**Inhaltsverzeichnis**

Tabellenverzeichnis1

Formelverzeichnis1

Nomenklatur1

Einleitung1

* + 1. Ausgangssituation und Motivation2
    2. Aufbau der Arbeit3

1. **Grundlagen der Stömungsmechanik**4
   1. Definitionen der Fluid- und Strömungsmechanik5
      1. Fluid6
      2. Kontinuum6
      3. Ideales Gas6
      4. Kontrollvolumen6
      5. Hypothese von Stokes6
      6. Systemdefinition6
      7. Dichte6
      8. Zustandsgrößen6
         1. Spezifisches Volumen6
            1. Spezifisches Volumen der Flüssigkeiten6
            2. Spezifisches Volumen der Gase und Dämpfe6
         2. Druck6
         3. Temperatur6
         4. Viskosität6
      9. Zustandsgrößen6
   2. Grundgleichungen der Fluid- und Strömungsmechanik6
      1. Massenerhaltung6
      2. Impulserhaltung6
      3. Energieerhaltung6
      4. Navier-Stokes Gleichungen6
   3. Grundlagen der turbulenten Strömungen6
      1. Definitionen6
      2. Reynolds gemittelte Transportgleichung6
      3. Modellierung der Turbulenz6
         1. k-ε-Modell6
         2. k-ζ-f-Modell6
2. **Grundlagen der CFD**6

**Inhaltsverzeichnis**

1

Formelverzeichnis1

Nomenklatur1

* + 1. Kontinuum6
    2. Ideales Gas6
    3. Kontinuum6

Ideales Gas6

1. Einleitung 4
   * 1. Ausgangssituation und Motivation 5
     2. Aufbau der Arbeit 6
2. Grundlagen der Stömungsmechanik4
   * 1. Definitionen der Fluid- und Strömungsmechanik5
     2. Fluid6
     3. Kontinuum6
     4. Ideales Gas6
     5. Kontrollvolumen6
     6. Hypothese von Stokes6
     7. Systemdefinition6
     8. Dichte6
     9. Zustandsgrößen6
     10. Spezifisches Volumen6
     11. Spezifisches Volumen der Flüssigkeiten6
     12. Spezifisches Volumen der Gase und Dämpfe6
     13. Druck6
     14. Temperatur6
     15. Viskosität6
     16. Zustandsgrößen6
     17. Grundgleichungen der Fluid- und Strömungsmechanik6
     18. Massenerhaltung6
     19. Impulserhaltung6
     20. Energieerhaltung6
     21. Navier-Stokes Gleichungen6
     22. Grundlagen der turbulenten Strömungen6
     23. Definitionen6
     24. Reynolds gemittelte Transportgleichung6
     25. Modellierung der Turbulenz6
     26. k-ε-Modell6
     27. k-ζ-f-Modell6

Grundlagen der CFD6

1. Köhler, Eduard ; Flierl, Rudolf: *Verbrennungsmotoren: Motormechanik, Berechnung und Auslegung des Hubkolbenmotors,* 6. erweiterte Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2011 ISBN 978–3–8348–1486–9

[2] Pope, Stephen B.; Turbulent flows, Cambridge University Press, 2000. –ISBN 0–521–59886–9

[3] Adams,N. A.; Turbulente Strömungen, Vorlesungsskript, Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München, Version SS2013

[4] von Böckh, Peter; Saumweber, Christian: *Fluidmechanik*, Springer Verlag, 3. bearbeitete und ergänzte Auflage, 2013, ISBN 978-3-642-33892-2

[5] Westermann, Thomas; *Modellbildung und Simulation, Mit einer Einführung in ANSYS*; Springer Verlag, 2010, ISBN 978-3-642-05461-7 (eBook)

Lecheler, Stefan; *Numerische Strömungsberechnung, Schneller Einstieg durch ausführliche praxisrelevante Beispiele*, 1. Auflage, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009, ISBN 978-3-8348-0439-6

[6] Lecheler, Stefan; *Numerische Strömungsberechnung, Schneller Einstieg durch anschauliche Beispiele mit ANSYS 15.0*, 3. aktualisierte Auflage, Springer Vieweg, 2014, ISBN 978-3-658-05201-0 (eBook)

[7] Prof. Dr. K. V. Schaller, *Vorlesungsfolien zur Vorlesung Nutzfahrzeugtechnik*, Kapitel 8. Alternative Antriebe, Technische Universität München, WS2015/16

Guillermo Hauke: An Introduction to Fluid Mechanics and Transport Phenomena. Springer, 2008, ISBN 1-4020-8537-0

[8] Laurien, Eckart; Oertel jr., Herbert: *Numerische Strömungsmechanik: Grundgleichungen und Modelle - Lösungsmethoden - Qualität und Genauigkeit*. 5., überabearbeiteteund erweiterte Auflage 2013. Wiesbaden, Springer Vieweg, ISBN 978-3-658-03145-9 (eBook)

