1. **Задание множества с помощью характеристического предиката. Привести примеры.**
   Множество считается заданным, если для любого объекта устанавливается его принадлежность к данному множеству.
   Пример: M = {x| x∈z & 0 ≤ x ≤ 9}
2. **Задание множества с помощью порождающей процедуры. Привести примеры.**
   Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов, либо из других объектов.
   Пример: $M_3 = \{ x_k \mid x_k = x_{k-1} + x_{k-2}\,,\ k = 3, 4, \ldots, \ x_1 = x_2 = 1 \}$ –
3. **Известно, что** $C \subset B$. **По определению, это означает, что … . Закончить фразу.**
   Множество C содержится в множестве B (множество B включается множество C), если каждый элемент множества C является элементом множества B. В этом случае C называется подмножеством B.
4. **Известно, что** $C \subseteq B$. **По определению, это означает, что … . Закончить фразу.**
   Если C ⊂ B и C ≠ B, то множество называется собственным подмножеством B, ⊆ - нестрогое включение.
5. **Определение равенства множеств.**
   Множества A и B называются равными, если они являются подмножествами друг друга.
   Обозначение: A = B $\boldsymbol{A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \ \& \ B \subset A.}$
6. **Мощность конечного множества (определение).**
   Мощностью конечного множества A называется число элементов этого множества.
   Обозначение: |A|
7. **Множество *B* имеет мощность, большую, чем множество *C*, если … . Закончить фразу.**
   Если существует подмножество множества A, изоморфное B, но не существует подмножества B, изоморфного A
8. **Счетные множества: определение, примеры.**
   Множество называется счетным, если оно изоморфно (равномощно) множеству натуральных чисел N. Счетное множество характеризуется свойством: его элементы можно перенумеровать с помощью натуральных чисел.
   Например, множество 2N.
9. **Булеан множества (определение). Теорема о мощности булеана конечного множества.**
   Булеан множества – это множество всех подмножеств множества M.
   Обозначение: B(M) или 2^M
   Теорема: Для конечного множества M: $|2^M| = 2^{|M|}$.

Пример: Рассмотрим множество M = {a, b, c}. Мощность его булеана равна: $|2^M| = 2^3 = 8$.

10. Континуум. Привести примеры.

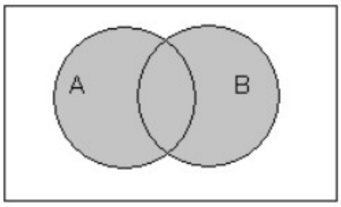
Множество всех действительных чисел, принадлежащих интервалу (a,b), (отрезку [a,b] - континуум). Мощность отрезка [0,1] называется континуум.

Примеры:

- R;
- Множество всех точек прямой, плоскости, поверхности сферы, шара;
- Множество всех прямых на плоскости.

11. Объединение множеств (определение).

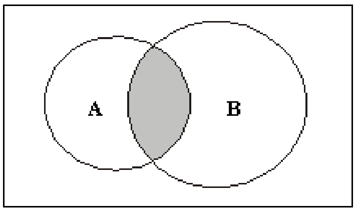
Объединением множеств A и B называется множество, все элементы которого являются элементами множества A или множества B.



$$\boldsymbol{A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \}}.$$

12. Пересечение множеств (определение).

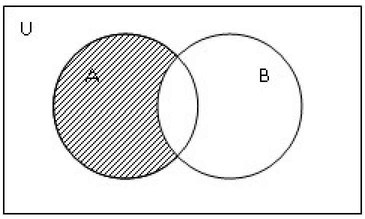
Пересечением множеств A и B называется множество, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B.



$$\boldsymbol{A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \}}.$$

13. Разность множеств (определение).

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.



$$\boldsymbol{A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \;\&\; x \notin B \} \stackrel{\text{def}}{=} A \cap \overline{B}}.$$

14. Дополнение множества (определение).

Дополнением множества A (до универсума U) называется множество, состоящее из тех элементов U, которые не принадлежат множеству A.

$$\boldsymbol{\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} U \setminus A}.$$

15. Выражение для разности множеств (через основные операции).

$$A \cap \overline{B}$$

16. Свойства операций над множествами (перечислить, знать названия).

Пусть задан универсум U. Тогда для любых множеств A, B, C⊂U имеют следующие свойства:

1. *Идемпотентность*: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
2. *Коммутативность*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
3. *Ассоциативность*: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
4. *Дистрибутивность*: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. *Поглощение*: $(A \cap B) \cup A = A$, $(A \cup B) \cap A = A$.
6. *Свойства нуля*: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
7. *Свойства единицы*: $A \cup U = U$, $A \cap U = A$.
8. *Инволютивность*: $\bar{\bar{A}} = A$.
9. *Законы де Моргана*: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
10. *Свойства дополнения*: $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
11. *Выражение для разности*: $A ¿ = A \cap \bar{B}$.

