Компьютерная математика.
Задания для самостоятельного выполнения.

1. Множества. Операции над множествами.

Часть 1.

Указания.
Выполнение заданий части 1 предполагает организацию хранения множеств с помощью массивов.
Последовательная обработка всех элементов массива (множества) может быть организована с использованием оператора ***foreach***:
https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/2h3zzhdw.aspx
https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/ttw7t8t6.aspx
Операции объединения, пересечения и разности множеств могут быть реализованы с помощью методов ***Union***, ***Intersect*** и ***Except*** соответственно:
https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/bb341731(v=vs.110).aspx
https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/bb460136(v=vs.110).aspx
https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/bb300779(v=vs.110).aspx
Проверка принадлежности элемента данному множеству может быть реализована с помощью метода ***Contains***:
https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/bb352880(v=vs.110).aspx

Задание 1 (2 балла).
Написать программу, которая формирует числовое множество ***X*** с помощью указанного характеристического предиката или порождающей процедуры и выводит на экран элементы сформированного множества, а также мощность этого множества.

№ варианта	Условие принадлежности множеству
1	x – четные натуральные числа в промежутке от 11 до 23.
2	x – нечетные натуральные числа, не превосходящие 11.
3	x – целые числа, кратные 3, в промежутке от –11 до 7.
4	x – целые числа, не кратные 3, удовлетворяющие $\|x\| < 5$.
5	$x = n^3 - 1$, n – натуральное число, $n < 7$.
6	$\cos x = 0$, $\|x\| < 9$.
7	x – число Фиббоначчи, не превосходящее 20.
8	x – число Фиббоначчи, не меньшее 10 и не большее 100.
9	$x = n^2 + 1$, n – натуральное число, $n < 7$.
10	$x = 3n$, n – натуральное число, $n < 7$.

<u>Внимание</u>: в результате работы программы элементы множества $\boldsymbol{X}$ должны быть не только выведены на экран, но и сохранены (т. е. реализована операция добавления элемента в множество).

<u>Задание 2 (4 балла).</u>

Написать программу, которая выводит все собственные подмножества заданного множества (предусмотреть возможность ввода элементов исходного множества пользователем). Вывести все собственные подмножества множества $\boldsymbol{X}$, сформированного в задании 1.

<u>Задание 3 (2 балла).</u>

Написать программу, которая выводит все элементы множества, составленного из букв заданного слова. Учесть, что множество не должно содержать повторяющихся элементов.

<u>Задание 4 (3 балла).</u>

1. Используя свойства операций над множествами и определение разности множеств, упростить выражения, выбранные в соответствии с номером своего варианта. Все преобразования должны быть выполнены на бумаге, оформлены в виде отчета и защищены в процессе собеседования с преподавателем (обоснован каждый шаг преобразования с указанием применения того или иного свойства).

№ варианта	Выражение
1	$(A \cup B \cup \overline{C}) \setminus (B \cup C)$
	$\overline{B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup B \cap C}$
	$A \cap B \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$
2	$\overline{A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap B}$
	$(\overline{A} \cup B \cup C) \setminus (A \cup B)$
	$B \cap C \cup B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C$
3	$(A \cup \overline{B} \cup C) \setminus (B \cup C)$
	$\overline{\overline{B} \cap C \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup B \cap C}$
	$A \cap C \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C$
4	$\overline{B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup B \cap C}$
	$(A \cup B \cup \overline{C}) \setminus (B \cup C)$
	$A \cap B \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$
5	$B \cap C \cup B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C$
	$\overline{A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap B}$
	$(\overline{A} \cup B \cup C) \setminus (A \cup B)$
6	$A \cap C \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C$

	$\left(A\cup\overline{B}\cup C\right)\setminus\left(B\cup C\right)$
	$\overline{\overline{B}\cap C\cup\overline{B}\cap\overline{C}\cup B\cap C}$
7	$A\cap B\cup A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B$
	$\overline{B\cap\overline{C}\cup\overline{B}\cap\overline{C}\cup B\cap C}$
	$\left(A\cup B\cup\overline{C}\right)\setminus\left(B\cup C\right)$
8	$\overline{A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap\overline{B}\cup A\cap B}$
	$\left(A\cup\overline{B}\cup C\right)\setminus\left(B\cup C\right)$
	$B\cap C\cup B\cap\overline{C}\cup\overline{B}\cap C$
9	$\left(\overline{A}\cup B\cup C\right)\setminus\left(A\cup B\right)$
	$\overline{\overline{B}\cap C\cup\overline{B}\cap\overline{C}\cup B\cap C}$
	$A\cap C\cup A\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap C$
10	$A\cap B\cup A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B$
	$\left(A\cup B\cup\overline{C}\right)\setminus\left(B\cup C\right)$
	$\overline{B\cap\overline{C}\cup\overline{B}\cap\overline{C}\cup B\cap C}$

2. Выполнить вручную все операции над множествами, заданными в таблице (выбрать в соответствии с номером своего варианта), для исходного и преобразованного выражений. Сравнить результаты. Все вычисления представить в отчете.

№ варианта	Множества
1	$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{0,2,3,4,6,7\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, $C=\{1,2,4,5,7,8\}$
	$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, $C=\{4,8\}$
	$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,3,6,7,9\}$, $B=\{2,4,8\}$
2	$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{4,8\}$
	$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,2,4,5,7,8\}$, $B=\{0,2,3,4,6,7\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$
	$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{1,3,6,7,9\}$, $C=\{2,4,8\}$
3	$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{0,2,3,4,6,7\}$, $B=\{1,2,4,5,7,8\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$
	$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,8\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$

	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{1, 3, 6, 7, 9\}, \quad C = \{2, 4, 8\}$
4	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad C = \{4, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{1, 3, 6, 7, 9\}, \quad B = \{2, 4, 8\}$
5	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $B = \{1, 3, 6, 7, 9\}, \quad C = \{2, 4, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{4, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \quad B = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
6	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{1, 3, 6, 7, 9\}, \quad C = \{2, 4, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}, \quad B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $B = \{4, 8\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
7	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{1, 3, 6, 7, 9\}, \quad B = \{2, 4, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad C = \{4, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
8	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{4, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}, \quad B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $B = \{1, 3, 6, 7, 9\}, \quad C = \{2, 4, 8\}$
9	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \quad B = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $B = \{4, 8\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 6, 7, 9\}$, $C = \{2, 4, 8\}$
10	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 6, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
	$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{4, 8\}$

Задание 5 (3 балла).

