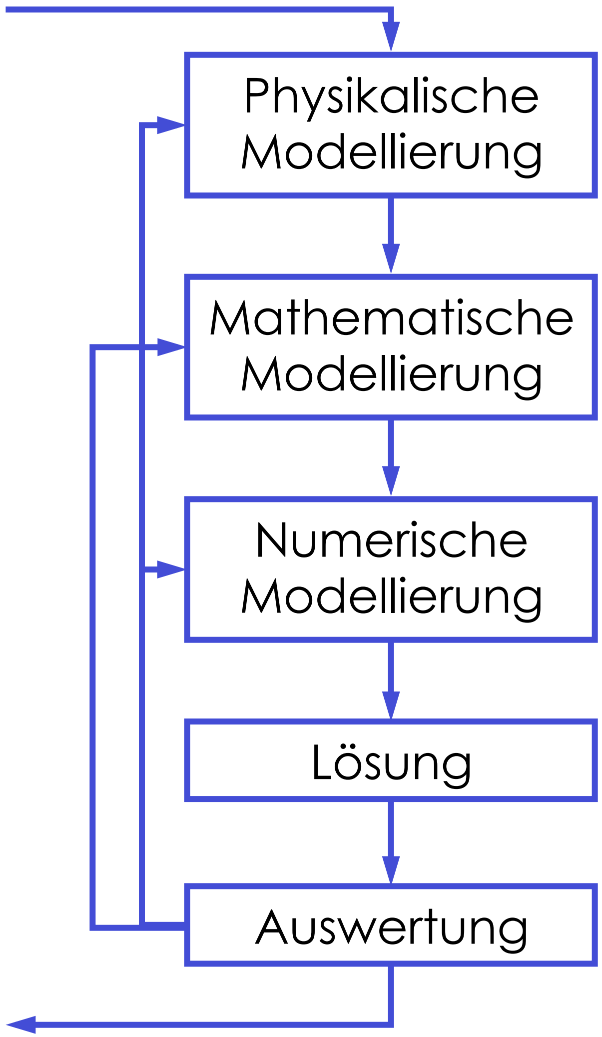
Angewandte Strömungssimulation

4. Vorlesung

Stefan Hickel

Reynolds - Averaged Navier - Stokes : RANS

Numerische Strömungsberechnung



Parameter
und Kennzahlen

Gleichungssystem

Turbulenzmodell

Randbedingungen

Diskrete Operatoren

Lösungsalgorithmen

Rechengitter

Programmierung

Berechnung

Visualisierung

Validierung

CFX – Pre
-> Parameterdatei

ICEM CFD
-> Gitter

CFX – Solver
-> Ergebnisdatei

CFX – Post
-> Bilder und Erkenntnis

CFD für Ingenieure

- CFD für praktische Anwendungen basiert auf dem Weglassen überflüssiger Detailfülle.
- Weglassen bedeutet Modellierung!
- **Idee:** aus den Grundgleichungen für turbulente Strömungen Gleichungen ableiten, deren Lösung unmittelbar die relevanten Strömungsgrößen ergeben.

Die gebräuchlichsten Ansätze sind:

- Lösung der Gleichungen für die zeitlichen Mittelwerte -> **RANS**
- Lösung der Gleichungen ausschließlich für die räumlich großen Skalen -> **LES**
- Eine Erweiterung von RANS ist die Lösung der Gleichungen für die langsamen Skalen -> **URANS**
- Zusätzlich gibt es zonale / hybride Verfahren, z.B **DES**, …

Reynoldsmittelung

- Ensemblegemittelte Lösung

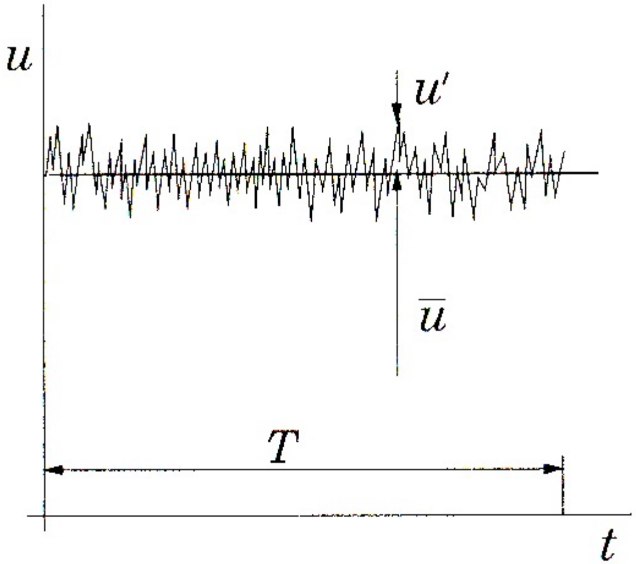
$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} u_i \big|_{\mu}$$

