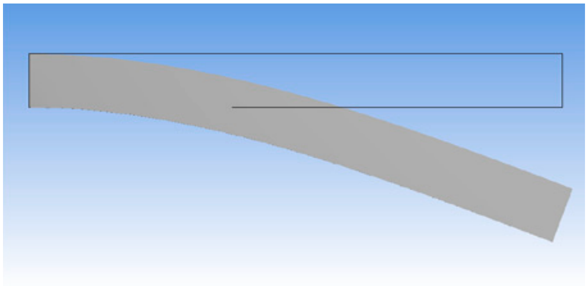
3 Grundlagen der FEM

Geschlossene Lösung

Wenn ein Bauteil berechnet werden soll, hat man grundsätzlich die Möglichkeit, in der Literatur nach entsprechenden geschlossenen Lösungen zu suchen, um über eine Gleichung das physikalische Verhalten eines Bauteils zu beschreiben. So lässt sich z. B. für einen Biegebalken die Gleichung

u = F × l3/3EI

finden, mit der die Durchbiegung berechnet werden kann.



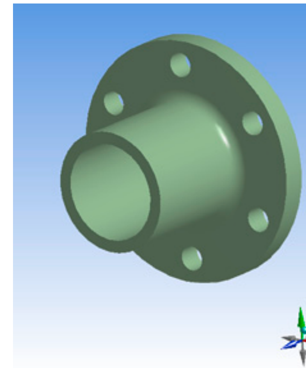
Bei komplexeren Geometrien – und dazu gehört schon eine vergleichsweise einfach aufgebaute Geometrie wie der abgebildete Flansch – stößt diese Vorgehensweise schnell an ihre Grenzen, weil es keine geschlossenen Lösungen mehr gibt.

3.1 Grundidee

Grundidee der FEM

Die Grundidee ist daher, diese komplexe Geometrie in einzelne Teilbereiche (die sogenannten Elemente) zu zerlegen. Jeder Teilbereich ist einfach beschreibbar (z. B. hinsichtlich seines Verformungsverhaltens). Die Einzellösungen der einzelnen Bereiche (Elemente) werden aufsummiert, um die Lösung für das Gesamtsystem zu erhalten. Nachdem die Anzahl der Teillösungen endlich ist, leitet sich aus dieser Grundidee der Name **F**inite-

Elemente-**M**ethode (FE-Methode oder FEM) ab. Die Verbindung der einzelnen Elemente besteht an den sogenannten Knoten, d. h. Punkten an den Ecken, manchmal auch auf den Verbindungslinien dazwischen.



Die Grundgleichung der Statik lautet:

K × u = F (F: Kraft; K: Steifigkeit; u: Verschiebung)

Verformung berechnen

Diese Grundgleichung kennt jeder Ingenieur als Federgleichung. Man kann sich also vorstellen, dass jedes einzelne Element mit solchen Federgleichungen beschrieben wird. Für jeden Knoten ergeben sich dabei drei Unbekannte, die Verschiebungen in die drei Koordinatenrichtungen. Dadurch ergibt sich ein Gleichungssystem.

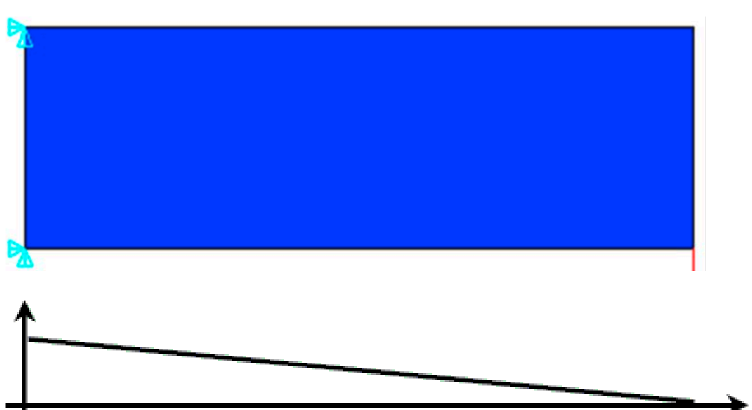
$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{y_1} \\ \phi_{z_1} \\ \cdot \\ u_{y_i} \\ \phi_{z_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}$$

