Компьютерная математика

Лектор:
Цыганова Мария Сергеевна

Применение современных вычислительных технологий (разработка баз данных, создание математического обеспечения ИС и т. п.) требует использования определенных математических структур и методов.

Компьютерная математика включает те разделы современной математики, которые предоставляют инструментарий для описания и анализа проблем компьютерных наук.

Задачи изучения дисциплны

- Формирование базовых знаний об основных математических объектах и структурах, применяемых в ИТ, способах представления этих объектов в компьютерных программах;
- освоение методов работы с указанными объектами;
- изучение алгоритмов решения типовых задач дискретной математики;
- получение представления о возможностях применения изученных моделей и методов к решению различных задач автоматизации.

1. Множества.
Операции над множествами

1.1 Основные понятия теории множеств

Основоположники теории множеств

- Бернард Больцано (1781 – 1848);
- Рихард Дедекинд (1831 – 1916);
- Георг Кантор (1845 – 1918).

Г. Кантор внес наибольший вклад в создание теории, поэтому классическую теорию множеств обычно связывают с его именем.

Официально теория множеств была признана в 1897 г. (после докладов Ж. Адамара и А. Гурвица на I международном конгрессе математиков).

Понятие множества (по Кантору)

Понятие *множества* относится к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики.

Смысл этого понятия (по Г. Кантору):

множество – это совокупность определенных и различимых между собой объектов, мыслимая как единое целое.

Объекты, составляющие множество, могут быть разнообразной природы.

Примеры:

- множество натуральных чисел;
- множество станций московского метрополитена;
- множество зарезервированных слов языка программирования;
- множество идентификаторов, используемых в программе;
- множество операций, которые могут быть выполнены после данной инструкции в программе …

Элементы множества

Объекты, из которых составлено множество, называются ***элементами*** этого множества.

В теории множеств предполагается, что элементы множества различны и отличимы друг от друга.

Множество может содержать любое число элементов, конечное или бесконечное (соответственно, *конечное* или *бесконечное множество*).

В частности, множество может содержать один элемент или ни одного элемента.

Множество, содержащее один элемент, называется ***синглетоном*** (от *single*).

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым множеством***.

Обозначения

Множества обозначаются прописными буквами.

Элементы множеств обозначаются строчными буквами.

Принадлежность объекта ***x*** множеству ***A*** обозначается так: $x \in A$.

Тот факт, что объект ***y*** не принадлежит множеству ***A***, обозначается так: $y \notin A$.

Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

Общепринятые обозначения некоторых числовых множеств

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных (вещественных) чисел;

C – множество комплексных чисел.

Часто используется обозначение

P – множество простых чисел.

Задание множества

Множество считается заданным, если для любого объекта устанавливается его принадлежность или непринадлежность к данному множеству.

Способы задания множеств

1. **Перечислением элементов**.

   Этот способ только для конечных множеств.

   В общем виде: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$

Примеры:

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$
- $B = \{0, 1\},$
- $S = \{'male', 'female'\},$
- $R = \{red, green, blue\}.$

Замечание.

Множества как объекты могут быть элементами других множеств.

Например:

$$W = \{0,\ 1,\ \{0, 1\}\},\quad V = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

2. **Характеристическим предикатом** (т. е. условием, позволяющим проверить, принадлежит ли данный объект множеству).

В общем виде: $M = \{x \mid P(x)\}$.

Примеры:

- $M_1 = \{x \mid x \in Z \ \& \ 0 \leq x \leq 9\}$ – множество чисел, соответствующих десятичным цифрам (эквивалентно определению множества ***A*** из предыдущего примера);
- $M_2 = \{x \mid \sin x = 1\}$.

3. Порождающей процедурой.

Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо из других объектов.

В общем виде: $M = \{ x \mid x = f \}.$

Примеры:

- $M_3 = \{ x_k \mid x_k = x_{k-1} + x_{k-2}, \ k = 3, 4, \ \ldots, \ x_1 = x_2 = 1 \}$ – множество чисел Фиббоначчи;
- $M_4 = \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z \right\}$ (эквивалентно определению множества $\boldsymbol{M_2}$ из предыдущего примера).

