

Непрерывные законы распределения

Равномерное распределение

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2; 2]$. Найти плотность вероятностей и функцию распределения случайной величины X . Построить графики плотности вероятностей и функции распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X . Найти третий квартиль случайной величины X .

$$\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } x \in [-2; 2] \\ 0 & \text{при } x \notin [-2; 2] \end{cases}; F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2 \\ \frac{x+2}{4} & \text{при } -2 < x < 2 \\ 1 & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$$

$$M(X) = 0; D(X) = \frac{4}{3}; \sigma(X) = \frac{2\sqrt{3}}{3}; x_{0,75} = 1$$

2. Случайная величина X – время ожидания поезда на станции метро имеет равномерный закон распределения. Известно, что интервал движения поездов составляет 3,5 минуты. Найти вероятность того, что вышедший на перрон пассажир будет ожидать поезд: а) от 2 до 4 минут; б) от 4 до 5 минут.

$$\text{Ответ: а) } P(2 < X < 4) = \frac{3}{7}; \text{ б) } P(4 < X < 5) = 0$$

3. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения составляет 10 минут. Найти: а) среднее время ожидания автобуса на остановке; б) вероятность того, что подошедший к остановке пассажир будет ожидать очередной автобус менее 4 минут.

$$\text{Ответ: а) } M(X) = 5; \text{ б) } P(0 < X < 4) = 0,4$$

4. Найти закон распределения равномерно распределенной случайной величины X , если известно, что $M(X) = 15, D(X) = \frac{25}{3}$. Найти медиану случайной величины X .

$$\text{Ответ: } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 10 \\ \frac{x-10}{10} & \text{при } 10 < x < 20 \\ 1 & \text{при } x \geq 20 \end{cases}; x_{0,5} = 15$$

Показательное распределение

5. Случайная величина X , распределенная по показательному закону, задана плотностью вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$. Найти параметр λ показательного распределения. Найти функцию распределения случайной величины X . Построить графики плотности вероятностей и функции распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X . Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(1; 1,5)$. Определить 10%-ную квантиль случайной величины X .

$$\text{Ответ: } \lambda = 2; F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{при } x > 0 \end{cases}; M(X) = \frac{1}{2}; D(X) = \frac{1}{4}; \sigma(X) = \frac{1}{2};$$

$$P(1 < X < 1,5) \approx 0,09; x_{0,1} \approx 0,05$$

6. Случайная величина X , распределенная по показательному закону, задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - e^{-0,4x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$. Найти параметр λ показательного распределения. Найти плотность вероятностей случайной величины X . Построить графики плотности вероятностей и функции распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X . Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(2,5; 5)$. Определить квантиль порядка 0,99 случайной величины X .

$$\text{Ответ: } \lambda = 0,4; f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 0,4e^{-0,4x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}; M(X) = \frac{5}{2}; D(X) = \frac{25}{4}; \sigma(X) = \frac{5}{2};$$

$$P(2,5 < X < 5) \approx 0,23; x_{0,99} \approx 11,5$$

7. Длительность времени безотказной работы электронного устройства подчинена показательному закону распределения со средним проектным временем службы 10 лет. Найти вероятность того, что наудачу взятое устройство будет работать а) от 5 до 10 лет; б) менее 5 лет.

$$\text{Ответ: а) } P(5 < X < 10) \approx 0,24; \text{ б) } P(0 < X < 5) \approx 0,39$$

Нормальное распределение

8. Найти плотность вероятностей нормально распределенной случайной величины X , если известно, что: а) $m = 1, \sigma = 0,8$; б) $M(X) = 0, D(X) = 0,25$. Построить нормальные кривые (на одном рисунке).

$$\text{Ответ: а) } f(x) = \frac{1}{0,8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{1,28}}; \text{ б) } f(x) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{0,5}}$$

9. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью вероятностей $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{32}}$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

$$\text{Ответ: } M(X) = -1, D(X) = 16, \sigma(X) = 4$$

10. Текущая цена акции представляет собой нормально распределенную случайную величину X с математическим ожиданием (средней ценой) 100 у.е. и средним квадратическим отклонением 16 у.е. Найти вероятность того, что цена акции будет: а) находиться в пределах от 90 до 120 у.е.; б) меньше 95 у.е.; в) больше 110 у.е.

$$\text{Ответ: а) } \approx 0,6284; \text{ б) } \approx 0,3773; \text{ в) } \approx 0,266$$

11. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

$$\text{Ответ: } \approx 0,3829$$