- für statistisch stationäre Probleme:

$$\langle u_i \rangle = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t u_i(t')dt'$$

- Aufspalten der Lösung in Mittelwert und Fluktuation:

$$u_i = \langle u_i \rangle + u_i'$$



- Reynolds-Mittelung ist eine orthogonale Projektion:

$$\langle\langle u_i \rangle\rangle = \langle u_i \rangle, \; \langle u_i' \rangle = 0$$

Reynoldsmittelung

Rechenregeln

$$\langle u+v\rangle = \langle u\rangle + \langle v\rangle$$

$$\langle au\rangle = a\langle u\rangle \qquad , a = const$$

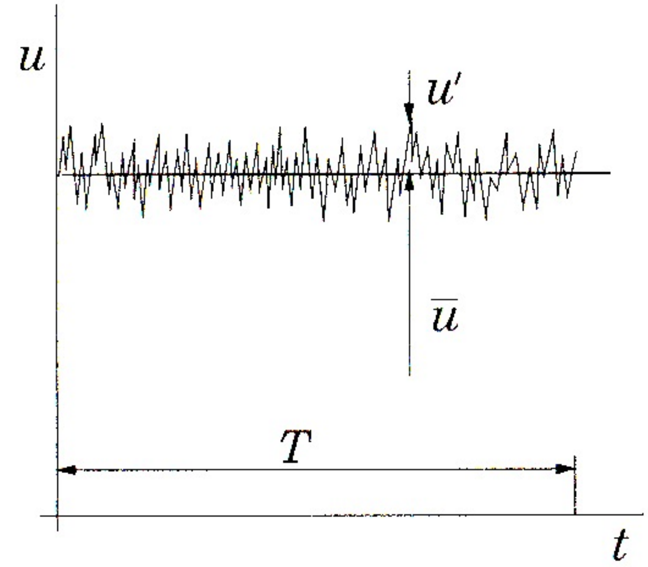
$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle = \frac{\partial \langle u\rangle}{\partial x}$$

$$\langle\langle u\rangle v\rangle = \langle u\rangle\langle v\rangle$$

$$u' = u - \langle u\rangle$$

$$\langle u'\rangle = 0$$

$$\langle\langle u\rangle v'\rangle = 0$$



Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Navier-Stokes-Gleichungen in dimensionsloser Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u}\underline{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla \cdot \nabla \underline{u} &= 0 \\ \nabla \cdot \underline{u} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

inkompressibles Fluid mit konstanter Dichte und konstanter Viskosität

Reynolds - Mittelung

- Einsetzen der Summe aus Mittelwert und Fluktuation in die Navier-Stokes Gleichungen
- Zeitliche Mittelung durchführen
- Es folgen die Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) Gleichungen

Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Tafelanschrieb:

Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Inkompressible Navier-Stokes-Gl. für den Mittelwert

$$\frac{\partial\langle\underline{u}\rangle}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\langle\underline{u}\rangle\langle\underline{u}\rangle\right)+\frac{1}{\rho}\nabla\langle p\rangle-\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\cdot\nabla\langle\underline{u}\rangle=-\nabla\cdot\langle\underline{u}'\underline{u}'\rangle$$

$$\nabla\cdot\langle\underline{u}\rangle=0$$

Tensor der Reynoldsspannungen $\tau_{ij}=-\left\langle u_i'u_j'\right\rangle$

Schließungsproblem

- Mehr Unbekannte als Gleichungen
- Der **Reynoldsspannungstensor** muss mit Hilfe von Turbulenzmodellen beschrieben werden.

Transportgleichung der Reynoldsspannungen

- für die Reynoldsspannungen lässt sich eine exakte Transportgleichung herleiten, die **R**eynolds**s**pannungs-**T**ransportgleichung (RST)

- Zunächst wird die Impulsgleichung für die *i* – Komponente mit u_j' und die Impulsgleichung für die *j* – Komponente mit u_i' multipliziert und gemittelt.