1. Написать программу, которая позволяет выполнить основные операции (объединение, пересечение, разность, дополнение до заданного универсума) над множествами, введенными пользователем, и вывести полученные результаты.
2. Используя программу, созданную при выполнении п. 1, получить результат применения всех операций к выражениям, данным в задании 4 (для исходных и преобразованных выражений) для указанных множеств.
3. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную.

Задание 6 (2 балла).

Выполнить графическое представление операций над множествами из задания 4 с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Задание 7 (2 балла).

Установить, какие из приведенных ниже совокупностей образуют разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Если некоторая совокупность не является разбиением, объяснить, почему. Рассуждения представить в отчете.

1) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \varnothing, \{6, 7\}\}$
2) $\{\{1, 7\}, \{3, 4, 6\}\}$
3) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}\}$
4) $\{\{1, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 6, 7\}\}$
5) $\{\{1, 7\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$
6) $\{\{1, 4\}, \{3, 5, 8\}, \{2, 6, 7\}\}$
7) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}\}$
8) $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$

Часть 2.

<u>Указания</u>.
Выполнение заданий части 2 предполагает организацию хранения множеств с помощью битовых шкал.

<u>Задание 8 (4 балла).</u>

1. Написать программу, которая позволяет выполнить основные операции (объединение, пересечение, разность, дополнение до заданного универсума) над множествами, введенными пользователем, и вывести полученные результаты. Хранение множеств организовать с помощью битовых шкал, реализацию операций над множествами – с помощью логических операций над кодами исходных множеств.
2. Используя программу, созданную при выполнении п. 1, получить результат применения всех операций к выражениям, данным в задании 4 части 1, для указанных множеств.

<u>Задание 9 (3 балла).</u>
Написать программу, которая выводит все собственные подмножества заданного множества с помощью алгоритма построения бинарного кода Грея. Выполнить тестирование программы.

2. Отношения на множествах.

<u>Задание 1 (2 балла).</u>

1. Написать программу, которая для заданных множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (множества вводит пользователь) реализует получение декартова произведения этих множеств. Продумать соответствующую процедуру для случая, когда природа объектов, составляющих множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, различна (используются разные типы данных).
2. Выполнить тестирование программы.

<u>Задание 2 (2 балла).</u>

1. Написать программу, которая для заданного множества пар элементов (множество пар вводит пользователь), представляющего собой декартово произведение множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, реализует построение исходных множеств. Предусмотреть проверку корректности введенного множества пар (достаточно ли их для решения поставленной задачи).
2. Выполнить тестирование программы.

<u>Задание 3 (2 балла).</u>
Установить, является ли каждое из перечисленных ниже отношений $\boldsymbol{R}$,

заданных на множестве $\boldsymbol{X}$, отношением эквивалентности (выбрать набор отношений в соответствии с номером своего варианта). В процессе анализа выполнить проверку <u>всех</u> свойств, которыми должно обладать отношение эквивалентности. Для каждого отношения эквивалентности построить классы эквивалентности. Все рассуждения представить в отчете.

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th>Множества и заданные на них отношения</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>$\boldsymbol{X}$ – множество целых чисел, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием:
$(x_1, x_2) \in R \iff x_1 + x_2 = 0.$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{X}$ – множество всех подмножеств множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>$\boldsymbol{X}$ – множество целых чисел, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием:
$(x_1, x_2) \in R \iff x_1 + x_2 = 2.$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{X}$ – множество всех подмножеств множества $A = \{a, b, c, d\}$, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>$\boldsymbol{X}$ – множество целых чисел, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием:
$(x_1, x_2) \in R \iff x_1 - x_2 = 2.$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{X}$ – множество всех подмножеств множества $A = \{5, 6, 7, 8\}$, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>$\boldsymbol{X}$ – множество целых чисел, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием:
$(x_1, x_2) \in R \iff x_1 + x_2 = 5.$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{X}$ – множество всех подмножеств множества $A = \{y, z, t, w\}$, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>$\boldsymbol{X}$ – множество целых чисел, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием:
$(x_1, x_2) \in R \iff x_1 - x_2 = 5.$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{X}$ – множество всех подмножеств множества $A = \{-1, 0, 2, 3\}$, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td>$\boldsymbol{X}$ – множество целых чисел, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием:
$(x_1, x_2) \in R \iff x_1 + x_2 = 1.$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{X}$ – множество всех подмножеств множества $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$\boldsymbol{X}$ – множество целых чисел, отношение $\boldsymbol{R}$ задано условием:
$(x_1, x_2) \in R \iff x_1 - x_2 = 1.$</td></tr>
</table>

	X – множество всех подмножеств множества $A = \{-2, 0, 1, 7\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.
8	X – множество целых чисел, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 7$.
	X – множество всех подмножеств множества $A = \{\lambda, \mu, \nu, \eta\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.
9	X – множество целых чисел, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 7$.
	X – множество всех подмножеств множества $A = \{1, 4, 9, 16\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.
10	X – множество целых чисел, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$.
	X – множество всех подмножеств множества A = {☼, ☺, □, ◊}, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R$, если x_1 и x_2 содержат одинаковое число элементов.

Задание 4 (4 балла).

Заданные ниже отношения (в соответствии с номером своего варианта) представить двумя способами:

- множеством пар элементов множества X (в тех случаях, где это не сделано);
- булевой матрицей.

Для обоих способов представления выполнить проверку на наличие свойств (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, полнота). Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности. Сделать выводы. Все рассуждения представить в отчете.

№ варианта	Множества и заданные на них отношения
1	$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$.
	$X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (3,2)\}$.
	$X = \{"aba", "aa", "a", "b"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ строка x содержится в строке y.

2	$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3$.
	$X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (3,2)\}$.
	$X = \{"ab", "ac", "ca", "bb"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ строки x и y начинаются с одного символа.
3	$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow \lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert$.
	$X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$.
	$X = \{"aba", "aa", "a", "b"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ строки x и y разной длины.
4	$X = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$.
	$X = \{0, 1, 2\}$, $R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0), (2,1)\}$.
	$X = \{"baa", "aa", "a", "ba"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ конец строки x совпадает со строкой y.
5	$X = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3$.
	$X = \{0, 1, 2\}$, $R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0), (0,2), (2,0), (1,2), (2,1)\}$.
	$X = \{"aba", "ab", "a", "b"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ строка x совпадает с началом строки y.
6	$X = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow \lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert$.
	$X = \{0, 1, 2\}$, $R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1)\}$.
	$X = \{"abc", "bb", "ca", "ab"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ первый символ строки x не встречается в y.
7	$X = \{-7, -5, -1, 0, 1, 5, 7\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$.

