7. Обработка и анализ результатов моделирования систем на ЭВМ

Успех имитационного эксперимента с моделью системы существенным образом зависит от правильного решения вопросов обработки и последующего анализа и интерпретации результатов моделирования.

При выборе методов обработки следует учитывать особенности машинного эксперимента с моделью системы.

Особенности машинного эксперимента с моделью системы

1. Возможность получения на ЭВМ больших выборок

   позволяет количественно оценить характеристики процесса функционирования системы,

 но

   создает проблему хранения промежуточных результатов.

      Способ решения проблемы: использование рекуррентных алгоритмов обработки.

      При этом большой объем выборки дает возможность использовать асимптотические формулы.

2. Сложность исследуемой системы часто приводит к невозможности априорного суждения о характеристиках процесса функционирования системы (например, о виде законов распределения выходных переменных).

Поэтому при моделировании систем широко используются оценки моментов распределения и непараметрические оценки.

3. Блочность конструкции машинной модели и раздельное исследование блоков связаны с программной имитацией входных переменных для одной частичной модели по оценкам выходных переменных, полученных на другой частичной модели.

Следует представить эти переменные в форме, удобной для построения алгоритма их имитации.

Статистические методы обработки результатов моделирования

Если при моделировании системы учитываются случайные факторы, то в качестве оценок искомых величин используются

- средние значения,
- дисперсии,
- др. вероятностные оценки

СВ, полученных по результатам многократного моделирования.

Оценки формируются таким образом, что в памяти ЭВМ для хранения самой оценки используется только одна ячейка (иногда две-три ячейки).

Примеры.

1. Пусть искомая величина – вероятность некоторого события.

Оценка искомой вероятности – относительная частота наступления соответствующего события ***A*** при некотором количестве испытаний.

Выделим ячейку памяти, в которую будем записывать количество наступлений события ***A***.

Если в результате ***N*** реализаций процесса получено ***m*** случаев наступления события ***A***, то оценка вероятности ***p***(***A***) события ***A*** – величина

$$p^*(A) = \frac{m}{N}.$$

2. Пусть требуется получить оценки вероятностей возможных значений СВ (оценку закона распределения).

Разобьем область возможных значений СВ на ***n*** интервалов.

Выделим ***n*** ячеек памяти, в которых будем записывать количества $\boldsymbol{m_k}$, $\boldsymbol{k} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{n}$, попаданий СВ в ***k***-й интервал.

По результатам ***N*** реализаций оценкой вероятности попадания СВ в ***k***-й интервал является величина

$$p_k^* = \frac{m_k}{N}.$$

3. Пусть искомая величина – среднее значение СВ ξ.

Выделим ячейку памяти, в которой будем накапливать сумму

$$\sum x_k$$

значений СВ, которые она примет в различных реализациях процесса.

По результатам ***N*** реализаций оценкой среднего значения СВ является величина

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k .$$

В курсе матем. статистики показано, что эта оценка является несмещенной и состоятельной

4. Пусть искомая величина – дисперсия СВ ξ.

Несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии может служить величина

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - \overline{x}\right)^2 .$$

Использование этой формулы неудобно, т. к. $\overline{x}$ изменяется в процессе накопления значений x_k

требует хранения всех значений x_k.

Формула для вычисления s^2 может быть легко преобразована к виду

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \frac{1}{N(N-1)}\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2$$

$$\Downarrow$$

для определения s^2 достаточно накапливать значения

$$\sum x_k \quad \text{и} \quad \sum x_k^2$$

(две ячейки памяти).

5. Пусть искомая величина – корреляционный момент $K_{\xi\eta}$ СВ ξ и η.

Оценка корреляционного момента – величина

$$\tilde{K} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}).$$

Ее можно преобразовать к виду

$$\tilde{K} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k - \frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}x_k \sum_{k=1}^{N}y_k .$$

Достаточно накапливать значения $\sum x_k$, $\sum y_k$ и $\sum x_k y_k$.