17.Продолжить равенство: $(B \cup C) \cap B =$ **B**

18.Продолжить равенство: $(B \cup A) \cap (B \cup C) =$ **B ∪ (A ∩ C)**

19.Продолжить равенство: $(B \cap A) \cup (B \cap C) =$ **B ∩ (A∪C)**

20.Продолжить равенство: $(B \cap C) \cup B =$ **B**

21.Разбиение множества (определение).

Пусть M – произвольное множество. Семейство непустых множеств $\{X_i\}_{i \in I}$, где i – некоторое множество индексов (конечное или бесконечное) называется разбиением M, если $X_i \cap X_j = \emptyset$ для любых i, j ∈ I, i ≠ j, $M = ¿_{i \in I} X_i$.

22.Декартово произведение множеств *B, C* и *D* (определение).

Декартово произведение – это множество всех упорядоченных наборов (кортежей).

$$B \times C \times D = \{(b, c, d) b \in B \cap C \in C \cap d \in D\}$$

23.Продолжить равенство (для конечных множеств *D* и *E*): $|D \times E| =$ **...**

$$|D \times E| = D \times E = \{(d, e) d \in D \cap e \in E\}$$

24.Пусть $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{a, b\}$. **Продолжить равенство:**

$|A \times B \times C| =$ **...**

$$|A\times B\times C| = (|A|\times|B|\times|C|) = 18$$

25.Пусть $A\times B = \{(-1, 0), (2, 1), (0, 0), (-1, 1), (0, 1), (2, 0)\}$. **Записать множества *A* и *B*.**

A = {-1, 0, 2}, B = {0,1}

26.Пусть $A = \{0, 1, 2\}$, $C = \{a, b\}$, $R = \{(0, b), (1, a), (2, b)\} \subset A\times C$. **Найти** $\bar{R}$ **(дополнение *R*).**

$\bar{R}$ = {(0, a), (1, b), (2, a)}

27.Степень множества *A* (определение). Привести пример.

Степень множества A = это его декартово произведение само на себя.

$$A^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n раз}}.$$

Для конечного множества A: $|A^n| = |A|^n$

Пример: Пусть A – это конечный алфавит (конечное множество, элементами которого являются символы). Элементами множества A^n являются слова длины n в алфавите A. Слово – любая последовательность символов данного алфавита.

28.Бинарное отношение между множествами (определение). Привести пример.

Пусть ***A*** и ***B*** – два непустые множества.

Бинарным отношением R между множествами A и ***B*** называется всякое подмножество декартова произведения ***A×B***:

$$R \subset A\times B.$$

Тот факт, что $(a, b)\in R$, т. е. между элементами $a\in A$ и $b\in B$ существует отношение ***R***, обозначается так: ***aRb***.

Пример.

Рассмотрим множества

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Декартово произведение ***A*** на ***B*** равно

$$A\times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),$$
$$(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}.$$

Определим отношение ***R*** («больше») следующим образом:

aRb, если ***a*** > ***b***, $a\in A$ & $b\in B$.

$$R = \{(2,1),(3,1),(3,2)\} \subset A\times B.$$

Если $A = B$, т. е. $R \subset A^2$,
то говорят, что R есть отношение ***на множестве A***.

Примеры.

- отношения **=, <, >, ≤, ≥, ≠**, определенные на множестве чисел (натуральных, целых, действительных);
- отношение «быть однокурсником» на множестве студентов направления «Прикладная информатика», обучающихся в ТюмГУ;
- отношение включения на множестве 2^U ...

29. Многоместное отношение (определение).

Обобщение бинарного отношения n–местное (n-арное) отношение R это подмножество декартова произведения множеств A_1, A_2, A_3, A_n (множество упорядоченных наборов - кортежей).

$$R \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$$
$$¿ \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n \} .$$

30. Представление бинарного отношения на множестве булевой матрицей.

Один из возможных способов – представление с помощью булевых матриц.

Пусть R – отношение на множестве A: $R \subset A^2$ и $|A| = n$. Перенумеруем элементы множества A: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Тогда отношение R можно представить булевой матрицей **R**:

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R a_j, \\ 0, & \text{если } a_i \overline{R} a_j. \end{cases}$$

31. Композиция двух отношений (определение).

Пусть $R_1 \subset A \times C$ – отношение между A и C;

$R_2 \subset C \times B$ – отношение между C и B.

Композиция двух отношений R_1 и R_2 – отношение $R \subset A \times B$ между A и B, определяемое

$$R = R_1 \circ R_2 \overset{\text{def}}{=}$$
$$= \{ (a, b) \mid a \in A \;\&\; b \in B \;\&\; \exists c \in C : aR_1c \;\&\; cR_2b \} .$$

Композиция отношений на множестве A являются отношением на множестве A.

