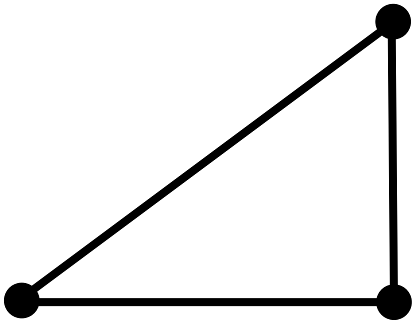
5. Основы теории графов (продолжение)

5.5 Некоторые специальные виды графов

- Граф, состоящий из одной вершины, называется ***тривиальным***.
- Граф, состоящий из простого цикла с $\boldsymbol{k}$ вершинами, обозначается $\boldsymbol{C_k}$.

Пример.

Граф $\boldsymbol{C_3}$:



- Граф, в котором любые две вершины смежны, называется ***полным***.

  Полный граф с ***n*** вершинами обозначается $\boldsymbol{K_n}$.

  Он имеет максимально возможное число рёбер:

$$m(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

! Обосновать самостоятельно (используя правила комбинаторики)

Двудольные графы

Граф $G(V, E)$ называется ***двудольным*** (или ***биграфом***), если множество его вершин V может быть разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, такие что

$$V_1 \cup V_2 = V, \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing,$$

причём всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (т. е. соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2).

Множества V_1 и V_2 называются ***долями*** двудольного графа.

Если двудольный граф содержит все рёбра, соединяющие множества $\boldsymbol{V_1}$ и $\boldsymbol{V_2}$, то он называется ***полным двудольным графом***.

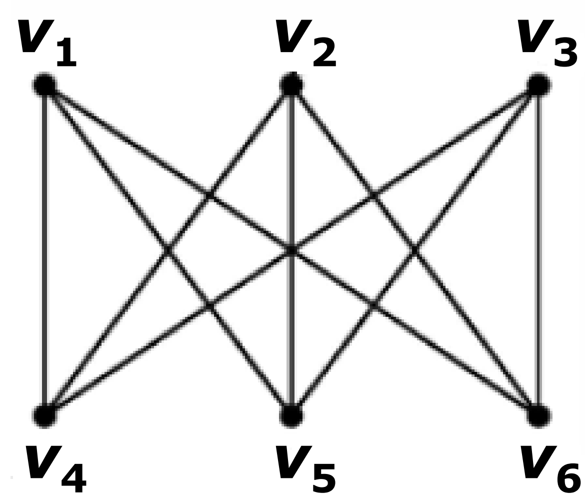
Если $|\boldsymbol{V_1}| = \boldsymbol{p}$ и $|\boldsymbol{V_2}| = \boldsymbol{q}$, то полный двудольный граф обозначается $\boldsymbol{K_{p,q}}$.

<u>Пример</u>.

Граф $\boldsymbol{K_{3,3}}$:

$\boldsymbol{V_1} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$,

$\boldsymbol{V_2} = \{\boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}, \boldsymbol{v_6}\}$.



Теорема.

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечётной длины.

Следствие.

Ациклические графы двудольны.

Направленные графы

Если в неографе ориентировать все рёбра, то получится орграф, который называется ***направленным*** (***антисимметричным***).

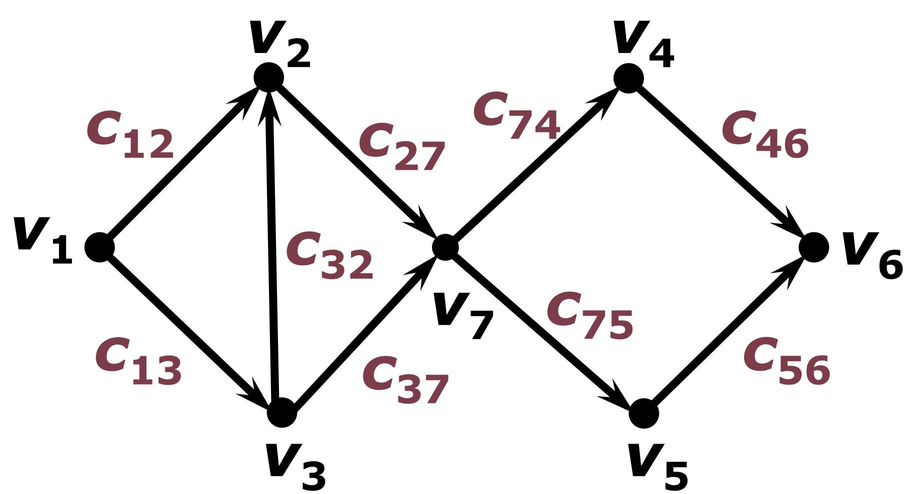
В антисимметричном орграфе не может быть «встречных» дуг (***u***, ***v***) и (***v***, ***u***).

