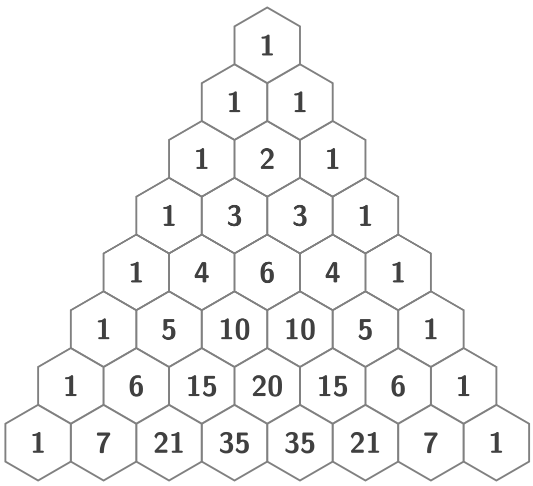
Fakultät

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k, \qquad 0! = 1$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}, \qquad \binom{n}{0} = 1$$

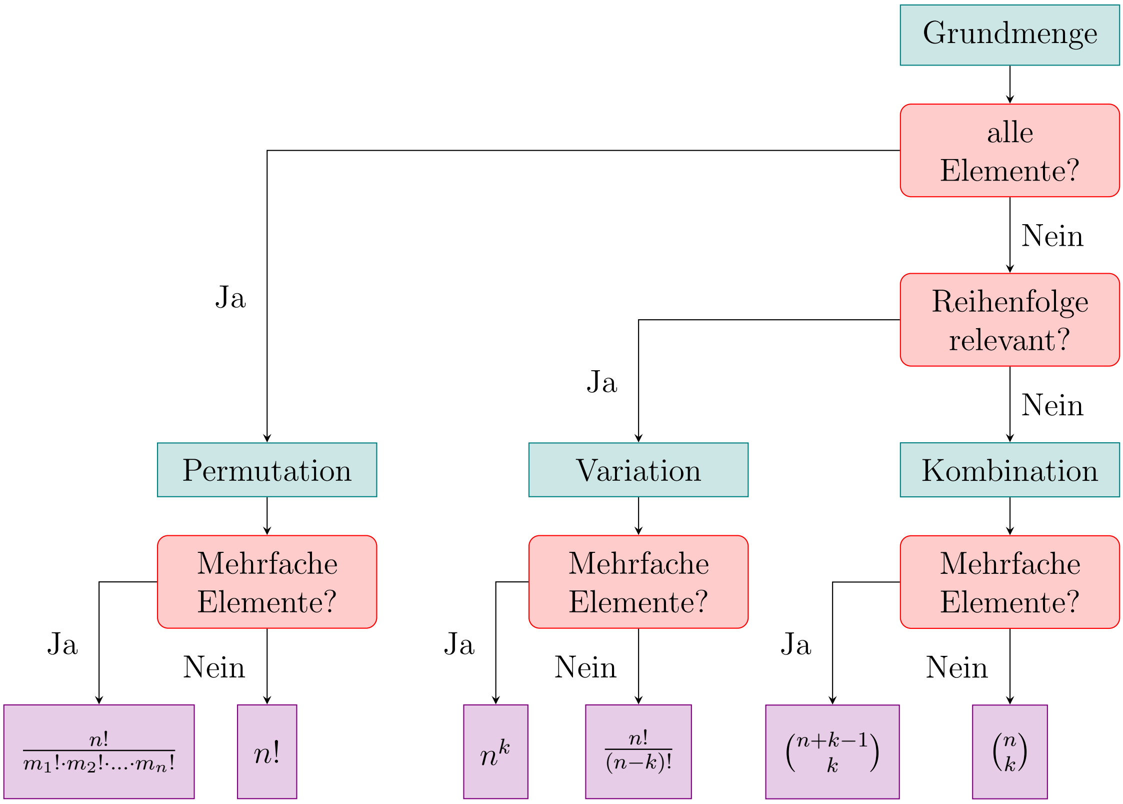
Um die Binomialkoeffizienten einfach im Kopf zu errechnen, gibt es das Pascalsche Dreieck. Man kann den Binomialkoeffizienten n über k einfach ablesen, indem man in der n-ten Zeile, die k-te Zelle liest. Dabei fängt man bei 0 an zu zählen. So ist z.B. 6 über 4, 15.



Man kann dieses Dreieck auch sehr einfach selbst zeichnen. Dafür zeichnet man zunächst den Rand, indem man alle Zellen an der Seite mit 1 füllt. Alle anderen Zellen ergeben sich dann aus den beiden Zellen, die direkt über ihr liegen. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Die Kombinatorik hilft uns herauszufinden, wie viele Möglichkeiten es für Anordnungen gibt. Dabei unterscheidet man verschiedene Arten von Modellen. Im Großen und Ganzen gibt es drei Arten. Die Erste ist die Permutation. Dabei untersucht man die komplette Grundmenge. Wenn man nur eine Teilmenge untersucht, gibt es noch mal eine Unterscheidung. Wenn die Reihenfolge in der Teilmenge wichtig ist, spricht man von Variation, ansonsten von Kombination. Für diese drei Fälle gibt es jeweils zwei Möglichkeiten zur Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten, je nachdem ob Elemente mehrfach auftreten oder nicht.



Die Kunst in der Kombinatorik ist es jetzt einer Aufgabenstellung die richtige Formel zuordnen zu können, daher folgen jetzt Beispiele für jeden Fall.

14.1.1 Permutation mit Wiederholung

Wenn es in der Grundmenge Elemente gibt, die nicht unterscheidbar sind, braucht man bei der Permutation diese Formel: $\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!}$. Im Zähler steht die Fakultät der Mächtigkeit der Grundmenge. Im Nenner werden die Mächtigkeiten aller Teilmengen mit einander multipliziert, die durch das Zusammenfassen ununterscheidbarer Elemente entstehen.