Парадокс Рассела

Возможность задания множества характеристическим предикатом зависит от предиката.

Использование некоторых предикатов для этих целей может приводить к противоречиям.

Например, все рассмотренные в предыдущих примерах множества не содержат само себя в качестве элемента.

Рассмотрим множество ***Y*** всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента:

$$Y \overset{\mathbf{def}}{=} \left\{ X \;\middle|\; X \notin X \right\}.$$

Если такое множество существует, то возникает вопрос: $Y \in Y$?

- Если предположить, что $Y \in Y$, то, по определению множества ***Y***, должно выполняться $Y \notin Y$.
- Если предположить, что $Y \notin Y$, то, по определению множества ***Y***, должно выполняться $Y \in Y$.

Возникает неустранимое логическое противоречие, известное как ***парадокс Рассела***.

Существует несколько способов избежать парадокса Рассела.

Один из способов:

ограничить используемые характеристические предикаты видом

$$P(x) = x \in U \ \& \ Q(x),$$

где $\boldsymbol{U}$ – известное, заведомо существующее множество (*универсум*).

В этом случае обычно используется обозначение:

$$\{x \in U \mid Q(x)\}.$$

Универсум

Далее в конкретных рассуждениях будем предполагать, что элементы множеств берутся из одного, достаточно широкого множества U (своего для каждого случая), которое называется ***универсальным множеством*** (или ***универсумом***).

Включение множеств

Множество ***A содержится в множестве B*** (множество ***B включает множество A***), если каждый элемент множества ***A*** является элементом множества ***B***.

В этом случае ***A*** называется ***подмножеством B***, а ***B*** – ***надмножеством A***.

Обозначение:

$$A \subset B, \quad B \supset A.$$

Пример.

Пусть

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$B = \{0, 1\}, \quad C = \{-1, 0, 1\}.$$

Тогда

$$B \subset A, \quad C \not\subset A.$$

Пустое множество считается подмножеством любого множества.

Знак включения множеств $\subset$ не следует путать со знаком принадлежности элемента множеству $\in$.

<u>Пример</u>.

Пусть $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \{7, 8, 9\}\}$,

$$B = \{0, 1\}, \quad C = \{7, 8, 9\}, \quad D = \{0, 1, \{7, 8, 9\}\}.$$

Тогда

$$B \subset A, \quad C \in A, \quad D \subset A, \quad C \in D,$$

при этом

$$C \not\subset A, \quad C \not\subset D.$$

Булеан множества

Множество всех подмножеств множества ***M*** называется ***булеаном*** множества ***M*** и обозначается ***B***(***M***) или $\mathbf{2}^{\boldsymbol{M}}$.

Пример.

Пусть $M = \{a, b, c\}.$

Тогда булеан ***M*** имеет вид:

$$B(M) = 2^M = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Свойства включения множеств

1. Для любого множества ***A*** справедливо

$$A \subset A.$$

2. Для любых множеств ***A***, ***B*** и ***C*** из

$$A \subset B \ \& \ B \subset C$$

следует $A \subset C$.

Равенство множеств

Множества ***A*** и ***B*** называются ***равными***, если они являются подмножествами друг друга.

Обозначение:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}.$$

Формально:

$$A = B \overset{\mathbf{def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \ \& \ B \subset A.$$

Собственные и несобственные подмножества

Если $A \subset B$ и $A \neq B,$ то множество ***A*** называется ***собственным подмножеством B***.

Если в рассуждениях требуется различать собственные и несобственные подмножества, то для обозначения включения собственных подмножеств используется знак $\subset$, для несобственных – знак $\subseteq$.

$\subset$ – строгое включение;

$\subseteq$ – нестрогое включение.

О повторяемости элементов

Вопрос:

может ли один и тот же элемент входить в множество более одного раза?

Ответ <u>отрицательный</u>.

Все элементы множества должны отличаться один от другого ⇒ каждый элемент может входить в множество только один раз.