Направленный орграф, полученный из полного графа, называется ***турниром***.

Может представлять результаты однокругового спортивного турнира (дуги соединяют победителей и побежденных)

Нагруженные графы

Если каждому ребру (дуге) графа приписано некоторое число (может характеризовать протяженность ребра, стоимость прохождения по ребру и т. п.), называемое ***весом*** (или ***длиной***) ребра (дуги), то граф называется ***взвешенным*** (или ***нагруженным***).



Для представления нагруженного (***n***, ***m***)-графа ***G***(***V***, ***E***) используется ***матрица весов*** (***длин***) – квадратная матрица **С** порядка ***n***, элементы которой определяются правилами:

$$c_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, \quad \textbf{если} \;\; i = j, \\ \textbf{вес ребра} \left(v_i, v_j\right), \; \textbf{если} \;\; \left(v_i, v_j\right) \in E, \\ \infty, \quad \textbf{если} \;\; \left(v_i, v_j\right) \notin E. \end{cases}$$

5.6 Орграфы и бинарные отношения

Связь между орграфами и бинарными отношениями

Любой орграф ***G***(***V***, ***E***) с петлями, но без кратных дуг задаёт бинарное отношение ***E*** на множестве ***V***, и обратно.

А именно:

пара элементов принадлежит отношению на множестве ***V*** : $(a, b) \in E \subset V \times V$,

тогда и только тогда, когда в графе ***G*** есть дуга (***a***, ***b***).

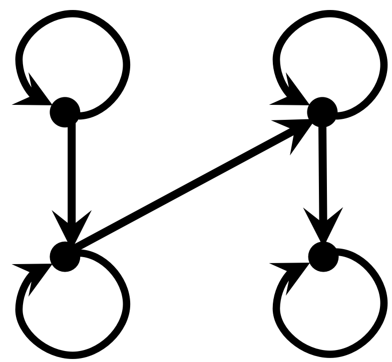
Полный граф соответствует универсальному отношению.

Таким образом:

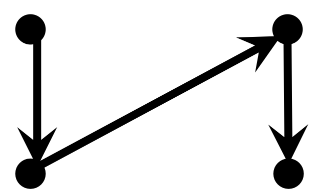
имеется полная аналогия между орграфами и бинарными отношениями – фактически, это один и тот же класс объектов, описанный разными средствами.

В частности:

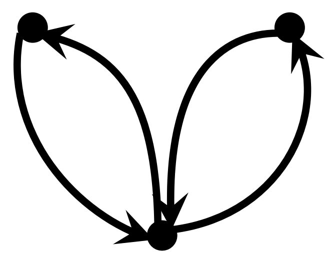
- орграф, представляющий <u>рефлексивное</u> отношение, обязательно имеет петли при каждом узле;



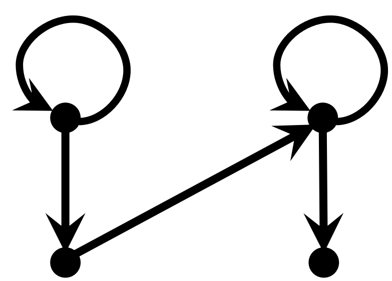
- орграф, представляющий <u>антирефлексивное</u> отношение, не имеет ни одной петли;



- если в орграфе для всех пар смежных узлов {***u***, ***v***} существует как дуга (***u***, ***v***), так и дуга (***v***, ***u***), то орграф представляет симметричное отношение;

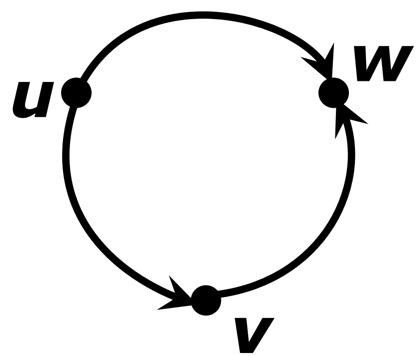


- в орграфе, представляющем антисимметричное отношение, нет ни одной пары узлов {***u***, ***v***} такой, что если существует дуга (***u***, ***v***), то существует и дуга (***v***, ***u***), но допускаются петли;



- в орграфе, представляющем транзитивное отношение, для любых трех узлов ***u***, ***v*** и ***w*** должно выполняться условие: если существуют дуги (***u***, ***v***) и (***v***, ***w***), то существует и дуга (***u***, ***w***).