Aufgabe 1: Gegeben ist das Wort »EINSTEIN«. Wenn man diese Buchstaben beliebig vertauschen kann, wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es?

Lösung:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 5040$$

Erklärung: Das Wort hat 8 Buchstaben, wobei E, I und N jeweils zweimal und S, sowie T einmal vorkommen.

Aufgabe 2: Du musst einen Zug rangieren. Er hat 1 Lokomotive, 1 Bordrestaurant, 2 erste Klasse-Wagons und 5 zweite Klasse-Wagons. Wie viele Möglichkeiten gibt es diesen Zug anzuordnen?

Lösung:

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 5!} = 168$$

Erklärung: Der Zug hat 1 Bordrestaurant, 2 erste Klasse-Wagons und 5 zweite Klasse-Wagons. Insgesamt hat der Zug also 8 Wagons. Und was ist mit der Lok? Die Lokomotive muss logischerweise immer ganz vorne sein, deshalb macht sie keinen Unterschied für die Reihenfolge des Zuges insgesamt. Dein Arbeitgeber wäre sicherlich nicht begeistert, wenn du den Zug so rangierst, dass die Lok in der Mitte ist.

14.1.2 Permutation ohne Wiederholung

Wenn die Elemente bei der Permutation alle unterschiedlich sind, hat man eine angenehme Zeit, denn man muss nur die Fakultät von der Mächtigkeit der Grundmenge bestimmen.

Aufgabe 1: Gegeben ist das Wort »SCHLAFEN«. Wenn man diese Buchstaben beliebig vertauschen kann, wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es?

$8! = 40320$

Erklärung: Das Wort hat 8 Buchstaben, wobei keine doppelt vorkommen. Man könnte theoretisch auch die Formel für Permutation mit Wiederholung nutzen, dann würde aber im Nenner einfach 1 stehen, also reicht es einfach die Fakultät aus dem Zähler zu bestimmen.

Aufgabe 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es die Karten in einem Pokerkartendeck anzuordnen?

Lösung:

$52! = 8,065817517 \cdot 10^{67}$

Erklärung: Im Poker gibt es insgesamt 52 Karten: Von 2 bis 10, sowie von Bube, Dame, König und Ass in vier Farben ohne Joker.

14.1.3 Variation mit Wiederholung

Wenn man eine Teilmenge mit teilweise nicht unterscheidbaren Elementen aus der Grundmenge entnimmt, braucht man unter Beachtung der Reihenfolge die Formel n^k, wobei n die Mächtigkeit der Grundmenge und k die der Teilmenge ist.

Aufgabe 1: Jeden Morgen wird im Büro eine Name aus einem Hut mit 12 Namen gezogen, um zu bestimmen, wer an diesem Morgen den Kaffee holen muss. Anschließend wird der gezogene Name wieder für den nächsten Tag in den Hut gelegt. Wie viele Möglichkeiten gibt es von Montag bis Freitag für die Ernennung des Kaffeeholers unter Beachtung der Reihenfolge?

Lösung:

$12^5 = 248832$

Erklärung: Die Grundmenge hat eine Mächtigkeit von 12. Es wird von Montag bis Freitag fünfmal eine Person gezogen, die auch mehrfach gezogen werden kann, da der Name wieder zurückgelegt wird.

Aufgabe 2: In der Schifffahrt werden bunte Flaggen benutzt, um auf optischem Wege zu kommunizieren. Wenn man 4 Flaggen aufhängen möchte und man für die Buchstaben von A bis Z und die Ziffern 0 bis 9 verschiedene Flaggen hat, in wie vielen verschiedenen Reihenfolgen kann man diese aufhängen, wenn Flaggen mehrfach vorkommen dürfen?

Lösung:

$36^4 = 1679616$

Erklärung: Insgesamt hat man 36 Flaggen (26 fürs Alphabet und 10 für die Zahlen) und aus diesen sollen 4 (auch gleiche) ausgesucht werden.

14.1.4 Variation ohne Wiederholung

Wenn man einzigartige Elemente in der Grundmenge hat bzw. nicht zurücklegt, nutzt man für die Betrachtung einer Teilmenge die Formel $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Aufgabe 1: Da bei einem Marathon 7 Personen gleichzeitig die Ziellinie erreicht haben, sollen die ersten drei Plätze per Los ermittelt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

Lösung:

$$\frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

Erklärung: Unsere Grundmenge sind die 7 Personen, die gleichzeitig das Ziel erreicht haben. Aus diesen sollen jetzt drei Leute gezogen werden, wobei die Reihenfolge wichtig ist, um zu wissen, ob sie erster, zweiter oder dritter Platz sind.

Aufgabe 2: Du entschärfst eine Bombe, dabei hast du 6 verschiedenfarbige Kabel, von denen du 3 in der richtigen Reihenfolge durchschneiden musst. Wie hoch ist die Chance, dass du das richtig machst?

Lösung:

$$\frac{6!}{(6-3)!} = 120 \text{ Möglichkeiten} \Rightarrow P = \frac{1}{120} \mathrel{\widehat{=}} 0,8\bar{3}\%$$

Erklärung: Von 6 Kabeln sollen 3 in der richtigen Reihenfolge durchgeschnitten werden. Natürlich kannst du ein Kabel, dass du bereits durchgeschnitten hast nicht noch einmal durchschneiden. Damit kommst du auf 120 Möglichkeiten drei Kabel durchzutrennen, wovon jedoch nur eine richtig ist. Damit ist die Chance das richtig zu machen bei unter einem Prozent. Viel Glück!

14.1.5 Kombination mit Wiederholung

Wenn eine Teilmenge betrachtet wird, deren Reihenfolge egal ist und in der Elemente mehrfach vorkommen können, benutzt man die Formel $\binom{n+k-1}{k}$. Hinweis: Dafür brauchst du den Binomialkoeffizienten.