Spannungen ableiten

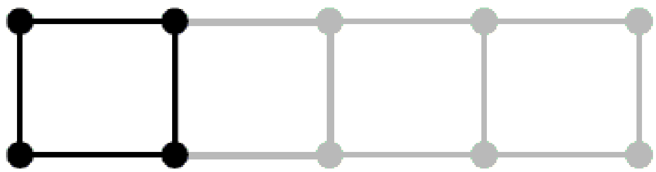
Dieses kann durch iterative oder direkte Gleichungslöser gelöst werden, sodass die Verschiebungen für jeden Knoten vorliegen. Anschließend wird durch ein Materialgesetz, im einfachsten Fall durch ein lineares Materialgesetz nach Hook $\sigma = \varepsilon \times E$, die Spannung aus den Verschiebungen abgeleitet. Dieses Ableiten der Spannungen aus den Verschiebungen ist von großer Bedeutung, wie an einem einfachen Prinzipmodell gezeigt werden soll.

Ein Biegebalken sei links fest eingespannt und rechts mit einer Kraft nach unten belastet. Dabei ergeben sich Biegespannungen, die von rechts nach links linear ansteigen, weil das Widerstandsmoment konstant ist und das Biegemoment mit dem Hebelarm linear ansteigt.



Theoretische Lösung

Verwendet man einen einfachen Finite-Elemente-Ansatz, könnte man diesen Biegebalken in vier Elemente aufteilen (man spricht dann auch von „vernetzen“).



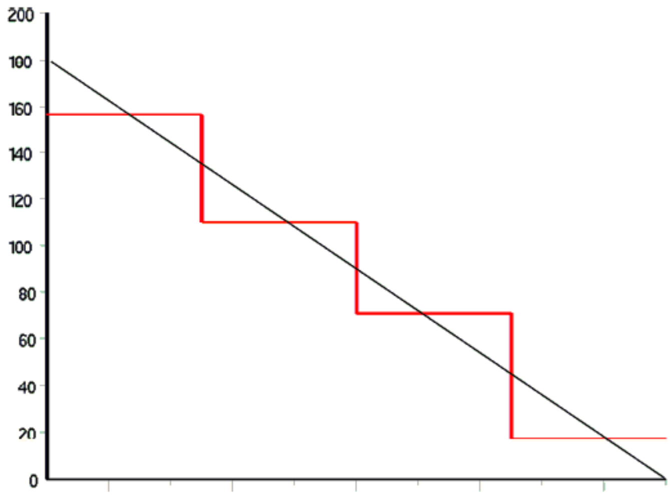
Innerhalb eines Elementes könnten die Verschiebungen über eine lineare Gleichung beschrieben werden:

$$u(x) = ax + b$$

Einfacher FEM-Ansatz

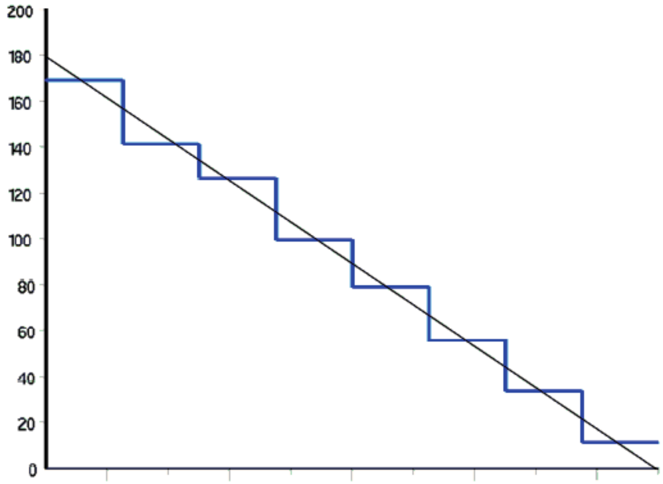
Zur Berechnung der Spannungen innerhalb eines Elementes wird das Hooke’sche Gesetz $\sigma = \varepsilon \times E$ verwendet, wobei mit $\varepsilon = \Delta l/l$ die Dehnung aus den Verschiebungen abgeleitet wird. Für eine lineare Funktion $u(x) = ax + b$ für die Verschiebungen ergibt sich mit der Ableitung dann ein konstanter Wert für die Spannung innerhalb eines Elements.

