



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πιθανοθεωρητική Επίλυση
Μερικών Διαφορικών
Εξισώσεων
και η Αναπαράστασή τους
μέσω Path Integrals

Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΣΤΟΥΡΑΣ

Κωνσταντίνος Στούρας

Πιθανοθεωρητική Επίλυση
Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
και η Αναπαράστασή τους
μέσω Path Integrals

Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Κωνσταντίνος Στούρας

Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Ε.Μ.Π.

E-mail: kstouras@gmail.com

Επιβλέπων

Β. Γ. Παπανικολάου

Καθηγητής

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και

Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, ΤΚ. 15780,

Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα

papanico@math.ntua.gr

Μέλη Επιτροπής

Θ. Ρασσιάς

Καθηγητής

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και

Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, ΤΚ. 15780,

Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα

trassias@math.ntua.gr

Ι. Σπηλιώτης

Αναπληρωτής Καθηγητής

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και

Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, ΤΚ. 15780,

Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα

jspil@math.ntua.gr

Σχεδίαση εξωφύλλου: Η εικόνα του εξωφύλλου απεικονίζει μια στοχαστική προσομοίωση της τρισδιάστατης κίνησης Brown που υλοποιήθηκε μέσω του πακέτου Wolfram Mathematica® 6.0 από τον συγγραφέα.

Το παρόν στοιχειοθετήθηκε σε περιβάλλον L^AT_EX επίσης από τον συγγραφέα.

©2010 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

All rights reserved. The author grants National Technical University of Athens the nonexclusive right to make this work available for noncommercial, educational purposes, provided that this copyright statement appears on the reproduced materials and notice is given that the copying is by permission of the author. To disseminate otherwise or to republish requires written permission from the author. The use of general descriptive names, registered names, trademarks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

*Αφιερώνεται στην οικογένειά μου:
Ιωάννη, Χρύσα, Αθηνά και Αναστασία,
που μου δίδαξαν πολλά με πολλούς τρόπους.*

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

D. Hilbert (1862-1943)

Περίληψη

Ο στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να περιγράψει μια έμμεση σύνδεση των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ), με τη θεωρία των Πιθανοτήτων και τη Στοχαστική Ανάλυση. Η σύνδεση αυτή ανακαλύφθηκε αρχικά από τον R. Feynman, αλλά επεκτάθηκε και αυστηροποιήθηκε με την έρευνα του M. Καč οδηγώντας στην περίφημη Feynman-Kač formula. Χρησιμοποιώντας πιθανοθεωρητικές μεθόδους θα δείξουμε ότι, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, οι λύσεις μιας συγκεκριμένης κλάσης ΜΔΕ (παραβολικού τύπου) επιδέχονται μια στοχαστική αναπαράσταση. Η θεωρία αυτή έχει σημαντικότερες εφαρμογές. Αρχικά, χρησιμοποιείται στην κλασική απόδειξη του Καč του γνωστού Νόμου του Arc-sine του P. Lévy τα οποία θεωρητικά αποτελέσματα ενισχύονται με αρκετούς αριθμητικούς υπολογισμούς. Στη συνέχεια, συνδυάζουμε πορίσματα της Feynman-Kač θεωρίας με τη θεωρία των Στοχαστικών Μοντέλων των Επιτοκίων με στόχο την τιμολόγηση ομολόγων σε συνθήκες μη κερδοσκοπίας. Ως εφαρμογή, μελετούμε με πιθανοθεωρητικές μεθόδους το μοντέλο του Vasiček και το μοντέλο των Ho-Lee καταλήγοντας σε αναλυτικούς τύπους της τιμής του ομολόγου. Στο παράρτημα παρατίθεται ένας αλγόριθμος τύπου Monte Carlo τιμολόγησης ομολόγων, δοθέντος ενός στοχαστικού μοντέλου των επιτοκίων.

Λέξεις και φράσεις κλειδιά: αναπαράσταση λύσεων με ολοκληρώματα διαδρομών, Feynman Kač formula, νόμος του Arc-sine, μοντέλο του Vasiček, μοντέλο των Ho-Lee.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Abstract

The purpose of this thesis is to describe a subtle connection of Partial Differential Equations (PDEs), with the theory of Probability and Stochastic Analysis. The latter link was originally discovered by R. Feynman, but was further extended and made rigorous by the research work of M. Kač resulting to the famous Feynman-Kač formula. Using probabilistic methods we will prove that, under suitable conditions, the solutions of a particular class of PDEs (of parabolic type) are subject to a stochastic representation. This theory has major applications. Firstly, we adopt it to re-derive the classical proof of Kač of the famous Lévy's Arc-sine Law; every theoretical result is tested by many numerical computations. Next, we combine the Feynman-Kač results with the theory of Stochastic Interest Rate Modeling resulting in the zero-coupon bond pricing formula under no arbitrage conditions. As an application, we study via probability methods the Vasiček and the Ho-Lee model, providing solutions in closed form. In the appendix, we provide a Monte Carlo algorithm of bond pricing, given a stochastic model of the interest rates.

Keywords and phrases: path integral representation; Feynman-Kač formula; Arc-sine law; interest rate modeling; Vasiček model; Ho-Lee model.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει στόχο να δώσει μια συνοπτική περιγραφή της σύνδεσης της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της ευρύτερης περιοχής των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ). Αποτελεί την ολοκλήρωση των προπτυχιακών μου σπουδών στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (ΣΕΜΦΕ) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θέλω να πιστεύω πως στις σελίδες που ακολουθούν παρέχεται μια καλή, πρώτη προσέγγιση στην επίλυση με Πιθανότητες ντετερμινιστικών ΜΔΕ, εκφράζοντας τις λύσεις αυτών (όποτε υπάρχουν) ως path integrals. Τα τελευταία θα μπορούσαν να αποδοθούν στα ελληνικά ως “ολοκληρώματα πάνω σε διαδρομές” και εισήχθησαν ευρετικά για πρώτη φορά από τον μεγάλο Φυσικό Richard Feynman κατά την επαναδιατύπωση της Κβαντομηχανικής στη διδακτορική του διατριβή στο Princeton το 1942.

Από τότε, διάφοροι μαθηματικοί και φυσικοί προσπάθησαν να θεμελιώσουν αυστηρά τα όσα ο Feynman διαισθητικά εννοούσε, αλλά χωρίς ένα γενικό αποτέλεσμα. Παρ’ όλα αυτά, το 1949 ο Μαθηματικός Mark Kač έδειξε με μια ευφυή απόδειξη, ότι η εξίσωση του Schrödinger της Κβαντομηχανικής μπορούσε να μετασχηματιστεί στη γνωστή Μερική Διαφορική Εξίσωση της θερμότητας για την οποία το μετασχηματισμένο “ολοκληρώμα” του Feynman αναγόταν στο ολοκλήρωμα Wiener, ένα γνήσιο ολοκλήρωμα με την Lebesgue έννοια της αριθμήσιμης αθροιστικότητας. Οι μετέπειτα καρποί της έρευνας των Robert Cameron, Tosio Kato και Edward Nelson εμφύσησαν το όνειρο σε κάθε φυσικό ότι πιθανότατα ολόκληρη η Φυσική θα μπορούσε να ξαναγραφτεί σε όρους “αθροισμάτων ιστοριών”. Αλλά και το γενικό όφελος για τα Μαθηματικά ήταν μεγάλο· για πολύ γενικές ΜΔΕ, των οποίων η ύπαρξη λύσης και μόνο θα ήταν ένα ιδιαίτερα απαιτητικό πρόβλημα, η Feynman-Kač formula μας παρέχει (κάτω από κάποιες “χαλαρές” προϋποθέσεις) τη μορφή της λύσης σε “κλειστό τύπο”. Έτσι, γίνεται ευκολότερη η μελέτη ασυμπτωτικών ιδιοτήτων ΜΔΕ όπως η ευστάθεια λύσης, η έκρηξη λύσης κ.ά.

Η επονομαζόμενη *Feynman-Kač formula* έγινε εξαιρετικά χρήσιμη για διάφορους λόγους, ταυτόχρονα για τα Μαθηματικά και τη Φυσική, αλλά δε λύνει από μόνη της το πρόβλημα απόδοσης νοήματος στο ολοκλήρωμα του Feynman. Η Feynman-Kač formula προτείνει, ωστόσο, μια πρώτη προσέγγιση στο εν λόγω ολοκλήρωμα. Επιπρόσθετα, ένα τέτοιο αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις εφαρμογές.

Μια σημαντική εφαρμογή αυτής της θεωρίας των path integrals αποτέλεσε μια νέα απόδειξη του Νόμου του Τόξου Ημιτόνου (Arcsin Law) του Paul Lévy από τον Kač. Ο νόμος αυτός έχει τεράστια πρακτική χρησιμότητα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να

κατανοηθούν φαινόμενα που μεταβάλλονται με μια τυχαία μορφή και που αντίκεινται ιδιαίτερα στη διαίσθησή μας.

Επιπρόσθετα, τα τελευταία είκοσι χρόνια υπήρξε μια πρωτοφανής αύξηση της ζήτησης εργαλείων και μεθόδων της λεγόμενης *Στοχαστικής Ανάλυσης* από τον αναπτυσσόμενο κλάδο των Μαθηματικών Χρηματοοικονομικών (Mathematical Finance, MF). Εκεί, στοχαστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση κινδύνων και την τιμολόγηση των διαφόρων χρηματοοικονομικών προϊόντων και των παραγώγων (options) αυτών.

Σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει σε άλλες περιοχές των παραγώγων, η *μοντελοποίηση των επιτοκίων* (interest-rate modeling) είναι ένας κλάδος του MF όπου ως τώρα δεν έχει προταθεί κάποιο γενικό μοντέλο ως “πρότυπο” σημείο αναφοράς¹. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν στην αγορά τέτοια πρότυπα μοντέλα για τις διάφορες υποκατηγορίες των παραγώγων των επιτοκίων. Ωστόσο, αυτά δε συμβαδίζουν, συνήθως, με τη θεωρία και δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν από κοινού για την τιμολόγηση άλλων παραγώγων με υποκείμενο τίτλο επιτόκια. Η (στοχαστική) αναπαράσταση των τιμών τέτοιων προϊόντων που δίνει η Feynman-Kač formula μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια εναλλακτική προσέγγιση στην τιμολόγηση με κυριότερο όπλο της τη δυνατότητα *στοχαστικής προσομοίωσης*. Στην πράξη, μια αναλυτική λύση μπορεί να είναι περισσότερο “επίπονο” να βρεθεί υπολογιστικά με ακρίβεια, από ότι μια αριθμητική προσέγγισή της.

Μια σύντομη περιγραφή των περιεχομένων ακολουθεί· για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Πίνακα Περιεχομένων.

Περιγραφή των περιεχομένων ανά κεφάλαιο

Το **Κεφ. 1** αποτελεί μια σύνοψη των προαπαιτούμενων, μαθηματικών εννοιών που χρησιμοποιούνται στα μετέπειτα μέρη αυτής της εργασίας. Συγκεκριμένα, στην §1.1 παρατίθεται μια επέκταση των μεθόδων της Στοχαστικής Ανάλυσης στον χώρο $\mathcal{L}^2_{\text{LOC}}$ εισάγοντας την θεμελιώδη έννοια του local martingale. Στην §1.2 συνοψίζονται για λόγους πληρότητας και σημείου αναφοράς τα αρκετά γνωστά αποτελέσματα του τύπου του Itô. Ακολούθως, στις §1.3-1 και §1.3-3 αναλύονται συνοπτικά οι κεντρικότερες ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier και Laplace αντίστοιχα. Οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί αυτοί είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων κατάλληλης μορφής μετασχηματίζοντάς τες σε απλούστερες. Η μετέπειτα εργασία έχει χωριστεί σε δύο μέρη.

Το Μέρος I περιέχει εφαρμογές των Πιθανοτήτων στη Μαθηματική Ανάλυση. Αρχικά, το **Κεφ. 2** αποτελεί μια μικρή περιγραφή του πως ιστορικά γεννήθηκε η ιδέα των path integrals στο μυαλό του Feynman, αναλύοντας την ισχυρή διαισθητική τους έλξη. Στο **Κεφ. 3** επιλύονται (ντετερμινιστικές) Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις χρησιμοποιώντας μεθόδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων και συνεπώς συνδέοντας δύο φαινομενικά ασύνδετων κλάδων των Μαθηματικών. Στην §3.6 τονίζεται ένα από τα μεγαλύτερα οφέλη αυτής της προσέγγι-

¹Το γνωστό “LIBOR market model” αναδύεται ως ένας πιθανός υποψήφιος για αυτό το ρόλο.

γησης: η εναλλακτική δυνατότητα στοχαστικής προσομοίωσης ντετερμινιστικών εξισώσεων (μοντέλων). Επίσης, στο [Κεφ. 4](#) αναλύεται πρώτα η χρησιμότητα του Νόμου του Arcsin μέσα από μια πληθώρα αριθμητικών παραδειγμάτων και ακολουθεί έπειτα η πιθανοθεωρητική του απόδειξη από τον Καϋ.

Το Μέρος II αποτελεί εφαρμογή της προηγούμενης θεωρίας στα Χρηματοοικονομικά. Το [Κεφ. 5](#) εισάγει τον αναγνώστη σε κάποιες προαπαιτούμενες έννοιες της αγοράς των ομολόγων. Μαθηματικές και Χρηματοοικονομικές γνώσεις καταστρατηγούνται στο [Κεφ. 6](#) για τιμολόγηση ομολόγων μέσω στοχαστικής μοντελοποίησης των επιτοκίων.

Τέλος, στο Παράρτημα παρέχονται συμπληρωματικές έννοιες της Στοχαστικής Ανάλυσης, καθώς και ο κώδικας των υλοποιήσεων αυτής της εργασίας.

Περιγραφή της στοιχειοθέτησης της εργασίας

Η εργασία αυτή στοιχειοθετήθηκε από τον γράφοντα σε περιβάλλον L^AT_EX και ένα μέρος της σε X_YL^AT_EX (ένα σύστημα στοιχειοθεσίας που επεκτείνει το L^AT_EX ώστε να δουλέψει με το Unicode και με μοντέρνα format γραμματοσειρών, όπως το OpenType) αντιμετωπίζοντας στην αρχή τρομερά προβλήματα στη συγγραφή ενός δίγλωσσου κειμένου με κύρια γλώσσα την Ελληνική. Οι δυνατότητες αυτού του λογισμικού ανοικτού κώδικα (open-source) εκμεταλλεύτηκαν στο έπακρο. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί πως δόθηκε έμφαση πρώτα στον ηλεκτρονικό αναγνώστη του ηλεκτρονικού βιβλίου (ebook), και δευτερευόντως στον “παραδοσιακό” αναγνώστη του χαρτιού· αν ικανοποιούνται οι ανάγκες του πρώτου, αυτομάτως ικανοποιούνται και του δεύτερου. Οι παραπομπές σε διάφορα σημεία του κειμένου είναι αρκετές, κάτι που ενώ είναι “ένα πάτημα του ποντικιού” ηλεκτρονικά, πιθανότατα να κουράζει σε μια εκτυπωμένη έκδοση. Οι εικόνες απεικονίστηκαν από το λογισμικό ανοικτού κώδικα “R”, έπειτα από εκτενείς αριθμητικούς υπολογισμούς.

Για τη βελτίωση της αισθητικής εικόνας του κειμένου, και κατά συνέπεια της ανάγνωσης και κατανόησης των εννοιών που ακολουθούν, δημιουργήθηκε επίσης ένα L^AT_EX style file (επέκτασης .sty) που επανορίζει όλη τη δομή (απόσταση από το περιθώριο, στυλ επικεφαλίδων, κεντράρισμα εικόνων κ.ά.). Σημαντική βοήθεια σε όλους τους κανόνες ορθής στοιχειοθέτησης κειμένου παρείχε η “Βίβλος” της Τυπογραφίας *The Chicago Manual of Style* [12].

Όσον αφορά την λογική οργάνωση του κειμένου:

- Θα ήταν χρήσιμο ο αναγνώστης να συμβουλευτεί τη συνοπτική Λίστα Συμβολισμών της σελίδας [148](#) πριν αρχίσει την ανάγνωση αυτής της εργασίας, και να επανέρχεται σε αυτήν όποτε κρίνει απαραίτητο.
- Μετά από τα Περιεχόμενα ακολουθούν τρεις συγκεντρωτικές λίστες όλων των Εικόνων, Πινάκων και Αλγορίθμων αυτής της εργασίας αντίστοιχα. Η τελευταία λίστα δεν παρέχεται ως έτοιμη εντολή από το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε, κι έτσι κατασκευάστηκε εκ νέου για λόγους συνέπειας και πληρότητας.

- Στη σελ. 149 υπάρχουν όλες οι βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν. Να σημειωθεί ότι η Βιβλιογραφία δημιουργήθηκε αυτόματα με τη βοήθεια του BIBTEX δημιουργώντας εύκολα μια βάση δεδομένων από την τοποθεσία MathSciNet.
- Τέλος, στη σελ. 155 παρέχεται ένα πλήρες Ευρετήριο όλων των βασικών όρων αυτής της εργασίας. Το Ευρετήριο αυτό είναι ελληνοαγγλικό! Επειδή το L^AT_EX ταξινομεί μέχρι στιγμής μόνο αγγλικές λέξεις, δημιουργήθηκε ένα πρόγραμμα σε JAVA που υλοποιεί μια κατάλληλη *transliteration* μεταξύ των δύο γλωσσών. Έτσι, προκύπτει μια ορθή, κοινή τοποθέτηση ελληνικών και αγγλικών λέξεων στο ίδιο ευρετήριο.

Ευχαριστίες

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον δάσκαλό μου, Καθηγητή Βασίλη Γ. Παπανικολάου, επιβλέποντα αυτής της εργασίας, για την καθοδήγηση, τη βοήθεια, και το χρόνο που μου αφιέρωσε, τόσο κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, όσο και για την εξασφάλιση των επόμενων βημάτων στις σπουδές μου.

Επιπρόσθετα, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ιωάννη Σπηλιώτη για την πρόθυμη ανταπόκριση στις απορίες μου τόσο στα πλαίσια της εργασίας αυτής, όσο και στα πλαίσια των δραστηριοτήτων μου στο χώρο.

Θα ήθελα να τονίσω ότι η εκπόνηση της εν λόγω εργασίας κατέστη δυνατή, χάρη στη διδασκαλία από τους προαναφερθέντες των μαθημάτων “Θεωρία Πιθανοτήτων” και “Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά”, κατά τη διάρκεια του 6ου και 9ου εξαμήνου των σπουδών μου αντίστοιχα.

Επιπλέον, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή Θεμιστοκλή Ρασσιά, μέλος της τριμελούς επιτροπής της παρούσας εργασίας, ο οποίος κατά τη διδασκαλία των μαθημάτων “Μαθηματική Ανάλυση Ι” και “Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ” στο 1ο και 2ο εξάμηνο αντίστοιχα, έθεσε τις βάσεις για την ενασχόληση μου με τα Μαθηματικά.

Η όποια προσπάθεια υλοποίησης και επαλήθευσης των θεωρητικών αποτελεσμάτων της εργασίας αυτής μέσω υπολογιστή οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στην επιμονή και μεθοδικότητα του Επίκουρου Καθηγητή Δημήτρη Φουσκάκη κατά τη διδασκαλία των μαθημάτων “Ανάλυση Δεδομένων με Υπολογιστή” και “Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Στατιστική” στο 6ο και 9ο εξάμηνο αντίστοιχα. Οι απαιτητικές εργασίες του με δίδαξαν σίγουρα πάρα πολλά.

Επίσης, δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τον Καθηγητή Γιώργο Κοκολάκη για όσα μου μετέδωσε στις “Στοχαστικές Ανελίζεις” (6ο εξ.) και στην “Ανάλυση Χρονοσειρών” (8ο εξ.). Μελετώντας τις στοχαστικές ανελίζεις στη διακριτή περίπτωση, κατέστη δυνατή η γενίκευσή τους στα επόμενα μαθήματα.

Αναμφίβολα, η εισαγωγή μου στα Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά έγινε μέσα από τα ομώνυμα μαθήματα του Καθηγητή Ιωάννη Πολυράκη. Η “μυθική” έννοια του martingale μεταδόθηκε σε μένα για πρώτη φορά από εκείνον με σαφήνεια και με απεριόριστη αγάπη για

το αντικείμενο· για αυτό και τον ευχαριστώ θερμά.

Ακόμη, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών Αθανάσιο Γιαννακόπουλο, τον Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου Στέλιο Ξανθόπουλο, και τον Λέκτορα του Πανεπιστημίου Πειραιώς Νικόλαο Εγγλέζο για τις πολύτιμες συζητήσεις που είχαμε κατά τη διεξαγωγή του 7ου Θερινού Σχολείου στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά τον περασμένο Ιούλιο. Ευχαριστώ για την υπόδειξη της προφοράς της λέξης “Kač” ως “κάχτς” την Χριστίνα Φίλη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια ΕΜΠ, έχουσα άριστη γνώση των σλαβικών γλωσσών.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου για όσα μου δίδαξαν και για την καθοδήγηση στην ως τώρα φοιτητική μου ζωή.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς την οικογένειά μου, για την αμέριστη συμπαράσταση και στήριξη που μου προσέφεραν καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ελπίζω οι ιδέες και οι έννοιες που παρουσιάζονται να αποτελέσουν κίνητρο περαιτέρω ανάλυση από μελλοντικούς φοιτητές, εξερευνώντας μια πραγματικά εκπληκτική περιοχή των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Αθήνα, Οκτώβριος 2010

Κωνσταντίνος Στούρας

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Περιεχόμενα

Υπάρχουν 10^{11} αστέρια στον γαλαξία. Αυτό συνήθως ήταν ένα μεγάλο νούμερο. Αλλά είναι μόνο 100 δις. Είναι λιγότερο από το δημοσιονομικό έλλειμμα! Συνηθίζαμε να τους αποκαλούμε αστρονομικούς αριθμούς. Στη σημερινή εποχή πρέπει να τους αποκαλούμε οικονομικούς αριθμούς.

Richard Feynman (1918-1988)

Περίληψη	vii
Abstract	ix
Πρόλογος	xi
Κατάλογος Εικόνων	xxi
Κατάλογος Πινάκων	xxiii
Κατάλογος Αλγορίθμων	xxv
1 Μαθηματικά Προαπαιτούμενα	1
1.1 Το ολοκλήρωμα Itô στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$	1
1.1-1 Συνοπτική περιγραφή της $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ επέκτασης	5
1.2 Ο τύπος του Itô	9
1.3 Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί	15
1.3-1 Ο μετασχηματισμός Fourier	15
1.3-2 Επίλυση μιας ειδικής περίπτωσης της Schrödinger	18
1.3-3 Ο μετασχηματισμός Laplace	19

I	Εφαρμογές στη Μαθηματική Ανάλυση	21
2	Ένα Νέο Ολοκλήρωμα: Feynman Path Integral	23
2.1	Η Αρχή της Υπέρθεσης των πιθανοτήτων μετάβασης	24
2.2	Ορίζοντας την πιθανότητα μετάβασης ενός path	28
2.3	Ο φορμαλισμός του Feynman	29
2.3-1	Όλα πρέπει να είναι συμβατά με την Schrödinger	30
2.4	Πέρα από τον Feynman: Εμπνέοντας άλλους	38
3	Μια Σύνδεση Ανάλυσης και Θεωρίας Πιθανοτήτων	41
3.1	Κάποιες πρώτες συνδέσεις	43
3.1-1	“Εξουδετερωμένη” (killed) κίνηση Brown	45
3.2	Η εξίσωση θερμότητας	47
3.3	Η Μη Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας	52
3.4	Η Feynman-Kač formula για την κίνηση Brown	56
3.5	Η Feynman-Kač formula για ανελίξεις Itô	61
3.6	Η άλλη οπτική της Feynman-Kač: Στοχαστική Προσομοίωση	67
4	Ο Νόμος του Arcsin του Lévy	69
4.1	Το ιδεατό παιχνίδι του νομίσματος και η σύνδεσή του με τις στοχαστικές ανελίξεις	70
4.2	Η διακριτή περίπτωση: τυχαίος περίπατος	71
4.2-1	Τελευταία δυνατή ισοπαλία κερδών-ζημίας και μακρές περιόδοι κερδών	75
4.3	Η συνεχή περίπτωση: κίνηση Brown	77
4.3-1	Μερικές ακόμη εφαρμογές	85
II	Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά	89
5	Χαρακτηριστικά Γνωρίσματα των Ομολόγων	91
5.1	Εισαγωγή	92
5.2	Συμβόλαια ομολόγων και όροι	93
5.3	Διάρκεια ως τη λήξη	94
5.4	Par value	95
5.5	Ονομαστικό επιτόκιο και κουπόνια	96
5.5-1	Zero coupon bonds	97
5.5-2	Step-up notes	98
5.5-3	Deferred coupon bonds	99
5.6	Τιμολόγηση ομολόγων για την περίπτωση διακριτού ανατοκισμού	100
5.7	Διάφορα είδη επιτοκίων: Διακριτή Περίπτωση	101

5.8	Embedded options ομολόγων	104
6	Στοχαστικά Μοντέλα Επιτοκίων	107
6.1	Ομόλογα χωρίς κουπόνια	108
6.1-1	Τιμολόγηση ομολόγων με στοχαστικά επιτόκια	110
6.2	Μοντέλα ομολόγων προσαρμοσμένα στην κίνηση Brown	112
6.3	Διάφορα είδη επιτοκίων: Συνεχή Περίπτωση	115
6.4	Μοντέλα για το spot rate	124
6.5	Υπολογισμός της Καμπύλης των Αποδόσεων ομολόγων	127
6.5-1	Το μοντέλο του Vasicek	127
6.5-2	Το μοντέλο των Ho και Lee	132
6.6	Γενικά σχόλια για τη μοντελοποίηση ομολόγων	133
	Παράρτημα	137
A	Η Ιδιότητα Markov των Λύσεων	139
B	Υλοποιήσεις που χρησιμοποιήθηκαν	143
	Συμβολισμοί	147
	Βιβλιογραφία	149
	Ευρετήριο	155

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Κατάλογος Εικόνων

1.1	Προσομοίωση με το πακέτο R τριών κινήσεων Brown (martingale) με χρόνους διακοπής.	7
2.1	Ο Richard Feynman κατά τη διάρκεια διδασκαλίας.	23
2.2	Το πείραμα διπλής σχισμής (double slit experiment) του Young.	27
2.3	Ένα γράφημα του path $x = \{x(\tau)\}$, $0 \leq \tau \leq t$, με συνοριακές συνθήκες $x(0) = y$ και $x(t) = x$	31
2.4	Η ιδέα του Feynman: 1ης τάξης πολυγωνική προσέγγιση του μονοπατιού $x = \{x(\tau)\}$, $0 \leq \tau \leq t$, με συνοριακές συνθήκες $x(0) = y$ και $x(t) = x$	35
2.5	Η αρχή της αντιστοιχίας correspondece principle μεταξύ δύο από τα πιθανά κβαντικά paths (“—”) και του κλασικού path (“- -”) που καθιστά την κλασική δράση ελάχιστη.	37
3.1	Mark Kač (1914-1984).	41
4.1	Υπολογιστική προσομοίωση με το Mathematica του παιχνιδιού του νομίσματος.	74
4.2	Γραφική παράσταση της σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$	79
4.3	Μια πραγματοποίηση της κίνησης Brown.	86
5.1	Απόδοση της αγοράς συναρτήσει της τιμής ομολόγου για ένα 8% ομόλογο με κουπόνια.	96
5.2	Γραφική σχέση μεταξύ των forward rates και spot rates.	103
A.1	Η ιδιότητα Markov της ανέλιξης $\{X_t^{0,x}\}_{t \geq 0}$	140

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Αντιπαράθεση της λύσης του Feynman για την εξίσωση Schrödinger και αυτής του Kač για την εξίσωση θερμότητας.	39
4.1	Διακριτή Arcsin κατανομή τάξης 10.	77
4.2	Η συνεχής Arcsin κατανομή $A(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$	78
4.3	Μια εφαρμογή του νόμου του Arcsin (M: μέρες, Ω: ώρες, Λ: λεπτά).	87
5.1	Εξοικείωση με τους συμβολισμούς της αγοράς των ομολόγων.	95
6.1	Σύνοψη των στοχαστικών μοντέλων για τα επιτόκια και κάποιων γνωστών ιδιοτήτων τους.	136

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Κατάλογος Αλγορίθμων

4.1	Κώδικας σε Mathematica προσομοίωσης του παιχνιδιού του νομίσματος.	72
B.1	Προσομοίωση της 2D-κίνησης Brown.	143
B.2	Κώδικας σε R για την προσομοίωση της κίνησης Brown.	143
B.3	Διακριτή προσέγγιση ολοκληρώματος Riemann.	144
B.4	Αριθμητική επίλυση Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης (σχήμα Euler-Maruyama).	144
B.5	Κώδικας σε R για την προσομοίωση τριών κινήσεων Brown με χρόνους διακοπής.	145
B.6	Προσομοίωση της τιμής ομολόγων μέσω της Feynman-Kač formula.	146

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικά Προαπαιτούμενα

Η πιο όμορφη ιδιότητα της κίνησης Brown είναι η ίδια της η ύπαρξη.

Ανώνυμος

Το κεφάλαιο αυτό έχει στόχο να παρέχει στον αναγνώστη μια σύντομη περίληψη των εννοιών που θα χρειαστούν στα μετέπειτα. Κατά φυσικό τρόπο, λοιπόν, ξεκινάμε με μια εισαγωγή σε έννοιες της Στοχαστικής Ανάλυσης. Συγκεκριμένα, στην §1.1 επιχειρηματολογούμε γιατί είναι αναγκαία μια πιο γενική θεώρηση του “κλασικού” στοχαστικού ολοκληρώματος, από ότι αυτό έχει οριστεί στο Προπτυχιακό μάθημα του Στοχαστικού Λογισμού (βλ. [87] και [74]). Σκεπτόμενοι “τοπικά” στην §1.1-1 περιγράφουμε εν συντομία τις γενικές αρχές αυτής της επέκτασης και δίνουμε κάποια γενικά αποτελέσματα που σχετίζονται με την κεντρική έννοια του local martingale. Επίσης, στην §1.2 παρατίθενται για λόγους πληρότητας τα αρκετά γνωστά αποτελέσματα του τύπου του Itô και αναλύεται η χρησιμότητά του στον υπολογισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος της κίνησης Brown, όπως αυτά ορίστηκαν το 1944 από τον Kiyoshi Itô στο άρθρο [41]. Επιπρόσθετα, στις §1.3-1 και §1.3-3 αναλύονται συνοπτικά οι κεντρικότερες ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier και Laplace αντίστοιχα. Οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί αυτοί είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων κατάλληλης μορφής μετασχηματίζοντάς τες σε απλούστερες. Τέλος, στην §1.3-2 παρατίθεται μια ευρετική λύση της εξίσωσης του Schrödinger για την ειδική περίπτωση του δυναμικού $V \equiv 0$. Για αυστηρότερες αποδείξεις και για συμπληρώματα ο επίμονος αναγνώστης παραπέμπεται στη Βιβλιογραφία.

1.1 Το ολοκλήρωμα Itô στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε μια πραγματικά βολική θεωρία στοχαστικής ολοκλήρωσης δεν θα πρέπει να έχει κανένα πρόβλημα να ορίσει το επόμενο (στοχαστικό) ολοκλήρωμα:

$$\int_0^T f(B_t) dB_t \quad (1.1)$$

Κ. Στούρας, Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω Path Integrals. Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων.

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Itô μπορεί να επεκταθεί ώστε να πληροί την (1.1), αλλά αρχικά έχει οριστεί για συναρτήσεις f που ικανοποιούν τον ακόλουθο περιορισμό ολοκληρωσιμότητας:

$$E \left[\int_0^T f^2(B_t) dt \right] < \infty \quad (1.2)$$

Δυστυχώς, μια τέτοια συνθήκη μπορεί να μην ισχύει ακόμα και για “μια χαρά” συνεχείς συναρτήσεις, όπως η $f(x) = \exp(x^4)$, αφού $E \left[\int_0^T e^{2B_t^4} dt \right] = \infty$. Συνεπώς, αν θέλουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα να δουλεύει με τον πιο φυσικό τρόπο, πρέπει κάπως να “παρακάμψουμε” τη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας (1.2).

Ευτυχώς για μας υπάρχει ένας γενικός τρόπος χαλάρωσης τέτοιων συνθηκών ολοκληρωσιμότητας και αυτός είναι η τοπική μέθοδος (localization method). Ξεκινάμε θεωρώντας τις ακόλουθες κλάσεις:

Ορισμός 1.1 (Κλάσεις Itô ολοκληρώσιμων συναρτήσεων).

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^2 &:= \left\{ f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ μετρ/μη, προσ/νη με } \int_0^T E[f^2(\omega, t)] dt < \infty \right\} \\ \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2 &:= \left\{ f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ μετρ/μη, προσ/νη με } P \left[\int_0^T f^2(\omega, t) dt < \infty \right] = 1 \right\} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 1.2.

1. Λέμε ότι η $f(\cdot, \cdot)$ είναι *μετρήσιμη* αν $f(\cdot, \cdot) \in \mathcal{B} \times \mathcal{F}_t$, όπου $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ μια διύλιση (filtration) και \mathcal{B} συμβολίζει την κλάση των Borel συνόλων στο $[0, T]$. Λέμε ότι η $f(\cdot, \cdot)$ είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη (ή απλώς προσαρμοσμένη) αν για κάθε $t \in [0, T]$ η τ.μ. $f(\cdot, t)$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη, δηλαδή αν $f(\cdot, t) \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in [0, T]$.
2. Η συνθήκη $P \left[\int_0^T f^2(\omega, t) dt < \infty \right] = 1$ σημαίνει ότι σχεδόν όλες οι πραγματοποιήσεις της σ.α. f είναι συναρτήσεις του χώρου Hilbert $\mathcal{L}^2([0, T])$. Συνεπώς, η απεικόνιση $\omega \mapsto f(\omega, \cdot)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση από τον Ω στον $\mathcal{L}^2([0, T])$.
3. Η κλάση συναρτήσεων $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ σίγουρα περιέχει¹ τον \mathcal{V}^2 . Πράγματι, από Θεώρημα Fubini $E \left[\int_0^T |f(t)|^2 dt \right] = \int_0^T E \left[|f(t)|^2 \right] dt < \infty$. Άρα $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ σ.β. Το ολοκλήρωμα Itô έχει οριστεί αρχικά για συναρτήσεις που ανήκουν στον \mathcal{V}^2 [86]. Άρα τώρα έχουμε μια μεγαλύτερη κλάση ολοκληρώσιμων $f(t, \omega)$ για το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^T f(t) dB_t$. Η κρίσιμη διαφορά τους είναι η πιθανή μη ολοκληρωσιμότητα των $f(t, \omega)$ ως προς την ω -μεταβλητή.

¹Για την ακρίβεια ο \mathcal{V}^2 είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2(dP \otimes dt)$

Παράδειγμα 1.3.

Ας θεωρήσουμε την σ.α. $f(t) = e^{B_t^2}$ για $t \in [0, 1]$. Τότε

$$\begin{aligned} E[|f(t)|^2] &= E[e^{2B_t^2}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x^2} e^{-x^2/2t} dx \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$E[|f(t)|^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2(2-\frac{1}{2t})} dx$$

Ως γνωστόν (Ανάλυση II) το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{Ax^2} dx$ αποκλίνει για $A \geq 0$ (αφού $\int_1^{+\infty} e^{Ax^2} dx \geq \int_1^{+\infty} e^{Ax} dx = \infty$) και συγκλίνει για $A := -|A| < 0$ (γιατί για $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -|A|x^2 \leq -|A|x$, άρα για $b \in [1, +\infty)$ ισχύει $\int_1^b e^{-|A|x^2} dx \leq \int_1^b e^{-|A|x} dx = \frac{1}{|A|} (-e^{-|A|b} - e^{-|A|}) < \infty$). Δηλαδή καταλήγουμε ότι

$$E[|f(t)|^2] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-4t}} & \text{για } 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ +\infty & \text{για } t \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (1.3)$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\int_0^1 E[|f(t)|^2] dt = \infty$ και άρα η ανέλιξη $f \notin \mathcal{V}^2([0, 1])$. Επομένως, το $\int_0^1 e^{B_t^2} dB_t$ δεν ορίζεται με την κλασική θεώρηση των [74]. Από την άλλη, επειδή η $f(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του t , έχουμε ότι το $\int_0^1 f^2(\omega, t) dt < \infty$ σ.β. Επομένως, $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2([0, 1])$ και όπως θα δούμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{B_t^2} dB_t$ μπορεί να οριστεί [63] (βλ. και Παράδειγμα 1.18). ■

Παράδειγμα 1.4.

Θεωρούμε την προηγούμενη συνάρτηση, $f(t) = e^{B_t^2}$, αλλά σε διαφορετικό πεδίο ορισμού (χρόνος). Από την (1.3) προκύπτει ότι $\int_0^s E[|f(t)|^2] dt < \infty$ για $0 \leq s < \frac{1}{4}$. Συνεπώς, η $f \in \mathcal{V}^2([0, s])$ για κάθε $0 \leq s < \frac{1}{4}$. Δηλαδή το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^s e^{B_t^2} dB_t$ ορίζεται με τον κλασικό ορισμό και ανήκει στον $\mathcal{L}^2([0, s])$ για κάθε $0 \leq s < \frac{1}{4}$. ■

Παρατήρηση 1.5.

Για κάθε συνεχή $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έχουμε $f(\omega, t) = g(B_t) \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$, γιατί λόγω συνέχειας της κ.β. έχουμε ότι για κάθε $\omega \in \Omega$ η απεικόνιση $t \mapsto g(B_t(\omega))$ είναι φραγμένη συνάρτηση στο $[0, T]$. Όμως, η κύρια χρησιμότητα του $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ είναι η σχέση του με τους χρόνους διακοπής (stopping times). Για να κάνουμε το τελευταίο σαφές, χρειαζόμαστε άλλον έναν ορισμό.

Ορισμός 1.6 (Localizing Sequence στον \mathcal{V}^2).

Μια αύξουσα ακολουθία χρόνων διακοπής $(\tau_n)_n$ λέγεται \mathcal{V}^2 -τοπικά περιοριστική ακολουθία (\mathcal{V}^2 -localizing sequence) της f αν:

$$f_n(\omega, t) = f(\omega, t) 1_{\{t \leq \tau_n\}} \in V^2[0, T] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

και

$$P \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \tau_n = T\} \right] = 1 \quad (1.5)$$

Ορισμός 1.7.

Μια ιδιότητα της στοχαστικής ανέλιξης $\{X_t\}_{t \geq 0}$ θα λέμε ότι ισχύει τοπικά εάν υπάρχει μια τοπικά περιοριστική ακολουθία χρόνων διακοπής $(\tau_n)_n$ έτσι ώστε $\tau_n \uparrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$ και για κάθε n η σταματημένη (stopped) ανέλιξη $X_{t \wedge \tau_n}$ έχει αυτήν την ιδιότητα.

Η σημασία του χώρου $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ στη Στοχαστική Ανάλυση ως φυσιολογικού χώρου για το ολοκλήρωμα Itô έγκειται στο ότι κάθε $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ έχει μια τοπικά περιοριστική ακολουθία, όπως βλέπουμε από την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 1.8 (Τοπική συμπεριφορά στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$).

Για κάθε $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2[0, T]$ η ακολουθία που ορίζεται από την σχέση:

$$\tau_n = \tau_n(\omega) := \begin{cases} \inf \{s : \int_0^s f^2(\omega, t) dt \geq n\} & \text{αν } \{s : \dots\} \neq \emptyset \\ T & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.6)$$

είναι μια \mathcal{V}^2 -τοπικά περιοριστική ακολουθία της f .

Απόδειξη. Αρχικά, δείχνουμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \tau_n = T\} = \left\{ \omega : \int_0^T f^2(\omega, t) dt < \infty \right\} \quad (1.7)$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος είναι υποσύνολο του δεξιού προκύπτει από τον ορισμό (1.6) των τ_n . Για την αντίστροφη σχέση, θεωρούμε ένα ω_0 για το οποίο $\int_0^T f^2(\omega_0, t) dt < \infty$. Άρα $\exists N \in \mathbb{N} : \tau_N^{\omega_0} = T$ ή $\omega_0 \in \{\omega : \tau_n = T\} \implies \omega_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \tau_n = T\}$. Και για $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2[0, T]$ το δεξί σύνολο της (1.7) έχει πιθανότητα 1. Επιπρόσθετα, εκ κατασκευής (1.6) των τ_n έχουμε ότι για $f_n(\omega, t) = f(\omega, t) 1_{\{t \leq \tau_n\}}$ οι νόρμες είναι φραγμένες:

$$\|f_n\|_{\mathcal{L}^2(dP \otimes dt)}^2 \leq n \quad \forall n \implies f_n \in \mathcal{V}^2 \quad \forall n$$

Συνεπώς, η $(\tau_n)_n$ είναι μια \mathcal{V}^2 -τοπικά περιοριστική ακολουθία της f . □

1.1-1 Συνοπτική περιγραφή της $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ επέκτασης

Τώρα για την επιθυμητή επέκταση του ολοκληρώματος Itô αρχικά θεωρούμε μια $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2[0, T]$ και έστω $(\tau_n)_n$ είναι μια \mathcal{V}^2 -τοπικά περιοριστική ακολουθία της f . Έπειτα, για κάθε n ορίζουμε $\{X_{t,n}\}$ να είναι το μοναδικό² συνεχές martingale στο $[0, T]$ που είναι εκδοχή του ολοκληρώματος Itô: $\int_0^t (m_t g)(\omega, \tau) dB_\tau$, όπου $g(\omega, s) = f(\omega, \tau) 1_{\{\tau \leq \tau_n(\omega)\}}$ και $m_t(\omega, \tau) = 1_{\{s \in [0, \tau]\}}$. Τέλος, ορίζουμε το ολοκλήρωμα Itô για $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2[0, T]$ να είναι η οριακή ανέλιξη των $\{X_{t,n}\}$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Δηλαδή, μπορεί ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική συνεχής ανέλιξη $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ τέτοια ώστε:

$$P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t,n} = X_t \right] = 1 \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.8)$$

και μπορούμε να θεωρήσουμε την ανέλιξη $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ ως το ολοκλήρωμα Itô της $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2[0, T]$, ή, συμβολικά ορίζουμε το ολοκλήρωμα Itô της f να είναι:

$$\int_0^t f(\omega, \tau) dB_\tau \stackrel{\text{op}}{=} X_t(\omega) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.9)$$

Φυσικά, ο ορισμός αυτός δεν είναι πλήρης και το επόμενο που πρέπει να δείξουμε είναι ότι αυτό που ορίζουμε υπάρχει, δηλαδή ότι η $X_t(\omega)$ είναι καλώς ορισμένη και κατά δεύτερον ότι όντως οι ανελίξεις $X_{t,n}$ συγκλίνουν. Για περισσότερα ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στους Revuz και Yor [82].

Πιθανόν πολλοί να αναρωτηθούν τι πετύχαμε με τα προηγούμενα. Το ολοκλήρωμα Itô μιας $f \in \mathcal{V}^2[0, T]$ έχει την πολύ βασική και χρήσιμη ιδιότητα ότι είναι martingale. Για συναρτήσεις στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2[0, T]$ δεν είμαστε τόσο τυχεροί αλλά, πάραυτα, τα στοιχεία του $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ είναι αρκετά κοντά στην έννοια του martingale όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Παραθέτουμε για σύγκριση τους ακόλουθους δύο ορισμούς σε συνεχή χρόνο:

Ορισμός 1.9 (Martingale συνεχούς χρόνου).

Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \geq 0}$ και $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ μία διύλιση του χώρου (Ω, \mathcal{F}) . Η $\{X_t\}_{t \geq 0}$ καλείται *martingale*³ συνεχούς χρόνου εάν ισχύουν οι ιδιότητες:

1. Η X_t είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη (δηλαδή X_t μετρήσιμη για κάθε $t \geq 0$)
2. $E[|X_t|] < \infty \quad \forall t \geq 0$ και
3. $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \forall 0 \leq s < t < \infty$

Η ιδιότητα 3 στον προηγούμενο ορισμό στο εξής θα αναφέρεται ως η “ιδιότητα *martingale*”. Τα local martingales ορίζονται ουσιαστικά κάνοντας την ιδιότητα martingale να ισχύει τοπικά.

²Με την p-σ.β. έννοια.

³Σωστότερα: \mathcal{F}_t -martingale.

Ορισμός 1.10 (Local Martingale).

Η \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη ανέλιξη $\{X_t\}_{a \leq t < b}$ καλείται \mathcal{F}_t -local martingale ή απλά local martingale εάν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία χρόνων διακοπής $(\tau_n)_n$ τέτοια ώστε

1. $\tau_n \uparrow b$ Π-σ.β. καθώς $n \rightarrow \infty$ και
2. Για κάθε n η ανέλιξη $\{X_{t \wedge \tau_n}\}$ είναι ένα \mathcal{F}_t -martingale.

Προφανώς, ένα martingale είναι ένα local martingale επιλέγοντας την σταθερή ακολουθία χρόνων διακοπής $\tau_n := b$ για όλα τα n . Παρ' όλα αυτά ένα local martingale μπορεί να μην είναι ένα γνήσιο martingale εξαιτίας της έλλειψης ολοκληρωσιμότητας. Έστω $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2([a, b])$ και ορίζω την σ.α. $\{X_t\}_{t \in [a, b]}$ με $X_t := \int_a^t f(s) dB_s \forall t \in [a, b]$. Αν η $\{X_t\}_t$ δεν είναι ολοκληρώσιμη, δε μπορούμε να μιλήσουμε, ως γνωστόν, για τη δεσμευμένη μέση τιμή του X_t και συνεπώς δεν έχει νόημα να πούμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_a^t f(s) dB_s$ είναι martingale · έννοια απαραίτητη στην Στοχαστική Ανάλυση.

Σχόλιο 1.11.

Η λέξη “martingale” στα ελληνικά μεταφράζεται κατά λέξη ως “τμήμα χαλινού αλόγου”, ιδιαίτερα εκείνο που εμποδίζει το άλογο να υψώνει ανεξέλεγκτα το κεφάλι. Με μεταφορική σημασία συναντάται στην αργκό των τυχερών παιχνιδιών. Από αυτήν μεταπήδησε έπειτα στη Θεωρία Πιθανοτήτων⁴, επιβεβαιώνοντας την ιστορική σχέση της τελευταίας με τα τυχερά παιχνίδια. Ας δούμε όμως μια διαισθητική αιτιολόγηση αυτής της ορολογίας μέσω ενός απλού παραδείγματος (στη διακριτή περίπτωση).

Έστω Y_1, Y_2, \dots να είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο \mathbb{R} με

$$E[Y_i] = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

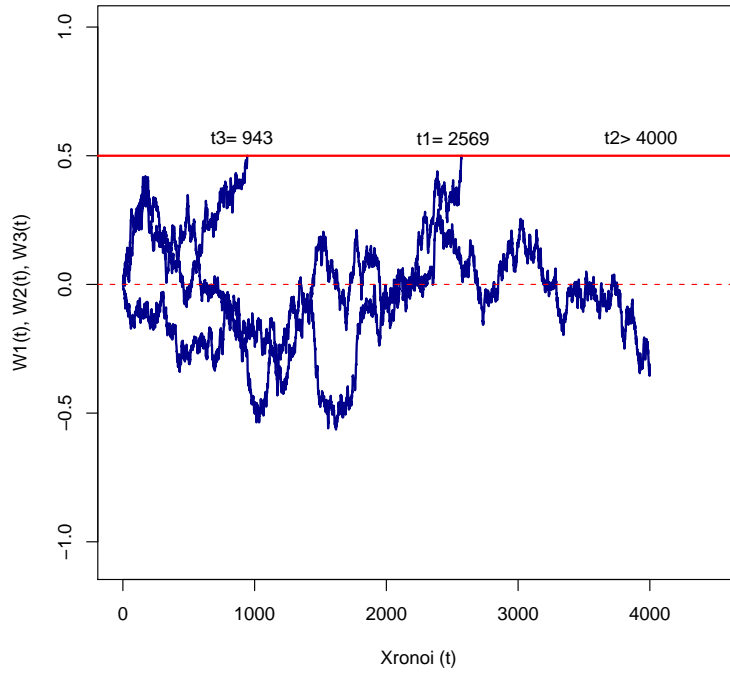
Ορίζουμε το άθροισμα $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$. Ποια είναι η καλύτερη *εκτίμησή* μας για την τιμή του S_{n+k} δεδομένων των τιμών των S_1, \dots, S_n ;

Η απάντηση είναι

$$\begin{aligned} E[S_{n+k} | S_1, \dots, S_n] &= E[Y_1 + \dots + Y_n | S_1, \dots, S_n] \\ &\quad + E[Y_{n+1} + \dots + Y_{n+k} | S_1, \dots, S_n] \\ &= Y_1 + \dots + Y_n + \underbrace{E[Y_{n+1} + \dots + Y_{n+k}]}_0 \\ &= S_n \end{aligned} \tag{1.10}$$

⁴Όπως αναφέρει ο Σπηλιώτης [86]:

[...]εισηγητής της ορολογίας “martingale” είναι ο J. Ville, αλλά εισηγητής της έννοιας είναι ο P. Levý. Η ανάπτυξη της θεωρίας και η επισήμανση της σημασίας της οφείλεται πρωτίστως στον J. L. Doob.



Εικ. 1.1 Προσομοίωση με το πακέτο R τριών κινήσεων Brown (martingale) με χρόνους διακοπής.

Άρα η καλύτερη εκτίμηση για την “μέλλουσα αξία” του S_{n+k} , δεδομένης της ιστορίας του μέχρι και την στιγμή n , είναι απλά S_n . Αν ερμηνεύσουμε το Y_i ως η πληρωμή ενός “δίκαιου” τυχερού παιχνιδιού τη στιγμή i , και άρα το S_n ως τα συνολικά κέρδη (κεφάλαιο) τη στιγμή n , ο προηγούμενος υπολογισμός μας λέει ότι για κάθε στιγμή τα μελλοντικά αναμενόμενα κέρδη του παίκτη, δεδομένων των κερδών του ως αυτή τη στιγμή, είναι απλά τα χρήματά του τη στιγμή αυτή. Επομένως, ο τύπος (1.10) χαρακτηρίζει ένα “δίκαιο” τυχερό παιχνίδι.

Το συνεχές ανάλογο του προηγούμενου παραδείγματος είναι η κ.Β., που ως γνωστόν είναι martingale. Στην [Εικόνα 1.1](#) απεικονίζεται μια προσομοίωση τριών κ.Β. (τρεις παίκτες) που ξεκινάνε τη χρονική στιγμή 0 (με 0 κέρδη) και τελειώνουν (φεύγουν από το παιχνίδι) όταν “χτυπήσουν” την τιμή των 0.5 χρηματικών μονάδων για πρώτη φορά ή όταν ο χρόνος (π.χ. δευτερόλεπτα) γίνει 4,000. Ένας παίκτης φεύγει, δηλαδή, από το παιχνίδι όταν βγάλει κέρδη ίσα με 0.5 ή όταν τελειώσει ο χρόνος του παιχνιδιού (εδώ: 4,000 δευτερ/πτα). Η [Εικόνα 1.1](#) αποτελεί το αποτέλεσμα της υλοποίησης του [Αλγ. B.5](#), σελ. 145.

Ο κύριος λόγος αναφοράς της έννοιας του local martingale είναι ότι τα ολοκληρώματα Itô στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ είναι πάντα local martingales. Ακριβέστερα ισχύει το ακόλουθο πολύ σημαντικό Θεώρημα (για μια απόδειξη βλ. [63]).

Θεώρημα 1.12 (Τα ολοκληρώματα Itô στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ είναι Local Martingales).

Για κάθε $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2[0, T]$, υπάρχει ένα συνεχές local martingale X_t τέτοιο ώστε:

$$P \left[X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega, s) dB_s \right] = 1.$$

Πολύ χρήσιμο είναι και το ακόλουθο Λήμμα για τα local martingales.

Λήμμα 1.13 (Φραγμένο local martingale είναι martingale).

Αν η X_t είναι συνεχές local martingale και $|X_t| \leq K$, όπου K είναι μια σταθερά για κάθε $t \geq 0$, τότε X_t είναι martingale.