Aufgabe 1: Eine Firma eröffnet 3 neue Zweigstellen und schaut sich dafür die Standorte Tokyo, Seoul, Hong Kong, Peking und Taipei an. Wie viele Möglichkeiten gibt es die neuen Zweigstellen zu verteilen, wenn auch mehrere in einer Stadt sein können?

Lösung:

$$\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = 35$$

Erklärung: Bei dieser Aufgabe darf man sich nicht verwirren lassen, denn die Grundmenge sind die 5 Städte. Im Grunde genommen Ziehen wir aus den 5 Städten dreimal eine und legen sie wieder zurück, sodass sie noch mal gezogen werden kann.

Aufgabe 2: Auf einer Wiese wachsen Tulpen, Rosen und Margeriten. Wenn ich zufällig 5 Blumen pflücke, wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es?

Lösung:

$$\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)! \cdot 5!} = 21$$

Erklärung: Hier ist die Anzahl der Ziehungen mit 5 größer als die Anzahl der Blumen mit 3, was allerdings in Ordnung ist, da es von jeder Blumenart beliebig viele gibt, was sich genauso verhält, als würden wir die Blumen nach dem Pflücken wieder zurück legen.

14.1.6 Kombination ohne Wiederholung

Wenn man eine Teilmenge der Grundmenge ohne Beachtung der Reihenfolge betrachtet, die keine gleichen Elemente hat bzw. nichts zurückgelegt wird, benutzt man den einfachen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ zur Berechnung der Möglichkeiten.

Aufgabe 1: Im klassischen deutschen Lotto werden 6 Zahlen aus 49 und eine Superzahl von 0 bis 9 gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, mit einmal spielen, bei diesem Lotto alles richtig zu raten?

Lösung:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = 13983816 \text{ Möglichkeiten} \Rightarrow P = \frac{1}{13983816} \cdot \frac{1}{10} = 1 : 139.838.160$$

Erklärung: Es gibt ca. 14 Millionen Möglichkeiten die Zahlen 6 aus 49 zu wählen. Da immer nur eine Möglichkeit richtig ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit 1 zu 14 Million. Wenn man noch die 1 in 10 Chance, die Superzahl richtig zu haben dazu multipliziert, erhält man eine Gewinnchance von 1 zu 140 Millionen. Achtung: Glücksspiel kann süchtig machen!

Aufgabe 2: Eine Firma sucht zwei neue Software-Entwickler. Unter 52 Bewerbern sollen 2 ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung dieser beiden Posten?

Lösung:

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{(52-2)! \cdot 2!} = 1326$$

Erklärung: Es sollen 2 aus 52 Personen ausgesucht werden, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt, da beide dieselbe Art von Stelle antreten sollen. Es ist also egal, wer Software-Entwickler Nummer 1 und wer Software-Entwickler Nummer 2 wird.

14.2 Zufallsvariablen

Bei Zufallsexperimenten haben wir i.d.R. eine Grundmenge Ω mit den möglichen Ergebnissen. Für einen Münzwurf z.B.: $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$. Wenn wir diesen Ergebnissen jetzt Werte zuordnen sprechen wir von einer Zufallsvariable, da diese einen Wert annimmt, der auf dem zufälligen Ausgang des Experimentes basiert. Man könnte beispielsweise sagen, bei Kopf bekommt man fünf Euro und bei Zahl verliert man fünf Euro.

$$X(\omega) = \begin{cases} 5, \text{ wenn } \omega = \text{Kopf} \\ -5, \text{ wenn } \omega = \text{Zahl} \end{cases}$$

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung (S. 7), die jedem Wert aus der Grundmenge genau einen Wert aus den reellen Zahlen zuordnet. Dabei unterscheidet man zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariablen. Diskret ist ein Zufallsvariable, wenn sie eine abzählbare Menge an Werten annehmen kann, z.B. $X :=$ »Gewürfelte Augenzahl«. Stetig ist sie, wenn sie eine nicht abzählbare Menge von Werten haben kann, z.B. $X :=$ »Körpergewicht einer beliebigen Person«. Dabei können reelle Zahlen mit theoretisch uneingeschränkt vielen Nachkommastellen entstehen.

14.2.1 Wahrscheinlichkeits-, Verteilungs-, und Dichtefunktion

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion (auch Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion genannt) ist eine mathematische Funktion, die die Wahrscheinlichkeiten angibt, mit denen eine diskrete Zufallsvariable bestimmte Werte annimmt. Diese Funktion ordnet jedem möglichen Wert der Zufallsvariable eine Wahrscheinlichkeit zu, und die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt 1. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion wird oft durch eine Tabelle oder eine Formel dargestellt. Es gibt viele verschiedene Funktionen. Allgemein gilt:

$$f(x_i) = p_i$$

Eine Verteilungsfunktion (auch kumulative Verteilungsfunktion genannt) ist eine mathematische Funktion, die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass eine Zufallsvariable einen bestimmten Wert oder einen kleineren Wert annimmt. Anders als die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist die Verteilungsfunktion bei stetigen Zufallsvariablen definiert und gibt die kumulative Verteilungsfunktion an. Die Verteilungsfunktion steigt monoton an und nimmt Werte zwischen 0 und 1 an. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert zwischen zwei bestimmten Werten annimmt, kann durch Differenzieren der Verteilungsfunktion berechnet werden. Für diskrete Zufallsvariablen mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion kann die Verteilungsfunktion durch die kumulative Summe der Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Das heißt, um die Verteilungsfunktion F(x) zu berechnen, wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion p(x) für alle Werte kleiner oder gleich x aufsummiert. Für stetige Zufallsvariablen mit einer Dichtefunktion wird die Verteilungsfunktion durch Integration der Dichtefunktion berechnet. Das heißt, um die Verteilungsfunktion F(x) zu berechnen, wird die Dichtefunktion f(x) für alle Werte kleiner oder gleich x integriert.

