3. Понятие о нечетких множествах

Предпосылки появления новой теории

При анализе плохо структурированных задач, связанных с классификацией, обоснованием выбора одной из нескольких альтернатив и т. п. математические методы, основанные на классической (канторовской) теории множеств, не всегда применимы.

Проблема:

во многих случаях отсутствуют формальные признаки принадлежности элемента данному множеству (явления и понятия имеют многозначный и неточный характер).

Примеры.

- Множества людей
  - молодых,
  - среднего возраста,
  - пожилых.
- Множество объектов, расположенных «недалеко от…» или «в районе…» или «на берегу…».
- Множество значений некоторого показателя, «незначительно отличающихся» от нормы.

В 1965 г. в журнале «Information and Control» была опубликована известная статья профессора университета г. Беркли (США) Лофти Заде «Fuzzy Sets» («Нечеткие множества»).

Развитие теории нечетких множеств – попытка преодолеть ограниченность классической теории множеств при моделировании объектов с размытыми, нечеткими границами.

В основе теории – более широкое толкование понятия принадлежности элемента ***x*** к данному множеству ***A***.

Характеристическая функция в классической теории множеств

Пусть ***U*** – универсум (из элементов которого образованы все остальные множества).

Характеристическая функция множества $A \subset U$ (характеризует принадлежность или непринадлежность элемента ***x*** множеству ***A***) определяется так:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Обобщение:

отказ от бинарного характера этой функции;

допущение, что функция может принимать любые значения, принадлежащие отрезку [0, 1]

функция принадлежности (характеризует степень принадлежности элемента ***x*** нечеткому множеству).

Функция принадлежности в теории нечетких множеств

Пусть ***M*** – непустое канторовское множество.

Нечетким подмножеством А множества ***M*** называется множество пар

$$A = \left\{ \left(x, \mu_A(x)\right) \middle|\ x \in M,\ \mu_A(x) \in [0,1] \right\},$$

где

$$\mu_A(x):\quad M \to [0,1] \; –$$

функция принадлежности нечеткого множества А.

Множество ***M*** называется ***базовым множеством*** (базовой шкалой).

Функция принадлежности $\boldsymbol{\mu_A(x)}$ приписывает каждому элементу $x \in M$ *степень его принадлежности* к нечеткому множеству ***A***.

При этом

- $\boldsymbol{\mu_A(x)} = 1$ означает полную принадлежность элемента нечеткому множеству;
- $\boldsymbol{\mu_A(x)} = 0$ означает отсутствие принадлежности элемента нечеткому множеству;
- $0 \le \boldsymbol{\mu_A(x)} \le 1$ означает частичную принадлежность элемента нечеткому множеству.

Функция принадлежности может быть задана как аналитически, так и набором значений.

Примеры.

1. Пусть ***M*** = ***N*** (множество натуральных чисел).

Определим нечеткое подмножество ***A*** – числа, «близкие к 7», функцией принадлежности:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \mathbf{1} \quad \textbf{если} \quad x = 7, \\ \mathbf{0{,}8} \quad \textbf{если} \quad x = \mathbf{6} \ \textbf{или} \ x = \mathbf{8}, \\ \mathbf{0{,}5} \quad \textbf{если} \quad x = \mathbf{5} \ \textbf{или} \ x = \mathbf{9}, \\ \mathbf{0{,}2} \quad \textbf{если} \quad x = \mathbf{4} \ \textbf{или} \ x = \mathbf{10}, \\ \mathbf{0} \quad \textbf{если} \quad x < \mathbf{4} \ \textbf{или} \ x > \mathbf{10}. \end{cases}$$