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη γενικότητας ότι $X_0 = 0$. Τότε εξ ορισμού του local martingale υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία χρόνων διακοπής $(\tau_n)_n$ με την ιδιότητα $\tau_n \xrightarrow{n} \infty$ σ.β. τέτοια ώστε $X_{t \wedge \tau_n}$ είναι martingale για κάθε n . Στη συνέχεια θεωρούμε $s \leq t$ και παρατηρούμε λόγω της ιδιότητας martingale του $X_{t \wedge \tau_n}$ ότι:

$$E[X_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s] = X_{s \wedge \tau_n} \quad (1.11)$$

Όμως, αφού $\tau_n \xrightarrow{n} \infty$, έχουμε ότι $X_{s \wedge \tau_n} \xrightarrow{n} X_s$ και $X_{t \wedge \tau_n} \xrightarrow{n} X_t$. Επίσης, από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει σταθερά $K < \infty$ τέτοια ώστε $|X_{t \wedge \tau_n}| \leq K$ για κάθε n . Έτσι, παίρνοντας όρια κατά μέλη στην (1.11) και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει ότι $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$. Άρα η X_t είναι martingale. \square

Το προηγούμενο λήμμα είναι συχνά χρήσιμο, και επίσης θα μπορούσαμε να πούμε ότι δείχνει έναν γενικό τρόπο απόδειξης, που θα χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον στην εργασία αυτή (βλ. 41). Γενικά, είναι αρκετά δύσκολο να ελέγξουμε αν μια $\{\mathcal{F}_t\}$ -προσαρμοσμένη σ.α. $f(t)$ ανήκει στον \mathcal{V}^2 . Από την άλλη, είναι, συνήθως, αρκετά ευκολότερο να ελέγξουμε αν η f ανήκει στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$. Για παράδειγμα, όπως δείξαμε στη σελ. 3, αν η σ.α. $f(t)$ είναι $\{\mathcal{F}_t\}$ -προσαρμοσμένη και έχει συνεχείς τροχιές σ.β., τότε η f ανήκει στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$.

Συνεπώς, για να αποδείξουμε κάτι για ένα martingale βρίσκουμε αρχικά ένα κατάλληλο local martingale και εξετάζουμε αν ισχύουν οι ισχυρισμοί μας τοπικά. Έπειτα, δείχνουμε ότι το τελευταίο είναι ένα γνήσιο martingale ισχυριζόμενοι ότι μπορούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα martingale κάνοντας μια κατάλληλη εναλλαγή ορίων και μέσων τιμών (βλ. Κεφ. 3).

Ακριβέστερα ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα [63].

Θεώρημα 1.14.

Εστω $a \leq b < \infty$ και $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2([a, b])$. Τότε η σ.α. $\{X_t\}_{t \in [a, b]}$ με

$$X_t := \int_a^t f(s) dB_s, \quad t \in [a, b]$$

είναι ένα local martingale.

Παράδειγμα 1.15.

Από το [Παράδειγμα 1.3](#) η $f(t) = e^{B_t^2}$ ανήκει στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2([a, b])$. Άρα από το [Θεώρημα 1.14](#) η σ.α.

$$X_t := \int_a^t e^{B_s^2} dB_s, \quad t \in [a, b)$$

είναι ένα local martingale. Από την άλλη ας θεωρήσουμε την σ.α.

$$Y_t := \int_0^t e^{B_s^2} ds \quad 0 \leq t < \frac{1}{4}$$

Από το [Παράδειγμα 1.4](#) η $\{Y_t\}_{t \in [0, \frac{1}{4})}$ και από γνωστή Πρόταση η $\{Y_t\}_{t \in [0, \frac{1}{4})}$ είναι martingale. ■

1.2 Ο τύπος του Itô

Κατά τον υπολογισμό του οικείου ολοκληρώματος Riemann σχεδόν πάντα⁵ κάνουμε χρήση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού (ΘΘΟΛ). Ευτυχώς, ο Στοχαστικός Λογισμός του Itô έχει ένα ανάλογο αυτού του κλασικού Θεωρήματος. Η φόρμουλα του Itô, επίσης γνωστή στη βιβλιογραφία και ως *αλλαγή μεταβλητών και κανόνας αλυσίδας*, βρίσκεται στον πυρήνα του Στοχαστικού Λογισμού. Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε απλώς κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα παραλείποντας τις αποδείξεις, οι οποίες μπορούν να βρεθούν σε όλα τα εισαγωγικά βιβλία στοχαστικού λογισμού (π.χ. [\[86\]](#), [\[70\]](#), [\[90\]](#)).

Θεώρημα 1.16 (Itô Φόρμουλα - Απλή Περίπτωση).

Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχείς δεύτερες παραγώγους, τότε:

$$f(B_t) = f(0,0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \quad (1.12)$$

Το πιο βασικό χαρακτηριστικό του τύπου (1.12) είναι η παρουσία του δεύτερου ολοκληρώματος, χωρίς το οποίο θα μπορούσαμε να είχαμε μια νέα επαναδιατύπωση του κλασικού ΘΘΟΛ. Αυτή η διαφορά δεν είναι απλή λεπτομέρεια, αλλά οφείλεται στην μη μηδενική τετραγωνική κύμανση της κ.β. B_t . Επίσης, δείχνει ότι τα δύο ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (1.12) συνεισφέρουν το καθένα με το δικό του ξεχωριστό τρόπο στα χαρακτηριστικά της ανέλιξης $f(B_t)$.

Το πρώτο ολοκλήρωμα έχει μέση τιμή 0, άρα το δεύτερο ολοκλήρωμα περιέχει όλη την πληροφορία του ντετερμινιστικού μέρους της $f(B_t)$. Από την άλλη το πρώτο ολοκλήρωμα περιέχει όλη την πληροφορία της τοπικής μεταβλητότητας της $f(B_t)$. Συνεπώς, κατά κάποιον τρόπο, η Itô formula έχει μια δεύτερη ερμηνεία ως η ανάλυση της $f(B_t)$ σε συνιστώσες που είναι υπεύθυνες του θορύβου και του σήματος.

⁵Ελάχιστα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με άμεση χρήση του ορισμού.

Συνέπειες

Με μια απλή αντικατάσταση στο [Θεώρημα 1.16](#) μπορούμε να καταλήξουμε σε κάτι πολύ χρήσιμο. Έστω $F \in C^2(\mathbb{R})$ για την οποία ισχύει $F' = f$ και $F(0) = 0$. Τότε η Itô formula [\(1.12\)](#) μπορεί να γραφτεί ως ο τύπος για το ολοκλήρωμα της f :

$$\int_0^t f(B_s) dB_s = F(B_t) - \frac{1}{2} \int_0^t f'(B_s) ds \quad (1.13)$$

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό της ισότητας [\(1.13\)](#) είναι ότι το δεξί μέλος μπορεί να υπολογιστεί για κάθε πραγματοποίηση, ή για να ακολουθήσουμε τον ορθό συμβολισμό του [\[86\]](#), για κάθε ω -τροχιά⁶. Έτσι, η εξίσωση [\(1.13\)](#) μας παρέχει έναν νέο τρόπο κατανόησης του ολοκληρώματος Itô του αριστερού μέλους: τώρα έχουμε μια εξήγηση αυτού του “παράξε-νου” ολοκληρώματος κατά διαδρομή (pathwise) ανά ω . Γνωρίζαμε ότι το ολοκλήρωμα Itô μπορούσε να θεωρηθεί ως στοχαστική ανέλιξη, αλλά ο ο τρόπος ορισμού του ήταν ολικός (global) χωρίς να ήταν εμφανής κάποια άμεση σύνδεσή του με την κάθε μια τροχιά. Αντί-θετα, το δεξί μέλος της εξίσωσης [\(1.13\)](#) δίνει μία τιμή απευθείας σε κάθε ω . Γιατί είναι χρήσιμη όλη αυτή η νέα ερμηνεία; Η απάντηση είναι ότι χωρίς την [\(1.13\)](#), η διαδικασία της στοχαστικής προσομοίωσης μιας ανέλιξης ορισμένης μέσω ενός Itô ολοκληρώματος θα ήταν πολύ προβληματική μιας και το μόνο που θα μπορούσαμε να κάνουμε ήταν να είχαμε κάποια Riemann προσέγγιση αυτού και απλά να ελπίζουμε για τη συγκεκριμένη εφαρμογή αυτή να περιέγραφε κατάλληλα τη συμπεριφορά του πραγματικού (θεωρητικά προβλεπόμενου) ολοκληρώματος.

Στη συνέχεια υλοποιούμε υπολογισμούς μερικών ενδιαφερόντων στοχαστικών ολοκλη-ρωμάτων.

Παράδειγμα 1.17.

Εάν θέσουμε στην εξίσωση [\(1.13\)](#) $f(B_s) \equiv B_s$ τα δύο μέλη ανάγονται στον ελκυστικό τύπο:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t \quad (1.14)$$

Διαφορετικά, για να υπολογίσουμε το αριστερό μέλος της [\(1.14\)](#) με τον ορισμό του στο-χαστικού ολοκληρώματος θα έπρεπε να κάνουμε μεγάλη προσπάθεια. Επιπρόσθετα, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η $B_s \in \mathcal{V}^2$, άρα το στοχαστικό της ολοκλήρωμα είναι martingale, και η αναπαράσταση [\(1.13\)](#) κατά συνέπεια μας λέει ότι το $B_t^2 - t$ είναι martingale. ■

Παράδειγμα 1.18.

Έστω $f(t) = e^{B_t^2}$ για $t \in [0, 1]$. Τότε από το [Παράδειγμα 1.3](#) η $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$ και συνεπώς το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t e^{B_s^2} dB_s$ ορίζεται. Συγκεκριμένα, θέτοντας στην

⁶βλ. Λίστα Συμβολισμών, σελ. ;;

(1.13) $f(B_s) := e^{B_s^2}$ παίρνουμε:

$$\int_0^t e^{B_s^2} dB_s = \int_0^{B_t} e^{s^2} ds - \int_0^t B_s e^{B_s^2} ds \quad (1.15)$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα Riemann για κάθε ω -τροχιά $B(\omega, \cdot)$. Για σύγκριση των χώρων \mathcal{V}^2 και $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$, παρατηρούμε ότι αν $f \in \mathcal{V}^2([a, b])$, τότε το $\int_a^b f(s) dB_s$ ανήκει στον $\mathcal{L}^2([a, b])$. Παρ' όλα αυτά, αν $f \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2([a, b])$, τότε το $\int_a^b f(s) dB_s$ είναι απλά μια τυχαία μεταβλητή και γενικά δεν έχει πεπερασμένη μέση τιμή. ■

Θεώρημα 1.19 (Itô Φόρμουλα με Χωρικές και Χρονικές μεταβλητές).

Για κάθε $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ έχουμε την αναπαράσταση:

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s + \int_0^t f_t(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{1}{2} f_{xx}(s, B_s) ds$$

Ίσως το κεντρικό όφελος της Itô formula είναι ότι οδηγεί σε πολλές ισχυρές συνδέσεις μεταξύ της θεωρίας των martingale και της ήδη αρκετά διερευνημένης περιοχής των Διαφορικών Εξισώσεων. Η επόμενη πρόταση δείχνει μία από αυτές τις συνδέσεις.

Πρόταση 1.20 (ΜΔΕ συνθήκη για Martingales).

Εάν $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ και ικανοποιεί:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x), \quad (1.16)$$

τότε η $X_t = f(t, B_t)$ είναι ένα local martingale. Επιπρόσθετα, αν

$$E \left[\int_0^T f_x^2(t, B_t) dt \right] < \infty \quad (1.17)$$

τότε η X_t είναι martingale για $0 \leq t \leq T$.

Απόδειξη. Από **Θεώρημα 1.19** κάθε $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ που ικανοποιεί την ΜΔΕ (1.16) έχει την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$\begin{aligned} f(t, B_t) &= f(0, 0) + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s + \int_0^t \left[f_t(s, B_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, B_s) \right] ds \\ &= f(0, 0) + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s \end{aligned}$$

Αφού $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, η f_x είναι συνεχής, άρα $f_x \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$. Κατά συνέπεια, το ολοκλήρωμα Itô είναι ένα καλώς ορισμένο local martingale. Τελικά, εάν ισχύει η (1.17) $f_x \in \mathcal{V}^2$ και συνεπώς είναι martingale. □

Σχόλιο 1.21.

Η σχέση (1.16) γράφεται σε μορφή τελεστή ως:

$$\frac{\partial}{\partial t} f = -Af,$$

όπου $A := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ο απειροστικός γεννήτορας της κ.Β. (βλ. [74]). Η ομοιότητα είναι μεγάλη για να είναι τυχαία. Στην πραγματικότητα συνδέεται άμεσα με το Martingale Problem [56].

Ορισμός 1.22 (Ανέλιξη Itô).

Η σ. α. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ λέγεται *ανέλιξη Itô* εάν έχει την ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\omega, s) ds + \int_0^t b(\omega, s) dB_s \quad p-\sigma.β. \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \quad (1.18)$$

όπου $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ είναι προσαρμοσμένες, μετρήσιμες σ. α. που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας:

$$P \left[\int_0^t |a(\omega, s)| ds < \infty \right] = 1 \quad (1.19)$$

και

$$P \left[\int_0^t |b(\omega, s)|^2 ds < \infty \right] = 1 \quad (1.20)$$

Η σχέση (1.18) γράφεται ισοδύναμα σε συμβολική γραφή:

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t \quad (1.21)$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι τα στοχαστικά ολοκληρώματα είναι martingales είναι επόμενο να αναρωτηθεί κανείς πότε μια ανέλιξη Itô είναι martingale. Η απάντηση δίνεται στο ακόλουθο, πολύ χρήσιμο Λήμμα.

Λήμμα 1.23.

Εστω ότι η ανέλιξη Itô $\{X_t\}_{t \geq 0}$ έχει την ολοκληρωτική αναπαράσταση (1.18). Τότε η X_t είναι \mathcal{F}_t -martingale αν $a(\omega, s) \equiv 0$.

Απόδειξη. Επειδή ο όρος του δεξιού μέλους $\int_0^t b(\omega, s) dB_s$ είναι ένα \mathcal{F}_t -martingale, θεωρώ $X_t = X_0 + \int_0^t a(s) ds$ και απαιτώ $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \forall 0 \leq s < t < \infty$. Όμως

$$\begin{aligned} E[X_t | \mathcal{F}_s] &= E \left[X_0 + \int_0^s a(\tau) d\tau + \int_s^t a(\tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= X_0 + \int_0^s a(\tau) d\tau + E \left[\int_s^t a(\tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_s \right] \end{aligned}$$

γιατί οι όροι $X_0 + \int_0^s a(\tau) d\tau$ είναι \mathcal{F}_s -μετρήσιμοι, αφού η X_t είναι Itô, άρα “βγαίνουν” από τη μέση τιμή. Συνεπώς, για να είναι η X_t είναι \mathcal{F}_t -martingale πρέπει:

$$E \left[\int_s^t a(\tau) d\tau \mid \mathcal{F}_s \right] = 0 \quad \forall 0 \leq s < t < \infty \quad (1.22)$$

Εναλλάσσοντας τη μέση τιμή με το ολοκλήρωμα (Θεώρημα Fubini) έχω

$$\int_s^t E[a(\tau) \mid \mathcal{F}_s] d\tau = 0 \quad \forall 0 \leq s < t < \infty$$

και λόγω συνέχειας της $a(\cdot)$ παίρνω $\tau \equiv s$:

$$E[a(s) \mid \mathcal{F}_s] = 0 \iff a(s) = 0 \quad \forall s \quad \square$$

Τα επόμενα δύο Θεωρήματα γενικεύουν τα προηγούμενα και δείχνουν ότι ο τύπος του Itô συνεχίζει να εφαρμόζεται και για τις ανελίξεις Itô. Κάθε λεία συνάρτηση μιας ανελίξης Itô είναι και πάλι ανελίξη Itô με μία συγκεκριμένη στοχαστική αναπαράσταση, όπως δείχνει το Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.24 (Itô Φόρμουλα για Ανελίξεις Itô).

Αν $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ και $\{X_t\}_{t \geq 0}$ είναι ανελίξη Itô με ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\omega, s) ds + \int_0^t b(\omega, s) dB_s \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, 0) + \int_0^t \left[f_t(s, X_s) + f_x(s, X_s) a(\omega, s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, X_s) b^2(\omega, s) \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s) b(\omega, s) dB_s \end{aligned} \quad (1.23)$$

Θεώρημα 1.25 (Itô Φόρμουλα για Δύο Ανελίξεις Itô).

Αν $f \in C^{2,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ και $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ είναι ανελίξεις Itô με ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις:

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t a(\omega, s) ds + \int_0^t b(\omega, s) dB_s \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \\ Y_t &= \int_0^t \alpha(\omega, s) ds + \int_0^t \beta(\omega, s) dB_s \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(X_t, Y_t) &= f(0, 0) + \int_0^t f_x(X_s, Y_s) dX_s \\
&+ \int_0^t f_y(X_s, Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(X_s, Y_s) b^2(\omega, s) ds \\
&+ \int_0^t f_{xy}(X_s, Y_s) b(\omega, s) b(\omega, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f_{yy}(X_s, Y_s) b^2(\omega, s) ds
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Κάποιες χρήσιμες ειδικές περιπτώσεις

Υπάρχουν πολλές ειδικές περιπτώσεις του τύπου του Itô (1.25), αλλά ίσως η πιο φυσική θα ήταν να εξετάσουμε την περίπτωση $Y_t = t$. Τότε αναγόμεστε στον γνώριμό μας τύπο (1.23) για την $f(t, X_t)$.

Μία πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει επιλέγοντας τη συνάρτηση $f(x, y) := xy$. Τότε για την ανέλιξη $Z_t := X_t Y_t$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
dZ_t &= f_x(X_t, Y_t) dX_t + f_y(X_t, Y_t) dY_t + f_{xx}(X_t, Y_t) dX_t^2 \\
&+ f_{xy}(X_t, Y_t) dX_t dY_t + f_{yy}(X_t, Y_t) dY_t^2
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Ισχύουν:

$$\left. \begin{aligned}
dX_t^2 &= (b(t))^2 dt \\
dY_t^2 &= (b(t))^2 dt \\
dX_t dY_t &= b(t) b(t) dt \\
f_x(X_t, Y_t) &= Y_t \\
f_y(X_t, Y_t) &= X_t \\
f_{xy}(X_t, Y_t) &= 1 \\
f_{xx}(X_t, Y_t) &= f_{yy}(X_t, Y_t) = 0
\end{aligned} \right\} \tag{1.27}$$

Η (1.26) από την (1.27) γίνεται:

$$dZ_t = Y_t dX_t + X_t dY_t + b(t) b(t) dt \tag{1.28}$$

ή ισοδύναμα

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t b(\omega, s) b(\omega, s) ds \tag{1.29}$$

Αυτός είναι ο κανόνας του γινομένου για την στοχαστική ολοκλήρωση. Στην περίπτωση ακόμη που μία από τις δύο ανελιξεις στην (1.24) δεν έχει στοχαστικό όρο dB_t το τελευταίο ολοκλήρωμα στην (1.29) δεν εμφανίζεται, και συνεπώς καταλήγουμε σε έναν τύπο που συμπίπτει με τον γνώριμό μας τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες της κλασικής ανάλυσης.

1.3 Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων είναι οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί. Ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός μιας συνάρτησης, f , έχει τη γενική μορφή

$$\hat{f}(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt \quad (1.30)$$

υπό κατάλληλες προϋποθέσεις. Η συνάρτηση \hat{f} καλείται ο μετασχηματισμός της f και η συνάρτηση K ο πυρήνας του μετασχηματισμού. Η γενική ιδέα είναι χρησιμοποιώντας την (1.30), να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα για την f σε ένα απλούστερο πρόβλημα για την \hat{f} , να λύσουμε το νέο πρόβλημα και ακολούθως να ανακτήσουμε τη ζητούμενη συνάρτηση, f , μέσω της \hat{f} . Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε όσα αποτελέσματα είναι χρήσιμα για την μετέπειτα ανάλυση και για περισσότερα ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη Βιβλιογραφία.

1.3-1 Ο μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier φέρει το όνομα του διαπρεπούς Γάλλου μαθηματικού και φυσικού Jean Baptiste Joseph Fourier, οποίος πρώτος μελέτησε τις λεγόμενες σειρές Fourier σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας στα 1822.

Ορισμός 1.26 (Μετασχηματισμός Fourier).

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$. Με άλλα λόγια η $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f , $\mathcal{F}f$, δίνεται από

$$\mathcal{F}(f)(y) = \hat{f}(y) := (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx \quad (1.31)$$

Παράδειγμα 1.27.

Έστω

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{για } x \geq 0 \\ 0 & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

Αναζητούμε το μετασχηματισμό Fourier της f . Από την (1.31) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(y) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} e^{-ixy} e^{-x} dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} e^{-(1+iy)x} dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \left[0 - \left(-\frac{1}{1+iy} \right) \right] \end{aligned}$$

Άρα $\mathcal{F}(f)(y) = (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{1-iy}{1+y^2} \right)$. ■

Παράδειγμα 1.28.

Έστω $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$. Τότε η $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του y και ισχύει $\frac{d}{dy}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y) = -y\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y)$. Επειδή $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(0) = 1$ λύνοντας την προηγούμενη Δ. Ε. καταλήγουμε ότι $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Με ανάλογο τρόπο μπορεί ναδειχθεί ότι για $s > 0$ $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{s}{2}x^2}\right)(y) = s^{-1/2}e^{-\frac{y^2}{2s}}$. ■

Ορισμός 1.29 (Συνέλιξη).

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g ανήκουν στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Η συνέλιξη (convolution product) της f με τη g , $f \star g$, ορίζεται ως

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$$

Σχόλιο 1.30.

Το γινόμενο που ορίσαμε έχει νόημα λόγω της ανισότητας Hölder-Riesz. Πράγματι:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x-y)| dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Αλλά η συνέλιξη ορίζεται και για f και g στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, γιατί

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x-y)| dx \right) dy &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| du \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| du \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

Άρα $f(y) g(x-y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini εναλλάσσουμε τα ολοκληρώματα και καταλήγουμε ότι η συνάρτηση $\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x-y)| dy$ υπάρχει για σχεδόν όλα τα x και είναι ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, το γινόμενο $f \star g$ έχει νόημα για f και g στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Οι ιδιότητες της συνέλιξης είναι αρκετά χρήσιμες στη θεμελίωση των βημάτων “περιγραφικής” απόδειξης των εννοιών του Feynman στο [Κεφ. 2](#) κυρίως με την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 1.31 (Plancherel).

1. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια 1-1 γραμμική απεικόνιση από τον χώρο Schwartz⁷ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ στον εαυτό του. Επιπρόσθετα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, \mathcal{F}^{-1} , δίνεται από

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(y) dy$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Επίσης, $\mathcal{F}(f)(-x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x)$.

2. Για όλα τα μέλη του χώρου Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, πυκνού υποχώρου του $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, ισχύει

$$\|\mathcal{F}(f)\|^2 = \|f\|^2 = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|^2$$

3. Ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του μπορούν να επεκταθούν από τον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ σε όλο τον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ ως εξής. Εάν $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, τότε για κάθε $R > 0$ η συνάρτηση

$$\mathcal{F}_R(f) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-R}^R e^{-ixy} f(x) dx$$

ανήκει στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Το ακόλουθο όριο υπάρχει και ορίζει μια συνάρτηση στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$:

$$\|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}_R(f)\|^2 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Δηλαδή, για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(y) &:= \lim_{R \rightarrow \infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{-R}^R e^{-ixy} f(x) dx \\ &:= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx \end{aligned}$$

Ανάλογα, ισχύει επίσης ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(f)(y) &:= \lim_{R \rightarrow \infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{-R}^R e^{ixy} f(x) dx \\ &:= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(x) dx \end{aligned}$$

4. Για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές με

$$\|\mathcal{F}(f)\|^2 = \|f\|^2 = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|^2$$

⁷Για τον ορισμό του χώρου Schwartz βλ. την Υποσημείωση της σελ. 34.

5. Για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, η συνέλιξη $f \star g$ ικανοποιεί την ιδιότητα

$$f \star g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g))$$

Επιπρόσθετα, για το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ του $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (χώρος Hilbert) ισχύει

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(f), \mathcal{F}^{-1}(g) \rangle$$

Απόδειξη. Για μια απόδειξη βλ. [93], σελ. 292. □

1.3-2 Επίλυση μιας ειδικής περίπτωσης της Schrödinger

Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε μια λύση στην ακόλουθη ειδική μορφή της εξίσωσης Schrödinger για $V \equiv 0$ χωρίς να μπούμε σε “τεχνικές λεπτομέρειες”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \psi(x, 0) &= f(x) \quad \text{με} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad \text{για} \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\psi(x, t)$ επιδέχεται μετασχηματισμό Fourier:

$$\mathcal{F}(f)(y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx$$

Εάν οι ψ και f είναι κατάλληλα λείες, τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(\psi), \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) = -y^2 \mathcal{F}(\psi) \\ \mathcal{F}(\psi(x, 0))(y) &= \mathcal{F}(f)(y) \end{aligned}$$

Δηλαδή η (1.32) μετασχηματίζεται στην κατά πολύ απλούστερη

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(\psi) = -\frac{i\hbar}{2m} y^2 \mathcal{F}(\psi) \tag{1.33}$$

Λύνοντας την (1.33) βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{F}(\psi) = e^{(-i\hbar/2m)y^2 t} \mathcal{F}(\psi)$$

Άρα αντιστρέφοντας έχουμε τη λύση

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{(-i\hbar/2m)y^2 t} \mathcal{F}(f)\right)(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{(-i\hbar/2m)y^2 t}\right)(x, t) \star \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x, t) \\ &= \left(\frac{i\hbar t}{2m}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2i\hbar(\frac{t}{m})}\right) \star f(x) \end{aligned}$$

Κατά την απόδειξη αυτή έχουμε προσπεράσει αρκετά βήματα του πως υπολογίστηκαν κάποιοι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Fourier, αλλά και ότι με χρειάζονται να ικανοποιούνται κάποιοι ακόμα περιορισμοί για τη συνάρτηση της αρχικής συνθήκης, f , που ολοκληρώνεται στη μονάδα. Όμως αν θέλουμε να γίνουμε αυστηροί θα απομακρυνθούμε από το τελικό αποτέλεσμα

$$\psi(x, t) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{im(x-x_0)^2}{2\hbar t}\right) \cdot f(x_0) dx_0 \quad (1.34)$$

Στην §2.3-1 θα επανέλθουμε σε αυτή τη μορφή της λύσης της (1.32), συγκρίνοντάς την με τη λύση που ευρετικά πρότεινε ο Feynman.

1.3-3 Ο μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια χρήσιμη μέθοδος επίλυσης γραμμικών Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων. Φέρει το όνομα του διαπρεπούς Γάλλου μαθηματικού και αστρονόμου Pierre-Simon, marquis de Laplace, ο οποίος μελέτησε την ακόλουθη σχέση (1.35) στα 1782.

Ορισμός 1.32 (Μετασχηματισμός Laplace).

Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f , συμβολίζεται ως $\mathcal{L}f$ ή ως \hat{f} , και ορίζεται από την εξίσωση

$$(\mathcal{L}f)(s) = \hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (1.35)$$

για εκείνα τα $s \in \mathbb{C}$ για τα οποία το ολοκλήρωμα (1.35) υπάρχει.

Πρόταση 1.33.

Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής. Αν ο μετασχηματισμός Laplace της f υπάρχει για κάποιο $s_0 \in \mathbb{C}$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f υπάρχει για κάθε $\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)$.

Στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων θα υπάρχει, χωρίς να εξετάσουμε υπό ποιές συνθήκες συμβαίνει αυτό.

Πρόταση 1.34 (Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace).

1. Ο τελεστής Laplace, \mathcal{L} , είναι γραμμικός: $\mathcal{L}(kf + lg) = k\mathcal{L}f + l\mathcal{L}g \quad \forall k, l \in \mathbb{C}$.
2. Ισχύει ότι $\mathcal{L}(e^{wt} f(t)) = \hat{f}(s - w)$, με $w, s \in \mathbb{C}$ (για τα οποία ορίζεται ο μετασχηματισμός).
3. $\mathcal{L}f(kt) = \frac{1}{k} \hat{f}\left(\frac{s}{k}\right)$ με $s \in \mathbb{C}$.
4. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f και η παράγωγός της $f^{(1)}$ είναι ορισμένες από το $[0, +\infty)$ στο \mathbb{R} , τμηματικά συνεχείς και επιδέχονται μετασχηματισμό Laplace, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}f^{(1)}(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0), \quad \operatorname{Re}(s) \geq s_0$$

Γενικότερα, αν η f υποτεθεί n -φορές παραγωγίσιμη, τότε

$$\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad \operatorname{Re}(s) \geq s_0$$

5. Συνέλιξη. Για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^2([0, +\infty); \mathbb{R})$ όπως στην [Πρόταση 1.33](#) ισχύει ότι

$$\mathcal{L}f \star g = (\mathcal{L}f) \cdot (\mathcal{L}g)$$

Θεώρημα 1.35 (Lerch).

Έστω $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχείς, που επιδέχονται μετασχηματισμό Laplace και έστω $\hat{f} = \mathcal{L}f$ και $\hat{g} = \mathcal{L}g$. Αν $\hat{f}(s) = \hat{g}(s)$ για κάθε s με $\operatorname{Re}(s) \geq s_0$, για κάποιο s_0 , τότε $f(t) = g(t)$ σχεδόν για κάθε $t \geq 0$ (εκτός των σημείων ασυνέχειας).

Πόρισμα 1.36.

Η απεικόνιση $f \mapsto \mathcal{L}f$ είναι 1-1. Συνεπώς, υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της f και ισχύει

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\hat{f} \quad \forall t \geq 0$$

Σχόλιο 1.37.

Η [Πρόταση 1.34](#) ισχύει ανάλογα και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Μέρος Ι.

Εφαρμογές στη Μαθηματική
Ανάλυση

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

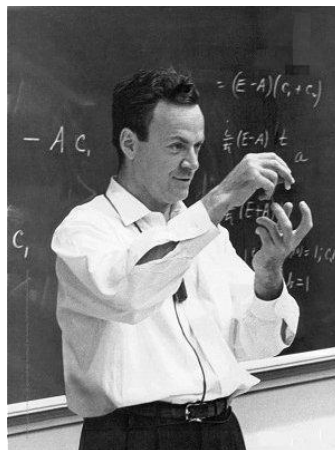
Κεφάλαιο

Ένα Νέο Ολοκλήρωμα: Feynman Path Integral

We have a habit in writing articles published in scientific journals to make the work as finished as possible, to cover up all the tracks, to not worry about the blind alleys or describe how you had the wrong idea first, and so on. So there isn't any place to publish, in a dignified manner, what you actually did in order to get to do the work.

R. Feynman, Nobel Lecture, 1966

Αυτό το κεφάλαιο αναφέρεται στο μαθηματικό εργαλείο των ολοκληρωμάτων *Feynman* πάνω σε διαδρομές¹ (*Feynman Path Integrals*) ως μια διαφορετική αναπαράσταση και προσέγγιση λύσεων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ). Κατά φυσικό τρόπο, λοιπόν, ξεκινάμε με τον μεγάλο φυσικό Richard Feynman, που πρώτος εισήγαγε αυτή την ιδέα, κατά την συστηματοποίηση της Κβαντομηχανικής, στη διδακτορική του διατριβή στο Princeton το 1942 [25]. Η θεωρία της δημοσιεύτηκε αργότερα, το 1948 [26]. Από τη σύλληψη τους μέχρι σήμερα, τα path integrals έχουν κατακτήσει μια κάπως διφορούμενη θέση στη Θεωρητική Φυσική. Από τη μία έχουν ευσημνοποιηθεί στην Κβαντική Μηχανική, Στατιστική Φυσική της ισχυρά δεικνυτικής, ευρηματικής και



Εικ. 2.1 Ο Richard Feynman κατά τη διάρκεια διδασκαλίας.

¹Στο εξής θα προτιμήσουμε την αγγλική τους διεθνή ορολογία, path integrals.

περισσότερες χρήσεις τους δεν έχουν ως τώρα τεκμηριωθεί από μια επαρκή μαθηματική αιτιολόγηση, για λόγους που θα εξηγήσουμε εν συντομία στη συνέχεια. Πρόκειται ουσιαστικά για ταλαντούμενα ολοκληρώματα (oscillating integrals) σε έναν απειροδιάστατο χώρο, και συνεπώς η θεμελίωση τους συνδέεται στενά με την ανάπτυξη της θεωρίας ολοκλήρωσης σε χώρους συναρτήσεων. Στην §2.3-1 παραθέτουμε, επίσης, μια πρώτη, εντυπωσιακή εφαρμογή των path integrals από τον ίδιο τον Feynman: στην επαναδιατύπωση της εξίσωσης του Schrödinger που κυβερνά την Κβαντική Φυσική εφαρμόζοντας μεθόδους της Κλασικής Φυσικής! Οι ισχυρά διαισθητικές έννοιες του Feynman ενέπνευσαν τον μαθηματικό M. Καϋ να δώσει μια αυστηρή και ευφυής απόδειξη στη λύση της εξίσωσης θερμότητας με μια στοχαστική αναπαράσταση (βλ. §2.4). Στα μετέπειτα χρόνια αρκετοί μαθηματικοί προσπάθησαν να θεμελιώσουν αυτό το ανοικτό Πρόβλημα, αλλά χωρίς επιτυχία. Για περισσότερες λεπτομέρειες, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και συγκεκριμένα στα βιβλία [31], [1], [10], [55], [57] και στα άρθρα [54], [71], [73], [72], [51] και [30].

2.1 Η Αρχή της Υπέρθεσης των πιθανοτήτων μετάβασης

Στο επίκεντρο των διαισθητικών συλλογισμών που θα ακολουθήσουν, περιέχεται η έννοια του *πλάτους πιθανότητας* (probability amplitude) που συσχετίζεται στενά με μια εντελώς συγκεκριμένη κίνηση, ως συνάρτηση του χρόνου. Αξίζει, συνεπώς, να υπενθυμίσουμε με λεπτομέρεια την κβαντομηχανική έννοια της *υπέρθεσης των πλατών πιθανοτήτων* (superposition principle). Πρέπει να εξετάσουμε τις ουσιώδεις αλλαγές στη φυσική αντίληψη των φαινομένων που απαιτούνται για την μετάβαση από την Κλασική στη Κβαντική Φυσική. Η περιγραφή που θα ακολουθήσει είναι του ίδιου του Feynman από την ομιλία του κατά την απονομή του βραβείου Νόμπελ στη Φυσική το 1966, και από το πολυσυζητημένο άρθρο του [26].

Ακολουθώντας το σκεπτικό του Feynman ας θεωρήσουμε ένα φανταστικό, νοητικό πείραμα στο οποίο μπορούμε να κάνουμε τρεις διαδοχικές μετρήσεις στο χρόνο: πρώτα μιας ποσότητας A , έπειτα μιας B , και τέλος μιας C . Έστω, για απλότητα, ότι η τιμή αυτών των ποσοτήτων (πριν τη μέτρηση) είναι μία (όλες ταυτίζονται). Έστω ότι a είναι ένα από τα πιθανά² αποτελέσματα για την ποσότητα A , b είναι ένα αποτέλεσμα που θα μπορούσε να προκύψει από μέτρηση του B , και c ένα πιθανό αποτέλεσμα από την μέτρηση της τρίτης ποσότητας, C .

Είναι ευρέως γνωστό ότι η Κβαντομηχανική είναι μια θεωρία περιγραφής της φύσης με πιθανότητες, αλλά αυτό δεν είναι εντελώς πλήρες. Με στόχο να κάνουμε, ακόμα πιο ξεκάθαρη, τη σχέση μεταξύ κλασικής και κβαντικής θεωρίας, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι στην κλασική Φυσική επίσης ασχολούμαστε με πιθανότητες, αλλά όμως τότε όλες οι πιθανότητες είτε είναι μηδέν, ή μονάδα.

²Στην Κβαντομηχανική, λόγω αρχής απροσδιοριστίας, δε μπορούμε να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια μια ποσότητα, αλλά μόνο με μία προκαθορισμένη πιθανότητα.

Ορίζουμε τώρα ως P_{ab} την πιθανότητα³ ότι αν κατά τη μέτρηση του A πήραμε a , τότε η μέτρηση του B θα δώσει το αποτέλεσμα b . Ομοίως, P_{bc} είναι η πιθανότητα ότι αν κατά τη μέτρηση του B πήραμε b , τότε η μέτρηση του C θα δώσει το αποτέλεσμα c . Επίσης, έστω P_{ac} η πιθανότητα αν το A να δώσει a , τότε το C να δώσει c . Τέλος, συμβολίζουμε με P_{abc} την πιθανότητα και των τριών, δηλαδή, αν το A να δώσει a , τότε το B να δώσει b , και το C να δώσει c .

Αν τα ενδεχόμενα μεταξύ a και b είναι ανεξάρτητα⁴ με τα ενδεχόμενα μεταξύ b και c , τότε

$$P_{abc} = P_{ab}P_{bc} \quad (2.1)$$

Συνεπώς, για κάθε ενδεχόμενο πρέπει να ισχύει η σχέση⁵

$$P_{ac} = \sum_b P_{abc} \equiv \sum_b P(a | b) P(b | c) \quad (2.2)$$

Αυτό ισχύει γιατί, εάν η αρχική μέτρηση A δώσει a και το σύστημα βρεθεί αργότερα να δίνει αποτέλεσμα c κατά την μέτρηση του C , η ποσότητα B πρέπει να είχε κάποια τιμή στο μεταξύ χρονικό διάστημα μεταξύ A και C . Η πιθανότητα ότι αυτή η τιμή ήταν b είναι P_{abc} . Τέλος, αθροίζουμε, ή ολοκληρώνουμε, πάνω σε όλα τα αμοιβαίως αποκλειώμενα ενδεχόμενα για το b (συμβολίζεται με \sum_b).

Η ουσιώδης διαφορά μεταξύ κλασικής και κβαντικής φυσικής βρίσκεται στην εξ. (2.2). Στην κλασική φυσική η σχέση αυτή είναι πάντα αληθής. Στην κβαντική φυσική είναι συχνά λάθος. Αν συμβολίσουμε με P_{ac}^q την κβαντομηχανική πιθανότητα ότι η μέτρηση του C δίνει c όταν ακολουθεί μια μέτρηση του A που δίνει a . Τότε η εξ. (2.2) αντικαθίσταται στην κβαντομηχανική από τον εξής αξιοσημείωτο νόμο: Υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί φ_{ab} , φ_{bc} , φ_{ac} τέτοιοι ώστε

$$P_{ab} = |\varphi_{ab}|^2, \quad P_{bc} = |\varphi_{bc}|^2, \quad \text{και} \quad P_{ac}^q = |\varphi_{ac}|^2 \quad (2.3)$$

Ο κλασικός νόμος, που προκύπτει συνδυάζοντας τις (2.1) και (2.2):

$$P_{ac} = \sum_b P_{ab}P_{bc} \quad (2.4)$$

αντικαθίσταται από τον

$$\varphi_{ac} = \sum_b \varphi_{ab}\varphi_{bc} \quad (2.5)$$

Αν η (2.5) είναι σωστή, συνήθως η (2.4) είναι λάθος. Το λογικό λάθος που έγινε στο

³Ένας πιο διαισθητικός συμβολισμός για την P_{ab} θα μπορούσε να ήταν ο $P(a | b)$: η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου a , δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο b .

⁴Αυτό υπό κάποιες προϋποθέσεις συμβαίνει στην Κβαντομηχανική.

⁵Βλ. προηγούμενη υποσημείωση §3.

συμπέρασμα της (2.4) οφείλεται, φυσικά, στην υπόθεση μας ότι για να μεταβεί από την κατάσταση a στη c το σύστημα έπρεπε να περάσει από μια κατάσταση τέτοια ώστε το B έπρεπε να δώσει μια ορισμένη τιμή, b .

Σκεπτόμενοι την πιθανότητα ως συχνότητα εμφάνισης, η (2.4) συνεπάγεται απλά από τη τελευταία δήλωση ότι δηλαδή σε κάθε πείραμα που δίνει τις τιμές a και c , η ποσότητα B είχε κάποια τιμή. Η μόνη περίπτωση που η (2.4) θα μπορούσε να ήταν λάθος είναι ότι η δήλωση πως “η ποσότητα B είχε κάποια τιμή” πρέπει κάποιες φορές να μην έχει νόημα. Παρατηρώντας ότι η (2.5) αντικαθιστά την (2.4) μόνο στην περίπτωση που δεν κάνουμε καμία προσπάθεια να μετρήσουμε τη ποσότητα B , οδηγούμαστε στον ισχυρισμό ότι η δήλωση πως “η ποσότητα B είχε κάποια τιμή”, πρέπει να μην έχει νόημα όταν δεν κάνουμε καμία προσπάθεια να μετρήσουμε τη ποσότητα B ⁶.

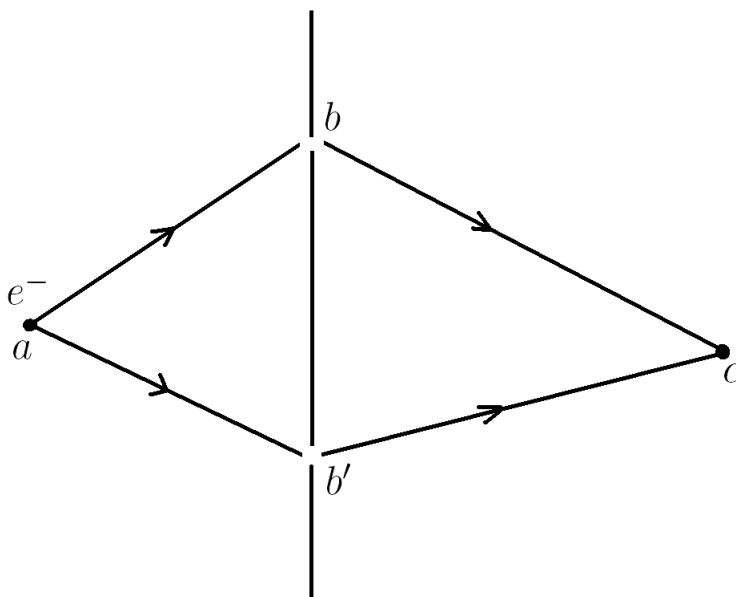
Συνεπώς, έχουμε διαφορετικά αποτελέσματα για τη συσχέτιση μεταξύ των τιμών a και c (δηλαδή τις σχέσεις (2.4) και (2.5)), αναφορικά με το αν επιχειρήσαμε ή όχι να μετρήσουμε τη ποσότητα B . Όσο έμμεσα κι αν προσπαθήσει κάποιος, η προσπάθεια να μετρήσει τη B πρέπει να διαταράξει το σύστημα, τουλάχιστον σε βαθμό ώστε να αλλάξει τους υπολογισμούς μας από την (2.5) σε αυτούς της (2.4)⁷. Το ότι η απόπειρα να μετρήσουμε τη B , όντως προκαλεί τις κατάλληλες διαταραχές, και ότι συνεπώς η (2.4) θα μπορούσε να ήταν λάθος, διατυπώθηκε αρχικά από τον Heisenberg στην αρχή της αβεβαιότητας και βρίσκεται στον πυρήνα της κβαντικής θεωρίας.

Η εξ. (2.5) είναι μια τυπική αναπαράσταση της κυματιδιακής φύσης της ύλης. Σύμφωνα με αυτήν, η πιθανότητα να βρούμε ένα σωματίδιο να πηγαίνει από το a στο c κατά μήκος διαφορετικών διαδρομών (τιμές του b) μπορεί, εάν δε γίνει καμία προσπάθεια να προσδιορίσουμε τη διαδρομή, να αναπαρασταθεί ως το άθροισμα των τετραγώνων κάποιων μιγαδικών ποσοτήτων για κάθε πιθανή διαδρομή. Τις μιγαδικές αυτές ποσότητες ο Feynman τις αποκάλεσε *φάσεις* (phases). Το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται ως κύμα, δηλαδή ισχύει η (2.5), όσο δε κάνουμε καμία προσπάθεια να προσδιορίσουμε ότι είναι σωματίδιο. Ωστόσο, μπορεί κάποιος να προσδιορίσει, αν το θέλει, ποια διαδρομή ακολούθησε, ακριβώς σαν να ήταν σωματίδιο. Αλλά όταν κάποιος το επιχειρήσει αυτό, η σχέση (2.4) εφαρμόζεται και τότε το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται ως σωματίδιο.

Η Εικόνα 2.2 απεικονίζει σχηματικά όλες τις προηγούμενες μαθηματικές σχέσεις. Πρόκειται για το περίφημο πείραμα διπλής σχισμής (double slit experiment) του Young. Το ηλεκτρόνιο στο σημείο a μπορεί να φτάσει στο σημείο c είτε ακολουθώντας τη διαδρομή abc , είτε τη διαδρομή $ab'a$. Το πλάτος της διαδρομής abc είναι $\varphi_{abc} = \varphi_{ab} \cdot \varphi_{bc}$ και για τη διαδρομή $ab'a$ είναι $\varphi_{ab'a} = \varphi_{ab'} \cdot \varphi_{b'c}$. Το συνολικό πλάτος είναι συνεπώς το άθροισμα $\varphi_{ac} = \varphi_{abc} + \varphi_{ab'a} = \varphi_{ab} \cdot \varphi_{bc} + \varphi_{ab'} \cdot \varphi_{b'c}$, όπου φ_{ab} είναι το πλάτος για τη διαδρομή ab , κτλ.

⁶Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Feynman: “δε θα βοηθούσε να τονίζαμε ότι θα μπορούσαμε να είχαμε μετρήσει τη ποσότητα B αν το θέλαμε. Το σημαντικό είναι ότι δεν το κάναμε”!

⁷Το πως η (2.4) προκύπτει από την (2.5) όταν οι μετρήσεις διαταράσσουν το σύστημα έχει μελετηθεί αναλυτικά από τον μεγάλο μαθηματικό J. von Neumann στο κλασικό βιβλίο του [69].



Εικ. 2.2 Το πείραμα διπλής σχισμής (double slit experiment) του Young.

Όμως τα προηγούμενα δεν είναι τίποτα άλλο από την εξήγηση της γνωστής αρχής του διϊσμού της ύλης. Παρόλαυτα, είναι αναγκαίο να τονίσουμε ότι αυτή είναι μια άμεση συνέπεια της εξ. 2.5· η εν λόγω εξίσωση κατέχει κεντρική θέση στην επαναδιατύπωση της κβαντικής μηχανικής του Feynman και συνεπώς στην κατανόηση της διαίσθησης που ενέχουν οι μέθοδοι που θα αναπτυχθούν στην εργασία αυτή.

Η γενίκευση των σχέσεων (2.4) και (2.5) σε ένα μεγαλύτερο (πεπερασμένο) πλήθος μετρήσεων των μεγεθών, έστω A, B, C, D, \dots, N , είναι, προφανώς, ότι η πιθανότητα να συμβεί η ακολουθία των a, b, c, \dots, n ισούται με

$$P_{abc\dots n} = |\varphi_{abc\dots n}|^2$$

Η πιθανότητα της έκβασης του πειράματος a, c, n για παράδειγμα, εάν έχουν μετρηθεί οι b, d, \dots, m , είναι η κλασικός τύπος:

$$P_{acn} = \sum_b \sum_d \dots P_{abc\dots n} \quad (2.6)$$

ενώ η πιθανότητα της ίδιας ακολουθίας a, c, n , εάν δεν έχει γίνει καμία μέτρηση μεταξύ A και C και μεταξύ C και N είναι

$$P_{acn}^q = \left| \sum_b \sum_d \dots \varphi_{abc\dots n} \right|^2 \quad (2.7)$$

2.2 Ορίζοντας την πιθανότητα μετάβασης ενός path

Σε αυτή την ενότητα θα επεκτείνουμε τις προηγούμενες ιδέες για να περιγράψουμε το συλλογισμό του Feynman που σχετίζεται με τον ορισμό της πιθανότητας μετάβασης για ένα απόλυτα προκαθορισμένο path ενός σωματιδίου μέσα στο χώρο και στο χρόνο. Ας περιοριστούμε στη μονοδιάστατη περίπτωση, αφού η γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις είναι φανερή.

Έστω ότι έχουμε ένα σωματίδιο στο \mathbb{R} , του οποίου η κίνηση μπορεί να πάρει διάφορες τιμές στον άξονα x . Έστω ότι κάνουμε ένα πολύ μεγάλο αριθμό διαδοχικών μετρήσεων της θέσης του, που τις υποθέτουμε ότι διαφέρουν χρονικά κατά ένα μικρό χρονικό διάστημα ε . Τότε διαδοχικές μετρήσεις των A, B, C, \dots ταυτίζονται με διαδοχικές μετρήσεις στον άξονα x των διαδοχικών χρονικών στιγμών t_1, t_2, t_3, \dots , όπου $t_{i+1} = t_i + \varepsilon$. Έστω x_i , μια από τις πιθανές τιμές της μέτρησης της x -συντεταγμένης τη στιγμή t_i . Συνεπώς, αν A είναι μια μέτρηση του x τη στιγμή t_1 , τότε x_1 είναι αυτό που προηγούμενως συμβολίσαμε με a . Σύμφωνα με την κλασική θεώρηση, οι διαδοχικές τιμές x_1, x_2, x_3, \dots της x -συντεταγμένης πρακτικά ορίζουν μία διαδρομή (path) $x(t)$. Τελικά, αναμένουμε να πάρουμε το όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ και ελπίζοντας ότι τα ολοκληρώματα θα έχουν νόημα και ότι θα συγκλίνουν.

Η πιθανότητα μιας ενός τέτοιου path είναι συνάρτηση των $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ και έστω ότι τη συμβολίζουμε με $P(\dots x_i, x_{i+1}, \dots)$. Η πιθανότητα ότι το path βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη περιοχή Π του χωρόχρονου υπολογίζεται κλασικά ολοκληρώνοντας την πιθανότητα πάνω σε όλη αυτήν τη περιοχή. Συνεπώς, η πιθανότητα το x_i να βρίσκεται μεταξύ a_i και b_i και το x_{i+1} να βρίσκεται μεταξύ a_{i+1} και b_{i+1} κ.ο.κ, είναι

$$\begin{aligned} \dots \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots P(\dots x_i, x_{i+1}, \dots) \dots dx_i dx_{i+1} \dots = \\ = \int_{\Pi} P(\dots x_i, x_{i+1}, \dots) \dots dx_i dx_{i+1} \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου το σύμβολο \int_{Π} έχει την έννοια της ολοκλήρωσης πάνω σε όλο το εύρος τιμών των μεταβλητών x_i , που περιέχονται στην περιοχή Π .

Παρατηρήσεις 2.1.

1. Η σχέση (2.8) είναι απλά η εξ. (2.6), με τα a, b, c, \dots να έχουν αντικατασταθεί από τα x_1, x_2, x_3, \dots και η άθροιση να έχει μετατραπεί σε ολοκλήρωση.

2. Αναμένουμε ότι η πιθανότητα ένα σωματίδιο να βρίσκεται στην περιοχή Π να είναι το τετράγωνο ενός μιγαδικού αριθμού $|\varphi(\Pi)|^2$. Αυτόν τον αριθμό ο Feynman τον αποκάλεσε *πλάτος πιθανότητας* (probability amplitude) της περιοχής Π και υπολογίζεται από την εξ. (2.7) με τα a, b, c, \dots να έχουν αντικατασταθεί από τα x_1, x_2, x_3, \dots και η άθροιση να έχει μετατραπεί και πάλι σε ολοκλήρωση:

$$\varphi(\Pi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Pi} \Phi(\dots x_i, x_{i+1}, \dots) \dots dx_i dx_{i+1} \dots \quad (2.9)$$

Ο μιγαδικός αριθμός $\Phi(\dots x_i, x_{i+1}, \dots)$ είναι συνάρτηση των μεταβλητών x_i , που ορίζουν το path. Διαισθητικά, θα μπορούσαμε να φανταστούμε ότι η χρονική διαφορά ε τείνει στο μηδέν, ούτως ώστε ο Φ να εξαρτάται ουσιαστικά από ολόκληρο το path $x(t)$, παρά από μόνο τις τιμές των x_i , τις χρονικές στιγμές t_i , με $x_i = x(t_i)$. Έτσι, ορίζουμε το μιγαδικό αριθμό Φ ως το συναρτησιακό πλάτους πιθανότητας (probability amplitude functional) των διαδρομών $x(t)$.

Οι προηγούμενοι συλλογισμοί συνοψίζονται στο ακόλουθο:

Αξίωμα I.

Για να προσδιορίσουμε εάν ένα σωματίδιο έχει μια διαδρομή (path) μέσα σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χωρόχρονου, τότε η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι καταφατικό είναι η απόλυτη τιμή του τετραγώνου ενός αθροίσματος μιγαδικών ποσοτήτων-συνεισφορών, μία για κάθε διαφορετική “ιστορία” ή διαδρομή μέσα στην περιοχή αυτή, που ονομάζεται “πλάτος πιθανότητας”.