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P_X((-\infty, x])$$

Eine Dichtefunktion (auch Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion genannt) ist eine mathematische Funktion, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen (also nicht einfach nur diskreten) Zufallsvariable beschreibt. Im Gegensatz zur Wahrscheinlichkeitsfunktion bei diskreten Zufallsvariablen gibt die Dichtefunktion an, wie wahrscheinlich es ist, dass die Zufallsvariable einen bestimmten Wert annimmt, indem sie die Steigung der Funktion an diesem Wert angibt. Die Fläche unter der Dichtefunktion zwischen zwei Werten gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die

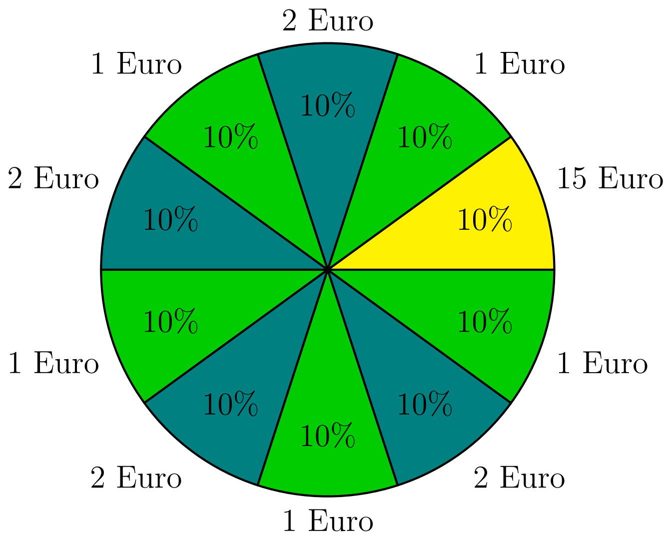
Zufallsvariable einen Wert innerhalb dieses Intervalls annimmt.

$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion bzw. die Verteilungsfunktion ist die Dichtefunktion integriert. Die Dichtefunktion ist immer größer gleich 0 und für einen einzigen Punkt (Intervall (a, a)) immer 0. Deswegen gilt auch $P(X \leq x) = P(X < x)$.

14.2.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Stellen wir uns vor, wir haben das unten gezeichnete Glücksrad mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und Gewinnen und gehen davon aus, dass man 5 Euro Einsatz bezahlen muss, um zu drehen. Wir wollen jetzt wissen, ob dieses Spiel fair ist oder nicht. Dazu berechnet man den Erwartungswert. Er beschreibt die Zahl, die die Zufallsvariable im Mittel annimmt. Man kann ihn sich auch als Mittelwert einer Zufallsvariable vorstellen. Das bedeutet, dass wenn der Erwartungswert genau Null ist, ein für beide Seiten faires Spiel vorliegt. Ansonsten macht die eine Seite Gewinn und die andere Verlust.



Den Erwartungswert berechnet man, indem man jeden Wert der Zufallsvariable mit ihrer Wahrscheinlichkeit multipliziert und anschließend alles zusammenrechnet.

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$ auch mit μ bezeichnet

Diese Formel gilt allgemein. Für einige Verteilungen gibt es einfachere Formeln, den Erwartungswert auszurechnen.

Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

Dieser Sachverhalt lässt sich auch sehr gut in einer Wertetabelle darstellen.

x_i		-4	-3	$+10$
$P(X = x_i)$		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(X = x_i) = -4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{2}{5} + 10 \cdot \frac{1}{10} = \underline{\underline{-2,2}}$$

Damit ist das Spiel nicht fair und man muss davon ausgehen, als Spieler Geld zu verlieren. Wenn man das Spiel fair machen will, muss man die obige Formel mit Null gleichsetzen und dann einen beliebigen Wert durch eine Variable ersetzen. Durch Umstellen findet man dann eine Lösung, um das Spiel fair zu machen.

$$\begin{aligned} & -4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{10} x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{10} x = 3,2 \\ \Leftrightarrow\ & x = 32 \end{aligned}$$

Das Spiel wäre z.B. fair, wenn der Gewinn auf dem gelben Feld 37 Euro betragen würde. Hinweis: Als Wert haben wir zwar 32 bekommen, aber man darf nicht vergessen die 5 Euro Einsatz wieder drauf zu rechnen.

Wenn man den Erwartungswert errechnet hat, kann man auch die Varianz und die Standardabweichung errechnen. Varianz und Standardabweichung geben an, wie Groß die durchschnittliche Entfernung bzw. die Streuung vom Mittelwert ist. Zur Erinnerung: Der Mittelwert errechnet sich, indem man alle Werte addiert und durch die Anzahl aller Werte teilt und wird als $\bar{x}$ geschrieben. Für diskrete Zufallsvariablen unterscheidet sich die Rechnung ein wenig: Man rechnet hier mit dem Erwartungswert und der Wahrscheinlichkeit, da man keine Daten aus einer eigentlichen Ausführung des Experimentes hat.

