2. Отношения на множествах

2.1 Основные понятия

Прямое (декартово) произведение двух множеств

Пусть ***A*** и ***B*** – два множества.

Прямым (***декартовым***) ***произведением*** множеств ***A*** и ***B*** называется множество всех упорядоченных пар (***a***, ***b***), таких, что

$$a \in A, \quad b \in B.$$

Обозначение: ***A*** **×** ***B***.

Формально:

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A \;\&\; b \in B\}.$$

Пример.

Пусть $A = \{a, b, c\}, \quad B = \{0, 1\}.$

Тогда

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\},$$

$$B \times A = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (0, c), (1, c)\}.$$

Как видно из примера, декартово произведение некоммутативно:

$$A \times B \neq B \times A.$$

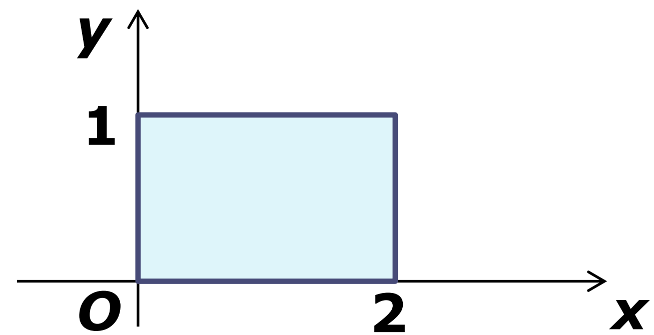
Точка на плоскости может быть задана упорядоченной парой координат (т. е. двумя точками на координатных осях).

Таким образом, $R^2 = R \times R.$

В частности, если

$X = [0, 2], \quad Y = [0, 1],$ то

$X \times Y -$ множество точек прямоугольника.



Метод координат ввел в употребление Рене Декарт (1596 – 1650). Отсюда название «декартово произведение» (хотя теория множеств появилась более чем 200 лет спустя).

Мощность декартова произведения конечных множеств

Теорема.

Для конечных множеств ***A*** и ***B***

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

В примере выше $A = \{a, b, c\}, \quad B = \{0, 1\},$

$$|A| = 3, \quad |B| = 2, \quad |A \times B| = 6.$$

Обобщение на большее число сомножителей

Прямым (***декартовым***) ***произведением*** множеств $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, … $\boldsymbol{A_n}$ называется множество всех упорядоченных наборов (*кортежей*):

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{\text{def}}{=}$$

$$= \left\{ \left(a_1, a_2, \ldots, a_n \right) \middle| \, a_1 \in A_1 \;\&\; a_2 \in A_2 \;\&\; \ldots \;\&\; a_n \in A_n \right\}.$$

Степень множества

В определении декартова произведения сомножители не обязательно должны быть различными.

Степенью множества A называется его декартово произведение само на себя:

$$A^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}.$$

Для конечного множества ***A***

$$\left| A^n \right| = \left| A \right|^n.$$

Пример.

Пусть ***A*** – конечный алфавит (конечное множество, элементами которого являются символы).

Элементами множества $\boldsymbol{A^n}$ являются слова длины ***n*** в алфавите ***A***.

Под словом понимается любая последовательность символов данного алфавита.

Бинарные отношения

Пусть ***A*** и ***B*** – два непустые множества.

Бинарным отношением R между множествами ***A*** и ***B*** называется всякое подмножество декартова произведения ***A×B***:

$$R \subset A \times B.$$

Тот факт, что $(a, b) \in R$, т. е. между элементами $a \in A$ и $b \in B$ существует отношение ***R***, обозначается так: ***aRb***.

Пример.

Рассмотрим множества

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Декартово произведение ***A*** на ***B*** равно

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),$$
$$(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}.$$

Определим отношение ***R*** («больше») следующим образом:

aRb, если ***a*** > ***b***, $a \in A \ \& \ b \in B$.

$$R = \{(2,1),(3,1),(3,2)\} \subset A \times B.$$

Если **A** = **B**, т. е. $R \subset A^2$,

то говорят, что **R** есть отношение ***на множестве A***.

<u>Примеры</u>.

- отношения **=**, **<**, **>**, **≤**, **≥**, **≠**, определенные на множестве чисел (натуральных, целых, действительных);
- отношение «быть однокурсником» на множестве студентов направления «Прикладная информатика», обучающихся в ТюмГУ;
- отношение включения на множестве $\mathbf{2}^{U}$ …

Многоместные отношения

Обобщение бинарного отношения:

n-местное (***n-арное***) ***отношение R*** – это подмножество декартова произведения множеств $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, … $\boldsymbol{A_n}$ (множество упорядоченных наборов – кортежей):

$$\boldsymbol{R} \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \ \& \ a_2 \in A_2 \ \& \ldots \& \ a_n \in A_n\}.$$

Многоместные отношения используются, например, в теории баз данных.