Задачи обработки результатов моделирования

Основные задачи при обработке результатов машинного эксперимента:

- определение эмпирического закона распределения СВ,
- проверка однородности распределений,
- сравнение средних значений и дисперсий величин, полученных в результате моделирования, и др.

С точки зрения математической статистики это типовые задачи проверки статистических гипотез

- *Задача определения эмпирического закона распределения СВ* –
  наиболее общая из перечисленных.

  Для решения требует большого числа реализаций $\boldsymbol{N}$.

  По результатам машинного эксперимента находят значения эмпирической функции распределения $\boldsymbol{F^*}(\boldsymbol{y})$ (или плотности $\boldsymbol{f^*}(\boldsymbol{y})$) и выдвигают гипотезу $\mathbf{H_0}$: полученное эмпирическое распределение согласуется с каким-либо теоретическим распределением.

Проверка нулевой гипотезы – с помощью статистических критериев согласия

- Колмогорова,
- Пирсона,
- Смирнова.

При этом необходимая статистическая обработка результатов проводится, по возможности, в процессе моделирования системы на ЭВМ.

- *Задача проверки однородности распределений*.

  При оценке адекватности машинной модели реальной системе *S* возникает необходимость проверки гипотезы, состоящей в том, что две выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности (однородность выборок).

  Если гипотеза об однородности справедлива, то рассматриваемые СВ имеют одинаковые (но неизвестные) функции распределения.

Нулевая гипотеза $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{F_1(x) = F_2(x)}$.

В качестве конкурирующей может рассматриваться одна из следующих гипотез:

$$\boldsymbol{F_1(x) \neq F_2(x)},$$

$$\boldsymbol{F_1(x) < F_2(x)},$$

$$\boldsymbol{F_1(x) > F_2(x)}.$$

Проверка нулевой гипотезы – например, с помощью критерия Вилкоксона (в случае непрерывных СВ).

- *Задача сравнения средних значений и дисперсий величин, полученных в результате моделирования*.

  Сводится к проверке нулевой гипотезы о равенстве средних или о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей.

  В случае нормального распределения – проверка нулевой гипотезы с помощью

  - критерия Фишера (равенство двух дисперсий),
  - критерия Стьюдента (равенство двух средних).

Анализ и интерпретация результатов машинного моделирования

Статистическая обработка результатов моделирования позволяет провести анализ связей между характеристиками исследуемой системы.

Для решения этой задачи – методы

- корреляционного,
- регрессионного,
- дисперсионного

анализа.

Выбор метода зависит от целей исследования и вида получаемых в результате моделирования характеристик

Корреляционный анализ результатов моделирования

Позволяет установить, насколько тесна связь между двумя (или более) СВ, наблюдаемыми и фиксируемыми при моделировании системы *S*.

Если изменение одной СВ приводит к изменению распределения другой СВ, то между этими величинами существует *статистическая зависимость*.

В частности, если при изменении одной СВ изменяется среднее значение другой СВ, то между этими СВ существует *корреляционная зависимость*.

Степень тесноты <u>линейной</u> зависимости между СВ можно выразить с помощью коэффициента корреляции

$$r_{\xi\eta} = \frac{M\left[\left(\xi - M(\xi)\right)\left(\eta - M(\eta)\right)\right]}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

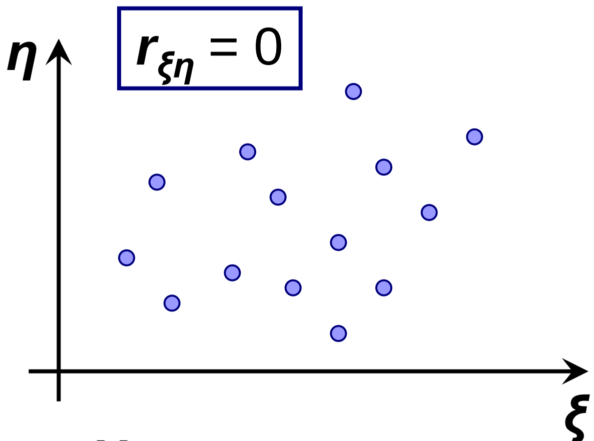
Для любых СВ $|r_{\xi\eta}| \le 1$

При $r_{\xi\eta} = 0$ СВ ξ и η *некоррелированы*,
при $r_{\xi\eta} \neq 0$ СВ ξ и η *коррелированы*.