32. Рефлексивность и антирефлексивность бинарного отношения на множестве (определения). Особенность матриц рефлексивного и антирефлексивного отношений.

Пусть $R \subset A^2$. Отношение R называется рефлексивным, если $\forall a \in A \quad aRa$.

Матрица содержит 1 на главной диагонали. $r_{ii} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Антирефлексивное, если ∀a ∈ A ¬aRa. Матрица содержит 0 на главной диагонали. $r_{ii} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

33. **Симметричность и антисимметричность бинарного отношения на множестве (определения). Особенность матриц симметричного и антисимметричного отношений.**

Симметричное, если ∀a, b ∈ A aRb следует bRa. Матрица симметричная.

$$r_{ji} = r_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Антисимметричное, если ∀a, b ∈ A из aRb & bRa следует a=b. Матрица антисимметричная.

34. **Транзитивность и полнота бинарного отношения на множестве (определения).**

Транзитивное, если ∀a, b, c ∈ A из aRb & bRc следует aRc.

Полное, если ∀a, b ∈ A имеет место либо a=b, либо aRb, либо bRa.

35. **Отношение эквивалентности (определение, пример). Классы эквивалентности.**

Если отношение R на множестве A обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности, то оно называется отношением эквивалентности (~).

a~b – элемент a эквивалентен элементу b.

Пример:

- Отношение = на множестве чисел;
- Отношение «быть однокурсником» на множестве студентов ТюмГУ направления «Прикладная информатика»;
- Отношения подобия на множестве треугольников;
- Отношение параллельности на множестве прямых.

Пусть ~ - отношение эквивалентности на множестве M. Подмножество элементов M, эквивалентных x, называется классом эквивалентности для x.

$$\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor_{\sim} \overset{\text{def}}{=} \{ \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{M} \ \& \ \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x} \}.$$

36. **Фактор-множество (определение).**

Если ~ - отношение эквивалентности на множестве M, то множество классов эквивалентности называется фактор-множеством множества M относительно эквивалентности ~.

$M/_{\sim}$ является подмножеством булеана $M/_{\sim} \subset 2^M$

37. **Теорема о разбиении множества на классы эквивалентности.**

Всякое отношение эквивалентности на множестве M определяет разбиение множества M, причём среди элементов разбиения нет пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве M.

38. **Отношение порядка; отношения строгого и нестрогого порядка (определения).**

Отношения порядка позволяют сравнивать между собой различные элементы одного множества. Антисимметричное транзитивное отношение называется отношением порядка. Если отношение порядка обладает свойством рефлексивности, то оно называется отношением нестрого порядка. Если отношение порядка обладает свойством антирефлексивности, то оно называется отношением строгого порядка.

39. **Отношения полного и частичного порядка (определения). Частично и линейно упорядоченные множества.**

Если отношение порядка обладает свойством полноты, то оно называется отношением полного (или линейного) порядка. Если отношение порядка не обладает свойством полноты, то оно называется отношением частичного порядка.

Обозначение: - ¿отношение порядка, < - отношение строгого порядка (полного или частичного), ≤ - отношение нестрогого порядка.

40. **Замыкание отношения относительно свойства (определение).**

Замыкание отношения относительно свойства

Пусть ***R*** и ***R'*** – отношения на множестве ***A***.

Отношение ***R'*** называется ***замыканием R*** относительно свойства ***C***, если:

1. ***R'*** обладает свойством ***C***: ***C***(***R'***);
2. ***R'*** является надмножеством ***R***: $R \subset R'$;
3. ***R'*** является наименьшим:

$$C(R'')\ \&\ R \subset R'' \ \Rightarrow\ R' \subset R''.$$

41. **Минимальный элемент (определение). Существование минимального элемента.**

Пусть на множестве M задано отношение порядка ¿

Элемент x ∈ M называется минимальным, если в множестве M не существует элементов, меньших, чем элемент x: ∀y ∈ M ¬(y x) ∨y¿= x

42. **Какие задачи называются комбинаторными? Что изучает комбинаторика?**

Задачи, связанные с необходимостью подсчитать количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям, называются комбинаторными.

Комбинаторика изучает количества комбинаций, которые можно составить из элементов заданного конечного множества с учетом тех или иных условий

43. **Правило произведения.**

Если объект a может быть выбран из некоторого множества объектов m способами, и после каждого такого выбора объект b может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (a,b) может быть осуществлен mxn способами.

44. Правило суммы.

Если объект a может быть выбран из некоторого множества объектов m способами, а объект b может быть выбран n способами, то выбор либо a, либо b может быть осуществлен m+n способами. $A \cap B = \varnothing$

45. Факториал (определение, пример).

Факториал – это функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, значение которой равно произведению всех натуральных чисел от 1 до натурального числа n, в котором каждое число встречается ровно 1 раз.