- Die beiden Gleichungen werden arithmetisch gemittelt und es folgt die RST, mit der allgemeinen Form (stationär)

$$\frac{\partial \left\langle u_i' u_j' \right\rangle}{\partial t} + \underbrace{K_{ij}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{P_{ij}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{T_{ij} + D_{ij}^{\nu} + D_{ij}^{p}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\Phi_{ij}}_{\text{Druck-Scher-Korrelation}} - \underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\text{Dissipation}}$$

- Die meisten Terme in der RST beinhalten jedoch weitere Unbekannte und müssen daher modelliert werden.

Transportgleichung der Reynoldsspannungen

Advektion

- Transport durch mittlere Strömung

$$K_{ij} = \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k}$$

Turbulente Diffusion

- Transport durch turbulente Schwankungen

$$T_{ij} = \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial x_k}$$

Produktion

- Quellterm
- Wachstum von turbulenten Schwankungen durch Energietransfer aus mittlerer Strömung

$$P_{ij} = -\left(\langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \right)$$

Transportgleichung der Reynoldsspannungen

Viskose Diffusion

- Transport durch viskose Scherspannungen

$$D_{ij}^{v} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 \left\langle u_i' u_j' \right\rangle}{\partial x_k \partial x_k}$$

Druck-Diffusion

- Transport durch Druckfluktuationen

$$D_{ij}^{p} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \left\langle u_j' p' \right\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \left\langle u_i' p' \right\rangle}{\partial x_j} \right)$$

Druck-Scher-Korrelation

- Umverteilungsterm

$$\Phi_{ij} = \left\langle \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \right\rangle$$

Dissipation

- Senke
- Energieumwandlung in Wärme

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{\mathrm{Re}} \left\langle \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle$$

Transportgleichung der Reynoldsspannungen

- Die RST enthält unbekannte Korrelationen, z.B. $\langle u_i' p' \rangle$ und $\langle u_i' u_j' u_k' \rangle$

- Für jeden dieser Terme kann wiederum eine Transportgleichung hergeleitet werden, die jedoch erneut unbekannte Korrelationen enthält…

- Die Ordnung der vorkommenden Tensoren erhöht sich dabei. Eine Bilanzgleichung für die Tripelkorrelation $\langle u_i' u_j' u_k' \rangle$ würde einen Tensor 4. Stufe enthalten.

Fazit

- Das Schließungsproblem lässt sich auf diesem Weg nicht lösen, da immer mehr Unbekannte als Gleichungen bleiben.
- Einziger möglicher Weg sind halbempirische Annahmen: Turbulenzmodelle

Turbulenzmodelle für die RANS Gleichung

Wirbelviskositäts-modelle

Reynoldsspannungs-modelle

algebraisch (0-Gleichung)	ein oder mehrere Transport-gleichungen	nichtlineare Wv-modelle und algebraische RS-Modelle	volle RST + evtuell weitere Transport-gleichungen
z.B. Prandtl (1925), Baldwin-Lomax (1978), Cebeci-Smith (1967)	z.B. Spalart-Allmaras (1992), Jones-Launder (1972), Wilcox (1988)	z.B. Durbin (1995), Wallin-Johansson (2000)	z.B. Launder-Reece-Rodi (1975), Speziale-Sarker-Gatski (1991)

Wirbelviskositätsmodelle

Wirbelviskositäts – Hypothese

- Beobachtung: Turbulenz führt zu Impulsaustausch zwischen Fluidelementen.

- Modell: Der Deviator der RS wird proportional zur mittleren Scherrate gesetzt.
  Als Proportionalitätsgröße dient eine neue Größe, die **Wirbelviskosität ν_t** .

- Die Wirbelviskosität ist eine Feldgröße,
  keine Stoffgröße wie die kinematische Viskosität ν .

Kronecker-Delta

Scherrate

$$-\langle u_i' u_j' \rangle \cong 2 \nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k$$

Wirbelviskosität

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , wenn\ i = j \\ 0 & , wenn\ i \neq j \end{cases}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_k}$$

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i' u_i' \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \langle u_i' u_i' \rangle$$

Wirbelviskositätsmodelle

- Einfügen des Ansatzes für die Reynoldsspannungen in die RANS Gleichungen ergibt

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{2}{3}k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\left(\nu + \nu_t\right) S_{ij} \right)$$

- Das Modellierungsziel wird bei der Wirbelviskositätshypothese wird von den sechs Komponenten des Reynolds'schen Spannungstensors auf die Modellierung einer einzigen skalaren Größe (Wirbelviskosität ν_t) verlagert.
- Die Wirbelviskositätsannahme kann bei Strömungen mit einer ausgeprägten Hauptströmungsrichtung (Grenzschichten) experimentell bestätigt werden.
- ν_t kann auf fast beliebige Weise mit dem Strömungsfeld verbunden sein.