	$X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, b)\}$.
	$X = \{"abc", "aa", "a", "ab"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ строка x меньше в y лексикографически (идет раньше в алфавитном порядке).
8	$X = \{-7, -5, -1, 0, 1, 5, 7\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3$.
	$X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$.
	$X = \{"b", "a", "c", "bba", "bbc"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ если удалить первые 2 символа в строке x, то получится строка y.
9	$X = \{-7, -5, -2, 0, 2, 5, 7\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow \lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert$.
	$X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, b)\}$.
	$X = \{"aaa", "", "a", "ab", "abab", "aa"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ строка x состоит из двух сцепленных строк y.
10	$X = \{-8 - 2, -1, 0, 1, 2, 8\}$, отношение R задано условием: $(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$.
	$X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$.
	$X = \{"abab", "a", "ab", "b"\}$, отношение R задано условием: $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ сцепление строк x и y равно сцеплению y и x.

Задание 5 (3 балла).

1. Написать программу, которая для заданного множества и отношения на этом множестве, определенного множеством пар элементов, реализует представление данного отношения булевой матрицей. Предусмотреть как возможность ввода пар элементов пользователем, так и его автоматическое формирование согласно условиям, соответствующим своему варианту.
2. Используя программу, созданную при выполнении п. 1, получить представление булевыми матрицами для всех отношений, рассмотренных в задании 4.

3. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную.

Указание. Работа со строками может быть организована с помощью стандартных операций:
https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/system.string(v=vs.110).aspx

Задание 6 (2 балла).

1. Написать программу, которая для заданного множества и отношения на этом множестве, заданного булевой матрицей, реализует представление данного отношения в виде множества пар элементов.
2. Используя программу, созданную при выполнении п. 1, получить представление в виде множества пар элементов для всех отношений, рассмотренных в задании 4, заданных булевыми матрицами.
3. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную (или данными в задании 4).

Задание 7 (4 балла).

1. Написать программу, которая позволяет выполнить проверку наличия основных свойств отношений (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, полнота). Предусмотреть возможность такой обработки для обоих способов представления отношений, рассмотренных в задании 4 (множеством пар и булевой матрицей). Реализовать получение вывода о том, относится ли отношение к одному из известных классов: отношения эквивалентности, отношения полного порядка, отношения частичного порядка.
2. Используя программу, созданную при выполнении п. 1, осуществить проверку наличия основных свойств для всех отношений, рассмотренных в задании 4.
3. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную.

Задание 8 (3 балла).

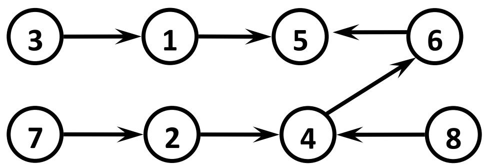
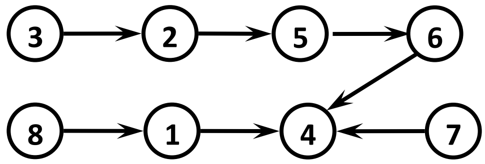
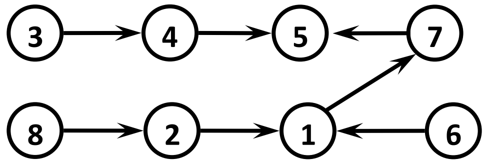
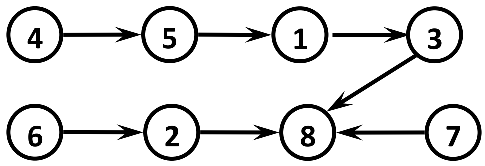
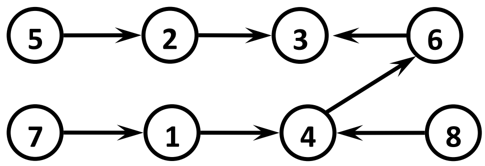
1. Написать программу, которая для заданного множества и отношения на этом множестве, определенного набором пар элементов, реализует построение транзитивного замыкания этого отношения (использовать алгоритм Уоршалла). Предусмотреть вывод полученного замыкания как в виде множества пар элементов, так и в виде булевой матрицы.
2. Выполнить тестирование программы.

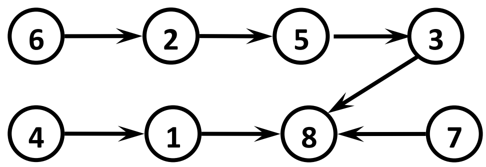
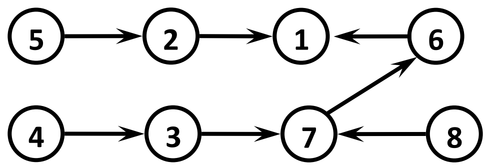
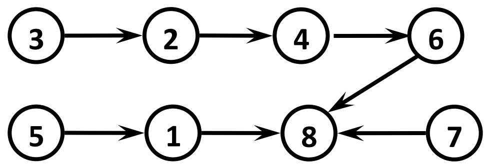
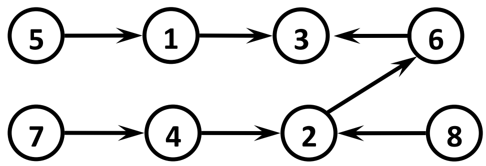
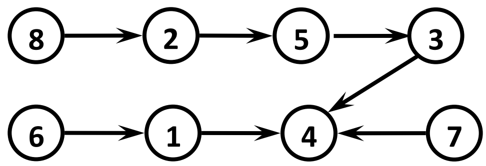
Задание 9 (3 балла).

1. Написать программу, которая реализует разбиение заданного конечного множества на классы эквивалентности (исходное множество и отношение эквивалентности вводит пользователь). Полученные классы эквивалентности выводить списком элементов.
2. Используя программу, созданную при выполнении п. 1, получить разбиение множества натуральных чисел, не превосходящих 20, по отношению «иметь одинаковый остаток от деления на 4».

Задание 10 (4 балла).

1. Написать программу, которая реализует дополнение заданного отношения частичного порядка до полного порядка (использовать алгоритм топологической сортировки). Предусмотреть вывод отношения линейного порядка как в виде последовательности элементов, так и в виде булевой матрицы.
2. Используя программу, созданную при выполнении п. 1, дополнить до полного порядка отношение частичного порядка, представленное графически (выбрать в соответствии с номером варианта).