$n! = 1*2*\ldots(n-1)n$, $n=1,2,..$ $0!=1$

Пример: $1!=1$, $2!=1*2=2$, $3!=1*2*3=6$

46. Перестановки без повторений (определение). Число перестановок без повторений.

Комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов, и отличающихся только порядком расположения этих элементов. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n(или P(n)), $P_n=n!$

47. Перестановки с повторениями (определение). Число перестановок с повторениями.

Комбинации, состоящие из n объектов и отличающиеся порядком расположения объектов. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n

Формула: $P_n=n!/(n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!)$ если $k=n$, то $P_k=P_n=n!$

48. Сочетания без повторений и с повторениями (определения). Число сочетаний без повторений и с повторениями.

Все элементы, участвующие в создании комбинаций, различны. Число сочетаний без повторений.

C_n^m (или C(n,m) или $\binom{m}{n}$)
$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Комбинации, состоящие из n элементов множества A m элементов, причем в каждую выборку могут входить повторяющиеся элементы и порядок элементов в выборках безразличны.

Число сочетаний из n элементов по m с повторениями:
$$\mathbf{C^m_{n\,(с\,повт.)} = C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}}$$

49. Размещения без повторений (определение). Число размещений без повторений.

Комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждой, и отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их расположения. Число размещений из n элементов по m без повторений обозначается A_n^k или A(n,k)

Формула: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

50. Размещения с повторениями (определение). Число размещений с повторениями.

Комбинации, состоящие из n элементов множества A по m элементов, причем одни и те же элементы могут встречаться в комбинациях многократно. Число размещений из n элементов по m с повторениями будет означать: A_n^m

Формула: $A_n^m = n^m$

51. Число разбиений множества (формула с пояснением обозначений).

Теорема: $C_n^{n1,n2,.,nk} = n!/(n_1!*n_2!*n_k!)$

Пример: 20 студентов могут сдавать экзамен в любой день из четырех. Количество студентов, которые могут подать заявки на первый, второй, третий и четвертый день равно n_1, n_2, n_3, n_4. Сколькими способами можно разбить студентов на 4 группы для сдачи экзамена при заданных n_1, n_2, n_3, n_4?

Искомое число – это число разбиений

$C_{20}^{n1,\, n2,\, n3,\, n4} = 20!/(n_1!*n_2!*n_3!*n_4!)$

52. Бином Ньютона (формула).

Теорема: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

C_k^n называются биномиальными коэффициентами.

53. Найти числовой коэффициент при $x^5 \cdot y^2$ после раскрытия выражения $(x+y)^7$.

$C_7^5 = \frac{7!}{5!2!} = 21$

54. Основные свойства биномиальных коэффициентов.

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$

2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

3) $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n = (1+1)^n$

4) $\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m = 0 = (1+(-1))^n$

5) $\sum_{m=0}^{n} C_n^m * m = 2^{n-1} * n$

6) $C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i * C_n^{k-i}$ тождество Коши

55. Продолжить равенство: $\sum_{m=0}^{n} C_n^m =$ **2^n**

56. Продолжить равенство: $\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m =$ **0**

57. Продолжить равенство: $C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} =$ **C_m^n**

58. Формула включений и исключений.

- **§ 4. Формула включений-исключений. Беспорядки.**
- **Теорема 1 (формула включений-исключений).**
- Пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ – конечное множество. Тогда

$$n(A) = \sum_{1 \le i \le m} n(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m+1} \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m).$$

59. Применив формулу включений и исключений, продолжить равенство: $|B \cup C \cup D| =$

$|B \cup C \cup D| = |B| + |C| + |D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |B \cap C \cap D|$

60. Алгоритм сортировки методом пузырька.

1. Ввод массива **A**
2. Для i=2,3…n
   Для j=n,n-1,..i
   Если A[j]<A[j-1]
   A[j] ←→A[j-1] транспозиция соседних элементов
3. Вывод массива A

61. Определение графа (на языке теории множеств).