  Дуга (***u***, ***w***) называется ***транзитивно замыкающей*** дугой.



Достижимость и частичное упорядочение

Напоминание:

узел ***v*** в орграфе ***G***(***V***, ***E***) называется ***достижимым из узла u***, если существует путь $\overrightarrow{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}$ из узла ***u*** в узел ***v***.

Пусть на множестве ***V*** задано отношение строгого частичного порядка $\succ \subset V \times V$ (обладает свойствами антирефлексивности, транзитивности и антисимметричности).

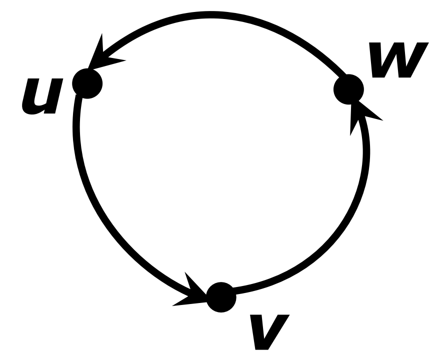
Отношению $\succ$ можно сопоставить орграф ***G***(***V***, ***E***), такой что

$$v_1 \succ v_2 \Leftrightarrow (v_1, v_2) \in E.$$

Теорема 1.

Если отношение ***E*** есть строгое частичное упорядочение, то орграф ***G***(***V***, ***E***) не имеет контуров.

Иллюстрация:



u, ***v***, ***w***, ***u*** – контур;

тогда

$$\boldsymbol{u \succ v}, \quad \boldsymbol{v \succ w}, \quad \boldsymbol{w \succ u},$$

что противоречит свойству транзитивности, в соответствии с которым должно выполняться $\boldsymbol{u \succ w}$.

Теорема 2.

Если орграф ***G***(***V***, ***E***) не имеет контуров, то отношение достижимости узлов в этом орграфе есть строгое частичное упорядочение.

Теорема 3.

Если орграф не имеет контуров, то в нем есть узел, полустепень захода которого равна 0.

Такой узел называется *источником*

Теорема 3 позволяет обосновать процедуру нахождения минимального элемента в конечном частично упорядоченном множестве (используется в алгоритме топологической сортировки):

найти узел, которому в матрице смежности соответствует нулевой столбец.

Транзитивное замыкание

Если ***E*** – бинарное отношение на множестве ***V***, то транзитивным замыканием $\boldsymbol{E^+}$ на множестве ***V*** будет отношение достижимости узлов на орграфе ***G***(***V***, ***E***).

Матрица достижимости ***T*** может быть вычислена по матрице смежности ***M*** с помощью алгоритма Уоршалла.

5.7 Деревья

Деревья являются классом графов, который наиболее широко применяется в программировании, причем в самых разных ситуациях.

Лес, дерево

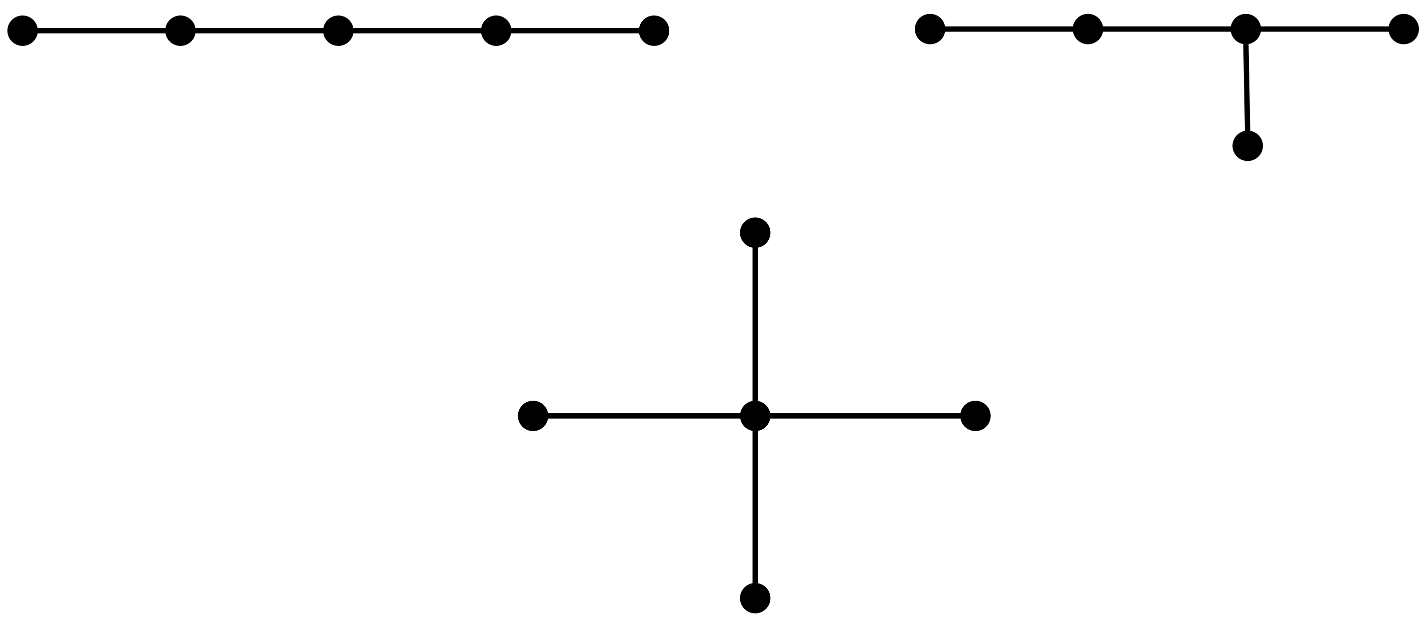
Ациклический граф (т. е. граф без циклов) называется ***лесом***.