[9] Altenbach, Holm; *Kontinuumsmechanik, Einführung in die materialunabhängigen Gleichungen*; 2. Auflage, Springer Vieweg, 2012, ISBN 978-3-642-24119-2 (eBook)

https://de.wikipedia.org/wiki/Diskretisierung, Zugriff am 04.02.17

[10] Prof. Dr.-Ing. Wachtmeister, Georg: *Skriptum zur Vorlesung Verbrennungsmotoren*: Wintersemester 2015/2016, Technische Universität München, Garching bei München

https://de.wikipedia.org/wiki/Erdgas, Zugriff am 04.02.17

[11] Prof. Dr.-Ing. N. A. Adams, Prof. Dr.-Ing. M. W. Gee, Prof. Dr.-Ing. Wall, Prof. Dr.-Ing. Kaltenbach, Prof. Koutsourelakis, *Continuum Mechanics*, Vorlesungsskript, Technische Universität München, Version: 8. Oktober, 2014

[12] Prof. Ph. D. Wolfgang Polifke, Dipl.-Ing. Thomas Emmert, *Engineering Thermodynamics*, Vorlesungsscript, Technische Universität München, Version: 28. Januar, 2015

[13] Schwarze, Rüdiger; *CFD-Modellierung Grundlagen und Anwendungen bei Strömungsprozessen*, Springer Vieweg, 2013, ISBN 978-3-642-24378-3 (eBook)

[14] Ferzinger, Joel; Perić, Milovan; Numerische Strömungsmechanik, Springer Verlag, 2008, ISBN 978-3-540-68228-8 (eBook)

Hickel, Stefan: *Angewandte Strömungssimulation: Folien zur Vorlesung*. Garching b. München, 2014

[15] Merker, Günter P., Teichmann, Rüdiger: *Grundlagen Verbrennungsmotoren, Funktionsweise Simulation, Messtechnik*, 7. Vollständig überarbeitete Auflage, Wiesbaden, Springer Fachmedien, 2014 (ATZ / MTZ-Fachbuch). – ISBN 978-3-658-03195-4 (eBook)

[16] Bundesanwalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR), Andruleit, Harald(Koordination), *Energiestudie 2016 – Reserven, Ressourcen und Verfügbarkeit von Energierohstoffen*, Hannover, 2015

[17] Zierep, Jürgen; Bühler, Karl; *Grundzüge der Strömungslehre*, 9. überarbeitete und ergänzte Auflage 2013, Springer Fachmedien Wiesbaden, ISBN 978-3-658-01606-7 (eBook)

http://www.platts.com/news-feature/2015/naturalgas/eu-gas-demand/lng-forecasting Zugriff am 06.02.17

[18] Oldenburg, Geert; *Propan-Butan,* *Eigenschaften und Anwendungsgebiete der Flüssiggase*, Springer-Verlag, 1955, ISBN 978-3-642-53111-8 (eBook)

[19] Prof. Dr.-Ing. Wachtmeister, Georg: *Skriptum zur Vorlesung Motorthermodynamik und Brennverfahren*: Sommersemester 2016, Technische Universität München, Garching bei München

[

[20] van Basshuysen, Richard; *Erdgas und erneubares Methan für den Fahrzeugantrieb*, Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2015, ISBN 978-3-658-07159-2 (eBook)

[21] Larson, Mats; Bergzon, Fredrik*; The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*, Springer Verlag, 2013, ISBN 978-3-642-33287-6 (eBook)

[22] Bettini, Alessandro; *A Course in Classical Physics 2—Fluids and Thermodynamics*, Springer International Publishing Switzerland 2016, ISBN 978-3-319-30686-5 (eBook)

[23] Egerer, G. W.; *Kohle und Kohlen-Ersatz*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 1922, ISBN 978-3-663-15905-6 (eBook)

[24]

[25]

[26]

[27]

**3 Grundlagen der CFD**

Wir haben bisher die notwendigen theoretischen Grundsteine, mit denen das CFD-Software funktioniert, diskutiert und erklärt. In diesem Kapitel wird die Funktionsweise einer CFD-Software weiter vertieft.

**3.1 Allgemeiner Arbeitsablauf**

Eine CFD-Software basiert sich auf numerischen Algorithmen, um die Strömung von Fluide in einem System mit definierten Randbedingungen simulieren zu können. Im allgemeinen Fall teilt sich die CFD-Simulation in drei Schritten ein – *Pre-processor*, *Solver* und *Post-processor*. Im *Pre-processor* werden die Aufbereitung der Geometrie, sowie die Diskretisierung des Volumens in statischen und dynamischen Netze durchgeführt. Im *Solver* wird die tatsächliche Simulation realisiert, während im *Post-processor* wird die Visualisierung für die Aufgabenstellung ermittelt.

Zur Veranschaulichung des Arbeitsablaufes der Ladungswechselsimulation werden zwei Diagramme vorgestellt wie folgt:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Ladungswechselrechnung** | | | |
| **Pre-processor** | **Solver** | **Post-Processor** | |
| Selections | Solver Einstellungen | Bilder | |
| Edges | Überwachung | Animationen | |
| Statisches Netz |  |  |  |
| Überprüfung |  |  |  |
| Halbnetze |  |  |  |
| Dynamische Netze |  |  |  |
| Überprüfung |  |  |  |

**Tabelle 3-1** Simulationsablauf

|  |
| --- |
| Aufgabenstellung |
| ↓ |
| CAD Datenaufbereitung |
| ↓ |
| Volumennetzerstellung |
| ↓ |
| Simulationsdurchführung |
| ↓ |
| Simulationsanalyse |

**Tabelle 3-2** CFD-Arbeitsablauf

Wichtig ist zu berücksichtigen, dass der Ablauf kein echtes sequenzielles Verfahren ist. Das Volumennetz wird immer weiter verbessert bis die Simulation ausreichend gut ist. Wenn die Simulation nicht richtig ausgeführt wird (konvergiert nicht oder die Auflösung nicht genügend gut ist), dann liegt der Grund in den meisten Fällen in dem Netz.