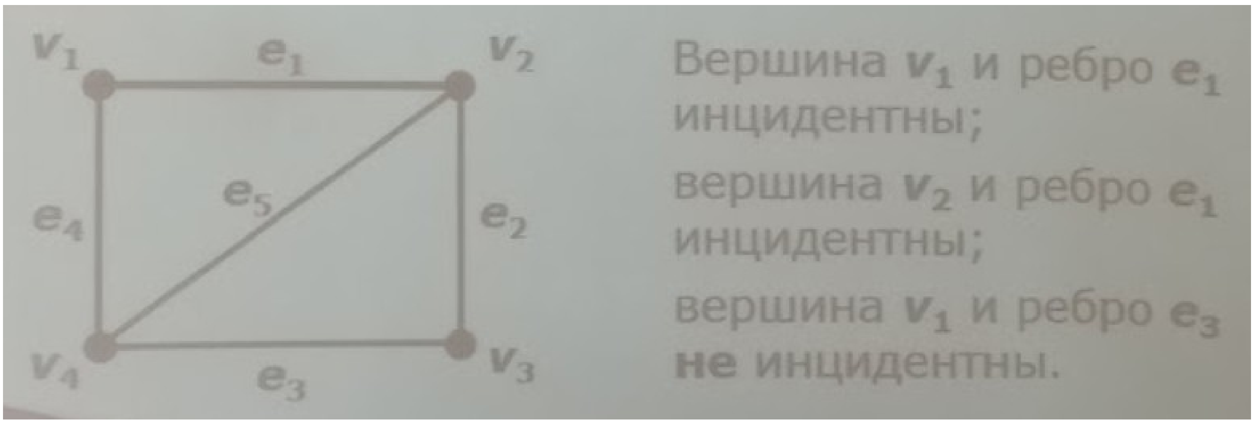
Графом G(V, E) называется совокупность двух множеств: непустое множество V (множество вершин) и множество E двух элементарных подмножеств множества V (множеств ребер).

$G(V,E)=(V,E)$, $V \neq \varnothing$, $E \subset 2^V$ & $\forall e \in E \ |e| = 2$.

62. Инцидентность вершин, ребер графа (определения). Привести пример.

Пусть V_1, V_2 – вершины, $e = \{v_1, v_2\}$, соединяющее их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро e_1 инцидентны, ребро e_1 и вершина v_2 также инцидентны.

Пример:



63. Смежность вершин, ребер графа (определения). Множество смежности вершины.

- Два ребра, инцидентные одной вершине называются смежными;
- Две вершины, инцидентные одному ребру, называются смежными;
- Множество смежности вершины – это множество вершин, смежных с вершиной v_1 и обозначается $Г^+(v)$

$Г^+(v)$ def= $\{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$,

$Г^{+-}(v)$ def= $Г^+(v) \cup \{v\}$.

(Ясно, что $u \in Г^+(v) \Leftrightarrow v \in Г^+(u)$.

64. Псевдографы и мультиграфы (определения).

Псевдограф. Элементом множества E может быть пара одинаковых (не различных) элементов множетсва v: e = $\{V_k, V_k\}$ (ребро e не имеет только одну инцидентную ему вершину). Такой элемент e называется петлей. G(V,E) называется графом с петлями (или псевдографом).

Мультиграф. E является не множеством, а набором, которое может содержать некоторые элементы по нескольку раз. E называется кратными ребрами (имеют одни и те же инцидентные им вершины). G(V,E) называется мультиграфом.

65. Неорграфы и орграфы (определения). Отношение смежности вершин в неографе и в орграфе (отличие).

Если пары вершин, определяющие ребра являются неупорядоченными парами, то в этом случае говорят, что ориентация ребра не задана. Граф, для ребер которого не задана ориентация называется неориентированным графом (или неорграфом).

Если пары вершин, определяющие ребра графов рассматриваются как упорядоченные пары, т.е. $E \subset V \times V$, то говорят, что задана ориентация ребра (задано направление по ребрам от вершины к вершине). Граф, для ребер которого задана ориентация называется ориентированным графом (или орграфом).

Отношение смежности вершин в неорграфе симметрично, а в орграфе оно может не быть симметричным

66. Изоморфизм графов (определение).

Два графа **$G_1(V_1, E_1)$** и **$G(V_2, E_2)$** называются **изоморфными**, если существует биекция **$f : V_1 \rightarrow V_2$**, сохраняющая смежность, т.е.

$e_1=(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow e_2=(f(u), f(v)) \in E_2$.

Обозначение: **$G_1 \sim G_2$** или **$G_1=G_2$**

67. Подграф, остовный подграф (определения).

Граф $G'(V',E')$ называется подграфом графа G(V,E), если $V' \subset V$ & $E' \subset E$

Обозначение: $G' \subset G$

Если $V'=V$ & $E' \subset E$, то G' называется остовным подграфом G.

Если $V' \subset V$ & $E' \subset E$ & ($V' \neq V$ v $E' \neq E$), то G' называется собственным подграфом графа G.

Подграф G'(V', E') называется правильным подграфом графа G(V, E), если G' содержит все возможные рёбра G:

$\forall u,v \in V'$ ((uv,) $\in E \Rightarrow$ (u,v) $\in E'$)

Правильный подграф G'(V', E') графа G(V, E) определяется подмножеством вершин V'.

68. Степень вершины графа (определение). Полустепени вершины (для орграфов).

Количество ребер, инцидентных вершине V, называется степенью (или валентностью) вершины V.

Обозначение: d(V)

Число дуг, исходящих из узла v_t называется полустепенью исхода узла v. Обозначение: $d^-(v)$. Число дуг, входящих в узел v_t, называется полустепенью захода узла v. Обозначение: $d^+(v)$.