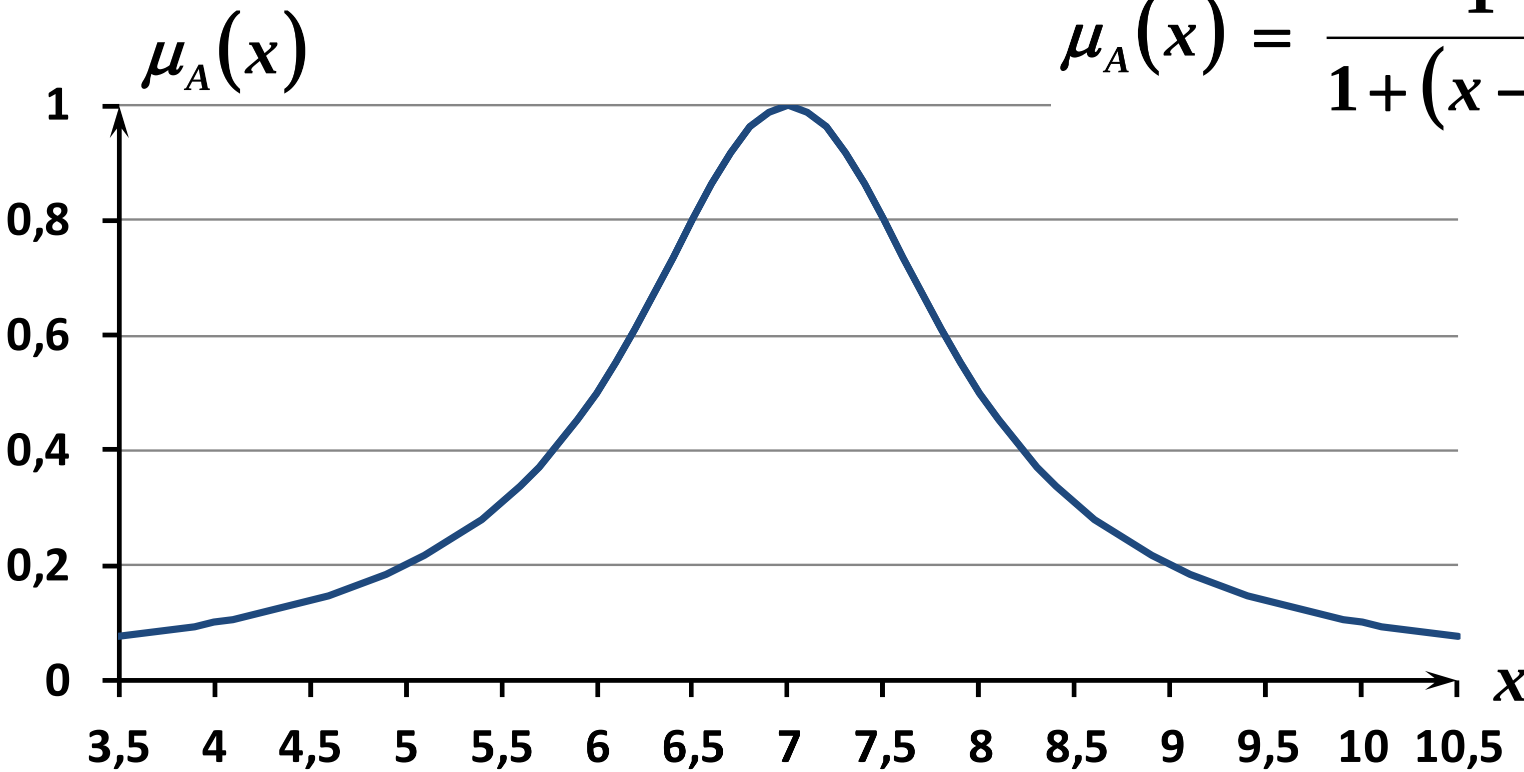
Или:

$$A = \{(4, 0.2), (5, 0.5), (6, 0.8), (7, 1), (8, 0.8), (9, 0.5), (10, 0.2)\}.$$

2. Пусть ***M*** = ***R*** (множество действительных чисел).