**3.2 Numerische Gitter – Gittertopologietypen, Erzeugung (Diskretisierung), Interpolation und Bewertung**

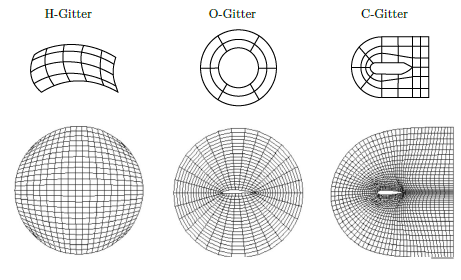
Ein numerisches Gitter ist ein Volumennetz, das bestimmte Eigenschaften haben soll, in der Lage sein um eine numerische Simulation durchführen zu können. Die Qualität der Simulationsberechnung hängt maßgeblich von der Qualität des Gitters, dadurch werden in diesem Unterkapitel die verschiedenen Typen von Gittertopologien, die verschiedene Möglichkeiten zur Gittererzeugung (Diskretisierung), die Interpolation von den Gittern und ihre einschließliche Bewertung.

**3.2.1 Typen von Gittertopologien**

Einer der wichtigsten Fragen bei der Diskretisierung (Netzerzeugung) ist, ob ein Volumennetz für unsere Simulation geeignet ist. Hier kommt natürlich die Frage, wie wir ein Volumen aufteilen können und wie wird die Strategie aussehen, wie die Beziehungen zwischen den einzelnen Gitterpunkten sind. Das ist die Definition von *Topologie*. [6]

**3.2.1.1 Strukturierte Topologie**

Strukturierte Netze bestehen hauptsächlich aus Vierecken (2D) und Hexaedern (3D) deren Ausrichtung im Raum eine globale Struktur aufweist. Dadurch können die vernetzten Gebiete auf kartesische Gebiete abgebildet werden („Mapping“). Daraus ergibt sich im Normalfall eine einfache Datenstruktur (z.B. 2D/3D Matrizen), die eine schnelle Implementierung ermöglicht. Zudem sind darauf effiziente Algorithmen anwendbar, die zu kürzeren Rechenzeiten und besseren Ergebnissen führen. Durch die einfache Topologie ist eine manuelle Netzgenerierung möglich, die eine optimale Ergebniskontrolle ermöglicht. Nachteile entstehen bei der Netzverfeinerung, da das Einfügen von zusätzlichen Knoten nicht nur lokal durchgeführt werden kann, sondern sich die Verfeinerung anhand des strukturierten Aufbaus durch das gesamte Gebiet zieht. In Abbildung 2.2 sind die verschiedenen Typen von strukturierten Netzen dargestellt, die in H-, O- und CGitter unterteilt werden können und je nach Form der Geometrie zum Einsatz kommen. Problematisch wird die strukturierte Vernetzung von komplexeren Geometrien. [14]

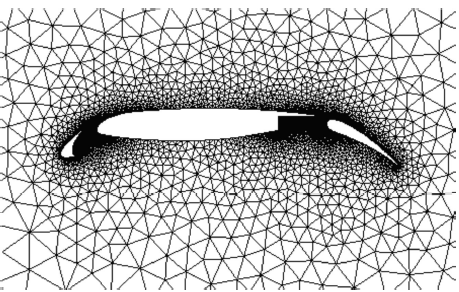


**Abbildung 3-3** Verschiedene strukturierte Gittertypen

**3.2.1.2 Unstrukturierte Topologie**

Unstrukturierte Netze besitzen im Vergleich zu den strukturierten Netzen keine globale Struktur und können im Allgemeinen nicht auf ein kartesisches Gebiet abgebildet werden. Dies führt im Normalfall zu einer komplizierteren Datenstruktur, da zusätzlich eine Zuordnungsmatrix (Connectivity-Matrix) mitgeführt werden muss. Die Matrix beinhaltet Informationen zur Anordnung der Knoten. Da bei der Berechnung aber immer wieder auf diese Zuordnungsmatrizen zugegriffen werden muss, sind höhere Rechenzeiten die Folge. Die Vorteile der unstrukturierten Netze liegen in deren hohen Flexibilität und der einfacheren Modellierung komplexer Geometrien. Auch das Einfügen von Gitterverfeinerungen ist im Vergleich zu den strukturierten Netzen einfacher zu bewerkstelligen. In

Bereichen starker Gradienten kann durch das Hinzufügen von einzelnen Punkten lokal eine erhöhte Netzdichte erzeugt werden. In Abbildung 2.3 ist beispielhaft ein unstrukturiertes Netz zur Simulation der Umströmung eines Flugzeugflügels dargestellt. [14]



**Abbildung 3-4** Unstrukturiertes Netz

**3.2.4 Bewertung der Netze(Gitter)**

Netze sollen nach bestimmten Kriterien erstellt werden. Es existieren zahlreiche Kriterien zur Bewertung der Netzqualität, die wichtigsten davon werden kurz erklärt.