Varianz einer diskreten Zufallsvariable

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$ auch mit σ^2 bezeichnet

Varianz einer stetigen Zufallsvariable

$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx$ auch mit σ^2 bezeichnet

Standardabweichung einer Zufallsvariable

$S(X) = \sqrt{V(X)}$ auch mit σ bezeichnet

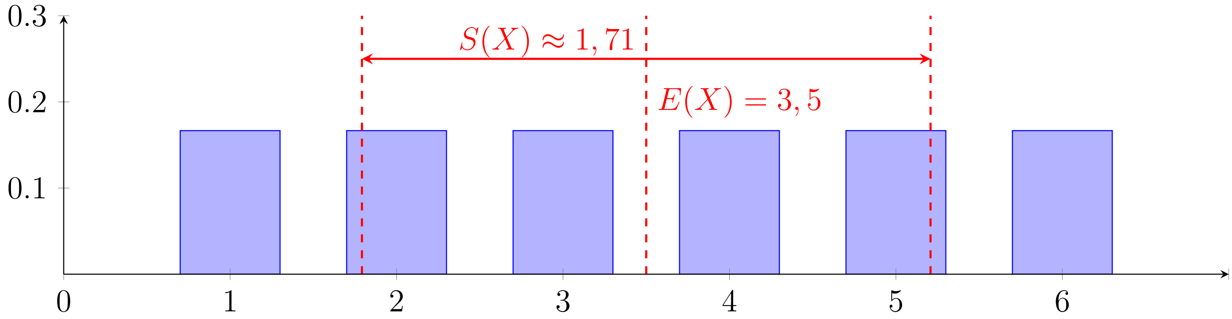
Kovarianz zweier Zufallsvariablen

$cov(X_1, X_2) = E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)))$

Wenn wir diese Werte jetzt für unser Beispiel oben ausrechnen, erhalten wir Folgendes:

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{3}(x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i) \\
&= (-4-(-2,2))^2 \cdot \frac{1}{2} + (-3-(-2,2))^2 \cdot \frac{2}{5} + (10-(-2,2))^2 \cdot \frac{1}{10} \\
&= \underline{\underline{16,76}} \\
S(X) &= \underline{\underline{\sqrt{16,76}}}
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass Ergebnisse der Zufallsvariable im Schnitt ungefähr 4 vom Erwartungswert entfernt wären, wenn man das Experiment ausführen würde. Was ist der Unterschied zwischen Varianz und Standardabweichung? Meistens errechnet man die Varianz nur, um die Standardabweichung zu kriegen. Da die Varianz immer eine quadratische Einheit beschreibt, ist es oft nicht möglich, sie mit dem Erwartungswert zu vergleichen. Wichtig zu verstehen ist nur, dass je kleiner Varianz und Standardabweichung sind, desto besser beschreibt der Erwartungswert das Experiment. Hier einmal Varianz und Standardabweichung für einen sechsseitigen Würfel:



14.3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

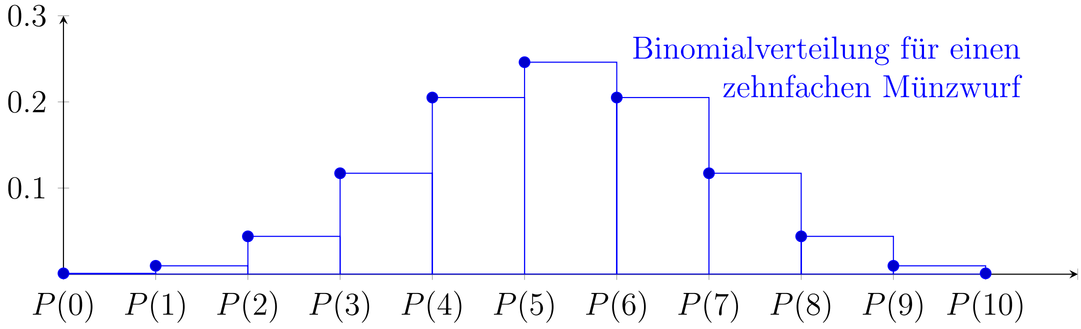
14.3.1 Binomialverteilung

Mithilfe der Binomialverteilung ermittelt man die Wahrscheinlichkeit, ein Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit p bei n Durchführungen eines Zufallsexperimentes genau k-mal zu erhalten. Alle Wahrscheinlichkeiten addiert, ergeben am Ende wieder 1.

Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$

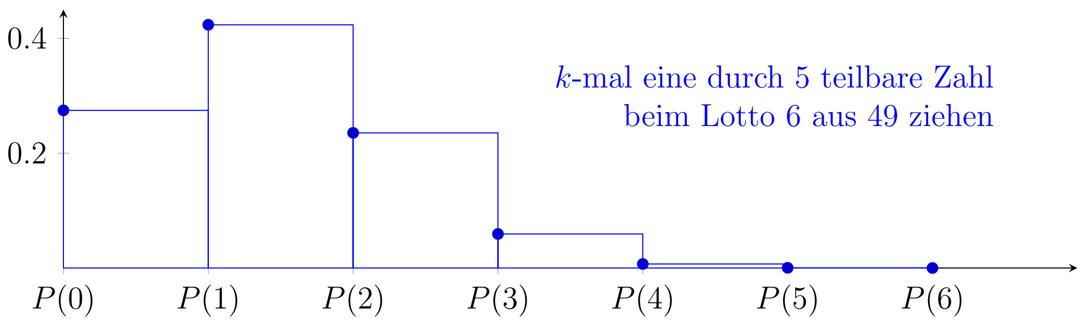
Varianz: $V(X) = np(1-p)$



14.3.2 Hypergeometrische Verteilung

Man hat eine Menge mit A Elementen, von denen B Elemente eine bestimmte Eigenschaft haben, die die anderen nicht haben. Man entnimmt eine Anzahl n von Elementen aus der Menge ohne sie zurückzulegen. Um jetzt zu ermitteln, wie wahrscheinlich es ist, genau k-mal Elemente der Gruppe B zu erhalten, nutzt man die hypergeometrische Verteilung. Alle Wahrscheinlichkeiten addiert, ergeben am Ende wieder 1.

Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P(k) = \dfrac{\binom{B}{k}\binom{A-B}{n-k}}{\binom{A}{n}}$



14.3.3 Geometrische Verteilung

Die geometrische Verteilung ist die Wahrscheinlichkeit dafür genau i Schritte zu brauchen, um den ersten Treffer für ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p zu erlangen.

Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P(X = i) = p(1-p)^{i-1}$
Erwartungswert: $\frac{1}{p}$

14.3.4 Negative Binomialverteilung

Die negative Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, genau $m+k$ ausführungen zu brauchen, um erstmals m Treffer bei einem Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p zu landen.

$$P(X = m+k) = \binom{m+k-1}{m-1} p^m (1-p)^k$$

14.3.5 Poisson-Verteilung

Bei der Poisson-Verteilung, sind unsere Elementarereignisse Zahlen. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable die Zahl i annimmt in Abhängigkeit einer mittleren Rate λ. Die mittlere Rate ist oft der Erwartungswert der Variable.

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda > 0$$

Wir können die Poisson-Verteilung auch benutzen, um eine Näherung für die Binomialverteilung zu erhalten, wenn wir eine sehr große Menge an Elementen betrachten, da die Poisson-Verteilung unabhängig von der Anzahl der Elemente ist.

14.3.6 Zipf-Verteilung

Bei der Zipf-Verteilung ordnen wir Wörtern entsprechend ihrer Häufigkeit einen Rang zu. Die Wahrscheinlichkeit eines Wortes ist dann ungefähr das Inverse seines Ranges.

$$P(X = k) = \frac{1}{c} \cdot k^{-s}, \qquad s > 1, \qquad c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

14.3.7 Multinomiale Wahrscheinlichkeit

Wenn wir ein Experiment n mal wiederholen und dabei l Ereignisse haben, z.B. n Ziehungen von Losen und l Losfarben, dann ist $B_{n_1,n_2,\ldots,n_l}$ das Ereignis, dass die Ereignisse A_1 $n_1 - mal$, A_2 $n_2 - mal$, $\ldots$, und A_l $n_l - mal$ eintreten. Die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen wir mit dieser Formel:

$$\boxed{P(B_{n_1,n_2,\ldots,n_l}) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_l!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot p_l^{n_l}}$$

Dabei sind p_i die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A_i.

14.4 Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im folgenden wird immer die Verteilungs- und die Dichtefunktion angegeben, weil die Verteilungsfunktion die Dichtefunktion integriert ist. Um die Wahrscheinlichkeit für ein Intervall zu berechnen, muss man die Fläche unter der Dichtefunktion in diesem Intervall berechnen. Wenn man also die Verteilungsfunktion kennt, reicht es diese für die Intervallenden auszurechnen und die Differenz zu bilden.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Die inverse Verteilungsfunktion nennen wir auch Quantilfunktion Φ. Dabei ist $x = \Phi(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$ das α-Quantil. Andersherum ist $F(x) = \alpha$ ebenfalls das α-Quantil. Das heißt also, das ist der Anteil der Werte, die kleiner gleich α sind.

14.4.1 Gleichverteilung

Verteilungsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$

Dichtefunktion: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Erwartungswert: $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Varianz: $V(X) = \dfrac{(a+b)^2}{12}$

14.4.2 Exponentialverteilung

Verteilungsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Dichtefunktion: $f(x) = \begin{cases} \lambda - e^{-\lambda \cdot x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Erwartungswert: $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Varianz: $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

14.4.3 Paretoverteilung

Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - x^{-\alpha}, \qquad x > 1, \qquad \alpha > 0$

Dichtefunktion: $f(x) = \alpha \cdot x^{-\alpha - 1}$

14.4.4 Normalverteilung

Verteilungsfunktion: $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

Dichtefunktion: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad \sigma > 0$

Der Parameter σ^2 legt die Skala bzw. Streuung fest, also wie nahe bei einander die Werte verteilt sind und der Parameter μ legt die Lage der Normalverteilung fest.

Wenn wir $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ setzen, reden wir von einer Standard-Normalverteilung.

Für die Normalverteilung berechnen wir das p-Quantil folgendermaßen: $x_p(\mu, \sigma) = \sigma \cdot x_p(0, 1) + \mu$. Das heißt, wir müssen nur das p-Quantil für die Standard-Normalverteilung nachgucken und die Parameter anwenden. Das heißt im Umkehrschluss, dass wir eine normalverteilte Zufallsvariable normalisieren können, indem wir μ abziehen und durch σ teilen.

14.4.5 Lognormalverteilung

$$\text{Dichtefunktion: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad \sigma > 0$$

14.4.6 Cauchyverteilung

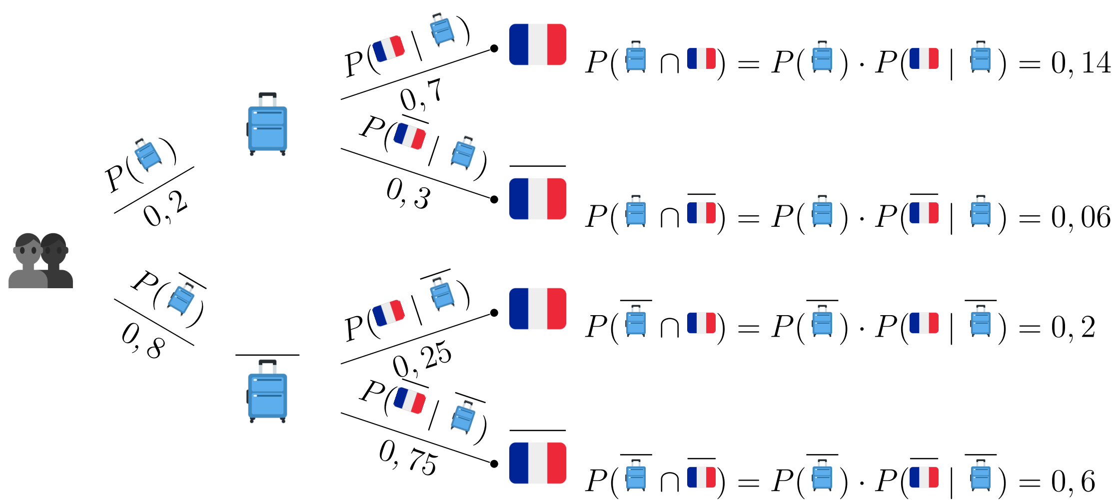
$$\text{Verteilungsfunktion: } F(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(x)$$