№ варианта	Отношения частичного порядка
1	
2	
3	
4	
5	

6	
7	
8	
9	
10	

3. Элементы комбинаторики.

Задание 1 (по 0,5 балла за 1 задачу, кроме № 17).

Решить следующие задачи. Решения (с подробным обоснованием всех шагов) оформить в отчете.

1. Известно, что арифметические операции сложения и умножения коммутативны для конечного числа операндов. Например, выражение

   $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f})$$

   можно записать иначе: $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{e})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$. Сколько всего существует способов записи этого выражения?

2. Для формирования регистрационного знака автомобиля (кроме дипломатических), согласно ГОСТу, могут использоваться 12 букв русского алфавита (А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, Х, У), три десятичных цифры и номер региона РФ. Сколько различных регистрационных знаков можно сформировать для одного региона?

3. Получена шифровка вида:

   02, 30, 16, 04, 07, 18, 30, 17, 30, 09, 09, …

о которой известно только, что двухразрядные десятичные числа представляют собой номера букв русского алфавита. Некто использует следующий алгоритм расшифровки: нумерует буквы алфавита в некотором порядке, подставляет буквы согласно этой нумерации и пытается прочитать сообщение; если получилась бессмыслица, нумерует буквы в другом порядке, и т. д. Сколько операций перекодирования потребуется выполнить в самом неблагоприятном случае? Ответ можно записать формулой.

4. Сколько различных слов, состоящих не менее, чем из 9 букв, можно образовать, используя буквы слова «территория»? Сколько из них начинаются с буквы «т»? Под словом в данном случае следует понимать любую последовательность букв.

5. Три студента на экзамене выбирают по одному билету из 11, предложенных преподавателем. Сколькими способами может быть осуществлен выбор?

6. Для обработки символов формируется кодовая таблица на основе двоичного кода. Для хранения одного символа используется 1 байт. Предположим, что таблица должна включать десятичные цифры, символы английского и русского алфавита (в верхнем и нижнем регистре) и прочие символы. Какое максимальное количество позиций можно будет задействовать для хранения прочих символов? Получить ответ на этот же вопрос, если для хранения одного символа используется 2 байта.

7. Участники лотереи «Спортлото 5 из 36» должны были в лотерейном билете вычеркнуть 5 номеров из таблицы, содержащей номера 1, 2, 3, … , 36. После розыгрыша комбинация сравнивалась с выигрышной комбинацией, состоящей из 5 номеров. Размер выигрыша определялся количеством угаданных номеров. Сколько всего существует способов формирования таких комбинаций? Сколько комбинаций могут содержать 4 правильных номера из 5? Сколько комбинаций могут содержать 3 правильных номера из 5?

8. Делегация из 10 человек (одного пола) размещается в гостинице в два трехместных и один четырехместный номер. Сколько существует способов их размещения? Сколько существует способов размещения, при котором два определенных человека окажутся в одном номере?

9. Город $\boldsymbol{A}$ связан с городом $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{n}$ дорогами. Путешественник из города $\boldsymbol{A}$ решил посетить город $\boldsymbol{B}$ и вернуться обратно, не проезжая дважды по одной и той же дороге. Сколькими способами он может это сделать (получить формулу)? Найдите числовой ответ при $\boldsymbol{n} = 5$. Предполагается, что движение по всем

дорогам двустороннее.

10. Город $\boldsymbol{A}$ связан с городом $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{n}$ дорогами, по которым допускается только одностороннее движение из $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{m}$ дорогами с односторонним движением из $\boldsymbol{B}$ в $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{k}$ дорогами с двусторонним движением. Путешественник из города $\boldsymbol{A}$ решил посетить город $\boldsymbol{B}$ и вернуться обратно, не проезжая дважды по одной и той же дороге. Сколькими способами он может это сделать (получить формулу)? Найдите числовой ответ при $\boldsymbol{n} = 2$, $\boldsymbol{m} = 2$ и $\boldsymbol{k} = 3$.

11. Из города $\boldsymbol{A}$ в город $\boldsymbol{B}$ ведут 5 дорог, а из города $\boldsymbol{B}$ в город $\boldsymbol{C}$ ведут 3 дороги. Сколько путей, проходящих через $\boldsymbol{B}$, ведут из $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{C}$?

12. Решите уравнение относительно $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{C_x^3 = 364}$.

13. В профком избрано 9 человек. Из них необходимо выбрать председателя, его заместителя, секретаря и кассира. Сколькими способами это можно сделать?

14. В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают немецкий язык, 20 человек знают французский язык и 19 человек знают испанский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные – ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?

15. В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают немецкий язык, 20 человек знают французский язык и 21 человек знает испанский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

16. В выражении $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{15}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какие числовые коэффициенты будут у выражений $\boldsymbol{a}^3 \cdot \boldsymbol{b}^{12}$, $\boldsymbol{a}^9 \cdot \boldsymbol{b}^6$?

17. (**Дополнительно 2 балла**) В рамках некоторого проекта требуется выполнить 6 заданий. Предполагается, что задания могут выполняться независимо одно от другого. В отделе имеется 3 сотрудника, способных выполнить любое из этих заданий. Начальнику отдела необходимо распределить задания по сотрудникам так, чтобы за каждое задание отвечал только один сотрудник, и чтобы каждый сотрудник получил хотя бы одно задание. Сколькими способами можно это сделать?

Задание 2 (2 балла).

1. Написать программу, реализующую вычисление факториала (для целого неотрицательного числа) двумя способами:
   - накоплением произведения в цикле;

- с помощью рекурсивной функции.
2. Выполнить тестирование программы.

Задание 3 (3 балла).

1. Написать программу, реализующую вычисление числа основных комбинаторных конфигураций (перестановок, размещений, сочетаний с повторениями и без повторений). Продумать наиболее эффективные способы организации вычислений.
2. Выполнить тестирование программы.

Задание 4 (3 балла).

1. Написать программу, реализующую вычисление числа сочетаний без повторений на основе рекуррентной формулы (использовать свойство 2 биномиальных коэффициентов).
2. Выполнить тестирование программы.

Задание 5 (3 балла).

1. Написать программу, реализующую сортировку методом пузырька.
2. Выполнить тестирование программы.

4. Основы теории графов.

Задание 1 (2 балла).