Ясно, что лес не содержит петель и кратных ребер

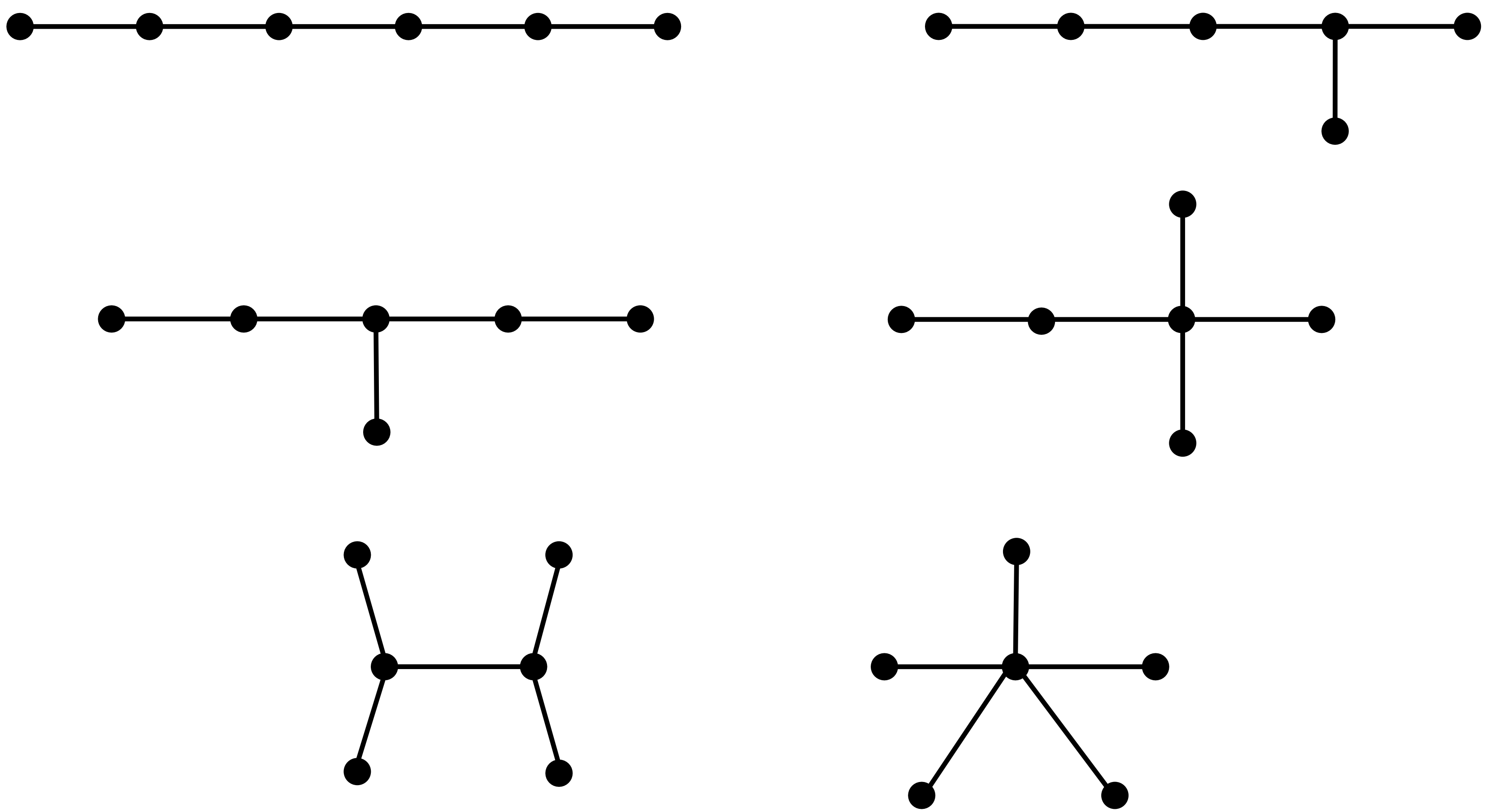
Связный ациклический граф называется ***деревом*** (*свободным деревом*).