$$\text{Dichtefunktion: } f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

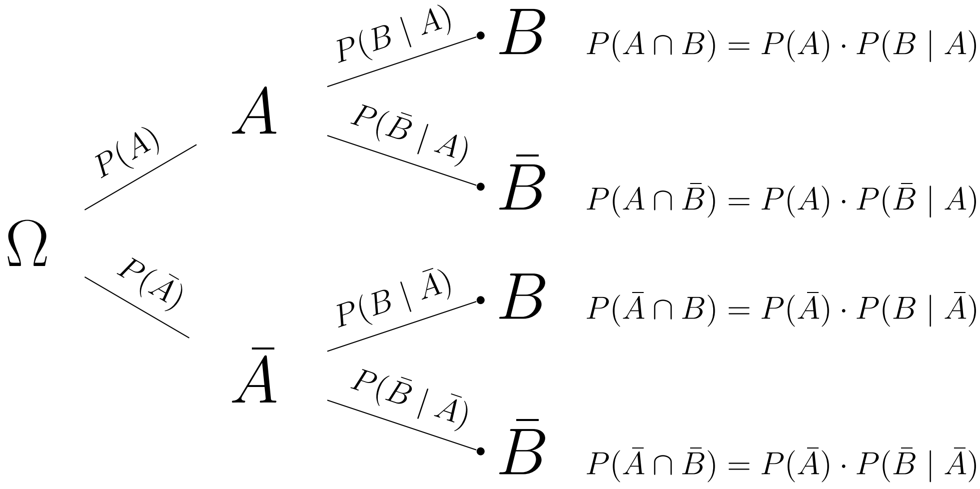
Für die Cauchyverteilung existiert die Varianz nicht.

14.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wir stellen uns vor, wir haben eine Grundmenge 👥 von Menschen. 20% der Leute in dieser Gruppe haben ein Auslandsjahr in einem französischsprachigen Land absolviert. Diese Teilmenge nennen wir 🧳. Außerdem ordnen wir alle Menschen, die Französisch sprechen in der Gruppe 🇫🇷, sodass wir zwei Teilmengen von 👥 haben. Wir wissen weiterhin, dass ein Mensch aus der Teilgruppe 🧳 mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% Französisch spricht. Die Menschen, die kein Auslandsjahr gemacht haben und damit nicht in der Gruppe 🧳 sind, sprechen mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% Französisch.



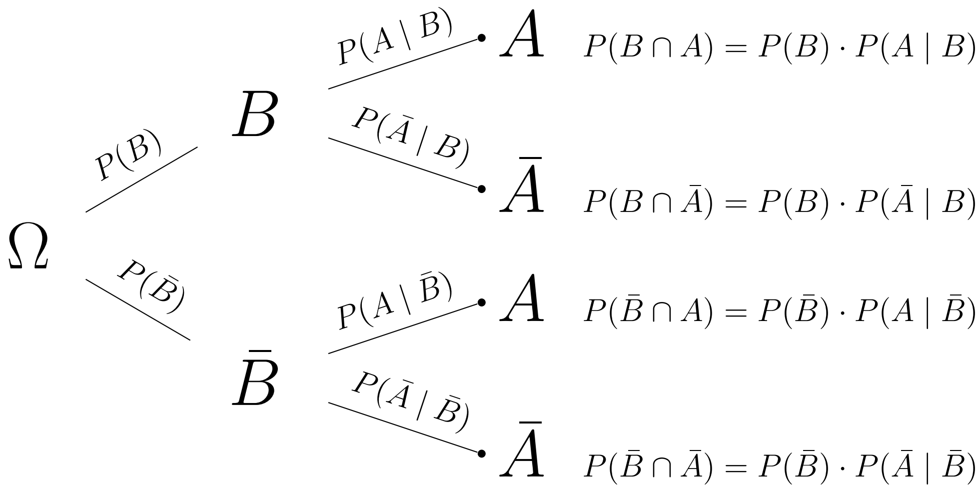
Um jetzt nachzuvollziehen, wie viele Menschen der Grundmenge insgesamt Französisch sprechen, müssen wir die beiden Pfade P(🇫🇷 ∩ $\overline{\text{🧳}}$) und P(🇫🇷 ∩ 🧳) addieren und erhalten damit die Wahrscheinlichkeit P(🇫🇷) $= 0,34$. Um jetzt nicht jedes Mal ein Baumdiagramm zeichnen zu müssen uns solche Aufgaben schnell lösen zu können, können wir ein paar allgemeine Formeln aufstellen. Dazu verallgemeinern wir auch das Diagramm noch mal. Übrigens: $P(B \mid A)$ spricht man als »P von B unter der Bedingung A« und das kann auch mal als $P_A(B)$ geschrieben werden.



Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A}) \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt das Baumdiagramm noch mal anders herum aufzeichnen, können wir noch eine tolle Formel herleiten.



Die Äste $P(A \cap B)$ und $P(B \cap A)$ sind ja genau das Gleiche, weshalb wir sie gleichsetzen können.