Το προηγούμενο αξίωμα δεν είναι πλήρες. Το νόημα ενός αθροίσματος όρων, έναν για “κάθε” διαδρομή είναι διφορούμενο. Η ακριβής ερμηνεία της εξ. (2.9) είναι η ακόλουθη. Μια διαδρομή ορίζεται αρχικά μόνο από τις θέσεις $x_i = x(t_i)$, διανύοντας μια ακολουθία ισαπεχόντων χρονικών στιγμών $t_i = t_{i-1} + \varepsilon$. Έπειτα, όλες οι τιμές των συντεταγμένων μέσα στην περιοχή Π έχουν ένα ίσο “βάρος” (συνεισφορά). Η πραγματική τιμή της συνεισφοράς εξαρτάται από το ε και μπορεί να επιλεγεί κατάλληλα ώστε η πιθανότητα ενός βεβαίου ενδεχομένου να κανονικοποιείται στη μονάδα. Η ερμηνεία και η περαιτέρω εξήγηση αυτών των συνεισφορών ακολουθεί στην §2.3-1. Το όριο $\varepsilon \rightarrow 0$ πρέπει να συμπεριληφθεί στο τέλος του υπολογισμού και ερμηνεύεται ως η μετάβαση από τους κβαντικούς νόμους στους κλασικούς νόμους. Αν δεν υπάρχουν μαθηματικά κενά στους προηγούμενους συλλογισμούς, οδηγούμαστε σε μια νέα επαναδιατύπωση της Κβαντομηχανικής.

2.3 Ο φορμαλισμός του Feynman

Ο ίδιος ο Feynman απέδειξε ότι αυτή η τρίτη συστηματοποίηση της Κβαντομηχανικής, η προσέγγιση μέσω path integrals, είναι ισοδύναμη με τις γνωστές, διαφορετικές διατυπώσεις του Schrödinger, αλλά και του Heisenberg και του Dirac. Περιέργως, τρεις ανεξάρτητες μαθηματικές θεωρίες έχουν συσχετιστεί με τις τρεις θεμελιώσεις της Κβαντομηχανικής. Ενώ η Heisenberg-Dirac μέθοδος βασίζεται σε “άλγεβρα”, η προσέγγιση του Schrödinger βασίζεται σε διαφορικές εξισώσεις και συνεπώς χρησιμοποιεί “ανάλυση”. Η μέθοδος του Feynman από την άλλη βασίζεται σε “γεωμετρία”. Αυτός ο γεωμετρικός τρόπος έκφρασης της Κβαντικής Αρχής της Υπέρθωσης είναι διαισθητικά ιδιαίτερα ελκυστικός, αφού μας επιτρέπει άμεσα να φανταστούμε την ενισχυτική ή αναιρετική αλληλεπίδραση που προκύπτει από πολλά διαφορετικά μονοπάτια. Ο ίδιος ο Feynman απέδωσε αυτή την πολλαπλότητα των πιθανών περιγραφών των κβαντικών φαινομένων στο ότι έχουμε συλλάβει στοιχεία-

κλειδιά στην περιγραφή των ατομικών φαινομένων και είναι μια έκφραση και αναπαράσταση της απλότητας της φύσης.

Στην πραγματικότητα, η ιδέα του path integral, συνήθως γνωστού ως συναρτησιακό ολοκλήρωμα (functional integral), είχε γίνει γνωστή στους μαθηματικούς πολύ πριν τον Feynman. Ένα συναρτησιακό μπορεί να θεωρηθεί ως το ανάλογο μιας συνάρτησης απείρων πολλών μεταβλητών. Υπολογισμοί που αφορούν ένα συναρτησιακό γίνονται θεωρώντας το ως μια συνάρτηση πεπερασμένου πλήθους N μεταβλητών, και ακολουθώντας, αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$. Η διαδικασία είναι παρόμοια της μεθόδου διαμέρισης του χρόνου του Feynman. Πρώιμα άρθρα του P. Daniel από το 1918 [16, 17, 18] περιέχουν κάποιες προσπάθειες ολοκλήρωσης ενός συναρτησιακού πάνω σε έναν χώρο συναρτήσεων και επεκτάθηκαν από τον M. Kač. Μεταγενέστερα, ο N. Wiener το 1923 εισήγαγε έναν κατάλληλο μετρο-θεωρητικό⁸ ορισμό ενός ολοκληρώματος ενός συναρτησιακού στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων [94, 95] προσπαθώντας να μοντελοποιήσει την κίνηση μικρών σωματιδίων μέσα σε ένα υγρό (κίνηση Brown). Ο Feynman από την άλλη ανέπτυξε την ιδέα ενός ολοκληρώματος στον ίδιο χώρο των συνεχών συναρτήσεων κατά τις προσπάθειες του να μοντελοποιήσει την Κβαντομηχανική των πολύ μικρών σωματιδίων, όπως τα ηλεκτρόνια. Η ομοιότητα αυτή μεταξύ του Feynman path integral και του Wiener integral έχει επαρκώς σχολιαστεί στη βιβλιογραφία. Για να πετύχει, η μέθοδος του Feynman έπρεπε να ήταν συμβατή με την Schrödinger.

2.3-1 Όλα πρέπει να είναι συμβατά με την Schrödinger

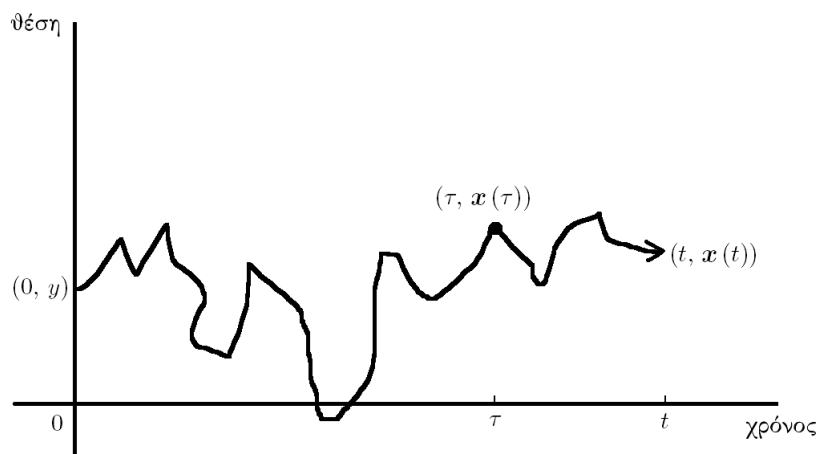
Στις ενότητες §2.1 και §2.2 περιγράψαμε τους διαισθητικούς συλλογισμούς του Feynman προσπαθώντας να θεμελιώσει την QED⁹. Στόχος μας όμως είναι η απλή παράθεση αυτών για λόγους συνοχής των εννοιών που θα ακολουθήσουν. Εδώ, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα μικρό ιστορικό σκαρίφημα της μαθηματικής θεωρίας των Path Integrals του Feynman, θεωρώντας την απλή περίπτωση ενός μη σχετικιστικού σωματιδίου μάζας m , που κινείται σε Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n υπό την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης που δίνεται μέσω του δυναμικού $V(x)$, το οποίο υποθέτουμε για απλότητα, ότι είναι μια φραγμένη, συνεχής συνάρτηση με πραγματικές τιμές από τον \mathbb{R}^n .

Η κλασική Λαγκρανσιανή (Lagrangian), από την οποία, ως γνωστόν προκύπτουν οι κλασικές εξισώσεις Euler-Lagrange της κίνησης, είναι:

$$L = E_{KIN} - E_{ΔYN}$$

⁸Αξίζει να σημειωθεί πως ακόμη και το όνομα *path integral* εμφανίζεται για πρώτη φορά στο άρθρο του N. Wiener το 1923.

⁹Κβαντική Ηλεκτρο-Δυναμική.



Εικ. 2.3 Ένα γράφημα του path $x = \{x(\tau)\}$, $0 \leq \tau \leq t$, με συνοριακές συνθήκες $x(0) = y$ και $x(t) = x$.

δηλαδή¹⁰

$$L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \quad (2.10)$$

Ορισμός 2.2 (Δράση).

Η δράση (action) S πάνω σε ένα μονοπάτι (path) $x(\cdot)$ στο χρονικό διάστημα $0 \leq \tau \leq t$ (συμβολικά $S_t(x)$) είναι ένα συναρτησιακό που προκύπτει από το ολοκλήρωμα της Λαγκρασιανής κατά μήκος του μονοπατιού, δηλαδή:

$$S_t(x) := S[x(\cdot)] = \int_0^t \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}(\tau)\right)^2 - V(x(\tau)) \right] d\tau$$

Η αρχή ελάχιστης δράσης του Hamilton υπαγορεύει ότι η τροχιά που τελικά ακολουθείται από ένα σωματίδιο καθώς πηγαίνει από το σημείο y , τη στιγμή 0 , στο σημείο x τη στιγμή t , είναι αυτή που κάνει την δράση *ελάχιστη*, δηλαδή πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το:

$$S_t(x) = \int_0^t L\left(x(\tau), \frac{dx}{dt}(\tau)\right) d\tau \quad (2.11)$$

πάνω σε όλες τις πιθανές μεταβολές των paths $x = \{x(\tau)\}$, $0 \leq \tau \leq t$, με $x(0) = y$ και $x(t) = x$, που αφήνουν τα αρχικά και τελικά σημεία y και x αντίστοιχα, και τον χρόνο t , σταθερά (βλ. [Εικόνα 2.3](#)). Η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg όμως, όπως αναφέραμε στην [§2.1](#) θέτει κάποια όρια στην ακρίβεια της μέτρησης της θέσης x , τη στιγμή t . Από φυσικής πλευράς, συνεπώς, εκχωρούμε μια πιθανότητα σε κάθε path x , $P_x(x, t)$.

¹⁰Θεωρούμε για λόγους απλότητας ότι η Λαγκρασιανή εξαρτάται μόνο από την θέση και από το τετράγωνο της πρώτης παραγώγου αυτής (ταχύτητα).

Στην Κβαντομηχανική, η κατάσταση ενός σωματιδίου τη στιγμή t περιγράφεται από μια συνάρτηση¹¹ $\psi(x, t)$, η οποία ανήκει στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \mathbb{C})$ και ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t) \quad (2.12)$$

με Cauchy αρχική συνθήκη τη στιγμή $t = 0$,

$$\psi(x, 0) = f(x) \quad (2.13)$$

όπου $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, η Λαπλασιανή (Laplacian) στον \mathbb{R}^n και \hbar , η σταθερά του Planck διαιρεμένη με 2π . Επιπλέον, για την πιθανότητα κάθε μονοπατιού, πρέπει να ισχύει ότι: $P_x(x, t) = |\psi(x, t)|^2$.

Σχόλιο 2.3.

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να κάνουμε πρώτα μερικά σχόλια και να δώσουμε κάποιους ορισμούς που αφορούν τελεστές σε έναν μιγαδικό χώρο Hilbert \mathcal{H} . Το πεδίο ορισμού ενός γραμμικού τελεστή T , $D(T)$ είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{H} . Έχουμε

$$T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1Tx_1 + a_2Tx_2 \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad \forall x_1, x_2 \in D(T)$$

Για να προχωρήσουμε χρειαζόμαστε τις ακόλουθες έννοιες για έναν τελεστή:

1. *Φραγμένος*. Ένας γραμμικός τελεστής T στον \mathcal{H} καλείται *φραγμένος* αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ έτσι ώστε $\|T\psi\| \leq C\|\psi\|$ για κάθε $\psi \in D(T)$.
2. *Νόρμα*. Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ ένας φραγμένος τελεστής. Η *νόρμα* του T , $\|T\|$, ορίζεται ως

$$\|T\| := \sup \{ \|T\psi\| : \psi \in X, \|\psi\| = 1 \} = \sup \left\{ \frac{\|T\psi\|}{\|\psi\|} : \psi \in X, \psi \neq 0 \right\}$$

3. *Συνεχής*. Ένας γραμμικός τελεστής καλείται *συνεχής* στην ψ στο $D(T)$ αν για κάθε ακολουθία $\{\psi_n\}$ στον $D(T)$ για την οποία $\|\psi_n - \psi\| \rightarrow 0$ συνεπάγεται ότι $\|T\psi_n - T\psi\| \rightarrow 0$.
4. *Φραγμένος ανν συνεχής*. Ένας γραμμικός τελεστής T είναι φραγμένος ανν είναι συνεχής. Αν T είναι φραγμένος, υπάρχει σταθερά $C > 0$ έτσι ώστε $\|T\psi\| \leq C\|\psi\|$, και συνεπώς $\|T\psi_n - T\psi\| = \|T(\psi_n - \psi)\| \leq C\|\psi_n - \psi\|$. Αλλά αν T δεν είναι φραγμένος, υπάρχει ακολουθία $\{\psi_n\}$ στον $D(T)$ για την οποία $\|T\psi_n\| \geq n\|\psi_n\|$. Θεωρώντας $g_n = \frac{\psi_n}{n\|\psi_n\|}$, έχουμε ότι $\|g_n\| \rightarrow 0$, ενώ $\|Tg_n\| \geq 1$.

¹¹Οι φυσικοί την αποκαλούν κυματοσυνάρτηση.

5. *Ισομετρία.* Ένας φραγμένος, γραμμικός τελεστής T στον \mathcal{H} είναι *ισομετρία* ανν $\langle T\psi, T\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle$, ανν $T^*T = I$.
6. *Ορθομοναδιαίος.* Ένας φραγμένος, γραμμικός τελεστής U από τον \mathcal{H} στο \mathbb{C} είναι *ορθομοναδιαίος* (unitary) ανν U είναι ισομετρία και επί. Για παράδειγμα, ο τελεστής του μετασχηματισμού Fourier είναι ορθομοναδιαίος τελεστής (Θεώρημα Plancherel).

Σε ό,τι ακολουθεί, \mathcal{H} θα είναι ένας χώρος Hilbert των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων από το \mathbb{R} στο \mathbb{C} , τέτοιες ώστε η ψ να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη:

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx < \infty$$

Σε αυτόν τον χώρο, ταυτίζοντας τις συναρτήσεις ψ_1 και ψ_2 που είναι σχεδόν παντού ίσες, το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1, \psi_2 \rangle &:= \int_{\mathbb{R}} \psi_1(x) \overline{\psi_2(x)} dx, \\ \|\psi\|^2 &= \langle \psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Ο παραδοσιακός συμβολισμός αυτού του χώρου είναι ο $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Η σύγκλιση των ψ_n στην ψ θεωρείται με την ακόλουθη έννοια

$$\|\psi_n - \psi\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi_n - \psi|^2 dx \right)^{1/2} \xrightarrow{n} 0$$

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Για περισσότερα, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο κλασικό σύγγραμμα [20].

Προσπαθώντας να επιλύσουμε την (2.12) ορίζουμε τον τελεστή:

$$H := -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \quad (2.14)$$

που ως γνωστόν είναι η Hamiltonian του κβαντομηχανικού σωματιδίου. Ο H είναι αυτοσυζυγής τελεστής ($H = H^*$), στο φυσιολογικό πεδίο ορισμού του Δ και συνεπώς ορίζεται ο τελεστής $e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ και ανήκει στο σύνολο $\mathcal{U}(H)$, που αποτελεί πολλαπλασιαστική ομάδα στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ με μονάδα τον ταυτοτικό τελεστή I (για απόδειξη βλ. [20] και [52]).

Συνεπώς, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (2.12), (2.13) είναι η

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} f(x) \quad (2.15)$$

απαιτώντας, σύμφωνα με το Σχόλιο 2.3 και τη φυσική του Προβλήματος να ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad \text{για } t \geq 0 \quad (2.16)$$

Από την Lie-Kato-Trotter Φόρμουλα και τις ιδιότητες Ημιομάδας έχουμε:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}tH} = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{t}{n}V} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{t}{n}H_0} \right)^n \quad (2.17)$$

όπου ορίζουμε

$$H_0 := -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (2.18)$$

Για να έχει νόημα το ακόλουθο ολοκλήρωμα, υποθέτουμε ότι f ανήκει στον χώρο¹² Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και έχουμε επίσης

$$e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0} f(x) = \left(2\pi i \frac{\hbar}{m} t \right)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{im\frac{(x-y)^2}{2\hbar t}} f(y) dy \quad (2.19)$$

όπου η σταθερά $\mathcal{N} = \left(2\pi i \frac{\hbar}{m} t \right)^{-\frac{n}{2}}$ προτάθηκε από τον Feynman, ονομάζεται renormalization constant και είναι άμεσα συνδεδεμένη με το Πρόβλημα¹³ (2.12), (2.13).

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (2.17) και (2.19) έχουμε:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}tH} f(x) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi i \frac{\hbar}{m} \frac{t}{k} \right)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{\hbar}S_t(x_n, \dots, x_0)} f(x_0) dx_0 \cdots dx_{n-1} \quad (2.20)$$

όπου εξ ορισμού $x_n = x$, $\sqrt{-i} := e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2}$ και:

$$S_t(x_n, \dots, x_0) := \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{m}{2} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{\left(\frac{t}{n}\right)^2} - V(x_i) \right] \quad (2.21)$$

Ας παρατηρήσουμε λίγο την έκφραση (2.20). Είναι ένα n -πολλαπλό ολοκλήρωμα στον \mathbb{R}^n . Καθώς το $n \rightarrow \infty$ “ολοκληρώνουμε” σε έναν απειροδιάστατο χώρο. Η (2.20) δίνει τη λύση της Schrödinger (2.12), (2.13) ως ένα όριο ολοκληρωμάτων¹⁴.

Επιπρόσθετα, συγκρίνουμε την έκφραση του Feynman για την λύση της Schrödinger μέσω αθροισμάτων Riemann για $V \equiv 0$ με την έκφραση της §1.3-2 μέσω μετασχηματισμών

¹²
Ορισμός 2.4. [Χώρος Schwartz]

Ο χώρος Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ αποτελείται από όλες τις μιγαδικές συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοιες ώστε:

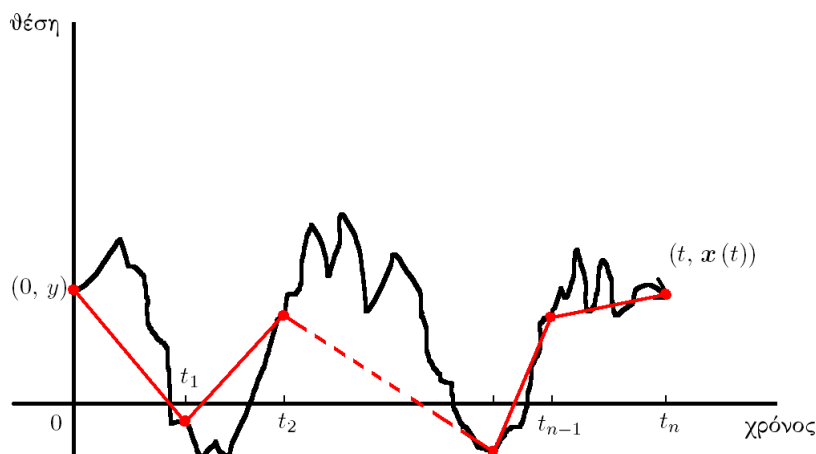
1. Η f έχει παραγώγους κάθε τάξης.
2. Η f και κάθε παράγωγός της έχει συγκλίνουν στο μηδέν καθώς $|x| \rightarrow \infty$, δηλαδή:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m D^n f(x) = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι ο χώρος Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

¹³Για τα περισσότερα Προβλήματα Αρχικών Τιμών της Θεωρητικής Φυσικής που χρησιμοποιείται σήμερα η τεχνική του Feynman η εύρεση της renormalization constant μπορεί να γίνει ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα.

¹⁴Για να υπολογιστεί η (2.11) πρέπει να γνωρίζουμε το path σε όλα τα σημεία του και όχι απλώς στα x_i .



Εικ. 2.4 Η ιδέα του Feynman: 1ης τάξης πολυγωνική προσέγγιση του μονοπατιού $x = \{x(\tau)\}$, $0 \leq \tau \leq t$, με συνοριακές συνθήκες $x(0) = y$ και $x(t) = x$.

Fourier, (1.34) της σελ. (1.34). Δηλαδή συγκρίνουμε την (2.20):

$$\psi(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t/n} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{i m}{2 \hbar t/n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 \right\} f(x_0) dx_0 \cdots dx_{n-1}, \quad (2.22)$$

όπου $x_n = x$, $\psi(x, 0) = f(x)$, με το αποτέλεσμα (1.34):

$$\psi(x, t) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp \left[\frac{i m}{2 \hbar t} (x - x_0)^2 \right] \cdot f(x_0) dx_0 \quad (2.23)$$

Τα κοινά χαρακτηριστικά των ολοκληρωμάτων είναι αρκετά ενθαρρυντικά.

Ακόμη, παρατηρώντας προσεκτικά την (2.21) αν θεωρήσουμε $\frac{t}{k} = h$ και λόγω της (2.20) αφήσουμε το $h \rightarrow 0$ το κλάσμα $\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{h} \right)^2$ είναι μια διακριτή προσέγγιση του $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ της ταχύτητας στο τετράγωνο. Συνεπώς, η εν λόγω έκφραση δεν είναι άλλη από μια διακριτή προσέγγιση της δράσης (2.11) που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

Η ιδέα του Feynman της §2.2 μπορεί τώρα να διατυπωθεί ως μια προσπάθεια να ξαναγράψουμε την (2.20) σε τέτοιο τρόπο ώστε να μοιάζει, επίσημα τουλάχιστον, σαν ένα ολοκλήρωμα πάνω σε έναν χώρο συναρτήσεων, που ονομάζονται *μονοπάτια*. Έστω, λοιπόν, $x(\tau)$ να είναι μια πραγματική απολύτως συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[0, t]$, έτσι ώστε $x(\tau_j) = x_j$, $j = 0, \dots, k$, όπου $\tau_j = \frac{j t}{k}$ και x_0, \dots, x_k να είναι δοθέντα σημεία στον \mathbb{R}^n , με $x_k = x$. Ο Feynman βλέπει το $S_t(x_k, \dots, x_0)$ ως μια Riemann προσέγγιση

(βλ. Εικόνα 2.4) της κλασικής δράσης¹⁵ $S_t(\mathbf{x})$ κατά μήκος του μονοπατιού \mathbf{x} ,

$$S_t(\mathbf{x}) = \int_0^t \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}(\tau) \right)^2 d\tau - \int_0^t V(\mathbf{x}(\tau)) d\tau$$

Επίσης, καθώς $k \rightarrow \infty$ το μέτρο στην (2.20) γίνεται $\mathcal{D}_t^\infty[\mathbf{x}] := \mathcal{N} \prod_{0 \leq \tau \leq t} d\mathbf{x}(\tau)$, όπου \mathcal{N} είναι μια σταθερά κανονικοποίησης και $\mathcal{D}_t^\infty[\mathbf{x}]$ είναι μια συμβολική έκφραση για το απειροδιάστατο μέτρο Lebesgue (το οποίο, όπως αναφέρουμε στη συνέχεια, δεν υπάρχει). Τελικά η (2.20) γράφεται στη διαισθητική έκφραση

$$\mathcal{K}(x, t; y, 0) = \int_{\mathcal{C}_x} e^{-\frac{i}{\hbar} S_t(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}(0)) \mathcal{D}_t^\infty[\mathbf{x}] \quad (2.24)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στον χώρο \mathcal{C}_x των συνεχών συναρτήσεων $\mathbf{x}(t)$ στο $[0, \infty)$ με $\mathbf{x}(t) = x$, με τελικό σημείο, δηλαδή, τη στιγμή t το x (και με αρχικό σημείο $\mathbf{x}(0) = y$). Αυτή αποτελεί και την περίφημη έκφραση του Feynman της λύσης της Schrödinger (2.12), (2.13) μέσω *path integrals* ή επίσης γνωστών ως *ολοκληρώματα Feynman* (Feynman integrals).

Παρόλη την επιτυχημένη, διαισθητική δύναμη του, το ολοκλήρωμα Feynman δεν χαρακτηρίζεται από μαθηματική αυστηρότητα. Ο ίδιος ο Feynman γνώριζε το πρόβλημα:

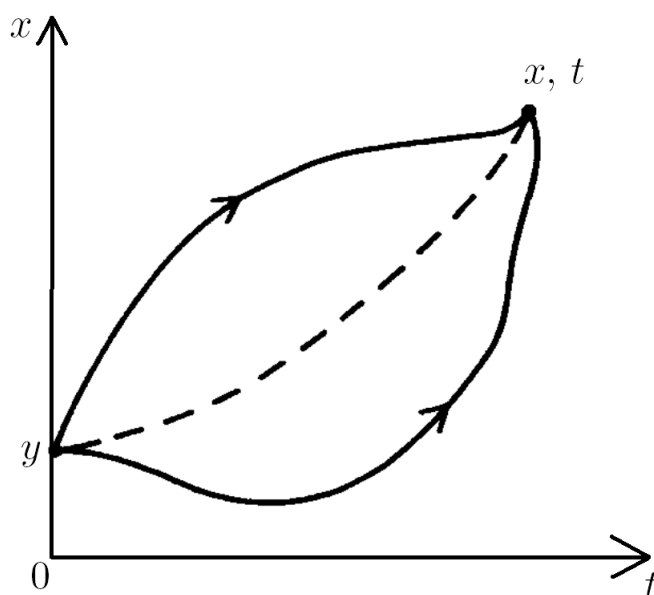
[...] νιώθει κανείς όπως θα πρέπει να ένιωσε ο Cavalieri υπολογίζοντας τον όγκο της πυραμίδας πριν την επινόηση της Ανάλυσης. [26]

Η έκφραση (2.24) ουσιαστικά δεν είναι ολοκλήρωμα, δηλαδή δεν υπάρχει κανένα μέτρο που να δίνει αυτό το ολοκλήρωμα, με τις προϋποθέσεις της προηγούμενης ανάλυσης, όπως τονίζεται στο [63] και απέδειξε, για παράδειγμα, ο Cameron [11]. Το πρόβλημα της απόδοσης νοήματος στον ευρηματικό λογισμό του Feynman αφέθηκε, συνεπώς, στους μαθηματικούς. Μεταξύ των πολλών διαφορετικών προσεγγίσεων που αναπτύχθηκαν, η μαθηματική θεωρία του λευκού θορύβου (white noise theory) θα μπορούσε να θεωρηθεί αρκετά επιτυχής· βλ. για παράδειγμα τα βιβλία [37] και [62]. Οι συγγραφείς J. Gerald και M. Lapidus έχουν συνοψίσει αρκετές πλευρές της ως τώρα έρευνας των Feynman path integrals στο ευχάριστο, 800-σέλιδο, σχεδόν, βιβλίο τους [31]. Παρ' όλα αυτά πρέπει να τονιστεί και πάλι πως κάτι λείπει σε αυτήν την Θεωρία για να θεμελιωθεί αυστηρά. Αλλά τα τόσα πολλά αποτελέσματά της, που έχουν επαληθευτεί και με άλλες μεθόδους και το πείραμα, δείχνουν ότι υπάρχει σίγουρα ένας σωστός πυρήνας στους συλλογισμούς του Feynman.

Σχόλιο 2.5.

Φυσική ποσότητα, κεντρικής σημασίας στην προσέγγιση του Feynman, αποτελεί ο *δοτής* (propagator) $\mathcal{K}(x, t; y, 0)$ στην (2.24), που αναπαριστά το πλάτος πιθανότητας για

¹⁵ Η λέξη “κλασική” υπονοεί έννοια της Κλασικής Φυσικής (δηλαδή πριν τη Κβαντομηχανική).



Εικ. 2.5 Η αρχή της αντιστοιχίας *correspondece principle* μεταξύ δύο από τα πιθανά κβαντικά paths (“—”) και του κλασικού path (“- -”) που καθιστά την κλασική δράση ελάχιστη.

ένα σωματίδιο να ταξιδέψει από ένα χωροχρονικό σημείο σε ένα άλλο. Σύμφωνα με την κλασική θεώρηση υπάρχει μόνο ένα path ή τροχιά της κίνησης του σωματιδίου που να συνδέει τα δύο τελικά σημεία (άκρα) αυτής, δηλαδή η τροχιά ελάχιστης δράσης· βλ. [Εικόνα 2.5](#). Η Κβαντομηχανική θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι στην πραγματικότητα περισσότερο δημοκρατική. Εδώ, όλες οι πιθανές τροχιές (και όχι απλώς το κλασικό path) συνεισφέρουν εξίσου στο πλάτος της κίνησης. Επιπρόσθετα, όλες οι τροχιές συνεισφέρουν εξίσου κατά μέτρο, αλλά διαφορετικά σε φάση (και πιθανόν πολλές να αλληλοεξουδετερώνονται κατά την “άθροιση”), με την φάση των οποίων να ταυτίζεται με την κλασική δράση μετρημένη σε μονάδες του \hbar , τη μονάδα μέτρησης της κβαντικής δράσης.

Οι προηγούμενοι συλλογισμοί συνοψίζονται στο ακόλουθο δεύτερο αξίωμα του Feynman:

Αξίωμα II.

Οι διαδρομές (paths) συνεισφέρουν εξίσου κατά μέτρο. Αλλά η φάση της συνεισφοράς τους είναι η κλασική δράση (σε μονάδες του \hbar), δηλαδή το χρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανσιανής πάνω στο path.

Αυτό το αξίωμα υπονοεί ότι η συνεισφορά $\Phi_t[x]$ ενός δεδομένου path, που ορίσαμε στην (2.9) διαισθητικά ως $\Phi(\dots x_i, x_{i+1}, \dots)$ και στο [Αξίωμα I](#), είναι ανάλογη του $\exp\left(\frac{i}{\hbar} S_t(x)\right)$, όπου $S_t(x)$: η δράση ([Ορισμός 2.2](#)).

Από τις [Παρατ. 2.1](#), το [Αξίωμα I](#), το [Σχόλιο 2.5](#) και το [Αξίωμα II](#), η επαναδιατύπωση της Κβαντομηχανικής του Feynman έχει ολοκληρωθεί.

Μέχρι αυτό το σημείο, πιθανότατα οι αναγνώστες θα διακρίνονται σε δύο (ξένες μεταξύ τους) κατηγορίες: στον “διαισθητικό”, και στον “αυστηρό” αναγνώστη. Εάν ανήκετε στην πρώτη κατηγορία, τότε η προηγούμενη ανάλυση αναμφίβολα θα σας ικανοποίησε αρκετά. Παρόλα αυτά το μαθηματικό οικοδόμημα μοιάζει σαθρό. Εάν, από την άλλη, είστε ο τύπος του αυστηρού αναγνώστη που διάβασε τα προηγούμενα κομψά μαθηματικά με μεγάλη επιφύλαξη, τότε πιθανότατα να σκεπτόσαστε ότι “όλα αυτά δεν θα δουλέψουν”. *Πράγματι!* Για την ορθότητα των προηγούμενων μαθηματικών πρέπει να συνεχίσετε να αμφιβάλλετε! Ωστόσο, από την επόμενη ενότητα §2.4, κατά κάποιον μαγικό, όπως θα δούμε, τρόπο, όλες αυτές οι αμφιβολίες και τα εμπόδια ξεπερνώνται, καθώς οι μαθηματικές αποδείξεις που θα ακολουθήσουν είναι αυστηρές.

2.4 Πέρα από τον Feynman: Εμπνέοντας άλλους

Όπως προείπαμε, η θεωρία της ολοκλήρωσης σε χώρους συνεχών συναρτήσεων ήταν στην πραγματικότητα διαθέσιμη πολύ πριν από την σύλληψη των Feynman path integrals, ιδιαίτερα προερχόμενη από την έρευνα του Wiener (1923) στην κίνηση Brown [94]. Ήταν, ωστόσο, υπό την επιρροή της δουλειάς του Feynman που ο Mark Kač [46] το 1949 απέδειξε ότι αντικαθιστώντας στη λύση του Feynman της Schrödinger, όπου t το $-it$ (φανταστικός χρόνος) προκύπτει η λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= \sigma \Delta u(x, t) - V(x) u(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x)\end{aligned}\tag{2.25}$$

υπό την αναπαράσταση (representation)

$$u(x, t) = \int e^{-\int_0^t V(\gamma(\tau) + x) d\tau} f(\gamma(0) + x) dW(\gamma)\tag{2.26}$$

όπου με $dW(\gamma)$ συμβολίζουμε το μέτρο Wiener για την ανέλιξη Wiener, δηλαδή την κίνηση Brown με διασπορά $\sigma^2 d\tau$, οριζόμενη στις συνεχείς¹⁶ τροχιές $\gamma(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, με $\gamma(0) = 0$. Ο Kač αναφέρει χαρακτηριστικά

[...] Η ύπαρξη του φανταστικού αριθμού i (η οποία είναι ουσιώδης για την Κβαντική Μηχανική!) κάνει τους χειρισμούς με ολοκληρώματα [όπως αυτά στις σχέσεις (2.20) και (2.22)] εξαιρετικά πονηρούς [45].

Επιπρόσθετα, για να χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς της Στοχαστικής Ανάλυσης του Itô η (2.26) ταυτίζεται με

¹⁶ Ορθότερα, Hölder συνεχείς, τάξης μικρότερης από $\frac{1}{2}$, βλ. για παράδειγμα [46].

Feynman	Εξίσωση Schrödinger	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$ $\psi(x, 0) = f(x)$
	Λύση (path integral)	$\psi(x, t) = \int_{\mathcal{C}_x} e^{-\frac{i}{\hbar} S_t(x)} f(x(0)) \mathcal{D}_t^\infty[x]$
Kač	Εξίσωση θερμότητας	$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \sigma \Delta u(x, t) - V(x) u(x, t)$ $u(x, 0) = f(x)$
	Λύση (ολοκλήρωμα Wiener)	$u(x, t) = \int_{\mathcal{C}_x} e^{-\int_0^t V(\gamma(\tau)+x) d\tau} f(\gamma(0)+x) dW(\gamma)$

Πίνακας 2.1 Αντιπαράθεση της λύσης του Feynman για την εξίσωση Schrödinger και αυτής του Kač για την εξίσωση θερμότητας.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int e^{-\int_0^t V(B(\tau)+x) d\tau} f(B_t^x) dB_t \\
 &= E^x \left[f(B_t) e^{-\int_0^t V(B(s)) ds} \right]
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Κατά συνέπεια, η (2.26) ή η (2.27) είναι μια μέση τιμή ως προς την τυπική Κανονική κατανομή στο πραγματικό χώρο Hilbert των απόλυτα συνεχών συναρτήσεων $\gamma(\tau)$, με νόρμα $\|\gamma\|^2 = \int_0^t \left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2 d\tau$. Στο εξής θα αναφερόμαστε στην (2.27) ως *Feynman-Kač formula* και βρίσκεται στο επίκεντρο των μεθόδων αυτής της εργασίας.

Η (2.26) μπορεί να γραφτεί ως η (2.24) αντικαθιστώντας το $\frac{i}{\hbar} S_t(x)$ με την έκφραση

$$-\frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2 d\tau - \int_0^t V(\gamma(\tau) + x) d\tau$$

Δηλαδή οι (2.26), (2.27) δεν είναι άλλο παρά ένα *αυστηρό* path integral (Wiener path integral), που παίζει για την εξίσωση θερμότητας ένα παρόμοιο ρόλο, με αυτόν του Feynman path integral για την εξίσωση του Schrödinger. Τα δύο αποτελέσματα αυτά φαίνονται συνοπικά στον Πίνακα 2.1.

Το προηγούμενο συμπέρασμα χρησιμοποιήθηκε από τον Cameron [11] και άλλους για να δώσουν έναν “ορισμό μέσω αναλυτικής συνέχειας (analytic continuation)” του Feynman path integral, υπό την έννοια ότι θα μπορούσε να αντιλαμβάνεται κανείς το τελευταίο ως το αναλυτικό συνεχές του ολοκληρώματος Wiener (2.26) με αμιγώς φανταστικό χρόνο $t (= it')$. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να σημειωθεί ότι πέρα από την έλλειψη διασθητικής οπτικής της μεθόδου και τη μη καταλληλότητά της περνώντας στο κλασικό όριο που $\hbar \rightarrow 0$ (ίσως ένα από τα πιο όμορφα χαρακτηριστικά της μεθόδου του Feynman), αυτές οι απόπειρες ορισμού του Feynman path integral κατέληξαν άκαρπες. Αντιμετωπίζοντας το

τελευταίο ως ένα ολοκλήρωμα Wiener με αμιγώς φανταστική κύμανση, συναντά τη δυσκολία ότι το προκύπτων μιγαδικό μέτρο (complex measure) έχει άπειρη ολική κύμανση [31] και είναι συνεπώς ακατάλληλο να ορίσει ολοκληρώματα όπως το (2.24). Το πρόβλημα όμως είναι ανοικτό μέχρι και σήμερα (2010) και η έρευνα συνεχίζεται. Κατά τα λόγια του M. Kač [45]:

Πρώτον η ύπαρξη του ορίου (2.22) είναι, γενικά, δύσκολο να αποδειχθεί, και δεύτερον είναι παράξενο το όριο αυτό να εξαρτάται από τη συγκεκριμένη διακριτοποίηση του ολοκληρώματος της δράσης. Ωστόσο, η διαισθητική έλξη του ορισμού του Feynman είναι τεράστια, και δημιούργησε ένα όνειρο ότι πιθανότατα όλη η Φυσική θα μπορούσε να γραφθεί ξανά σε όρους “αθροισμάτων ιστοριών”.

Κεφάλαιο 3

Μια Σύνδεση Ανάλυσης και Θεωρίας Πιθανοτήτων

Καταλαβαίνεις μια εξίσωση αν, χωρίς να την λύσεις μπορείς ωστόσο να πεις το πως συμπεριφέρεται η λύση αυτής.

R. Feynman

Όπως αναφέραμε στην §2.4 του προηγούμενου κεφαλαίου, ο μεγάλος Πολωνός Μαθηματικός Mark Kač (προφέρεται κάχτς) με μια ευφυή παρατήρηση, το 1949 απέδειξε ότι οι συλλογισμοί του Feynman θα μπορούσαν να δούλευαν για μια μεγάλη κλάση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ) [46]. Στην πραγματικότητα, υπήρχε μια πολύ γενικότερη μεθοδολογία αντιμετώπισης ΜΔΕ μέσω της Θεωρίας Πιθανοτήτων.



Εικ. 3.1 Mark Kač (1914-1984).

Ακολουθώντας τους συλλογισμούς του Kač και των μετέπειτα καρπών της μαθηματικής έρευνας θα δείξουμε ότι αρκετές

ΜΔΕ μπορούν να πάρουν μια *στοχαστική αναπαράσταση*. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε πως η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε (κλασικές) λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \Delta u(\mathbf{x}, t) \quad (1a)$$

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \Delta u(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t) \quad (2a)$$

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \Delta u(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) \quad (3a)$$

Κ. Στούρας, Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω Path Integrals. Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων.

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} \Delta u(x, t) + b(x) \cdot \nabla u(x, t) \quad (4a)$$

με $u : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχή στο $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ υπό την αρχική συνθήκη:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5)$$

Οι λύσεις σε αυτές τις (παραβολικού τύπου) εξισώσεις δίνονται (υπό κατάλληλες υποθέσεις) αντίστοιχα από τις

$$E_x[f(B_t)] \quad (1b)$$

$$E_x \left[f(B_t) + \int_0^t g(B_s, t-s) ds \right] \quad (2b)$$

$$E_x \left[f(B_t) \exp \left(\int_0^t V(B_s) ds \right) \right] \quad (3b)$$

$$E_x \left[f(B_t) \exp \left(\int_0^t b(B_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |b(B_s)|^2 ds \right) \right] \quad (4b)$$

Σχόλιο 3.1.

Οι προηγούμενες στοχαστικές αναπαραστάσεις των λύσεων θα μπορούσαν να περιγραφούν ως εξής:

1. Για τη λύση της εξίσωσης θερμότητας, χρησιμοποίησε την κίνηση Brown και η λύση θα είναι η μέση τιμή της αρχικής συνθήκης υπολογισμένη για την κίνηση Brown, δηλαδή $u_t(x, t) = E_x[f(B_t)]$.
2. Για τη λύση της μη ομογενούς εξίσωσης $u_t(x, t) = \frac{1}{2} \Delta u(x, t) + g(x, t)$, πρόσθεσε στην προηγούμενη λύση το ολοκλήρωμα της g κατά μήκος της διαδρομής από το 0 ως το t .
3. Για τη λύση εξισώσεων που έχουν και μια $V(x)$ $u(x, t)$ εξάρτηση, απλά πάρε τη μέση τιμή του γινομένου της αρχικής συνθήκης υπολογισμένη για την κίνηση Brown επί έναν εκθετικό όρο $\exp \left(\int_0^t V(B_s) ds \right)$. Πιο γλαφυρά, μπορούμε να φανταστούμε το σωματίδιο της κίνησης Brown (μαθηματικό μοντέλο ενός κόκκου σκόνης στον αέρα) σαν να έχει μάζα 1 τη στιγμή 0 ($M(0) = 1$) και να αλλάζει μάζα σύμφωνα με τη σχέση $\frac{dM}{dt}(t) = V(B_t) M(t)$. Παίρνοντας, έπειτα, τη μέση τιμή λαμβάνουμε υπόψη μας και το βάρος του σωματιδίου (σε σύγκριση με τις προηγούμενες περιπτώσεις).
4. Για την εισαγωγή ενός παράγοντα $b(x) \cdot \nabla u(x, t)$, πολλαπλασιάζουμε κατά τα γνωστά $f(B_t)$ επί έναν αρκετά περίεργο, τώρα, παράγοντα. Παρατηρώντας τη μορφή της λύσης, βλέπουμε ότι εμπεριέχει ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα. Η φυσική ερμηνεία του επιπρόσθετου όρου $b(x) \cdot \nabla u(x, t)$ αντιστοιχεί σε ένα πεδίο δυνάμεων, αλλά η

φυσική ερμηνεία της στοχαστικής αναπαράστασης της λύσης δεν είναι ακόμη γνωστή! Σαφέστατα όμως είναι μια πιο “γεωμετρική” λύση, από την κλασική λύση της Ανάλυσης. Η τελευταία μπορεί πιθανότατα να “μιλήσει” το πολύ για ύπαρξη λύσης, αλλά η Στοχαστική Ανάλυση πάει λίγο μακρύτερα· μας παρέχει σε μια “κλειστή μορφή” τη λύση (εφόσον υπάρχει) ακόμη και για γενικές συναρτήσεις u . Τα οφέλη, λοιπόν, αυτής της προσέγγισης όπως θα δούμε είναι τεράστια.

Στις ενότητες §3.1 ως και §3.4 θα αποδείξουμε τις προηγούμενες στοχαστικές αναπαραστάσεις των λύσεων μόνο για τις προηγούμενες περιπτώσεις (1), (2) και (3). Όπως θα δούμε, υπάρχει μια γενική μεθοδολογία αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων. Κύρια πηγή αναφοράς αποτελεί το κλασικό βιβλίο του R. Durrett [22]. Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με μια επέκταση των εννοιών αυτών από την ειδική περίπτωση της κίνησης Brown σε μια γενική Feynman-Kač formula για ανεξίτητες Itô. Τα αποτελέσματα της §3.5, αλλά και ολόκληρου του κεφαλαίου αυτού “μεταφράζονται” στην §3.6 επισημαίνοντας την σημασία τους στη Στοχαστική Προσομοίωση ντετερμινιστικών ΜΔΕ.

3.1 Κάποιες πρώτες συνδέσεις

Για την εξίσωση θερμότητας (1a) είναι γνωστό από την Ανάλυση ότι για μια κατάλληλη¹ συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδική φραγμένη λύση $u(x, t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ας επιχειρήσουμε να τη λύσουμε, όπως γνωρίζουμε από το μάθημα των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Fourier² (βλ. §1.3-1) το Πρόβλημα (3.1) γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{u_t(x, t) - u_{xx}(x, t)\} &= 0 \iff \\ \hat{u}_t(s, t) - \mathcal{F}\{u_{xx}(x, t)\} &= 0 \iff \\ \hat{u}_t(s, t) - (-is)^2 \hat{u}(s, t) &= 0 \iff \\ \hat{u}_t(s, t) + s^2 \hat{u}(s, t) &= 0 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{\hat{u}}(s, t) &= -s^2 dt \iff \\ \ln |\hat{u}(s, t)| &= -s^2 t + C(s) \iff \\ \hat{u}(s, t) &= C(s) e^{-s^2 t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹ Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι $u(x, t)$ και $u_x(x, t) \rightarrow 0$ καθώς $|x| \rightarrow \infty$, δηλαδή u να ανήκει στον χώρο Schwartz (Ορισμός 2.4, σελ. 34). Η συνάρτηση f πρέπει να ικανοποιεί, συνεπώς, κάτι ανάλογο.

² Ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει επειδή υποθέσαμε ότι $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

όπου $C(s)$: προσδιοριστέα σταθερά. Αντικαθιστώντας τον μετασχηματισμό Fourier της αρχικής συνθήκης στην (3.1) ($\hat{u}(0, t) = \hat{f}(s) = C(s)$) έχουμε $\hat{u}(s, t) = \hat{f}(s) e^{-s^2 t}$ και τότε

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{u}(s, t) \} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{f}(s) e^{-s^2 t} \} \\ &\stackrel{\text{συνέλιξη}}{=} f(x) \star \mathcal{F}^{-1} \{ e^{-s^2 t} \} \\ &= f(x) \star \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Αν θέσουμε

$$K(x, t) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \quad (3.4)$$

η λύση της (3.1) έχει την ολοκληρωτική αναπαράσταση (για $n = 1$)

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} f(y) K(x - y, t) dy \quad (3.5)$$

Ως γνωστόν τώρα [74], οι πυκνότητες μετάβασης της n -διάστατης κίνησης Brown $\{B_t\}_{t \geq 0}$ με $B_0 = x$ δίνονται από τον τύπο

$$p(x, y, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2t}\right) \quad (3.6)$$

Παρατηρούμε, άμεσα, ότι (για $n = 1$)

$$K(x, t) \equiv p(x, 0, t)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x + s) e^{-\frac{s^2}{2t}} ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

Δηλαδή, παρατηρούμε ότι η λύση $u(x, t)$ (3.5) μπορεί επίσης να γραφτεί ως η μέση τιμή

$$u(x, t) = E[f(x + B_t)] \quad (3.8)$$

και -ως εκ θαύματος- αυτή η εξίσωση είναι ακριβώς η Feynman-Kač formula (2.27) της §2.4 για την ειδική περίπτωση που $V(x) \equiv 0$.

Σχόλιο 3.2.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι μέχρι και την σχέση (3.5), συμπεράναμε τη λύση χωρίς καθόλου αναφορά στην κίνηση Brown · πρόκειται για την κλασική προσέγγιση του Προβλήματος 3.1. Οι σχέσεις (1.25) και (3.8), αλλά και οι μετέπειτα Παρατ. 3.11

έχουν στόχο να μας υπενθυμίσουν το πόσα πολλά διαφορετικά εργαλεία των μαθηματικών πιθανόν να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουμε την Feynman-Kač formula για γενικά δυναμικά V , και πιο συγκεκριμένα, αναμένουμε ότι η Itô formula της §1.2 μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη.

3.1-1 “Εξουδετερωμένη” (killed) κίνηση Brown

Μια ανέλιξη της κ.Β. $\{B_t\}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά τη θέση ενός σωματιδίου, το οποίο κινείται τυχαία στον \mathbb{R}^d . Σε αυτή την υποενοότητα, τροποποιούμε την σ.α. $\{B_t\}$, έτσι ώστε το σωματίδιο να “πεθαίνει” (εξουδετερώνεται) σε ένα τυχαίο χρόνο T . Συγκεκριμένα, ορίζουμε

$$T := \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t k(s, B_s) ds \geq \varrho \right\} \quad (3.9)$$

όπου ϱ είναι μια σ.α. ανεξάρτητη της $\{B_t\}$ και η συνάρτηση $k(t, x)$ ερμηνεύεται ως ρυθμός εξουδετέρωσης ή θνησιμότητας (killing rate). Ένας από τους πιο γενικούς τρόπους κατασκευής νέων στοχαστικών ανελιξεων (σ.α.) από ήδη γνωστές, είναι μέσω μιας τεχνικής κατασκευής που, κατ’αντιστοιχία, ονομάζεται “εξουδετέρωση” ή “θανάτωση” μιας σ.α. (killing a process). Το πιο απλό παράδειγμα μιας τέτοιας κατασκευής δίνεται από μια εκθετικά εξουδετερωμένη (exponentially killed) κίνηση Brown (κ.Β.) και μελετώντας αυτή την ανέλιξη θα οδηγηθούμε με έναν άμεσο τρόπο σε μια απλή Feynman-Kač formula.

Για να ξεκινήσουμε την κατασκευή, έστω ένας μη αρνητικός αριθμός T . Η κ.Β. εξουδετερωμένη τη στιγμή T ορίζεται να είναι η ανέλιξη $\{X_t\}$ με τιμές στο σύνολο $\mathbb{R} \cup \{\odot\}$, που ορίζεται τη στιγμή t ως

$$X_t = \begin{cases} B_t & \text{για } 0 \leq t \leq T \\ \odot & \text{για } t > T \end{cases}$$

Εδώ, προφανώς, η κατάσταση “ \odot ” είναι μια ειδική κατάσταση που εισαγάγαμε ώστε η κίνηση Brown να έχει ένα μέρος να πάει, όταν “πεθαίνει”. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι η X_t δεν ορίζεται για $t > T$. Ο συμβολισμός μοιάζει αρκετά διαισθητικός, αλλά είναι παραδοσιακός στο χώρο των στοχαστικών ανελιξεων.

Τώρα, δοθείσης μιας $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό αυτής στο $\mathbb{R} \cup \{\odot\}$ ορίζοντας απλά $f(\odot) = 0$, ώστε να εισάγουμε ένα ανάλογο του τύπου με την κ.Β. (3.8), που να λύνει την εξίσωση θερμότητας (3.1). Για να γίνουμε απόλυτα σαφείς, εξειδικεύουμε την T να ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , δηλαδή $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Συνεπώς, για την σ.α. T ισχύει

$$P[T > t] = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$$

και εξ’ορισμού η T είναι ανεξάρτητη της κ.Β. $\{B_t\}$. Σε αυτή την περίπτωση, η σ.α. $\{X_t\}$ ονομάζεται εκθετικά εξουδετερωμένη (exponentially killed) κ.Β. με ρυθμό θνησιμότητας $\lambda \geq 0$.

Στη συνέχεια, αναζητούμε πρόβλημα αρχικών τιμών που ικανοποιείται από την

$$u(x, t) = E[f(x + X_t)]$$

Κατ' αρχάς, γνωρίζουμε σίγουρα ότι ισχύει $u(x, 0) = f(x)$ απλά από το γεγονός ότι $X_0 = B_0 = 0$. Συνεπώς, έχουμε μόνο να επαληθεύσουμε τα συμπεράσματά μας για την παράγωγο u_t . Όμως, από τον ορισμό της $u(x, t)$, μαζί με την ανεξαρτησία των ανεξίτηλων $\{B_t\}$ και T , έχουμε την άμεση παραγοντοποίηση

$$u(x, t) = E[f(x + B_t) 1_{\{T > t\}}] = e^{-\lambda t} E[f(x + B_t)] \quad (3.10)$$

και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} E[f(x + B_t)] - \lambda e^{-\lambda t} E[f(x + B_t)] \\ &= e^{-\lambda t} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E[f(x + B_t)] - \lambda E[f(x + B_t) 1_{\{T > t\}}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E[f(x + B_t) 1_{\{T > t\}}] - \lambda E[f(x + B_t) 1_{\{T > t\}}] \\ &= \frac{1}{2} u_{xx}(x, t) - \lambda u(x, t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση (3.11) με την (3a) στην αρχή αυτού του Κεφαλαίου, που θα θέλαμε να καταλλήξουμε, παρατηρούμε ότι είμαστε αρκετά κοντά. Η (3.11) μας λέει τουλάχιστον ότι για την ειδική περίπτωση που το δυναμικό $V(x) \equiv -\lambda$ ο τύπος

$$u(x, t) = E\left[f(x + B_t) \exp\left(\int_0^t V(x + B_s) ds\right)\right] = E[f(x + B_t) e^{-\lambda t}] \quad (3.12)$$

θα μας εφοδιάσει με μια αναπαράσταση της λύσης της εξίσωσης $u_t(x, t) = \frac{1}{2} u_{xx}(x, t) + V(x) u(x, t)$ με $u(x, 0) = f(x)$. Με άλλα λόγια, μόλις αποδείξαμε ότι η Feynman-Kač formula ισχύει για την περίπτωση που το δυναμικό $V(x)$ είναι μια μη θετική σταθερά.

Σχόλιο 3.3.

Η προηγούμενη, απλή παρατήρηση εμφανίζεται σχεδόν αμέσως σε όποιον μελετήσει την εκθετικά αποθνήσκουσα κ.Β., και όσοι έχουν τάσεις γενίκευσης θα βρουν στη πραγματικότητα ότι η ανακάλυψη της Feynman-Kač formula για γενικά δυναμικά $V(x)$ είναι λίγες, μόλις, γραμμές μακριά. Το βήμα-κλειδί είναι να βρούμε ένα τρόπο εναλλακτικής ερμηνείας της μέσης τιμής (3.12), και, δεδομένου του οικονομικού μας προσανατολισμού, τίποτα δε θα ήταν πιο φυσικά αναμενόμενο από το να ερμηνεύσουμε την $E[f(x + B_t) e^{-\lambda t}]$ ως την *προεξοφλημένη αποπληρωμή*³ ενός δανείου, όπου, προφανώς, λ έχει την ερμηνεία του *παράγοντα προεξόφλησης* (επιτοκίου). Έχοντας αυτό κατά νου, δεν υπάρχει κανένας

³ Ως “προεξοφλημένη αποπληρωμή” εννοούμε τον οικονομικό όρο *discounted payout*.