В случае нормально распределенных СВ некоррелированность равносильна независимости СВ.

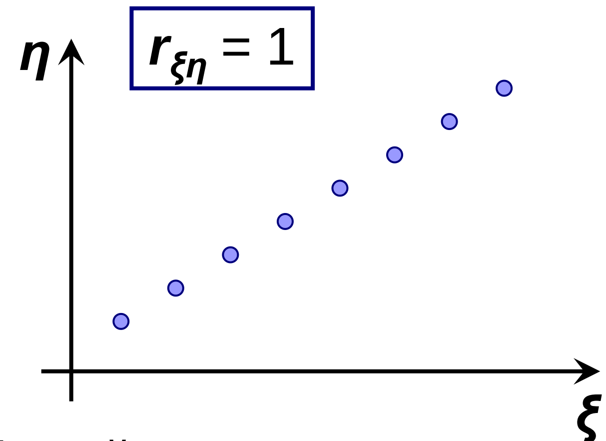
Различные случаи корреляции нормально распределенных СВ.

1.



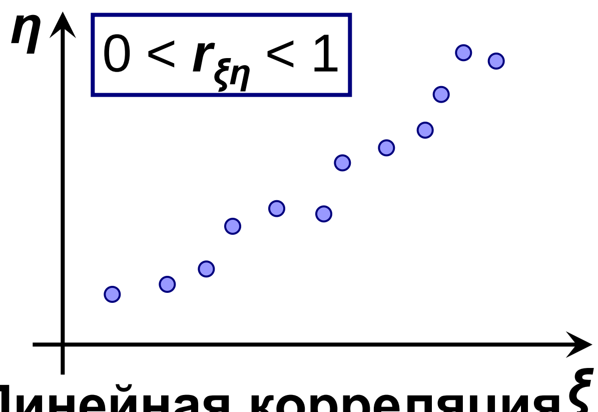
Независимость

2.



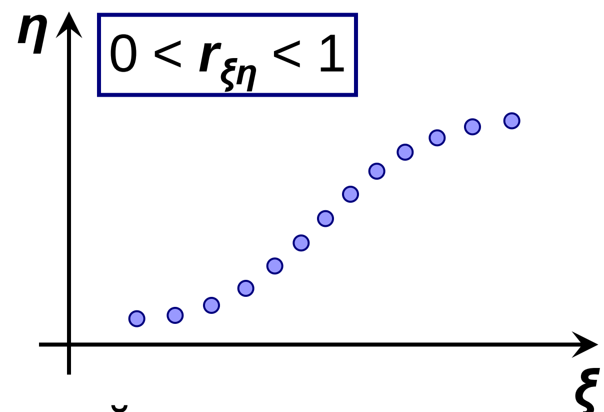
Линейная зависимость

3.



Линейная корреляция с рассеянием

4.



Нелинейная корреляция

По результатам машинного эксперимента можно получить оценку коэффициента корреляции (выборочный коэффициент корреляции)

$$\tilde{r}_{\xi\eta} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - \bar{x}\right)\left(y_k - \bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - \bar{x}\right)^2 \sum_{k=1}^{N}\left(y_k - \bar{y}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - N\,\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - N\left(\bar{x}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N} y_k^2 - N\left(\bar{y}\right)^2\right)}}.$$

Если выборочный коэффициент корреляции отличен от нуля, то еще нельзя заключить, что $r_{\xi\eta} \neq 0$.

Требуется проверить статистическую гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции.

Нулевая гипотеза $\mathbf{H_0}$: $r_{\xi\eta} = 0$,
конкурирующая гипотеза $\mathbf{H_1}$: $r_{\xi\eta} \neq 0$.

Если нулевая гипотеза отвергается, то это значит, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а исследуемые СВ коррелированы.