Demzufolge wird der Spannungsverlauf mit konstanten Werten für die Biegespannung abgebildet. Von der Einspannstelle links bis zum freien Ende ergibt sich damit ein Spannungsverlauf wie in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



Näherungsansatz

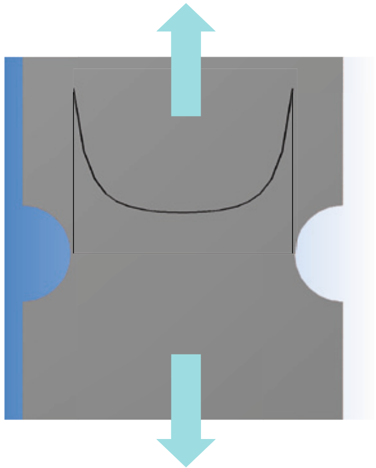
Der über die Länge des Biegebalkens eigentlich lineare Spannungsverlauf wird mit den hier verwendeten vier Elementen nur sehr grob abgebildet. Mit halbierter Elementgröße wäre der Verlauf schon etwas besser zu erkennen (siehe nachfolgende Abbildung).

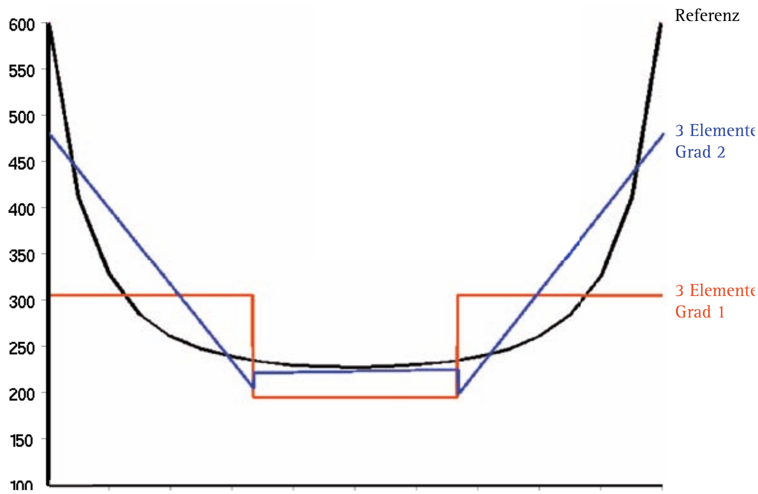


Betrachtet man den Maximalwert an der Einspannstelle links, sieht man, dass mit der groben Einteilung der Spannungswert unterhalb des korrekten Wertes liegt. Mit feinerer Einteilung wird diese Abweichung geringer. Mit zu geringer Netzdichte ist der Spannungswert zu niedrig und steigt mit feinerer Netzdichte an. Diese Aussage ist deshalb von hoher praktischer Bedeutung, weil mit einer unpassenden Vernetzung zu niedrige (optimistische) Spannungen berechnet werden. Das kann bedeuten, dass aufgrund einer zu groben Vernetzung kritische Spannungen nicht als solche erkannt werden.

Bei einem gekerbten Flachstab ist dieser Effekt sehr deutlich erkennbar.