Die **Zellenanzahl** beschreibt im allgemeinen Fall die gesamte Feinheit von einem Netz. Trotzdem für uns ist es wichtig, dass auch die Rechenzeit nicht unnötig lang wird, da ein hohe Zellenanzahl hohen Rechenaufwand bedeutet. Dadurch soll ein Kompromiss zwischen die Zahl der Zellen und die Strömungsphänomeneauflösung gefunden werden. Meistens werden dafür lokale Netzverfeinerungen in Bereiche hoher Geschwindigkeiten und komplizierter Geometrien wie z. B. Krümmungen hinzugefügt. Auf dieser Weise wird das Netz genügend fein auf den Problemstellen, um die verschiedenen Phänomene aufzulösen und auch einen niedrigen Rechenaufwand zu liefern. [15]

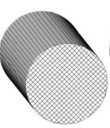
* **- Regel** erläutert wie fern der erste Gitterpunkt von der Wand entfernt sein darf, so dass genügend Gitterpunkte für die Auflösung der viskosen Unterschicht vorhanden sind. Der -Wert wird definiert als

, wobei

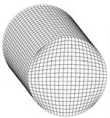
**Formel 3-5** Definition des -Wertes

Das Turbulenzmodell entscheidet die Größenordnung des -Wertes. [8]

* **Anpassung der Netzwandstruktur** ist für ein gutes Netz besonders wichtig. Vor allem sind die Hexaederzellen am Grenzschichtbereich besonders beliebt, da die im Unterschied zu prismatischen und tetraedrischen Zellen zu einer besseren Simulation führen. Um die Ziele zu erreichen, werden zwei Verbesserungsvorgänge dargestellt – wandoptimierte Netzwandstruktur und verbesserte wandoptimierte Netzwandstruktur. Die beiden sowie das Originalvolumennetz ohne Verbesserungen werden in den unteren Abbildungen gezeigt.

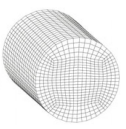


**Abbildung 3-5** Volumennetz ohne Verbesserungen



**Abbildung 3-6** Volumennetz mit wandoptimierten

Netzwandstruktur

* 

**Abbildung 3-7** Volumennetz mit einem verbesserten

wandoptimierten Netzwandstruktur

* **Längen-Breiten Verhältnis** oder auch auf Englisch Aspect ratio(AR) genannt, soll im bestem Fall ungefähr eins sein. Für ein gutes Netz wird den Wert unter 10 empfohlen.
* **Vergröberungsgrad** beschreibt das Größenverhältnis zweier benachbarter Zellen. Es wird empfohlen, dass der Vergröberungsgrad zweier benachbarter Zellen nicht 1,5 überschreitet.

**Verzerrung einer Zelle** Für die maximale Verzerrung einer Zelle wird ein Winkel von mindestens 60 Grad empfohlen. Gemessen wird im spitzen Winkel zwischen die Linie, die die zwei Mittelpunkte verbindet und der gemeinsamen Seite der benachbarten Zellen.

**3.2.2 Diskretisierung - Erzeugung von einem numerischen Gitter)**

Diskretisierung ist ein zentrales Konzept in der numerischen Mathematik und in der Kartografie, wo damit die Zerlegung räumlicher Kontinuen wie Oberflächen etc. in kleine Abschnitte bzw. einzelne Punkte bezeichnet wird. [9]

Zur Approximation der Differentialgleichung ist ein System von algebraischen Gleichungen

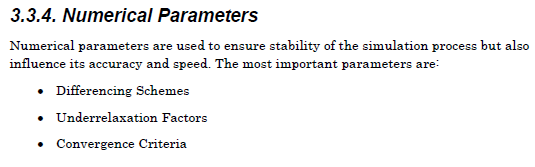
erforderlich. Um diese zu lösen, muss das Rechengebiet in Raum und Zeit

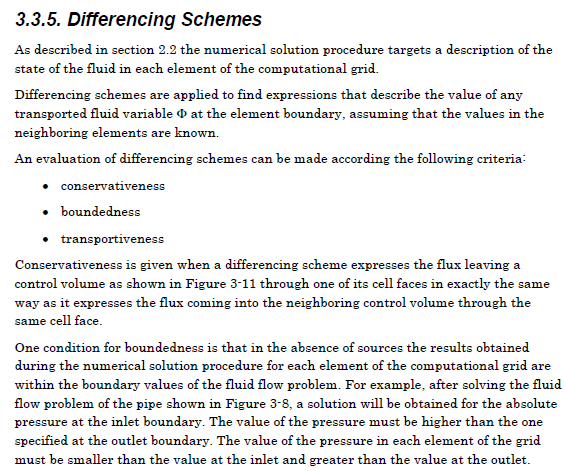
diskretisiert werden. Dies bedeutet, dass das zu berechnende Gebiet in eine finite

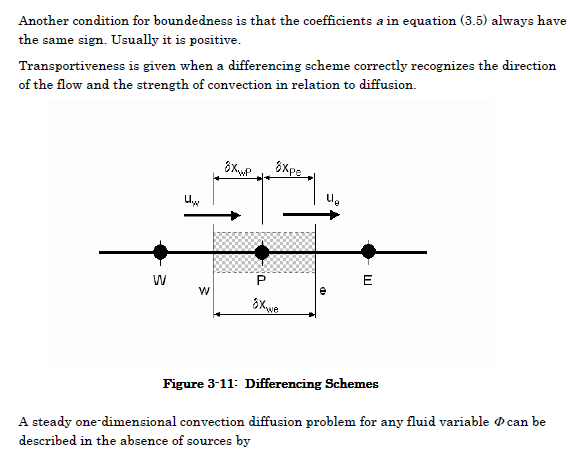
Anzahl kleinster Zellen unterteilt wird, ein sogenanntes *numerisches Rechennetz*.