Если нулевая гипотеза принимается, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а исследуемые СВ некоррелированы.

Важно:
возможна ситуация, когда СВ ξ и η статистически зависимы, хотя для системы S отсутствует их причинно-следственная взаимообусловленность.

При статистическом моделировании это может иметь место, например, из-за коррелированности последовательностей псевдослучайных чисел, используемых для имитации рассматриваемых событий.

Регрессионный анализ результатов моделирования

Позволяет построить математическую модель, наилучшим образом соответствующую набору данных, полученных в ходе машинного эксперимента.

Под наилучшим соответствием понимается минимизированная функция ошибки, характеризующая различие между прогнозируемой моделью и данными эксперимента.

Такой функцией в регрессионном анализе является сумма квадратов отклонений экспериментальных значений от прогнозируемых.

Метод наименьших квадратов

Пусть исследуется зависимость некоторой величины ***y*** от величины ***x***.

Зависимость ***y*** от ***x*** предполагается описывать с помощью модели

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}).$$

Вид функциональной зависимости (линейная, квадратичная, экспоненциальная и т. д.) может быть выбран исходя из

- априорных сведений об исследуемой системе;
- характера расположения экспериментальных точек на плоскости.

По результатам машинного эксперимента требуется установить *параметры* этой зависимости.

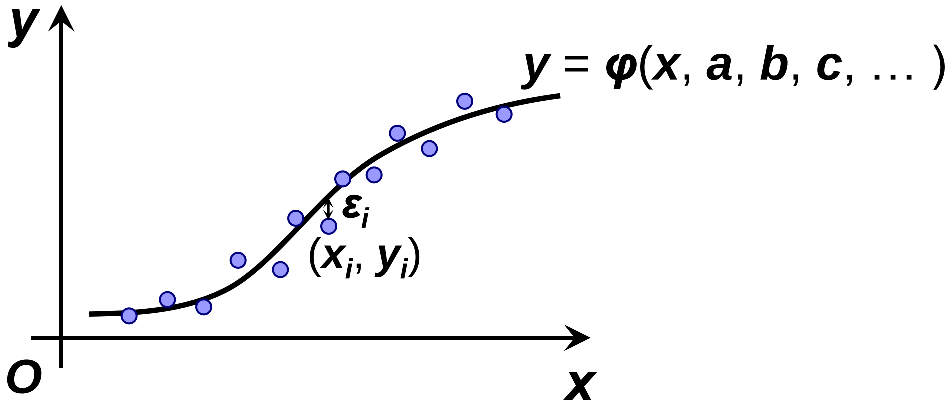
Пусть в результате машинного эксперимента получены точки $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$, $\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{N}$.

Обозначим числовые параметры функции $\boldsymbol{\varphi}$ через $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$

Метод наименьших квадратов:

параметры $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ следует выбрать так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \varphi\left(x_i, a, b, c, \ \ldots\right)\right)^2 \rightarrow \min .$$



$\boldsymbol{\varepsilon_i}$ – ошибка $\boldsymbol{i}$-й экспериментальной точки

Для отыскания искомых значений ***a***, ***b***, ***c***, … – приравнять к нулю частные производные минимизируемой функции по аргументам ***a***, ***b***, ***c***, … :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N}\left[y_i-\varphi\left(x_i,a,b,c,\ \ldots\right)\right]\cdot\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\right)\Bigg|_{(x_i,\,y_i)} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\left[y_i-\varphi\left(x_i,a,b,c,\ \ldots\right)\right]\cdot\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}\right)\Bigg|_{(x_i,\,y_i)} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\left[y_i-\varphi\left(x_i,a,b,c,\ \ldots\right)\right]\cdot\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial c}\right)\Bigg|_{(x_i,\,y_i)} = 0, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (*)$$

Примеры.