λόγος να περιοριστούμε στην ειδική περίπτωση των σταθερών επιτοκίων, και, αν απλώς θεωρήσουμε επιτόκια που εξαρτώνται από την ανέλιξη $\{x + B_t\}_{t \geq 0}$, η γενικότερη Feynman-Kac formula εμφανίζεται μπροστά μας κατά ένα μαγικό, ίσως, τρόπο!

3.2 Η εξίσωση θερμότητας

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε την ακόλουθη εξίσωση:

Πρόβλημα 3.4.

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{2} \Delta u(x, t) \text{ στο } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) & (a) \\ u &: \text{συνεχής στο } \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \text{ με} & (b) \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.13)$$

Το όνομα της εξίσωσης προέρχεται από το γεγονός ότι αν επιλέξουμε κατάλληλες μονάδες μέτρησης και έστω $u(x, t)$ να είναι η θερμοκρασία στο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ τη στιγμή t , όταν η θερμοκρασία σε κάθε σημείο του χώρου τη στιγμή 0 δίνεται από την συνάρτηση $f(x)$, τότε η u ικανοποιεί την εξίσωση (α) της (3.13).

Θα επιχειρήσουμε να λύσουμε το Πρόβλημα 3.4 με μεθόδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Συνοπτικά, η γενική ιδέα είναι να βρούμε ένα local martingale $M_s \in \mathcal{L}_{\text{LOC}}^2[0, t] \forall 0 \leq s \leq t$ για το οποίο να ισχύει

$$M_0 = u(x, t) \text{ και } E[M_t] = E_x[f(B_t)]$$

Τώρα, επειδή για κάθε local martingale ισχύει $E[M_t] = E[M_0] \stackrel{\text{σ.τ.}\omega}{=} M_0$ θα καταλήξουμε στη στοχαστική αναπαράσταση της αρχής του Κεφαλαίου, $u(x, t) = E_x[f(B_t)]$, της λύσης της (3.13).

Το πρώτο βήμα, λοιπόν, της γενικής μεθοδολογίας που επανειλημμένα θα εφαρμόζουμε, είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο

Λήμμα 3.5.

Αν η u ικανοποιεί την 3.13(a), τότε το $M_s := u(B_s, t - s)$ είναι ένα local martingale στο $[0, t]$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας με προσοχή την Itô formula (1.23) της σελ. 13 για το δοθέν M_s

έχουμε:

$$\begin{aligned}
 u(B_s, t-s) &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r \\
 &\quad + \int_0^s -u_t(B_r, t-r) dr + \frac{1}{2} \int_0^s \Delta u(B_r, t-r) dr \\
 &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r \\
 &\quad + \int_0^s -u_t(B_r, t-r) + \frac{1}{2} \Delta u(B_r, t-r) dr \\
 &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r
 \end{aligned}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι τα στοχαστικά ολοκληρώματα είναι martingales⁴ και άρα $E[M_s] = M_0 = u(B_0, t)$. \square

Παρατηρούμε ότι υποθέτοντας ότι η συνάρτηση u είναι φραγμένη, τότε το $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ είναι φραγμένο local martingale και από το [Λήμμα 1.13](#), το $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ είναι martingale. Από το Θεώρημα Σύγκλισης των martingales [\[74\]](#) έχουμε ότι καθώς $s \uparrow t$, το M_s θα συγκλίνει σε κάποιο όριο (σ.β.). Αν η u ικανοποιεί την [3.13\(b\)](#), αυτό το όριο πρέπει να είναι το $f(B_t)$, δηλαδή

$$\lim_{s \uparrow t} M_s = M \equiv f(B_t) \quad (3.14)$$

Επειδή η $\{M_s\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη:

$$E[M_s | \mathcal{F}_r] \xrightarrow{s \uparrow t} E_x[f(B_t) | \mathcal{F}_r] \quad \forall r \quad (3.15)$$

Από [\(3.14\)](#) και [\(3.15\)](#) για το martingale $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ θα ισχύει

$$E_x[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s = E_x[f(B_t) | \mathcal{F}_s] \quad (3.16)$$

Θέτοντας $s := 0$ στην [\(3.16\)](#), από τον ορισμό του $\{M_s\}$ καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
 M_0 &= u(B_0, t) \\
 &= u(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned}$$

Δηλαδή αποδείξαμε το ακόλουθο Θεώρημα Μοναδικότητας:

Θεώρημα 3.6 (Μοναδικότητα λύσης της εξίσωσης θερμότητας).

Εάν υπάρχει λύση, v , στο [Πρόβλημα 3.4](#) που είναι φραγμένη, τότε πρέπει

$$v(\mathbf{x}, t) \equiv E_x[f(B_t)] \quad (3.17)$$

⁴Υπονοούμε ότι ισχύει, δηλαδή: $E\left[\int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r\right] = 0$

Το [Θεώρημα 3.6](#) δεν μας δίνει τη λύση, αλλά το πως θα πρέπει να είναι η μορφή της λύσης. Συνεπώς, το επόμενο λογικό βήμα είναι να βρούμε τις συνθήκες υπό τις οποίες η προαναφερθείσα v να είναι η λύση.

Συγκεκριμένα, με τις ακόλουθες χαλαρές υποθέσεις, αυτή η v θα μπορούσε να ήταν μια “πρώτη μορφή” της λύσης.

Πρόταση 3.7.

Εστω ότι f είναι φραγμένη. Αν η v είναι κατάλληλα λεία (δηλαδή έχει αρκετά συνεχείς παραγώγους ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε την *Itô formula* στη μορφή της σελ. [13](#)), τότε ικανοποιεί την [3.13\(a\)](#).

Απόδειξη. Η Μαρκοβιανή ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$E_x [f(B_t) | \mathcal{F}_s] = E_{B_s} [f(B_{t-s})] = v(B_s, t-s) \quad (3.18)$$

Αφού το αριστερό μέλος της [\(3.18\)](#) είναι ένα martingale, η $v(B_s, t-s)$ (δεξί μέλος) θα είναι επίσης. Συνεπώς, αν η v είναι λεία, τότε επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς στην απόδειξη για το [Λήμμα 3.5](#) έχουμε ότι

$$v(B_s, t-s) = v(B_0, t) + \int_0^s \left(-v_t + \frac{1}{2} \Delta v \right) (B_r, t-r) dr \\ + \text{ένα local martingale}$$

Άρα προκύπτει άμεσα ότι το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι ένα local martingale. Επειδή αυτή η σ.α. είναι συνεχής και τοπικά φραγμένης κύμανσης, από το [Λήμμα 1.23](#), σελ. [12](#) πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. Δηλαδή ισχύει

$$-v_t + \frac{1}{2} \Delta v = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

Πράγματι, επειδή οι v_t και Δv είναι συνεχείς, έστω προς άτοπον ότι $-v_t + \frac{1}{2} \Delta v \neq 0$ σε ένα σημείο $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Τότε λόγω συνέχειας θα είναι διάφορη του μηδενός σε μια ανοιχτή γειτονιά αυτού του σημείου, και, συνεπώς, με θετική πιθανότητα το ολοκλήρωμα $\int_0^s \left(-v_t + \frac{1}{2} \Delta v \right) (B_r, t-r) dr \neq 0$, γεγονός που συνιστά αντίφαση.

Επομένως, η v ικανοποιεί την [3.13\(a\)](#) και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \square

Είναι εύκολο να βρούμε συνθήκες που συνεπάγονται ότι η “προτεινόμενη” λύση μας, v , ικανοποιεί την [3.13\(b\)](#). Με στόχο να κάνουμε την ανάλυση μας όσο απλούστερη γίνεται, θεωρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση της αρχικής συνθήκης, f , είναι φραγμένη. Σε αυτή την περίπτωση, η ακόλουθη συνθήκη είναι αναγκαία και ικάνη.

Πρόταση 3.8.

Αν f είναι φραγμένη και συνεχής, τότε η v ικανοποιεί την [3.13\(b\)](#).

Απόδειξη. Η σ. α. $\{B_t - B_0\}$ ακολουθεί κατανομή $B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0, t)$ έχουμε ότι $B_t = \mathbf{x} + \sqrt{t} Z$ με $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $(t_n)_n \subset (0, +\infty)$ και $(\mathbf{x}_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ με $t_n \xrightarrow{n} 0$ και $\mathbf{x}_n \xrightarrow{n} \mathbf{x}$. Τότε επειδή η f είναι φραγμένη και συνεχής, λόγω της (3.17), το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι

$$v(\mathbf{x}_n, t_n) = E \left[f(\mathbf{x}_n + \sqrt{t_n} Z) \right] \xrightarrow{n} f(\mathbf{x}) \equiv v(\mathbf{x}, 0) \quad \square$$

Το τελευταίο βήμα στην απόδειξη μας για να δείξουμε ότι η v είναι η λύση στο Πρόβλημα (3.13) είναι να βρούμε συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι η v είναι λεία. Στο συγκεκριμένο Πρόβλημα οι αποδείξεις δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολες, αλλά θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα (παρατίθεται ως άσκηση στο [22]).

Λήμμα 3.9 (Παραγωγίζοντας υπό το Πρόσημο του Ολοκληρώματος).

Έστω $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $u_i(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\partial K}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dm(\mathbf{y})$ συνεχείς για κάθε δείκτη $1 \leq i \leq n$ στο ανοικτό σύνολο G και ότι για κάποιο $h > 0$ ισχύει

$$\int_S \int_0^h \left| \frac{\partial K}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{e}_i, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \right| d\theta dm(\mathbf{y}) < \infty$$

Τότε οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ υπάρχουν για κάθε $1 \leq i \leq n$ και είναι ίσοι με $u_i(\mathbf{x})$.

Απόδειξη. Είναι $u(\mathbf{x}) = \int_S K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dm(\mathbf{y})$. Παρατηρούμε ότι για κάποιο (μικρό) $h > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x}) &= \int_S (K(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) - K(\mathbf{x}, \mathbf{y})) f(\mathbf{y}) dm(\mathbf{y}) \\ &= \int_S \int_0^h \frac{\partial K}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{e}_i, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\theta dm(\mathbf{y}) \\ &= \int_0^h \int_S \frac{\partial K}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \theta \mathbf{e}_i, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dm(\mathbf{y}) d\theta \\ &= \int_0^h u_i(\mathbf{x}) d\theta \\ &= h u_i(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Δηλαδή $u_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{h} (u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x}))$ και παίρνοντας το όριο καθώς $h \rightarrow 0$, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Πρόταση 3.10.

Αν f είναι φραγμένη, τότε $v \in C^\infty$ και συνεπώς ικανοποιεί την 3.13(a).

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο ότι $v \in C^2$, αφού αυτή η συνθήκη είναι ό,τι χρειαζόμαστε για να εφαρμόσουμε την Itô formula. Εξ ορισμού (βλ. εξ. 3.6),

$$v(\mathbf{x}, t) = E_x[f(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned} D_i \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) &= -\left(\frac{x_i - y_i}{t}\right) \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) \\ D_{ii} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) &= \left(\frac{(x_i - y_i)^2 - t}{t^2}\right) \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) \\ D_{ij} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) &= \left(\frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{t^2}\right) \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) \quad i \neq j \end{aligned} \quad (3.19)$$

Αφού η f είναι φραγμένη, τότε και τα ακόλουθα ολοκληρώματα θα είναι φραγμένα

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \left| D_i \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) \right| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} &< \infty \\ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \left| D_{ii} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) \right| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} &< \infty \\ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \left| D_{ij} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}\right) \right| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} &< \infty \quad i \neq j \end{aligned} \quad (3.20)$$

και επίσης θα είναι και συνεχείς συναρτήσεις στο \mathbb{R}^n . Εφαρμόζοντας το [Λήμμα 3.9](#) προκύπτει άμεσα ότι $v \in C^2$. Τότε, από την [Πρόταση 3.7](#) προκύπτει το ζητούμενο. \square

Με την [Πρόταση 3.10](#) ολοκληρώνεται η απόδειξη μας ότι η λύση στο [Πρόβλημα 3.4](#) έχει την στοχαστική αναπαράσταση

$$u(\mathbf{x}, t) = E_x[f(B_t)]$$

Πρόκειται για ένα path integral και η περιφραστική, διαισθητική του διατύπωση του παρατίθεται στο [Σχόλιο 3.1](#).

Παρατηρήσεις 3.11.

Η απόδειξη των προηγούμενων σελίδων δεν είναι τίποτα άλλο από μια προσπάθεια να μεταφράσουμε ήδη γνωστά αποτελέσματα από τον χώρο των ΜΔΕ στη γλώσσα των Πιθανοτήτων. Δεδομένου της απλότητας διεξαγωγής της λύσης με μεθόδους της Ανάλυσης (βλ. [§3.1](#)), θα ήταν αφελές να ισχυριστούμε ότι η κίνηση Brown είναι ο καλύτερος τρόπος για τη μελέτη της εξίσωσης θερμότητας στο $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Τα πράγματα αλλάζουν, βέβαια, αν προσπαθήσει κανείς να αναζητήσει λύσεις στο $G \times (0, +\infty)$, όπου G είναι ένα

ανοικτό σύνολο (π.χ. $G = G_1 := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1\}$) του Προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{2} u_{xx}(x, t) \text{ στο } G \times (0, +\infty) & (a) \\ u &: \text{συνεχής στο } \bar{G} \times [0, +\infty) & (b) \\ u(x, t) &= 0 \quad x \in \partial G, t > 0 \\ u(0, t) &= f(x) \quad x \in G \end{aligned} \quad (3.21)$$

Σε αυτή την περίπτωση ένας οπαδός της (κλασικής) Ανάλυσης θα αναζητούσε, κατά τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, λύσεις της μορφής $u(x, t) = X(x) T(t) = f_i(x) \cdot \exp(\lambda_i t)$ δείχνοντας ότι η αρχική συνθήκη μπορεί να γραφτεί στη γενική μορφή

$$f(x) = \sum_i a_i f_i(x)$$

Το να αποδείξει κανείς κάτι τέτοιο ακόμη και για την ειδική περίπτωση που $G = G_1$ απαιτεί πολύ περισσότερη δουλειά απ' ότι προηγουμένως, στην §3.1 κάναμε, για $G = \mathbb{R}^n$. Παρ' όλα αυτά, ακολουθώντας μεθόδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων, οι υπολογισμοί είναι περίπου ίσης δυσκολίας για ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων.

3.3 Η Μη Ομογενής Εξίσωση Θερμότητας

Στην ενότητα αυτή θα διερευνήσουμε τι συμβαίνει όταν προσθέσουμε και μία συνάρτηση $g(x, t)$ στην εξίσωση (3.13) που μόλις θεωρήσαμε, δηλαδή θα μελετήσουμε το

Πρόβλημα 3.12.

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{2} \Delta u(x, t) + g(x, t) \text{ στο } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) & (a) \\ u &: \text{συνεχής στο } \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \text{ με} & (b) \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.22)$$

Παρατηρήσεις 3.13.

Το πρώτο βήμα είναι να παρατηρήσουμε ότι γνωρίζουμε πως να λύσουμε την εξίσωση όταν $g \equiv 0$, άρα χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση που $f \equiv 0$. Έχοντας κάνει αυτή την απλούστευση, θα λύσουμε το Πρόβλημα 3.12 ακολουθώντας τυφλά την διαδικασία επίλυσης της προηγούμενης §3.2.

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι

Λήμμα 3.14.

Αν η u ικανοποιεί την 3.22(a), τότε το

$$M_s = u(B_s, t-s) + \int_0^s g(B_r, t-r) dr$$

είναι ένα *local martingale* στο $[0, t)$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Itô formula (1.23) της σελ. 13 για το δοθέν M_s έχουμε:

$$\begin{aligned}
 u(B_s, t-s) &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r \\
 &\quad + \int_0^s -u_t(B_r, t-r) dr + \frac{1}{2} \int_0^s \Delta u(B_r, t-r) dr \\
 &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r \\
 &\quad + \int_0^s -u_t(B_r, t-r) dr + \frac{1}{2} \int_0^s \Delta u(B_r, t-r) dr \\
 &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r - \int_0^s g(B_r, t-r) dr
 \end{aligned}$$

$\nearrow -g(B_r, t-r)$

Όμως γνωρίζουμε ότι τα στοχαστικά ολοκληρώματα είναι martingales⁵, συνεπώς η απόδειξή μας έχει ολοκληρωθεί. \square

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση g είναι φραγμένη, και ότι η u είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^n \times [0, t]$ και ικανοποιεί την 3.22(α), τότε το $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ θα είναι ένα φραγμένο local martingale και από το Λήμμα 1.13, το $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ θα είναι martingale. Από το Θεώρημα Σύγκλισης των martingales κατά τα γνωστά θα έχουμε ότι καθώς $s \uparrow t$, το M_s θα συγκλίνει σε κάποιο όριο (σ.β.). Αν η u ικανοποιεί την 3.22(β), αυτό το όριο πρέπει να είναι το $\int_0^t g(B_s, t-s) ds$, δηλαδή

$$\lim_{s \uparrow t} M_s = M \equiv \int_0^t g(B_s, t-s) ds \quad (3.23)$$

Επειδή η $\{M_s\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη:

$$E[M_s | \mathcal{F}_r] \xrightarrow{s \uparrow t} E_x \left[\int_0^t g(B_s, t-s) ds | \mathcal{F}_r \right] \quad \forall r \quad (3.24)$$

Από (3.23), (3.24) για το martingale $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ θα ισχύει

$$E_x[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s = E_x \left[\int_0^t g(B_s, t-s) ds | \mathcal{F}_s \right] \quad (3.25)$$

Θέτοντας $s := 0$ στην (3.25), από τον ορισμό του $\{M_s\}$ καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
 M_0 &= u(B_0, t) \\
 &= u(x, t).
 \end{aligned}$$

Δηλαδή αποδείξαμε το ακόλουθο Θεώρημα Μοναδικότητας:

⁵Υπονοούμε ότι ισχύει, δηλαδή: $E \left[\int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r \right] = 0$.

Θεώρημα 3.15 (Μοναδικότητα λύσης της Μη Ομογενούς Εξίσωσης Θερμότητας).

Υποθέτουμε ότι η g είναι φραγμένη. Εάν υπάρχει λύση, v , της (3.22) που είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^n \times [0, t]$, τότε πρέπει

$$v(x, t) \equiv E_x \left[\int_0^t g(B_s, t-s) ds \right] \quad (3.26)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τις συνθήκες υπό τις οποίες η προαναφερθείσα v να είναι η λύση. Συγκεκριμένα, ισχύει

Πρόταση 3.16.

Υποθέτουμε ότι η g είναι φραγμένη. Αν η v είναι κατάλληλα λεία (δηλαδή έχει αρκετά συνεχείς παραγώγους ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε την Itô formula), τότε ικανοποιεί την 3.22(α) σ.π. στο $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$.

Απόδειξη. Η Μαρκοβιανή ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} E_x \left[\int_0^t g(B_r, t-r) dr \mid \mathcal{F}_s \right] &= \int_0^s g(B_r, t-r) dr + E_{B_s} \left[\int_0^{t-s} g(B_u, t-s-u) du \right] \\ &= \int_0^s g(B_r, t-r) dr + v(B_s, t-s) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Αφού το αριστερό μέλος της (3.27) είναι ένα martingale, το $\int_0^s g(B_r, t-r) dr + v(B_s, t-s)$ (δεξί μέλος) θα είναι επίσης. Συνεπώς, αν η v είναι λεία, τότε επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς στην απόδειξη για το Λήμμα 3.14 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} v(B_s, t-s) &= v(B_0, t) + \int_0^s \left(-v_t + \frac{1}{2} \Delta v + g \right) (B_r, t-r) dr \\ &\quad - \int_0^s g(B_r, t-r) dr \\ &\quad + \text{ένα local martingale.} \end{aligned}$$

Άρα προκύπτει άμεσα ότι το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι ένα local martingale. Επειδή αυτή η σ.α. είναι συνεχής και τοπικά φραγμένης κύμανσης, από το Λήμμα 1.23, σελ. 12 πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. Δηλαδή ισχύει (με την σχεδόν βέβαια έννοια)

$$v_t = \frac{1}{2} \Delta v + g \text{ στο } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

Πράγματι, επειδή οι v_t και Δv είναι συνεχείς, έστω προς άτοπον ότι $-v_t + \frac{1}{2} \Delta v + g \neq 0$ σε ένα σημείο $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Τότε λόγω συνέχειας θα είναι διάφορη του μηδενός σε μια ανοιχτή γειτονιά αυτού του σημείου, και, συνεπώς, με θετική πιθανότητα το ολοκλήρωμα $\int_0^s \left(-v_t + \frac{1}{2} \Delta v + g \right) (B_r, t-r) dr \not\equiv 0$, γεγονός που συνιστά αντίφαση.

Επομένως, η v ικανοποιεί την 3.22(α) και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \square

Στη συνέχεια αναζητούμε συνθήκες που συνεπάγονται ότι η “προτεινόμενη” λύση μας, v , ικανοποιεί την 3.22(b). Όπως και στην §3.2 θεωρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση g είναι φραγμένη.

Πρόταση 3.17.

Αν g είναι φραγμένη, τότε η v ικανοποιεί την 3.22(b).

Απόδειξη. Θεωρούμε τις ακολουθίες $(t_n)_n \subset (0, +\infty)$ και $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ με $t_n \xrightarrow{n} 0$ και $x_n \xrightarrow{n} x$. Τότε επειδή η g είναι (ομοιόμορφα) φραγμένη, υπάρχει ένα $M > 0$ τέτοιο ώστε $|g| \leq M$. Λόγω της (3.26), το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} v(x_n, t_n) &= E \left[\int_0^{t_n} g(B_s, t_n - s) ds \right] \\ &\leq E[M |t_n - 0|] \\ &\xrightarrow{n} 0 \equiv f(x) \end{aligned}$$

Δηλαδή $v(x, 0) = f(x)$. □

Το τελευταίο βήμα στην απόδειξη μας για να δείξουμε ότι η v είναι η λύση στο Πρόβλημα (3.22) είναι να βρούμε συνθήκες που να εξασφαλίζουν ότι η v είναι αρκετά λεία. Στο συγκεκριμένο Πρόβλημα οι αποδείξεις είναι αρκετά δυσκολότερες και ξεφεύγουν από το πνεύμα αυτής της εργασίας. Επομένως, θα περιοριστούμε στην απλή διατύπωση των αποτελεσμάτων των σελίδων 225-228 του Durrett [22]. Στην ουσία πρόκειται για τα Θεωρήματα 2 ως και 5 του Friedman [28] και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει τις παραλειπόμενες αποδείξεις εκεί.

Λήμμα 3.18.

Αν g είναι φραγμένη και μετρήσιμη, τότε η $v(x, t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Λήμμα 3.19.

Αν g είναι φραγμένη και μετρήσιμη, τότε οι μερικές παράγωγοι $D_i v = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ και

$$D_i v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} D_i p(y, x, s) g(y, t-s) dy ds$$

Λήμμα 3.20.

Υποθέτουμε ότι g είναι φραγμένη και συνεχής, και ότι για κάθε $N < \infty$ υπάρχουν σταθερές C και $a \in (0, +\infty)$ τέτοιες ώστε $|g(x, t) - g(y, t)| \leq C \|x - y\|^a$, για όλα τα

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, t$ με $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|$ και t μικρότερα ή ίσα του N . Τότε οι μερικές παράγωγοι $D_{ij}v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ και

$$D_{ij}v(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} D_{ij}p(\mathbf{y}, \mathbf{x}, s) g(\mathbf{y}, t-s) d\mathbf{y} ds$$

Λήμμα 3.21.

Έστω ότι η g είναι όπως στο [Λήμμα 3.20](#). Τότε η $\frac{\partial v}{\partial t}$ υπάρχει, και

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-r) g(\mathbf{y}, r) d\mathbf{y} dr$$

Με τα προηγούμενα Λήμματα και ενθυμούμενοι τις [Παρατ. 3.13](#), ολοκληρώνεται η απόδειξη μας ότι η λύση στο [Πρόβλημα 3.12](#) έχει τελικά την στοχαστική αναπαράσταση

$$u(\mathbf{x}, t) = E_{\mathbf{x}} \left[f(B_t) + \int_0^t g(B_s, t-s) ds \right]$$

Η μέση τιμή αυτή δεν είναι άλλη από ένα path integral και η περιφραστική, διαισθητική του διατύπωση του παρατίθεται στο [Σχόλιο 3.1](#).

3.4 Η Feynman-Kač formula για την κίνηση Brown

Στην ενότητα αυτή θα διερευνήσουμε τη μορφή της στοχαστικής αναπαράστασης της λύσης, όταν προσθέσουμε έναν όρο $c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t)$ στο δεξί μέλος της [\(3.13\)](#). Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε το

Πρόβλημα 3.22.

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \Delta u(\mathbf{x}, t) + c(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) \quad \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \quad (a)$$

$$\begin{aligned} u &: \text{συνεχής στο } \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \text{ με} \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (b) \quad (3.28)$$

Αν $c(\mathbf{x}) \leq 0$, τότε η [\(3.28\)](#) περιγράφει τη ροή της θερμότητας με ψύξη. Όπως στην [§3.2](#), η λύση $u(\mathbf{x}, t)$ δίνει τη θερμοκρασία στο σημείου του χώρου, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τη στιγμή t , αλλά εδώ δεν υποθέτουμε ότι υπάρχει τέλεια αγωγιμότητα της θερμότητας. Αντίθετα, υποθέτουμε ότι η θερμότητα στο \mathbf{x} χάνεται με ρυθμό $k(\mathbf{x}) = -c(\mathbf{x})$. Στη συνέχεια θα δούμε ότι αυτή η υπόθεση αντιστοιχεί σε μια κ.Β. με ρυθμό θνησιμότητας (εξουδετέρωσης) $k(\mathbf{x})$, δηλαδή η πιθανότητα το σωματίδιο να “επιζεί” μέχρι τον χρόνο t είναι $\exp\left(-\int_0^t k(B_s) ds\right)$, κατά τους συμβολισμούς που έχουμε εισαγάγει στην [§3.1-1](#). Εδώ θα αποδείξουμε αναλυτικότερα, και για μη σταθερά δυναμικά τα όσα στις σελ. [45-46](#) κάναμε για την περίπτωση που $c(\mathbf{x}) \equiv \lambda = \text{σταθ.}$ Στην ουσία αυτή ήταν η προσέγγιση του Kač στο ολοκλήρωμα του Feynman.

Σε αυτό το σημείο ο αναγνώστης πρέπει να ανακαλέσει στη μνήμη του, ότι οι ευρηματικοί συλλογισμοί του μεγάλου Feynman στο [Κεφ. 2](#) δεν ήταν παρά κάποιες παρατηρήσεις-υποθέσεις για το πως θα μπορούσε κανείς να μαντέψει την Feynman-Kač formula · ωστόσο, το να μαντέψουμε κάτι, διαφέρει ριζικά από το να το αποδείξουμε, και αυτό ακριβώς είναι το αντικείμενο αυτής της ενότητας. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές διαφορετικές αποδείξεις της Feynman-Kač formula, χρησιμοποιώντας διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία, αλλά η μέθοδος απόδειξης που ακολουθεί γενικεύει την προηγούμενη ανάλυση και βασίζεται στη φόρμουλα του Itô (βλ. [Κεφ. 1](#)).

Αρχικά, κατά τα γνωστά, αποδεικνύουμε ότι

Λήμμα 3.23.

Αν η u ικανοποιεί την [3.28\(a\)](#), τότε το

$$M_s = u(B_s, t-s) \exp\left(\int_0^s c(B_r) dr\right)$$

είναι ένα *local martingale* στο $[0, t)$.

Απόδειξη. Από την Itô formula ([1.23](#)) και υπό την υπόθεση ότι η $u(x, t)$ λύνει την ΜΔΕ ([3.28](#)), για το δοθέν M_s έχουμε:

$$\begin{aligned} u(B_s, t-s) &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r \\ &\quad + \int_0^s -u_t(B_r, t-r) dr + \frac{1}{2} \int_0^s \Delta u(B_r, t-r) dr \\ &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r \\ &\quad + \int_0^s -u_t(B_r, t-r) + \frac{1}{2} \Delta u(B_r, t-r) dr \\ &= u(B_0, t) + \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r - \int_0^s c(B_r) u(B_r, t-r) dr \end{aligned}$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου του Στοχαστικού Λογισμού ([1.29](#)) παίρνουμε

$$\begin{aligned} M_s &= u(B_s, t-s) \exp\left(\int_0^s c(B_r) dr\right) \\ &= u(B_0, t) + \exp\left(\int_0^s c(B_r) dr\right) \left\{ \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r - \int_0^s c(B_r) u(B_r, t-r) dr \right\} \\ &\quad + \exp\left(\int_0^s c(B_r) dr\right) \left\{ \int_0^s c(B_r) u(B_r, t-r) dr \right\} \\ &= u(B_0, t) + \exp\left(\int_0^s c(B_r) dr\right) \left\{ \int_0^s \nabla u(B_r, t-r) dB_r \right\} \end{aligned}$$

Επειδή η τελευταία ισότητα δεν έχει όρο drift συμπεραίνουμε ότι το M_s είναι ένα *local martingale* στο $[0, t)$. \square

Παρατηρούμε ότι αν υποθέσουμε η συνάρτηση c να είναι φραγμένη και η u να είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^n \times [0, t]$ και να ικανοποιεί την 3.28(α), τότε το $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ είναι φραγμένο local martingale. Πράγματι, εξ ορισμού του M_s έχουμε

$$\sup_{0 \leq s < t} |M_s| \leq \|u\|_{\infty} \exp(t \|c\|_{\infty}) < \infty \quad (3.29)$$

Επομένως, από το Λήμμα 1.13, το $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ είναι martingale. Από το Θεώρημα Σύγκλισης των martingales κατά τα γνωστά θα έχουμε ότι καθώς $s \uparrow t$, το M_s θα συγκλίνει σε κάποιο όριο (σ.β.). Αν η u ικανοποιεί την 3.28(b), αυτό το όριο πρέπει να είναι το $f(B_t) \exp\left(\int_0^t c(B_r) dr\right)$, δηλαδή

$$\lim_{s \uparrow t} M_s = M \equiv f(B_t) \exp\left(\int_0^t c(B_r) dr\right) \quad (3.30)$$

Από (3.30) για το martingale $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ θα ισχύει

$$E_x[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s = E_x\left[f(B_t) \exp\left(\int_0^t c(B_r) dr\right) | \mathcal{F}_s\right] \quad \forall r \quad (3.31)$$

Θέτοντας $s = 0$ στην (3.31), από τον ορισμό του $\{M_s\}$ καταλήγουμε

$$\begin{aligned} M_0 &= u(B_0, t) \\ &= u(x, t) \end{aligned}$$

Δηλαδή αποδείξαμε το ακόλουθο Θεώρημα Μοναδικότητας:

Θεώρημα 3.24 (Μοναδικότητα λύσης).

Υποθέτουμε ότι η c είναι φραγμένη. Εάν υπάρχει λύση, v , της (3.28) που είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^n \times [0, t]$, τότε πρέπει

$$v(x, t) \equiv E_x\left[f(B_t) \exp\left(\int_0^t c(B_r) dr\right)\right] \quad (3.32)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τις συνθήκες υπό τις οποίες η προαναφερθείσα v να είναι η λύση. Συγκεκριμένα, ισχύει

Πρόταση 3.25.

Υποθέτουμε ότι η g είναι φραγμένη. Αν η v είναι κατάλληλα λεία (δηλαδή έχει αρκετά συνεχείς παραγώγους ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε την Itô formula), τότε ικανοποιεί την 3.22(α) σ.π. στο $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Απόδειξη. Η Μαρκοβιανή ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} E_x \left[f(B_t) \exp \left(\int_0^t c(B_r) dr \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \exp \left(\int_0^t c(B_r) dr \right) E_{B_s} \left[f(B_{t-s}) \exp \left(\int_0^{t-s} c(B_r) dr \right) \right] \\ &= \exp \left(\int_0^t c(B_r) dr \right) v(B_s, t-s) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Αφού το αριστερό μέλος της (3.27) είναι ένα martingale, το $\exp \left(\int_0^t c(B_r) dr \right) v(B_s, t-s)$ (δεξί μέλος) θα είναι επίσης. Συνεπώς, αν η v είναι λεία, τότε επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς στην απόδειξη για το [Λήμμα 3.23](#) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \exp \left(\int_0^t c(B_r) dr \right) v(B_s, t-s) &= v(B_0, t) \\ &\quad + \int_0^s \left(-v_t + \frac{1}{2} \Delta v + cv \right) (B_r, t-r) \exp \left(\int_0^t c(B_w) dw \right) dr \\ &\quad + \text{ένα local martingale} \end{aligned}$$

Άρα προκύπτει άμεσα ότι το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι ένα local martingale και συνεπώς, πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. Δηλαδή ισχύει (με την σχεδόν βέβαια έννοια)

$$v_t = \frac{1}{2} \Delta v + cv \text{ στο } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

Επομένως, η v ικανοποιεί την 3.28(α) και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \square

Στη συνέχεια αναζητούμε συνθήκες που συνεπάγονται ότι η “προτεινόμενη” λύση μας, v , ικανοποιεί την 3.28(b). Όπως προηγουμένως, εξετάζουμε στην αρχή τι συμβαίνει όταν όλα είναι φραγμένα.

Πρόταση 3.26.

Αν η c είναι φραγμένη και η f είναι φραγμένη και συνεχής, τότε η v ικανοποιεί την 3.28(b).

Απόδειξη. Θεωρούμε τις ακολουθίες $(t_n)_n \subset (0, +\infty)$ και $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ με $t_n \xrightarrow{n} 0$ και $x_n \xrightarrow{n} x$. Επειδή η c είναι (ομοιόμορφα) φραγμένη, υπάρχει ένα $M > 0$ τέτοιο ώστε $|c| \leq M$. Τότε επειδή $e^{-Mt} \leq \exp \left(\int_0^t c(B_r) dr \right) \leq e^{Mt}$ παρατηρούμε ότι

$$\exp \left(\int_0^t c(B_r) dr \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

Λόγω της (3.32), επειδή η f είναι φραγμένη το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι

$$E_x \left[f(B_t) \exp \left(\int_0^t c(B_r) dr \right) \right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} E_x[f(B_t)]$$

Το επιθυμητό αποτέλεσμα έπεται από την [Πρόταση 3.8](#) και λόγω της μοναδικότητας του ορίου. \square

Ακολούθως, αναζητούμε συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι η v είναι αρκετά λεία για να είναι λύση στο [Πρόβλημα 3.22](#). Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε μια παρατήρηση του Durrett [\[22\]](#) και έτσι ανάγουμε τα αποτελέσματά μας σε αυτά της προηγούμενης περίπτωσης. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^t c(B_s) \exp\left(\int_s^t c(B_r) dr\right) ds &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left(\exp\left(\int_s^t c(B_r) dr\right) \right) ds \\ &= \exp\left(\int_0^t c(B_r) dr\right) - \cancel{\exp\left(\int_t^t c(B_r) dr\right)} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$\exp\left(\int_0^t c(B_r) dr\right) = 1 + \int_0^t c(B_s) \exp\left(\int_s^t c(B_r) dr\right) ds \quad (3.34)$$

Πολλαπλασιάζοντας την [\(3.34\)](#) επί $f(B_t)$ και παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε

$$v(\mathbf{x}, t) = 1 + \int_0^t E_x \left[c(B_s) f(B_t) \exp\left(\int_s^t c(B_r) dr\right) \right] ds \quad (3.35)$$

Δεσμεύοντας ως προς \mathcal{F}_s , λόγω Μαρκοβιανής ιδιότητας και του Θεωρήματος Fubini, η [\(3.35\)](#) γράφεται

$$\begin{aligned} E_x[v(\mathbf{x}, t) | \mathcal{F}_s] &= 1 + E_x \left[\int_0^t E_x \left[f(B_t) c(B_s) \exp\left(\int_s^t c(B_r) dr\right) \right] ds | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \exp\left(\int_0^t c(B_r) dr\right) E_{B_s} \left[f(B_{t-s}) \int_0^{t-s} c(B_r) dr \right] \\ &= 1 + \int_0^t E_x[c(B_s) v(B_s, t-s)] ds \end{aligned}$$

Άρα

$$v(\mathbf{x}, t) = 1 + \int_0^t E_x[c(B_s) v(B_s, t-s)] ds \quad (3.36)$$

Ο δεύτερος όρος στην εξ. [\(3.36\)](#) είναι της μορφής [\(3.22\)](#) που εξετάσαμε στην προηγούμενη [§3.3](#). Εντελώς ανάλογα με τα προηγούμενα μπορεί ναδειχθεί ότι⁶

⁶Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει τις παραλειπόμενες λεπτομέρειες στο [\[28\]](#).

Λήμμα 3.27.

Έστω ότι η f είναι φραγμένη. Αν η c είναι φραγμένη και τοπικά Hölder συνεχής, τότε η v είναι λεία, και, συνεπώς, ικανοποιεί την 3.28(a)

Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη μας ότι η λύση στο Πρόβλημα 3.22 έχει τελικά την στοχαστική αναπαράσταση

$$u(x, t) = E \left[f(x + B_t) \exp \left(\int_0^t c(x + B_r) dr \right) \right] \quad (3.37)$$

Η μέση τιμή αυτή δεν είναι άλλη από ένα path integral και η περιφραστική, διαισθητική του διατύπωση του παρατίθεται στο Σχόλιο 3.1.

Το μοτίβο απόδειξης που ακολουθήσαμε στις προηγούμενες ενότητες μπορεί να χρησιμοποιηθεί [22] για να παράγουμε ένα μεγάλο αριθμό θεωρημάτων στοχαστικής αναπαράστασης για συναρτήσεις που ικανοποιούν παραβολικές ΜΔΕ (όπως αυτές που αναφέραμε ως τώρα), αλλά και ελλειπτικές ΜΔΕ (π.χ. η χρονικά ομογενής εξίσωση Schrödinger).

3.5 Η Feynman-Kač formula για ανελίξεις Itô

Στις προηγούμενες ενότητες είδαμε το πως αποτελέσματα των Πιθανοτήτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων της Ανάλυσης. Η μυστηριώδης αυτή σύνδεση των δύο περιοχών των Μαθηματικών δεν περιορίζεται στην ειδική περίπτωση της κίνησης Brown, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει ανάλογα αποτελέσματα για ανελίξεις Itô. Το Θεώρημα 3.28 “μετατρέπει” την επίλυση μιας Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης γενικής μορφής, στην επίλυση μιας Στοχαστικής Διαφορικής για μία συγκεκριμένη ανελίξη Itô. Επιπρόσθετα, στο Θεώρημα 3.29 δείχνουμε ότι μια γενική Feynman-Kač formula συμπίπτει με τη λύση μιας γενικής μορφής της περίφημης Εξίσωσης των Black-Scholes. Συνεπώς, με τη μορφή αυτή το Θεώρημα 3.29 μπορεί να εφαρμοστεί στα Χρηματοοικονομικά. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά στο (Κεφ. 6) για να απαντήσουμε σε ερωτήματα τιμολόγησης ομολόγων μέσω μοντελοποίησης των επιτοκίων.

Οι αποδείξεις που ακολουθούν μπορεί να μην έχουν την αυστηρότητα των προηγούμενων ενότητων, αλλά είναι ανάλογες. Για παράδειγμα, οι ΜΔΕ που επιλύουμε θεωρούμε ότι έχουν μοναδική λύση. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει τις παραλειπόμενες λεπτομέρειες στη Βιβλιογραφία, αλλά και μια πιο αφηρημένη Feynman-Kač formula για ΜΔΕ και γενικές στοχαστικές ανελίξεις (βλ. για παράδειγμα [29], [47], [49], [53], [86]).

Θεώρημα 3.28 (Γενική Feynman-Kač formula).

Έστω ότι οι συναρτήσεις $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένες και έστω $u: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ να είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ οριζόμενου

από την $M\Delta E$

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2}\sigma^2(x) u_{xx}(x, t) + \mu(x) u_x(x, t) + V(x) u(x, t) \quad (3.38)$$

και την αρχική συνθήκη:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.39)$$

Αν οι συναρτήσεις $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι *Lipschitz*⁷ και ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\mu^2(x) + \sigma^2(x) \leq L(1 + x^2) \quad (3.40)$$

για κάποια σταθερά $L > 0$, τότε η u έχει την αναπαράσταση

$$u(x, t) = E \left[f(x + X_t) \exp \left(\int_0^t V(x + X_s) ds \right) \right] \quad (3.41)$$

όπου η ανέλιξη $\{X_t\}_{t \geq 0}$ είναι η μοναδική λύση της $\Sigma\Delta E$

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \quad (3.42)$$

με αρχική συνθήκη

$$X_0 = 0 \quad (3.43)$$

Απόδειξη. Από την εμπειρία μας με το [Πρόβλημα 3.22](#), θα δείξουμε πρώτα ότι η ανέλιξη

$$M_s = u(X_s, t - s) \exp \left(\int_0^s V(x + X_r) dr \right) \quad (3.44)$$

είναι local martingale στο $[0, t)$ και στη συνέχεια ότι είναι ένα γνήσιο martingale.

Εφαρμόζοντας την Itô formula (1.23) για το δοθέν M_s έχουμε

$$\begin{aligned} u(X_s, t - s) &= u(X_0, t) + \int_0^s u_x(X_r, t - r) dX_r \\ &\quad + \int_0^s -u_t(X_r, t - r) dr + \frac{1}{2} \int_0^s u_{xx}(X_r, t - r) dX_r \cdot dX_r \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} u(X_s, t - s) &= u(0, t) + \int_0^s u_x(X_r, t - r) \sigma(X_r) dB_r \\ &\quad + \int_0^s \left[-u_t(X_r, t - r) + \frac{1}{2} u_{xx}(X_r, t - r) \sigma^2(X_r) + u_x(X_r, t - r) \mu(X_r) \right] dr \\ &= u(0, t) + \int_0^s u_x(X_r, t - r) \sigma(X_r) dB_r - \int_0^s V(x + X_r) u(X_r, t - r) dr, \end{aligned}$$

⁷ Ακριβέστερα, απαιτούμε οι συναρτήσεις $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι Lipschitz στα συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R} .

όπου υποθέσαμε ότι η ανελίξη $\{X_t\}_{t \geq 0}$ είναι η μοναδική λύση της ΣΔΕ (3.42) και ότι η $u(x, t)$ λύνει την ΜΔΕ (3.38).

Επιπρόσθετα, ισχύει

$$\begin{aligned} \exp \left(\int_0^s V(x + X_r) dr \right) &= 1 + \int_0^s \left\{ \exp \left(\int_0^r V(x + X_\omega) d\omega \right) \right\} V(x + X_r) dr \\ &= 1 + \exp \left(\int_0^s V(x + X_r) dr \right) V(x + X_s) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου του Στοχαστικού Λογισμού (1.29) παίρνουμε

$$\begin{aligned} M_s &= u(0, t) + \int_0^s \left\{ \exp \left(\int_0^r V(x + X_\omega) d\omega \right) \right\} du(X_r, t - r) \\ &\quad + \int_0^s \{u(X_r, t - r)\} d \left(\exp \left(\int_0^r V(x + X_\omega) d\omega \right) \right) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} M_s &= u(0, t) + \exp \left(\int_0^s V(x + X_r) dr \right) \left\{ \int_0^s u_x(X_r, t - r) \sigma(X_r) dB_r \right. \\ &\quad \left. - \int_0^s \cancel{V(x + X_r) u(X_r, t - r) dr} \right\} \\ &\quad + \int_0^s \cancel{\exp \left(\int_0^s V(x + X_r) dr \right) V(x + X_s) u(X_r, t - r) dr} \end{aligned}$$

Δηλαδή τελικά

$$M_s = u(0, t) + \exp \left(\int_0^s V(x + X_r) dr \right) \int_0^s u_x(X_r, t - r) \sigma(X_r) dB_r \quad (3.46)$$

Η (3.46) δείχνει ότι το $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ είναι ένα local martingale. Επίσης, από τον ορισμό (3.44) του $\{M_s\}$ και από τις υποθέσεις ότι οι συναρτήσεις V και u είναι φραγμένες έχουμε ότι

$$\sup_{0 \leq s < t} |M_s| \leq \|u\|_\infty \exp(t \|V\|_\infty) < \infty$$

Δηλαδή το $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ είναι ένα γνήσιο martingale. Από το Θεώρημα Σύγκλισης των martingales κατά τα γνωστά θα έχουμε ότι καθώς $s \uparrow t$, το M_s θα συγκλίνει σε κάποιο όριο (σ.β.). Αν η u ικανοποιεί τη (3.39), αυτό το όριο πρέπει να είναι το $f(X_t) \exp \left(\int_0^t V(x + X_r) dr \right)$, δηλαδή

$$\lim_{s \uparrow t} M_s = M \equiv f(X_t) \exp \left(\int_0^t V(x + X_r) dr \right) \quad (3.47)$$

Από (3.47) για το martingale $\{M_s\}_{0 \leq s < t}$ θα ισχύει

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s = E \left[f(X_t) \exp \left(\int_0^t V(x + X_r) dr \right) | \mathcal{F}_s \right] \quad (3.48)$$

Θέτοντας $s := 0$ στην (3.48), από τον ορισμό του $\{M_s\}$ καταλήγουμε

$$\begin{aligned} M_0 &= u(X_0, t) \\ &= u(0, t) \end{aligned}$$

Δηλαδή εάν υπάρχει λύση, u , της (3.38) που είναι φραγμένη στο $\mathbb{R} \times [0, t]$, τότε πρέπει

$$u(x, t) \equiv E \left[f(x + X_t) \exp \left(\int_0^t V(x + X_r) dr \right) \right] \quad (3.49)$$

Συνεπώς, η αναπαράσταση της λύσης της ΜΔΕ (3.38) μέσω του path integral (3.49) έχει ολοκληρωθεί. \square

Το επόμενο Θεώρημα βρίσκεται στο επίκεντρο των αποτελεσμάτων της εργασίας αυτής, συνδέοντας μια ΜΔΕ με μια ΣΔΕ και ένα path integral (μια μέση τιμή, δηλαδή, στην περίπτωση μας). Είναι η άσκηση 15.1 σελ. 274 στο [90].

Θεώρημα 3.29 (Ισοδυναμία Feynman-Kač formula και μιας γενικής Εξίσωσης Black-Scholes).

Εστω ότι η ανέλιξη $r: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένες και έστω $u: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ να είναι η μοναδική λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών οριζόμενου από την ΜΔΕ

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(x, t) u_{xx}(x, t) + m(x, t) u_x(x, t) + r(x, t) u(x, t) \quad (3.50)$$

και την συνοριακή συνθήκη:

$$u(x, T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.51)$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η στοχαστική ανέλιξη $m: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι προσαρμοσμένη και ολοκληρώσιμη σχεδόν για όλα τα ω . Αν οι συναρτήσεις $m: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ και $\sigma: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ είναι Lipschitz⁸ και ικανοποιούν επιπρόσθετα τις συνθήκες

$$(m(x, t) - m(y, t))^2 + (\sigma(x, t) - \sigma(y, t))^2 \leq K_1 (x - y)^2 \quad (3.52)$$

⁸ Ακριβέστερα, απαιτούμε οι συναρτήσεις $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι Lipschitz στα συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R} .

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ για κάποια σταθερά $K_1 > 0$ και

$$m^2(x, t) + \sigma^2(x, t) \leq K_2 (1 + x^2) \quad (3.53)$$

και, τέλος, αν η συνάρτηση, f , της αρχικής συνθήκης είναι φραγμένη, τότε η u έχει την αναπαράσταση

$$u(x, t) = E \left[f(X_T^{t,x}) \exp \left(- \int_t^T r(X_s^{t,x}, s) ds \right) \right] \quad (3.54)$$

όπου για $s \in [0, t)$ η ανέλιξη $\{X_s^{t,x}\}_{s \in [0, t)}$ ορίζεται ως $X_s^{t,x} := x$ και για $s \in [t, T]$ η ανέλιξη $\{X_s^{t,x}\}_{s \in [t, T]}$ είναι η λύση της $\Sigma \Delta E$

$$dX_s^{t,x} = m(X_s^{t,x}, s) dt + \sigma(X_s^{t,x}, s) dB_s \quad (3.55)$$

με αρχική συνθήκη

$$X_t^{t,x} = x \quad (3.56)$$

και κάποια τελική συνθήκη $X_T^{t,x}$.

Παρατήρηση 3.30.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη πρέπει να σχολιάσουμε ότι η υπόθεση της αρχικής συνθήκης να είναι φραγμένη φαίνεται εκ πρώτης όψεως πολύ περιοριστική. Ο λόγος είναι ότι αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το [Θεώρημα 3.29](#) για την εύρεση της τιμής για παράδειγμα ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου (European call option), εκεί γνωρίζουμε ότι η κατάλληλη f ισούται με $(x - K)^+$, δηλαδή δεν είναι φραγμένη. Κατά το σχόλιο του [\[90\]](#) “*μία τέτοια παρατήρηση είναι αβάσιμη*”. Ο λόγος είναι διότι μπορούμε να θέσουμε $f_0(x) := \min \{f(x), M\}$ με M να συμβολίζει το σύνολο του χρήματος. Τότε η f_0 είναι προφανώς άνω φραγμένη και έτσι ικανοποιούνται ακόμα και οι απαιτητικοί Μαθηματικοί αντικαθιστώντας την $f(X_T^{t,x})$ με την $f_0(X_T^{t,x})$ στην (3.54).

Απόδειξη. Κάνοντας κάποιες δοκιμές βρίσκουμε ότι η κατάλληλη ανέλιξη για να αρχίσουμε τη γνωστή μας μέθοδο είναι η⁹

$$\begin{aligned} M_s &= u(X_s^{t,x}, s) \exp \left(- \int_t^s r(X_\omega^{t,x}, \omega) d\omega \right) \\ &:= \mathcal{U}_s \cdot \mathcal{E}_s \end{aligned} \quad (3.57)$$

για $s \in [t, T)$. Θα αποδείξουμε ότι το $\{M_s\}_{t \leq s < T}$ είναι ένα local martingale. Πράγματι, υιοθετώντας τον κλασικό αριθμητικό συμβολισμό των μερικών παραγώγων της Ανάλυσης

⁹Κατά την ορολογία του [Κεφ. 6](#) θα μπορούσαμε να πούμε ότι το M_s μεταβάλλεται ως προς το χρόνο λήξης (maturity), T , των ομολόγων. Έτσι, ενοποιούμε τα αποτελέσματά μας για κάθε T -ομόλογο, για κάθε χρονική στιγμή t , με διαφορετική παρούσα αξία x . Το τίμημα που πληρώνουμε με αυτήν την ενοποίηση της απόδειξης είναι στην δυσκολία πλήρους συμβολισμού.

ελαχιστοποιούμε τους συμβολισμούς και έχουμε

$$\begin{aligned} d\mathcal{U}_s &= \left[u_1 \left(X_s^{t,x}, s \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(X_s^{t,x}, s \right) u_{22} \left(X_s^{t,x}, s \right) \right] ds + u_2 \left(X_s^{t,x}, s \right) dX_s^{t,x} \\ &= \left[u_1 \left(X_s^{t,x}, s \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(X_s^{t,x}, s \right) u_{22} \left(X_s^{t,x}, s \right) + u_2 \left(X_s^{t,x}, s \right) m \left(X_s^{t,x}, s \right) \right] ds \\ &\quad + u_2 \left(X_s^{t,x}, s \right) \sigma \left(X_s^{t,x}, s \right) dB_s \end{aligned}$$

Έπειτα, λόγω της (3.45): $d\mathcal{E}_s = -\mathcal{E}_s r \left(X_s^{t,x}, s \right) ds$ και ο κανόνας του (στοχαστικού) γινομένου μας δίνει

$$\begin{aligned} dM_s &= \mathcal{E}_s d\mathcal{U}_s + \mathcal{U}_s d\mathcal{E}_s \\ &= \mathcal{E}_s \left[d\mathcal{U}_s - \mathcal{U}_s r \left(X_s^{t,x}, s \right) ds \right] \\ &= \mathcal{E}_s \left[u_1 \left(X_s^{t,x}, s \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(X_s^{t,x}, s \right) u_{22} \left(X_s^{t,x}, s \right) + u_2 \left(X_s^{t,x}, s \right) m \left(X_s^{t,x}, s \right) \right. \\ &\quad \left. - u \left(X_s^{t,x}, s \right) r \left(X_s^{t,x}, s \right) \right] ds + u_2 \left(X_s^{t,x}, s \right) \sigma \left(X_s^{t,x}, s \right) dB_s \end{aligned}$$

Επειδή τώρα η $u(x, t)$ είναι η μοναδική λύση της Black-Scholes ΜΔΕ (3.50), παρατηρούμε ότι οι όροι του dM_s στην αγκύλη του ds μηδενίζονται και συνεπώς το $\{M_s\}_{t \leq s < T}$ είναι ένα local martingale. Επιπρόσθετα, επειδή η r είναι μη αρνητική και η u είναι φραγμένη, έπεται ότι το $\{M_s\}_{t \leq s < T}$ είναι ένα γνήσιο martingale ως φραγμένο local martingale (βλ. Λήμμα 1.13). Τέλος, ισχύει τετριμμένα ότι $M_t = u(x, t)$ και από την ιδιότητα του martingale, βρίσκουμε τελικά ότι η u θα έχει την στοχαστική αναπαράσταση (3.54). \square

Παρατήρηση 3.31.