Wirbelviskositätsmodelle

- mit Hilfe dimensionsanalytischer Untersuchungen können verschiedene Modellansätze zur Berechnung der Feldgröße Wirbelviskosität hergeleitet werden:
  - Nullgleichungsmodell: z.B. $\nu_t \propto l_m^2 \left\| \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right\|$
  - Eingleichungsmodell: z.B. $\nu_t \propto l_m \sqrt{k}$
  - Zweigleichungsmodell: z.B. $\nu_t \propto \frac{k^2}{\varepsilon}$ oder $\nu_t \propto \frac{k}{\omega}$
- die Anzahl der verwendeten DGL bestimmt maßgeblich den Modelltyp

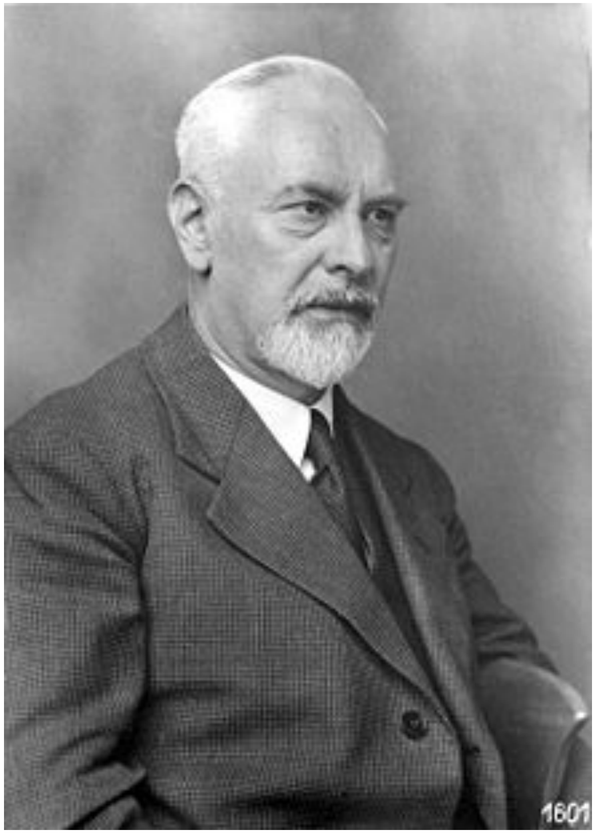
Prandtl Mischungswegmodell

- Prandtl (1925)

- Algebraischer Mischungswegsansatz

$$\nu_T = l_m^2 \left\| \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right\|$$

- Der Mischungsweg ist eine typische Längenskale der Turbulenz und muss geeignet gewählt oder modelliert werden.



Ludwig Prandtl
1875(Freising)-1953(Göttingen)

Grenzschichtmethode (Nullgleichungsmodell)

Beobachtung

- Im äußeren Bereich einer Wand-Grenzschicht ist die Wirbelviskosität näherungsweise konstant.
- In der Nähe von Wänden werden die turbulenten Längenskalen kleiner.

Modellierung $\nu_T = l_m^2 \left| \partial_y \langle u \rangle \right|$

$$l_m = 0.2 \kappa u_\tau \delta_{99} \,, \quad y \geq 0.2\, \delta_{99}$$

Grenzschichtdicke

$$l_m = \kappa y \underbrace{\left(1 - e^{-y^+ / A^+} \right)}, \quad y < 0.2 \delta_{99}$$

van Driest Dämpfungsfunktion

$A^+ \approx 26$

van Karman Konstante

$\kappa = 0.41$

- Im äußeren Bereich oft mit Intermittenzfaktor multipliziert.
- Da das Model auf Grenzschichtgrößen basiert, ist es kaum auf komplexere Strömungen erweiterbar.