69. Закончить фразу: «если степень вершины равна 1, то вершина называется …»

Если d(V) = 1, то вершина V называется концевой (или висячей).

70. Лемма о рукопожатиях.

Теорема: Сумма степеней вершин графа (мультиграфа) равна удвоенному количеству ребер. $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$.

Следствие: число вершин нечётной степени чётно.

71. Представление графа матрицей смежности.

Матрицей смежности графа G(V, E) с |V| = n (имеющего n вершин) называется квадратная булева матрица M порядка n, элементы которой определяются правилом: m_{ij}=

{

- 1, если вершина v_i смежна с вершиной v_j,
- 0 в противном случае (если вершина v_j и v_i не смежны)

}

(требуемый объём памяти пропорционален n^2(обозначается $O(n^2)$).

(в неорграфе вершины не являются смежными сами себе)

Для матрицы смежности неорграфа:

- Число единиц в i-ой строке (в j-м столбце) равно степени вершины $v_i(v_j)$;
- Сумма единичных элементов равна удвоенному числу ребер.

Для матрицы смежности орграфа:

- Число единиц в i-ой строке (в j-м столбце) равно полустепени исхода узла v_i (полустепени захода узла v_j);
- Сумма единичных элементов равна числу дуг.

72. Представление графа матрицей инциденций.

Матрицей инциденций (n,m) – графа G(V,E) называется матрица H размерности nxm, элементы которой определяются правилами:

Для неорграфа:

h_{ij}=

{

1, если вершина v_i инцидентна ребру e,

0 в противном случае

}

Для орграфа:

h_{ij}=

{

-1, если узел v_i является началом дуги e_j,

0, если узел v_i является концом дуги e_j,

1, если узел v_i и дуга e_j не инцидентны.

}

Объём памяти для хранения матрицы инциденций пропорционален **n*m**(обозначается **O(n*m)**). Строки матрицы соответствуют вершинам(узлам), а столбцы – ребрам(дугам).

Для матрицы инциденций неорграфа:

- В любом столбце ровно два единичных элемента: если h_{kj}=1 и h_{ij}=1, то ребро e_j соединяет вершины v_k и v_i;
- Сумма единичных элементов в i-ой строке равна степени вершины v_i

Для матрицы инциденций орграфа:

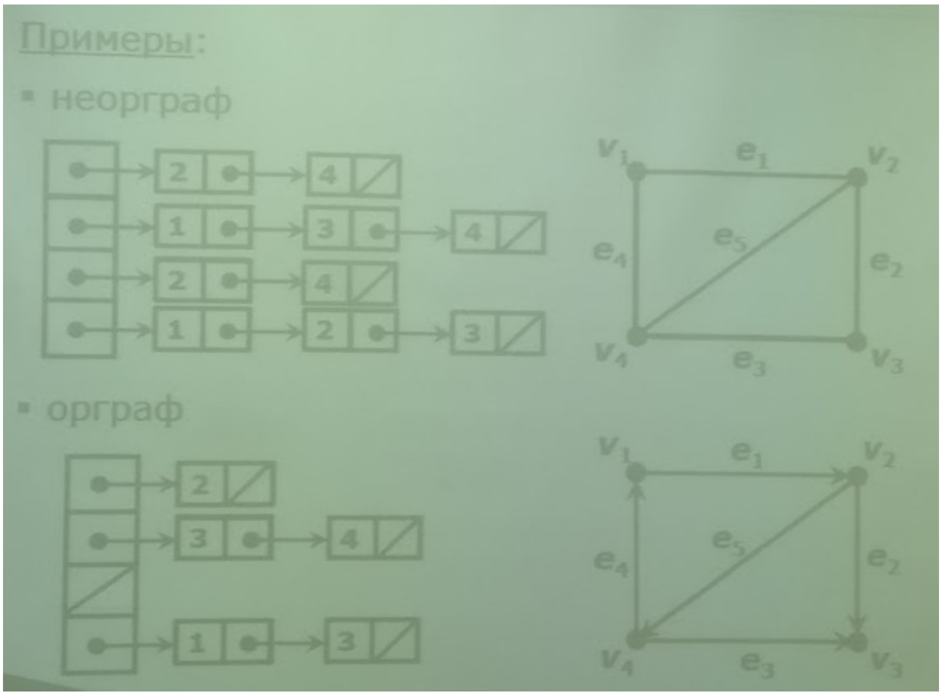
- В любом столбце ровно один элемент равен 1 и ровно один элемент равен -1, если h_{kj} = 1 и h_{ij} = -1, то узел v_i – начало дуги e_j, а узел v_k – её конец;
- Число единиц в i-ой строке равно полустепени захода узла v_i число элементов, равных -1 – полустепени исхода этого узла.

73. Представление графа списками смежности.