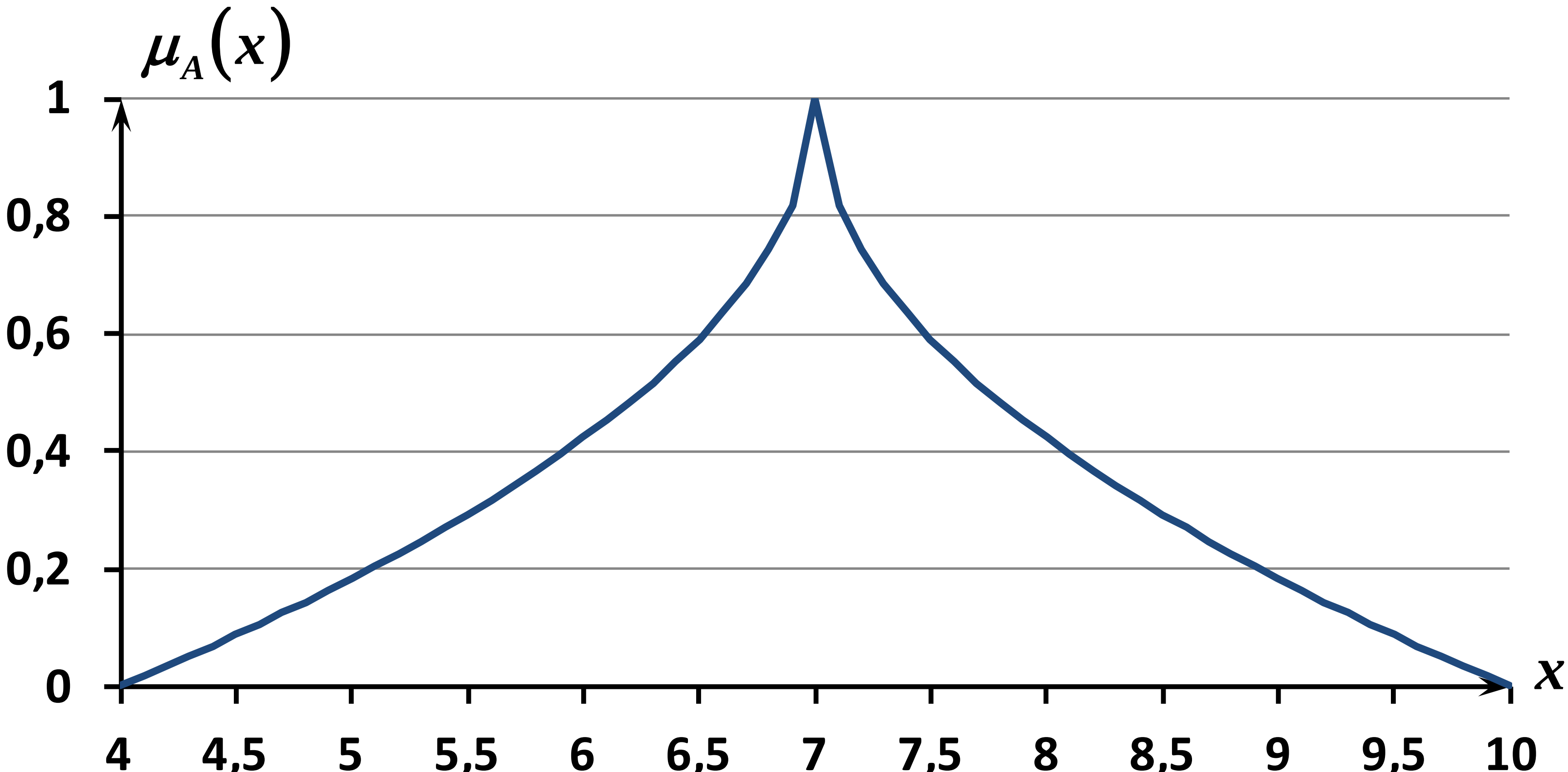
Функция принадлежности нечеткого подмножества ***A*** (числа, «близкие к 7»), может иметь вид:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-7)^2}$$



Другой способ:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\dfrac{|x-7|}{3}} & \text{если } 4 \le x \le 10, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



Пример.