Prandtl Eingleichungsmodell

- Verbesserung durch Berücksichtigung der Turbulenzintensität
- Ansatz für Wirbelviskosität

$$\boxed{\nu_T = l_m \sqrt{k}}$$

$$-\langle u_i' u_j' \rangle = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k$$

Transportgleichung für kinetische Energie der Turbulenz *k*

- Die turbulente kinetische Energie k ist definiert als die Spur des Reynoldsspannungstensors

$$k = \frac{1}{2}\langle u_i' u_i' \rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\langle u_i' u_i' \rangle$$

- Eine Transportgleichung für k erhält man, indem man in der Reynoldspannungs-Transportgleichung $i=j$ setzt und die Definition von k anwendet.

Transportgleichung für k

- Gegenüber der RST vereinfachen sich die Terme deutlich, die Druck-Scher-Korrelation entfällt:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{-\langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{1}{2}\langle u_i' u_i' u_j' \rangle + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\langle p' u_j' \rangle \right)}_{\text{Diffusion}}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle}_{\text{Dissipation}}$$

Prandtl Eingleichungsmodell

- Die im Produktionsterm der exakten Transportgleichung für k auftretenden Reynoldsspannungen werden mit dem folgenden Ansatz modelliert

$$P = -\left\langle u_i' u_j' \right\rangle \frac{\partial \left\langle u_i \right\rangle}{\partial x_j} = \left(2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k \right) \frac{\partial \left\langle u_i \right\rangle}{\partial x_j}$$

- Die Modellierung der Druck-Diffusion und des turbulenten Transports erfolgt ebenfalls über einen Wirbelviskositätsansatz

$$T + D^p = -\frac{1}{2}\left\langle u_i' u_i' u_j' \right\rangle - \frac{1}{\rho}\left\langle p' u_j' \right\rangle = \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

- Prandtls Modell für die Dissipation lautet

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right\rangle = C_D \frac{k^{3/2}}{l_m}$$

Prandtl Eingleichungsmodell

- Mit diesen Vereinfachungen resultiert die **Modell**-Transportgleichung

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k} \right] \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_{\text{Diffusion}} \underbrace{- C_D \frac{k^{3/2}}{l_m}}_{\text{Dissipation}}$$

- mit dem Wirbelviskositätsansatz

$$\tau_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k$$

$$\nu_T = l_m \sqrt{k}$$

- und den Parametern

$$C_D = 0.07 \ldots 0.09$$

$$\mathrm{Pr}_k = 1$$

Prandtl Eingleichungsmodell

Bewertung

- Berücksichtigt Turbulenztransport und Turbulenzproduktion, daher viel besser als algebraisches Modell (0-Gleichungsmodell).
- Sehr effizient da nur eine einfache Transportgleichung.

- Annahme einer konstanten Längenskale für die Strömung außerhalb von Grenzschichten ist eine starke Einschränkung, da nur selten gerechtfertigt.

- Für interne Strömungen, Strömungsablösung, etc. oft nur unzureichende Ergebnisse.

Jones und Launder Zweigleichungsmodell

- **Das k-ε Modell** (Jones und Launder,1972) ist das am weitesten verbreitete RANS Modell.
- Es wird angenommen, dass Turbulenzproduktion und Dissipation im Gleichgewicht sind. Für isotrope Turbulenz folgt eine lineare Beziehung für Reynoldsspannungen und Schubspannung.

  Man erhält $l_m = C_D \dfrac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ bzw. $\nu_t = C_D \dfrac{k^2}{\varepsilon}$

- Zur Berechnung der Wirbelviskosität wird jeweils eine partielle DGL für die Energie der turbulenten Schwankungsbewegung k und eine DGL für die turbulente Dissipationsrate ε gelöst.
- Anmerkung: Die Voraussetzung isotroper Turbulenz im Gleichgewicht wird in Grenzschichten nicht erfüllt.

Jones und Launder Zweigleichungsmodell

- Die Transprotgleichung für k wird analog zum Prandtl Eingleichungsmodell mit Wirbelviskositätsansätzen modelliert.

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \qquad \tau_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k$$

$$T + D^p = \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \qquad \nu_T = C_D \frac{k^2}{\varepsilon}$$

- Für den Dissipationsterm wird kein Modell benötigt, da ε Teil der Lösung ist:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k} \right] \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipation}}$$

Jones und Launder Zweigleichungsmodell

- Für die Dissipationsrate ε kann ebenfalls eine exakte Transportgleichung hergeleitet werden.
- Aufgrund der Komplexität dieser Gleichung sind jedoch nur schwer physikalisch motivierte Ansätze für eine Modellierung der einzelnen Terme zu finden.