Η σκοπιμότητα χρήσης του εκ πρώτης όψεως πολύπλοκου συμβολισμού $\{X_s^{t,x}\}_{s \in [0, T]}$ για την ανάλυση $\{X_s\}_{s \in [0, T]}$ αναλύεται στο Παράρτημα Α. Έτσι, από το Θεώρημα Α.6, η μέση τιμή (3.54) (άρα και η λύση u της (3.50)) ισούται με

$$E \left[f(X_T) \exp \left(- \int_t^T r(X_u, u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Το αποτέλεσμα αυτό έχει πολύ ενδιαφέρουσες προεκτάσεις, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

3.6 Η άλλη οπτική της Feynman-Kač: Στοχαστική Προσομοίωση

Το 1973 οι Black και Scholes στο πασίγνωστο άρθρο τους [6] πρότειναν ως λύση σε μια ειδική μορφή της (3.50) για $m(S_t, t) := \mu S_t$, $\sigma(S_t, t) := \sigma S_t$, $r(S_t, t) := r$ και $f(x) = (x - K)^+$ την εξής

$$u(x, t) = x \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) - K e^{-r(T-t)} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) \quad (3.58)$$

Γι' αυτό το σπουδαίο τους αποτέλεσμα οι M. Scholes¹⁰ και R. Merton κέρδισαν το Βραβείο Νόμπελ Οικονομικών το 1997. Με μια πρώτη ματιά το Θεώρημα 3.29 δεν έκανε και τίποτα· μετέτρεψε τον πολύπλοκο, αλλά αναλυτικό τύπο (3.58) στην αφηρημένη μέση τιμή (3.54). Στην πραγματικότητα, η στοχαστική αναπαράσταση (3.54) έχει αρκετά να μας πει.

Πρώτον, όπως αναφέραμε η λύση (3.58) των Black και Scholes τιμολογεί δικαιώματα με υποκείμενους τίτλους μετοχές θεωρώντας ότι οι τελευταίες έχουν (ντετερμινιστική) σταθερή μεταβλητότητα (volatility). Συνεπώς, η (3.58) είναι ακατάλληλη για τιμολόγηση ομολόγων (Κεφ. 6) και πολλών άλλων χρηματοοικονομικών παραγώγων επ' αυτών (βλ. Κεφ. 5).

Επιπρόσθετα, πέραν της έντονης γεωμετρικής οπτικής ενός path integral, που περιγράφουμε στο Κεφ. 2, οι όποιες δυσκολίες προκύπτουν στην εύρεση της μέσης τιμής (3.54) μπορούν να απλοποιηθούν βρίσκοντας την ανέλιξη $\{X_s^{t,x}\}_{s \in [t, T]}$ μέσω της λύσης της ΣΔΕ που αυτή ικανοποιεί:

$$dX_s^{t,x} = m(X_s^{t,x}, s) dt + \sigma(X_s^{t,x}, s) dB_s \quad (3.59)$$

με αρχική συνθήκη

$$X_t^{t,x} = x \quad (3.60)$$

Όταν οι λύσεις αυτής της ΣΔΕ έχουν κατανοηθεί καλά, υπάρχει μια εξαιρετική ευκαιρία για τη μέση τιμή (3.54) να υπολογιστεί σε “κλειστή μορφή”.

Για δυσκολότερα προβλήματα, το κυριότερο χαρακτηριστικό της Feynman-Kač formula (3.54) είναι ότι δημιουργεί ένα Πρόβλημα άμεσα εφαρμόσιμο σε Στοχαστική Προσομοίωση. Για παράδειγμα, μια δύσκολα επιλύσιμη Μερική Διαφορική Εξίσωση με ντετερμινιστικές μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης, όπως η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, πιθανότατα να επιλύεται ακριβέστερα με στοχαστικές μεθόδους της Προσομοίωσης ως μια Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση. Η ΣΔΕ (3.55) θα μπορούσε λόγω χάριν να αντιμετωπιστεί με μια Άμεση Μέθοδο Euler για να έχουμε μια πραγματοποίηση της

¹⁰ Ο F. Black πέθανε το 1995 και είναι κοινώς αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα ότι θα μοιραζόταν και αυτός το Βραβείο.

$\{X_s^{t,x}\}_{s \in [t, T]}$ (βλ. Αλγ. B.4). Αν αυξήσουμε κατάλληλα τον αριθμό των επαναλήψεων της μεθόδου, η μέση τιμή (3.54) δύναται να υπολογιστεί εφαρμόζοντας μια Μέθοδο Monte Carlo. Για περισσότερα βλ. Παράρτημα B, σελ. 143 και τα βιβλία [32], [59], [58] και [83].

Ως γνωστόν, στην αριθμητική προσέγγιση λύσεων τίθενται θέματα σύγκλισης (σύγκλιση στη θεωρητική λύση με ποιά έννοια: ως προς κατανομή, ως προς πιθανότητα, κτλ), ακρίβειας της εκτιμώμενης λύσης, και ταχύτητας του αλγορίθμου εύρεσης αυτής. Ωστόσο, ο κλάδος της Στοχαστικής Προσομοίωσης είναι ταχύτατα αναπτυσσόμενος τα τελευταία χρόνια και νέες τροποποιήσεις των παλιότερων μεθόδων προτείνονται διαρκώς.

Τέλος, το γενικό όφελος για τα Μαθηματικά είναι ότι για πολύ γενικές ΜΔΕ, των οποίων η ύπαρξη λύσης και μόνο θα ήταν ένα ιδιαίτερα απαιτητικό πρόβλημα, η Feynman-Kač formula μας παρέχει (κάτω από κάποιες χαλαρές προϋποθέσεις) τη μορφή της λύσης σε “κλειστό τύπο”. Έτσι, μπορούμε να μελετήσουμε ευκολότερα, ασυμπτωτικές ιδιότητες ΜΔΕ όπως η ευστάθεια λύσης, η έκρηξη λύσης κ.ά.

Κεφάλαιο 4

Ο Νόμος του Arcsin του Lévy

Πρόβλεψη είναι η τέχνη του να πεις τι πρόκειται να συμβεί και στη συνέχεια να εξηγήσεις γιατί τελικά δε συνέβη.

Ανώνυμος

Στο [Κεφ.3](#) δημιουργήθηκε ένα θεωρητικό υπόβαθρο που συνδέει τις λύσεις ΜΔΕ με την Θεωρία Πιθανοτήτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε την Feynman-Kač formula σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, κατασκευάζοντας εκ νέου την απόδειξη του Mark Kač του γνωστού Νόμου του Τόξου Ημιτόνου του Paul Lévy¹ (Lévy's Arcsin Law). Το ερώτημα που έπρεπε να απαντηθεί ήταν:

Πρόβλημα 4.1.

Ποιά είναι η κατανομή που ακολουθεί η (τυχαία) διάρκεια του χρόνου T_t , που η κίνηση Brown περνάει στο θετικό ημιάξονα $[0, +\infty)$ κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου $[0, t]$?

Ένα τέτοιο αποτέλεσμα δεν αποτελεί μόνο ένα όμορφο μαθηματικό πρόβλημα, αλλά όπως θα δούμε μπορεί να φωτίσει αρκετά τη διαίσθησή μας για την κίνηση Brown παρέχοντας μια σαφή κατανόηση εμπειρικών φαινομένων και εφαρμογών, τα οποία θα μπορούσαν διαφορετικά να μοιάζουν *αντιφατικά*. Η απόδειξή μας θα βασιστεί ουσιαστικά στην Feynman-Kač formula, οδηγώντας έτσι σε μια έμμεση σύνδεση δύο πεδίων των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους, φαινομενικά άσχετων μεταξύ τους.

Αρχικά, στις [§4.1](#) και [§4.2](#) θα περιγράψουμε το Πρόβλημα και τη σπουδαιότητά του ανάγοντάς το στη διακριτή περίπτωση. Αλλά, ακόμη κι εκεί, τα αριθμητικά αποτελέσματα

¹Ο Paul Lévy [\[64\]](#) βρήκε αυτόν το νόμο του τόξου ημιτόνου για την κίνηση Brown και αναφέρθηκε στη σύνδεσή του με το παιχνίδι του νομίσματος (βλ. [§4.1](#)). Ένας γενικότερος οριακός νόμος τόξου ημιτόνου για τον αριθμό των θετικών μερικών αθροισμάτων σε μια ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών αποδείχθηκε από τους P. Erdős και M. Kač [\[23\]](#) χρησιμοποιώντας μεθόδους Πιθανοτήτων και Συνδυαστικής για ένα υπέροχο αποτέλεσμα στη Θεωρία Αριθμών. Δανειζόμενοι ένα σχόλιο του W. Feller [\[24\]](#) “η τόσο ευρεία εφαρμογή του τελευταίου οριακού νόμου έμοιαζε εκείνη την εποχή [1947] μυστηριώδης, αλλά διάφοροι μαθηματικοί, με αποκορύφωμα τον E. Sparre Andersen, έδειξαν ότι πολλές πτυχές της θεωρίας αθροισμάτων ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών ήταν καθαρά συνδυαστικής φύσεως. Οι αρχικές αποδείξεις ήταν απίστευτα πολύπλοκες, αλλά χάραξαν νέους δρόμους στην έρευνα και ήδη έχουν απλοποιηθεί κατά πολύ.”

Κ. Στούρας, Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω Path Integrals. Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων.

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010

είναι εξίσου δυσνόητα (βλ. Παράδειγμα 4.11). Έπειτα, κάνουμε αναλυτικά την απόδειξη της λύσης με τη βοήθεια των path integrals. Τα θεωρητικά αποτελέσματα έχουν ενισχυθεί από πληθώρα παραδειγμάτων και αριθμητικών υπολογισμών.

4.1 Το ιδεατό παιχνίδι του νομίσματος και η σύνδεσή του με τις στοχαστικές ανελίξεις

Η κλασική περιγραφή αυτού του παιχνιδιού θεωρεί δύο φανταστικούς παθιασμένους χαρτοπαίκτες, τον Γιώργο και τον Αλέξανδρο, τους οποίους τους αρέσει να στοιχηματίζουν σε ό,τι βρουν. Έτσι, παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Ο παίκτης A (Αλέξανδρος) στρίβει ένα (δίκαιο) νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα έρθει κεφαλή, τότε ο A δίνει €1 στον Γ (Γιώργος). Αν το αποτέλεσμα έρθει γράμματα, τότε ο Γ δίνει €1 στον A.

Υποθέτουμε ότι και οι δύο παίκτες έχουν πολλά χρήματα ως αρχικό κεφάλαιο, ώστε να μπορούν να παίξουν αυτό το παιχνίδι αρκετές φορές. Αν μοντελοποιήσουμε το προηγούμενο παιχνίδι, θεωρούμε τις ανεξάρτητες τ.μ. Z_i , $i = 1, 2, \dots$ με κατανομή

$$Z_i = \begin{cases} +1, & \text{με πιθανότητα } p \equiv 0.5 \\ -1, & \text{με πιθανότητα } q = 1 - p \equiv 0.5 \end{cases} \quad (4.1)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $+1$ συμβολίζει το ενδεχόμενο να έρθει κεφαλή και -1 γράμματα, τότε η σ.α. (τυχαίος περίπατος) $\{S_n\}_{n \geq 1}$ με

$$S_n := Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n, \quad S_0 := 0$$

μπορεί να θεωρηθεί ότι συμβολίζει το τελικό κέρδος (αν είναι θετικό), ή την τελική ζημία (αν είναι αρνητικό) του Γιώργου μετά από n -διαδοχικές επαναλήψεις του παιχνιδιού (ρίψεις του νομίσματος). Το S_n ισούται, συνεπώς, με το πόσες (περισσότερες ή λιγότερες) ήταν οι κεφαλές από τα γράμματα κατά την έκβαση της n -ρίψης. Η ακολουθία $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ αναπαριστά τις διαδοχικές αθροιστικές απολαβές του Γιώργου. Θαδειχθεί στη συνέχεια ότι οι τελευταίες υπόκεινται σε τυχαίες διακυμάνσεις μιας εντελώς μη αναμενόμενης μορφής.

Αυτή η διαισθητική γλώσσα του τζόγου δεν πρέπει να αποσπάσει την προσοχή του αναγνώστη από τη γενική σημασία του μοντέλου της ρίψης του νομίσματος. Στην πραγματικότητα, το μοντέλο μπορεί να αποτελέσει μια πρώτη προσέγγιση πολλών, πολυπλοκότερων εξαρτώμενων από την τύχη διαδικασιών της Φυσικής, των Οικονομικών, της Βιολογίας, του κλάδου των Ασφαλίσεων, αλλά και των Παιδαγωγικών· για να αναφέρουμε μερικές μόνο από αυτές. Ποσότητες, όπως η ενέργεια ενός φυσικού σωματιδίου, ο πλούτος ή ο δανεισμός μιας χώρας, η εξέλιξη ενός πληθυσμού μικροβίων, τα αποθεματικά ενός ασφαλι-

στικού ταμείου, ή η συνολική εκμάθηση ενός παιδιού² μπορεί να θεωρηθούν ότι μεταβάλλονται ως συνέπεια διαδοχικών εκβάσεων τυχαίων ποσοτήτων κάποιου είδους.

Ως μια πρώτη προσέγγιση, υποθέτει κανείς ότι κάθε μια μεταβολή είναι ίσου μεγέθους, και ότι το πρόσημο αυτής κυβερνάται από το νόμο του παιχνιδιού του νομίσματος. Πιο εκλεπτυσμένα μοντέλα λαμβάνουν υπόψη τους, στη συνέχεια, ότι οι μεταβολές τους και οι πιθανότητές τους διαφοροποιούνται και αυτές μεταξύ των διαφορετικών πειραμάτων, αλλά ακόμα και το απλό μοντέλο της ρίψης ενός δίκαιου νομίσματος οδηγεί σε εκπληκτικά, στην πραγματικότητα σοκαριστικά, αποτελέσματα. Τα τελευταία έχουν μεγάλη πρακτική χρησιμότητα, επειδή δείχνουν ότι, σε αντίθεση με τη γενικά αποδεκτή άποψη, οι νόμοι που κυβερνούν μια μεγάλη σειρά μεμονωμένων παρατηρήσεων-πειραμάτων θα έχουν τελικά τάσεις και μέσες τιμές πολύ απομακρυσμένες από αυτές που συμπεραίνονται για ολόκληρο τον πληθυσμό. Με άλλα λόγια, πρόσφατα, δημοφιλή ψυχολογικά τεστ θα οδηγούσαν κάποιον να ισχυριστεί ότι σε έναν πληθυσμό “κανονικών” νομισμάτων, τα περισσότερα, μεμονωμένα νομίσματα είναι “πειραγμένα”³.

Συμπερασματικά, είναι φανερό ότι οι τυχαίες μεταβολές στη ρίψη ενός νομίσματος είναι τυπικές για πιο γενικές τυχαίες ανελίξεις με αθροιστικές επιδράσεις. Παρόλαυτα, μοιάζει λογικό ότι, αν ακόμα και το απλό παιχνίδι της ρίψης ενός νομίσματος οδηγεί σε αποτελέσματα που αντίκεινται στη διαίσθησή μας, το τελευταίο δε μπορεί πλέον να είναι ένας αξιόπιστος “οδηγός” σε πιο πολύπλοκες περιπτώσεις.

4.2 Η διακριτή περίπτωση: τυχαίος περίπατος

Κατά τους συμβολισμούς της §4.1, για μια γεωμετρική περιγραφή του παιχνιδιού του νομίσματος μέσω τις γλώσσας των Στοχαστικών Ανελίξεων, είναι βολικό να προσποιηθούμε ότι οι ρίψεις διεξάγονται διαδοχικά κατά έναν ομοιόμορφο ρυθμό, έτσι ώστε η n -οστή ρίψη να συμβαίνει στην εποχή⁴ n . Τα διαδοχικά μερικά αθροίσματα $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ θα αναπαρίστανται ως σημεία στον κάθετο x -άξονα· θα καλούνται οι θέσεις ενός “σωματίδιου” που πραγματοποιεί έναν τυχαίο περίπατο. Παρατηρήστε ότι το σωματίδιο κινείται σε μοναδιαία βήματα κάθε φορά, πάνω ή κάτω σε μια γραμμή (χρόνος). Μια διαδρομή (path) αναπαριστά μία από τις δυνατές πραγματοποιήσεις μιας τέτοιας κίνησης. Για παράδειγμα, η διαδρομή (πορεία) του παιχνιδιού στην Εικόνα 4.1 από την εποχή 0 στην εποχή 100 αποτελεί υπολογιστική προσομοίωση ενός τυχαίου περιπάτου 100 βημάτων.

Κάθε διαδρομή μήκους k μπορεί να ερμηνευτεί ως μια πραγματοποίηση ενός τυχαίου

²Βλ. Παράδειγμα 4.5 παρακάτω.

³Βλ. Παράδειγμα 4.4 παρακάτω.

⁴Ακολουθώντας την ορολογία του J. Riordan και του W. Feller, η λέξη εποχή χρησιμοποιείται για να συμβολίσει σημεία στον άξονα του χρόνου, επειδή κάποια συγγράμματα χρησιμοποιούν τους εναλλακτικούς όρους (όπως στιγμή, χρόνο, χρονικό σημείο) με διαφορετικά νοήματα. Όποτε χρησιμοποιηθεί μαθηματικά, η λέξη “χρόνος” θα αναφέρεται σε ένα διάστημα ή σε μια διάρκεια. Ένα φυσικό πείραμα μπορεί να διαρκέσει κάποιο χρόνο, αλλά τα νοητικά πειράματα που χρησιμοποιούμε εδώ είναι ιδεατά και συνεπώς άχρονα και συμβαίνουν κατά εποχές.

Αλγόριθμος 4.1 Κώδικας σε Mathematica προσομοίωσης του παιχνιδιού του νομίσματος.

```

In[118]= success[p_, i_, c_] := Module[{r =  $\frac{1 - p}{p}$ , T = i + c},
    If[p == 1/2, N[ $\frac{i}{T}$ ,  $\frac{1 - r^i}{1 - r^T}$ ]];
    expectedPlaysToRuin[p_, i_, c_] := Module[{r =  $\frac{1 - p}{p}$ , T = i + c},
    If[p == 1/2, i * c,  $\frac{r + 1}{r - 1} \left( i - T * \frac{1 - r^i}{1 - r^T} \right)$ ]];

    gambleToRuinSimulation[p_, i_, c_, games_] := Module[{playerGval = i, playerAval = c,
        pts = {{0, i}}, message = "Δεν τα χάνει όλα κανένας."},
        Do[AppendTo[pts, {g, playerGval}]; If[Random[] < p, playerGval++; playerAval--,
            playerGval--; playerAval++]; If[playerGval == c + i, message = Row[{"Ο παίκτης
        A τα χάνει όλα σε ", Length[pts], " παιχνίδια."}]; Break[]];
        If[playerGval == 0, message = Row[{"Ο παίκτης Γ τα χάνει όλα σε ",
            Length[pts], " παιχνίδια."}]; Break[]], {g, games}];
        ListPlot[pts, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"αριθμός παιχνιδιών",
            "ως τώρα μερίδιο του παίκτη Γ (ευρώ)"}, PlotLabel ->
            Style[Framed[message], 18, RGBColor[.49, 0, 0]], Joined -> True,
            PlotStyle -> RGBColor[.49, 0, 0], LabelStyle -> {15, Bold},
            ImageSize -> {1200, 600}, ImagePadding -> {{95, 155}, {20, 80}}];

In[121]= Manipulate[Column[Grid[{{Text@Style[Row[{"Πιθανότητα νίκης του
    παίκτη Γ: ", Chop@N[success[pp, ii, cc]]], 16, Bold]}, {Text@Style
        [Row[{"Αναμενόμενος αριθμός παιχνιδιών μέχρι να τα χάσει όλα ή
    να νικήσει ο παίκτης Γ: ", NumberForm[expectedPlaysToRuin[pp, ii, cc], 8]]],
        16, Bold]}], Frame -> All, ItemSize -> 60],
    gambleToRuinSimulation[pp, ii, cc, gg]], {{gg, 500, "αριθμός παιχνιδιών
    προς προσομοίωση "}, {50, 100, 500, 1000, 5000}} {{pp, 0.50, "Η (προκαθορισμένη)
    τιμή της πιθανότητας p του παίκτη Γ να νικήσει "}, {0.40, 0.60, .001,
        Appearance -> "Labeled", ControlPlacement -> Top}}, {{ii, 50, "αρχικό μερίδιο
    του παίκτη Γ (σε ευρώ) "}, {0, 1000, 5, Appearance -> "Labeled"}},
    {{cc, 100, "αρχικό μερίδιο του παίκτη A (σε ευρώ) "}, {0, 10000, 10,
        Appearance -> "Labeled"}}, SaveDefinitions -> True, TrackedSymbols -> {gg, pp, ii, cc}]

```

περίπατου. Υπάρχουν 2^k τέτοιες διαδρομές, και συνεπώς αποδίδουμε πιθανότητα 2^{-k} στο καθένα. Στη περίπτωση του παιχνιδιού που θεωρήσαμε πρόκειται για *συμμετρικό* τυχαίο περίπατο, γιατί στον ορισμό (4.1) των Z_i ισχύει $p = q = 0.5$ (θεωρήσαμε δίκαιο νόμισμα).

Για μεγαλύτερο πειραματισμό υλοποιήσαμε με το υπολογιστικό πακέτο Mathematica διάφορα γνωστά αποτελέσματα της θεωρίας των Στοχαστικών ανελίξεων μέσω ενός GUI (Graphic User Interface) για το υποθετικό μας παιχνίδι. Τρέχοντας τον [Αλγ. 4.1](#) προέκυψαν οι εικόνες της σελ. 74. Συγκεκριμένα, στην πρώτη εικόνα προσομοιώσαμε 100 παιχνίδια, με αρχικό κεφάλαιο για τον Γιώργο €100 και για τον Αλέξανδρο €400. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα νίκης του Γιώργου είναι 0.2 (αρκετά μεγάλη) και ότι ο αναμενόμενος αριθμός παιχνιδιών μέχρι να τα χάσει όλα ή να νικήσει σε 100 παιχνίδια ο Γιώργος, είναι 40,000 (παιχνίδια). Τελικά, το αποτέλεσμα του παιχνιδιού ήταν ότι και οι δύο παίκτες έπαιξαν το

παιχνίδι και δεν έχασε κανέναν πλήρως τα χρήματά του. Αντίθετα, στην δεύτερη εικόνα προσομοιώσαμε 500 παιχνίδια, με αρχικό κεφάλαιο για τον Γιώργο €30 και για τον Αλέξανδρο €10,000. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα νίκης του Γιώργου είναι 0.00299103 (πολύ μικρότερη, σχεδόν μηδενική) και ότι ο αναμενόμενος αριθμός παιχνιδιών μέχρι να τα χάσει όλα ή να νικήσει σε 500 παιχνίδια ο Γιώργος, είναι 300,000 (παιχνίδια). Τελικά, το αποτέλεσμα του παιχνιδιού ήταν ότι σε 117 παιχνίδια ο Γιώργος έχει χάσει όλα του τα χρήματα και επομένως το παιχνίδι σταματάει με $S_{117} = 0$.

Όμως όλα αυτά είναι λίγο πολύ γνωστά από το μάθημα των Στοχαστικών Ανελίξεων· εμείς αναζητούμε την κατανομή του τυχαίου χρόνου που ο παίκτης Γ κερδίζει (ή, αντίστοιχα, ο παίκτης A χάνει). Ο Feller [24] μας εφοδιάζει με τα ακόλουθα λήμματα, που αποτελούν και τον πυρήνα των θεωρημάτων που θα ακολουθήσουν.

Λήμμα 4.2.

Η πιθανότητα ο παίκτης Γ να μη φτάσει στο αρχικό του κεφάλαιο μέχρι και την εποχή $2n$ είναι η ίδια με την πιθανότητα ο παίκτης Γ να φτάσει στο αρχικό του κεφάλαιο στην εποχή $2n$. Συμβολικά

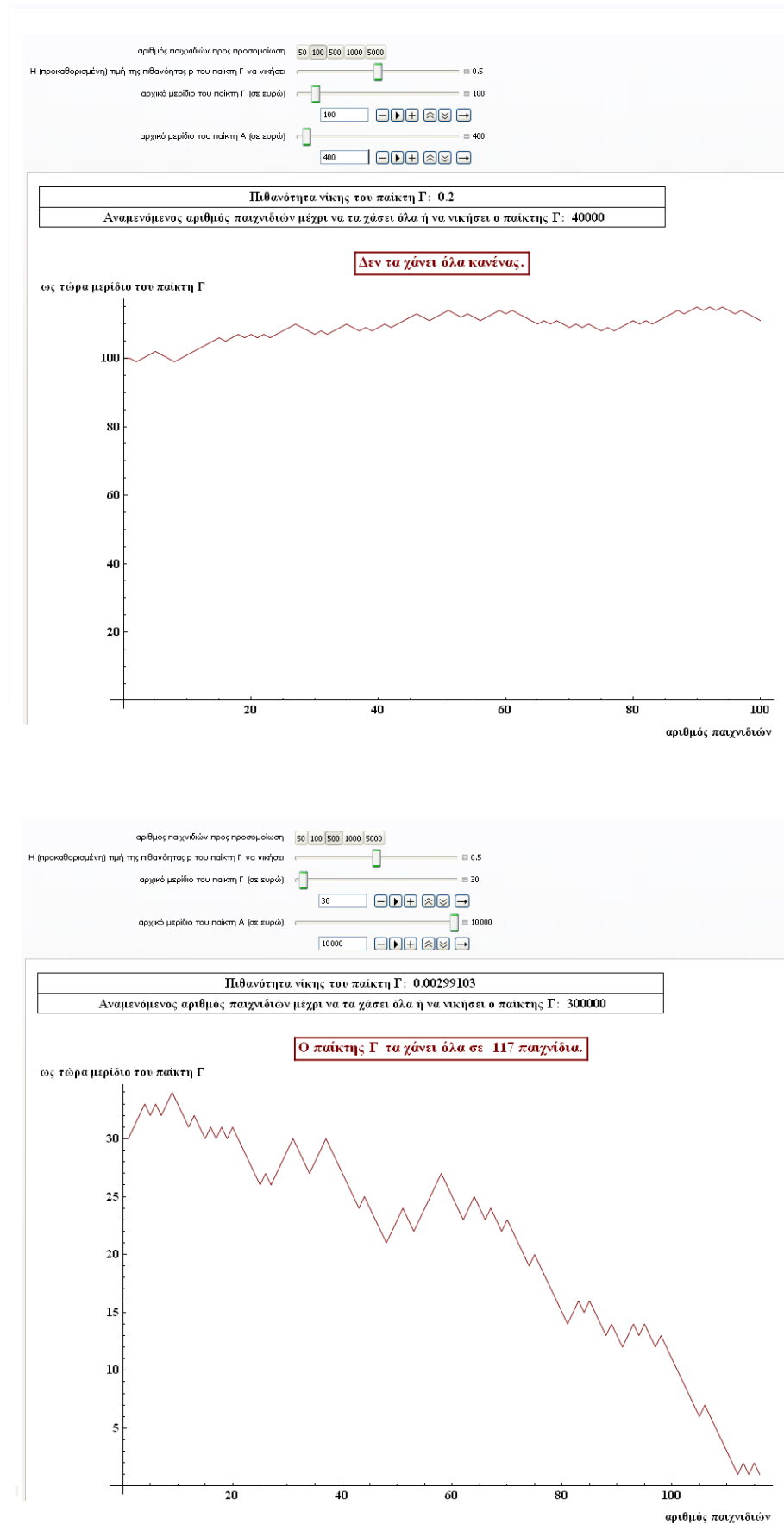
$$u_{2n} := P[S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0] = P[S_{2n} = 0] = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \quad (4.2)$$

Λήμμα 4.3 (Κατανομή πιθανότητας πρώτης ισοπαλίας για τον παίκτη Γ).

Η πιθανότητα ο παίκτης Γ να φτάσει στο αρχικό του κεφάλαιο για πρώτη φορά στην εποχή $2n$ δίνεται από

$$\begin{aligned} f_{2n} &:= P[S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} = 0] = \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n-2} - \binom{2n}{n} 2^{-2n} \\ &= \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} 2^{-2n} \\ &= \frac{1}{2n-1} u_{2n} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Η εξ. (4.3) συνεπάγεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1$. Το τελευταίο ερμηνεύεται ως ότι μια τελική ισοπαλία κερδών και ζημίας του Γιώργου (δηλαδή ο Γιώργος έχει φτάσει στο αρχικό του κεφάλαιο) γίνεται πρακτικώς βέβαιη εάν το παιχνίδι επαναληφθεί κατάλληλα πολλές φορές. Αυτό είναι διαισθητικά αναμενόμενο, εκτός του μη αναμενόμενα μεγάλου αριθμού επαναλήψεων που απαιτούνται για να επιτευχθεί αυτή η βεβαιότητα στην πράξη. Για παράδειγμα, ως ένα πρώτο υπολογισμό, η πιθανότητα να μη φτάσει στο αρχικό του κεφάλαιο ο παίκτης μας σε 100 ρίψεις του νομίσματος είναι περίπου 0.08!



Εικ. 4.1 Υπολογιστική προσομοίωση με το Mathematica του παιχνιδιού του νομίσματος.

4.2-1 Τελευταία δυνατή ισοπαλία κερδών-ζημίας και μακρές περίοδοι κερδών

Έχοντας κατά νου την προηγούμενη μαθηματική μοντελοποίηση είμαστε έτοιμοι για μια πιο ενδελεχή ανάλυση της φύσης των τυχαίων μεταβολών του τυχαίου περιπάτου (είμαστε ακόμα στη διακριτή περίπτωση). Τα αποτελέσματα είναι τρομακτικά! Σύμφωνα με την ευρέως διαδεδομένη άποψη, ένας επονομαζόμενος διαισθητικός νόμος “του μέσου όρου” θα διασφάλιζε ότι, εάν επαναλάβουμε πάρα πολλές φορές το παιχνίδι της ρίψης νομίσματος, κάθε παίκτης θα βρίσκεται στην περιοχή των κερδών για περίπου το μισό χρόνο, και ότι η νίκη, δηλαδή η κατάσταση στην οποία ένας παίκτης κερδίζει, θα περνά συχνά από τον έναν παίκτη στον άλλο.

Έστω ότι επαναλαμβάνουμε ένα μεγάλο αριθμό ιδεατών παιχνιδιών ρίψης νομίσματος, το καθένα αποτελούμενο από $2n$ ρίψεις. Επιλέγουμε ένα στη τύχη και παρατηρούμε την εποχή της τελευταίας ισοπαλίας (δηλαδή, τον αριθμό της τελευταίας ρίψης στην οποία οι ως τότε αριθμοί κεφαλών και γραμμάτων είναι ίσοι). Αυτός ο αριθμός είναι άρτιος, και τον συμβολίζουμε ως $2κ$, με $0 \leq κ \leq n$. Συχνές εναλλαγές της περιόδου νίκης θα συνεπάγονται ότι το $κ$ είναι κοντά στο n , αλλά αυτό, όπως θα δούμε, δεν ισχύει.

Στην πραγματικότητα, το επόμενο **Θεώρημα 4.6** αποκαλύπτει το απίστευτο (?) γεγονός ότι η (διακριτή) κατανομή του $κ$ είναι συμμετρική, με την έννοια ότι η κάθε τιμή του $κ$ έχει την ίδια πιθανότητα με του $n - κ$. Αυτή η συμμετρία συνεπάγεται ότι οι ανισότητες $κ > \frac{n}{2}$ και $κ < \frac{n}{2}$ είναι εξίσου πιθανές⁵. Με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ ο παίκτης Γ δε φτάνει ποτέ στο αρχικό του κεφάλαιο στο δεύτερο μισό του παιχνιδιού, ανεξαρτήτως του χρόνου του παιχνιδιού. Επιπρόσθετα, οι πιθανότητες κοντά στα άκρα του παιχνιδιού είναι οι μεγαλύτερες· οι πιο πιθανές τιμές για το $κ$ είναι οι ακραίες τιμές 0 και n . Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι η διαίσθηση δημιουργεί πολλές φορές μια εσφαλμένη εικόνα για την φύση των τυχαίων μεταβολών μιας στοχαστικής ανέλιξης. Ίσως, μερικοί αριθμητικοί υπολογισμοί να είναι περισσότερο διαφωτιστικοί (βλ. [24]).

Παράδειγμα 4.4.

Ας υποθέσουμε ότι διεξάγονται πάρα πολλά ιδεατά παιχνίδια ρίψης νομίσματος ένα το δευτερόλεπτο, μέρα-νύχτα, για ένα ολόκληρο χρόνο. Κατά μέσον όρο, σε ένα στα δέκα παιχνίδια η τελευταία δυνατή ισοπαλία κερδών-ζημίας του παίκτη Γ θα συμβεί πριν περάσουν 9 μέρες, και ο παίκτης που θα κερδίζει, θα συνεχίσει να κερδίζει για τις επόμενες 356 μέρες. Επιπρόσθετα, σε μία στις είκοσι περιπτώσεις η τελευταία δυνατή ισοφάριση θα συμβεί μέσα σε 2.24 μέρες και τέλος, σε μία στις εκατό, μόνο, περιπτώσεις θα συμβεί μέσα στις πρώτες 2 ώρες και 10 λεπτά. ■

⁵“Η συμμετρία της κατανομής του $κ$ βρέθηκε εμπειρικά αρχικά με τη βοήθεια των υπολογιστών και πιστοποιήθηκε θεωρητικά χωρίς γνώση της επακριβούς κατανομής”[24]. Για περισσότερα βλέπε το άρθρο των D. Blackwell, P. Dewel, και D. Freedman, Ann. Math. Statist., **35**:1344, 1947.

Το Παράδειγμα 4.4 μας λέει ότι αν ένας παίκτης κερδίζει, θα συνεχίσει να κερδίζει για πολύ παραπάνω χρόνο από ότι (διαισθητικά) θα αναμέναμε· οι παρεχόμενες αριθμητικές τιμές προέκυψαν από τον Πίνακα 4.3, σελ. 87. Το επόμενο παράδειγμα είναι από τον χώρο της θεωρίας εκμάθησης.

Παράδειγμα 4.5.

Ας υποθέσουμε ότι διεξάγεται ένα πείραμα σε παιδιά διάρκειας ενός έτους για τη διερεύνηση της δυνατότητας εκμάθησης αυτών. Έστω ότι ένα παιδί μένει συνεχώς πίσω (υστερεί) από τα υπόλοιπα εκτός, ίσως, από την αρχική εβδομάδα. Ένα άλλο παιδί είναι συνεχώς “μπροστά” από τα υπόλοιπα εκτός, πιθανώς, της τελευταίας εβδομάδας. Θα πρέπει τα δύο παιδιά να κριθούν με ίσους όρους; Ακόμη, έστω ότι μια ομάδα 11 παιδιών υποβάλλεται σε ένα παρόμοιο πείραμα που δεν περιέχει νοημοσύνη, αλλά μόνο τύχη (δηλαδή είναι τυχαίο ποιο παιδί θα μάθει τα περισσότερα). Τότε ένα παιδί στα έντεκα θα μαθαίνει τα περισσότερα για όλες τις βδομάδες του έτους, εκτός από μία, και ένα άλλο θα μαθαίνει τα λιγότερα από όλα τα παιδιά για όλες τις εβδομάδες του έτους, εκτός από μία. ■

Οι ακριβείς πιθανότητες για τις πιθανές τιμές του κ δίνονται από το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.6 (Νόμος του Arcsin για την τελευταία ισοπαλία κερδών-ζημίας).

Η πιθανότητα ότι μέχρι και την εποχή $2n$ η τελευταία ισοπαλία κερδών-ζημίας του παίκτη Γ να συμβεί την εποχή $2k$ δίνεται από

$$\alpha_{2\kappa, 2n} := u_{2\kappa} u_{2n-2\kappa} = \binom{2\kappa}{\kappa} \binom{2n-2\kappa}{n-\kappa} 2^{-2n} \quad \kappa = 0, 1, \dots, n \quad (4.4)$$

Απόδειξη. Ενδιαφερόμαστε ουσιαστικά για τους τυχαίους περιπάτους που ικανοποιούν τις συνθήκες $S_{2\kappa} = 0$ και $S_{2\kappa+1} \neq 0, S_{2\kappa+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0$. Ο τυχαίος περίπατός μας ξεκινάει από το $O(0, 0)$ και έχει μήκος $2n$. Τα πρώτα 2κ σημεία της κίνησής του μπορούν να επιλεχθούν με $2^{2\kappa} u_{2\kappa}$ τρόπους. Θεωρώντας στη συνέχεια το σημείο $(2\kappa, 0)$ ως νέα αρχή και χρησιμοποιώντας την (4.2) από το Λήμμα 4.2 συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα $2n - 2\kappa$ σημεία μπορούν να επιλεχθούν με $2^{2n-2\kappa} u_{2n-2\kappa}$ τρόπους. Διαιρώντας με 2^{-2n} προκύπτει τελικά η ζητούμενη σχέση (4.4). □

Από το Θεώρημα 4.6 προκύπτει ότι οι αριθμοί $\alpha_{2\kappa, 2n}$ στην (4.4) αθροίζονται στη μονάδα (ως προς κ). Η (4.4) ορίζει λοιπόν την διακριτή κατανομή του τόξου ημιτόνου (*arcsin distribution*) τάξης n , επειδή μπορεί ναδειχθεί ότι για $n \rightarrow \infty$ ότι τα $\alpha_{2\kappa, 2n}$ συγχλίνουν σε μια συνάρτηση του \arcsin , η οποία είναι και η απάντηση στο Πρόβλημα 4.1 (βλ. Θεώρημα 4.8 παρακάτω).

Η (διακριτή) κατανομή του κ είναι συμμετρική με την έννοια ότι $\alpha_{2\kappa, 2n} = \alpha_{2n-2\kappa, 2n}$. Για $n = 2$ προκύπτουν οι $n + 1 = 3$ τιμές $\frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}$ · για $n = 10$ βλ. τον Πίνακα 4.1. Παρατηρήστε ότι ο κεντρικός όρος είναι πάντα ο μικρότερος.

	$\kappa = 0$ ή $\kappa = 10$	$\kappa = 1$ ή $\kappa = 9$	$\kappa = 2$ ή $\kappa = 8$	$\kappa = 3$ ή $\kappa = 7$	$\kappa = 4$ ή $\kappa = 6$	$\kappa = 5$
$\alpha_{2\kappa,20}$	0.1762	0.0927	0.0736	0.0655	0.0617	0.0606

Πίνακας 4.1 Διακριτή Arcsin κατανομή τάξης 10.

Η απάντηση στο [Πρόβλημα 4.1](#) για τον τυχαίο περίπατο (διακριτή προσέγγιση της κίνησης Brown) δίνεται από το ακόλουθο [Θεώρημα 4.7](#) που αποδείχθηκε πρώτα, με πολύπλοκες μεθόδους, από τους K. L. Chung και W. Feller (Discrete Arcsin Law for sojourn times), αλλά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει μια κομψή, μεταγενέστερη απόδειξή του στο [\[24\]](#).

Θεώρημα 4.7 (Νόμος του Arcsin στη διακριτή περίπτωση).

Η πιθανότητα παίζοντας συνολικά $2n$ παιχνίδια, ο παίκτης Γ να κερδίζει⁶ για 2κ παιχνίδια και για $2n - 2\kappa$ παιχνίδια να χάνει, ισούται με $\alpha_{2\kappa,2n}$.

Αφού έγινε πλήρως κατανοητή, μέσω της διακριτής περίπτωσης, η διαισθητική ερμηνεία της λύσης στο [Πρόβλημα 4.1](#), καθώς και η σημασία αυτού προχωρούμε στην απόδειξη για την συνεχή περίπτωση, ως μια εφαρμογή των μεθόδων που αναπτύξαμε στο [Κεφ. 3](#).

4.3 Η συνεχή περίπτωση: κίνηση Brown

Κατά τους συμβολισμούς των εννοιών της σελ. [69](#), το ακόλουθο αποτέλεσμα δίνει τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του $\frac{T_t}{t}$:

Θεώρημα 4.8 (Arcsin Law, Lévy, Kač).

Έστω $\{B_t\}_{t \geq 0}$ μονοδιάστατη κ.Β. με $B_0 := 0$ και $\{T_t\}_{t > 0}$: σ.α. του χρόνου που η $\{B_t\}_{t \geq 0}$ περνά στο θετικό ημιάξονα $[0, +\infty)$ κατά τη διάρκεια της περιόδου $[0, t]$. Τότε, για κάθε $p \in [0, 1]$ και για κάθε $t \in (0, +\infty)$ η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του $\frac{T_t}{t}$ δίνεται από τη σχέση

$$P[T_t \leq pt] := \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{p} = \frac{1}{\pi} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du \quad (4.5)$$

⁶Ο αριθμός παιχνιδιών στα οποία ο παίκτης Γ βρίσκεται στην περιοχή κέρδους είναι αναγκαστικά άρτιος. Γιατί για παράδειγμα, αν παίξουν το παιχνίδι για $2n = 4$ φορές και ο παίκτης Γ νίκησε σε μία (έστω) από αυτές ($\kappa = 1$), τότε βρίσκονταν στην περιοχή κέρδους για $2\kappa = 2$ παιχνίδια: ένα στο οποίο κέρδισε, αλλά και άλλο ένα στο οποίο έχασε (όσα κέρδισε) και βρέθηκε πάλι με το αρχικό του στοίχημα. Επαγωγικά, ο ισχυρισμός αυτός ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς κ .

x	$A(x)$	x	$A(x)$	x	$A(x)$
0.00	0.000	0.20	0.295	0.40	0.236
0.01	0.064	0.21	0.303	0.41	0.442
0.02	0.090	0.22	0.311	0.42	0.449
0.03	0.111	0.23	0.318	0.43	0.455
0.04	0.128	0.24	0.326	0.44	0.462
0.05	0.144	0.25	0.333	0.45	0.468
0.06	0.158	0.26	0.341	0.46	0.474
0.07	0.171	0.27	0.348	0.47	0.481
0.08	0.183	0.28	0.355	0.48	0.487
0.09	0.194	0.29	0.362	0.49	0.494
				0.50	0.500
0.10	0.205	0.30	0.369		
0.11	0.215	0.31	0.376		
0.12	0.225	0.32	0.383		
0.13	0.235	0.33	0.390		
0.14	0.244	0.34	0.396		
0.15	0.253	0.35	0.403		
0.16	0.262	0.36	0.410		
0.17	0.271	0.37	0.416		
0.18	0.279	0.38	0.423		
0.19	0.287	0.39	0.429		
Για $1 \geq x > 0.50$ λόγω συμμετρίας ισχύει $A(1-x) = A(x)$					

Πίνακας 4.2 Η συνεχής Arcsin κατανομή $A(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$.

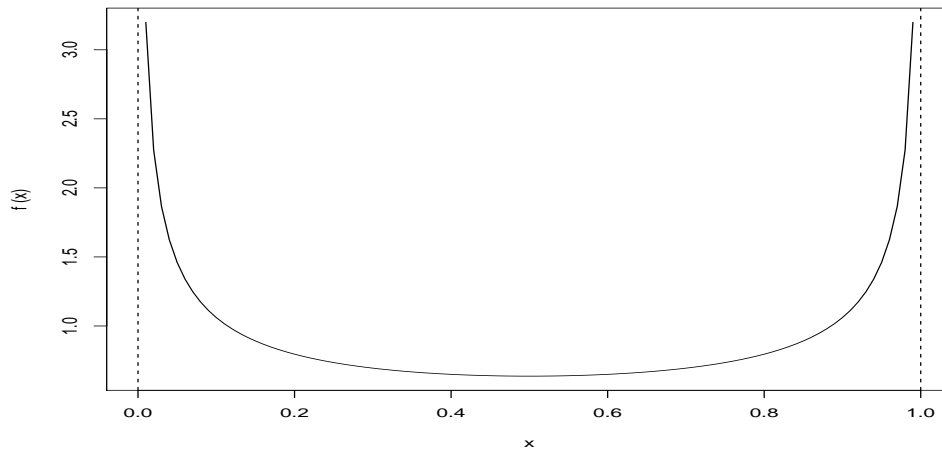
Σε όρους του ιδεατού παιχνιδιού του νομίσματος της §4.1, το Θεώρημα 4.8 ερμηνεύεται ως εξής.

Εάν $0 \leq p \leq 1$, η πιθανότητα ο παίκτης Γ να κερδίζει για pn παιχνίδια και να χάνει για $(1-p)n$ παιχνίδια τείνει στο $\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{p}$, αν το παιχνίδι επαναληφθεί πάρα πολλές φορές (δηλαδή, καθώς $n \rightarrow \infty$).

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι πρόκειται για το συνεχές ανάλογο του νόμου που περιγράφει το Θεώρημα 4.7.

Σχόλιο 4.9.

Ένα έμπειρο μάτι, κοιτώντας την εξ. (4.5) παρατηρεί ότι έχουμε υπολογίσει και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) για τη διάρκεια του χρόνου T_t , της κίνηση Brown. Με τη βοήθεια της R κάνουμε τη γραφική παράσταση αυτής. Η Εικόνα 4.2 “μιλάει”



Εικ. 4.2 Γραφική παράσταση της σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

από μόνη της: τα άκρα 0 και 1 έχουν τη μέγιστη πιθανότητα εμφάνισης, ενώ η σ.π.π. έχει ελάχιστο για $p = 0.5$. Το γεγονός αυτό έχει κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες συνέπειες.

Για το ιδεατό παιχνίδι του νομίσματος, ο νόμος του Arcsin του Lévy μας λέει ότι:

Κατά τη διάρκεια μιας μακράς περιόδου επαναλήψεων του παιχνιδιού είναι τουλάχιστον είκοσι⁷ φορές πιθανότερο ένας από τους παίκτες να κερδίζει για το 98% του χρόνου, παρά από το να κερδίζει για απλώς στο $50 \pm 1\%$ του χρόνου.

Αντιγράφοντας ένα σχόλιο του M. Steele [90], ο νόμος του Arcsin είναι ένα από τα θεωρητικά γεγονότα που δείχνουν γιατί “ακόμα και ο πιο δίκαιος κόσμος μπορεί να φαίνεται

⁷Είναι γνωστό ότι για μια τ.μ. X με σ.π.π. f ισχύει

$$P[\alpha \leq X \leq \beta] = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Θέτοντας $\alpha = 0.49$, $\beta = 0.501$ και $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ το Mathematica βρίσκει

```
In[5]:= NIntegrate[1 / (Pi * Sqrt[p * (1 - p)]), {p, 0.49, 0.501}]
```

```
Out[5]= 0.00700324
```

Επίσης, επειδή $p_1 := P\left[\frac{T_t}{t} > 0.98\right] = 1 - P\left[\frac{T_t}{t} \leq 0.98\right]$ το Mathematica δίνει

```
In[6]:= 1 - N[(2 / Pi) ArcSin[Sqrt[0.98]]]
```

```
Out[6]= 0.0903345
```

Τέλος, ο λόγος αυτών των πιθανοτήτων είναι

```
In[7]:= N[(1 - N[(2 / Pi) ArcSin[Sqrt[0.98]]]) /
(NIntegrate[1 / (Pi * Sqrt[p * (1 - p)]), {p, 0.494, 0.501}]]]
```

```
Out[7]= 20.2706
```

άδικος σε έναν τυπικό παρατηρητή”.

Επιπρόσθετα, “τρέχοντας” μια επανάληψη στο Mathematica κατασκευάσαμε τον Πίνακα 4.2. Προτού όμως προχωρήσουμε, χρειαζόμαστε ένα ακόμη αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.10.

Για κάθε $r > 0$ ισχύει

$$I(r) := \int_0^\infty \frac{e^{-rt}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \quad (4.6)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο ορισμός της συνάρτησης Γάμμα για $x > 0$

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (4.7)$$

για $t = u^2$ γράφεται

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \quad (4.8)$$

Συνεπώς, ο τύπος (4.6) είναι της μορφής (4.8) για $x = \frac{1}{2}$, δηλαδή

$$\begin{aligned} I(r) &\equiv \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{r}} \end{aligned} \quad \square$$

Η απόδειξη που ακολουθεί βασίζεται στις υποδείξεις του Durrett [22] και του Kuo [63], αλλά έγινε εδώ αναλυτικότερα.

Απόδειξη στο Θεώρημα 4.8. Παρατηρούμε ότι η τ.μ. T_t γράφεται ως

$$T_t = \int_0^t 1_{\{B_s > 0\}} ds \quad (4.9)$$

Επίσης, θέτοντας $c(x) := -r \cdot 1_{\{x > 0\}}$ (με $r \geq 0$, σταθερά)⁸ βρίσκουμε

$$-rT_t = \int_0^t c(B_s) ds$$

Θεωρώντας στη μονοδιάστατη εκδοχή της Feynman-Kač formula (3.37), $f(x) := 1$ και c όπως προηγουμένως, έχουμε

$$\begin{aligned} u(x, t) &= E \left[\exp \left(-r \int_0^t 1_{\{B_s \geq 0\}} ds \right) \right] \\ &= E \left[\exp \left(\int_0^t c(x + B_s) ds \right) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

⁸Πρόκειται για εξουδετερωμένη (killed) κίνηση Brown με σταθερό ρυθμό εξουδετέρωσης (killing rate) $r \geq 0$. Βλ. και §3.1-1.

με την προϋπόθεση ότι $u(x, t)$ είναι η μοναδική λύση στο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ)

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2}u_{xx}(x, t) - r \cdot 1_{\{x>0\}} u(x, t) \quad \text{στο } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad (a)$$

$$\begin{aligned} u &: \text{συνεχής στο } \mathbb{R} \times [0, +\infty) \text{ με} \\ u(x, 0) &= 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (b) \quad (4.11)$$

Δε κάναμε τίποτα άλλο από το να μεταφράσουμε τα δεδομένα μας σε όρους της μεθοδολογίας της §3.4. Επομένως, θα λύσουμε το Πρόβλημα 4.11 με την κλασική προσέγγιση του μετασχηματισμού Laplace και βασιζόμενοι στις αποδείξεις του Κεφ. 3 θα επαληθεύσουμε ότι η λύση $u(x, t)$ στην (4.11) συμπίπτει με την ζητούμενη πυκνότητα του τόξου εφραπομένης. Στην πραγματικότητα ισχύει ότι $u(x, t) \equiv E[e^{-rTt}]$.

Ουσιαστικά, η 4.11(α) είναι δύο εξισώσεις:

$$u_t(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_{xx}(x, t) - r \cdot u(x, t) & \text{για } x > 0 \\ \frac{1}{2}u_{xx}(x, t) & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

και η αρχική συνθήκη 4.11(β) υπονοεί ότι

$$u(x, 0^+) = 1$$

όπου $u(x, 0^+)$ συμβολίζει το όριο της $u(x, t)$ καθώς το t πλησιάζει το 0 από τα θετικά. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Laplace (Ορισμός 1.32) και κατά τους συμβολισμούς της §1.3-3 έχουμε ότι για $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L} \frac{d}{dt} u(x, \cdot) \right) (\alpha) &:= \int_0^\infty e^{-\alpha t} u_t(x, t) dt \\ &= \left[e^{-\alpha t} u_t(x, t) \right]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(x, t) dt \\ &= -1 + \alpha \mathcal{L} u(x, t) \\ &= -1 + \alpha \hat{u}(x, \alpha) \end{aligned}$$

και για τον μετασχηματισμό Laplace της u_{xx} για $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} u_{xx}(x, \cdot)) (\alpha) &:= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(x, t) dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L} u(x, t) \\ &= \hat{u}_{xx}(x, \alpha) \end{aligned}$$

Έτσι, η ΜΔΕ (4.11) μετασχηματίζεται στην απλούστερη, Συνήθης Διαφορική Εξίσωση

(Δ.Ε.)

$$\hat{u}_{xx}(x, \alpha) = \begin{cases} 2(\alpha + r)\hat{u}(x, \alpha) - 2 & \text{για } x > 0 \\ 2r\hat{u}(x, \alpha) - 2 & \text{για } x < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις έχουν μερικές λύσεις $\frac{1}{\alpha+r}$ και $\frac{1}{\alpha}$ αντίστοιχα. Λύνουμε την (4.12), θεωρώντας πρώτα την ομογενή του πρώτου σκέλους

$$\hat{u}_{xx}(x, \alpha) - 2(\alpha + r)\hat{u}(x, \alpha) = 0 \quad (4.13)$$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\mathcal{X}(\kappa) = 0 \iff$$

$$\kappa^2 - 2(\alpha + r) = 0 \iff$$

$$\boxed{\kappa = \pm \sqrt{2(\alpha + r)}}$$

Η θετική ρίζα πρέπει να απορριφθεί, γιατί η αντίστοιχη εκθετική συνάρτηση θα πηγαίνει στο $+\infty$ καθώς $x \rightarrow +\infty$. Από την άλλη, θεωρώντας την ομογενή εξίσωση του δευτέρου σκέλους της (4.12) βρίσκουμε τις ακόλουθες δύο ρίζες στη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\boxed{\kappa = \pm \sqrt{2r}}$$

Σε αυτή την περίπτωση η αρνητική ρίζα πρέπει να απορριφθεί, γιατί η αντίστοιχη εκθετική συνάρτηση θα πηγαίνει στο $+\infty$ καθώς $x \rightarrow -\infty$. Άρα η (4.13) έχει λύση της μορφής

$$\hat{u}_{\text{ΟΜΟΓ}}(x, \alpha) = \begin{cases} C_0 \exp(-x \sqrt{2(\alpha + r)}) & \text{για } x > 0 \\ C_1 \exp(x \sqrt{2\alpha}) & \text{για } x < 0 \end{cases}$$

Δηλαδή η εξίσωση (4.11) έχει τελικά λύση της μορφής⁹

$$\hat{u}(x, \alpha) = \begin{cases} C_0 \exp(-x \sqrt{2(\alpha + r)}) + \frac{1}{\alpha+r} & \text{για } x > 0 \\ C_1 \exp(x \sqrt{2\alpha}) + \frac{1}{\alpha} & \text{για } x < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

με C_0, C_1 : προσδιοριστέες σταθερές ολοκλήρωσης. Μόλις οι σταθερές αυτές έχουν υπολογιστεί, θα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη λύσης στο ΠΑΤ (4.11). Τότε, η μοναδικότητα της λύσης έπεται άμεσα λόγω της μοναδικότητας λύσης της Δ.Ε. (4.12) και της μοναδικότητας του μετασχηματισμού Laplace (Θεώρημα 1.35, σελ. 20).