Satz von Bayes

$$
\begin{aligned}
&P(A \cap B) = P(B \cap A) \\
\Leftrightarrow\ &P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)} = P(A \mid B)
\end{aligned}
$$

Zu den beiden obigen Sätzen jetzt ein Beispiel: Von allen Patienten haben 0,1% eine Krankheit, die sich »Blubber« (B) nennt. Des Weiteren existiert ein Test, um zu überprüfen, ob jemand den Blubber hat. Dieser findet den Blubber in einer erkrankten Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% (+). Gleichzeitig gibt der Test aber auch bei 1% der nicht Erkrankten ein falsch positives Ergebnis aus. Stell dir vor du wurdest positiv getestet. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass du den Blubber hast? Man könnte zunächst denken 99%. Das stimmt aber nicht, denn das ist die Wahrscheinlichkeit $P(+ \mid B)$, wir suchen aber die Wahrscheinlichkeit $P(B \mid +)$. Wir stellen also mit dem Satz von Bayes eine Gleichung auf.

$$
\begin{aligned}
&P(B) \cdot P(+ \mid B) = P(+) \cdot P(B \mid +) \\
\Leftrightarrow &P(B \mid +) = \frac{P(B) \cdot P(+ \mid B)}{P(+)} \\
\Rightarrow &P(B \mid +) = \frac{0,001 \cdot 0,99}{P(+)}
\end{aligned}
$$

Dummerweise fehlt uns die Wahrscheinlichkeit, positiv getestet zu werden, unabhängig davon, ob man krank ist oder nicht. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit finden wir jedoch auch diese Wahrscheinlichkeit heraus und können weiter rechnen.

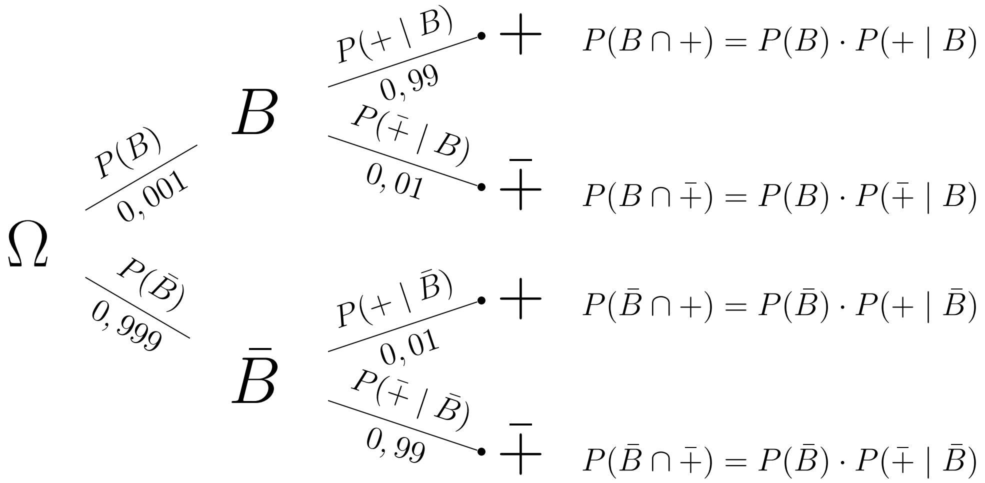
$$
\begin{aligned}
&P(+) = P(B) \cdot P(+ \mid B) + P(\bar{B}) \cdot P(+ \mid \bar{B}) \\
\Rightarrow &P(B \mid +) = \frac{0,001 \cdot 0,99}{P(B) \cdot P(+ \mid B) + P(\bar{B}) \cdot P(+ \mid \bar{B})} \\
\Rightarrow &P(B \mid +) = \frac{0,001 \cdot 0,99}{0,001 \cdot 0,99 + 0,999 \cdot 0,01} = \frac{11}{122} \approx \underline{\underline{9\%}}
\end{aligned}
$$

Damit wissen wir jetzt, dass aufgrund des falsch positiven Ergebnisse deine Chance, tatsächlich den Blubber zu haben gerade mal 9% ist. Um dir sicher zu sein, lässt du jetzt einen zweiten Test machen. Dieser kommt auch positiv zurück. Wenn du jetzt die 9% Wahrscheinlichkeit nimmst, krank zu sein und sie noch einmal in die obige Formel einsetzt, kannst du jetzt auch die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass du nach dem zweiten Test den Blubber hast.

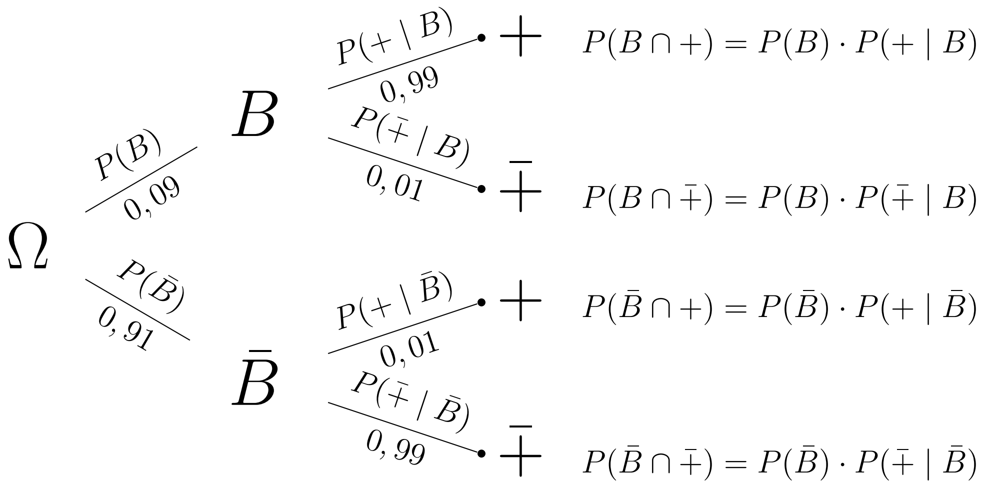
$$
\begin{aligned}
&P(+) = P(B) \cdot P(+ \mid B) + P(\bar{B}) \cdot P(+ \mid \bar{B}) \\
\Rightarrow &P(B \mid +) = \frac{0,09 \cdot 0,99}{0,09 \cdot 0,99 + 0,91 \cdot 0,01} = \frac{891}{982} \approx \underline{\underline{91\%}}
\end{aligned}
$$

Hier nochmal die dazugehörigen Baumdiagramme, um dass besser nachvollziehen zu können:

Erster Test



Zweiter Test



Stichwortverzeichnis