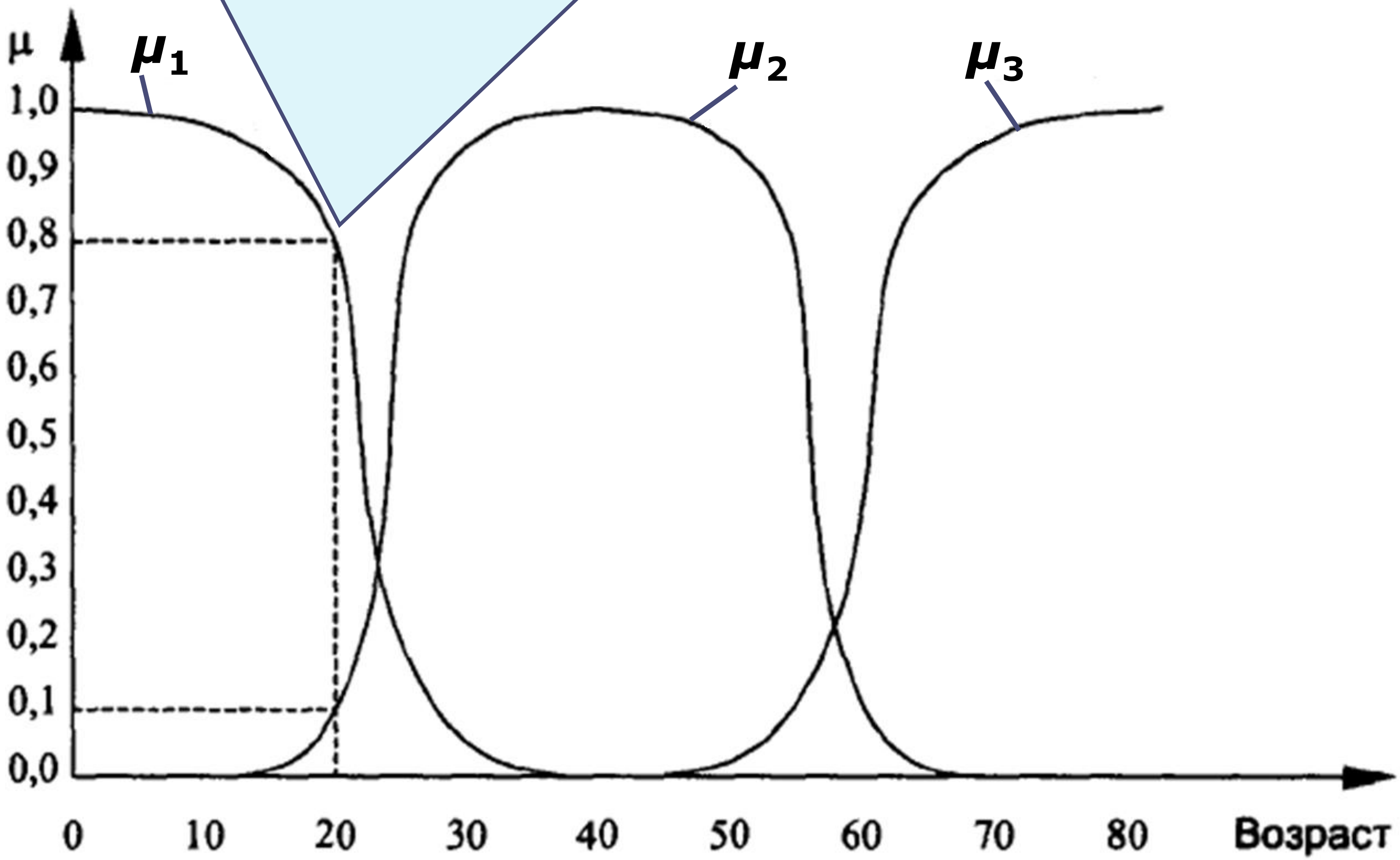
Рассмотрим три неточных формулировки:

1) «молодой человек»;
2) «человек среднего возраста»;
3) «пожилой человек».

В качестве множества ***M*** рассмотрим числа (возраст в годах), большие нуля.

Функции принадлежности нечетким множествам, определяемым формулировками 1) – 3), могут иметь следующий вид.

20-летний человек относится к нечетким подмножествам:
«Молодые» с функцией принадлежности $\mu_1=0,8$;
«Средний возраст» – с функцией принадлежности $\mu_2=0,1$.



Пустое множество

Нечеткое множество ***A*** называется ***пустым*** тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{\mu_A}(\boldsymbol{x}) = 0$$

для всех $x \in M$.

Обозначение такое же, как в классической теории множеств: $\varnothing$.

Включение нечетких множеств

Нечеткое множество ***A содержится в*** нечетком множестве ***B*** тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{\mu_A}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{\mu_B}(\boldsymbol{x})$$