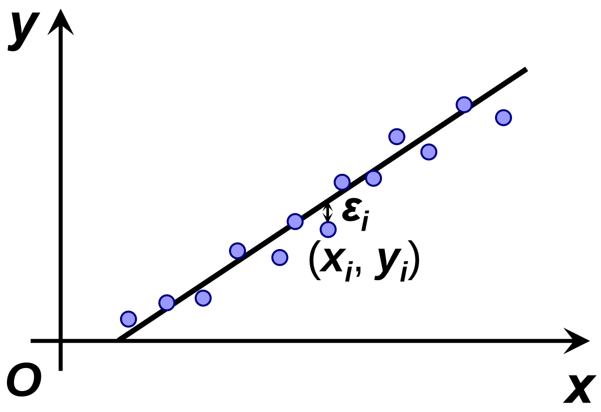
1. Построение линейной регрессионной модели.

Прогнозируемая модель

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} \quad \left(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} \right).$$

Тогда $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{y}_i - (\boldsymbol{ax}_i + \boldsymbol{b})$ и система (*) имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b) \right] \cdot x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b) \right] \cdot 1 = 0, \end{cases}$$



или

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{N} x_i + b\cdot N = \sum_{i=1}^{N} y_i. \end{cases}$$

Искомые значения:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}.$$

Требуют минимального объема памяти ЭВМ для обработки результатов моделирования

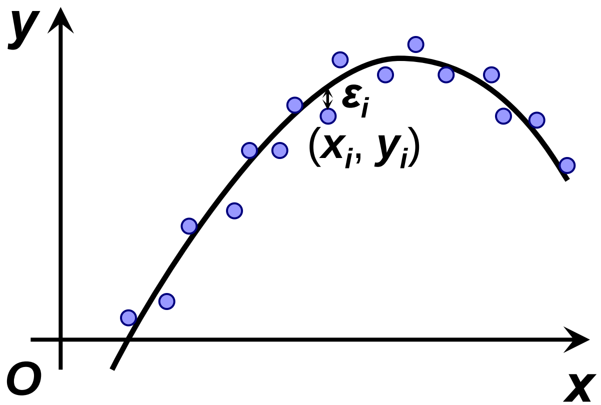
2. Построение квадратичной регрессионной модели.

Прогнозируемая модель

$$y = ax^2 + bx + c \quad \left(\varphi(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c \right).$$

Тогда $\varepsilon_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)$ и система (*) имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c \right) \right] \cdot x_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c \right) \right] \cdot x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \left[y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c \right) \right] \cdot 1 = 0, \end{cases}$$



или

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 y_i \ , \\ a\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{N} x_i = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i\, y_i \ , \\ a\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{N} x_i + c\cdot N = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i \ . \end{cases}$$

Искомые значения – решение полученной системы.

В обоих случаях коэффициенты при неизвестных в полученных системах уравнений – статистические моменты системы СВ ***X*** и ***Y***, умноженные на ***N***.

Дисперсионный анализ результатов моделирования

При обработке и анализе результатов моделирования часто возникает задача сравнения средних выборок: требуется установить, значимо или незначимо различаются выборочные средние.

Попарное сравнение средних с помощью критерия Стьюдента при большом числе выборок неэффективно

используется метод, основанный на сравнении дисперсий – ***дисперсионный анализ***.

Дисперсионный анализ применяется в следующих случаях.

- Требуется установить, оказывает ли существенное влияние некоторый *качественный* фактор ***F***, который имеет ***p*** уровней $F_1, F_2, \ldots, F_p$ на изучаемую величину ***Y***.

Однофакторный анализ

- Требуется проверить однородность нескольких совокупностей.

  Дисперсии этих совокупностей одинаковы по предположению; если анализ покажет, что и средние одинаковы, то в этом смысле совокупности однородны.

  Тогда их можно объединить в одну и получить более надежные выводы.

В более сложных случаях – исследование воздействий нескольких факторов на нескольких постоянных или случайных уровнях и выяснение влияния отдельных уровней и их комбинаций.

Многофакторный анализ

Основная идея дисперсионного анализа – сравнение «факторной дисперсии», порождаемой воздействием фактора, и «остаточной дисперсии», обусловленной случайными причинами.