1. Доказать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности:
   - изоморфизм на множестве графов;
   - связанность на множестве вершин графа.
2. Найти максимально возможное число ребер графа, имеющего n вершин (использовать сведения из комбинаторики).

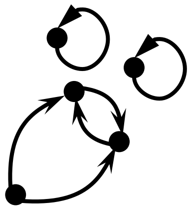
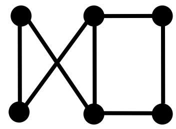
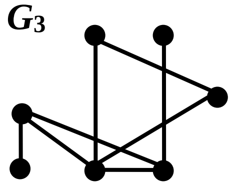
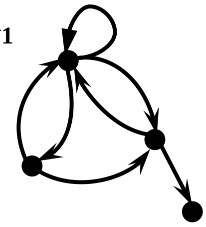
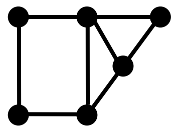
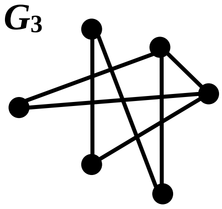
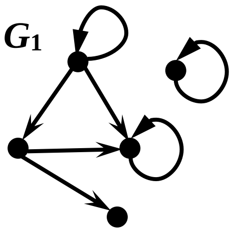
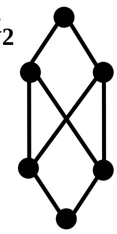
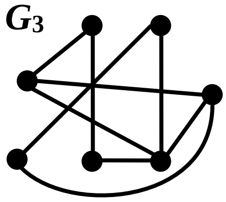
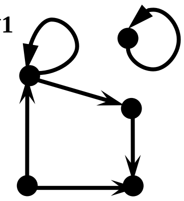
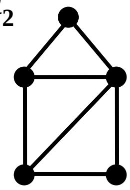
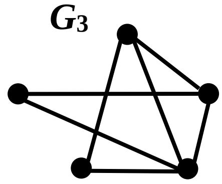
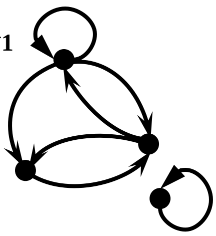
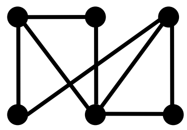
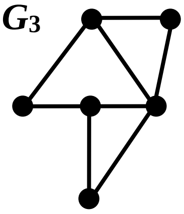
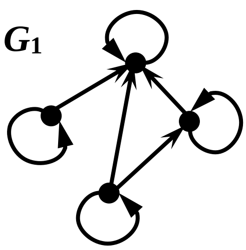
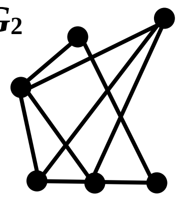
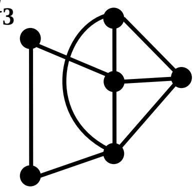
Все рассуждения представить в отчете.

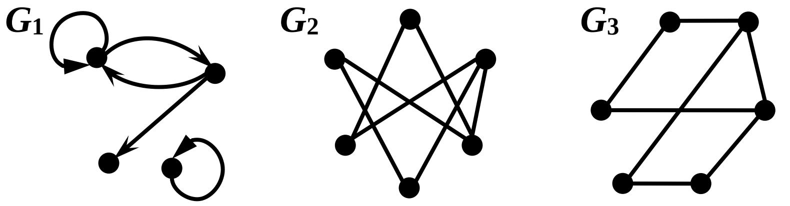
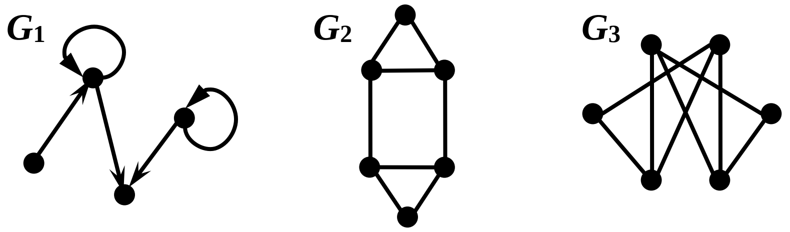
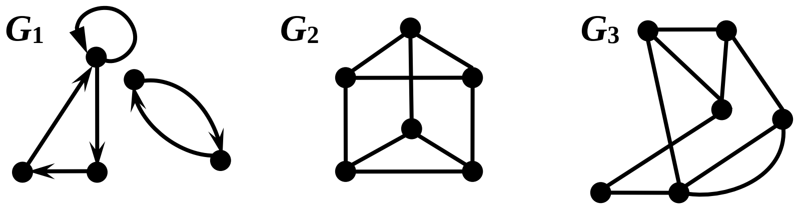
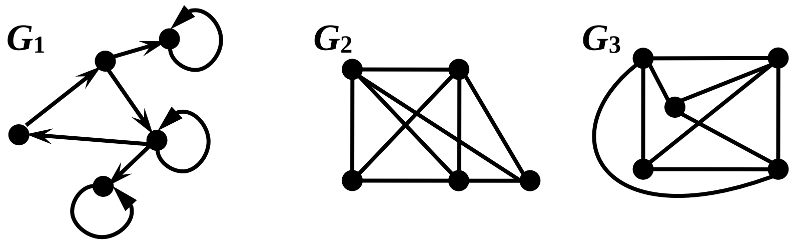
Задание 2 (без п. 5 – 4 балла, п. 5 – дополнительно 3 балла).

1. Представить графы G_1 и G_2 четырьмя способами (матрицами смежности и инциденций, списками смежности и массивами дуг), предварительно обозначив их вершины и ребра произвольным образом. Графы выбрать в соответствии с номером своего варианта.
2. Найти диаметр, радиус, центры графа G_2.
3. Выяснить, изоморфны ли графы G_2 и G_3.
4. Записать бинарное отношение, определяемое графом G_1. Перечислить свойства, которыми оно обладает.
5. Выяснить, является ли граф G_3 планарным. В случае положительного ответа

изобразить изоморфный ему плоский граф.

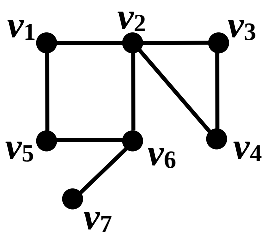
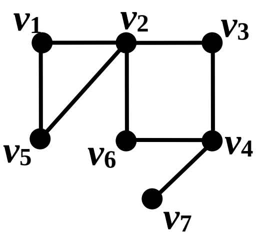
Все рассуждения представить в отчете.