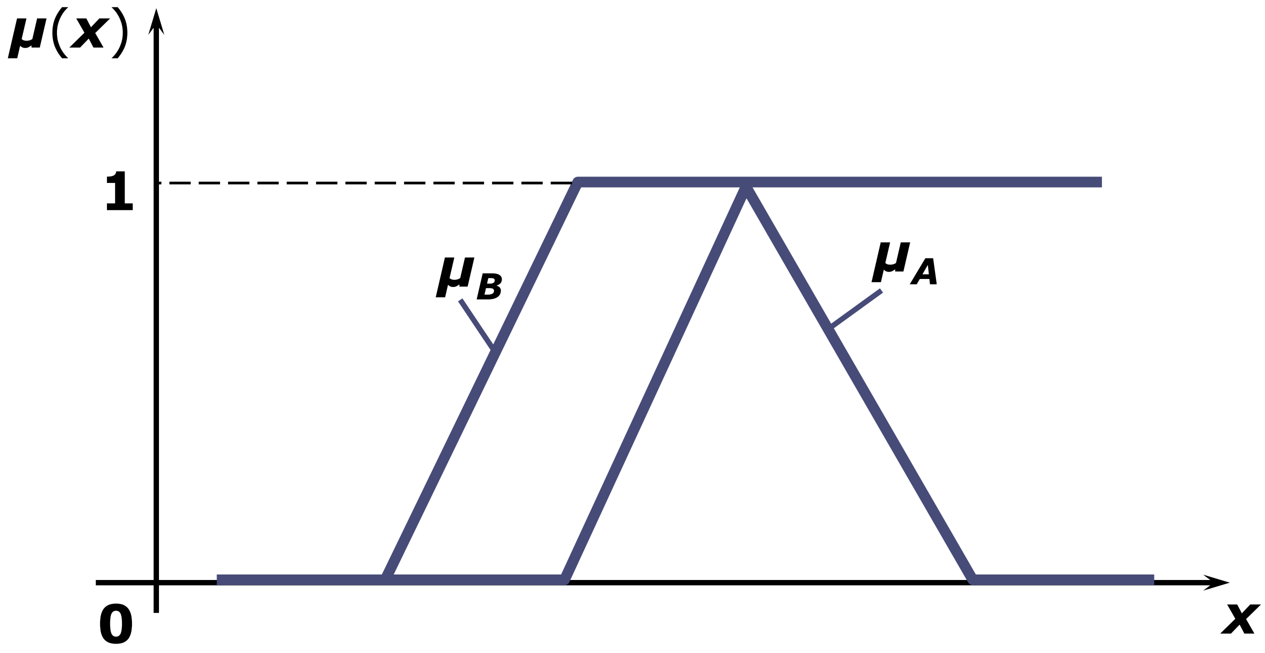
для всех $x \in M$.

Обозначение такое же, как в классической теории множеств:

$$A \subset B.$$

Пример.

Иллюстрация включения нечеткого множества ***A*** в нечеткое множество ***B***:



Замечание.

В литературе встречается также понятие *степени включения нечетких множеств*.

Степень включения нечеткого множества ***A*** в нечеткое множество ***B*** в предыдущем примере равна 1 (полное включение).

В общем случае степень включения трактуется как

$$I(A \subset B) = \min_{x \in T} \mu_B(x),$$

где

$$T = \{x \in M \mid \mu_A(x) \le \mu_B(x),\ \mu_A(x) > 0\}.$$

Равенство нечетких множеств

Нечеткое множество ***A равно*** нечеткому множеству ***B*** тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{\mu_A(x) = \mu_B(x)}$$

для всех $x \in M$.

Обозначение: $\boldsymbol{A = B}$.

<u>Замечание</u>.

В литературе используется также понятие *степени равенства нечетких множеств.*

Операции над нечеткими множествами

- ***Объединение нечетких множеств***.

Объединением нечетких множеств $A, B \subset M$ называется нечеткое множество $A \cup B$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

для каждого $x \in M$.

Пример.

Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

нечеткие множества ***A*** и ***B*** определены функциями принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \mathbf{0{,}9} \quad \textbf{если} \quad x = 3, \\ \mathbf{1} \quad \textbf{если} \quad x = 4, \\ \mathbf{0{,}6} \quad \textbf{если} \quad x = 6, \\ \mathbf{0} \quad \textbf{если} \quad x \notin \{3, 4, 6\}; \end{cases} \qquad \mu_B(x) = \begin{cases} \mathbf{0{,}7} \quad \textbf{если} \quad x = 3, \\ \mathbf{1} \quad \textbf{если} \quad x = 5, \\ \mathbf{0{,}4} \quad \textbf{если} \quad x = 6, \\ \mathbf{0} \quad \textbf{если} \quad x \notin \{3, 5, 6\}. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} \mathbf{0{,}9} \quad \textbf{если} \quad x = 3, \\ \mathbf{1} \quad \textbf{если} \quad x = 4, \\ \mathbf{1} \quad \textbf{если} \quad x = 5, \\ \mathbf{0{,}6} \quad \textbf{если} \quad x = 6, \\ \mathbf{0} \quad \textbf{если} \quad x \in \{1, 2, 7\}. \end{cases}$$