Поэтому, например, множество $P = \{1, 0, 1\}$ следует считать множеством, состоящим из двух элементов:

$$P = \{1, 0, 1\} = \{1, 0\}.$$

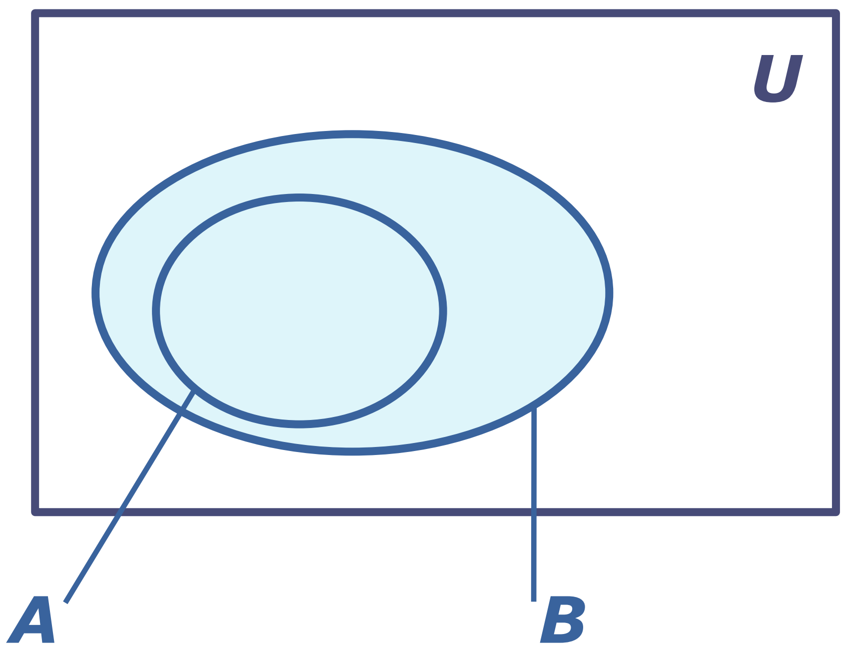
Диаграммы Венна

Для наглядного представления множеств и отношений между ними используют *диаграммы Венна* (*диаграммы Эйлера*, *круги Эйлера*, *диаграммы Эйлера-Венна*).

Представляют собой замкнутые кривые, ограничивающие области, которым ставятся в соответствие элементы рассматриваемых множеств.

Пример.

Диаграмма иллюстрирует факт, что множество ***A*** является собственным подмножеством множества ***B***.



U – универсум.

Изоморфность множеств

Говорят, что между множествами ***A*** и ***B*** установлено ***взаимно-однозначное соответствие***, если каждому элементу множества ***A*** соответствует один и только один элемент множества ***B***, и каждому элементу множества ***B*** соответствует некоторый элемент множества ***A***.

Множества ***A*** и ***B*** называются ***изоморфными***, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Обозначение:

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}.$$

Примеры.

- Преобразование $n \to 2n$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ и множеством четных натуральных чисел $\boldsymbol{2N}$.

  Поэтому $\boldsymbol{N} \sim \boldsymbol{2N}$.

- Кодовые страницы сопоставляют каждому символу из некоторого набора распространенных символов (печатных и управляющих) числовой код – номер символа в кодовой таблице.

  Существует множество кодовых таблиц.

  При использовании конкретной кодовой таблицы устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством символов и множеством кодов.

Мощность конечного множества

Мощностью конечного множества ***A*** называется число элементов этого множества. Обозначение: |***A***|.

Если $$A = \{a_1, a_2, \ \ldots, \ a_k\},$$

то $$|A| = k.$$

Для пустого множества $|\varnothing| = 0.$

Теорема (***о мощности булеана конечного множества***).

Для конечного множества ***M***

$$\left|2^{M}\right| = 2^{|M|}.$$

<u>Пример</u>.

Рассмотрим множество М из предыдущего примера:

$$M = \{a, b, c\}.$$

Мощность его булеана равна

$$\left|2^{M}\right| = 2^{3} = 8.$$

Обобщение на случай бесконечных множеств

Для бесконечного множества ***A*** используется обозначение: |***A***| = ∞.

Если ***A*** ~ ***B***, то множества ***A*** и ***B*** ***равномощны*** (имеют одинаковую мощность).

Обозначение: |***A***| = |***B***|.

Множество ***A*** ***имеет мощность, большую*** чем множество ***B***, если существует подмножество множества ***A***, изоморфное ***B***, но не существует подмножества ***B***, изоморфного ***A***.