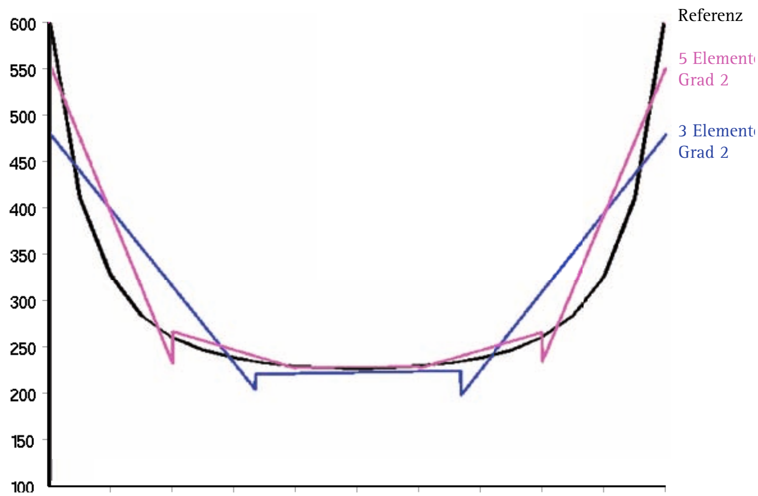
Der Spannungsverlauf weist zu den Kerben hin einen sehr starken Gradienten auf. Verwendet man über den Querschnitt nur drei Elemente mit linearer Funktion für die Verschiebung, sind die Spannungen innerhalb eines Elementes konstant, wodurch sich ein ungenauer Maximalwert und Verlauf der Spannungen ergibt (rot, Grad 1).





Verwendet man stattdessen Elemente mit parabolischer Funktion für die Verschiebungen (blau, Grad 2), können lineare Spannungsverteilungen innerhalb eines Elementes abgebildet werden, sodass der Verlauf, aber auch der Maximalwert der Spannungen deutlich besser berechnet werden können.

In der praktischen Anwendung der FEM mit ANSYS Workbench werden keine Volumenelemente mit linearer Funktion für die Verschiebungen – man nennt diese auch Ansatzfunktion – eingesetzt, weil damit erst bei sehr starker Netzverfeinerung eine gute Genauigkeit erreichbar wäre. Stattdessen werden in der Regel Elemente mit parabolischer Ansatzfunktion verwendet. Für eine lineare Spannungsverteilung (z. B. über die Wandstärke eines Gehäuses unter globaler Biegung, Zug oder Druck) reicht ein einzelnes Element aus, den Spannungsverlauf hinreichend gut zu beschreiben. Bei lokalen Spannungskonzentrationen wie z. B. Kerben sind lokale Netzverdichtungen erforderlich, wenn auch nicht in dem Maße wie mit linearer Ansatzfunktion.



Spannungen erfordern gute Netze

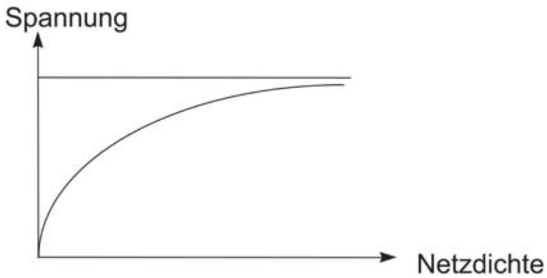
Betrachtet man den Maximalspannungswert, stellt man fest, dass an dem Beispiel des gekerbten Flachstabes mit nur drei linearen Elementen der Spannungswert im Maximalpunkt mit einer Abweichung von 50 % zur Referenz berechnet wird (rote Kurve, letzte Seite). Drei Elemente mit parabolischer Ansatzfunktion ergeben eine Abweichung von 20 % (blaue Kurve), fünf Elemente eine Abweichung von 10 % (magentafarbene Kurve). Die Abweichung wird immer kleiner, je besser die Vernetzung wird. Daher spricht man bei der FEM auch von einem Näherungsverfahren und einer Konvergenz des Ergebnisses in Bezug auf die Vernetzung (nicht zu verwechseln mit der Konvergenz, d. h. dem Gleichgewicht bei nichtlinearen Analysen).