Απαιτώντας για τη λύση $u(x, \alpha)$ στο Πρόβλημα 4.11, $u \in C^{2,1}$ δημιουργούνται οι

⁹Ισχύει

$$\hat{u}(x, \alpha) = \hat{u}_{\text{ΟΜΟΓ}}(x, \alpha) + \hat{u}_{\text{ΜΕΡΙΚΗ}}(x, \alpha).$$

ακόλουθες δύο αρχικές συνθήκες:

$$u(0^+, t) = u(0^-, t) \quad (\alpha)$$

$$u_x(0^+, t) = u_x(0^-, t) \quad (\beta)$$

Συνεπώς, ο μετασχηματισμός Laplace, \hat{u} , πρέπει επίσης να ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο (κρυμμένες) αρχικές συνθήκες της (4.12):

$$\hat{u}(0^+, \alpha) = \hat{u}(0^-, \alpha) \quad (\alpha) \tag{4.15}$$

$$\hat{u}_x(0^+, \alpha) = \hat{u}_x(0^-, \alpha) \quad (\beta)$$

Αυτές οι εξισώσεις θα μας δώσουν τις τιμές των ζητούμενων σταθερών. Κατά τον υπολογισμό των αντίστοιχων ορίων στην (4.14), παρατηρούμε ότι η 4.15(α) συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{\alpha + r} + C_0 = \frac{1}{\alpha} + C_1 \tag{4.16}$$

και η 4.15(β) μας δίνει

$$-C_0 \sqrt{2(\alpha + r)} = C_1 \sqrt{2\alpha} \tag{4.17}$$

Από την (4.17) βρίσκουμε

$$C_1 = -C_0 \frac{\sqrt{2(\alpha + r)}}{\sqrt{2\alpha}} \tag{4.18}$$

Αντικαθιστώντας την (4.18) στην (4.16) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+r}}{1 + \frac{\sqrt{2(\alpha+r)}}{\sqrt{2\alpha}}} \\ &= \frac{\frac{r}{\alpha(\alpha+r)}}{\frac{\sqrt{2\alpha} + \sqrt{2(\alpha+r)}}{\sqrt{2\alpha}}} \\ &= \frac{r}{\sqrt{\alpha}(\alpha+r)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha+r})} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha+r} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}(\alpha+r)} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Λόγω της (4.19) η (4.18) γίνεται:

$$C_1 = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha+r}}{\alpha\sqrt{\alpha+r}} \tag{4.20}$$

Από τις (4.19), (4.20) η (4.14) έχει λυθεί και επειδή μας ενδιαφέρει μόνο η τιμή $\hat{u}(0^+, \alpha)$,

από το δεύτερο σκέλος αυτής βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\hat{u}(0^+, \alpha) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(0, t) dt \\ &= \frac{\sqrt{\alpha+r} + \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha+r}}{\alpha\sqrt{\alpha+r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+r)}}\end{aligned}\quad (4.21)$$

Ο προηγούμενος τύπος είναι αρκετά απλός¹⁰ και όλα μοιάζουν ότι η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί σε λίγες μόλις γραμμές.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι ο νόμος του Arcsin υπαγορεύει ότι η $\frac{T_t}{t}$ θα έχει την σ.κ.π. του Arcsin στο $[0, 1]$ και ότι αυτό είναι ισοδύναμο¹¹ με το να δείξουμε ότι η T_t έχει την σ.κ.π. του Arcsin στο $[0, t]$. Επομένως, σε όρους μετασχηματισμού Laplace, αρκεί να δείξουμε ότι¹²

$$E[e^{-rT_t}] = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{e^{-rs}}{\sqrt{s(t-s)}} ds \quad (4.22)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (4.22) κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int_0^\infty E[e^{-rT_t}] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^t \frac{e^{-rs}}{\sqrt{s(t-s)}} ds dt \quad (4.23)$$

Το αριστερό μέλος της (4.23) δεν είναι παρά ο $\mathcal{L}(T_t)$, δηλαδή δίνεται από την (4.21) και, συνεπώς, μένει να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha+r}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^t \frac{e^{-rs}}{\sqrt{s(t-s)}} ds dt \quad (4.24)$$

Ευτυχώς για μας, το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι εύκολο να υπολογιστεί, και

¹⁰Η (4.21) λόγω συνέλιξης συνεπάγεται επίσης, ότι

$$u(0, t) \equiv (\mathcal{L}^{-1} \hat{u}(0^+, \cdot))(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} e^{-rs} \frac{1}{\sqrt{s}} ds$$

¹¹Ισχύει

$$P\left[\frac{T_t}{t} \leq \theta\right] \equiv P[T_t \leq \theta t] \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

¹²Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\mathcal{L}(T_t) = u(0, t).$$

εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini αλλά και το [Λήμμα 4.10](#) βρίσκουμε τελικά

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-rs}}{\sqrt{s}} \int_s^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t-s}} dt ds &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-rs}}{\sqrt{s}} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{\sqrt{t}} dt ds \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-(t+\alpha)s}}{\sqrt{s}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+r}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+r)}}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Η (4.25) επαληθεύει την ισχύ της (4.22). Η τελευταία συνεπάγεται ότι η τυχαία μεταβλητή $\frac{T_t}{t}$ έχει σ.π.π.

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}}, & 0 < u < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεπώς, για $0 < u < t$ έχουμε

$$P\left[\frac{T_t}{t} \leq p\right] = \frac{1}{\pi} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du$$

Με μια απλή αλλαγή μεταβλητών $u = ty^2$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 P\left[\frac{T_t}{t} \leq p\right] &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \\
 &= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{p}
 \end{aligned}$$

Επομένως, η απόδειξη του Καϋ στο Νόμο του Arcsin (εξ. 4.5) για τη συνεχή περίπτωση της κίνησης Brown έχει ολοκληρωθεί. \square

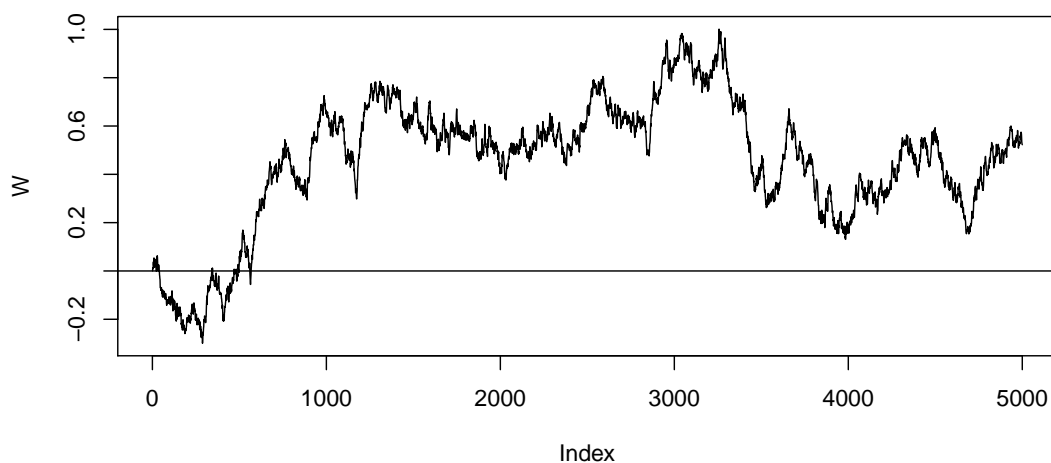
4.3-1 Μερικές ακόμη εφαρμογές

Σαφέστατα, δεν υπάρχει καλύτερος επίλογος για αυτό το κεφάλαιο από μερικούς ακόμη αριθμητικούς υπολογισμούς ως εφαρμογή του τύπου (4.5).

Παράδειγμα 4.11.

(α) Από τον [Πίνακα 4.1](#) είναι φανερό ότι η πιθανότητα για 10 επαναλήψεις του παιχνιδιού (ρίψεις του νομίσματος) ένας από τους παίκτες (ο Γιώργος) να συνεχίσει να κερδίζει για όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού είναι $0.352 (= 0.1762 \times 2)$. Η πιθανότητα ο πιο τυχερός παίκτης (ο Αλέξανδρος) να κερδίζει 8 φορές ή περισσότερες είναι 0.685. Το τελευταίο προκύπτει χρησιμοποιώντας ότι η $\alpha_{2k,2n}$ είναι μια διακριτή σ.π.π., και συνεπώς

$$P[2k > 16] = 0.1762 \times 2 + 0.0927 \times 2 + 0.0736 \times 2 = 0.685$$



Εικ. 4.3 Μια πραγματοποίηση της κίνησης Brown.

Είναι, επίσης, εκπληκτική η προσέγγιση 0.704, που δίνει το Mathematica χρησιμοποιώντας το [Θεώρημα 4.8](#) για $p := \frac{16}{20} \equiv 0.8$:

```
In[1]:= N[(2 / Pi) ArcSin[Sqrt[0.8]]]
Out[1]= 0.704833
```

Η πιθανότητα κάθε παίκτης να νικάει για συνολικά 10 από τα 20 παιχνίδια είναι μόλις 0.061 (βλ. [Πίνακα 4.1](#)).

(β) Έστω ότι ο αριθμός των επαναλήψεων του παιχνιδιού είναι *μεγάλος*. Με πιθανότητα 0.20 το (μονοδιάστατο) σωματίδιο της κίνησης Brown περνά περίπου το 97.6 τοις εκατό του χρόνου του στον ίδιο (θετικό ή αρνητικό) ημιάξονα. Σε μία στις δέκα περιπτώσεις το σωματίδιο περνά το 99.4 τοις εκατό του χρόνου του στον ίδιο ημιάξονα.

Στην [Εικόνα 4.3](#) απεικονίζεται μια πραγματοποίηση της σ.α. της κίνησης Brown (προσομοίωση). Παρατηρείστε το χρόνο που αυτή είναι θετική. Θα *περιμέναμε* οι αλλαγές προσήμου της να είναι συχνότερες, για τις 5,000 επαναλήψεις τις προσομοιώσης. Πειραματιζόμενοι τρέχοντας τον [Αλγ. B.2](#) (σελ. 143) πολλές φορές, διαπιστώθηκε ότι τέτοια γραφήματα εμφανίζονταν με συχνότητα περίπου 3 στις 10 προσομοιώσεις (όσο παράξενο κι αν φαίνεται αυτό!). ■

Παράδειγμα 4.12.

Στο [Παράδειγμα 4.4](#) υποθέσαμε ότι διεξάγονται πάρα πολλά ιδεατά παιχνίδια ρίψης νομίσματος, ένα το δευτερόλεπτο, μέρα νύχτα, για έναν ολόκληρο χρόνο 365 ημερών. Στον [Πίνακα 4.3](#) παρέχονται συγκεντρωτικά οι χρόνοι t_p για τους οποίους με μια συγκεκριμένη

Πιθανότητα p	Χρόνος t_p	Ποσοστό (%) του έτους	Πιθανότητα p	Χρόνος t_p	Ποσοστό (%) του έτους
90%	153.95 M	42.17%	30%	19.89 M	5.45%
80%	126.10 M	34.54%	20%	8.93 M	2.45%
70%	99.65 M	27.30%	10%	2.24 M	0.61%
60%	75.23 M	20.61%	5%	13.5 Ω	0.15%
50%	53.45 M	14.64%	2%	2.16 Ω	0.02%
40%	34.85 M	9.54%	1%	32.4 Λ	0.006%

Πίνακας 4.3 Μια εφαρμογή του νόμου του Arcsin (M: μέρες, Ω: ώρες, Λ: λεπτά).

πιθανότητα p , ο λιγότερος τυχερός παίκτης (ο Γιώργος!) θα κερδίζει για συνολικό χρόνο t_p . Πρόκειται για μια απλή εφαρμογή του τύπου (4.5) που έχουμε αποδείξει. ■

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Μέρος II.

Εφαρμογές στα
Χρηματοοικονομικά

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Κεφάλαιο 5

Χαρακτηριστικά Γνωρίσματα των Ομολόγων

The bearish make money, the bullish make money and the pigs get slattered.

A trader's quote

Στον χώρο της διαχείρισης των επενδύσεων (investment management), η πιο σημαντική απόφαση που πρέπει να παρθεί είναι αυτή της βέλτιστης τοποθέτησης του κεφαλαίου προς επένδυση, στις διάφορες επενδυτικές κλάσεις (asset classes). Οι κύριες επενδυτικές κλάσεις είναι οι μετοχές και τα ομόλογα¹. Υπάρχουν όμως και άλλες, “εναλλακτικές” επενδυτικές κλάσεις όπως οι επενδύσεις σε ακίνητα (real estate investments), τα αμοιβαία κεφάλαια (hedge funds), ή οι επενδύσεις σε εμπορεύματα (commodities), όπως, για παράδειγμα, επενδύσεις σε χρυσό, πετρέλαιο ή σε πολύτιμα έργα τέχνης. Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιοριστούμε σε μία από τις δύο κύριες επενδυτικές κλάσεις: τα ομόλογα.

Μολονότι πολλοί άνθρωποι έλκονται συνήθως από ενθουσιώδεις ιστορίες συνυφασμένες με τις μετοχές -όλοι μας θα έχουμε ακούσει για κάποιον που επένδυσε σε μετοχές μιας μικρής εταιρείας και κέρδισε αρκετά ώστε να “αποσυρθεί” σε μια νεαρή ηλικία- θα δούμε, μέσα από την μελέτη των ομολόγων, ότι η πολλαπλότητα των πιθανών αυτών επενδυτικών προϊόντων ανοίγει ένα εκπληκτικό πεδίο έρευνας και επενδύσεων. Παρόλο που συχνά επισκιάζονται από τη μαζική προβολή της αγοράς των μετοχών, τα ομόλογα παίζουν ένα καθοριστικό ρόλο στα χαρτοφυλάκια επενδύσεων των ατομικών επενδυτών ή των επενδυτικών οργανισμών.

Για τις έννοιες που θα παρουσιαστούν στις επόμενες ενότητες έχει ουσιαστικά χρησιμοποιηθεί η ύλη του Προγράμματος εκπαίδευσης (Chartered Financial Analyst® Program)

¹ Στο εξής με την λέξη “ομόλογα” θα αναφερόμαστε στην πολύ γενικότερη έννοια των (χρηματοοικονομικών) προϊόντων δανεισμού (fixed income securities). Τα τελευταία, κατά λέξη θα μπορούσαν να μεταφραστούν ως “τίτλοι σταθερού εισοδήματος”. Η προέλευση του όρου αυτού δεν είναι τυχαία: τα ομόλογα είναι ένα είδος σταθερού εισοδήματος, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

του CFA[®] Institute² και συγκεκριμένα ο 5ος τόμος του Level I, *Equity and Fixed Income*, 2010.

5.1 Εισαγωγή

Στην πιο απλή του μορφή, ένα ομόλογο είναι μια οικονομική υποχρέωση μιας οντότητας, η οποία υπόσχεται να πληρώσει ένα προκαθορισμένο σύνολο χρημάτων σε συγκεκριμένες μελλοντικές ημερομηνίες. Η οντότητα που υπόσχεται να πληρώνει καλείται εκδότης (issuer) του ομολόγου. Ο επενδυτής που αγοράζει ένα τέτοιο ομόλογο καλείται δανειστής (ή πιστωτής). Εδώ παρατηρείται και μια πρώτη σύγχυση αναφορικά με την έννοια του ομολόγου: η οντότητα που ζητά χρήματα είναι ο εκδότης του δανείου (δανειζόμενος), και όχι αυτός που έχει το ομόλογο (δανειστής). Παραδείγματα εκδοτών ομολόγων είναι οι κεντρικές κυβερνήσεις διαφόρων κρατών, όπως η κυβέρνηση των Ηνωμένων Πολιτειών ή η Γερμανική κυβέρνηση, οίκοι που σχετίζονται με μια κεντρική κυβέρνηση, όπως οι Fannie Mae και Freddie Mac στις ΗΠΑ, μια πόλη ή ένας δήμος, όπως η πόλη της Νέας Υόρκης ή ολόκληρο το Ελληνικό Δημόσιο, ένας οργανισμός όπως η Google, και υπερεθνικές κυβερνήσεις, όπως η Παγκόσμια Τράπεζα. Αντίστοιχα, επενδυτές σε ένα ομόλογο από τα προηγούμενα μπορεί να είναι ατομικοί επενδυτές, επενδυτικοί οργανισμοί ή και κυβερνήσεις κρατών.

Οι δόσεις που ο εκδότης του ομολόγου έχει υποσχεθεί να καταβάλλει στις προκαθορισμένες ημερομηνίες έχουν δύο συνιστώσες: τόκους (interest) και το αρχικό κεφάλαιο (principal). Η δεύτερη συνιστώσα αντιστοιχεί στην αποπληρωμή του δανειζομένου κεφαλαίου και ο τόκος σε ένα ποσοστό αυτού, όχι κατ' ανάγκην σταθερό.

Πριν από τη δεκαετία του '80, τα ομόλογα ήταν απλά επενδυτικά προϊόντα. Εξαιρώντας την περίπτωση αθέτησης αποπληρωμής (default) του εκδότη, ο επενδυτής ενός ομολόγου γνώριζε για πόσο καιρό θα λαμβάνει τόκο και το πότε η ποσότητα χρημάτων που δάνεισε θα του αποπληρωθεί. Επιπρόσθετα, οι περισσότεροι επενδυτές αγόραζαν τότε ομόλογα με την πρόθεση να τα κρατήσουν ως την ημερομηνία λήξης (ωρίμανσής) τους (maturity date).

Από το 1980, ο χρηματοοικονομικός κόσμος των δανείων και των ομολόγων άλλαξε ριζικά. Πρώτον, τα σχετιζόμενα με τα ομόλογα προϊόντα έγιναν απίστευτα πολυπλοκότερα. Υπάρχουν χαρακτηριστικά πολλών ειδών ομολόγων που κάνουν εξαιρετικά δύσκολο να προσδιοριστεί το πότε θα αποπληρωθούν τα χρήματα που έχουν επενδυθεί και για πόσο καιρό θα λαμβάνεται ο τόκος, ή ακόμη και το ποσό του τόκου που θα ληφθεί. Δεύτερον, ο “κλασικός” επενδυτής που κράταγε τα λεφτά του ως τη λήξη του ομολόγου έχει πλέον αντικατασταθεί από μεγάλους επενδυτικούς οργανισμούς, που εμπορεύονται ενεργά τα διάφορα είδη ομολόγων (traders³).

²www.cfainstitute.org

³Οι traders κατά το “δόγμα” της σελ. 91 αγοράζουν και πουλούν τους διάφορους χρηματοοικονομικούς τίτλους, ανάλογα με το τι συμφέρει περισσότερο, εξού και ο όρος χρηματοοικονομικά “προϊόντα” (making money out of money).

Στις επόμενες ενότητες θα δούμε συνοπτικά τα διαφορετικά γνωρίσματα των ομολόγων από την απλούστερη, αλλά ουσιαστική, “γλώσσα” της αγοράς⁴ και στο [Κεφ. 6](#) θα επιχειρήσουμε μια μαθηματική ανάλυση των στοχαστικών μοντέλων των επιτοκίων με τη βοήθεια της γνώριμής μας Feynman-Kač formula. Τα τελευταία μοντέλα έχουν προταθεί για την διερεύνηση των ποσοτικών χαρακτηριστικών των ομολόγων, αλλά για τη χρήση τους είναι αναγκαία η απαιτητική “γλώσσα” του Στοχαστικού Λογισμού (βλ. [Κεφ. 1](#)).

5.2 Συμβόλαια ομολόγων και όροι

Το συμβόλαιο που προσδιορίζει λεπτομερώς όλα τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις του εκδότη και των επενδυτών ενός ομολόγου έχει τη διεθνή ονομασία *bond indenture*. Οι επενδυτές (bondholders) θα αντιμετώπιζαν κατά καιρούς μεγάλη δυσκολία στον προσδιορισμό του εάν ο εκδότης κρατάει όλες τις υποσχέσεις του που υπαγορεύει το συμβόλαιο. Αυτό το πρόβλημα όμως επιλύεται για όλα τα μέλη της συμφωνίας φέρνοντας έναν σύνδικο (trustee) ως τρίτο μέλος του bond indenture. Το τελευταίο αναγνωρίζει τον καταπιστευματοδόχο ως αντιπρόσωπο των τοκομεριδίων των επενδυτών.

Ως μέρος του συμβολαίου, υπάρχουν καταφατικοί όροι (affirmative covenants) και περιοριστικοί όροι (negative covenants). Οι καταφατικοί όροι ορίζουν δραστηριότητες που ο δανειζόμενος (δηλαδή ο εκδότης του ομολόγου) υπόσχεται να κάνει. Οι περιοριστικοί όροι επιβάλλουν ορισμένους περιορισμούς στις δραστηριότητες του δανειζομένου.

Οι συνηθέστεροι καταφατικοί όροι είναι:

1. η αποπληρωμή των τόκων και του αρχικού κεφαλαίου σε μια χρονική βάση,
2. η πληρωμή όλων των φόρων και άλλων υποχρεώσεων όταν αυτές προκύψουν,
3. η διατήρηση όλης της περιουσίας στην εργασία του δανειζομένου σε καλή κατάσταση,
4. η αποστολή περιοδικών αναφορών στον καταπιστευματοδόχο δηλώνοντας ότι ο δανειζόμενος είναι σε συμφωνία με το συμβόλαιο,
5. η διατήρηση κάποιων οικονομικών δεικτών.

Για παράδειγμα, ο δανειζόμενος μπορεί να υποσχεθεί να διατηρεί τον current ratio⁵ της εταιρείας του στην τιμή του δύο ή υψηλότερα. Εάν αυτή η τιμή του current ratio δεν διατηρείται, τότε το ομόλογο θα μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε (τεχνική) αθέτηση (technical default).

⁴Η πλειονότητα των εννοιών που θα αναφέρουμε αποτελούν έννοιες των ομολόγων που εκδίδονται στις ΗΠΑ. Ενώ η αγορά ομολόγων των ΗΠΑ είναι η μεγαλύτερη αγορά ομολόγων στον κόσμο με μια ποικιλία προϊόντων και εκδοτών, τα τελευταία χρόνια έχει γίνει σημαντική ανάπτυξη των αγορών δανεισμού άλλων χωρών, καθώς οι δανειστές έχουν μετατοπιστεί από την χρηματοδότηση μέσω τραπεζών στην έκδοση ομολόγων. Η τάση αυτή αναμένεται να συνεχιστεί.

⁵Πρόκειται για λογιστικό δείκτη και ορίζεται ως ο λόγος του τρέχοντος ενεργητικού προς το τρέχον παθητικό, $current\ ratio = \frac{current\ assets}{current\ liabilities}$.

Αντίστοιχα, οι συνηθέστεροι περιοριστικοί όροι είναι:

1. περιορισμοί στις πωλήσεις των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας (η εταιρεία δε μπορεί να τα πουλήσει και να ξεχρεώσει, επειδή έχουν δεσμευθεί στους όρους),
2. περιορισμοί στη δυνατότητα του δανειολήπτη να λάβει επιπρόσθετα δάνεια.

Για παράδειγμα, η χώρα μας, η Ελλάδα, αυτή τη περίοδο (2010) βρίσκεται ως γνωστόν σε έντονη οικονομική πίεση από το Διεθνές Νομισματικό Ταμείο (IMF), ώστε να μην αθετήσει τους όρους του δανείου που έλαβε. Γι' αυτό και σε τακτά χρονικά διαστήματα, ειδικοί ελεγκτές του IMF διεξάγουν διάφορους ελέγχους στο κατά πόσον συλλέγονται οι φόροι, πως χρησιμοποιούνται τα χρήματα του δανείου κτλ. Εάν κάποια στιγμή δεν μπορούμε να αποπληρώσουμε κάποια δόση, θα μπου σε ισχύ οι περιοριστικοί όροι του συμβολαίου με πολύ δυσμενείς συνέπειες για τον τόπο.

5.3 Διάρκεια ως τη λήξη

Η *διάρκεια ως τη λήξη* (term to maturity) ενός ομολόγου είναι ο αριθμός των ετών που απομένουν για την τελευταία δόση. Η *ημερομηνία λήξης* (maturity date) ενός ομολόγου αναφέρεται στην ημερομηνία που το δάνειο θα πάψει να υπάρχει, όπου ο εκδότης θα αποπληρώσει το ομόλογο. Για παράδειγμα, μια περιγραφή ενός ομολόγου μπορεί να γράφει “ως τις 9/9/2020”.

Στην πράξη, στην αγορά αναφέρονται στο “χρόνο ως τη λήξη” ενός ομολόγου ως απλά “maturity”. Όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια (βλ. §5.8) μπορεί να υπάρχουν όροι στο συμβόλαιο που να επιτρέπουν είτε ο εκδότης του ομολόγου είτε ο επενδυτής αυτού να αλλάξει το χρόνο ως τη λήξη ενός ομολόγου.

Υπάρχουν ομόλογα με οποιαδήποτε maturity, αλλά τυπικά η μεγαλύτερη είναι αυτή των 30 ετών. Παρολαυτά, η Walt Disney Co. τον Ιούλιο του 1993 εξέδωσε ομόλογα με ημερομηνία λήξης 9/15/2093⁶, κάνοντάς τα 100-ετή ομόλογα τη στιγμή της έκδοσης. Το Δεκέμβρη του 1993, η Tennessee Valley Authority εξέδωσε ομόλογα που λήγουν στις 12/15/2043, κάνοντάς τα 50-ετή ομόλογα τη στιγμή της έκδοσης. Αλλά αυτά δεν είναι τα συνηθισμένα παραδείγματα στην αγορά ομολόγων.

Υπάρχουν τρεις τουλάχιστον λόγοι που ο προσδιορισμός του χρόνου ως τη λήξη ενός ομολόγου είναι σημαντικός:

1. Ο χρόνος ως τη λήξη δείχνει τη χρονική περίοδο στην οποία ο επενδυτής του ομολόγου μπορεί να αναμένει να λάβει τις δόσεις των τόκων και τον αριθμό των ετών πριν το αρχικό κεφάλαιο έχει πλήρως αποπληρωθεί.
2. Η απόδοση (yield) που προσφέρεται σε ένα ομόλογο για να προσελκύσει επενδυτές εξαρτάται από το χρόνο ως τη λήξη. Η σχέση μεταξύ της απόδοσης και της λήξης

⁶ Ακολουθώντας την αμερικάνικη σύμβαση, οι ημερομηνίες θα γράφονται ως μήνας/ημέρα/έτος.

(maturity) ενός ομολόγου καλείται *Καμπύλη Αποδόσεων* (yield curve), και θα διερευνηθεί στο [Κεφ. 6](#).

3. Η τιμή ενός ομολόγου θα μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ζωής του, καθώς τα επιτόκια στην αγορά αλλάζουν. Η *μεταβλητότητα της τιμής* (price volatility) ενός ομολόγου είναι μια συνάρτηση του χρόνου ως τη λήξη (μεταξύ άλλων παραγόντων). Πιο συγκεκριμένα, *ceteris paribus* μπορεί να δειχθεί ότι όσο μεγαλύτερη η maturity, τόσο μεγαλύτερη η μεταβλητότητα της τιμής, ως αποτέλεσμα της αλλαγής στα επιτόκια (βλ. [Εικόνα 5.1](#) και [Παρατήρηση 5.1](#)).

5.4 Par value

Η τελική αξία (*par value*) ενός ομολόγου είναι η ποσότητα χρήματος που ο δανειζόμενος συμφωνεί να επαναπληρώσει στον επενδυτή του ομολόγου ως την (ή στην) ημερομηνία λήξης. Αυτή η τιμή αναφέρεται επίσης με τους όρους "*principal value*", ή "*face value*".

Τα ομόλογα μπορεί να έχουν οποιαδήποτε par value. Για να διακρίνονται μεταξύ τους τα διαφορετικά ομόλογα, έχει υιοθετηθεί η πρακτική της αναφοράς της τιμής ενός ομολόγου ως ένα ποσοστό της par value. Μια τιμή "90" ενός ομολόγου με par value \$1,000 ερμηνεύεται ως ότι το ομόλογο πωλείται σε 90% της par value, δηλαδή στην τιμή \$900. Ανάλογα, αν ένα ομόλογο με par value \$8,000 πωλείται για \$8,800, λέγεται ότι πωλείται για "110".

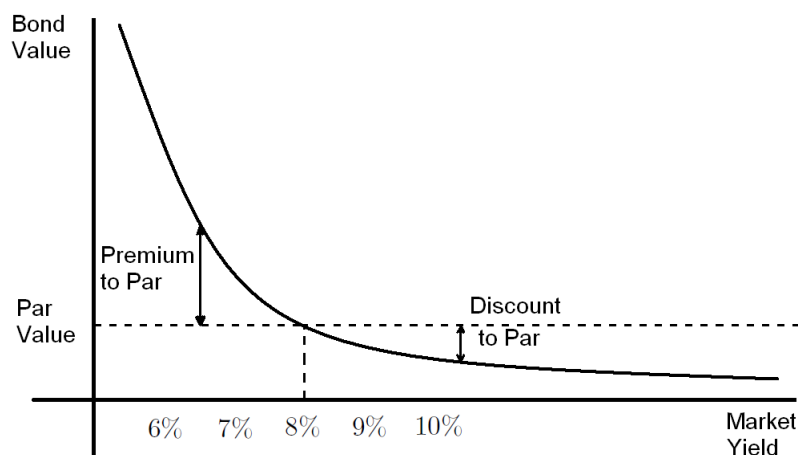
Όταν υπολογίζουμε την τιμή (σε US\$) ενός ομολόγου των ΗΠΑ, το ομόλογο πρέπει πρώτα να μετατραπεί σε μια τιμή ανά \$1 της par value. Στη συνέχεια, αυτή πολλαπλασιάζεται με την par value ώστε να βρούμε την τιμή σε δολάρια. Στον [Πίνακα 5.1](#) προσφέρονται κάποια παραδείγματα του πως είναι η τιμή ενός ομολόγου σε δολάρια, δεδομένης της τιμής του ομολόγου που λέγεται στην αγορά και της par value αυτού.

Αναφερόμενη τιμή	Τιμή ανά \$1 της par value (4 σ. ψ. ^α)	Par value	Τιμή σε δολάρια
"96 1/4"	0.925	1,000	962.50
"102 7/8"	1.0288	5,000	5,143.75
"109 9/16"	1.0956	10,000	10,956.25
"68 11/32"	0.6834	100,000	68,343.75

^α Συμβολισμός: σημαντικά ψηφία.

Πίνακας 5.1 Εξοικείωση με τους συμβολισμούς της αγοράς των ομολόγων.

Παρατηρούμε ότι ένα ομόλογο μπορεί να πωλείται ή να αγοράζεται κάτω ή πάνω από την par value αυτού. Όταν ένα ομόλογο πωλείται ή αγοράζεται κάτω (πάνω) από την par value, λέγεται ότι εμπορεύεται σε discount (premium). Ο λόγος που μπορεί να συμβεί κάτι τέτοιο δίνεται στην επόμενη ενότητα.



Εικ. 5.1 Απόδοση της αγοράς συναρτήσει της τιμής ομολόγου για ένα 8% ομόλογο με κουπόνια.

5.5 Ονομαστικό επιτόκιο και κουπόνια

Το επιτόκιο κουπονιού

(*coupon rate*), επίσης γνωστό ως *ονομαστικό επιτόκιο* (*nominal rate*) είναι το επιτόκιο που ο εκδότης ενός ομολόγου συμφωνεί να πληρώνει κάθε χρόνο. Με τον όρο *κουπόνι* (*coupon*) εννοούμε την ετήσια ποσότητα των δόσεων που δίνονται στους επενδυτές του ομολόγου, μέχρι τη λήξη. Το κουπόνι προσδιορίζεται πολλαπλασιάζοντας το ονομαστικό επιτόκιο με την τελική αξία του ομολόγου. Δηλαδή ισχύει

$$Coupon = Coupon\ rate \times Par\ value \quad (5.1)$$

Για παράδειγμα, ένα ομόλογο με 9% ονομαστικό επιτόκιο και τελική αξία \$1,000 θα πληρώνει ετήσιες δόσεις των \$90.

Στις ΗΠΑ, η συνήθης πρακτική είναι για τον εκδότη να πληρώνει κάθε κουπόνι σε δύο εξαμηνιαίες δόσεις. Για ένα είδος ομολόγου, τα MBSs (Mortgage-backed securities) ή τα ABSs (Asset-backed securities) συνήθως πληρώνουν τόκους μηνιαία. Αλλά για ομόλογα που εκδίδονται σε κάποιες αγορές εκτός των ΗΠΑ, οι δόσεις των κουπονιών γίνονται μόνο μία φορά το χρόνο.

Το ονομαστικό επιτόκιο επηρεάζει, επίσης, την “ευαισθησία” της τιμής του ομολόγου στις αλλαγές των επιτοκίων της αγοράς. Στην [Παρατήρηση 5.1](#) δείχνουμε ότι *ceteris paribus* όσο μεγαλύτερο το κουπόνι, τόσο μικρότερη η μεταβλητότητα της τιμής, ως αποτέλεσμα της αλλαγής στα επιτόκια της αγοράς.

Όταν το ονομαστικό επιτόκιο ενός ομολόγου ισούται με την απόδοση της αγοράς (*market yield*), το ομόλογο θα πωλείται στην τελική αξία (*par value*) του. Όταν εκδίδονται, το ονομαστικό επιτόκιο των ομολόγων είναι συνήθως ίσο ή κοντά στην επικρατέστερη απόδοση

της αγοράς στα παρόμοια ομόλογα, έτσι ώστε τα ομόλογα να “βγαίνουν” αρχικά στην (ή κοντά στην) τελική αξία (par value) τους. Εάν η απαιτούμενη από την αγορά απόδοση για ένα ομόλογο στη συνέχεια ανέβει, η τιμή του ομολόγου θα πέσει και τότε λέγεται ότι το ομόλογο πωλείται κάτω από την par value του (*trading at discount*). Η απαιτούμενη απόδοση μπορεί να αυξηθεί, επειδή τα επιτόκια της αγοράς έχουν αυξηθεί, επειδή η επιπρόσθετη απόδοση, για την οποία οι επενδυτές απαιτούν να αποζημιωθούν, έχει αυξηθεί, ή επειδή ο κίνδυνος (risk) του ομολόγου έχει αυξηθεί από τη στιγμή της έκδοσης. Αντίθετα, αν η απαιτούμενη απόδοση πέσει, η τιμή του ομολόγου θα αυξηθεί και το ομόλογο θα πωλείται πάνω από την par value του (*trading at premium*). Τα συμπεράσματα αυτά παριστάνονται πιο γλαφυρά στο αριθμητικό Παράδειγμα 5.6.

Στην Εικόνα 5.1 έχουμε κάνει ένα (πρόχειρο) γράφημα της απόδοσης της αγοράς συνάρτηση της τιμής ομολόγου για ένα 8% ομόλογο με κουπόνια. Το γράφημα αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς φαίνονται όλα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της τιμής ενός ομολόγου, που προηγουμένως περιγράψαμε.

Παρατήρηση 5.1.

Στην Εικόνα 5.1 παρατηρούμε ότι η παράγωγος $\frac{dV}{dY}$ (Y) (όπου V : η τιμή του ομολόγου και Y : η απόδοση της αγοράς) για αποδόσεις μικρότερες του 8% μεγαλώνει (η κλίση αυξάνεται), ενώ μικραίνει για αποδόσεις μεγαλύτερες του 8% (η κλίση μειώνεται). Αυτό δεν είναι καθόλου συμπτωματικό και συνδέεται με ένα ευρέως διαδεδομένο μέτρο του κινδύνου των επιτοκίων (*interest rate risk*) την *duration*. Η τελευταία έννοια δεν έχει καμία σχέση με αυτήν της *maturity*. Στη πραγματικότητα, αν δύο ομόλογα έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά, αλλά διαφορετική *maturity*, εκείνο με την μεγαλύτερη *maturity*, θα έχει και τη μεγαλύτερη *duration*, μιας και η τιμή του θα έχει μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή για μια συγκεκριμένη αλλαγή στις αποδόσεις τις αγοράς.

Επιπρόσθετα, όπως φαίνεται κι από την Εικόνα 5.1 όταν τα κουπόνια αυξάνουν, η *duration* μικραίνει και συνεπώς το *interest rate risk* πέφτει. Συνεπώς, για δύο κατά τα άλλα πανομοιότυπα ομόλογα, εκείνο με το μεγαλύτερο ονομαστικό επιτόκιο (ή κουπόνι) θα έχει την μικρότερη *duration*. Η τιμή του ομολόγου με το μεγαλύτερο κουπόνι θα αλλάξει λιγότερο για μια δεδομένη αλλαγή στις αποδόσεις, από ότι θα κάνει η τιμή του ομολόγου με το μικρότερο κουπόνι.

5.5-1 Zero coupon bonds

Δεν πληρώνουν όλα τα ομόλογα δόσεις περιοδικά. Όπως μαρτυρά και ο τίτλος αυτής της υποενότητας τα ομόλογα που έχουν συμφωνηθεί να μη πληρώνουν περιοδικά τις δόσεις των κουπονιών ονομάζονται ομόλογα χωρίς κουπόνια (*zero coupon bonds*). Αυτά πληρώνουν μόνο την τελική αξία (par value) στη λήξη (*maturity*) και ο τόκος αυτών προκύπτει από το γεγονός ότι τα *zero coupon bonds* πωλούνται αρχικά κάτω από την par value τους (*at discount to par*). Συγκεκριμένα, ο τόκος ισούται με τη διαφορά μεταξύ της par value και της αρχικής αξίας έκδοσης του ομολόγου. Για παράδειγμα, εάν ένας επενδυτής αγοράσει

ένα ομόλογο χωρίς κουπόνια για \$80, ο τόκος είναι \$20. Αυτός είναι η διαφορά μεταξύ της par value (\$100) και της αρχικής αξίας έκδοσης (\$80) του ομολόγου.

Κίνδυνος επανεπένδυσης

Ίσως ο αναγνώστης αναρωτηθεί γιατί να εκδόσει κανείς ομόλογα χωρίς κουπόνια. Ο λόγος συνδέεται με ένα από τα πολλά είδη κινδύνων που σχετίζονται με τα ομόλογα, και συγκεκριμένα με το επονομαζόμενο *κίνδυνο επανεπένδυσης* (reinvestment risk). Ο εκάστοτε επενδυτής αντιμετωπίζει πάντα το πρόβλημα του που να επενδύσει τα χρήματα που του επιστρέφονται από τις δόσεις του ομολόγου. Η μη επιθυμητή κατάσταση για τον επενδυτή είναι να επενδύσει το αποπληρωμένο του, σιγά σιγά, κεφάλαιο σε ένα νέο ομόλογο με χαμηλότερο επιτόκιο.

Αυτός ο κίνδυνος επανεπένδυσης για έναν τίτλο με τα χαρακτηριστικά των ομολόγων είναι ιδιαίτερα κρίσιμο να κατανοηθεί. Πολύ συχνά λέγεται από κάποιους στην αγορά ότι τίτλοι που πληρώνουν μηνιαία κουπόνια “συμφέρουν”, επειδή ο επενδυτής έχει την ευκαιρία να επανεπενδύσει πιο συχνά τα χρήματά του, χρησιμοποιώντας ένα μεγαλύτερο ποσοστό αυτών, εν συγκρίσει με ένα ομόλογο που πληρώνει μόνο ανά εξάμηνο τα κουπόνια του. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει σε ένα περιβάλλον φθίνοντων επιτοκίων, που θα κάνει τους δανειζομένους να επιταχύνουν τις δόσεις του δανείου τους και θα αναγκάσει, επομένως, τους επενδυτές να πρέπει να επανεπενδύσουν τα χρήματά τους σε χαμηλότερα επιτόκια.

Συνεπώς, κατανοώντας την έννοια του reinvestment risk, μπορούμε να εκτιμήσουμε περισσότερο γιατί τα ομόλογα χωρίς κουπόνια είναι πιο ελκυστικά σε συγκεκριμένους επενδυτές. Επειδή δεν υπάρχει καμία δόση κουπονιού να επανεπενδυθεί, δεν υπάρχει καθόλου reinvestment risk. Δηλαδή ένα zero coupon bond απαλείφει το reinvestment risk. Όμως, αυτή είναι η θετική πλευρά στη “ζυγαριά” του ρίσκου. Η αρνητική πλευρά είναι ότι, όπως δείξαμε στην [Παρατήρηση 5.1](#), όσο μικρότερα τα κουπόνια (για κάποια δεδομένη maturity), τόσο μεγαλύτερο το interest rate risk. Συνεπώς, ομόλογα χωρίς καθόλου κουπόνια (κάποιας δεδομένης maturity) εκθέτουν τους επενδυτές σε μεγαλύτερο interest rate risk απ’ ό,τι τα ομόλογα με κουπόνια.

Παρατήρηση 5.2.

Στο [Κεφ. 6](#) θα μελετήσουμε κάποια στοχαστικά μοντέλα πρόβλεψης των επιτοκίων για την απλοποιημένη περίπτωση των zero coupon bonds, καθώς για άλλου είδους ομόλογα η ανάλυση είναι τελείως διαφορετική (βλ. επόμενες ενότητες και την [Παρατήρηση 5.3](#)).

5.5-2 Step-up notes

Υπάρχουν ομόλογα που πληρώνουν ένα ονομαστικό επιτόκιο που αυξάνεται με το χρόνο. Αυτά ονομάζονται *step-up notes*, επειδή όπως υποδηλώνει και ο αγγλικός όρος το ονο-

μαστικό τους επιτόκιο “σκαρφαλώνει” με το χρόνο. Ένα πραγματικό παράδειγμα⁷ step-up note αποτελεί η 10-ετής έκδοση των Extendible Step-up Deposit Notes, Series I-10 της Barclays Bank PLC που εκδόθηκαν στις 28 Μαΐου 2010. Τα κουπόνια (ονομαστικά επιτόκια) για τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα ήταν τα εξής:

4.75% από 5/28/2010 έως 5/27/2011

4.75% από 5/28/2011 έως 5/27/2014

5.25% από 5/28/2014 έως 5/27/2015

5.25% από 5/28/2015 έως 5/27/2016

5.25% από 5/28/2016 έως 5/27/2017

5.25% από 5/28/2017 έως 5/27/2018

6.25% από 5/28/2018 έως 5/27/2019

7.00% από 5/28/2019 έως 5/27/2020

Παρατηρούμε πως η διαφορά στα κουπόνια των συγκεκριμένων ομολόγων αυξάνεται κατά πολύ με το χρόνο (από 4.75% στην ημερομηνία έκδοσης σε 7.00% στη λήξη).

5.5-3 Deferred coupon bonds

Υπάρχουν ομόλογα που οι δόσεις τους αναβάλλονται για ένα συγκεκριμένο αριθμό χρόνων. Δηλαδή δεν πληρώνουν τίποτα κατά τη διάρκεια της περιόδου αναβολής. Στο τέλος αυτής, ο εκδότης του *deferred coupon bond* πληρώνει περιοδικά τις δόσεις μέχρι τη λήξη του ομολόγου. Προφανώς, οι δόσεις των τόκων που λαμβάνονται μετά την περίοδο αναβολής είναι υψηλότερες από ότι θα μπορούσαν να ήταν εάν ο εκδότης πλήρωνε τόκους από την έκδοση του ομολόγου. Οι δόσεις αυτές είναι υψηλότερες, ώστε να αποζημιώνουν τον επενδυτή για την έλλειψη τόκων στην περίοδο αναβολής.

Παρατήρηση 5.3.

Στον πραγματικό κόσμο υπάρχουν επίσης και τα κυμαινόμενου επιτοκίου ομόλογα (*floating rate securities*) στα οποία το ονομαστικό επιτόκιο αλλάζει ανάλογα με ένα επιτόκιο αναφοράς (όπως το London InterBank Offered Rate [LIBOR]) προσθέτοντας ή αφαιρώντας ένα επιτόκιο που μπορεί να μην είναι σταθερό, αλλά να αλλάζει με προκαθορισμένες στο indenture τιμές. Σκοπός όμως του κεφαλαίου αυτού είναι να επεξηγήσουμε απλά τις έννοιες που σχετίζονται με το [Κεφ. 6](#), αλλά και να δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή του επενδυτικού κόσμου των ομολόγων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην ύλη του CFA® Institute, Level II.

⁷http://www.tmx.com/en/news_events/news_releases/5-27-2010_TSX-NewListingBXS.html

5.6 Τιμολόγηση ομολόγων για την περίπτωση διακριτού ανατοκισμού

Τιμολόγηση είναι η διαδικασία του προσδιορισμού της δίκαιης τιμής (fair value) ενός οικονομικού αγαθού. Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δώσουμε τις γενικές αρχές της τιμολόγησης των ομολόγων, για αυτό και εξετάζουμε την ρεαλιστική περίπτωση του διακριτού ανατοκισμού. Η τιμολόγηση ομολόγων με συνεχή ανατοκισμό μελετάται μερικώς στο [Κεφ. 6](#) και συνεπώς τα απλά παραδείγματα που θα ακολουθήσουν είναι κρίσιμα για τις επόμενες γενικεύσεις.

Θεμελιώδους σημασίας έννοια στον κόσμο των επενδύσεων αποτελεί η ακόλουθη έννοια της παρούσας αξίας.

Ορισμός 5.4 (Present Value).

Η *παρούσα αξία* (Present Value, PV) ενός απλού αθροίσματος χρηματοροών (cash flows, CF) είναι η τωρινή αξία μιας χρηματοροής που προσδοκάται να ληφθεί σε κάποιο σημείο στο μέλλον. Με άλλα λόγια είναι η ποσότητα χρημάτων που πρέπει να επενδυθούν σήμερα, σε ένα συγκεκριμένο επιτόκιο απόδοσης για μια δεδομένη χρονική περίοδο, ώστε να καταλήξουν να έχουν μια συγκεκριμένη αξία στο μέλλον. Δηλαδή η παρούσα αξία δίνεται από τον τύπο

$$PV_t := \frac{ECF_t}{(1+i)^t} \quad (5.2)$$

όπου ECF_t : η αναμενόμενη χρηματοροή τη στιγμή t και i το επιτόκιο απόδοσης.

Το επιτόκιο i του προηγούμενου τύπου συχνά αναφέρεται και ως *απαιτούμενη απόδοση* (required rate of return ή discount rate), αλλά καλείται επίσης και *κόστος ευκαιρίας* (opportunity cost), ή *κόστος κεφαλαίου* (cost of capital). Όπως και να το ονομάσουμε, αναπαριστά το επιτόκιο που μπορεί να αποδόσει μια επένδυση κάθε περίοδο ανατοκισμού.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η συνάρτηση της $PV(t)$ θα είναι *φθίνουσα* (για δοθέν επιτόκιο και ECF_t).

Η αξία, τώρα, μιας επένδυσης είναι το άθροισμα των παρούσων αξιών όλων των αναμενόμενων χρηματοροών (δηλαδή για ένα ομόλογο εννοούμε τις δόσεις των τόκων). Δηλαδή υποθέτοντας ότι υπάρχουν N το πλήθος αναμενόμενες χρηματοροές, η αξία (V) μιας επένδυσης (ενός ομολόγου) θα είναι το άθροισμα

$$V \equiv NPV_N := \sum_{t=1}^N PV_t \quad (5.3)$$

Οι αναμενόμενες χρηματοροές της εξίσωσης (5.2) ονομάζονται και *μέλλουσα αξία* (Future Value, FV). Η FV είναι δηλαδή η αξία που θα έχει μια τωρινή κατάθεση όταν ανατοκίζεται με επιτόκιο i . Οι έννοιες FV και PV συνδέονται στενά μεταξύ τους και συγκεκριμένα

ισχύει

$$FV = PV (1 + i)^t \quad (5.4)$$

Έχοντας ορίσει όλες τις βασικές έννοιες που σχετίζονται με τις χρηματοροές, προχωρούμε σε κάποια διαφωτιστικά παραδείγματα τιμολόγησης ομολόγων που τοκίζονται σε διακριτά χρονικά διαστήματα.

Παράδειγμα 5.5 (Ομόλογο με σταθερή απόδοση).

Έστω ένα ομόλογο που πληρώνει κουπόνια των \$100 ετήσια για 10 χρόνια (maturity) με par value \$1,000 με σταθερό επιτόκιο 8%. Τότε η αξία του ομολόγου θα είναι

$$\begin{aligned} V &= \frac{100}{1.08} + \frac{100}{1.08^2} + \frac{100}{1.08^3} + \dots + \frac{100 + 1,000}{1.08^{10}} \\ &= \frac{100}{1.08} + \frac{100}{1.08^2} + \frac{100}{1.08^3} + \dots + \frac{1,100}{1.08^{10}} \\ &= \$1,134.20 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Παράδειγμα 5.6 (Αλλαγές στην απαιτούμενη απόδοση ομολόγου).

Έστω ομόλογο με par value \$1,000, 8% εξαμηνιαία κουπόνια, και τρία χρόνια ως τη λήξη. Θα υπολογίσουμε την τιμή του PV για επιτόκια (yield to maturity, YTM) 6%, 8% και 10%.

Επιτόκιο ($i\%$)	Περίοδοι ανατοκισμού (N)	FV (\$)	Δόσεις (\$)	PV ^a (\$)
3 ($= \frac{6}{2}$)	6 ($= 3 \times 2$)	1,000	40 ($= \frac{80}{2}$)	-1,054.172 > par
4 ($= \frac{8}{2}$)	6 ($= 3 \times 2$)	1,000	40 ($= \frac{80}{2}$)	-1,000.000 = par
5 ($= \frac{10}{2}$)	6 ($= 3 \times 2$)	1,000	40 ($= \frac{80}{2}$)	-949.243 < par

^aΤο αρνητικό πρόσημο συμβολίζει ότι ο επενδυτής δίνει δολάρια (αγοράζοντας το ομόλογο).

Εδώ δείχνουμε κάτι που είπαμε και προηγουμένως στην §5.5: εάν η απόδοση ως τη λήξη του ομολόγου (YTM) ισούται με το ονομαστικό επιτόκιο αυτού (8%), τότε η τιμή του ομολόγου είναι ίση με την par value του (\$1,000). Εάν το YTM είναι υψηλότερο (χαμηλότερο) από ότι το ονομαστικό επιτόκιο, τότε λέμε ότι το ομόλογο εμπορεύεται κάτω (πάνω) από την par value (is trading at a discount (premium) to par). ■

Τα παραδείγματα αυτά μας δείχνουν αρκετά ποιοτικά χαρακτηριστικά των ομολόγων, που θα απαιτήσουμε τα μοντέλα του Κεφ. 6 να ικανοποιούν (ως διαγνωστικό έλεγχο).

5.7 Διάφορα είδη επιτοκίων: Διακριτή Περίπτωση

Όπως αναφέραμε στην §5.5-2 υπάρχουν ομόλογα που πληρώνουν διαφορετικά επιτόκια μέχρι τη λήξη τους. Συνεπώς, το επιτόκιο που θα ζητούσε ένας επενδυτής ομολόγου να

δανείσει χρήματα για ένα χρόνο από σήμερα δεν ταυτίζεται κατ' ανάγκην με το επιτόκιο που θα ζητούσε για να δανείσει για ένα χρόνο σε πέντε ή δέκα χρόνια μετά. Τα κατάλληλα αυτά επιτόκια για κάθε μελλοντική δόση ενός ομολόγου ονομάζονται *επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης* (spot rates) και θα τα συμβολίζουμε με S_k , όπου k : η διάρκεια της περιόδου δανεισμού.