Счетные множества

Множество называется ***счетным***, если оно изоморфно (равномощно) множеству натуральных чисел ***N***.

Счетное множество характеризуется свойством:

его элементы можно перенумеровать с помощью натуральных чисел.

Например: множество **2*N***.

Счетные множества являются «простейшими» (имеют наименьшую мощность) среди бесконечных множеств в следующем смысле.

Теорема.
Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Теорема.
Всякое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.

<u>Еще примеры</u> счетных множеств:

$\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, множество всех членов бесконечной последовательности.

Несчетные множества

Существование бесконечного множества, не являющегося счетным, обосновывает следующая теорема.

Теорема Кантора.
Множество всех действительных чисел, принадлежащих интервалу (0, 1) (отрезку [0, 1]) несчетно.

Следствие.
Множество всех действительных чисел, принадлежащих интервалу (a, b) (отрезку [a, b]) несчетно.

Пояснение: (a, b) ~ (0, 1).

Мощность отрезка [0, 1] называется ***континуумом***.

<u>Примеры</u> других множеств, имеющих мощность континуума:

- ***R***,
- множество всех точек прямой, плоскости, поверхности сферы, шара,
- множество всех прямых на плоскости…

Вопрос:

существует ли множество, мощность которого превышает мощность счетного множества, но меньше мощности континуума?

Континуум-гипотеза (Г. Кантор, 1878):

всякое бесконечное подмножество континуума $\boldsymbol{R}$ равномощно либо множеству натуральных чисел, либо $\boldsymbol{R}$.

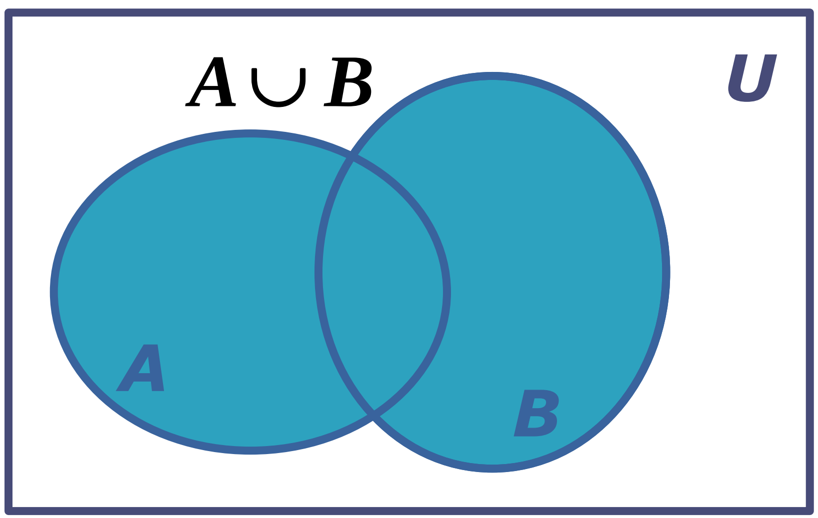
«Промежуточных» мощностей между счетным множеством и континуумом нет

1.2 Операции над множествами

Объединение множеств

Объединением множеств ***A*** и ***B*** называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества ***A*** или множества ***B***.