- Aus diesem Grund wird eine in der Struktur zur Transportgleichung von k ähnliche Transportgleichung für ε **postuliert**:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \underbrace{\left\langle u_j \right\rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \left\langle u_i \right\rangle}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_\varepsilon} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon}_{\text{Dissipation}}$$

Jones und Launder Zweigleichungsmodell

- Die Konstanten in den Modell-Transportgleichungen sind

$$C_D = 0.09 \quad , \quad \mathrm{Pr}_k = 1 \quad , \quad \mathrm{Pr}_\varepsilon = 1{,}3 \quad , \quad C_{\varepsilon 1} = 1{,}44 \quad , \quad C_{\varepsilon 2} = 1{,}92$$

- Zur Kalibrierung dieser Parameter wurden einfache Referenzströmungen betrachtet, bei denen verschiedene Terme in den Transportgleichungen für k und ε entfallen oder vernachlässigt werden können.

- Die Konsistenz mit einfachen Referenzströmungen garantiert aber nicht, dass das Modell auch bei komplexen Strömungen korrekte Vorhersagen trifft.

- es existieren verschiedene Modellvarianten und verschiedene Parametersätze

Jones und Launder Zweigleichungsmodell

Bewertung

- Geringer Rechenzeitaufwand, nur 2 zusätzliche DGL müssen gelöst werden.
- Gut geeignet für externe Strömungen (Aerodynamik)

- Anwendungsbereiche des k-ε Modells sind auf Strömungen ohne starke Druckgradienten und Ablösung beschränkt.
- Formulierung von Randbedingungen für ε ist schwierig.

- Die Wirbelviskositätshypothese geht von der Proportionalität zwischen Reynoldsspannungen und mittlerer Scherrate aus. Direkte Einflüsse auf einzelne Komponenten des Spannungstensors können nicht erfasst werden. Diese anisotropen Einflüsse können unter anderem starke Stromlinienkrümmung, Volumenkräfte und Geschichtseinflüsse sein.

Wilcox Zweigleichungsmodell

- **Das k-ω Modell** (Wilcox,1988) ist evenfalls eines der am häufigsten verwendeten RANS Modelle.

- Basiert auf Transportgleichungen für die Energie der turbulenten Schwankungsbewegung k und für die spezifische turbulente Dissipationsrate ω

$$\tau_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}k \quad , \quad \nu_T = \frac{k}{\omega} \quad , \quad \omega = \frac{1}{C_D}\frac{\varepsilon}{k}$$

- Diese kleine Änderung behebt einige der Schwachpunkte des k-ε Modells!

Wilcox Zweigleichungsmodell

- Transportgleichung für die kinetische Energie der Turbulenz

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k} \right] \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{C_D k \omega}_{\text{Dissipation}}$$

- Transportgleichung für die spezifische Dissipationsrate

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underbrace{\langle u_j \rangle \frac{\partial \omega}{\partial x_j}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{\alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_\omega} \right] \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\beta \omega^2}_{\text{Dissipation}}$$

- Parameter

$$C_D = 0.09 \quad , \quad \mathrm{Pr}_k = 2 \quad , \quad \mathrm{Pr}_\omega = 2 \quad , \quad \alpha = \frac{5}{9} \quad , \quad \beta = \frac{3}{40}$$

Wilcox Zweigleichungsmodell

Bewertung

- Geringer Rechenzeitaufwand, nur 2 zusätzliche DGL müssen gelöst werden.
- Sehr gut geeignet für Grenzschichtströmungen und Strömungen mit Druckgradienten und Ablösung.
- Einfache Formulierung von Wandrandbedingungen für ω.

- Sehr sensitiv auf Einström- und Freistrom Randbedingung, daher ist das k-ε Modell für Außenströmungen oft geeigneter.
- Überschätzung der Turbulenz an Staupunkten.

- Kombination mit k-ε Modell führt zum **SST Modell** (Menter, 1993)
- SST liefert ähnliche Ergebnisse wie durch Wilcox (2004) „verbessertes“ k-ω Modell.

Reynoldsspannungsmodelle

Ansatz

- Ein grundsätzlich anders Vorgehen bei Reynoldsspannungsmodellen besteht in der **direkten** Bildung von Modell-Transportgleichungen für den unbekannten Reynoldsspannungstensor.

