### ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ - ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

# ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## **ОЕМА А**

- **Α1.** Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν
  - η f είναι συνεχής στο [α, β] και
  - $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_o \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_o) = \eta$ .

Μονάδες 7

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- **Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει f'(x) > 0».
  - α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)
  - β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(μονάδες 3) **Μονάδες 4** 

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη

λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α)  $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right) = +\infty$ , για κάθε  $V \in \mathbb{N}$ .

- β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η g  $\circ$  f ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .
- γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.
- δ) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

### ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ - ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_o, \mathbf{f}(\mathbf{x}_o))$  της  $\mathbf{C}_{\mathbf{f}}$ , του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $\mathbf{C}_{\mathbf{f}}$  είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

### **ОЕМА В**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$$
, με τύπο  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  και  $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , με τύπο  $g(x) = e^x$ .

**Β1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

Μονάδες 5

**B2.** Aν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ , με x > 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

**B3.** Aν  $\phi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ell n \left( \frac{x+2}{x-1} \right)$ , με x > 1, να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\phi$  ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν Φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β3, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+} \phi(x) \qquad \text{kai} \qquad \lim_{x\to +\infty} \phi(x) \ .$$

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ell n \lambda \;, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma u v x \;, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad , \; \mu \epsilon \; \lambda > 0 \; .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

Μονάδες 5

# **NEO**

### ΑΡΧΉ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΝΕΟ ΣΥΣΤΉΜΑ - ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0, 1), η οποία σχηματίζει με τον άξονα X'X γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$ .

Μονάδες 6

**Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

**Γ4.** Ένα σημείο  $M(\alpha, f(\alpha))$ , με  $\alpha \leq 0$ , κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο  $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}.$ 

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή  $t_{o}$ , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_o \in (0, 1)$ , στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $f(x_o) = x_o^2 - (e+2)x_o + e-1.$ 

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to x_o} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_o)} + \eta \mu \left( \frac{1}{x - x_o} \right) \right],$$

όπου  $X_0$  το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

**Δ3.** Αν  $X_o$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + x = x_o$  για  $x \in (x_o, 1)$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$ .

Μονάδες 5

**Δ4.** Αν  $X_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι  $f(x_0) > f(\rho)$  (f'(k) + 1) για κάθε  $k \in (\rho, 1)$ .

Μονάδες 7

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΝΕΟ <u>ΣΥΣΤΗΜΑ - ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ</u>

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- 1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
- 2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
- 4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

# ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