Реляционная алгебра, реляционная модель данных, реляционная база данных – от *relation* (отношение).

Далее рассматриваются только бинарные отношения.

Дополнение отношения

Пусть ***R*** есть отношение между множествами ***A*** и ***B***: $R \subset A \times B$.

Дополнением отношения R называется отношение $\overline{R}$, определяемое следующим образом:

$$\overline{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\} \subset A \times B.$$

Универсальное отношение

Пусть ***R*** есть отношение между множествами ***A*** и ***B***: $R \subset A \times B$.

Универсальное отношение U содержит *все* пары (***a***, ***b***), принадлежащие декартову произведению ***A × B***:

$$U \overset{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B\} = A \times B.$$

Композиция отношений

Пусть $R_1 \subset A \times C$ – отношение между ***A*** и ***C***,

$R_2 \subset C \times B$ – отношение между ***C*** и ***B***.

Композицией двух отношений R$_1$ и ***R$_2$*** называется отношение $R \subset A \times B$ между ***A*** и ***B***, определяемое следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 \overset{\text{def}}{=}$$

$$= \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, \exists c \in C : aR_1c \,\&\, cR_2b\}.$$

Композиция отношений на множестве ***A*** является отношением на множестве ***A***.

Свойства композиции отношений:

1. Композиция отношений *ассоциативна*:

$$\forall\ R_1 \subset A \times B,\ R_2 \subset B \times C,\ R_3 \subset C \times D$$

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

2. Композиция отношений, в общем случае, *не* *коммутативна*:

$$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1 .$$

Пример: отношения $\boldsymbol{R_1}$ – кровного родства и $\boldsymbol{R_2}$ – супружества на множестве людей.

$R_1 \circ R_2$ – супруги кровных родственников;

$R_2 \circ R_1$ – кровные родственники супругов.

Представление отношений в компьютерных программах

Один из возможных способов – представление с помощью булевых матриц.

Пусть ***R*** – отношение на множестве ***A***: $R \subset A^2$ и |***A***| = ***n***. Перенумеруем элементы множества ***A***: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Тогда отношение ***R*** можно представить булевой матрицей **R**:

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \textbf{если } a_i \, R \, a_j\,, \\ \mathbf{0}, & \textbf{если } a_i \, \overline{R} \, a_j\,. \end{cases}$$

Примеры.

1. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

_R_ – отношение «меньше либо равно» на множестве **_A_**.

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(4,4),(4,5),(5,5)\}.$$

Представление булевой матрицей:

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. В универсальное отношение ***U*** входят все пары элементов множества ***A***, поэтому все элементы матрицы **U** универсального отношения равны 1.

Матрица отношения $\overline{R}$.

Пусть отношение $R \subset A^2$ имеет матрицу **R**.
Тогда отношение $\overline{R}$ (дополнение отношения ***R***) имеет матрицу

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{U} - \mathbf{R},$$

т. е.

$$\overline{\mathbf{r}}_{ij} = 1 - \mathbf{r}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Разность **C** булевых матриц **A** и **B** определяется правилом:

$$\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{a}_{ij} \,\&\, \left(1 - \mathbf{b}_{ij}\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица композиции отношений.

Пусть на множестве ***A*** заданы отношения $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$: $R_1, R_2 \subset A^2$ с матрицами $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ соответственно.

Тогда отношение $R_1 \circ R_2$ имеет матрицу

$$\mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 .$$

Произведение булевых матриц $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$

Произведение **C** булевых матриц **A** и **B** определяется правилом:

$$\mathbf{c}_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} \left(\mathbf{a}_{ik} \,\&\, \mathbf{b}_{kj} \right), \quad i, j = 1, 2, \ \ldots, \ n.$$

2.2 Свойства отношений

Рефлексивность

Пусть $R \subset A^2$.

Отношение ***R*** называется ***рефлексивным***, если

$$\forall a \in A \quad a R a.$$

Матрица рефлексивного отношения содержит 1 на главной диагонали:

$$\mathrm{r}_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Примеры.

- Отношения **=**, **≤**, **≥** на множестве чисел;
- отношение параллельности на множестве прямых;
- отношение «быть похожим» на множестве людей.