Пусть генеральные совокупности Y_1, Y_2, … Y_N имеют нормальное распределение и одинаковую дисперсию.

Имеются результаты машинного моделирования:

Номер испытания	**Уровни фактора**			
	F_1	F_2	…	F_p
1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1p}
2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2p}
…	…	…	…	…
N	y_{N1}	y_{N2}	…	y_{Np}
Групповая средняя	$\bar{y}_{гр1}$	$\bar{y}_{гр2}$	…	$\bar{y}_{грp}$

По определению,

Общая сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 ,$$

Факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней

$$S_{факт} = N \sum_{j=1}^{p} \left(\bar{y}_{гр\, j} - \bar{y}\right)^2 ,$$

Остаточная сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от своей групповой средней

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт} .$$

Формулы, преобразованные для эффективных расчетов:

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} y_{ij}^{2} - \frac{1}{pN}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} y_{ij}\right)^{2},$$

Отражает влияние и фактора, и случайных причин

$$S_{факт} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{N} y_{ij}\right)^{2} - \frac{1}{pN}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} y_{ij}\right)^{2},$$

Характеризует воздействие фактора

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт}.$$

Отражает влияние случайных причин

Общая дисперсия:

$$s^2_{общ} = \frac{S_{общ}}{pN-1},$$

факторная дисперсия:

$$s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{p-1},$$

остаточная дисперсия:

$$s^2_{ост} = \frac{S_{ост}}{p(N-1)}.$$

Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа.

Для проверки нулевой гипотезы о равенстве групповых средних достаточно проверить гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий с помощью критерия Фишера.

В качестве критерия рассматривается СВ

$$F = \frac{s^2_{факт}}{s^2_{ост}}.$$

Обработка результатов машинного эксперимента при синтезе систем

Синтез системы *S* на базе машинной модели – задача поиска оптимального варианта системы при выбранном критерии оценки эффективности и заданных ограничениях.

Решение: анализ характеристик процесса функционирования различных вариантов системы, их сравнительная оценка и выбор наилучшего варианта.

Элементарная операция – сравнение статистически усредненных критериев оценки эффективности вариантов систем.

Особенности машинного синтеза

Конкурирующие варианты системы S отличаются друг от друга

- структурой,
- алгоритмами поведения,
- параметрами

число таких вариантов велико.

Важно минимизировать затраты ресурсов на получение характеристик каждого варианта системы.

При синтезе системы обработку и анализ результатов моделирования каждого варианта системы следует рассматривать не автономно, а во взаимосвязи.

Методами матем. статистики можно показать:

при положительно коррелированных критериях $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ выигрыш в точности оценки средних значений, вероятностей и дисперсий можно получить за счет искусственной организации статистической зависимости между выходными характеристиками сравниваемых вариантов $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ системы.

Пусть случайные векторы

$$\vec{v}^{(1)} = \left(v_1, v_2, \ \dots, v_k, v_{k+1}^{(1)}, \ \dots, v_n^{(1)}\right) \qquad \text{и}$$

$$\vec{v}^{(2)} = \left(v_1, v_2, \ \dots, v_k, v_{k+1}^{(2)}, \ \dots, v_m^{(2)}\right)$$

Общие составляющие

описывают воздействие внешней среды на варианты $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ синтезируемой системы,

составляющие

$$\left(v_{k+1}^{(1)}, \ \dots, v_n^{(1)}\right) \quad \text{и} \quad \left(v_{k+1}^{(2)}, \ \dots, v_m^{(2)}\right)$$

статистически независимы.