Παρατήρηση 5.7.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να διασαφηνιστεί ότι το επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης (spot rate) διαφέρει από το επιτόκιο ως τη λήξη (YTM). Το τελευταίο είναι ένα σταθερό επιτόκιο που κάνει την παρούσα αξία των υποσχόμενων πληρωμών ενός ομολόγου ίση με την τιμή του στην αγορά. Αντίθετα, το επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης ταυτίζεται με την απόδοση ενός ομολόγου χωρίς κουπόνια, δηλαδή ενός τίτλου που πληρώνει μία μόνο χρηματοροή σε μια μελλοντική ημερομηνία.

Τα spot rates διαφορετικών χρονικών περιόδων που τιμολογούν ορθά (παράγουν δηλαδή τιμές ομολόγων ίσες με αυτές της αγοράς) τις χρηματοροές ενός ομολόγου ονομάζονται *επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης μη κερδοσκοπίας* (arbitrage-free spot rates) ή η *καμπύλη των επιτοκίων τρέχουσας τοποθέτησης* (spot rate curve).

Το επόμενο απλό παράδειγμα καθιστά σαφή την σπουδαία έννοια των spot rates και το πως αυτά συνδέονται με την τιμολόγηση των ομολόγων.

Παράδειγμα 5.8.

Έστω ένα 6% ομόλογο με maturity 1.5 χρόνια και par value \$1,000. Έστω επίσης ότι τα επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης (εκπεφρασμένα ως ημιετήσια YTM) είναι:

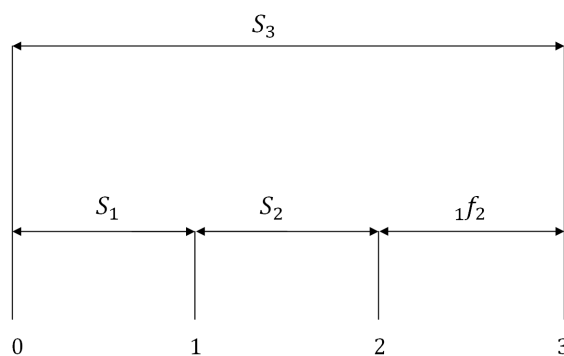
- 6 μήνες = 5%
- 1 χρόνο = 6%
- 1.5 χρόνια = 7%

Υπολογίζοντας την παρούσα αξία της επένδυσης βρίσκουμε

$$PV = \frac{30}{1.025} + \frac{30}{1.03^2} + \frac{1,030}{1.035^3} = \$986.55$$

Αυτή θα ήταν η *δίκαιη τιμή* πώλησής του ομολόγου (fair value). Αν αυτό πωλείται στην αγορά προς \$995, τότε ένας trader θα μπορούσε να εκμεταλλευτεί αυτήν την ευκαιρία κερδοσκοπίας αγοράζοντας τις μεμονωμένες χρηματοροές, να τις συγχωνεύσει μεταξύ τους για να δημιουργήσει ένα νέο ομόλογο με σταθερό επιτόκιο (αυτό της αγοράς) διάρκειας 1.5 ετών, και έπειτα να το πουλήσει ξανά. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε ένα άμεσο και ακίνδυνο κέρδος των $995.00 - 986.55 = \$8.45$ ανά ομόλογο. ■

Άμεσα συνδεόμενη με την έννοια των επιτοκίων τρεχουσών τοποθετήσεων είναι η έννοια των *επιτοκίων μελλοντικών τοποθετήσεων*. Τα επιτόκια μελλοντικών τοποθετήσεων ή



Εικ. 5.2 Γραφική σχέση μεταξύ των forward rates και spot rates.

επιτόκια πρόσω (forward rates) είναι το επιτόκιο που πρέπει να δίνει ένα ομόλογο σε κάποια μελλοντική ημερομηνία. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ πρέπει να εμπεριέχει ταυτόχρονα τη διάρκεια της περιόδου δανεισμού, αλλά και το πότε (στο μέλλον) θα δανείζονται/επιστρέφονται τα χρήματα του ομολόγου. Συνεπώς, με ${}_1f_2$ συμβολίζουμε το επιτόκιο του να δανειστούμε για ένα χρόνο, δύο χρόνια από τώρα. Απαιτούμε να ισχύει το ακόλουθο γενικό σχήμα:

“το επιτόκιο του να δανειστούμε σήμερα για 3 χρόνια ισούται με το επιτόκιο του να δανειστούμε για 1 χρόνο, τρεις φορές διαδοχικά”.

Αυτό φορμαλιστικά γράφεται ως ότι

$$(1 + S_3)^3 \equiv (1 + {}_1f_0)(1 + {}_1f_1)(1 + {}_1f_2) \quad (5.6)$$

Ισοδύναμα,

$$S_3 \equiv \sqrt[3]{(1 + {}_1f_0)(1 + {}_1f_1)(1 + {}_1f_2)} - 1 \quad (5.7)$$

Δηλαδή το spot rate S_3 είναι ο γεωμετρικός μέσος (geometric mean) των forward rates ${}_1f_0$, ${}_1f_1$ και ${}_1f_2$. Επιπρόσθετα, αν ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τους συμβολισμούς μπορεί άμεσα να επαληθεύσει ότι

$$(1 + S_4)^4 = (1 + S_2)^2 (1 + {}_2f_2)^2$$

και ότι

$$\begin{aligned} (1 + S_3)^3 &= (1 + {}_2f_0)^2 (1 + {}_1f_2) \\ &= (1 + {}_2f_0)^2 (1 + {}_1f_2) \\ &= (1 + {}_1f_0)(1 + {}_1f_1)(1 + {}_1f_2) \\ &= (1 + S_1)(1 + S_2)(1 + {}_1f_2) \end{aligned}$$

Οι έννοιες αυτές θα γενικευτούν στην §6.3, όπου θα εξετάσουμε τα συνεχή ανάλογά τους.

5.8 Embedded options ομολόγων

Στον επενδυτικό κόσμο του δανεισμού είναι αρκετά συχνό μια έκδοση ενός ομολόγου να εμπεριέχει στο indenture έναν όρο που να δίνει στον εκδότη και/ ή στον επενδυτή του ομολόγου ένα δικαίωμα (option) να μπορεί να κάνει μια ενέργεια έναντι του άλλου αντισυμβαλλομένου. Το δικαίωμα αυτό εξασκείται προαιρετικά από τον εκάστοτε δικαιούχο (στην περίπτωση που τον συμφέρει). Τα δικαιώματα αυτά αναφέρονται ως “εμφυτευμένα” στα ομόλογα δικαιώματα (embedded options in bonds) για να τα διακρίνουμε από τα υπόλοιπα options που μπορούν να αγοραστούν σε ένα χρηματιστήριο ή σε μια OTC αγορά.

Τα συνηθέστερα embedded options ομολόγων που δίνονται στους εκδότες (δανειζόμενους) είναι:

- ένα άνω φράγμα (cap) στην κύμανση των επιτοκίων του ομολόγου,
- το δικαίωμα να προπληρώσουν ένα μέρος των δόσεων, πριν από την προγραμματισμένη ημερομηνία τους,
- το δικαίωμα να αποπληρώσουν πλήρως (call provision) το αρχικό κεφάλαιο που δανείστηκαν.

Το άνω φράγμα (cap) στην κύμανση των επιτοκίων μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δικαίωμα στον εκδότη του ομολόγου που να μην απαιτεί καμία ενέργεια από μέρους του αν *ανέβουν* τα επιτόκια. Ουσιαστικά, ο επενδυτής του ομολόγου έχει εξασφαλίσει (από το indenture) στον εκδότη το δικαίωμα να μην πληρώσει περισσότερο από ότι ένα ορισμένο επιτόκιο (cap).

Αντίστοιχα, τα συνηθέστερα embedded options ομολόγων που δίνονται στους επενδυτές (δανειστές) είναι:

- ένα κάτω φράγμα (floor) στην κύμανση των επιτοκίων του ομολόγου,
- το δικαίωμα να ζητήσουν την άμεση και πλήρη αποπληρωμή (put provision) του αρχικού κεφαλαίου που δάνεισαν.

Ενώ ένα *άνω* φράγμα στα επιτόκια ωφελεί τον *εκδότη* του ομολόγου αν τα επιτόκια *ανέβουν*, ένα *κάτω* φράγμα (floor) αυτών ωφελεί τον *επενδυτή* εάν τα επιτόκια *πέσουν*, αφού σταθεροποιεί το διαθέσιμο (ονομαστικό) επιτόκιο των κουπονιών.

Παρατηρούμε ότι η εξάσκηση των τελευταίων δικαιωμάτων για τον εκδότη και των επενδυτή εξαρτάται από το επίπεδο των επιτοκίων που κυριαρχούν στην αγορά των ομολόγων. Τα δικαιώματα του *εκδότη* (επενδυτή) αποκτούν περισσότερη αξία, όσο περισσότερα τα προηγούμενα επιτόκια *πέφτουν* (ανεβαίνουν). Τα άνω και κάτω φράγματα επίσης επηρεάζονται από τις μεταβολές των επιτοκίων της αγοράς. Αλλά για τον *εκδότη* (επενδυτή) το δικαίωμα του *άνω* (κάτω) φράγματος στα επιτόκια του ομολόγου αποκτά περισσότερη αξία, όσο περισσότερα τα επιτόκια της αγοράς *ανεβαίνουν* (κατεβαίνουν).

Τέλος, όπως αναφέραμε στην §5.1 τα σχετιζόμενα με τα ομόλογα προϊόντα έχουν γίνει αρκετά πολύπλοκα. Ένας από τους λόγους είναι η ύπαρξη των embedded options στα

ομόλογα, τα οποία κάνουν ακόμα πιο δύσκολο να προβλεφθούν οι μελλοντικές χρηματοροές ενός τίτλου. Οι χρηματοροές ενός τίτλου ομολόγου ορίζονται όμως ως οι τόκοι και το αρχικό κεφάλαιο. Συνεπώς, για να τιμολογήσει κανείς ένα ομόλογο με embedded options, είναι απαραίτητο

1. να μοντελοποιήσει τους παράγοντες που προσδιορίζουν το εάν ένα τέτοιο δικαίωμα θα εξασκηθεί ως τη λήξη του ομολόγου, και
2. στην περίπτωση των δικαιωμάτων που δίνονται στους εκδότες/ επενδυτές του ομολόγου, να μοντελοποιήσει τη συμπεριφορά των εκδοτών/ επενδυτών ώστε να προσδιορίσει τις αναγκαίες συνθήκες για αυτούς να εξασκήσουν το δικαίωμά τους.

Είναι, επομένως, εξαιρετικά κρίσιμο να αναπτυχθούν μοντέλα για τα δυναμικά των επιτοκίων και για τους κανόνες εξάσκησης των embedded options. Μια μοντελοποίηση του δεύτερου σκέλους θα μπορούσε να γίνει με τη θεωρία του Behavioral Finance (Χρηματοοικονομικά της Συμπεριφοράς των Επενδυτών). Μια μοντελοποίηση του πρώτου σκέλους, όμως, θα μπορούσε να γίνει με τις μεθόδους της Στοχαστικής Ανάλυσης, και αυτό είναι το αντικείμενο του [Κεφ. 6](#).

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Κεφάλαιο 6

Στοχαστικά Μοντέλα Επιτοκίων

In the short term the market is a popularity contest; in the long term it is a weighing machine.

W. Buffett

Ως γνωστόν ένα δολλάριο σήμερα αξίζει περισσότερο από ένα δολλάριο αύριο. Πιο γενικά, χρήματα που επενδύονται για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες, T , αποφέρουν διαφορετικά κέρδη, αντίστοιχα του ρυθμού μεταβολής των επιτοκίων, $R(T)$. Η συνάρτηση αυτή καλείται Καμπύλη Αποδόσεων. Κάθε μέρα η καμπύλη αυτή αλλάζει, και η t -χρονικά μεταβαλλόμενη εκδοχή της συμβολίζεται με $R(t; T)$. Παρ' όλα αυτά τα επιτόκια δεν εμπορεύονται άμεσα, αλλά παράγονται από τις τιμές των ομολόγων που εμπορεύονται στην αγορά ομολόγων. Αυτό οδηγεί στην κατασκευή μοντέλων ομολόγων και στην τιμολόγηση ομολόγων μέσω επιχειρημάτων μη κερδοσκοπίας των αγορών (§6.2). Μαθηματικά, τα προηγούμενα περιγράφονται υποθέτοντας ένα κατάλληλο μέτρο, που κάνει μια συγκεκριμένη σ.α. martingale. Έχοντας ορίσει τις κατάλληλες έννοιες στις ενότητες §6.1 και §6.3, αλλά και στο Κεφ. 5, παραθέτουμε στην ακόλουθη §6.4 τα κυριότερα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία και στις εφαρμογές, αναλύοντας ιδιαίτερα στις §6.5-1 και §6.5-2 τα μοντέλα του Vasiček και των Ho και Lee αντίστοιχα. Στην ανάλυση μας επικεντρωνόμαστε στις κυριότερες μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε τέτοια μοντέλα, χωρίς να μπορούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες του πως προσδιορίζονται οι συντελεστές τους, ώστε να συμφωνούν τα αποτελέσματα με ό,τι παρατηρείται στην αγορά (calibration). Απλή αναφορά σε τέτοια ζητήματα γίνεται στα γενικά σχόλια αυτού του κεφαλαίου, στην §6.6. Χρήσιμες βιβλιογραφικές αναφορές αποτελούν τα κλασικά στο χώρο των στοχαστικών επιτοκίων συγγράμματα [4], [81], [9], [83] και [21] και τα άρθρα [2], [35], [92], [33], [8], [34]. Τέλος, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει μια “φυσική” θεώρηση των Χρηματοοικονομικών στα βιβλία [3], [65], [57] και [55] του μοντέρνου κλάδου της Κβαντικής Χρηματοοικονομικής Θεωρίας.

Κ. Στούρας, Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω Path Integrals. Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων.

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010

6.1 Ομόλογα χωρίς κουπόνια

Χωρίς βλάβη γενικότητας¹ θεωρούμε ένα ομόλογο χωρίς κουπόνια (βλ. §5.5-1) με maturity T , το οποίο έχει par value \$1. Στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτό ως ένα T -ομόλογο. Επιπρόσθετα, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για την ανάλυσή μας:

Συμβολισμός 6.1.

Για κάθε $0 \leq t \leq T$:

$P(t, T) :=$ Η τιμή τη χρονική στιγμή t ενός ομολόγου χωρίς κουπόνια με maturity T .

Ουσιαστικά, $P(t, T)$ είναι η τιμή ενός T -ομολόγου τη χρονική στιγμή t , στην αγορά. Η παρατήρηση αυτή είναι πολύ σημαντική, γιατί υπονοεί πως η τιμή της αγοράς μπορεί να μην ταυτίζεται κατά ανάγκη με τη δίκαιη τιμή (fair value) του ομολόγου. Γι' αυτό στην τιμολόγηση τέτοιων τίτλων θα απαιτήσουμε η δύο αυτές τιμές να είναι ίσες (βλ. εξίσωση (6.5) παρακάτω). Διαφορετικά, κατά το Παράδειγμα 5.8 της σελ. 102 ένας κερδοσκόπος θα μπορούσε να εκμεταλλευτεί μια τέτοια ευκαιρία βγάζοντας κέρδος χωρίς κάποιο ρίσκο.

Παρατήρηση 6.2.

Ως γνωστόν, όλα τα χρηματοοικονομικά προϊόντα, όσο πολύπλοκα και να είναι, μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα απλούστερων. Στην περίπτωση μας, ένα ομόλογο με κουπόνια πληρώνει σε πολλαπλές ημερομηνίες και μπορεί, συνεπώς, να θεωρηθεί ως ένα χαρτοφυλάκιο ομολόγων χωρίς κουπόνια, με την πληρωμή στη λήξη των οποίων να ισούται με την πληρωμή μιας δόσης του συνολικού ομολόγου. Μαθηματικά, αυτό μεταφράζεται πολύ απλά ως ακολούθως. Ένα ομόλογο που πληρώνει κουπόνι τιμής c_i τη στιγμή T_i , $i = 1, \dots, n$, με par value \$1 τη στιγμή $T = T_n$ έχει τιμή τη στιγμή $t < T$:

$$P_{coupon}(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ t \in (T_{i-1}, T_i]}}^n c_i P(t, T_i) + P(t, T_n) \quad (6.1)$$

Το πραγματικό επιτόκιο ενός λογαριασμού καταθέσεων (γνωστό και ως effective annual rate, EAR), ο οποίος ανατοχίζεται n -φορές το χρόνο, μπορεί να εκφραστεί μέσα από το επιτόκιο κάθε περιόδου², PR (periodic rate) ως εξής:

$$EAR := (1 + PR)^n - 1 \quad (6.2)$$

¹Ο λόγος που θα περιοριστούμε στην ειδική περίπτωση των zero-coupon bonds είναι γιατί αφενός μεν η ανάλυση ομολόγων με κουπόνια είναι ανάλογη (βλ. Παρατήρηση 6.2), αλλά και αφετέρου γιατί δε θα ασχοληθούμε έτσι τι θα συνέβαινε σε περίπτωση αθέτησης των όρων του indenture από κάποιον από τους αντισυμβαλλομένους. Επιπρόσθετα, τα ομόλογα που θα θεωρήσουμε είναι απαλλαγμένα από τα embedded options της §5.8.

²Το επιτόκιο κάθε περιόδου ισούται με το ονομαστικό επιτόκιο του ομολόγου δια το πλήθος των περιόδων ανατοκισμού, δηλαδή

$$PR = \frac{\text{ονομαστικό επιτόκιο}}{n}$$

Προφανώς, το EAR ενός 8% λογαριασμού καταθέσεων, ανατοκίζόμενος μία φορά το χρόνο, δεν είναι το ίδιο με το EAR ενός 8% λογαριασμού καταθέσεων, ανατοκίζόμενος κάθε μήνα. Όσο μεγαλύτερη η συχνότητα ανατοκισμού, τόσο μεγαλύτερο το πραγματικό επιτόκιο εν συγκρίσει με το επιτόκιο κάθε περιόδου.

Θεωρώντας τώρα *συνεχή* ανατοκισμό³ και ότι ο λογαριασμός καταθέσεων μας αποδίδει (στιγμιαίο) επιτόκιο $r(t)$, οι καταθέσεις μας θα πρέπει να αξίζουν τη στιγμή t ποσότητα δολλαρίων ίση με

$$\beta(t) := e^{\int_0^t r(s) ds} \quad (6.3)$$

ως λύση της εξίσωσης

$$\frac{d\beta}{\beta}(t) = r(t) dt \quad (6.4)$$

Παρατήρηση 6.3.

Στον τύπο 6.3 αναγνωρίζουμε ότι το $r(\cdot)$ είναι το γνώριμό μας από την §5.7 (στιγμιαίο) επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης (instantaneous spot rate) και ότι το $\frac{1}{\beta(\cdot)}$ είναι ουσιαστικά η *αθροιστική παρούσα αξία* (Net Present Value, NPV) της σελ. 100. Για έναν ακριβέστερο ορισμό, βλ. παρακάτω §6.3 στη σελ. 117.

Για να αποφύγουμε την κερδοσκοπία στην αγορά των ομολόγων πρέπει να ισχύει μια συγκεκριμένη σχέση μεταξύ των ομολόγων και των επιτοκίων τρέχουσας τοποθέτησης. Συγκεκριμένα, απαιτούμε να ισχύει η εξής *σχέση τιμολόγησης*:

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds} \quad (6.5)$$

Επαληθεύουμε την ορθότητα της σχέσης αυτής, επειδή

$$P(T, T) = 1$$

και

$$\beta(T) = e^0 = 1$$

Όλοι αυτοί οι συμβολισμοί και οι σχέσεις, όσο γενικοί και αν φαίνονται μας περιορίζουν αρκετά γιατί ισχύουν μόνο υπό μια υπόθεση που έμμεσα κάναμε: ότι τα επιτόκια, $r(\cdot)$ είναι *ντετερμινιστικά* (deterministic). Επιτρέποντας το επιτόκιο να μεταβάλλεται *τυχαία*, η τιμή του ολοκληρώματος $\int_t^T r(s) ds$ είναι επίσης τυχαία, και στο μέλλον του χρόνου t όπου η τιμή $P(t, T)$ είναι γνωστή, η προηγούμενη σχέση (6.5) ισχύει μόνο “κατά μέσον όρο” (με την έννοια της εξ. 6.9). Συνεπώς, πρέπει να ορίσουμε τις συναρτήσεις r και P ως *τυχαίες μεταβλητές* σε έναν κατάλληλο χώρο πιθανότητας.

³Είναι γνωστό ότι για $x \in \mathbb{R}$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

6.1-1 Τιμολόγηση ομολόγων με στοχαστικά επιτόκια

Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}_{T^*}^B, P)$ όπου $\mathcal{F}_{T^*}^B = \sigma(B_s, 0 \leq t \leq T^*)$ για κάθε $T^* \in [0, +\infty)$ η τυπική διύλιση της κίνησης Brown ή απλούστερα η “ιστορία” ή το “παρελθόν” της $\{B_t\}_{t \geq 0}$ μέχρι τη στιγμή T^* . Διαισθητικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν γνωρίζουμε την $\{B_t\}_{0 \leq t \leq T^*}$, τότε γνωρίζουμε για κάθε ενδεχόμενο στην ιστορία $\mathcal{F}_{T^*}^B$, αν αυτό συνέβη ή όχι, και αντιστρόφως.

Μέσα σε αυτόν τον χώρο πιθανότητας θεωρούμε τις $\mathcal{F}_{T^*}^B$ -προσαρμοσμένες ανελίξεις⁴ $P(t, T)$ και $\beta(t)$ για κάθε $t \leq T \leq T^*$. Επειδή η $P(t, T)$ είναι η τιμή ενός T -ομολόγου με par value \$1 απαιτούμε για κάθε $t \leq T \leq T^*$ να ισχύουν:

$$P(t, T) \geq 0 \quad \text{με πιθανότητα 1 (σ.β.)}$$

$$P(T, T) = 1 \quad \text{με πιθανότητα 1 (σ.β.)}$$

Για την μοντελοποίησή μας θεωρούμε επίσης ότι για κάθε $t \in [0, T^*]$, η απεικόνιση

$$(t, +\infty) \ni T \mapsto P(t, T) \in [0, +\infty)$$

είναι συνεχής και συνεχώς διαφορίσιμη (δηλαδή είναι C^1).

Όμως, με τα προηγούμενα, έχουμε ήδη φτάσει σε ένα αρκετά αφηρημένο επίπεδο θεωρητικής γενίκευσης. Η διαίσθησή μας δουλεύει καλά στην §5.6, αλλά εδώ χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην ερμηνεία των προκύπτοντων αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, το συνεχές των περιόδων λήξης T (maturities) των ομολόγων κάνει το μοντέλο της αγοράς να έχει άπειρα ομόλογα και συνεπώς δημιουργεί μια επιπόσθετη πολυπλοκότητα. Στη βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί διαφορετικές προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν πεπερασμένα χαρτοφυλάκια, όπου κάθε στιγμή επιτρέπονται μόνο πεπερασμένα ομόλογα, και άπειρα χαρτοφυλάκια, τα οποία τιμολογούνται με κάποιο μέτρο (measure) πιθανότητας (σελ. [34], [13]).

Προσέγγιση 1η

Μόνο πεπερασμένα, N το πλήθος ομόλογα, με λήξεις T_1, T_2, \dots, T_N είναι διαθέσιμα στην αγορά προς επένδυση. Έστω $\mu_C(t, T_i)$ το ποσοστό του διαθέσιμου κεφαλαίου (capital, C) προς επένδυση, τη στιγμή t , στο T_i -ομόλογο. Η αξία $V(\cdot) \equiv V^{C, \mu}(\cdot)$ του χαρτοφυλακίου ομολόγων ως προς την στρατηγική επένδυσης $\mu_C(\cdot, \cdot)$ του διαθέσιμου κεφαλαίου (C). Τότε η V ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \mu_C(t, T_i) \frac{dP}{P}(t, T_i) \\ V(0) &= C \end{aligned} \tag{6.6}$$

⁴ Ακριβέστερα, η $P(\cdot, \cdot)$ είναι ένα τυχαίο πεδίο (random field), αφού για κάθε $T \in [0, +\infty)$, η $P(\cdot, T)$ είναι μια στοχαστική ανελίξη.

Προσέγγιση 2η

Για κάθε $T \in [0, +\infty)$ άπειρα T -ομολόγα είναι διαθέσιμα στην αγορά προς επένδυση. Τότε με $\mu_C(t, [S, T))$ συμβολίζουμε το ποσοστό του διαθέσιμου κεφαλαίου (C) προς επένδυση, τη στιγμή t , σε ομολόγα που λήγουν κάπου μεταξύ του χρονικού διαστήματος $[S, T)$. Το συνεχές ανάλογο της (6.6) για την αξία, V , του χαρτοφυλακίου ομολόγων ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V}(t) &= \int_t^\infty \frac{dP}{P}(t, T) d\mu_C(t, dT) \\ V(0) &= C \end{aligned} \quad (6.7)$$

Αυτή θα είναι και η προσέγγιση που θα υιοθετήσουμε εμείς στην ανάλυσή μας.

Αλλά και η αρχή της μη κερδοσκοπίας της σελ. 102 έχει αλλάξει κατά πολύ. Για μια επέκταση της θεωρίας μη κερδοσκοπίας σε συνεχή χρόνο ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [4], [2], [82].

Σε όλες τις προηγούμενες διαφορετικές προσεγγίσεις η αρχή της μη κερδοσκοπίας των αγορών διαμορφώνεται με τη βοήθεια της ακόλουθης υπόθεσης [33], [56]:

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας, Q (επονομαζόμενο *Ισοδύναμο Martingale Μέτρο*, IMM) ισοδύναμο⁵ του μέτρου πιθανότητας P , τέτοιο ώστε ταυτόχρονα για όλα τα $T \leq T^*$, η ανέλιξη, $\left\{ \frac{P(t, T)}{\beta(t)} \right\}_{0 \leq t \leq T}$ να είναι martingale.

Παρατήρηση 6.5.

Στη βιβλιογραφία το μέτρο P ερμηνεύεται ως “υποκειμενική πιθανότητα”, δηλαδή ως την πιθανότητα που αντανακλά τις προτιμήσεις των επενδυτών απέναντι στον κίνδυνο [86]. Αντίθετα, το μέτρο πιθανότητας Q θεωρείται “ουδέτερο” στον κίνδυνο (risk neutral), αφού καθιστά martingale την αξία $\frac{1}{\beta(T)}$ του ομολόγου.

Η προηγούμενη υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχει μέτρο $Q \sim P$ έτσι ώστε για κάθε $0 \leq t \leq T$

$$E_Q \left[\frac{1}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = E_Q \left[\frac{P(T, T)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, T)}{\beta(t)} \quad (6.8)$$

όπου η σ-άλγεβρα \mathcal{F}_t συμβολίζει κατά τα γνωστά όλη τη διαθέσιμη πληροφορία μέχρι και τη στιγμή t . Επειδή τώρα η τ.μ. $\beta(t)$ έχει υποθεθεί \mathcal{F}_t -μετρήσιμη, μπορεί να “περάσει” μέσα στη μέση τιμή και να έχουμε το συνεχές ανάλογο της συνθήκης τιμολόγησης των ομολόγων που περιγράψαμε στη σελ. 102:

5

Ορισμός 6.4 (Ισοδύναμο μέτρα).

Έστω ο χώρος μέτρου (Ω, \mathcal{F}_t) . Δύο μέτρα Q, P καλούνται *ισοδύναμα* στον (Ω, \mathcal{F}_t) αν για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}_t$ με $Q(A) = 0$ ισχύει ότι $P(A) = 0$. Αν επιπρόσθετα τα μέτρα Q, P είναι μέτρα πιθανότητας τότε ισχύει επιπλέον ότι για κάθε ενδεχόμενο $B \in \mathcal{F}_t$ με $Q(B) = 0$, θα έχουμε ότι και $P(A) = 0$. Συμβολικά, γράφουμε $Q \sim P$.

$$P(t, T) = E_Q \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = E_Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (6.9)$$

Όπως εύστοχα συμπληρώνει η Klebaner [56]:

“Η σχέση (6.9) δείχνει ότι ένα T -ομολόγο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παράγωγο (derivative) στο επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης (spot rate)”.

Παρατήρηση 6.6.

Από την (6.9) φαίνεται ξεκάθαρα ότι για κάθε $t \in [0, T^*]$ η απεικόνιση

$$(t, +\infty) \ni T \mapsto P(t, T) \in [0, +\infty)$$

είναι εκθετικά φθίνουσα αν υποθέσουμε ότι το επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης είναι $r(t) \geq 0$ σχεδόν⁶ για κάθε $t \in [0, T^*]$. Το γεγονός αυτό συνάδει αρμονικά με το γράφημα της σελ. 96, το οποίο είναι και το αναμενόμενο.

Συνεπώς, από τις (6.8) (6.9) έχουμε και τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 6.7 (Τιμή ομολόγου ουδέτερη στον κίνδυνο).

Έστω μια \mathcal{F}_t -μετρήσιμη τ.μ. $Y: \Omega \rightarrow [0, +\infty)$. Τότε το τυχαίο πεδίο

$$P(t, T; Y) := E_Q \left[Y e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

καλείται η Q -κινδυνουδέτερη τιμή (Q -risk-neutral price) της Y τη στιγμή $t \in [0, T^*]$.

6.2 Μοντέλα ομολόγων προσαρμοσμένα στην κίνηση Brown

Σε αυτή την ενότητα στόχο μας είναι να παράγουμε την Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ) για την τιμή ομολόγου, $P(t, T)$, υπό το μέτρο πιθανότητας Q , ξεκινώντας μόνο από την IMM Υπόθεση. Η ΣΔΕ υπό το μέτρο πιθανότητας, P , παράγεται τότε άμεσα, ως συνέπεια μιας ιδιότητας αναπαράστασης των στοχαστικών ανελίξεων. Ως συνήθως, αυτή η ιδιότητα υποδεικνύει την ύπαρξη κάποιων συγκεκριμένων ανελίξεων, αλλά δε μας λέει τίποτα για το πως να τις βρούμε.

Ας θεωρήσουμε τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Υποθέτουμε ότι η ανελίξη $r(t)$ των spot rates παράγει τη σ-άλγεβρα \mathcal{F}_t , και ότι η ανελίξεις των ομολόγων $P(t, T)$, είναι για

⁶Εννοούμε ότι η πιθανότητα

$$P[r(t) \geq 0] = 1 \quad \forall t \in [0, T^*]$$

κάθε $t \leq T < T^*$ $\mathcal{F}_t^{B^P}$ -προσαρμοσμένες. Η IMM Υπόθεση δίνει την τιμή του ομολόγου από την εξίσωση (6.9). Το martingale

$$Z_t := \frac{P(t, T)}{\beta(t)} = E_Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (6.10)$$

είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένο. Από ένα γνωστό αποτέλεσμα της Στοχαστικής Ανάλυσης (βλ. [29]) υπάρχει προσαρμοσμένη ανέλιξη, X_t , της μορφής $X(t) = \int_0^t v(t, T) dB_t^Q$, όπου B_t^Q είναι μία Q -κίνηση Brown, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} d \left(\frac{P(t, T)}{\beta(t)} \right) &= \left(\frac{P(t, T)}{\beta(t)} \right) dX_t \\ &= v(t, T) \left(\frac{P(t, T)}{\beta(t)} \right) dB_t^Q \end{aligned} \quad (6.11)$$

Όμως, επειδή η $\frac{P(t, T)}{\beta(t)}$ είναι στοχαστική ανέλιξη, το διαφορικό $d \left(\frac{P(t, T)}{\beta(t)} \right)$ είναι στοχαστικό και πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με το [Θεώρημα 1.24](#) σε διαφορική μορφή, επιλέγοντας $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Τότε για την ανέλιξη $Z_t = \frac{P_t(T)}{\beta_t}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} dZ_t &= f_x(P_t(T), \beta_t) dP_t(T) + f_y(P_t(T), \beta_t) d\beta_t + f_{xx}(P_t(T), \beta_t) d(P_t(T))^2 \\ &\quad + f_{xy}(P_t(T), \beta_t) dP_t(T) d\beta_t + f_{yy}(P_t(T), \beta_t) d\beta_t^2 \end{aligned}$$

Ακολουθώντας τις πράξεις στην (1.27), σελ. 14 βρίσκουμε:

$$\left. \begin{aligned} dY_t^2 &= 0, & dX_t dY_t &= 0 \\ f_x(P_t(T), \beta_t) &= \frac{1}{\beta_t} & f_y(P_t(T), \beta_t) &= -\frac{P_t(T)}{\beta_t^2} \\ f_{xy}(P_t(T), \beta_t) &= -\frac{1}{\beta_t^2} & f_{xx}(P_t(T), \beta_t) &= 0 \\ f_{yy}(P_t(T), \beta_t) &= \frac{P_t(T)}{\beta_t^3} \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Η (6.11) από την (6.12) και τον ορισμό (6.4) της β_t γίνεται:

$$\begin{aligned} d \left(\frac{P(t, T)}{\beta(t)} \right) &= f_x(P_t(T), \beta_t) dP_t(T) + f_y(P_t(T), \beta_t) d\beta_t \\ &= \frac{1}{\beta_t} dP_t(T) - \frac{P_t(T)}{\beta_t^2} r_t \beta_t dt \end{aligned} \quad (6.13)$$

Και, συνεπώς, καταλήγουμε στην ΣΔΕ για την τιμή του T -ομολόγου, $P(t, T)$, υπό το IMM μέτρο πιθανότητας Q :

$$\boxed{\frac{dP}{P}(t, T) = r(t) dt + v(t, T) dB_t^Q} \quad (6.14)$$

Αυτή είναι και η εξίσωση τιμολόγησης για τα ομόλογα και τα δικαιώματα πάνω σε αυτά

(βλ. §5.8).

Παρατήρηση 6.8.

Παρατηρούμε ότι η απόδοση ενός λογαριασμού καταθέσεων με συνεχή, τυχαίο ανατοκισμό $r(t)$ ικανοποιεί την (6.4). Αντίθετα, ένα ομόλογο ικανοποιεί την (6.14) η οποία είναι ίδια η (6.4) με την προσθήκη ενός στοχαστικού όρου $\sigma(t, T) dB_t^Q$. Συνεπώς, αυτό κάνει τις επενδύσεις σε ομόλογα να έχουν μεγαλύτερο ρίσκο από ότι (οι επίσης τυχαίες) αποδόσεις ενός λογαριασμού καταθέσεων.

Στη συνέχεια θα βρούμε την $\Sigma\Delta E$ για την τιμή ενός T -ομολόγου υπό το “πραγματικό” μέτρο πιθανότητας P . Επειδή τα μέτρα πιθανότητας είναι ισοδύναμα ($P \sim Q$), από το Θεώρημα Αναπαράστασης των Martingales [29] υπάρχει μια $\mathcal{F}_{T^*}^{B^P}$ -προσαρμοσμένη, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ανέλιξη $\tau^Q: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$Z^Q(t) := 1 + \int_0^t \tau^Q(s) dB_s \quad (6.15)$$

όπου $Z^Q(t) \equiv \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t}$ για κάθε $0 \leq t < \infty$ το αντίστοιχο εκθετικό martingale (exponential martingale). Επειδή $Z^Q(\cdot) > 0$ σ.β., μπορούμε να ορίσουμε την ανέλιξη

$$q^Q(t) := \frac{\tau^Q}{Z^Q}(t)$$

για κάθε $0 \leq t < \infty$ και να καταλήξουμε ότι η

$$Z^Q(t) = 1 + \int_0^t Z^Q(s) q^Q(s) dB_s$$

είναι μια $\Sigma\Delta E$ με λύση

$$Z^Q(t) = \exp \left(\int_0^t q^Q(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (q^Q(s))^2 ds \right) \quad (6.16)$$

Το γνωστό Θεώρημα Girsanov μας εξασφαλίζει, τελικά, ότι η ανέλιξη

$$B_t^P := B_t^Q - \int_0^t q^Q(s) ds \quad (6.17)$$

είναι μια κίνηση Brown υπό το μέτρο P . Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς, στο εξής θα αναφερόμαστε στην ανέλιξη της (6.17) ως απλά B_t . Αντικαθιστώντας τη διαφορική μορφή της (6.17) $B_t = B_t^Q - \int_0^t q^Q(s) ds$ στην (6.14), συμπεραίνουμε την $\Sigma\Delta E$ για την τιμή του T -ομολόγου υπό το P :

$$\boxed{\frac{dP}{dP}(t, T) = \left(r(t) - v(t, T) q^Q(t) \right) dt + v(t, T) dB_t} \quad (6.18)$$

Παρατήρηση 6.9.

Από την (6.18) έπεται ότι η ανέλιξη $-q^Q(\cdot)$ είναι η υπερβάλλουσα απόδοση (excess return) του ομολόγου, πάνω από το χωρίς ρίσκο επιτόκιο, εκπεφρασμένη στις συνήθεις μονάδες δεν είναι άλλο από το γνωστό μας risk premium της §5.5. Πρόκειται ουσιαστικά για την ανταμοιβή που ζητάει η αγορά των ομολόγων για το ρίσκο που αναλαμβάνει επενδύοντας σε ένα τέτοιο ομόλογο.

Όμως, τα προηγούμενα θεωρήματα μίλησαν απλώς για την ύπαρξη της ανέλιξης $q^Q(\cdot)$ και τα μοντέλα (6.14) και (6.18) δε μπορούν από μόνα τους να μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της. Μόνο η αγορά μπορεί να κάνει κάτι τέτοιο! Παρολαυτά, η συνηθέστερη υπόθεση είναι να παίρνουμε ότι $q^Q(t) = q$ είναι μια σταθερά.

6.3 Διάφορα είδη επιτοκίων: Συνεχή Περίπτωση

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι να γενικεύσουμε κατάλληλα τα πρακτικά αποτελέσματα της §5.7, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα μοντέλα (6.14) και (6.18). Αρχικά, θα ορίσουμε το επιτόκιο πρόσω forward rate διαισθητικά μέσω ενός παραδείγματος.

Θεωρούμε τους χρόνους $0 \leq t \leq S < T < \infty$. Τη στιγμή t κάνουμε ένα συμβόλαιο, εκδίδουμε (πουλάμε) ένα S -ομόλογο και παίρνουμε (δανειζόμαστε) $\$P(t, S)$. Χρησιμοποιώντας όλο αυτό το κεφάλαιο, έστω ότι επενδύουμε σε (αγοράζουμε) $\frac{P(t, S)}{P(t, T)}$ -το πλήθος T -ομολόγα. Η NPV_t , λοιπόν, της επένδυσής μας (τη στιγμή t) ισούται με μηδέν. Τη στιγμή S , το S -ομόλογο λήγει και συνεπώς ως εκδότες του πληρώνουμε $\$1$ στον επενδυτή του. Τη (μεταγενέστερη) στιγμή T τώρα, το T -ομόλογο λήγει, και συνεπώς παίρνουμε $\$ \frac{P(t, S)}{P(t, T)}$. Σύμφωνα με το προηγούμενο συμβόλαιο τη στιγμή t , μια επένδυση ενός δολλαρίου αποφέρει τη στιγμή S με ένα χωρίς κίνδυνο επιτόκιο $\$ \frac{P(t, S)}{P(t, T)}$, τη στιγμή T .

Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο αυτό καλείται προθεσμιακό επιτόκιο ή επιτόκιο πρόσω ενός ομολόγου που λήγει κάπου μεταξύ του χρονικού διαστήματος $[S, T]$ που εκδόθηκε τη στιγμή t , και θα το συμβολίζουμε ως $R(t; S, T)$. Το συνεχές ανάλογο της (6.2) δίνει σε αυτήν την περίπτωση τη σχέση

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \exp(R(t; S, T) \cdot (T - S))$$

Συνεπώς, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 6.10 (Προθεσμιακό επιτόκιο στο διάστημα $[S, T]$).

Έστω η ακολουθία χρόνων $0 \leq t \leq S < T < \infty$. Έστω, επίσης, ομόλογο χωρίς κουπόνια με λήξη κάπου μεταξύ του χρονικού διαστήματος $[S, T]$, που εκδόθηκε τη στιγμή t . Το κινδυνουδέτερο επιτόκιο $R(t; S, T)$ αυτού του ομολόγου καλείται προθεσμιακό επιτόκιο (ή επιτόκιο πρόσω) στο διάστημα $[S, T]$ (forward rate in $[S, T]$) υπολογισμένο

τη στιγμή t και δίνεται από τη σχέση

$$R(t; S, T) := -\frac{1}{T-S} [\ln P(t, T) - \ln P(t, S)] \quad (6.19)$$

Στέλνοντας στη συνέχεια το $S \rightarrow t$, $\ln P(t, t) \equiv 1$, και συνεπώς ορίζουμε

Ορισμός 6.11 (Βραχυπρόθεσμο επιτόκιο στο διάστημα $[t, T]$).

Έστω η ακολουθία χρόνων $0 \leq t < T < \infty$. Έστω, επίσης, T -ομόλογο χωρίς κουπόνια, που εκδόθηκε τη στιγμή t . Η απόδοση αυτού του T -ομολόγου, που εκδόθηκε τη στιγμή t , καλείται *βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ή επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης* (spot rate) για το διάστημα $[t, T]$ και δίνεται από τη σχέση

$$R(t; T) := R(t; t, T) = -\frac{1}{T-t} [\ln P(t, T)] \quad (6.20)$$

Σχόλιο 6.12.

Σύμφωνα με την [Παρατήρηση 5.7](#) της σελ. 102 το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο spot rate δεν ταυτίζεται με το *επιτόκιο ως τη λήξη* (Yield To Maturity, YTM). Αυτό είναι μια εσφαλμένη ερμηνεία των επιτοκίων, που συναντάται σε πολλά συγγράμματα Στοχαστικών Οικονομικών Μαθηματικών γραμμένα από Μαθηματικούς (βλ. για παράδειγμα [\[56\]](#) σελ. 323). Στο [\[4\]](#), σελ. 361 παρατίθεται η ορθή (οικονομική) ερμηνεία του YTM.

Ορισμός 6.13 (Καμπύλη Αποδόσεων).

Για σταθερό t , η απεικόνιση

$$(t, +\infty) \ni T \mapsto R(t; T) \in (0, +\infty) \quad (6.21)$$

καλείται *Καμπύλη Αποδόσεων* (Term Structure of Interest Rates ή και Yield Curve) τη στιγμή t , και προσδιορίζει επίσης τις τιμές των ομολόγων από τη σχέση

$$P(t, T) = e^{-R(t; T) \cdot (T-t)} \quad (6.22)$$

Παρατήρηση 6.14.

Κατά την [Παρατήρηση 6.2](#) για ένα ομόλογο με κουπόνια, η (6.22) λόγω της (6.1) γίνεται

$$P_{\text{coupon}}(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ t \in (T_{i-1}, T_i]}}^n c_i e^{-R_{\text{coupon}}(t) \cdot (T_i - t)} + e^{-R_{\text{coupon}}(t) \cdot (T_n - t)}$$

Παίρνοντας ένα $h > 0$ και θέτοντας στην (6.19) $S := T - h$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} R(t; T - h, T) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{1}{h} [\ln P(t, T) - \ln P(t, T - h)] \right\} \\ &= -\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t, T) \end{aligned}$$

Ορισμός 6.15. [Στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο και καμπύλη προθεσμιακών επιτοκίων]

Έστω η ακολουθία χρόνων $0 \leq t < T < \infty$. Έστω, επίσης, T -ομολόγο χωρίς κουπόνια, που εκδόθηκε τη στιγμή t . Τότε το *στιγμιαίο επιτόκιο μέλλουσας τοποθέτησης* ή απλά το *στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο* (instantaneous forward rate) του προηγούμενου ομολόγου με τιμή $P(t, T)$ θα συμβολίζεται ως $f(t, T)$ και δίνεται από τη σχέση

$$f(t, T) := -\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t, T) \quad (6.23)$$

Επιπρόσθετα, η απεικόνιση

$$(t, +\infty) \ni T \mapsto f(t, T) \in (0, +\infty) \quad (6.24)$$

καλείται *Καμπύλη Προθεσμιακών Επιτοκίων* (Forward-Rate Curve) τη στιγμή t .

Ολοκληρώνοντας την (6.23) για $t \leq s \leq T$ στο διάστημα $[s, T]$ παίρνουμε

$$P(t, T) = P(t, s) \exp \left(- \int_s^T f(t, u) du \right) \quad (6.25)$$

και θέτοντας $s := t$ στην (6.25) έχουμε την τιμή ενός T -ομολόγου από τα προθεσμιακά επιτόκια

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right) \quad (6.26)$$

Το *στιγμιαίο επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης* (instantaneous spot rate) τη στιγμή t είναι επομένως

$$r(t) := f(t, t) \quad (6.27)$$

Έτσι, είναι άμεσος (και ίδιος) ο ορισμός της $\beta(t)$ της εξίσωσης (6.3) ως στοχαστικής ανέλιξης.

Η σύγκριση του ορισμού (6.23) και της προηγούμενης ισότητας (6.20) αποκαλύπτει την σχέση

$$R(t; T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, u) du \quad (6.28)$$

δηλαδή τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι, διαισθητικά, “μέσοι όροι” των στιγμιαίων προθεσμιακών επιτοκίων. Η σχέση (6.28) δείχνει ότι κατά κάποιον τρόπο τα στιγμιαία επιτόκια πρόσω είναι πιο θεμελιώδεις ποσότητες από τα επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης και, συνεπώς, ένα πιο “ελκυστικό” σημείο αναφοράς ανάπτυξης μοντέλων των *δυναμικών* (dynamics) των αποδόσεων.

Σχόλιο 6.16.

Βλέπουμε εδώ ότι η $r(\cdot)$ δεν μπορεί να είναι σταθερά όπως στο μοντέλο των Black-Scholes, αφού από τον ορισμό της στην εξίσωση (6.27) είναι μια (γνήσια) *στοχαστική ανέλιξη*.

Προς την κατεύθυνση του modelling της τιμής T -ομολόγων θεωρώντας στοχαστικά επιτόκια χρειαζόμαστε πρώτα ένα μοντέλο περιγραφής των στιγμιαίων επιτοκίων επιτοκίων τρέχουσας τοποθέτησης. Έπειτα, μέσω της εξ. (6.9) και της ουσιαστικής βοήθειας της Feynman-Kač formula θα δούμε πως μπορούμε να καταλλήξουμε σε κάποια μοντέλα με επιθυμητές ιδιότητες (βλ. Πίνακα 6.1). Με το ακόλουθο Θεώρημα αποδεικνύουμε μια πρώτη σύνδεση μεταξύ των εξισώσεων περιγραφής των προθεσμιακών επιτοκίων και αυτών που περιγράφουν τα βραχυχρόνια επιτόκια.

Θεώρημα 6.17.

Έστω ένα T -ομόλογο και μια χρονική στιγμή $t \in [0, T]$. Έστω ότι το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο τη στιγμή t , $f(t, T)$, ικανοποιεί την $\Sigma\Delta E$ (υπό το μέτρο πιθανότητας P)

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dB_t \quad (6.29)$$

όπου $\{B_t\}$ είναι μία P -κ.Β. και οι ανελίξεις⁷ $\alpha(\cdot, T)$, $\sigma(\cdot, T)$ είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένες και συνεχείς. Τότε το βραχυχρόνιο επιτόκιο τη στιγμή t , $r(t)$ είναι ανελίξη Itô και έχει $\Sigma\Delta E$ της μορφής

$$dr(t) = \kappa(t) dt + \lambda(t) dB_t \quad (6.30)$$

όπου

$$\kappa(t) := \alpha(t, t) + \left. \frac{\partial}{\partial T} f(t, T) \right|_{T=t} \quad \text{και} \quad \lambda(t) := \sigma(t, t) \quad (6.31)$$

Απόδειξη. Για $0 \leq t \leq \tau \leq T$ ολοκληρώνοντας την (6.29) στο $[0, T]$ παίρνουμε

$$f(t, \tau) = f(0, \tau) + \int_0^t \alpha(s, \tau) ds + \int_0^t \sigma(s, \tau) dB_s \quad (6.32)$$

Η (6.32) για $\tau := t$ λόγω του ορισμού (6.27) δίνει

$$r(t) = f(0, \tau) + \int_0^t \alpha(s, \tau) ds + \int_0^t \sigma(s, \tau) dB_s \quad (6.33)$$

Από την άλλη, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} f(0, \tau) &= f(0, 0) + \int_0^\tau \left. \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \right|_{T=u} du \\ &= r(0) + \int_0^\tau \left. \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \right|_{T=u} du \\ \alpha(s, \tau) &= \alpha(s, s) + \int_s^\tau \left. \frac{\partial}{\partial T} \alpha(s, T) \right|_{T=u} du \\ \sigma(s, \tau) &= \sigma(s, s) + \int_s^\tau \left. \frac{\partial}{\partial T} \sigma(s, T) \right|_{T=u} du \end{aligned}$$

⁷ Ακριβέστερα, κατά την υποσημείωση της σελ. 110 πρόκειται για τυχαία πεδία.

Από τις οποίες, η σχέση (6.33) γίνεται

$$\begin{aligned} r(t) = r(0) &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \Big|_{T=u} du \\ &+ \int_0^t \alpha(s, s) ds + \int_0^t \sigma(s, s) dB_s \\ &+ \int_s^t \frac{\partial}{\partial T} \alpha(s, T) \Big|_{T=u} du \\ &+ \int_s^t \frac{\partial}{\partial T} \sigma(s, T) \Big|_{T=u} du \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη στοχαστική μορφή του Θεωρήματος Fubini⁸ εναλλάσσουμε τα ολοκληρώματα και παίρνουμε

$$\begin{aligned} r(t) = r(0) &+ \int_0^t \alpha(s, s) ds + \int_0^t \sigma(s, s) dB_s \\ &+ \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \Big|_{T=u} + \int_0^u \frac{\partial}{\partial T} \alpha(s, T) \Big|_{T=u} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^u \frac{\partial}{\partial T} \sigma(s, T) \Big|_{T=u} ds \right\} du \end{aligned} \quad (6.34)$$

Η (6.32) απλοποιεί κατά πολύ την (6.34) και δίνει

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0) + \int_0^t \alpha(s, s) ds + \int_0^t \sigma(s, s) dB_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} f(u, T) \Big|_{T=u} du \\ &= r(0) + \int_0^t \left[\alpha(s, s) + \frac{\partial}{\partial T} f(s, T) \Big|_{T=s} \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma(s, s) dB_s \end{aligned}$$

Η εφαρμογή των ορισμών της (6.31) δίνει τελικά το ζητούμενο (σε ολοκληρωτική αναπαράσταση):

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \kappa(s) ds + \int_0^t \lambda(s) dB_s \quad \square$$

Σχόλιο 6.18.

Οι στοχαστικές ανελίξεις $\alpha(\cdot, T)$, $\sigma(\cdot, T)$ και οι αρχικές συνθήκες $f(0, T)$ καλούνται *παράμετροι του μοντέλου* (6.29) και υπολογίζονται μέσω μιας διαδικασίας που λέγεται *calibration*. Η υπόθεση (6.29) που κάναμε για τα επιτόκια πρόσω, στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως η *HJM Συνθήκη Συμβατότητας*, από την έρευνα των Heath-Jarrow-Morton [35].

⁸Για μια απόδειξη βλ. [86].

Θεώρημα 6.19.

Έστω ένα T -ομόλογο και μια χρονική στιγμή $t \in [0, T]$. Έστω ότι η τιμή του T -ομολόγου, $P(t, T)$, τη στιγμή t , ικανοποιεί την ΣΔΕ (6.18) (υπό το μέτρο πιθανότητας P), δηλαδή κυβερνάται από τα δυναμικά

$$\frac{dP}{P}(t, T) = m(t, T) dt + v(t, T) dB_t$$

όπου $m(t, T) := r(t) - v(t, T) q^Q(t)$.