Другой способ записи:

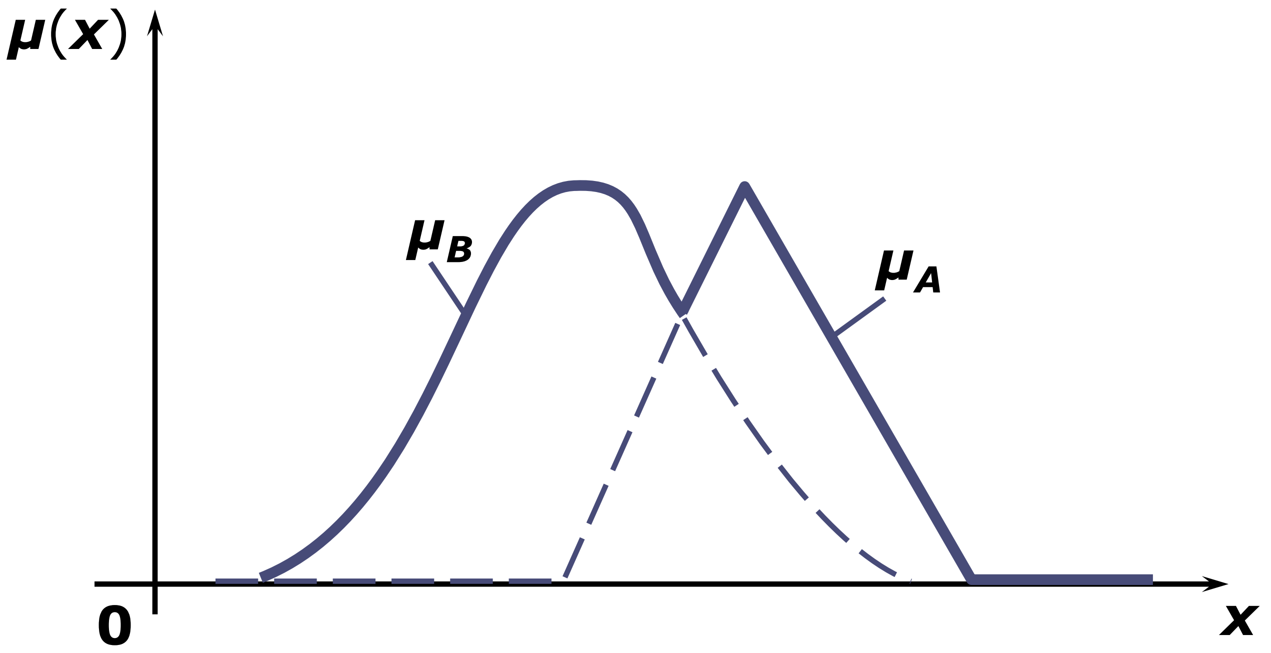
$$A = \{(3, 0.9), (4, 1), (6, 0.6)\}, \quad B = \{(3, 0.7), (5, 1), (6, 0.4)\},$$

тогда

$$A \cup B = \{(3, 0.9), (4, 1), (5, 1), (6, 0.6)\}.$$

Пример.

Иллюстрация объединения нечетких множеств ***A*** и ***B***:



- ***Пересечение нечетких множеств***.

Пересечением нечетких множеств $A, B \subset M$ называется нечеткое множество $A \cap B$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

для каждого $x \in M$.

Примеры.

1. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

нечеткие множества ***A*** и ***B*** определены функциями принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0{,}9 & \text{если } x = 3, \\ 1 & \text{если } x = 4, \\ 0{,}6 & \text{если } x = 6, \\ 0 & \text{если } x \notin \{3, 4, 6\}; \end{cases} \qquad \mu_B(x) = \begin{cases} 0{,}7 & \text{если } x = 3, \\ 1 & \text{если } x = 5, \\ 0{,}4 & \text{если } x = 6, \\ 0 & \text{если } x \notin \{3, 5, 6\}. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0{,}7 & \text{если } x = 3, \\ 0{,}4 & \text{если } x = 6, \\ 0 & \text{если } x \in \{1, 2, 4, 5, 7\}. \end{cases}$$

Другой способ записи:

$$A = \{(3, 0.9), (4, 1), (6, 0.6)\}, \quad B = \{(3, 0.7), (5, 1), (6, 0.4)\},$$