Списком смежности называется представление графа с помощью списочной структуры, отражающей смежность вершин, и состоящей из массива указателей на списки смежных вершин (каждой вершине графа соответствует список, состоящий из вершин, смежных данной).

Требуемый объем памяти:

Для неорграфа – O (n+2m); для орграфа – O (n+m)



74.Представление графа массивом ребер (дуг).

Массивом ребер (массивом дуг) называется представление графа с помощью массива mx2 (m- число ребер), содержащего список пар смежных вершин (узлов). Для неорграфа пара вершин неупорядоченные, для орграфа – упорядоченные.

Требуемый объем памяти: O(2m)

75.Маршрут (определение). Замкнутый и открытый маршрут.

Маршрутом в графе называется последовательность, в которой чередуются вершины и ребра, начинающаяся и кончающаяся вершиной: v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, …, e_k, v_k, в которой любые два соседних элемента инцидентны, причем однородные элементы (вершины, ребра) через один смежны или совпадают. Если в маршруте $v_0=v_k$, то маршрут называется замкнутым; в противном случае – открытым.

76.Цепь (определение). Простая цепь.

Если все рёбра в маршруте различны, то маршрут называют цепью. Если все вершины (а значит и рёбра) различны, то маршрут называют простой цепью.

В цепи v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, …, e_k, v_k вершины v_0 и v_k называются концами цепи.

Говорят, что цепь с концами u и v соединяет вершины u и v.

Обозначение: <u, v >. Для орграфов – цепь называется путем.

Если есть какая-либо цепь, соединяющая вершины u и v, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины.

77.Цикл (определение). Простой цикл. Ациклический граф.

Замкнутая цепь называется циклом; замкнутая простая цепь называется простым циклом. Число циклов в графе G обозначается z(G). Граф без циклов называется ациклическим.

Для оргафов цикл называется контуромю Путь из узла в узел v обозначается <→ (u, v)>

78. Связанные вершины (определение). Связный граф (определение). Компоненты связности.

- Две вершины в графе называются связанными, если существует соединяющая их цепь.
- Граф, в котором все вершины связаны, называется связным.
- Отношение связанности вершин является отношением эквивалентности.

Компоненты связности: классы эквивалентности по отношению связанности (вершин) называются компонентами связности графа. Число компонент связности графа G обозначается k(G). Граф является связным тогда и только тогда, когда k(G)=1. Если k(G)>1, то G – несвязный граф.

79. Достижимость вершин (узлов). Матрица достижимости.

Вершина v в графе G (V, E) называется достижимой из вершины u, если существует цепь <u, v>, соединяющая вершины u и v.

Узел v в орграфе G (V, E) называется достижимым из узла u, если существует путь <u, v> из узла u в узел v.

Матрица достижимости: Отношение достижимости вершин(узлов) в графе (орграфе) можно представить матрицей достижимости – квадратной матрицей T порядка n, элементы которой определяются правилом:

t_{ij} =

{

- 1, если вершина v_j достижима из вершины v_i,
- 0 в противном случае.

}

Для неорграфа обычно каждая вершина считается достижимой сама из себя.

80. Расстояние между вершинами. Матрица минимальных расстояний.

Расстоянием между вершинами u и v называется длина кратчайшей цепи <u, v>. Обозначение: d(u, v) $d(u,v) \overset{\text{def}}{=} \min_{\{\langle u,v\rangle\}} \left|\langle u,v\rangle\right|.$

Самая кратчайшая цепь, соединяющая две вершины графа называется геодезической.

Если не существует цепи <u, v>, то по определению $d(u,v) \overset{\text{def}}{=} +\infty.$

Матрицей минимальных расстояний графа G(V, E) называется квадратная матрица D порядка n (n-число вершин графа), элементы которой определяются правилом:

Dij =

{
- 0, если i=j,
- d(vi,vj), если существует цепь vi,vj,
- ∞ в противном случае.

}

81.Ярусы графа, диаметр графа (определения).

Множество вершин, находящихся на заданном расстоянии n от вершины v_t называется ярусом.

Обозначение: D(v, n)

$D(v,n) = \{u \in V | d(u,v)=n\}$

Множество вершин всякого связного графа однозначно разбивается на ярусы относительно данной вершины.

Диаметром графа G называется длиннейшая геодезическая. Обозначение: D(G)

$D(G) = \max d(u, v)$

82.Эксцентриситет вершины графа. Радиус и центр графа.

Эксцентриситетом вершины v в связном графе G(V, E) называется максимальное расстояние от вершины v до других вершин графа.
Обозначение: e(v)

$E(v)= \max d(u,v)$

Радиусом графа G называется наименьший из эксцентриситета вершин.

Обозначение: R(G)

$R(G)= \min\ e(v)$

Вершина v называется центральной, если её эксцентриситет совпадает с радиусом графа e(v) = R(G)

Множество центральных вершин называется центром графа. Обозначение: C(G)

$C(G) = \{v \in V | e(V) = R(G)$

83.Полный граф. Число ребер в полном графе.