- Ausgehend von den exakten Bilanzgleichungen (RST) für den Reynolds'schen Spannungstensor

$$\frac{\partial \left\langle u_i' u_j' \right\rangle}{\partial t} + \underbrace{K_{ij}}_{\text{Advektion}} = \underbrace{P_{ij}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{T_{ij} + D_{ij}^{v} + D_{ij}^{p}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\Phi_{ij}}_{\text{Druck-Scher-Korrelation}} - \underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\text{Dissipation}}$$

werden wie zuvor Modelltransportgleichungen hergeleitet.

Reynoldsspannungsmodelle

- Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass der Einfluss der **Druck-Diffusion** auf den Reynolds‘schen Spannungstensor als vernachlässigbar klein eingeschätzt werden kann. Dieser Term entfällt bei der Vereinfachung der Transportgleichungen:

$$D_{ij}^{p} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left\langle u_j' p'\right\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\left\langle u_i' p'\right\rangle}{\partial x_j}\right) \approx 0$$

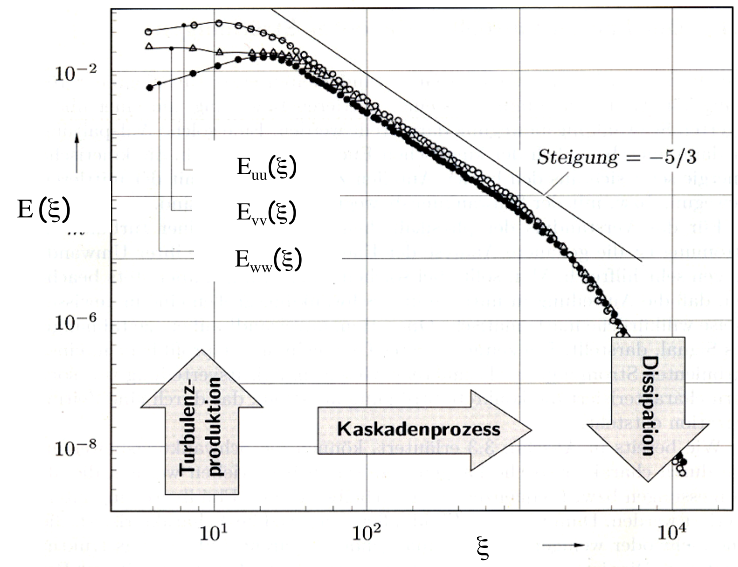
- Die **Tripelkorrelation** im **turbulenten Transport** wird meist nach Hanjalic und Launder modelliert:

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle u_i' u_j' u_k'\right\rangle$$

$$\approx \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-C_s \frac{k}{\varepsilon}\left(\left\langle u_i' u_l'\right\rangle \frac{\partial\left\langle u_j' u_k'\right\rangle}{\partial x_l} + \left\langle u_j' u_l'\right\rangle \frac{\partial\left\langle u_i' u_k'\right\rangle}{\partial x_l} + \left\langle u_k' u_l'\right\rangle \frac{\partial\left\langle u_i' u_j'\right\rangle}{\partial x_l}\right)\right)$$

Reynoldsspannungsmodelle

- Die **turbulente Dissipation** erfolgt im Vergleich zur Turbulenzproduktion in sehr kleinen Skalen.



- Der Dissipationstensor ε_{ij} wird nach der Modellvorstellung von Kolmogorov und Rotta als **isotrop** angenommen und durch die skalare Größe dargestellt

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon$$

Reynoldsspannungsmodelle

- **Druck-Scher-Korrelation** bewirkt eine Umverteilung der Komponenten des Reynoldsspannungsstensors.

$$\Phi_{ij} = \left\langle \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle$$

- Sie kann selbst keine turbulente kinetische Energie produzieren oder dissipieren, sondern beschreibt rein den Transfer von kinetischer Energie der Schwankungsbewegung zwischen den einzelnen Komponenten.

- Die Druck-Scher-Korrelation ist somit in der Lage, die Anisotropie a_{ij} des Reynoldsschen Spannungstensors zu verändern.

Anisotropiemaß: $$a_{ij} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\langle u'_k u'_k \rangle} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

Reynoldsspannungsmodelle

- Φ wird in zwei Anteile zerlegt: Slow-Term Φ^S und Rapid-Term Φ^R

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^S + \Phi_{ij}^R$$

- Grundlegende Annahme:
  - der Slow-Term Φ^S treibt anisotrope Turbulenz zur Isotropie.
  - Der Rapid-Term Φ^R verändert den Reynolds'schen Spannungstensor aufgrund der durch die mittleren Gradienten hervorgerufen äußeren Kräfte.
  - Φ^R liefert nur in Strömungen mit nicht verschwindenden Gradienten der mittleren Strömungsgeschwindigkeit einen Beitrag.