тогда

$$A \cap B = \{(3, 0.7), (6, 0.4)\}.$$

2. Пусть

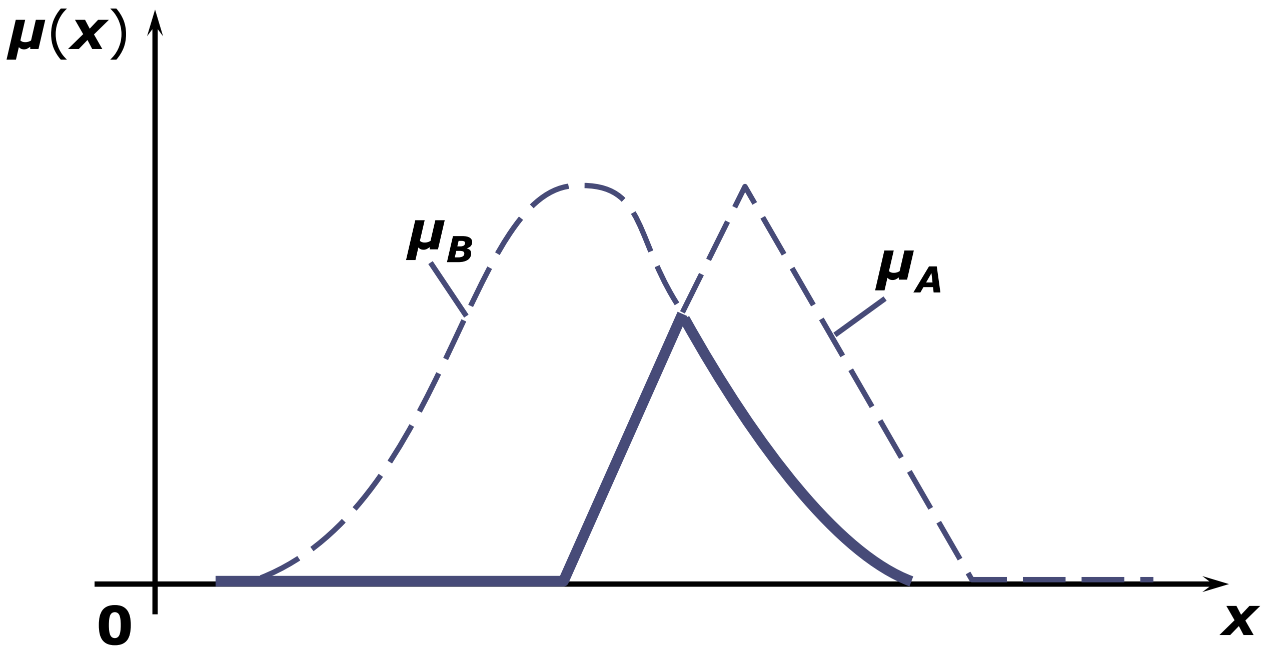
$$A = \{(1, 0.3), (2, 0.6)\}, \quad B = \{(3, 0.7), (4, 0.4)\}.$$

Тогда

$$A \cap B = \varnothing.$$

Пример.

Иллюстрация пересечения нечетких множеств ***A*** и ***B***:



Замечание.

В литературе встречаются и другие, отличные от приведенных выше, определения операций объединения и пересечения нечетких множеств.

- ***Дополнение нечеткого множества***.

Дополнением нечеткого множества $A \subset M$ называется нечеткое множество $\overline{A}$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

для каждого $x \in M$.

Пример.

Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

нечеткое множество ***A*** определено следующим образом:

$$A = \{(2, 0.3), (3, 1), (5, 0.7), (6, 0.9)\},$$

т. е.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0{,}3 & \text{если } x = 2, \\ 1 & \text{если } x = 3, \\ 0{,}7 & \text{если } x = 5, \\ 0{,}9 & \text{если } x = 6, \\ 0 & \text{если } x = 1 \text{ или } x = 4. \end{cases}$$

Тогда

$$\overline{A} = \{(1, 1), (2, 0.7), (4, 1), (5, 0.3), (6, 0.1)\}.$$

При этом:

$$A \cup \overline{A} = \{(1, 1), (2, 0.7), (3, 1), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.9)\} \neq M,$$

и

$$A \cap \overline{A} = \{(2, 0.3), (5, 0.3), (6, 0.1)\} \neq \varnothing.$$