Формально: $A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$

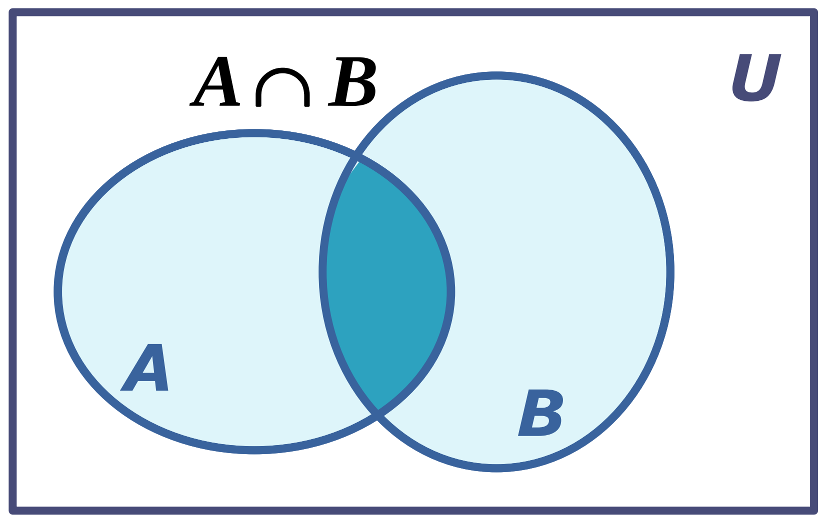


Пересечение множеств

Пересечением множеств ***A*** и ***B*** называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств ***A*** и ***B***.

Формально:

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}.$$



Очевидно, что

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B},$$

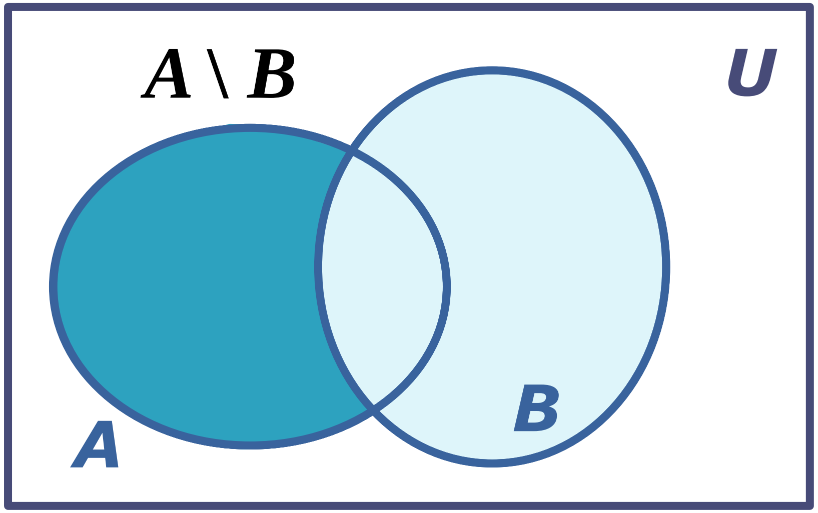
$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Разность множеств

Разностью множеств ***A*** и ***B*** называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех элементов множества ***A***, которые не принадлежат множеству ***B***.

Формально:

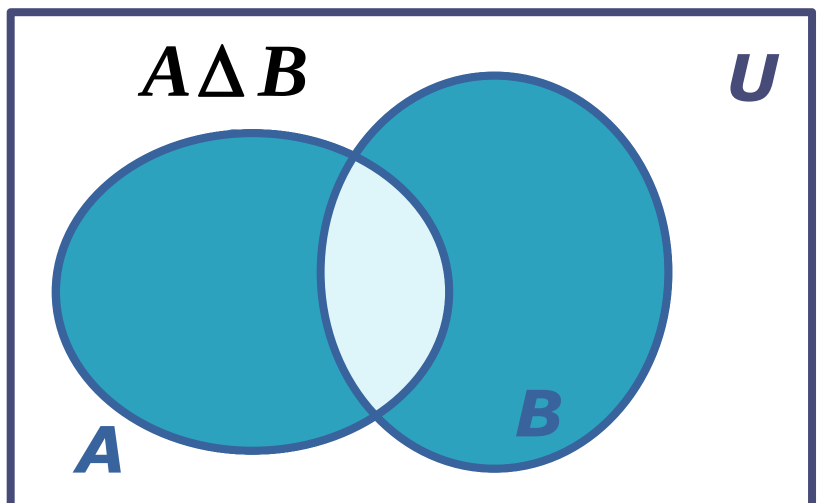
$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$



Симметрическая разность множеств

Симметрической разностью множеств ***A*** и ***B*** называется множество $A \Delta B$, определяемое так:

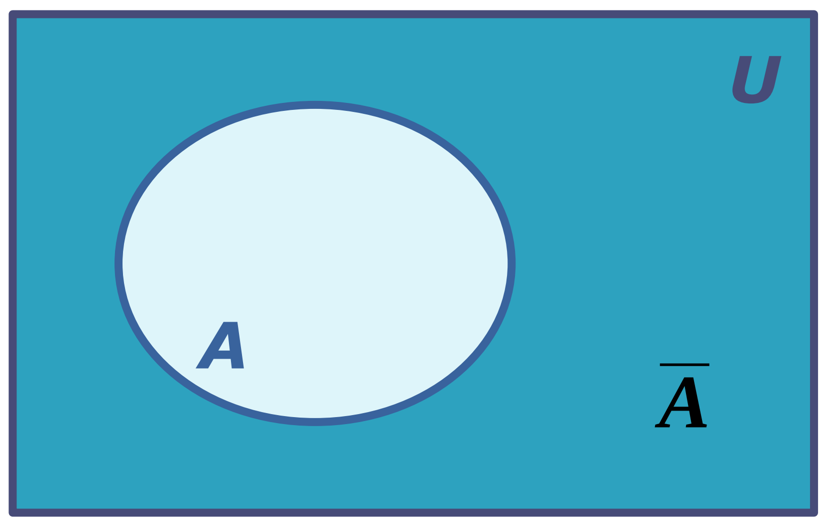
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$$
$$= \{x \mid (x \in A \ \& \ x \notin B) \vee (x \notin A \ \& \ x \in B)\}.$$



Дополнение множества

Дополнением множества ***A*** (до универсума ***U***) называется множество $\overline{A}$, состоящее из тех элементов ***U***, которые не принадлежат множеству ***A***.

Формально: $\overline{A} \overset{\text{def}}{=} U \setminus A.$



Пример.

Пусть $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6,\}$, $B = \{3, 4, 6, 7, 9\}$, $C = \{0, 5, 6, 7, 8\}$.

Найдем

1) $C \setminus (\overline{A} \cap B)$,

2) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$

$A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6,\}, \quad B = \{3, 4, 6, 7, 9\}, \quad C = \{0, 5, 6, 7, 8\}.$

$$\overline{A} = U \setminus A = \{4, 7, 8, 9\};$$

$$\overline{A} \cap B = \{4, 7, 9\};$$

$$C \setminus \left(\overline{A} \cap B\right) = \{0, 5, 6, 8\}.$$

2) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$

$A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6,\}, \quad B = \{3, 4, 6, 7, 9\}, \quad C = \{0, 5, 6, 7, 8\}.$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\};$$

$$A \cap B = \{3, 6\};$$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 9\}.$$

Свойства операций над множествами

Пусть задан универсум $\boldsymbol{U}$.

Тогда для любых множеств $A, B, C \subset U$ имеют место следующие свойства.

1. ***Идемпотентность***:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

2. ***Коммутативность***:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

3. ***Ассоциативность***:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

4. **Дистрибутивность**:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

5. **Поглощение**:

$$(A \cap B) \cup A = A, \quad (A \cup B) \cap A = A.$$

6. **Свойства нуля**:

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

7. **Свойства единицы**:

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

8. **Инволютивность**:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

9. **Законы де Моргана**:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

10. **Свойства дополнения**:

$$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

11. **Выражение для разности**:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

В справедливости перечисленных свойств можно убедиться, проведя формальное рассуждение, представленное на следующем слайде.

- Взять произвольный элемент, принадлежащий левой части равенства, и, используя определения операций, убедиться, что этот элемент принадлежит также и правой части;

вывод: левая часть является подмножеством правой части

- взять произвольный элемент, принадлежащий правой части равенства, и убедиться, что этот элемент принадлежит левой части;

вывод: правая часть является подмножеством левой части

- объединить результаты, полученные в предыдущих пунктах.

Вывод о равенстве левой и правой частей (являются подмножествами друг друга)

Приоритет операций пересечения и объединения

Соглашение:

если в одном и том же выражении встречаются операции объединения и пересечения, то в первую очередь выполняется операция пересечения, а потом – объединения.

Скобки используют только в тех случаях, когда порядок действий нужно изменить.

Пример:

$$\boldsymbol{A \cap B \cup A \cap C} = (\boldsymbol{A \cap B}) \cup (\boldsymbol{A \cap C}).$$

Алгебра подмножеств множества *U*

Пересечение, объединение и разность подмножеств множества ***U*** (универсума) также являются подмножествами ***U***.