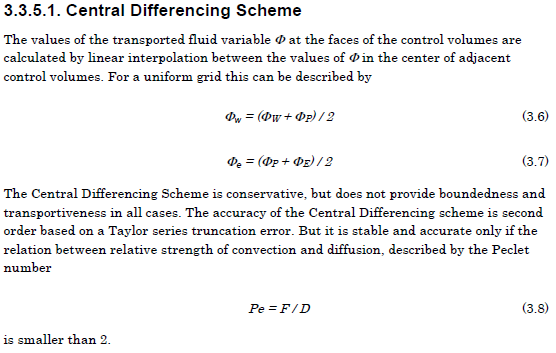
*AVL FIRE* benutzt ausschließlich die in Kapitel 2 erwähnte *Finite-Volumen-(FV)-*

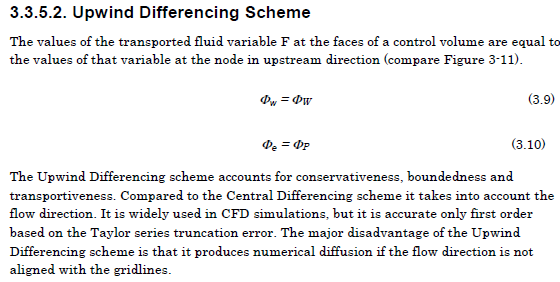
*Methode*.

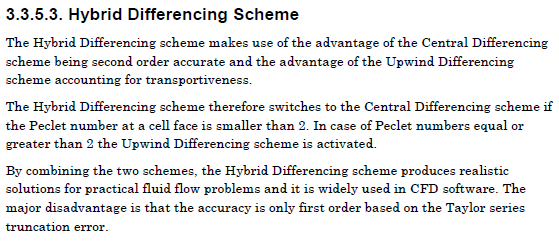


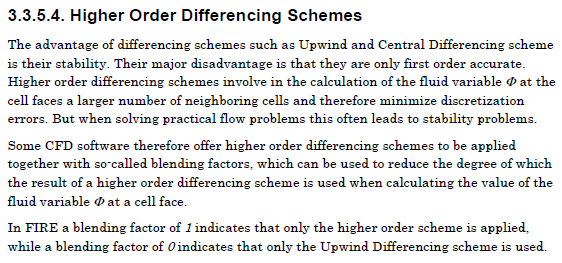


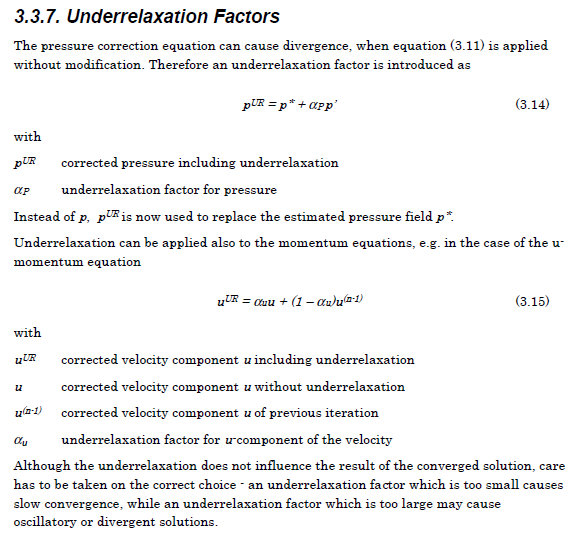






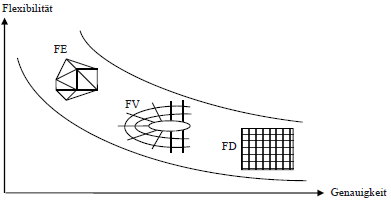






**3.2.1 Diskretisierung des Raumes**

Zur Veranschaulichung der Trade-offs zwischen verschieden Raumdiskretisierungsmethoden werden in folgender Tabelle die wichtigsten drei Methoden vorgestellt, nämlich die *Finite-Elemente-Methode* (FE), die *Finite-Volumen-Methode* (FV), die *Finite-Differenzen-Methode* (FD). Für die Finite-Elemente-Methode ist Flexibilität der wichtigste Vorteil. Trotzdem ist die Genauigkeit nicht genügend ausreichend. Bei der Finite-Differenzen-Diskretisierung ist umgekehrt – hohe Genauigkeit aber wenig Flexibilität. Die Finite-Volumen-Diskretisierung ist etwas in der Mitte- gute Genauigkeit und relativ gute Flexibilität[8].