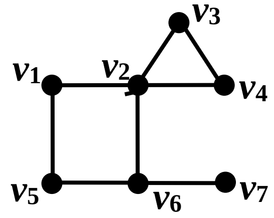
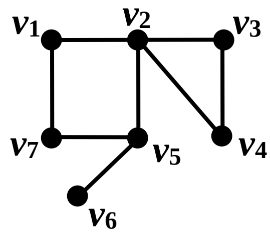
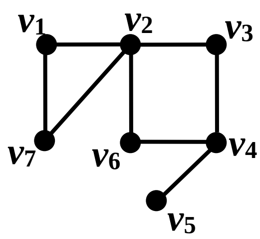
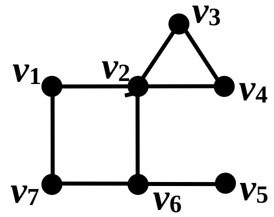
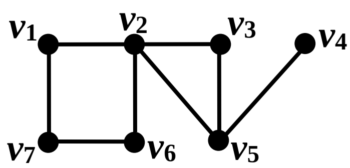
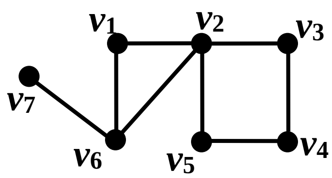
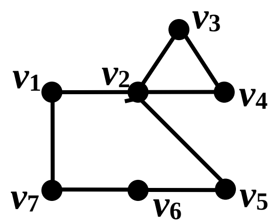
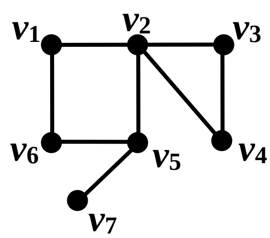
№ варианта	Графы
1	***G***$_1$  ***G***$_2$  ***G***$_3$ 
2	***G***$_1$  ***G***$_2$  ***G***$_3$ 
3	***G***$_1$  ***G***$_2$  ***G***$_3$ 
4	***G***$_1$  ***G***$_2$  ***G***$_3$ 
5	***G***$_1$  ***G***$_2$  ***G***$_3$ 
6	***G***$_1$  ***G***$_2$  ***G***$_3$ 

7	
8	
9	
10	

Задание 3 (3 балла).

Получить (вручную) протоколы работы алгоритмов поиска в глубину и поиска в ширину для данного графа (граф выбрать в соответствии с номером своего варианта). Описание основных шагов и полученные последовательности обхода вершин графа представить в отчете. Сопоставить результаты, полученные с помощью этих двух алгоритмов.

№ варианта	Граф
1	
2	

<table>
<tr><td>3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td></tr>
<tr><td>8</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>
</td></tr>
</table>

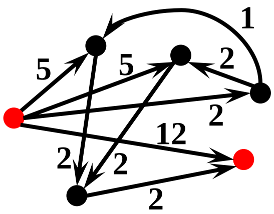
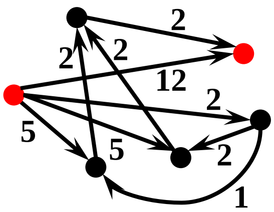
<u>Задание 4 (4 балла).</u>

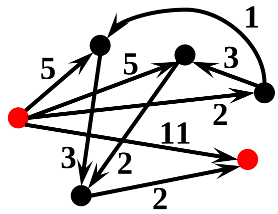
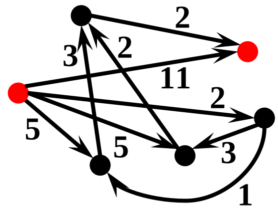
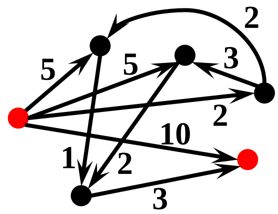
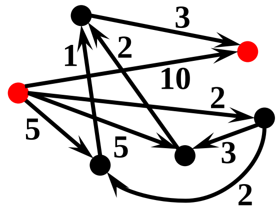
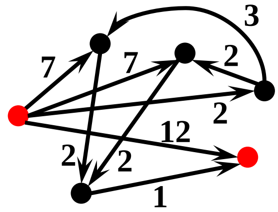
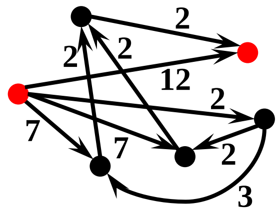
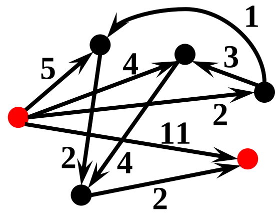
1. Написать программу, реализующую алгоритм поиска в глубину с помощью рекурсивной процедуры.
2. Используя программу, созданную при выполнении п. 1, выполнить обход графа, рассмотренного в задании 3. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную при выполнении задания 3.

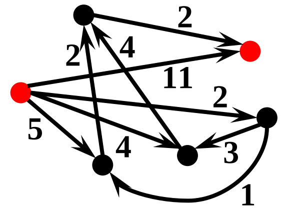
<u>Задание 5 (п. 1 – 3 балла; п .2 + п. 3 – 4 балла).</u>

1. Для данного графа ***G*** (выбрать в соответствии с номером своего варианта)
   - пронумеровать вершины произвольным образом;
   - получить (вручную) протокол работы алгоритма Флойда (результаты – матрица длин кратчайших путей и матрица самих кратчайших путей);
   - по полученной матрице кратчайших путей восстановить кратчайший путь, соединяющий вершины, выделенные красным цветом.

   Описание основных шагов и полученные результаты представить в отчете.
2. Написать программу, реализующую алгоритм Флойда (результаты – матрица длин кратчайших путей и матрица самих кратчайших путей), а также восстановление кратчайшего пути, соединяющего две заданные вершины.
3. Используя программу, созданную при выполнении п. 2, построить матрицу длин кратчайших путей и матрицу кратчайших путей для графа ***G***; восстановить кратчайший путь, соединяющий вершины, выделенные красным цветом. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную.

№ варианта	**Граф *G***
1	
2	

3	1 5 5 3 2 11 3 2 2
4	2 3 2 11 2 5 5 3 1
5	2 5 5 3 2 10 1 2 3
6	3 1 2 10 2 5 5 3 2
7	3 7 7 2 2 12 2 2 1
8	2 2 2 12 2 7 7 2 3
9	1 5 4 3 2 11 2 4 2

10	

Задание 6 (п. 1 – 3 балла; п .2 + п. 3 – 4 балла).