Обозначим

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

$$\mu_1(\vec{v}) = M(q_1|\vec{v}), \quad \mu_2(\vec{v}) = M(q_2|\vec{v}).$$

Условные средние q_1 и q_2

Достаточное условие неотрицательной корреляции ***q_1* и *q_2*** *– одинаковая упорядоченность условных средних* $\mu_1(\vec{v})$ и $\mu_2(\vec{v})$ относительно векторного аргумента $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$,

т. е. выполнение неравенства

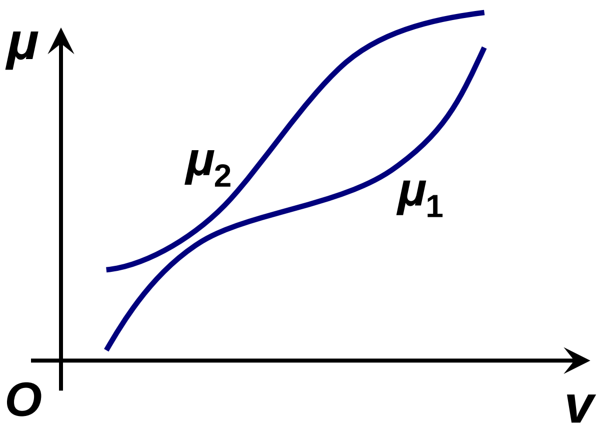
$$[\mu_1(\vec{v}_1) - \mu_1(\vec{v}_2)] \cdot [\mu_2(\vec{v}_1) - \mu_2(\vec{v}_2)] \geq 0$$

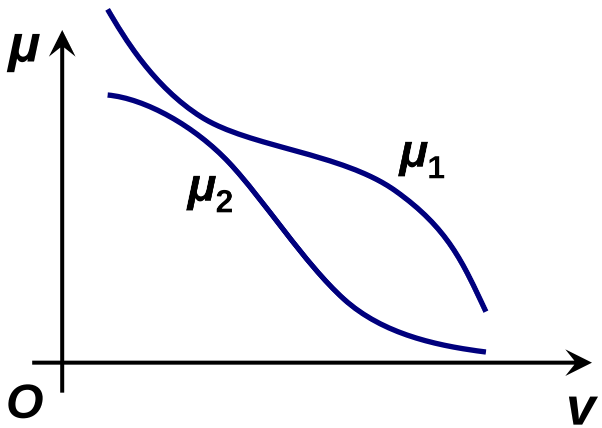
для любых значений $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ векторного аргумента $\vec{v}$.

Пример.

Для скалярного аргумента ***v*** одинаково упорядоченными являются

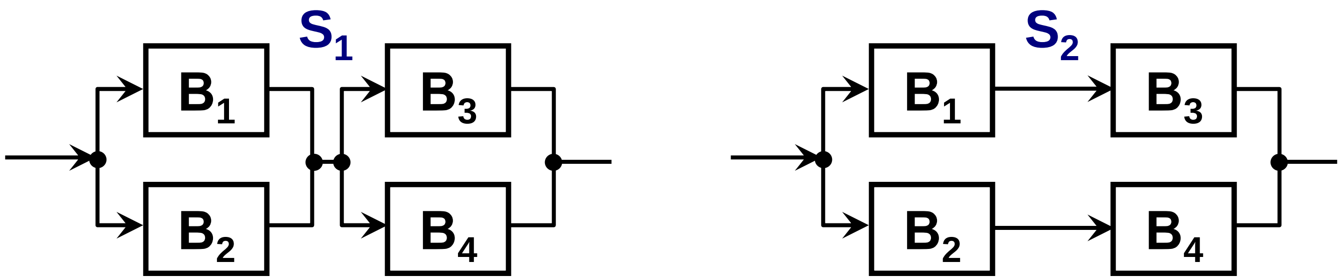
- монотонно возрастающие функции $\mu_1(\vec{v})$ и $\mu_2(\vec{v})$,
- монотонно убывающие функции $\mu_1(\vec{v})$ и $\mu_2(\vec{v})$,
- функции $\mu_1(\vec{v}) = \mu_2(\vec{v})$.





Пример.

Пусть методом статистического моделирования на ЭВМ необходимо сравнить результаты моделирования двух вариантов S_1 и S_2 системы, составленных из одинаковых блоков $B_1 – B_4$:



Сравнение – по критерию надежности с учетом случайных изменений внешней температуры.