Антирефлексивность

Отношение ***R*** называется ***антирефлексивным***, если

$$\forall a \in A \quad \neg a R a.$$

Матрица антирефлексивного отношения содержит 0 на главной диагонали:

$$\mathrm{r}_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Примеры.

- Отношения **$<$**, **$>$**, **$\neq$** на множестве чисел;
- отношение перпендикулярности на множестве прямых.

Симметричность

Отношение ***R*** называется ***симметричным***, если $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$ из $\boldsymbol{aRb}$ следует $\boldsymbol{bRa}$.

Матрица симметричного отношения является симметричной:

$$\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_{ij}, \quad \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ \ldots, \ \boldsymbol{n}.$$

Примеры.

- Отношения =, ≠ на множестве чисел;
- отношения параллельности и перпендикулярности на множестве прямых;
- отношение «быть родственником» на множестве людей.

Антисимметричность

Отношение ***R*** называется ***антисимметричным***, если
$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A} \text{ из } \boldsymbol{a R b} \ \& \ \boldsymbol{b R a} \text{ следует } \boldsymbol{a = b}.$$

<u>Примеры</u>.

- Отношения **≤**, **≥** на множестве чисел;
- отношение включения на множестве $\boldsymbol{2^U}$.

Транзитивность

Отношение ***R*** называется ***транзитивным***, если $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in A$ из $\boldsymbol{a}\,\mathbf{R}\,\boldsymbol{b}$ **&** $\boldsymbol{b}\,\mathbf{R}\,\boldsymbol{c}$ следует $\boldsymbol{a}\,\mathbf{R}\,\boldsymbol{c}$.

Примеры.

- Отношения **<**, **>**, **≤**, **≥**, **=** на множестве чисел;
- отношение включения на множестве $\mathbf{2}^{\boldsymbol{U}}$;
- отношение параллельности на множестве прямых.

Полнота

Отношение ***R*** называется ***полным***, если

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$ имеет место

либо $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, либо $\boldsymbol{aRb}$, либо $\boldsymbol{bRa}$.

<u>Примеры</u>.

- Отношения **<**, **>**, **≤**, **≥** на множестве чисел (целых, действительных);
- отношение «быть старше» (по возрасту) на множестве людей.

Замыкание отношения относительно свойства

Пусть ***R*** и ***R'*** – отношения на множестве ***A***.

Отношение ***R'*** называется ***замыканием R*** относительно свойства ***C***, если:

1. ***R'*** обладает свойством ***C***: ***C***(***R'***);
2. ***R'*** является надмножеством ***R***: $R \subset R'$;
3. ***R'*** является наименьшим:

$$C(R'') \ \& \ R \subset R'' \ \Rightarrow \ R' \subset R''.$$

В задачах обработки данных иногда требуется получить *транзитивное замыкание* (т. е. замыкание относительно свойства транзитивности) отношения ***R***.

Одним из наиболее эффективных алгоритмов вычисления транзитивного замыкания отношения является ***алгоритм Уоршалла***.

Алгоритм Уоршалла

Вход: ***R*** – отношение, заданное на множестве ***A***, $|A| = n$, представленное булевой матрицей **R**;

выход: транзитивное замыкание отношения ***R***, представленное булевой матрицей **T**.

Добавление к транзитивному замыканию пары элементов с номерами j и k (присваивание $t_{jk} = 1$), для которых существует элемент с номером i, такой что $a_j R a_i$ & $a_i R a_k$

1. **S** = **R**
2. Для $\boldsymbol{i}$ = 1, 2, … , $\boldsymbol{n}$

    2.1 для $\boldsymbol{j}$ = 1, 2, … , $\boldsymbol{n}$

    для $\boldsymbol{k}$ = 1, 2, … , $\boldsymbol{n}$

    $$\mathbf{t}_{jk} = \mathbf{s}_{jk} \vee \mathbf{s}_{ji} \,\&\, \mathbf{s}_{ik}$$

    2.2 **S** = **T**
3. Вывод **T**

2.3 Классы отношений, обладающих наборами свойств

Отношения эквивалентности

Если отношение ***R*** на множестве ***A*** обладает свойствами *рефлексивности*, *симметричности* и *транзитивности*, то оно называется ***отношением эквивалентности***.

Часто используемое обозначение: **~**

a* ~ *b – элемент ***a*** эквивалентен элементу ***b***.

Примеры.

- Отношение = на множестве чисел;
- отношение «быть однокурсником» на множестве студентов ТюмГУ направления «Прикладная информатика»;
- отношение подобия на множестве треугольников;
- отношение параллельности на множестве прямых.