Граф, в котором любые две вершины смежны, называется полным.
Полный граф с n вершинами обозначается k_n. Он имеет максимально возможное число рёбер. $m(k_n) = (n(n-1))/2$

84.Двудольные графы (определение). Полные двудольные графы.

Граф G(V, E) называется двудольным (или биографом), если множество его вершин V может быть разбито на два пересекающихся подмножества v_1 и v_2, такие что $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

Теорема: граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечетной длины. Следствие: Ациклические графы двудольны.

Причем всякое ребро из E инцидентно вершине из v_1 и вершине из v_2 (т.е соединяет вершину из v_1 с вершиной v_2).
Если двудольный граф содержит все рёбра, соединяющие множества v_1 и v_2, то он называется полным двудольным графом.

85. Нагруженные графы (определение). Матрица весов.

Если каждому ребру (дуге) графа приписано некоторое число (может характеризовать протяженность ребра, стоимость прохождения по ребру), называемое весом (или длиной) ребра(дуги), то граф называется взвешенным (или нагруженным).

Матрица весов(длин) квадратная матрица C порядка n, элементы которой определяются правилами:

Cij=

{

- 0, если i=j,
- Вес ребра (vi,vj), если (vi,vj) ∈ E,
- ∞, если (vi,vj) ∉E.

}

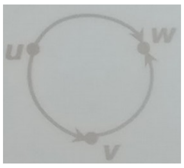
86. Связь между орграфами и бинарными отношениями.

Любой орграф G(V, E) с петлями, но без кратных дуг задаёт бинарное отношение E на множестве V, и обратно. А именно пара элементов принадлежит отношению на множестве V: (a, b) € E ⊂ VxV тогда и только тогда, когда в графе G есть дуга (a, b).
Полный граф соответствует универсальному отношению. Фактически, это один и тот же класс объектов, описанный разными свойствами.

87. Свойства орграфов, представляющих рефлексивное, антирефлексивное, симметричное и транзитивное отношения.

- Орграф, представляющий рефлексивное отношение, обязательно имеет петли при каждом узле.
- Орграф, представляющий антирефлексивное отношение, не имеет ни одной петли.
- Если в орграфе для всех пар смежных узлов {u, v} существует как дуга (u, v), так и дуга (v, u), то орграф представляет симметричное отношение.

- В орграфе, представляющем антисимметричное отношение нет ни одной пары узлов {u, v} такой, что если существует дуга (u, v), то существует и дуга (v, u), но допускаются петли.
- В орграфе, представляющем транзитивное отношение, для любых трех узлов u, v и w должно выполняться условие: если существуют дуги (u, v) и (v, w), то существует и дуга (u, w).
- Дуга (u, w) называется транзитивно замыкающей дугой.



88. Лес, дерево (определения).

Ациклический граф (т.е граф без циклов) называется лесом. Лес не содержит петель и кратных ребер. Связный ациклический граф называется деревом (свободным деревом).

89. Основные свойства (свободных) деревьев.

Теорема: для (n, m) – графа G(V, E) след. Условия эквивалентны.

1) Граф G является деревом;
2) G – связный граф и m = n-1;
3) G – ациклический граф и m = n-1
4) G- граф, в котором любые две вершины соединены единственной простой цепью.
5) G – ациклический граф, и добавление нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

90. Ориентированное дерево (определение).

Ориентированным деревом (или ордеревом или корневым деревом) называется орграф со следующими свойствами:

1) Существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0. Этот узел называется корнем ордерева;
2) Полустепень захода всех остальных узлов равна 1;
3) Каждый узел достижим из корня

91. Основные свойства ориентированных деревьев.

Теорема: если (n, m) – граф G является ордеревом, то он обладает следующими свойствами:

1) M = n-1,
2) Если в G устранить ориентацию дуг, то получится свободное дерево,
3) В G нет контуров,
4) Для каждого узла G существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня;
5) Подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла v, является ордеревом с корнем v.

92. Корень, лист, крона, ветвь ордерева. Высота ордерева. Уровень узла ордерева.

- Концевая вершина ордерева называется листом.
- Множество листьев называется кроной.
- Путь из корня в лист называется ветвью ордерева.
- Длина наибольшей ветви ордерева называется его высотой.
- Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла. Корень имеет уровень 0.

93.Потомки, предки узла ордерева. Родитель, сыновья узла ордерева.

Узлы, достижимые из узла u, называются потомками узла u. Потомки одного узла образуют поддерево.

Если узел v является потомком узла u, то узел u называется предком узла v.

Если в дереве существует дуга (u,v), то узел u называется отцом(или родителем) узла v, а узел v называется сыном узла u

Сыновья одного отца называются братьями