3.2 Was heißt Konvergenz?

Abhängigkeit von der Vernetzung

Wie gezeigt wurde, ist die FEM ein Näherungsverfahren, bei dem ein Kontinuum über einzelne Teilbereiche, die Elemente, abgebildet wird. Innerhalb eines Elementes wird dabei eine bestimmte Ergebnisgröße (Verformung oder Temperatur) mit einer Funktion abgebildet (in ANSYS Workbench bei Volumenmodellen typischerweise mit einer Funktion vom Grad 2). Bei einem Gradienten im Ergebnis (z. B. Spannungskonzentration) ist die hinreichend genaue Abbildung einer abgeleiteten Ergebnisgröße wie z. B. einer Spannung nur möglich, wenn der jeweilige Teilbereich klein genug ist. An den Stellen hoher Gradienten sind demnach lokale Netzverdichtungen durchzuführen. Wird die Netzdichte also lokal angepasst, steigt die Berechnungsgenauigkeit an, und das Ergebnis nähert sich asymptotisch dem physikalisch richtigen Ergebnis.

Zeichnet man sich z. B. die Spannung in Abhängigkeit von der Netzdichte auf, ergibt sich im Prinzip das in der folgenden Abbildung dargestellte Bild.



Alterative Lösung

Man sieht also, dass mit zunehmender Netzdichte das Ergebnis immer näher an einen Grenzwert herankommt. Man spricht bei einer solchen Annäherung an ein Ergebnis von Konvergenz. In ANSYS Workbench kann diese Konvergenz durch mehrere aufeinanderfolgende Analysen mit zunehmender Netzdichte überprüft oder als Eigenschaft eines Berechnungsergebnisses definiert werden. Wählt man z. B. für ein Ergebnis eine Konvergenz von 10 %, heißt dies, dass automatisch mehrere aufeinanderfolgende Berechnungsschritte durchgeführt werden, die wiederholt lokale Netzverdichtungen durchführen, bis sich das Ergebnis von Analyse zu Analyse um weniger als diese 10 % unterscheidet. Das bedeutet jedoch nicht, dass die Absolutgenauigkeit (d. h. der Abstand der Ergebniskurve zur Asymptote) 10 % beträgt.

3.3 Was heißt Divergenz?

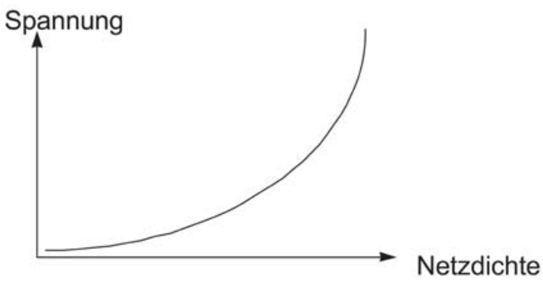
Stellt man sich ein Bauteil vor, das eine theoretisch unendlich scharfe Kerbe enthält, so ist dort die Spannung unendlich hoch. In der Realität tritt dies jedoch so nicht auf, da:

a) jede Kerbe eine Ausrundung enthält, sei sie auch noch so klein, und

b) das Material sehr lokal plastifiziert und dadurch die Spannungen abbaut.

Scharfe Kerben

Da beide Effekte in vielen Berechnungen nicht berücksichtigt werden, wird mit zunehmender Netzdichte an dieser scharfkantigen Kerbe der unendlich hohe Spannungswert immer genauer, d. h. immer höher, berechnet. Das äußert sich darin, dass mit zunehmender Netzdichte der Spannungswert immer weiter ansteigt. Man spricht dann auch von Divergenz.