**Abbildung 3-1** Raumdiskretisierungmethoden und ihre Auswertung

**3.2.1.1 Finite-Differenzen (FD)**

Die Finite Differenzen Methode (FD) verwendet ein Gitternetz, um den Kontrollvolumenraum diskretisieren zu können. Die Annährung der Ableitungen von einer Funktion an der i-Position (1D-Problem) wird mittels vielen verschieden Möglichkeiten ausgeführt. Wir zeigen die wichtigsten drei Wege, nämlich die *Vorwärtsdifferenz*, die *Rückwärtsdifferenz* und die *zentrale Differenz*[8].

**Vorwärtsdifferenz**

**Rückwärtsdifferenz**

**Zentrale Differenz**

Der letzte Verfahren hat eine höhere Genauigkeit und dadurch besitzt eine höhere Ordnung - *O(* im Unterschied zu den ersten zwei, die Ordnung *O()* aufweist.

**3.2.1.2 Finite-Volume (FV)**

Die Finite-Volumen-Diskretisierung (FV) ist sehr genau bei Unstetigkeiten wie z. B. Stößen, weshalb moderne CFD-Programme meistens diese Methode verwenden. Bei ihr werden die Erhaltugsgleichungen in Integralform verwendet und die Integrale werden durch Summen ersetzt. Die Stützstellen liegen entweder im Inneren des Volumenelements (Zellzentrumsschema) oder wie bei der FD-Diskretisierung an den Ecken (Zelleckpunktschema). [8]

Diese Methode verwendet die in Abschnitt 2.2 angegebene Integralform der Erhaltungssätze

für Masse, Energie und Impuls, die für den Schwerpunkt jedes KV

angenähert und mittels Interpolation für das gesamte KV ermittelt werden. Dabei

gibt jedes KV an die umliegenden KV einen Teil seiner Informationen weiter.

Der Vorteil der FV-Methode ist, dass sie in allen beliebigen Arten von Rechennetzen

Verwendung findet und jeder approximierte Term eine physikalische Bedeutung hat.

Der Nachteil besteht darin, dass aufgrund der drei Approximationsstufen *Interpola-*

Bachelor-Thesis Dominik Bartling 13

3.1 Numerische Grundlagen

*tion*, *Differentiation* und *Integration* alle Verfahren mit einer höheren Ordnung als

zwei nur sehr schwer zu entwickeln sind [Ferziger, 2008].

Die Erhaltungsgleichungen werden nicht an den einzelnen Gitterknoten berechnet, sondern

die räumlichen Mittelwerte einer jeden Zelle. Dazu werden die Flüsse über die

Oberfläche einer Zelle bilanziert und die Erhaltungsgleichung ausgewertet. Der berechnete

Mittelwert wird in einem Knoten im Zentrum der Zelle abgespeichert. Die Werte

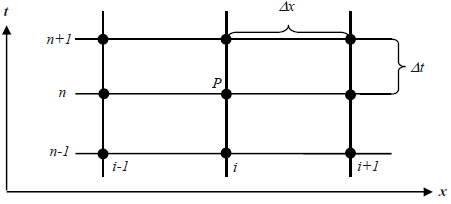
an allen anderen Punkten innerhalb der Zelle werden durch Interpolation ermittelt.[

**3.2.1.3 Finite-Elemente-Methode (FE)**

Die Finite-Elemente-Methode (FE) wird von Mathematikern bevorzugt, da sie mathematisch gut darstellbar ist. Bei ihr werden für die Differentiale durch mathematische Gleichungen wie Gerade- oder Parabelgleichungen eingesetzt. [8]

**3.2.2 Diskretisierung der Zeit**

Die Diskretisierung der Zeit wird ähnlich wie die Diskretisierung des Raumes durchgeführt. Dazu wird die Zeit in sogenannten Zeitebene aufgeteilt. Zur Veranschaulichung zeigen wir das folgende Bild[8]:



**Abbildung 3-2** Die Zeitebenen ***n*** für die zeitliche Diskretisierung

Der einzige Unterschied zur Raumdiskretisierung ist, dass die Zeit die vierte Dimension ist, wobei der Raum in drei Dimensionen ist. In oberem Diagramm werden alle diese drei Dimensionen als eine einzige Dimension (x-Richtung) dargestellt. Dies ermöglicht uns dadurch die tatsächliche Diskretisierung der Zeit und ihr besseres Verständnis und Veranschaulichung als ein Bild.

**3.2.3 Interpolation**

Wir haben bisher verstanden, was Diskretisierung bedeutet, welche Ziele es hat. Trotzdem passiert es sehr oft, dass man die Werte innerhalb oder zwischen den Zellen braucht. Die Feinheit der Diskretisierung wird uns nicht retten. Das Ziel der Interpolation ist genau – Werte, die nicht zugänglich sind, … Es gibt zahlreiche Interpolationsmethoden - …..**[Vorlesung Geometrische Modelierung ung Simulation]**

**3.3 Hinter dem Solver – die Lösung der Differenzen Gleichungen**

**3.2.2.1 Explizites Euler-Verfahren**

Beim expliziten Eulerverfahen wird die Steigung der Geraden aus den Größen des alten Zeitschrittes n berechnet.