Классы эквивалентности

Пусть **~** – отношение эквивалентности на множестве ***М***, $x \in M$.

Подмножество элементов ***М***, эквивалентных ***х***, называется ***классом эквивалентности для х***:

$$[x]_{\sim} \overset{\text{def}}{=} \{y \mid y \in M \;\&\; y \sim x\}.$$

Если отношение подразумевается, то значок отношения может быть опущен.

Теорема.

Всякое отношение эквивалентности на множестве ***M*** определяет разбиение множества ***M***, причем среди элементов разбиения нет пустых; и обратно, всякое разбиение множества ***M***, не содержащее пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве ***M***.

Примеры.

- Отношение «быть однокурсником» на множестве студентов вуза определяет классы эквивалентности: $\boldsymbol{X_1}$ – множество студентов 1 курса, $\boldsymbol{X_2}$ – множество студентов 2 курса, и т. д.;
- разбиение множества $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Z}$ семейством множеств $X_0 = \{x \mid x = 5k,\ k \in Z\}$,

$$X_1 = \{x \mid x = 5k+1,\ k \in Z\},$$
$$X_2 = \{x \mid x = 5k+2,\ k \in Z\},$$
$$X_3 = \{x \mid x = 5k+3,\ k \in Z\},$$
$$X_4 = \{x \mid x = 5k+4,\ k \in Z\}.$$

определяет отношение эквивалентности «иметь одинаковый остаток от деления на 5» на $\boldsymbol{Z}$.

Алгоритм построения разбиения множества на классы эквивалентности.

Вход: ***M*** – множество (конечное),

~ – отношение эквивалентности на ***M***;

выход: $\mathcal{B}$ – разбиение множества на классы эквивалентности.

1. $\mathcal{B} = \varnothing$.

Вначале разбиение пусто

2. Для всех $a \in M$

Выбор одного из уже построенных классов эквивалентности

   2.1 Для всех $B \in \mathcal{B}$

Выбор любого представителя класса *B*

      2.1.1 Выбрать $b \in B$

      2.1.2 Если $\boldsymbol{b \sim a}$,

Пополнение существующего класса и переход к следующему элементу *M*

то $\boldsymbol{B = B} \cup \{\boldsymbol{a}\}$; переход на шаг 2

   2.2 $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{\boldsymbol{a}\}$

Создание нового класса

3. Вывод $\mathcal{B}$.

Фактормножество

Если **~** – отношение эквивалентности на множестве ***M***, то множество классов эквивалентности называется ***фактор-множеством множества M*** относительно эквивалентности **~**.

Обозначение: $M/_{\sim}$.

Фактор-множество является подмножеством булеана:

$$M/_{\sim} \subset 2^{M} .$$

Отношения порядка

Отношения порядка позволяют сравнивать между собой различные элементы одного множества.

Антисимметричное транзитивное отношение называется ***отношением порядка***.

Если отношение порядка обладает свойством рефлексивности, то оно называется отношением ***нестрогого порядка***.

Если отношение порядка обладает свойством антирефлексивности, то оно называется отношением ***строгого порядка***.

Если отношение порядка обладает свойством полноты, то оно называется отношением ***полного*** (или ***линейного***) ***порядка***.

Если отношение порядка **не** обладает свойством полноты, то оно называется отношением ***частичного порядка***.

Обозначения:

$\prec$ – отношение порядка;

< – отношение строгого порядка (полного или частичного);

≤ – отношение нестрогого порядка.

Множество, на котором определено отношение частичного порядка, называется ***частично упорядоченным***.

Множество, на котором определено отношение линейного (полного) порядка, называется ***линейно упорядоченным***.

Примеры.

- Множество $\boldsymbol{Z}$ с отношением $<$ («меньше») является линейно упорядоченным,

  $<$ – отношение строгого полного порядка;

- множество $\boldsymbol{Z}$ с отношением $\leq$ («меньше или равно») является линейно упорядоченным,

  $\leq$ – отношение нестрогого полного порядка;

- Булеан $\mathbf{2}^{\boldsymbol{M}}$ с отношением $\subset$ является частично упорядоченным,

  $\subset$ – отношение нестрогого частичного порядка.

Минимальные элементы

Пусть на множестве ***M*** задано отношение порядка $\prec$.

Элемент $x \in M$ называется ***минимальным***, если в множестве ***M*** не существует элементов, меньших, чем элемент ***x***:

$$\forall y \in M \quad \neg(y \prec x) \vee y = x .$$

Теорема.