In solchen Fällen macht also eine globale Genauigkeitsbetrachtung keinen Sinn. Diese singulären Stellen können nicht sinnvoll ausgewertet werden. Es sollte daher eine Fokussierung der Ergebnisse auf sinnvolle Bereiche erfolgen (siehe auch Abschnitt 8.8.2.1), sodass die Prüfung der Ergebnisgüte nicht auf dem Gesamtmodell, sondern nur auf sinnvoll auswertbaren Teilgebieten erfolgt. Bei singulären Spannungen in scharfen Kerben kann auch eine Verrundung erzeugt werden, um wieder eine sinnvolle Auswertung vornehmen zu können.

Neben scharfen Kerben mit Kerbradius 0, treten Singularitäten auch an Lagerbedingungen auf: Bei einer Lagerung werden oft eine oder mehrere Bewegungsrichtungen gesperrt. Damit entsteht dort eine Lagerung mit unendlich hoher Steifigkeit, die an der Grenzfläche zu unendlich großen Steifigkeitssprüngen und damit unendlich hohen Spannungen führt. Diese Bereiche sollten also ebenfalls aus einer Konvergenzbetrachtung ausgeschlossen werden.

3.4 Genauigkeit

Vernetzung ist nicht der einzige Faktor

Durch die in ANSYS Workbench verwendete Technologie der Finite-Elemente-Berechnung ist eine absolute Genauigkeitsangabe nicht möglich. Die Finite-Elemente-Methode ist ein Näherungsverfahren, das mit oben beschriebenen Verfahren aber eine gute Übereinstimmung mit der Praxis zeigt. Die automatische Genauigkeitssteuerung betrifft nur die Diskretisierung der Geometrie (Dichte des FE-Netzes). Unsicherheiten bei der Definition der Randbedingungen oder des Materials spielen in der Praxis meist eine deutlich größere Rolle.

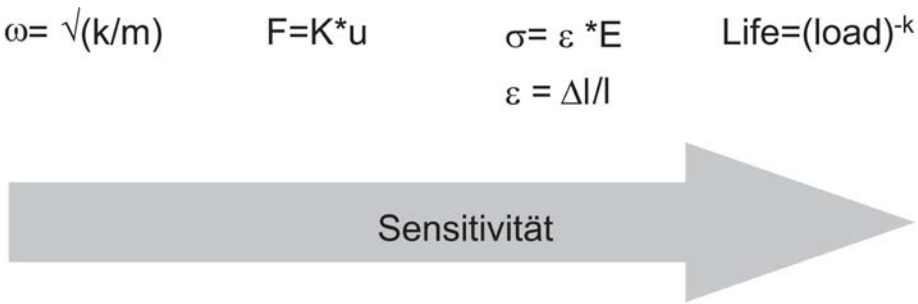
Neben der Vernetzungsgüte sollte bei jeder Berechnung die Realitätstreue der Simulation überprüft werden. Wenn Sie mit ANSYS Workbench arbeiten, prüfen Sie bitte folgende Punkte:

- Wie gut trifft mein Berechnungsmodell das physikalische Problem?
- Ist das Einheitensystem korrekt gewählt?
- Ist das Materialverhalten ausreichend genau beschrieben? Tritt evtl. nichtlineares, temperaturabhängiges, orthotropes oder inhomogenes Material auf? Ist dies der Fall, sollte das Ergebnis vorsichtig interpretiert werden, wenn das verwendete Materialmodell diese Eigenschaften nicht abbilden kann. Weitergehende Berechnungen können solche spezifischen Effekte mit berücksichtigen.
- Tritt bei gefertigten Bauteilen eine gewisse Streuung im Ergebnis auf? In solchen Fällen empfiehlt es sich, eine Robustheitsbewertung und -optimierung durchzuführen.
- Sind die Randbedingungen korrekt definiert? Sind die Kraftgröße und Richtung korrekt?
- Enthalten die Randbedingungen Singularitäten wie beispielsweise eine Einzelkraft, die auf einem Punkt wirkt (die unendlich kleine Fläche bewirkt eine unendlich große Spannung). Eine ähnliche Situation tritt auf bei „scharfen“ Ecken, die – wie singuläre Kräfte – zu unrealistisch hohen Spannungen in der Berechnung führen. Entweder müssen diese Bereiche genauer modelliert werden (Kraft auf Fläche statt auf Punkt oder kleiner Ausrundungsradius statt der scharfen Ecke), oder bei der Ergebnisauswertung werden solche Bereiche ignoriert.
- Ist ein Bauteil sehr nachgiebig (elastisch) gelagert? In solchen Fällen ist eine fixierte Lagerung im Berechnungsmodell eine zu starke Vereinfachung. Die Elastizität kann in einer Baugruppenanalyse genauer beschrieben werden.
- Ist die maximale Belastung richtig erfasst? Ein Bauteil wird unter Umständen nicht während des Einsatzes, sondern vielleicht während der Fertigung oder des Transports maximaler Belastung unterworfen.
- Sind in der Berechnung alle wesentlichen Einflüsse erfasst? Sollten einzelne Randbedingungen unklar spezifiziert sein, können vergleichende Untersuchungen mit einem oberen und unteren Grenzwert den Einfluss der Unschärfe auf das Ergebnis aufzeigen.
- Ist die Antwort plausibel? Untersuchen Sie das Bauteilverhalten, bis Sie es verstanden haben. Akzeptieren Sie keine unlogischen Ergebnisse.

Was ist das Ziel?

Besondere Bedeutung kommt der Berechnungsgenauigkeit zu, wenn die errechneten Spannungswerte für eine Lebensdauerberechnung verwendet werden sollen. Die Lebensdauer erfordert extrem genaue Ergebnisse, da sie logarithmischer Natur ist. So kann z. B. bei einer Abweichung der Spannungen um 30 % die Lebensdauer auf 1/6 herabgesetzt werden. Es ist daher empfehlenswert, im Zweifel die Berechnungsgüte einer Analyse von einem Spezialisten prüfen zu lassen, um sicherzugehen, dass alle Einflussgrößen (hier insbesondere die Randbedingungen) korrekt abgebildet sind.

Die Sensitivität von Berechnungsergebnissen hängt u. a. vom Analysetyp ab. So sind Eigenfrequenzen meist ohne größeren Aufwand von hoher Ergebnisgüte, während für Spannung- oder Lebensdauerberechnungen das Ergebnis meist erst mit einer adaptiven oder manuell verfeinerten Vernetzung ausreichend gut wird.



Abschätzen des Einflusses

Die eigentlich sehr angenehme Eigenschaft, dass die Vernetzung bei der Berechnung von Eigenfrequenzen keinen starken Einfluss hat, hat auch eine unangenehme Kehrseite. Wenn ein Resonanzfall eintritt, die Eigenfrequenz einer entworfenen Struktur also in der Nähe einer Erreger-Frequenz liegt, sollte diese Eigenfrequenz durch konstruktive Maßnahmen nach oben verschoben werden. Selbst wenn es gelingt, die Steifigkeit der Struktur um 10 % ($K \rightarrow 1.1 \times K$) und die Masse dabei nur um 5 % zu erhöhen ($m \rightarrow 1.05 \times m$), ergibt sich damit lediglich eine Veränderung von Faktor $\sqrt{1.1/1.05}$, also nur 2.4 %! Daran sieht man, dass das Verschieben von Eigenfrequenzen nicht mit kleinen konstruktiven Maßnahmen, wie z. B. das Ändern einer Verrundung, zu erreichen ist, sondern ein grundlegender Eingriff in die Steifigkeit der Struktur erforderlich ist. Daher ist es empfehlenswert, gerade bei Schwingungsproblemen möglichst früh mit der Simulation zu beginnen, um Erkenntnisse daraus noch mit geringem Änderungsaufwand realisieren zu können.