= (3.2.2.1)

**Formel 3-1** Explizites Euler-Verfahren

**3.2.2.2 Implizites Euler-Verfahren**

Beim impliziten Eulerverfahren wird die Steigung im Unterschied zum expliziten Eulerverfahren aus den Größen des alten Zeitschrittes n+1 berechnet.

= (3.2.2.2)

**Formel 3-2** Implizites Euler-Verfahren

**3.2.2.3 Runge-Kutta-Verfahren**

Im Unterschied zu den ersten zwei Verfahren (implizites und explizites Euler-Verfahren), das Runge-Kutta-Verfahren hat ein deutlich größere Konsistenz- und Konvergenzordnung, was das Verfahren deutlich stabiler macht. Ein Beispiel dafür ist das **klassische Runge-Kutta-Verfahren**, das Rekursion verwendet:

Für das Anfangswertproblem**, y() =**  werden vier rekursiv zueinander Lösungen aufgebaut.

**Formel 3-3** Klassisches Runge-Kutta Verfahren

Die endgültige Lösung des Problems(Aufgabe) lautet folgendermaßen:

**Formel 3-4** Endgültige Lösung des

klassischen Runge-Kutta-Verfahrens

Wichtig zu berücksichtigen ist, dass die Summe der Koeffizienten , immer gleich sein darf. Für unserem Fall betragen die Koeffizienten jeweils , , und .

Durch die Taylor-Reihen-Entwicklung nach der Schrittweite ***h*** wird für diesen Fall die Konsistenzordnung 4 ergeben, was im Unterschied zum vorherigen Verfahren ein sehr guter Wert ist.

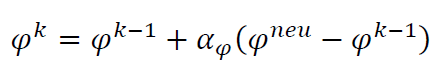
**3.2.2.4 Zusammenfassung**

Zum besseren Verständnis der verschieden Diskretisierungsverfahren zeigen wir als Zusammenfassung die wichtigsten Verfahren für die numerische Lösung der differenziellen Gleichung. Hinzugefügt sind auch das explizite und implizite Midpoint Verfahren, die ein Sonderfall von dem Runge-Kutta Verfahren sind und höhere Konvergenz- und Konsistenzordnung haben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Explizites Euler Verfahren** |  | **Konsistenz- und Konvergenzordnung beträgt 1**  **nicht immer stabil** |
| **Implizites Euler (Rückwärts-Euler-Verfahren)** |  | **Konvergenz- und Konsistenzordnung beträgt 1**  **A-stabil** |
| **Explizites Midpoint Verfahren (modifiziertes Euler Verfahren)** |  | **Konvergenz- und Konsistenzordnung beträgt 2** |
| **Implizites Midpoint**  **Verfahren** | ***,*** | **Konvergenz- und Konsistenzordnung beträgt 2** |

**Unterrelaxation**

Nachdem die Berechnung einer äußeren Iteration abgeschlossen wurde, müssen die Ergebnisse an die nächste Iteration übergeben werden. Diese Weitergabe ist unter Berücksichtigung des Aufwands und der erreichbaren Konvergenz an Faktoren gebunden.



Diese sog. Unterrelaxationsfaktoren werden auf alle Gleichungen, mit Ausnahme jener für die Druckkorrektur, angewendet. Optimale Werte sind schwer zu bestimmen und von der jeweiligen Problemstellung abhängig. Die Faktoren sind jedoch grundsätzlich zwischen den Werten 0,1 und 1 zu wählen und bestimmen, wie aus Gleichung (2.38) ersichtlich, wie weit Ergebnisse aus der vorangegangenen Iteration übernommen werden, bzw. wie weit Ergebnisse neu berechnet werden. Allgemein lässt sich sagen, dass für kleine Faktoren die Stabilität aber auch der Aufwand der Simulation zunimmt.

**3.3 Forderungen für eine erfolgreiche CFD-Simulation**

**3.3.1 Konsistenz**

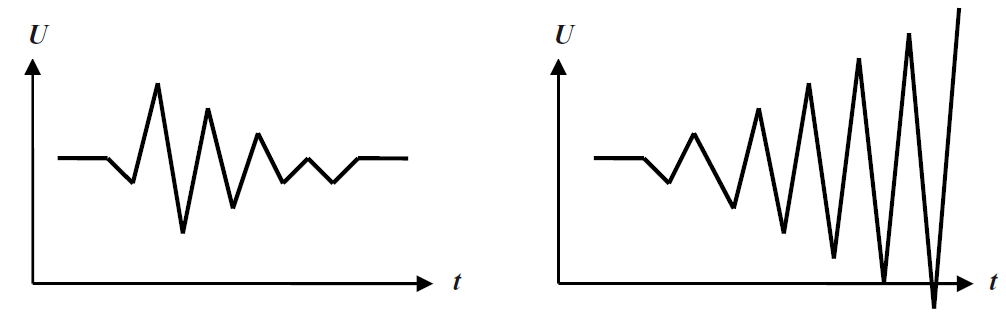
Die Differenzengleichungen sind konsistent, wenn sie für in die Differentialgleichungen übergehen bzw. wenn ihre Abbruchfehler *O(h), O(h), O, O O* usw. für zu Null werden. Damit ist sichergestellt, dass die Differenzgleichungen auch die physikalischen Differentialgleichungen repräsentieren und keine Terme fehlen oder zu viel sind. **[!!!!!!!!]**

Konsistenz steht für die Verträglichkeit des Differenzenschemas mit den Differentialoperatoren und ist die Minimalanforderung, welche in der Regel auch leicht zu erfüllen ist [Prof.Dr.-Ing.Kaltenbach, 2013].