Примеры.

Все различные деревья с 5 вершинами:



Все различные деревья с 6 вершинами:



Основные свойства деревьев

Теорема.

Для (n, m)-графа $G(V, E)$ следующие условия эквивалентны:

1) граф G является деревом;
2) G – связный граф и $m = n - 1$;
3) G – ациклический граф и $m = n - 1$;
4) G – граф, в котором любые две вершины соединены единственной простой цепью;
5) G – ациклический граф, и добавление нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

Следствие 1.

Если (***n***, ***m***)-граф ***G*** является деревом и ***n*** > 1, то ***G*** имеет по крайней мере две висячие вершины.

В частности, висячими вершинами в дереве являются концы любого диаметра

Следствие 2.

Если ***G*** – дерево, то каждая не висячая вершина ***G*** является точкой сочленения.

Следствие 3.

Если ***G*** – связный граф, и в ***G*** нет висячих вершин, то ***G*** содержит цикл.

В противном случае *G* является деревом, и ➔ содержит висячие вершины

Центр дерева

Теорема.

Центр дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин.

Ориентированные деревья

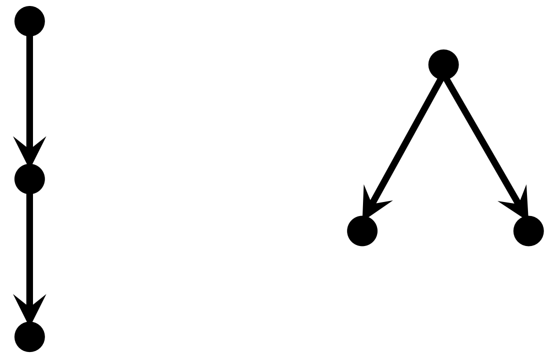
Ориентированным деревом (или ***ордеревом***, или ***корневым деревом***) называется орграф со следующими свойствами:

1. Существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0. Этот узел называется ***корнем ордерева***.
2. Полустепень захода всех остальных узлов равна 1.
3. Каждый узел достижим из корня.

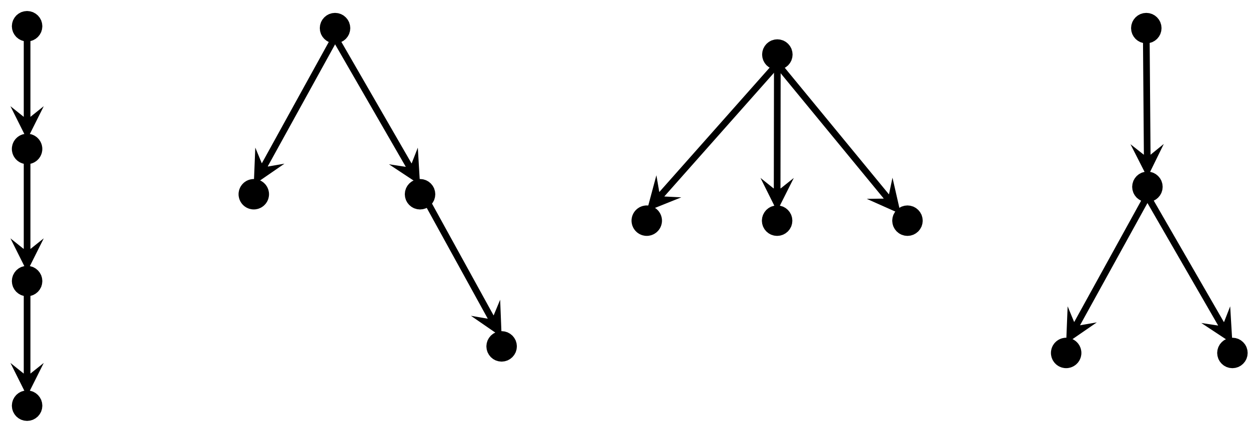
Ориентированные деревья представляют модель иерархических отношений

<u>Примеры</u>.