1. Для графа ***G***, рассмотренного в задании 5,
   - пронумеровать вершины произвольным образом;
   - получить (вручную) протокол работы алгоритма Дейкстры нахождения кратчайшего пути, соединяющего вершины, выделенные красным цветом (результаты – вектор длин кратчайших путей и вектор самих кратчайших путей).

   Описание основных шагов, полученные результаты и их интерпретацию представить в отчете.
2. Написать программу, реализующую алгоритм Дейкстры (результаты – вектор длин кратчайших путей и вектор самих кратчайших путей; пара вершин, которые должны быть соединены кратчайшим путем, вводится пользователем).
3. Используя программу, созданную при выполнении п. 2, найти кратчайший путь, соединяющий вершины, выделенные красным цветом в графе ***G***. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную.

Задание 7 (п. 1 – 2 балла; п .2 + п. 3 – 3 балла).

1. Для графа ***G***, рассмотренного в задании 5,
   - убедиться, что граф не содержит контуров;
   - пронумеровать вершины таким образом, чтобы каждая дуга вела из узла с меньшим номером в узел с большим номером;
   - получить (вручную) протокол работы алгоритма построения вектора кратчайших путей от узла с номером 1 до всех достижимых из него узлов.

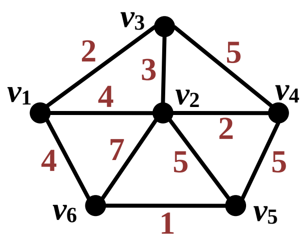
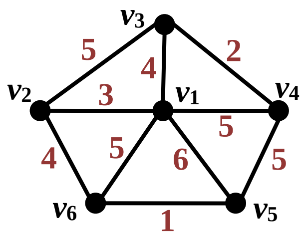
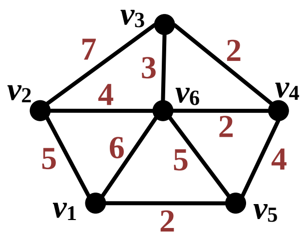
   Описание основных шагов, полученные результаты и их интерпретацию представить в отчете.
2. Написать программу, реализующую алгоритм построения вектора кратчайших путей от узла с номером 1 до всех достижимых из него узлов заданного графа.
3. Используя программу, созданную при выполнении п. 2, и нумерацию вершин графа ***G***, построенную в п. 1, найти вектор кратчайших путей в графе ***G***. Сравнить результаты работы программы с результатами,

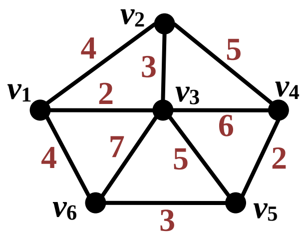
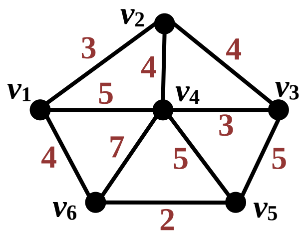
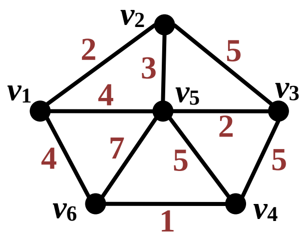
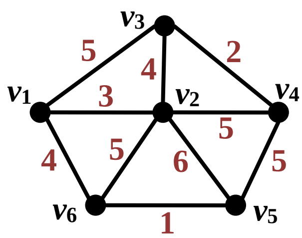
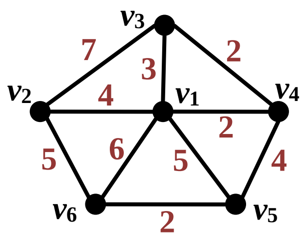
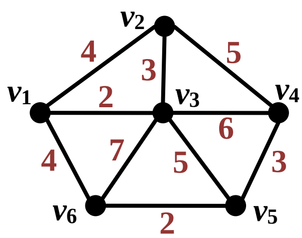
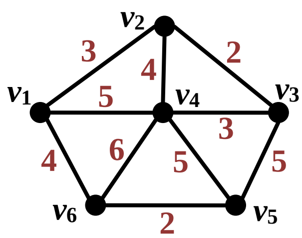
полученными вручную.

Задание 8 (п. 1 – 3 балла; п .2 + п. 3 – 4 балла).

1. Для данного графа ***G*** (выбрать в соответствии с номером своего варианта)
   - пронумеровать вершины произвольным образом;
   - убедиться, что граф связен;
   - получить (вручную) протокол работы алгоритма Прима нахождения кратчайшего остова графа ***G*** (результат – множество ребер кратчайшего остова).

   Описание основных шагов, полученные результаты и их интерпретацию представить в отчете.
2. Написать программу, реализующую алгоритм Прима (результат – множество ребер кратчайшего остова).
3. Используя программу, созданную при выполнении п. 2, найти кратчайший остов в графе ***G***. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную.

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th>Граф G</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td></tr>
</table>

4	 v_2 4 5 3 v_1 2 v_3 v_4 6 4 7 5 2 v_6 v_5 3
5	 v_2 3 4 4 v_1 5 v_4 v_3 3 4 7 5 5 v_6 v_5 2
6	 v_2 2 5 3 v_1 4 v_5 v_3 2 4 7 5 5 v_6 v_4 1
7	 v_3 5 2 4 v_1 3 v_2 v_4 5 4 5 6 5 v_6 v_5 1
8	 v_3 7 2 3 v_2 4 v_1 v_4 2 5 6 5 4 v_6 v_5 2
9	 v_2 4 5 3 v_1 2 v_3 v_4 6 4 7 5 3 v_6 v_5 2
10	 v_2 3 2 4 v_1 5 v_4 v_3 3 4 6 5 5 v_6 v_5 2

Задание 9 (3 балла).

Рассмотреть (как самостоятельный объект) остов графа ***G***, полученный при выполнении задания 8.