Für eine unendlich feine Diskretisierung in Raum und Zeit muss der Abbruchfehler gegen Null streben. Der Abbruchfehler ist definiert als der Unterschied zwischen der diskretisierten und der exakten Gleichung. Konsistenz bedeutet jedoch nicht automatisch, dass die Lösung der diskretisierten Gleichung im Grenzfall eines unendlich feinen Gitters der exakten Lösung der Differentialgleichung entspricht. Dafür muss die Lösungsmethode zusätzlich noch stabil sein, was im nächsten Abschnitt erläutert wird [Ferziger/Peric, 2008].

**3.3.2 Stabilität**

Ein numerisches Lösungsverfahren ist dann stabil, wenn die Abbruchfehler, die ja bei der numerischen Lösung vernachlässigt werden, immer kleiner werden. Die numerische Lösung erfüllt dann die Differenzengleichung. In der Mathematik gibt es zahlreiche Methoden zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens von Differentialgleichungen. Am bekanntesten ist die Von Neumann Stabilitätsanalyse, bei der untersucht wird, ob kleine Störungen gedämpft oder angefacht werden. **[8]**



Stabiler Verlauf Instabiler Verlauf

**Abbildung 3-8** Verlauf der Strömungsgröße ***U*** über der Zeit für eine stabile und eine instabile Lösung

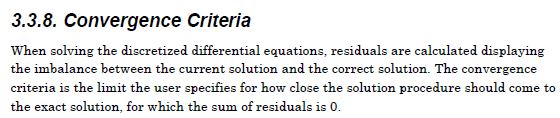
Ein numerisches Lösungsverfahren ist stabil, wenn die Fehler, die während des Lösungsprozesses auftreten, nicht angefacht werden. Für iterative Lösungsmethoden, wie sie auch im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden, bedeutet Stabilität, dass die Iterationen nicht divergieren. Allgemein ist die Untersuchung der Stabilität sehr schwierig [Ferziger/Peric, 2008].

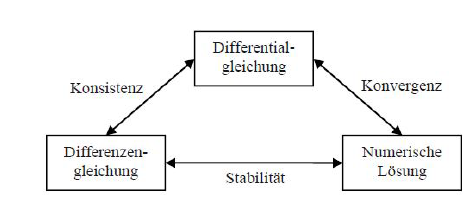
**3.3.3 Konvergenz**

Eine numerische Lösung ist konvergent, wenn sie die Differentialgleichung erfüllt. Dies wird z. B. bei Zeitschrittverfahren anhang des so genannten *Residuums* überprüft. Das *Residuum* ist ein Zahlenwert für jede Erhaltungsgleichung, der angibt, in wie weit die stationäre Erhaltungsgleichung erfüllt ist. Ist es um 4-5 Größenordnungen gesunken, so spricht man in der Praxis von einer konvergenten Lösung (theoretisch müsste das Residuum gleich Null sein).**[8]**

Notwendige Voraussetzungen für die Konvergenz einer numerischen Methode sind Konsistenz und Stabilität, welche in den vorherigen Abschnitten erläutert wurden. Strebt nun die Lösung der diskretisierten Gleichung bei unendlich kleinen Gitterabständen gegen die exakte Lösung der Gleichung, so ist die Methode konvergent [Ferziger/Peric, 2008]. Die Konvergenz lässt sich anhand verschiedener Residuen überprüfen. Diese sind Zahlenwerte, welche angeben, in wie weit die stationäre Erhaltungsgleichung erfüllt ist [Lecheler, 2011]. Das Konvergenzkriterium in dieser Simulation ist erfüllt, wenn die Residuen auf einen Wert von 0,0001 gesunken sind.

Dem Anwender muss jedoch stets bewusst sein, dass nur eine Näherungslösung generiert wird und bei den einzelnen Schritten Fehler gemacht werden, über dessen Größe er sich im Klaren sein sollte [Prof. Dr.-Ing. Kaltenbach, 2013].





**3.4 AVL Fire – Grundlagen und Bewertung**

AVL FIRE ist eine Software, die verschieden Typen von Netzen erstellt, bewertet und simuliert. Die numerischen Verfahren zur Diskretisierung und Modellierung der Turbulenz, die wir bisher besprochen haben, werden implementiert. Standardmäßig wird das k-ζ-f Modell für die Wirbelviskositätsturbulenzmodellierung und die *Finite-Volumen-Methode* (FV) für die Art der Diskretisierung angewendet.

Außerdem bietet AVL FIRE viele verschiedenen Möglichkeiten, um Netze zu erstellen – FAME Engine, FAME Engine Plus, Advanced Hybrid, FAME Hexa und ESE Engine. Für sich nicht bewegende Netze wie zum Beispiel Einlass- und Auslasskanäle sind FAME Engine, Advanced Hybrid und FAME Hexa besser geeignet. Während für sich bewegende Netze wie z.B. Motorbrennraum, sind FAME Engine Plus und ESE Engine besser geeignet. Die Bewertung der Netze wird ausschließlich mit AVL FIRE Workflow Manager durchgeführt.