Reynoldsspannungsmodelle

- Ansatz für den **Slow-Term**:

$$\Phi_{ij}^{S} = -\varepsilon\left(C_1 a_{ij} + C_2\left(a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{2}\mathrm{II}\delta_{ij}\right)\right)$$

- Die verschiedenen Modelle für den Slow-Term unterscheiden sich vorrangig nach der Anzahl der aus dem Ansatz für Φ^S verwendeten Terme.

  – Bem **LRR-Reynoldspannungsmodell** (Lauder, Reece und Rody, 1975) wird nur der erste Term aus dem Ansatz verwendet.

  – Der Wert der Konstanten schwankt zwischen C_1=1,4 ... 3,0.

  – Beim **SSG-Reynoldsspannungsmodell** nach Speziale, Sarkar und Gatzki (1991) wird der quadratische Term mit in den Ansatz einbezogen.

  – Der Wert der Konstanten schwankt zwischen C_2=0,4 ... 0,6.

Reynoldsspannungsmodelle

- Allgemeiner Ansatz für den **Rapid-Term**

$$\Phi_{ij}^{R} = k\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_l}\left(\mathrm{X}_{kjli}(a_{nm}) + \mathrm{X}_{kilj}(a_{nm})\right)$$

- Das **LRR-Modell** vernachlässigt die quadratischen Abhängigkeiten des Rapid-Terms vom Anisotropietensor a_{ij}.

- Das **SSG-Modell** nach Speziale, Sarkar und Gatski verwendet den linearen Term aus dem LRR-Modell und zusätzlich einen quadratischer Term, so dass für die Modellgleichung folgt:

$$\Phi_{ij}^{R} = kS_{pq}\left(Q_1\delta_{ip}\delta_{iq} + Q_2\left(a_{ip}\delta_{jq} + a_{jp}\delta_{iq} - \frac{2}{3}a_{pq}\delta_{ij}\right) + Q_3 a_{pq}a_{ij}\right)$$

Reynoldsspannungsmodelle

- Kalibrierung der Koeffizienten wiederum anhand einfacher Referenzströmungen.
- Die Koeffizienten des SSG-Reynoldsspannungsmodells lauten:

$$Q_1 = \frac{4}{5} - 0{,}65\sqrt{\mathrm{II}} \quad , \quad Q_2 = 0{,}625 \quad , \quad \mathrm{Q}_3 = 0{,}9$$

Erfahrungen

- Das k-ε Modell liefert gute Ergebnisse für Außenströmungen und zweidimensionale dünne Scherschichten.
- Bei Grenzschichten oder bei starken Druckgradienten liefert das k-ε Modell eher schlechte Ergebnisse.
- Mit dem k-ω Modell erhält man in Grenzschichten bessere Ergebnisse als mit dem k-ε Modell.

- SST Modell kombiniert k-ω und k-ε Modell, liefert aber manchmal schlechtere Ergebnisse als jedes der Einzelmodelle.
- Eine von Wilcox in 2004 vorgeschlagene Variante des k-ω Modells führt oft zu SST ähnlichen Ergebnissen.

- Lineare Zweigleichungsmodelle führen meist zu einer künstlichen Turbulenzproduktion an Staupunkten.
- Es gibt viele Korrekturen, z.B. für Stromlinienkrümmung, etc.

Erfahrungen

- **Reynoldsspannungsmodelle** (RSM) liefen in der Regel bessere Ergebnisse bei Strömungen mit Strömlinienkrümmung oder starkem Drall.

- Probleme bei RSM:
  - RSM sind numerisch aufwendiger (min. 6 zusätzliche Transportgleichungen)
  - Konvergenz oft nur sehr langsam, bis zu Instabilität.

- **Explizite Algebraische RSM** (EARSM) rekonstruieren Reynoldsspannungstensor oder eine tensorielle Wirbelviskosität aus reduzierten Satz an Transportgleichungen.

- **Empfehlung:** Das in CFX implementierte ω–basierte EARSM nach Wallin und Johansson (2000) liefert sehr gute Ergebnisse bei kleinem Rechenaufwand und ist sehr robust.