Вероятность безотказной работы блока **B**$_i$ в течение заданного времени ***T*** при заданной температуре ***v*** определяется как

$$P\left(B_i \middle| v\right) = e^{-\frac{\lambda_i}{vT}}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

где $\boldsymbol{\lambda_i}(\boldsymbol{v})$ – интенсивности потоков отказов, которые являются возрастающими функциями температуры.

Обозначим:

события $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ – безотказная работа исследуемых вариантов системы в течение заданного времени ***T***.

Вероятности ***P***($\mathbf{A}_1$) и ***P***($\mathbf{A}_2$) – значения критерия эффективности вариантов системы.

По условию, функции ***P***($\boldsymbol{B_i|v}$) – одинаково упорядоченные убывающие функции.

Т. к.

$$P(A_1|v)=\left[1-\left(1-P(B_1|v)\right)\cdot\left(1-P(B_2|v)\right)\right]\times$$

$$\times\left[1-\left(1-P(B_3|v)\right)\cdot\left(1-P(B_4|v)\right)\right],$$

$$P(A_2|v)=1-\left(1-P(B_1|v)\cdot P(B_3|v)\right)\cdot\left(1-P(B_2|v)\cdot P(B_4|v)\right),$$

то $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{v})$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{v})$ – тоже одинаково упорядоченные функции, убывающие с ростом температуры $\boldsymbol{v}$.

Использование в машинном эксперименте с вариантами $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ системы одних и тех же реализаций случайной температуры $\boldsymbol{v}$ позволяет получить в результате моделирования бóльшую точность сравнения вероятностей $\boldsymbol{P}(\mathbf{A}_1)$ и $\boldsymbol{P}(\mathbf{A}_2)$, чем при раздельном моделировании с использованием независимых реализаций $\boldsymbol{v}$.

Замечание.

Условия одинаковой упорядоченности являются достаточными, но не необходимыми условиями неотрицательности корреляции.

Анализ чувствительности модели

Под *анализом чувствительности* машинной модели понимают проверку устойчивости результатов моделирования (характеристик функционирования системы, полученных при проведении имитационного эксперимента) по отношению к возможным отклонениям параметров машинной модели

$$\Delta\vec{h} = \left(\Delta h_1, \Delta h_2, \ \ldots, \Delta h_n\right)$$

от истинных их значений

$$\vec{h} = \left(h_1, h_2, \ \ldots, h_n\right).$$

Анализ чувствительности позволяет сравнивать методические погрешности, полученные при построении машинной модели, с неточностями задания исходных данных.

Особенно важно при практической реализации модели для целей синтеза системы.

В практических расчетах для оценки изменения характеристик $\vec{q}\left(\vec{h}\right)$ системы при малых отклонениях $\Delta\vec{h}$ используется величина

$$\Delta\vec{q} = \vec{q}'\left(\vec{h}\right)\Delta\vec{h} + \vec{r}_0 ,$$

где

$$\vec{q}'\left(\vec{h}\right) = \left(\frac{\partial q\left(\vec{h}\right)}{\partial h_1}, \frac{\partial q\left(\vec{h}\right)}{\partial h_2}, \ldots, \frac{\partial q\left(\vec{h}\right)}{\partial h_n}\right),$$

r_0 – остаточный член второго порядка.

Частные производные вычисляются в точках, соответствующих номинальным значениям параметров.

Если номинальные значения совпадают с оптимальными параметрами системы по показателю $\vec{q}(\vec{h})$, то

$$\vec{q}'(\vec{h}_{ном}) = 0,$$

и необходимо проводить оценку с использованием второй производной.

Большие отклонения характеристик $\vec{q}(\vec{h})$ при малых вариациях $\Delta\vec{h}$ свидетельствуют о неустойчивости модели.

Для получения оценок $\tilde{\vec{q}}(\vec{h})$ показателя $\vec{q}(\vec{h})$ удобно рассматривать зависимые реализации внешних воздействий при различных $\vec{h}$ и проводить соответствующую обработку результатов машинного эксперимента.

Итог:

результаты машинного эксперимента с моделью системы

- обрабатываются с учетом целей моделирования,
- находятся в тесной связи с вопросами, решаемыми при планировании экспериментов.