Все различные ориентированные деревья с 3 узлами:



Все различные ориентированные деревья с 4 узлами:



Свойства ориентированных деревьев

Теорема.

Если (***n***, ***m***)-граф ***G*** является ордеревом, то он обладает следующими свойствами:

1) ***m*** = ***n*** – 1;
2) если в ***G*** устранить ориентацию дуг, то получится свободное дерево;
3) в ***G*** нет контуров;
4) для каждого узла ***G*** существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня;
5) подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла ***v***, является ордеревом с корнем ***v***.

Это ордерево называется *поддеревом узла v*

Кроме того, справедливо следующее ***утверждение***:

если в свободном дереве любую вершину назначить корнем и задать ориентацию ребер «от корня», то получится ордерево.

Замечание.

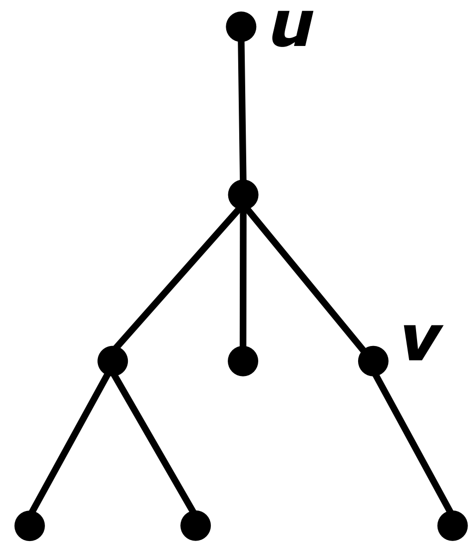
В свободном дереве с ***n*** вершинами каждую из ***n*** вершин можно назначить корнем и получить ордерево.

Некоторые из полученных ордеревьев могут оказаться изоморфными.

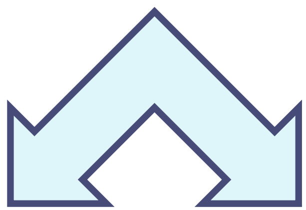
$\Downarrow$

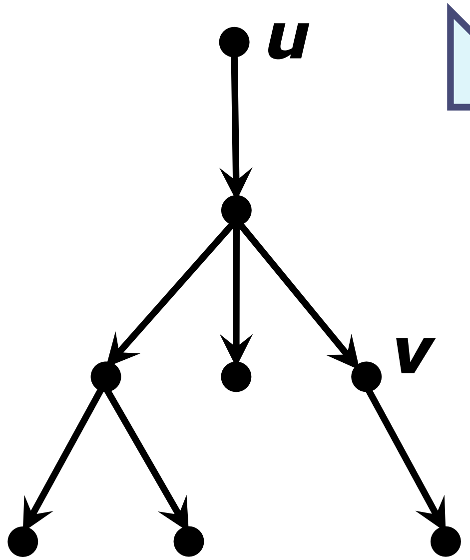
Свободное дерево определяет не более ***n*** различных ориентированных деревьев.

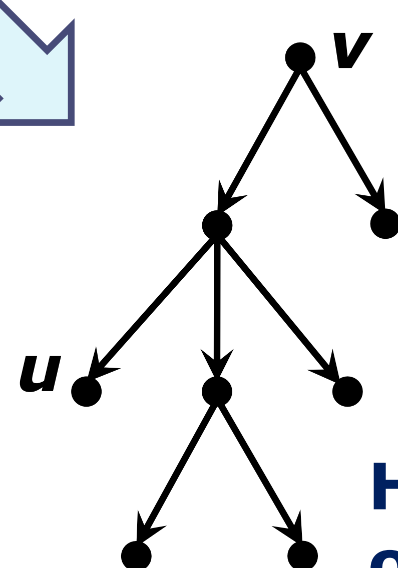
Пример.



Свободное дерево *G*







Неизоморфные ордеревья, полученные из *G*

Еще о терминологии

Концевая вершина ордерева называется ***листом***.

Множество листьев называется ***кроной***.

Путь из корня в лист называется ***ветвью ордерева***.

Длина наибольшей ветви ордерева называется его ***высотой***.

Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла. Корень имеет уровень 0.

Узлы одного уровня образуют ***ярус*** ордерева.

Наряду с «растительной» используется также «генеалогическая» терминология.

Узлы, достижимые из узла ***u***, называются ***потомками*** узла ***u***. Потомки одного узла образуют поддерево.

Если узел ***v*** является потомком узла ***u***, то узел ***u*** называется ***предком*** узла ***v***.

Если в дереве существует дуга (***u***, ***v***), то узел ***u*** называется ***отцом*** (или ***родителем***) узла ***v***, а узел ***v*** называется ***сыном*** узла ***u***.

Сыновья одного отца называются ***братьями***.

Общепринятая практика при изображении деревьев:

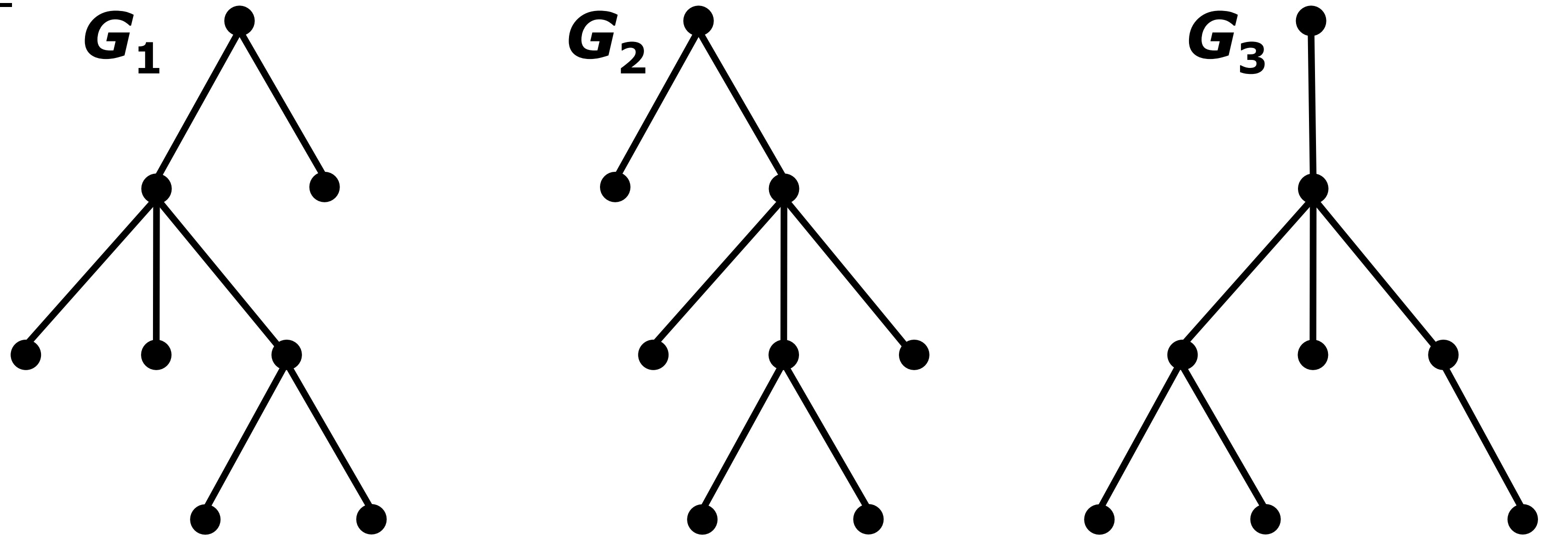
соглашение о том, что корень находится наверху и все дуги ориентированы сверху вниз, поэтому стрелки можно не изображать.

В таком случае может потребоваться дополнительное уточнение, какого класса дерево изображено на диаграмме. Часто это бывает ясно из контекста.

Упорядоченные деревья

Упорядоченным деревом называется ордерево, у которого дуги, выходящие из каждого узла, упорядочены по определенному критерию.

Пример.



Как свободные деревья G_1, G_2 и G_3 изоморфны ($G_1 = G_2 = G_3$);

как ориентированные деревья G_1 и G_2 изоморфны; G_2 и G_3 – не изоморфны ($G_1 = G_2$, $G_2 \neq G_3$);

как упорядоченные деревья G_1, G_2 и G_3 различны:

$G_1 \neq G_2$, $G_2 \neq G_3$, $G_1 \neq G_3$.