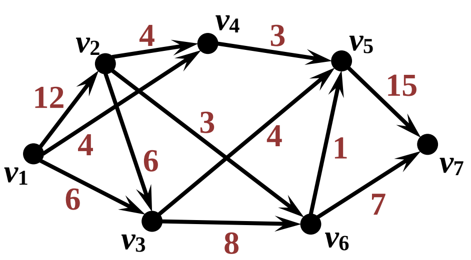
1. Для полученного остовного дерева показать наличие всех основных свойств свободных деревьев.
2. Найти центр дерева.
3. Из остовного дерева получить ордерево: «назначить» одну из вершин корнем и задать соответствующую ориентацию ребер.
4. Для полученного ордерева показать наличие всех основных свойств ориентированных деревьев.
5. В ордереве
   - отметить корень, листья, ветви; определить высоту ордерева, обозначить ярусы;
   - для выбранного произвольно узла, не являющегося ни корнем, ни листом, определить его родителя, предков, сыновей, потомков и братьев.

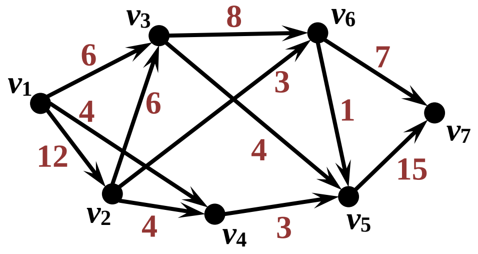
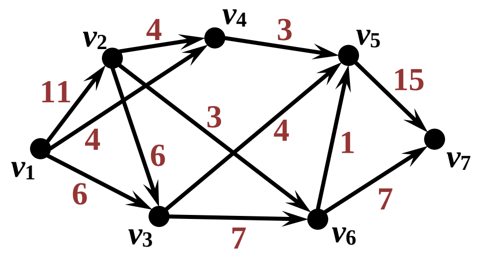
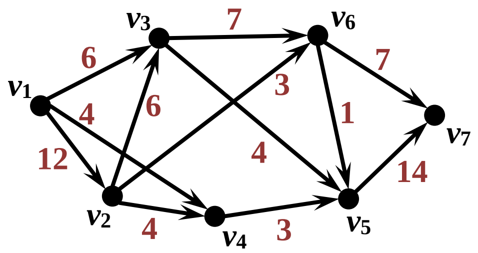
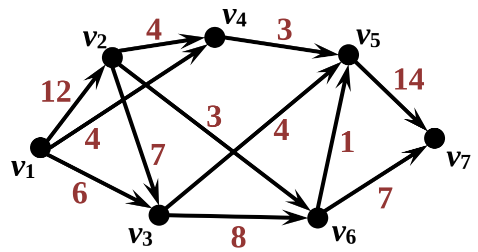
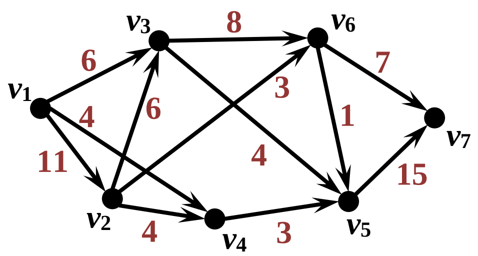
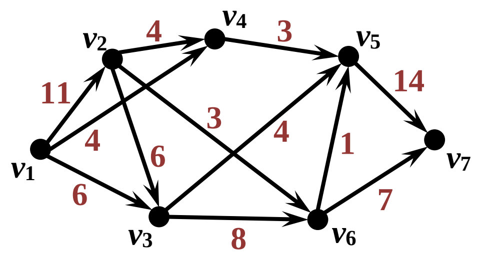
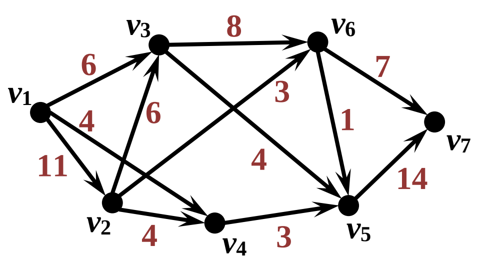
Все рассуждения представить в отчете.

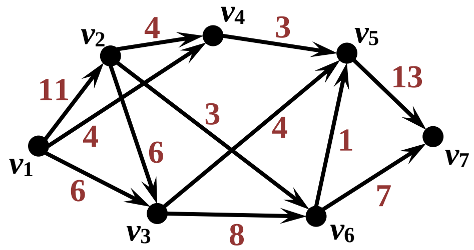
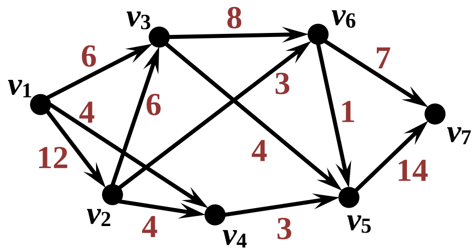
Задание 10 (п. 1 – 4 балла; п .2 + п. 3 – 6 баллов).

1. Для данной сети ***G*** (выбрать в соответствии с номером своего варианта)
   - получить (вручную) протокол работы алгоритма нахождения максимального потока (результат – матрица максимального потока);
   - показать, что полученный максимальный поток является полным, обозначить насыщенные дуги;
   - найти минимальный (***s***, ***t***)-разрез сети.

   Описание основных шагов, полученные результаты и их интерпретацию представить в отчете.
2. Написать программу, реализующую алгоритм нахождения максимального потока (результат – матрица максимального потока).
3. Используя программу, созданную при выполнении п. 2, найти максимальный поток в сети ***G***. Сравнить результаты работы программы с результатами, полученными вручную.

№ варианта	Сеть *G*
1	

2	v_3 8 v_6 6 7 v_1 4 6 3 1 v_7 12 4 15 v_2 4 v_4 3 v_5
3	v_4 v_2 4 3 v_5 11 15 3 4 4 1 6 v_7 v_1 6 7 v_3 7 v_6
4	v_3 7 v_6 6 7 v_1 3 4 6 1 v_7 12 4 14 v_2 4 v_4 3 v_5
5	v_4 v_2 4 3 v_5 12 14 3 4 4 1 7 v_7 v_1 6 7 v_3 8 v_6
6	v_3 8 v_6 6 7 v_1 3 4 6 1 v_7 11 4 15 v_2 4 v_4 3 v_5
7	v_4 v_2 4 3 v_5 11 14 3 4 4 1 6 v_7 v_1 6 7 v_3 8 v_6
8	v_3 8 v_6 6 7 v_1 3 4 6 1 v_7 11 4 14 v_2 4 v_4 3 v_5

9	v2 4 v4 3 v5 11 4 6 3 4 1 13 v1 6 v3 8 v6 7 v7
10	v3 8 v6 6 7 v1 4 6 3 1 12 4 v7 v2 4 v4 3 v5 14