Множество всех подмножеств (булеан) ***U*** с операциями пересечения, объединения, разности и дополнения образует ***алгебру подмножеств*** множества ***U***.

Теоретико-множественные преобразования

Это выполнение тождественных преобразований выражений, содержащих операции над множествами.

В ходе преобразований применяются свойства операций над множествами 1 – 11.

Цель преобразований:

- упрощение выражения;
- приведение выражения к требуемому виду.

Пример.

Упростить выражение для множества **P**:

$$P = A \cap B \cup A \cap \overline{B} \cup B \cap D \cup C \cap D.$$

Найти выражение для **P** в случае $C \subset D, \quad B = \varnothing.$

Порядок действий с учетом приоритета операций можно отметить скобками:

$$P = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D).$$

Преобразуем:

Свойство 4 Свойство 10 Свойство 7

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap U = A,$$

$$(B \cap D) \cup (C \cap D) = (D \cap B) \cup (D \cap C) = D \cap (B \cup C).$$

Свойство 2 Свойство 4

Получено:

$$P = \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})}_{A} \cup \underbrace{(B \cap D) \cup (C \cap D)}_{D \cap (B \cup C)},$$

Поэтому

$$P = A \cup D \cap (B \cup C).$$

В случае $C \subset D, \quad B = \varnothing$

$$(B \cup C) = C, \quad D \cap (B \cup C) = D \cap C = C.$$

Тогда

$$P = A \cup C.$$

Разбиение множества

Пусть ***M*** – произвольное множество.

Семейство непустых множеств $\{X_i\}_{i\in I}$,
где ***I*** – некоторое множество индексов (конечное или бесконечное), называется ***разбиением M***, если

1) $X_i \cap X_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I, \quad i \neq j;$

2) $M = \bigcup_{i\in I} X_i$.

Примеры.

- $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$

  $X_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad X_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$

  $X_1 \cap X_2 = \varnothing, \quad M = X_1 \cup X_2 .$

  X*$_1$** и ***X*$_2$** образуют разбиение множества ***M.

- ***M* = *Z*,** $X_0 = \{x \mid x = 5k,\ k \in Z\},$

  $X_1 = \{x \mid x = 5k + 1,\ k \in Z\},$

  $X_2 = \{x \mid x = 5k + 2,\ k \in Z\},$

  $X_3 = \{x \mid x = 5k + 3,\ k \in Z\},$

  $X_4 = \{x \mid x = 5k + 4,\ k \in Z\}.$

1.3 Представление множеств в компьютерных программах

Термин «определение представления объекта» применительно к программированию означает следующее:

описание в терминах системы программирования

- структуры данных, используемой для хранения информации о представляемом объекте;
- алгоритмов над выбранными структурами данных, которые реализуют присущие данному объекту операции.

Как правило:

один и тот же объект может быть представлен многими разными способами, причём нельзя указать способ, который является наилучшим для всех возможных случаев.

Отличительная особенность хорошего программиста – знание множества способов представлений объектов и умение выбирать способ, наиболее походящий для решения данной задачи.

Применительно к множествам определение представления – это описание

- способа хранения информации о принадлежности элементов множеству;
- алгоритмов для вычисления объединения, пересечения и других операций над множествами.

Битовые шкалы

Пусть задан конечный универсум ***U***, и число элементов в нем не превосходит разрядности компьютера, $|U| < n$.

Элементы универсума пронумерованы:

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Подмножество ***A*** универсума ***U*** представляется кодом (машинным словом или битовой шкалой) ***C***, в котором

$$C[i] = \begin{cases} 1, & \text{если } u_i \in A, \\ 0, & \text{если } u_i \notin A, \end{cases}$$

где ***C***[***i***] – ***i***-й разряд кода ***C***.

Пример.

Пусть

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad A = \{2, 3, 4, 6\}.$$

Битовая шкала, представляющая множество ***A***:

$$\boldsymbol{C_A} = (0, 1, 0, 1, 1, 1, 0).$$

Реализация операций над множествами в битовых шкалах.