Во всяком конечном непустом частично упорядоченном множестве существует минимальный элемент.

<u>Замечание</u>.

Линейно упорядоченное конечное множество содержит ровно один минимальный элемент;

в произвольном конечном частично упорядоченном множестве минимальных элементов может быть несколько.

Пример.

Пусть на множестве $M = \{a, b, c, d\}$ задано отношение частичного порядка

$$\{(a, b), (c, d)\},$$

т. е. $a \prec b$ и $c \prec d$.

Элементы ***a*** и ***c*** являются минимальными.

Если задано отношение линейного порядка

$$\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\},$$

то $a \prec b \prec c \prec d$,

и минимальным является только элемент ***a***.

Теорема.

Всякий частичный порядок на конечном множестве может быть дополнен до линейного.

Это означает:

существует отношение линейного порядка, которое является надмножеством заданного отношения частичного порядка.

Алгоритм топологической сортировки

Это алгоритм дополнения частичного порядка до линейного на конечном множестве.

Вход: ***M*** – конечное частично упорядоченное множество;

выход: линейно упорядоченное множество ***W***.

Линейный порядок на множестве ***W*** определяется последовательностью, в которой генерируются объекты этого множества.

1. $\boldsymbol{W} = \varnothing$.
2. Пока $\boldsymbol{M} \neq \varnothing$
   - 2.1 $\boldsymbol{m} = \min(\boldsymbol{M})$ — **Определение минимального элемента в текущем множестве *M* (вызов функции min)**
   - 2.2 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W} \cup \{\boldsymbol{m}\}$ — **Добавление найденного минимального элемента в множество *W***
   - 2.3 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} \setminus \{\boldsymbol{m}\}$ — **Исключение элемента *m* из дальнейшего рассмотрения**

***Описание функции* min.**

Вход: ***M*** – конечное частично упорядоченное множество;

выход: минимальный элемент ***m***.

1. Выбрать любой элемент ***M*** в качестве ***m***
2. Для всех $x \in M$
   если $x \prec m$, то ***m*** = ***x***
3. Возврат ***m***

Замечание.

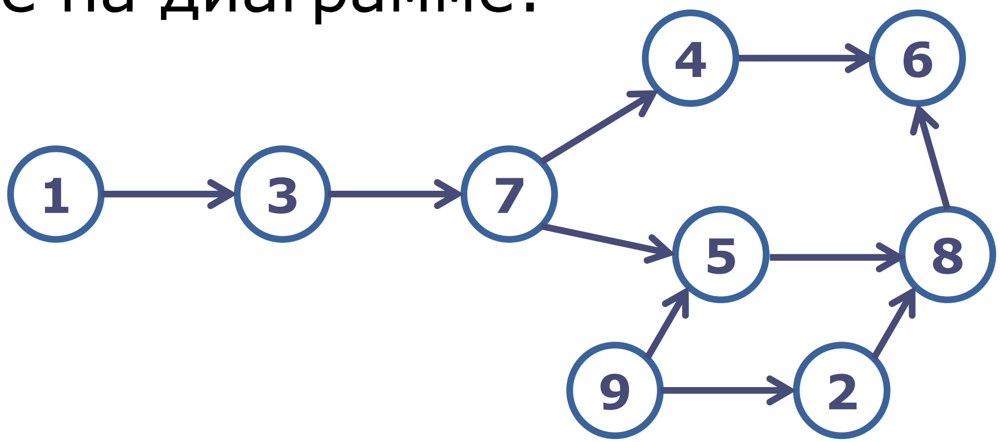
Если отношение порядка представлено матрицей, то функцию **min** можно реализовать, например, так:

найти в матрице отношения первый столбец, содержащий только нули.

Пример.

На множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

задано отношение частичного порядка, показанное на диаграмме:



Для представления отношения упорядоченными парами необходимо множество пар

$$\{(1, 3), (3, 7), (7, 4), (7, 5), (4, 6), (5, 8), (8, 6), (9, 5), (9, 2), (2, 8)\}$$

дополнить до обеспечения выполнения свойства транзитивности.

В результате работы алгоритма будет сгенерирована следующая последовательность элементов множества ***W***:

1, 3, 7, 4, 9, 5, 2, 8, 6.

Она определяет линейный порядок на ***W***:

$$\mathbf{1} \prec \mathbf{3} \prec \mathbf{7} \prec \mathbf{4} \prec \mathbf{9} \prec \mathbf{5} \prec \mathbf{2} \prec \mathbf{8} \prec \mathbf{6}\,.$$