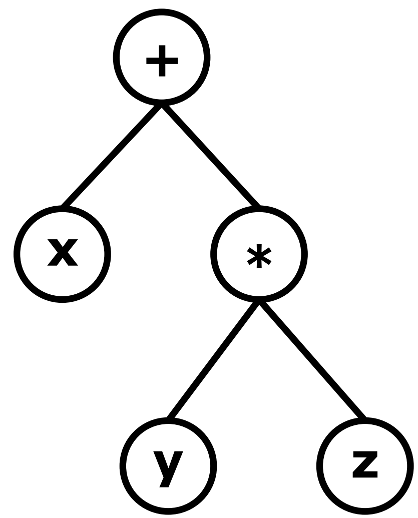
Примеры применения деревьев

- ***Представление выражений, подлежащих обработке в программе***.

  Используются ориентированные упорядоченные деревья.

  Пример:

  Выражение ***x***+***y****z***

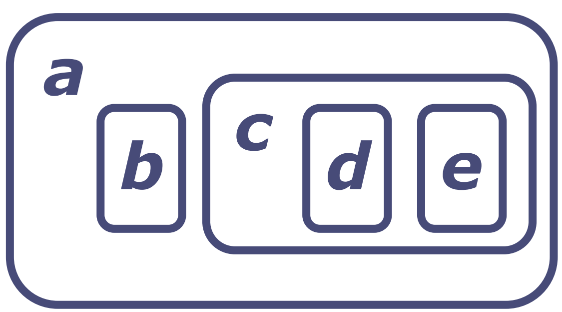


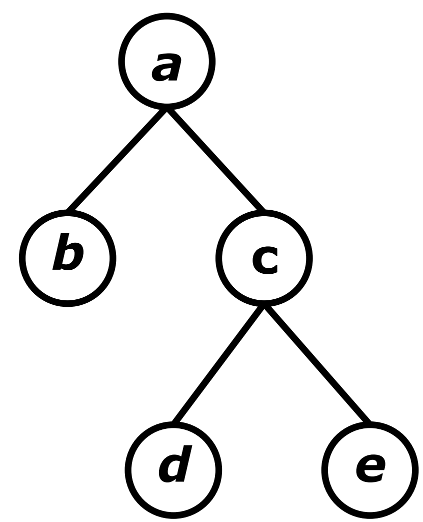
- ***Представление блочной структуры программы и связанной с ней структуры областей определения идентификаторов.***

Используются ориентированные деревья (может быть, неупорядоченные, т. к. порядок определения переменных часто несущественен).

Пример:

Структура областей определения идентификаторов ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e***

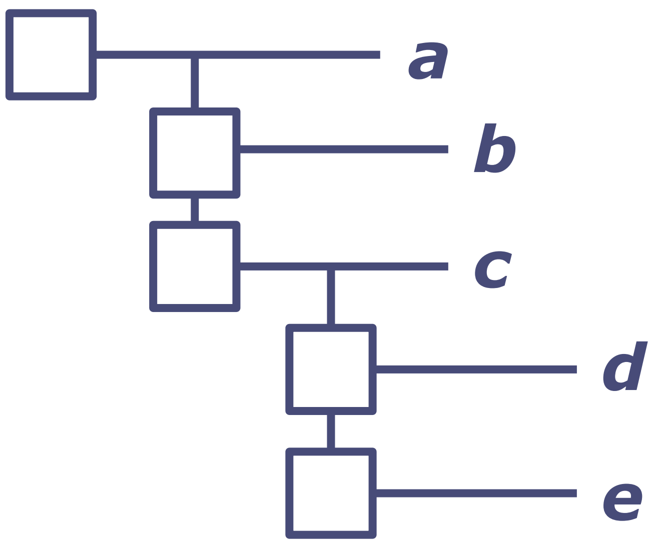


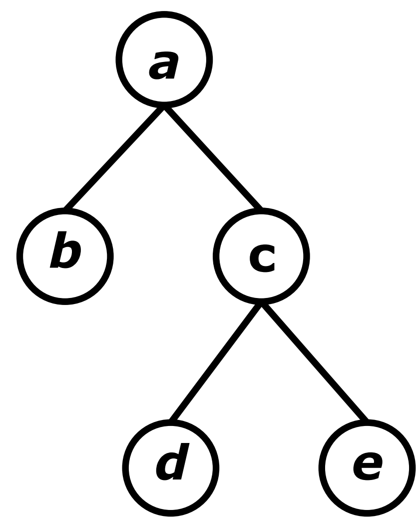


Представление структуры вложенности каталогов и файлов в операционных системах.

Используются упорядоченные ориентированные деревья.

Пример:





а – «корневой каталог»