- Код пересечения множеств ***A*** и ***B*** есть поразрядное логическое произведение кода множества ***A*** и кода множества ***B***.
- Код объединения множеств ***A*** и ***B*** есть поразрядная логическая сумма кода множества ***A*** и кода множества ***B***.
- Код дополнения множества ***A*** есть инверсия кода множества ***A***.

В современных компьютерах имеются соответствующие машинные команды → эти операции выполняются весьма эффективно

Пример.

Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$.

В этом случае

C_A = (0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), C_B = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1).

Тогда

$$C_{A\cup B} = (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1),$$
$$C_{A\cap B} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$C_{\overline{A}} = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Замечание.

Если мощность универсума превосходит размер машинного слова (но не очень велика), то для представления множеств используются массивы битовых шкал.

В этом случае операции над множествами реализуются с помощью циклов по элементам массива.

Алгоритм построения бинарного кода Грея

Во многих переборных алгоритмах требуется последовательно рассмотреть все подмножества заданного множества и найти среди них то, которое удовлетворяет заданному условию.

Работа алгоритма может быть значительно ускорена, если организовать его так, чтобы на каждом следующем шаге можно было использовать результаты, полученные на предыдущем шаге.

Пример такой организации:

генерировать подмножества таким образом, чтобы каждое следующее подмножество получалось из предыдущего добавлением или удалением ровно одного элемента.

Это достигается применением алгоритма построения бинарного кода Грея.

Описание алгоритма.

Вход: ***n*** ≥ 0 – мощность заданного множества;

выход: последовательность кодов всех подмножеств заданного множества.

B – текущий элемент последовательности (битовый код длины ***n***); последовательность содержит $\mathbf{2}^{n}$ кодов.

B[***i***] – ***i***-й разряд текущего кода.

1. Инициализация:

   для $\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{n}$

   $\boldsymbol{B}[\boldsymbol{i}] = 0$

Формирование кода пустого множества

2. Вывод $\boldsymbol{B}$.

3. Для $\boldsymbol{k} = 1, 2, \ldots, 2^{\boldsymbol{n}} - 1$

   3.1 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{k})$

   Определение элемента, подлежащего добавлению либо удалению (вызов функции *Q*)

   3.2 $\boldsymbol{B}[\boldsymbol{p}] = 1 - \boldsymbol{B}[\boldsymbol{p}]$

   Добавление или удаление элемента (путем изменения соответствующего разряда битового кода)

   3.3 Вывод $\boldsymbol{B}$.

Описание функции Q.

Вход: ***k*** – номер подмножества;

выход: номер изменяемого разряда битового кода (количество нулей на конце двоичной записи числа ***k***, увеличенное на 1).

1. ***q*** = 1; ***j*** = ***k***
2. Пока ***j*** четно, выполнять
   j = ***j***/2; ***q*** = ***q***+1
3. Возврат ***q***

Пример.

Протокол работы алгоритма для $\boldsymbol{n} = 3$.

1. $\boldsymbol{B} = (0, 0, 0)$.
2. Вывод $\boldsymbol{B}$.
3. $\boldsymbol{k} = 1$

   $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{Q}(1) = 1$;

   $\boldsymbol{B}[1] = 1 - \boldsymbol{B}[1] = 1 - 0 = 1$;

   вывод $\boldsymbol{B} = (0, 0, 1)$;

   $\boldsymbol{k} = 2$

   $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{Q}(2) = 2$;

   $\boldsymbol{B}[2] = 1 - \boldsymbol{B}[2] = 1 - 0 = 1$;

   вывод $\boldsymbol{B} = (0, 1, 1)$;

…………

Результаты:

k	*p*	*B*
		(0, 0, 0)
1	1	(0, 0, 1)
2	2	(0, 1, 1)
3	1	(0, 1, 0)
4	3	(1, 1, 0)
5	1	(1, 1, 1)
6	2	(1, 0, 1)
7	1	(1, 0, 0)

Другие представления множеств

Если универсум очень велик или бесконечен, а рассматриваемые подмножества универсума не очень велики, то представление с помощью битовых шкал не является эффективным с точки зрения экономии памяти.

В этом случае множества представляются с помощью других структур:

- массивов,
- упорядоченных списков,
- коллекций (C#),
- ***set*** (Pascal) …