Τότε το στιγμιαίο επιτόκιο πρόσω τη στιγμή t , $f(t, T)$, ικανοποιεί την ΣΔΕ (6.29):

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dB_t$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha(t, T) &= v(t, T) \frac{\partial v}{\partial T}(t, T) - \frac{\partial m}{\partial T}(t, T) \\ \sigma(t, T) &= -\frac{\partial v}{\partial T}(t, T) \end{aligned}$$

Απόδειξη. Ο ορισμός του στιγμιαίου προθεσμιακού επιτοκίου (6.23):

$$f(t, T) := -\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t, T)$$

συνεπάγεται ότι

$$df(t, T) := -\frac{\partial d \ln P}{\partial T}(t, T)$$

Όμως, το διαφορικό $d \ln P(t, T)$ είναι στοχαστικό και συνεπώς δεν υπολογίζεται με τους νόμους της κλασικής Ανάλυσης, αλλά με την εφαρμογή του κανόνα του Itô, του [Κεφ. 1](#):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial T} [d \ln P(t, T)] &= -\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{P(t, T)} dP(t, T) - \frac{1}{2P^2(t, T)} (dP(t, T))^2 \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} \left[\left(m(t, T) - \frac{1}{2} (v(t, T))^2 \right) dt + v(t, T) dB_t \right] \\ &= \left[-\frac{\partial m}{\partial T}(t, T) + v(t, T) \frac{\partial v}{\partial T}(t, T) \right] dt - \frac{\partial v}{\partial T}(t, T) dB_t \end{aligned}$$

Δηλαδή, τελικά, έχουμε τη ζητούμενη έκφραση (6.29)

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dB_t \quad \square$$

Το [Θεώρημα 6.19](#) προσδιορίζει τα δυναμικά της Καμπύλης Προθεσμιακών Επιτοκίων και μας λέει ότι τα στιγμιαία επιτόκια πρόσω είναι ανεξίτητοι Itô. Ισχύει και *αντίστροφα* με την ακόλουθη έννοια.

Θεώρημα 6.20.

Εάν τα στιγμιαία επιτόκια πρόσω $f(\cdot, T)$ ικανοποιούν τα δυναμικά της (6.29), τότε οι

τιμές ενός T -ομολόγου $P(t, T)$ είναι ανεξίτητοι Itô και ικανοποιούν τα δυναμικά της (6.18):

$$\frac{dP}{P}(t, T) = \left[r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} (S(t, T))^2 \right] dt + S(t, T) dB_t \quad (6.35)$$

όπου

$$A(t, T) := - \int_t^T \alpha(t, \tau) d\tau, \quad S(t, T) := - \int_t^T \sigma(t, \tau) d\tau \quad (6.36)$$

Απόδειξη. Η εξίσωση (6.26) συνεπάγεται ότι

$$P(t, T) = e^{Y(t, T)} \quad (6.37)$$

όπου

$$\begin{aligned} Y(t, T) &= - \int_t^T f(t, \tau) d\tau \\ &= - \int_t^T f(0, \tau) d\tau - \int_t^T \int_0^t \alpha(u, \tau) du d\tau - \int_t^T \int_0^t \sigma(u, \tau) dB_u d\tau \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini εναλλάσσουμε τα ολοκληρώματα, και στη συνέχεια τα “σπάμε” σε περισσότερα:

$$\begin{aligned} Y(t, T) &= - \int_t^T f(0, \tau) d\tau - \int_0^t \int_t^T \alpha(u, \tau) d\tau du - \int_0^t \int_t^T \sigma(u, \tau) d\tau dB_u \\ &= - \int_0^T f(0, \tau) d\tau - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau) d\tau du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau) d\tau dB_u \\ &\quad + \int_0^T f(0, \tau) d\tau - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau) d\tau du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau) d\tau dB_u \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Fubini και πάλι

$$\begin{aligned} Y(t, T) &= Y(0, T) - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau) d\tau du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau) d\tau dB_u \\ &= - \int_0^T f(0, \tau) d\tau - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau) d\tau du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau) d\tau dB_u \\ &\quad + \int_0^T [f(0, \tau) + \int_0^\tau \alpha(u, \tau) du + \int_0^\tau \sigma(u, \tau) dB_u] d\tau \\ &= Y(0, T) - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau) d\tau du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau) d\tau dB_u \\ &\quad + \int_0^T f(\tau, \tau) d\tau \\ &= Y(0, T) + \int_0^t r(\tau) d\tau - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau) d\tau du \\ &\quad - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau) d\tau dB_u \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την Itô formula στην (6.37) παίρνουμε

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= d[e^{Y(t, T)}] \\ &= P(t, T) dY(t, T) + \frac{1}{2} P(t, T) (dY(t, T))^2 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Εφαρμόζοντας στην (6.38) τον κανόνα γινομένου (1.29) της σελ. 14, και χρησιμοποιώντας

τα προηγούμενα παίρνουμε τελικά το ζητούμενο:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P}(t, T) &= \left[r(t) - \int_t^T \alpha(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma(t, \tau) d\tau \right)^2 \right] dt \\ &\quad + \left[- \int_t^T \sigma(t, \tau) d\tau \right] dB_t \\ &= \left[r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} (S(t, T))^2 \right] dt + S(t, T) dB_t \end{aligned} \quad \square$$

Παρατήρηση 6.21.

Ενθυμούμενοι την εξίσωση για το χαρτοφυλάκιο ομολόγων (6.7) της σελ. 111 θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα δυναμικά της (6.35) επενδύοντας σε ομόλογα που λήγουν σήμερα. Αυτό μαθηματικά ερμηνεύεται θέτοντας

$$\mu_C(t, T) := \delta(t, T) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t = T \\ 0, & \text{αν } t \neq T \end{cases}$$

και λαμβάνοντας

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V}(t) &= \left[r(t) + A(t, t) + \frac{1}{2} (S(t, t))^2 \right] dt + S(t, t) dB_t \\ &= r(t) dt \end{aligned}$$

Ισοδύναμα:

$$V(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}$$

Δηλαδή καταλήξαμε ότι η $V(t)$ ταυτίζεται με την ανέλιξη $\beta(t)$ της σελ. 109. Γι' αυτό, το χαρτοφυλάκιο ομολόγων (6.7) είναι το λεγόμενο *replicating portfolio* για τις επενδύσεις μας.

Κατά τα σχόλια της §6.2 θα μπορούσαμε να ξαναγράψουμε τα δυναμικά της τιμής ενός T -ομολόγου της (6.35) ως προς τη νέα κ.Β. $\{B_t^Q\}_{t \geq 0}$ υπό το IMM μέτρο πιθανότητας Q :

$$d\left(\frac{P(t, T)}{\beta(t)}\right) = \frac{P(t, T)}{\beta(t)} \left\{ \left[A(t, T) + \frac{1}{2} (S(t, T))^2 \right] dt + S(t, T) dB_t^Q \right\} \quad (6.39)$$

Αλλά η IMM Υπόθεση, όπως αναφέραμε στη σελ. 113 συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ανέλιξη Itô είναι ένα Q -martingale και συνεπώς από το Λήμμα 1.23 του Κεφ. 1 θα έχει drift ίσο με μηδέν. Δηλαδή η IMM Υπόθεση απαιτεί

$$A(t, T) + \frac{1}{2} (S(t, T))^2 \equiv 0$$

και μια απλή παραγωγή ως προς την μεταβλητή T της λήξης των T -ομολόγων δίνει

$$\frac{\partial}{\partial T} A(t, T) + S(t, T) \frac{\partial}{\partial T} S(t, T) = 0$$

Ενθυμούμενοι τους ορισμούς των $A(t, T)$, $S(t, T)$ στη σχέση (6.36) καταλήγουμε στη συνθήκη

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \cdot \left(\int_t^T \sigma(t, u) du \right) \quad (6.40)$$

Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή ως *HJM Συνθήκη Συμβατότητας* (HJM Compatibility Condition) ή ως *HJM Συνθήκη Μη Κερδοσκοπίας* [35].

Συνοψίζουμε τα προηγούμενα κρίσιμα αποτελέσματα στο επόμενο Πρόρισμα.

Πόρισμα 6.22 (Τιμή ομολόγου μοντελοποιώντας τα επιτόκια πρόσω).

Αν ικανοποιείται η *HJM Συνθήκη Συμβατότητας* (6.40), και τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια δίνονται από ένα μοντέλο της μορφής της (6.30)

$$dr(t) = \kappa(t) dt + \sigma(t, t) dB_t \quad (6.41)$$

τότε τα προθεσμιακά επιτόκια θα ικανοποιούν υπό το κινδυνουδέτερο μέτρο Q την ΣΔΕ

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \cdot \left(\int_t^T \sigma(t, u) du \right) dt + \sigma(t, T) dB_t^Q \quad (6.42)$$

Επιπρόσθετα, η τιμή ενός T -ομολόγου θα ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις για κάθε χρονική στιγμή $t \leq T$:

$$dP(t, T) = P(t, T) \cdot \left\{ r(t) dt - \left(\int_t^T \sigma(t, \tau) d\tau \right) dB_t^Q \right\} \quad (6.43)$$

$$P(t, T) = P(0, T) e^{\int_0^t \left[r(s) - \frac{1}{2} \left(\int_s^T \sigma(s, u) du \right)^2 \right] ds - \int_0^t \left[\int_s^T \sigma(s, u) du \right] dB_s} \quad (6.44)$$

Απόδειξη. Η κλειστή μορφή (6.44) για την τιμή ενός T -ομολόγου προκύπτει ως η λύση της ΣΔΕ (6.43). \square

Χρησιμοποιώντας την (6.44) για δύο ημερομηνίες λήξης $T_1 \neq T_2$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 6.23 (Σχέση ομολόγων με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης).

Εστω ένα T_1 -ομόλογο και ένα T_2 -ομόλογο με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης. Τότε για κάθε $t \leq T_1 < T_2$ οι τιμές των δύο αυτών ομολόγων συνδέονται μέσω της σχέσης

$$P(t, T_2) = \frac{P(0, T_2)}{P(0, T_1)} P(t, T_1) e^{\int_0^t \left[-\frac{1}{2} \left(\int_{T_1}^{T_2} \sigma(s, u) du \right)^2 \right] ds - \int_0^t \left[\int_{T_1}^{T_2} \sigma(s, u) du \right] dB_s}$$

Παρατήρηση 6.24.

Αν η ΣΔΕ (6.42) επιλύεται σε κλειστή μορφή, τότε η αναγκαία τιμή της $r(t)$ στον τύπο (6.44) θα δίνεται από τον ορισμό (6.27):

$$r(t) := f(t, t)$$

Κάτι τέτοιο όμως είναι εξαιρετικά σπάνιο και γι' αυτό η συνήθης πρακτική είναι αντιμετώπιση της (6.42) με (στοχαστική) προσομοίωση (βλ. για παράδειγμα τον Αλγ. Β.4, σελ. 144).

Ωστόσο, στα μοντέλα που θεωρούμε στην μετέπειτα §6.5 παραθέτουμε αναλυτική λύση στην τιμή του ομολόγου και στην Καμπύλη των Αποδόσεων.

6.4 Μοντέλα για το spot rate

Όπως αναφέραμε στο Πρόσχημα 6.22 ένα μοντέλο για τη τιμή ενός T -ομολόγου μπορεί να αναπτυχθεί μέσω ενός μοντέλου για τα (στιγμιαία) βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Επιπρόσθετα, μέσω της (6.20) δύναται να υπολογιστεί και η Καμπύλη των Αποδόσεων (Term Structure of Interest Rates ή και Yield Curve). Τα μοντέλα αυτά ορίζονται υπό το “πραγματικό” μέτρο πιθανότητας P , και το $r(t)$ θεωρείται ότι ακολουθεί μια ΣΔΕ της μορφής (6.41)

$$dr(t) = \kappa(r(t))dt + \sigma(r(t))dB_t \quad (6.45)$$

Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι η τιμή $P(t, T)$ του T -ομολόγου ικανοποιεί την (6.9)

$$P(t, T) = E_Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Παρατηρώντας την τελευταία σχέση, βλέπουμε ότι χρειάζεται τον υπολογισμό της σ.α. $r(\cdot) (\equiv r(\cdot, T))$ υπολογισμένη υπό το P , ενώ η ζητούμενη μέση τιμή είναι ως προς το κινδυνουδέτερο μέτρο πιθανότητας Q ! Συνεπώς, χρειάζεται η ΣΔΕ που ικανοποιεί η $r(\cdot)$ υπό το Q .

Μια πρώτη προσέγγιση θα ήταν να εκφράσουμε τη προηγούμενη μέση τιμή ως προς το P (και έτσι να χρησιμοποιήσουμε απλά την (6.45)) ως εξής⁹

$$E_Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = E_P \left[e^{-\int_t^T r(s)ds + \int_t^T q^Q(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_t^T (q^Q(s))^2 ds} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

αλλά μια τέτοια μέση τιμή μοιάζει να είναι ακόμα δυσκολότερο να υπολογιστεί, ακόμα και στις απλές περιπτώσεις.

Μια διαφορετική προσέγγιση θα ήταν να μεταβούμε από το P προς το IMM Q χρησι-

⁹Χρησιμοποιούμε απλά τον ορισμό της $Z^Q(\cdot)$ της σελ. 114.

μποιώντας την (6.17) στη διαφορική της μορφή

$$dB_t^Q = dB_t^P - q^Q(t) dt$$

Συνεπώς, υπό το Q η (6.45) γίνεται

$$\begin{aligned} dr(t) &= [\kappa(r(t)) + \sigma(r(t)) q^Q(t)] dt + \sigma(r(t)) dB_t^Q \\ &= m(r(t)) dt + \sigma(r(t)) dB_t^Q \end{aligned} \quad (6.46)$$

Το κλειδί για τη συνέχεια είναι η παρατήρηση ότι αν $r(\cdot)$ είναι η λύση της (6.46), τότε κατά το [Θεώρημα A.4](#) θα ικανοποιεί (υπό το Q) την Ιδιότητα Markov (βλ. [Παράρτημα A](#)). Δηλαδή μπορούμε να “ξεκινήσουμε” την $r(\cdot)$ σε ένα σημείο x_T , που εξαρτάται από την ημερομηνία λήξης T , και το αποτέλεσμα να είναι ανεξάρτητο της “ιστορίας” της ανέλιξης μέχρι τη στιγμή t (για οποιοδήποτε t). Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$E_Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = E_Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid r(t) = x_T \right] \quad (6.47)$$

Κατά την Θεωρία του [Κεφ. 3](#), το δεύτερο μέλος (6.47) δεν είναι άλλο κατά την παρατήρηση της σελ. 66 από μια συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$u(x, t) = E_Q \left[f(x_T) \exp \left(- \int_t^T r(X_s^{t,x}, s) ds \right) \right] \quad (6.48)$$

όπου $f(x_T) \equiv 1$ και $\{X_s^{t,x}\}_{s \in [0, T]}$, όπως στο [Θεώρημα 3.29](#), σελ. 64. Οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος αυτού ικανοποιούνται και σταθεροποιώντας το χρόνο λήξης, T^{10} , η συνάρτηση της u θα είναι λύση μιας γενικής Εξίσωσης τύπου Black-Scholes της μορφής:

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(x) u_{xx}(x, t) + m(x) u_x(x, t) + r(x) u(x, t) \quad (6.49)$$

με τη συνάρτηση u να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$u(x, T) = f(x_T) \equiv 1 \quad (6.50)$$

Λύνοντας την ΜΔΕ (6.49), λόγω της (6.9) η τιμή, $P(t, T)$, ενός T -ομολόγου θα δίνεται από την

$$P(t, T) = u(r(t), t)$$

Συνεπώς, δοθέντος μιας εξίσωσης (μοντέλου) για τα επιτόκια της μορφής (6.45) έχουμε την τιμή ενός T -ομολόγου καθώς και την Καμπύλη των Αποδόσεων ως

¹⁰ Παρατηρούμε ότι με αυτόν τον τρόπο η r γίνεται πλέον μιας μεταβλητής. Τότε το [Θεώρημα 3.29](#) ισχύει ανάλογα (βλ. [Παρατήρηση A.7](#)).

$$\begin{aligned}
 R(t; T) &= -\frac{1}{T-t} [\ln P(t, T)] \\
 &= -\frac{1}{T-t} [\ln u(r(t), t)]
 \end{aligned}
 \tag{6.51}$$

Σε περιπτώσεις που το σχήμα επίλυσης αυτό και πάλι δεν επαρκεί γιατί η ΜΔΕ (6.49) επιλύεται δύσκολα (ακόμη και με Αριθμητική Ανάλυση), η Feynman-Kač σύνδεση Ανάλυσης και Θεωρίας Πιθανοτήτων μας δίνει τη λύση της Στοχαστικής Προσομοίωσης. Προσομοιώνουμε, δηλαδή, τις λύσεις ενός μοντέλου για τα επιτόκια της μορφής (6.45) και τρέχοντας μια Μέθοδο Monte Carlo προσεγγίζουμε τη μέση τιμή (6.47). Ως συνήθως, η συνολική ακρίβεια αυτών των προσομοιώσεων μπορεί εύκολα να αμφισβητηθεί, αλλά στη περίπτωση που τα βήματα της διακριτοποίησης είναι αρκετά μικρά, η Feynman-Kač Θεωρία μας εξασφαλίζει ότι οι προσομοιώσεις θα είναι έγκυρες. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα Β, όπου παραθέτουμε ένα ψευδοκώδικα τιμολόγησης ομολόγων με τη μορφή του Αλγ. Β.6. Τέλος, σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις μπορούμε με μεθόδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων να τιμολογήσουμε ομόλογα υπολογίζοντας (θεωρητικά) την τιμή της (6.47) (βλ. §6.5)· κάτι τέτοιο, όμως, είναι η εξαίρεση του κανόνα.

Στον Πίνακα 6.1 της σελ. 136 παρατίθενται μερικά από τα διασημότερα στοχαστικά μοντέλα για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο από το απλούστερο στο συνθετότερο, μαζί με τις σχετικές τους ιδιότητες από το υπέροχο βιβλίο των Brigo και Mercurio [9], αλλά και από άρθρα της Βιβλιογραφίας (ακολουθούν). Οι συμβολισμοί M , V , D , CIR , HL , EV , HW , BK , MM , $CIR++$ και EEV σημαίνουν αντίστοιχα το μοντέλο του Merton, το μοντέλο του Vasiček [92], το μοντέλο του Dothan [19], το μοντέλο των Cox, Ingersoll και Ross [14], το μοντέλο των Ho και Lee, το Εκθετικό Vasiček μοντέλο, το μοντέλο των Hull και White [38], το μοντέλο των Black και Karasinski [5], το μοντέλο των Mercurio και Moraleda [67], το CIR++ μοντέλο και το Επεκτεταμένο Εκθετικό Vasiček μοντέλο. Επίσης, με N , Y συμβολίζουμε το “όχι” και το “ναι” αντίστοιχα, και το N^* ερμηνεύεται ως ότι η πιθανότητα τα επιτόκια να είναι αρνητικά μπορεί να είναι μηδενική κάτω από κατάλληλες συνθήκες στη ντετερμινιστική συνάρτηση $f(t)$. Ακόμη, τα \mathcal{N} , LN , $NC\chi^2$, $SNC\chi^2$, $SN\mathcal{N}$ συμβολίζουν αντίστοιχα κανονική, λογαριθμοκανονική, μη κεντρική χ^2 , μετατοπισμένη, μη κεντρική χ^2 , και μετατοπισμένη λογαριθμοκανονική κατανομή. Τέλος, με $A.B.P.$ συμβολίζουμε την ύπαρξη αναλυτικής λύσης για την τιμή του ομολόγου, και με $A.O.P.$ συμβολίζουμε την ύπαρξη αναλυτικής λύσης για την τιμή δικαιωμάτων (options) επί των ομολόγων.

Όλα τα προαναφερθέντα μοντέλα είναι υποψήφια για προσομοίωση, αλλά πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί, γιατί το καθένα έχει διαφορετικές ιδιότητες. Επιπρόσθετα, για τα μοντέλα που στην 5η στήλη του Πίνακα 6.1 έχουν την τιμή “Υ” μπορούμε να επαληθεύσουμε την προσομοιωμένη με την αναλυτική τους λύση.

Τα μοντέλα αυτά είναι της γενικής μορφής (6.45)

$$dr(t) = \kappa(r(t)) dt + \sigma(r(t)) dB_t \tag{6.52}$$

αλλά οι συναρτήσεις $\kappa(r(\cdot))$ και $\sigma(r(\cdot))$ εμπεριέχουν παραμέτρους που πρέπει να υπολογιστούν πριν το στάδιο της επίλυσης. Επιλέγονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντανακλούν όσο περισσότερο μπορούν τις τιμές των ομολόγων ή των παραγώγων τους, που έχουν παρατηρηθεί στην αγορά. Η διαδικασία της προσαρμογής αυτής καλείται *calibration*, και δε θα την αναλύσουμε.

Στη συνέχεια, θα επιχειρήσουμε να τιμολογήσουμε ομόλογα υπολογίζοντας τη μέση τιμή (6.47), αφού πρώτα έχουμε υπολογίσει μια αναλυτική λύση για το επιτόκιο, r_t , με μεθόδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

6.5 Υπολογισμός της Καμπύλης των Αποδόσεων ομολόγων

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε την αναλυτική μορφή της Καμπύλης Αποδόσεων ομολόγων υπό το μοντέλο του Vasiček μέσω των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων και έπειτα υπό το μοντέλο των Ho και Lee, μέσω μοντέλου των επιτοκίων πρόσω. Χρήσιμες συμπληρωματικές βιβλιογραφικές αναφορές είναι τα βιβλία [9] και [4] και τα άρθρα [5], [14], [19], [38] και οι σημειώσεις [7].

6.5-1 Το μοντέλο του Vasiček

Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο στο μοντέλο του Vasiček από τον Πίνακα 6.1 ικανοποιεί την ακόλουθη ΣΔΕ:

$$dr_t = [a(b - r_t)]dt + \sigma dB_t \quad r_0 = r > 0 \quad (6.53)$$

Η συγκεκριμένη ΣΔΕ είναι υπό το (αντικειμενικό) μέτρο Π . Θα αλλάξουμε το μέτρο αυτό σε ένα κινδυνουδέτερο μέτρο, Q , για ένα εξαιρετικά κρίσιμο λόγο. Μόνο υπό μια κινδυνουδέτερη πιθανότητα είναι δυνατή η εξάλειψη κάθε ευκαιρίας κερδοσκοπίας κατά την τιμολόγηση ομολόγων (§6.4), και επίσης γνωρίζουμε ότι οι τιμές των ομολόγων της (6.9) είναι *martingale* μόνο υπό μια τέτοια πιθανότητα που ικανοποιεί τη Συνθήκη Μη Κερδοσκοπίας της §6.2.

Έτσι, από τον τύπο (6.18) και την Παρατήρηση 6.9, η εξίσωση (6.53) γίνεται

$$dr_t = [a(b^* - r_t)]dt + \sigma dB_t^Q,$$

όπου θέσαμε $q^Q(t) := q \in \mathbb{R}$ και $b^* := b - \frac{q\sigma}{a}$.

Ο κύριος στόχος αυτής της υποενότητας είναι να βρούμε τον τύπο του Vasiček της τιμής ενός ομολόγου, και συνεπώς και της Καμπύλης των Αποδόσεων. Ξεκινάμε από τη συνθήκη τιμολόγησης μη κερδοσκοπίας (6.9) και κάνουμε πράξεις:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= E_Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E_Q \left[e^{-\int_t^T (r(s) + b^* - b^*)ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} P(t, T) &= e^{-\int_t^T b^* ds} E_Q \left[e^{-\int_t^T (r(s) - b^*) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-b^*(T-t)} E_Q \left[e^{-\int_t^T X_s^* ds} \mid \mathcal{F}_t \right], \end{aligned} \quad (6.54)$$

όπου θέσαμε $X_s^* := r_s - b^*$. Από το [Θεώρημα 3.29](#) της Feynman-Kač Θεωρίας και συγκεκριμένα τον τύπο (3.55) της σελ. 65 γνωρίζουμε ότι η σ.α. $\{X_t^*\}$ είναι λύση της ακόλουθης γραμμικής ΣΔΕ:

$$dX_t^* = -aX_t^* dt + \sigma dB_t^Q \quad (6.55)$$

Από τη χρονική ομοιογένεια της (6.55) και την Ιδιότητα Markov της λύσης της, $X_s^{0,x} = xe^{-as} + \sigma e^{-as} \int_0^s e^{as} dB_t^Q$ (βλ. και [Παράρτημα Α](#)) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} E_Q \left[e^{-\int_t^T X_s^* ds} \mid \mathcal{F}_t \right] &= E_Q \left[e^{-\int_0^{T-t} X_s^{*,x} ds} \mid x = X_t^* \right] \\ &= F(T-t, x) \Big|_{x=X_t^*} \\ &= F(T-t, X_t^*) \\ &= F(T-t, r_t - b^*), \end{aligned}$$

όπου F είναι μια συνάρτηση με τύπο $F(\vartheta, x) = E_Q \left[e^{-\int_0^\vartheta X_s^x ds} \right]$. Μπορεί ναδειχθεί από τη θεωρία των Στοχαστικών Ανελιξέων ότι η σ.α. $Y_t = \int_0^\vartheta X_s^x ds \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ [56]. Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned} F(\vartheta, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} dF_Y(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2y\sigma^2 - y^2 + 2\mu y - \mu^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2 + (2\mu - 2\sigma^2)y + \mu^2}{2\sigma^2}\right) dy \end{aligned}$$

Προσθαφαιρούμε κατάλληλα και παίρνουμε

$$\begin{aligned} F(\vartheta, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2 + 2(\mu - \sigma^2)y + \mu^2 + (\mu - \sigma^2)^2 - (\mu - \sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y - (\mu - \sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 + \sigma^4 - \mu^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - (\mu - \sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \end{aligned}$$

αφού η $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-(\mu-\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right)$ είναι σ.π.π. της $\mathcal{N}(\mu - \sigma^2, \sigma^2)$.

Επομένως

$$\begin{aligned} E_Q \left[e^{-\int_0^\vartheta X_s^x ds} \right] &= E_Q \left[e^{-Y} \right] \\ &= e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^{-E_Q[Y] + \frac{1}{2} V_Q[Y]} \\ &= e^{-E_Q \left[\int_0^\vartheta X_s^x ds \right] + \frac{1}{2} V_Q \left[\int_0^\vartheta X_s^x ds \right]} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Για τη μέση τιμή έχουμε

$$\begin{aligned} E_Q \left[\int_0^\vartheta X_s^x ds \right] &= \int_0^\vartheta E_Q [X_s^x] ds \\ &= \int_0^\vartheta x e^{-as} ds \\ &= \frac{x}{a} (1 - e^{-a\vartheta}) \end{aligned} \quad (6.57)$$

και για τη διασπορά

$$\begin{aligned} V_Q \left[\int_0^\vartheta X_s^x ds \right] &= Cov \left(\int_0^\vartheta X_s^x ds, \int_0^\vartheta X_u^x du \right) \\ &= E_Q \left[\int_0^\vartheta X_s^x ds \int_0^\vartheta X_u^x du \right] - \int_0^\vartheta E_Q [X_s^x] ds \int_0^\vartheta E_Q [X_u^x] du \\ &= \int_0^\vartheta \int_0^\vartheta (E_Q [X_s^x X_u^x] - E_Q [X_s^x] E_Q [X_u^x]) ds du \\ &= \int_0^\vartheta \int_0^\vartheta Cov (X_s^x, X_u^x) ds du \end{aligned} \quad (6.58)$$

Όμως, η συνδιακύμανση ισούται με

$$\begin{aligned} Cov (X_s^x, X_u^x) &= E_Q [(X_s^x - E_Q [X_s^x]) (X_u^x - E_Q [X_u^x])] \\ &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} E_Q \left[\int_0^s e^{aw} dB_w^Q \int_0^u e^{a\tau} dB_\tau^Q \right] \\ &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} \int_0^{s \wedge u} e^{2ar} dr \\ &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} \frac{e^{2a(s \wedge u)} - 1}{2a} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Λόγω συμμετρίας της $Cov(\cdot, \cdot)$ ως προς την ευθεία $u = s$ στην ορθογώνια περιοχή $[0, \vartheta] \times [0, \vartheta]$ αρκεί να δουλέψουμε στην περιοχή $\{(s, u) : 0 < u < s\}$. Συνδυάζοντας τις (6.59) και (6.58) έχουμε

$$\begin{aligned}
V_Q \left[\int_0^\vartheta X_s^x ds \right] &= 2 \int_0^\vartheta \int_0^s \text{Cov}(X_s^x, X_u^x) du ds \\
&= 2 \int_0^\vartheta \int_0^s \sigma^2 e^{-a(s+u)} \frac{e^{2au} - 1}{2a} ds du
\end{aligned}$$

και κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε ότι

$$V_Q \left[\int_0^\vartheta X_s^x ds \right] = \frac{\vartheta \sigma^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-a\vartheta}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a\vartheta})^2 \quad (6.60)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.57) και (6.60) στην (6.56) βρίσκουμε την $F(\vartheta, x)$ σε κλειστή μορφή. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
F(\vartheta, x) &:= E_Q \left[e^{-\int_0^\vartheta X_s^x ds} \right] \\
&= \exp \left(\frac{x}{a} (1 - e^{-a\vartheta}) + \frac{\vartheta \sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a\vartheta}) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a\vartheta})^2 \right) \quad (6.61)
\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό της τιμής του ομολόγου υπό το μοντέλο του Vasiček. Η (6.54) λόγω της (6.61) γίνεται

$$\begin{aligned}
P(t, T) &= e^{-b^*(T-t)} e^{\frac{x}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{(T-t)\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2} \\
&= e^{-(T-t)R(t; T)}, \quad (6.62)
\end{aligned}$$

όπου κατά τους συμβολισμούς της (6.51) $R(t; T)$ είναι η απόδοση του ομολόγου στην περίοδο $[t, T]$ και μπορεί να θεωρηθεί ως το μέσο επιτόκιο για την χρονική περίοδο $[t, T]$. Η απόδοση του ομολόγου μπορεί να υπολογιστεί πολύ απλά αντιστρέφοντας τον προηγούμενο τύπο:

$$\begin{aligned}
R(t; T) &= \frac{b^*(T-t) - \frac{x}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) - \frac{(T-t)\sigma^2}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2}{T-t} \\
&= b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{1}{a(T-t)} \left[(1 - e^{-a(T-t)}) \left(b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t \right) - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right] \\
&= R_\infty - \frac{1}{a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}) \left[R_\infty - r_t - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-a(T-t)}) \right],
\end{aligned}$$

όπου

$$R_\infty = \lim_{T-t \rightarrow \infty} R(T-t; T) = b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

και η $R(t; T)$ υπολογίζεται για $x = X_t^* (:= r_t - b^*)$.

Επομένως, υπό το μοντέλο του Vasiček η τιμή και η απόδοση ενός ομολόγου δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$P(t, T) = e^{-b^*(T-t) + \frac{x}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{(T-t)\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2} \quad (6.63)$$

και

$$R(t; T) = R_\infty - \frac{1}{a(T-t)} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \left[R_\infty - r_t - \frac{\sigma^2}{4a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)\right] \quad (6.64)$$

Παρατήρηση 6.25.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε πως κατά την απόδειξη των (6.63) και (6.64) στηριχθήκαμε ουσιωδώς στη Feynman-Kač Θεωρία, αλλά με έναν τρόπο αρκετά έμμεσο. Βασιστήκαμε στην ανάλυση των προηγούμενων ενοτήτων τιμολόγησης μέσω ύπαρξης του IMM και χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα Markov. Ο Vasiček [92] συμπέρανε τον προηγούμενο, πολύπλοκο τύπο (6.63) επιλύοντας τη ΜΔΕ 6.49! Οι υπολογισμοί του όμως δεν ήταν το ίδιο εύκολοι με τους προηγούμενους.

Ας παρατηρήσουμε λίγο ακόμη τις αναλυτικές λύσεις (6.63) για τα δυναμικά (6.53). Τα τελευταία είναι εύκολα επιλύσιμα ως

$$r_t = b - e^{-at} (b - r_0) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s \quad (6.65)$$

ή υπό το κινδυνουδέτερο μέτρο, Q , ισχύει

$$r_t = b^* - e^{-at} (b^* - r_0) + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dB_s^Q \quad (6.66)$$

Στη συνέχεια παρατηρήστε δύο πράγματα. Πρώτον, η μακροχρόνια μέση τιμή (υπό το Q) είναι b^* ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r_t] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[b^* - e^{-at} (b^* - r_0)] = b^*$$

Δεύτερον, εξ ορισμού της X_t^* ($:= r_t - b^*$), η ανέλιξη $\{X_t^*\}$ επαναφέρεται στο μηδέν, $\lim_{t \rightarrow \infty} E[X_t^*] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[r_t] - b^* = 0$. Συνεπώς, η σ.α. $\{r_t\}$ επαναφέρεται στη μέση τιμή της: αν η r_t είναι πάνω από τη μέση τιμή, τότε ο ντετερμινιστικός όρος στην (6.66) είναι αρνητικός, ωθώντας τη συνάρτηση των επιτοκίων να μειώνεται· αν η r_t είναι κάτω από τη μέση της τιμή, τότε ο ντετερμινιστικός όρος στην (6.66) είναι θετικός, ωθώντας τα επιτόκια, r_t , να αυξάνονται. Η επαναφορά στη μέση τιμή (mean reversion property) είναι μια επιθυμητή ιδιότητα κατά τη μοντελοποίηση των επιτοκίων.

Επιπρόσθετα, μόλις η απεικόνιση $(t, +\infty) \ni T \mapsto P(t, T) \in [0, +\infty)$ είναι γνωστή, γνωρίζουμε ολόκληρη την Καμπύλη των Αποδόσεων τη στιγμή t από τον τύπο (6.64). Αυτό σημαίνει ότι, αν $t = 0$ είναι ο αρχικός χρόνος, η αρχική Καμπύλη των Αποδόσεων είναι η έξοδος (output) του μοντέλου, εξαρτώμενη από τους παραμέτρους a, b, σ στα δυναμικά (6.53) (και την αρχική συνθήκη r_0).

Παρά όλα αυτά το αρχικό μοντέλο του Vasičekέχει διάφορα μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, τα επιτόκια μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές με θετική πιθανότητα, όπως αποτυπώνεται στον Πίνακα 6.1, σελ. 136. Για την επίλυση τέτοιων παθολογικών περιπτώσεων

προτάθηκε στη συνέχεια το μοντέλο των Cox, Ingersoll και Ross [14]

$$dr_t = [\alpha (b - r_t)] dt + [\sigma \sqrt{r_t}] dB_t, \quad r_0 = r > 0 \quad (6.67)$$

Το μοντέλο αυτό οδηγεί σε θετικά επιτόκια, και έχει κλειστή μορφή. Είναι όμως πιο δύσκολο να το χειριστεί κανείς και να το προσαρμόσει στα δεδομένα της αγοράς, καθώς σε αντίθεση με τη λογαριθμοκανονική κατανομή των επιτοκίων του Vasicek, σε ένα τέτοιο CIR μοντέλο τα επιτόκια ακολουθούν μη-κεντρική χ^2 κατανομή. Στην αγορά χρησιμοποιούνται αρκετές παραλλαγές των μοντέλων του Πίνακα 6.1, ανάλογα με τις εκάστοτε ανάγκες.

Παρατήρηση 6.26.

Στην αγορά έχει παρατηρηθεί ότι καθώς περνά ο χρόνος και ένα ομόλογο λήγει (δηλαδή καθώς το $t \rightarrow T$), η μεταβλητότητα των τιμών του φθίνει, δηλαδή ο συντελεστής του στοχαστικού όρου ενός μοντέλου επιτοκίων της γενικής μορφής (6.52) πρέπει να είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Συνεπώς, ένας από τους λόγους που το μοντέλο του Vasicek δεν έχει πρακτική σημασία είναι η υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας, σ , ήταν όμως μια πρώτη προσέγγιση. Επανερχόμενοι στον Πίνακα 6.1 βλέπουμε ότι τα μοντέλα που είναι δυνητικά εφαρμόσιμα είναι αρκετά πολυπλοκότερα.

6.5-2 Το μοντέλο των Ho και Lee

Στην υποενότητα αυτή αναζητούμε την αναλυτική λύση του Ho-Lee μοντέλου

$$dr_t = \mu(t) dt + \sigma dB_t \quad r_0 = r > 0 \quad (6.68)$$

Θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική απόδειξη από ότι στην §6.5-1 κάναμε για το μοντέλο του Vasicek. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 6.22 της σελ. 123 για τα επιτόκια πρόσω. Από την (6.68) υποθέτουμε και πάλι σταθερή μεταβλητότητα: $\sigma(t, T) := \sigma$ και $\int_t^T \sigma du = \sigma(T - t)$. Συνεπώς, η ΣΔΕ για τα επιτόκια πρόσω, (6.42), γίνεται

$$df(t, T) = \sigma^2 (T - t) dt + \sigma dB_t^Q$$

Δηλαδή

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right) + \sigma B_t^Q \quad (6.69)$$

και επομένως

$$r_t := f(t, t) = f(0, t) + \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \sigma B_t^Q \quad (6.70)$$

Απαλοίφοντας την κίνηση Brown στην (6.69) μέσω της (6.70): $\sigma B_t^Q = r_t - f(0, t) - \sigma^2 \frac{t^2}{2}$ παίρνουμε

$$f(t, T) = r_t + \sigma^2 t (T - t) + f(0, T) - f(0, t) \quad (6.71)$$

Η σχέση (6.71) δείχνει [56] ότι τα επιτόκια πρόσω για δύο διαφορετικές ημερομηνίες λήξης T_1, T_2 διαφέρουν κατά ένα ντετερμινιστικό όρο

$$f(t, T_1) - f(t, T_2) = f(0, T_1) - f(0, T_2) + \sigma^2 t (T_1 - T_2)$$

και συνεπώς είναι τέλεια συσχετισμένα. Συνεπώς, τα δύο είδη επιτοκίων r_t και $f(t, T)$ θα είναι επίσης *τέλεια συσχετισμένα*. Το γεγονός αυτό μοιάζει να μη συμφωνεί με ό,τι παρατηρείται στην αγορά και συνιστά, συνεπώς, ένα “έμμεσο” μειονέκτημα του μοντέλου 6.68.

Η τιμή του ομολόγου σε όρους επιτοκίων πρόσω (6.26) είναι

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right) \\ &= \exp \left(- \int_t^T f(0, u) du - \sigma^2 \int_t^T t \left(u - \frac{t}{2} \right) du - \sigma B_t^Q(T-t) \right) \end{aligned}$$

Όμως, από τον ορισμό των επιτοκίων πρόσω (6.23) έχουμε $-\int_t^T f(0, u) du = \ln P(0, T) - \ln P(0, t)$ και καταλήγουμε

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(- \frac{\sigma^2 t T (T-t)}{2} - \sigma B_t^Q(T-t) \right) \quad (6.72)$$

Απαλοίφοντας και πάλι την κ.Β., βρίσκουμε την εξίσωση της τιμής του ομολόγου συναρτήσει του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου, r_t :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(- (T-t) r_t - \frac{\sigma^2 t (T-t)^2}{2} + (T-t) f(0, t) \right) \quad (6.73)$$

Από την (6.73) εύκολα βρίσκουμε την Καμπύλη των Αποδόσεων, αφού εξ ορισμού

$$R(t; T) = - \frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$$

Παρατήρηση 6.27.

Οι αναλυτικές λύσεις (6.69) και (6.72) μπορούν εύκολα να προσομοιωθούν και τα ποιοτικά τους χαρακτηριστικά να ελεγχθούν γραφικά (βλ. [Παράρτημα Β](#), σελ. 143).

Κατά το κλείσιμο αυτού του κεφαλαίου κρίνεται σκόπιμο να κάνουμε κάποια γενικά σχόλια για τη μοντελοποίηση.

6.6 Γενικά σχόλια για τη μοντελοποίηση ομολόγων

Οι χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση/ οργανισμός είναι *αμφίσημοι*: “κερδίζω”, ή “χάνω”. Εν τούτοις, οι αποζημιώσεις για τον κίνδυνο που καλούνται

να φέρουν οι επενδυτές είναι μόνο στον θετικό άξονα. Όμοια, οι αποζημιώσεις που καλείται να πληρώσει ένα Ασφαλιστικό Ταμείο είναι μόνο στον θετικό άξονα.

Επιπρόσθετα, οι κίνδυνοι αυτοί θα μπορούσαν να χωριστούν, γενικά, στις κατηγορίες του Credit Risk, Market Risk και του Operational Risk. Το λεγόμενο *Πρόβλημα του Enterprise Risk Management* (ERM) απαιτεί να μην υπολογίζεται κάθε μία συνιστώσα κινδύνου μεμονωμένα (ανεξάρτητα με τις άλλες), αλλά να υπολογίζεται και ο βαθμός εξάρτησης (συσχέτισής) τους.

Συγκεκριμένα, κατά την επιλογή ενός μοντέλου, πρέπει κανείς να θέτει τα ακόλουθα ερωτήματα [9]:

- Μήπως τα δυναμικά του συνεπάγονται με θετική πιθανότητα αρνητικά επιτόκια;
- Τι κατανομή συνεπάγονται τα δυναμικά για το επιτόκιο (ή αποζημίωση); Έχει, για παράδειγμα, παχιές ουρές; Είναι συμμετρική; Πόσες κορυφές έχει;
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί με εξαρτημένες κατανομές (τα λεγόμενα multifactor models);
- Έχουν αναλυτική λύση οι εξισώσεις της τιμής των ομολόγων;
- Έχουν αναλυτική λύση οι εξισώσεις των τιμών των παραγώγων επί των ομολόγων;
- Έχει το μοντέλο την ιδιότητα της επαναφοράς στη μέση τιμή, ενώ, αντίστοιχα, η διασπορά του δεν απειρίζεται;
- Τι είδους δομές για την μεταβλητότητα συνεπάγεται το μοντέλο;
- Πόσο κατάλληλο είναι το μοντέλο για μια Monte Carlo Προσομοίωση;
- Τα συγκεκριμένα δυναμικά του μοντέλου επιτρέπουν την εκτίμηση με ιστορικά δεδομένα των παραμέτρων του;
- ...

Αυτά τα ερωτήματα είναι κεντρικής σημασίας για την κατανόηση των θεωρητικών και πρακτικών αποτελεσμάτων κάθε μοντέλου για τα (στοχαστικά) επιτόκια. Ωστόσο, στο κεφάλαιο αυτό, έγινε προσπάθεια να απαντηθούν αρκετά από τα προηγούμενα ερωτήματα μέσα από την ανάλυση κάποιων ειδικών κλάσεων μοντέλων. Προφανώς, η πληρότητα τους εξαρτάται κατά πολύ από τη σημασία και πρακτική χρησιμότητα του εκάστοτε μοντέλου.

Ένα κλασικό πρόβλημα με τα προηγούμενα μοντέλα είναι η *ενδογενής φύση* τους. Εάν έχουμε την αρχική καμπύλη των τιμών των ομολόγων χωρίς κουπόνια $T \mapsto P^{\text{Market}}(0, T)$ από την αγορά, επιθυμούμε το μοντέλο μας να ενσωματώνει αυτήν την καμπύλη· χρειαζόμαστε να εξαναγκάσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου να παράγουν μια μοντελοποιημένη καμπύλη των τιμών, όσο πιο κοντά στην παρατηρούμενη καμπύλη της αγοράς. Για παράδειγμα,

στην προαναφερθείσα περίπτωση του μοντέλου του Vasiček, χρειαζόμαστε με κάποια διαδικασία βελτιστοποίησης να επιλέξουμε κατάλληλα τις τιμές των a , b και σ , έτσι ώστε η αρχική μοντελοποιημένη καμπύλη $T \mapsto P^{Model}(0, T; a, b, \sigma, r_0)$ να συμπίπτει ει δυνατόν καλύτερα με την παρατηρούμενη $T \mapsto P^{Market}(0, T)$ στην αγορά.

Επιπρόσθετα, παρ' όλο που οι τιμές $P^{Market}(0, T)$ παρατηρούνται για την ακρίβεια μόνο σε πεπερασμένου πλήθους ημερομηνίες λήξεις T_i : $P^{Market}(0, T_i)$, τρεις παράμετροι δεν είναι αρκετοί για να αναπαράγουν ικανοποιητικά μια δοθείσα Καμπύλη Αποδόσεων. Συγκεκριμένα, κάποιες ειδικές μορφές καμπυλών δεν μπορούν ποτέ να παρατηρηθούν από το μοντέλο του Vasiček, ό,τι τιμές κι αν επιλέξουμε για τους παραμέτρους των δυναμικών.

Πρέπει να γίνει σαφές ότι τέτοια μοντέλα είναι “καταδικασμένα”: δεν μπορούν να αναπαράγουν ικανοποιητικά την αρχική Καμπύλη Τιμών, και, συνεπώς, η όποια συζήτηση για τις δομές της μεταβλητότητας και για την πραγματικότητα είναι μάταιη.

Για να βελτιωθεί μια τέτοια κατάσταση, θεωρούνται συνήθως *εξωγενή μοντέλα*, δηλαδή μοντέλα στα οποία η τωρινή Καμπύλη Τιμών δίνεται εξωγενώς. Τέτοια μοντέλα δημιουργούνται τροποποιώντας κατάλληλα τα προηγούμενα ενδογενή μοντέλα. Η βασική μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι ότι ο μετασχηματισμός από ένα ενδογενές σε ένα εξωγενές μοντέλο είναι η εισαγωγή “χρονικά μεταβαλλόμενων” παραμέτρων. Ουσιαστικά, για την περίπτωση του μοντέλου του Vasiček, κάνει κανείς το εξής:

$$dr_t = [a(b - r_t)]dt + \sigma dB_t \rightsquigarrow dr_t = [a(b(t) - r_t)]dt + \sigma dB_t$$

Έτσι, η ευελιξία της χρονικά εξαρτώμενης συνάρτησης $b(t)$ μας επιτρέπει να την ορίσουμε σε όρους της αγοράς με τέτοιο τρόπο ώστε το μοντέλο να αναπαράγει ακριβώς την Καμπύλη Τιμών τη στιγμή $t = 0$. Για παράδειγμα, τα EV, HW, BK και CIR++ μοντέλα του Πίνακα 6.1 είναι εξωγενή.

Μοντέλο	Δυναμικά	$P[r < 0] > 0$	$r \sim$	A.B.P.	A.O.P.
M	$dr_t = \mu dt + \sigma dB_t$	N	\mathcal{N}	Y	Y
V	$dr_t = [a(b - r_t)]dt + \sigma dB_t$	Y	\mathcal{N}	Y	Y
D	$dr_t = [\mu r_t]dt + \sigma r_t dB_t$	N	$L\mathcal{N}$	Y	N
CIR	$dr_t = [\alpha(b - r_t)]dt + [\sigma\sqrt{r_t}]dB_t$	N*	$NC\chi^2$	Y	Y
HL	$dr_t = \mu(t)dt + \sigma dB_t$	N	\mathcal{N}	Y	Y
EV	$dr_t = [r_t(\alpha - b \ln r_t)]dt + [\sigma r_t]dB_t$	N*	$L\mathcal{N}$	N	N
HW	$dr_t = [\alpha(b(t) - r_t)]dt + \sigma dB_t$	Y	\mathcal{N}	Y	Y
BK	$dr_t = [r_t(\alpha(t) - b \ln r_t)]dt + [\sigma r_t]dB_t$	N	$L\mathcal{N}$	N	N
MM	$dr_t = \left[r_t \left(\alpha(t) - \left(\lambda - \frac{\gamma}{1+\gamma t} \right) \ln r_t \right) \right] dt + [\sigma r_t] dB_t$	N	$L\mathcal{N}$	N	N
CIR++	$r_t = x_t + f(t), \quad dx_t = [\alpha(b - x_t)]dt + [\sigma\sqrt{x_t}]dB_t$	N*	$SN\chi^2$	Y	Y
EEV	$r_t = x_t + f(t), \quad dx_t = [x_t(\alpha - b \ln x_t)]dt + [\sigma x_t]dB_t$	N*	$SN\mathcal{N}$	N	N

Πίνακας 6.1 Σύνοψη των στοχαστικών μοντέλων για τα επιτόκια και κάποιων γνωστών ιδιοτήτων τους.

Παράρτημα

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Παράρτημα \mathcal{A}

Η Ιδιότητα Markov των Λύσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτουμε μερικά αποτελέσματα που απορρέουν από την λεγόμενη ιδιότητα Markov των λύσεων μιας Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης (ΣΔΕ). Διαισθητικά, η ιδιότητα αυτή συνοψίζεται στο ότι η μελλοντική συμπεριφορά μιας σ.α. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ μετά τη χρονική στιγμή s , εξαρτάται μόνο από την τιμή X_s και δεν επηρεάζεται από την ιστορία της ανέλιξης πριν από τη στιγμή s . Μοντέλα στοχαστικών ανελίξεων που έχουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται *Μαρκοβιανά μοντέλα*. Η ιδιότητα αυτή είναι εξαιρετικά κρίσιμη και μας επιτρέπει, για παράδειγμα, να δείξουμε ότι αν η σ.α. των επιτοκίων είναι Μαρκοβιανή, τότε η μελλοντική τιμή των επιτοκίων εξαρτάται μόνο από την τιμή που έχουν τα επιτόκια την παρούσα χρονική στιγμή και όχι από το πως αυτά ήταν στο παρελθόν. Μια τέτοια ιδιότητα είναι επιθυμητή στο modelling, και τα Μαρκοβιανά μοντέλα αναπτύσσονται για την τιμολόγηση options, γιατί υποστηρίζονται από πλήθος εμπειρικών μελετών. Ωστόσο, η ιδιότητα Markov έρχεται σε αντίθεση με τη λεγόμενη στη γλώσσα των Χρηματοοικονομικών “*technical analysis*”, διαδικασία πρόβλεψης των τιμών ενός προϊόντος, μέσα από την ανάλυση των τιμών του παρελθόντος και αναζητώντας τάσεις (trends).

Εκφράζοντας τα παραπάνω με Μαθηματικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός A.1 (Ιδιότητα Markov).

Μια \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη σ.α. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα Markov, αν για κάθε συνάρτηση Borel, f , και για κάθε s, t με $s \leq t$ έχουμε

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[f(X_t) | X_s] \quad (\text{A.1})$$

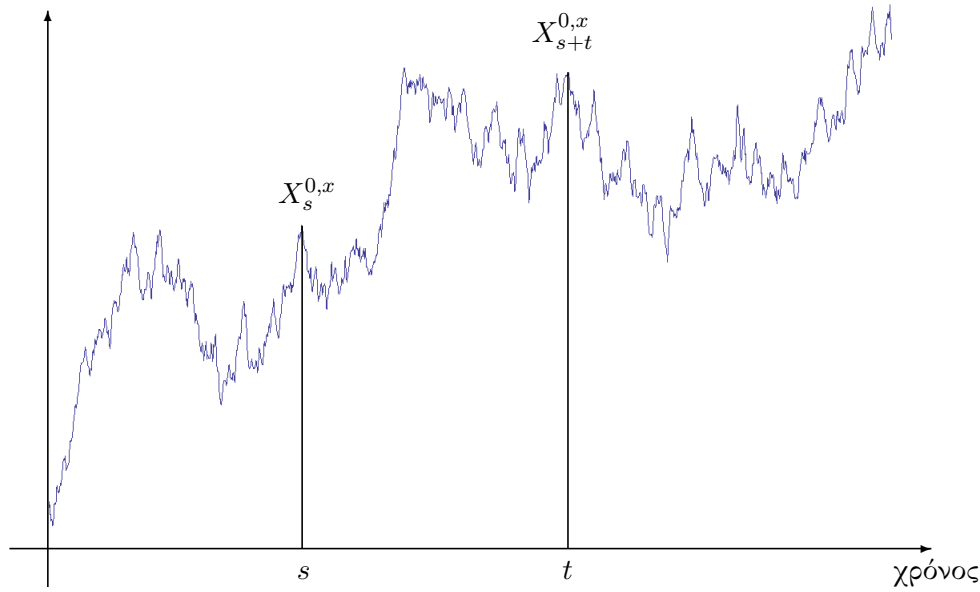
Το πρώτο μέλος της (A.1) είναι μια τ.μ. ως μέση τιμή δεσμευμένη ως προς την “ιστορία” της σ.α. μέχρι τη στιγμή s . Το δεύτερο μέλος είναι μια τ.μ. ως μέση τιμή με τυχαία “αρχική τιμή”. Συνεπώς, η ισότητα ισχύει με την σχεδόν βέβαια έννοια. Επιπρόσθετα, θέτοντας $f := 1_{(\alpha, b)}$ η (A.1) μπορεί να γραφτεί ως

$$P[\alpha < X_t < b | \mathcal{F}_s] = P[\alpha < X_t < b | X_s] \quad (\text{A.2})$$

Κ. Στούρας, Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω Path Integrals. *Efarmog'h se mont'ela epitok'iwn*.

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010



Εικ. Α.1 Η ιδιότητα Markov της ανέλιξης $\{X_t^{0,x}\}_{t \geq 0}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ιδιότητα για τις λύσεις της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Είναι διαισθητικά ξεκάθαρο από την (A.2) γιατί οι λύσεις ΣΔΕ θα πρέπει να έχουν την ιδιότητα Markov. Για ένα μικρό $\varepsilon > 0$, δεδομένου ότι $X_s = x$, η τιμή $X_{s+\varepsilon}$ εξαρτάται από τη διαφορά $B_{t+\varepsilon} - B_t$, που ως γνωστόν είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εισάγουμε έναν συμβολισμό που να αναφέρει το πότε και από που ξεκίνησε η σ.α. $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

Συμβολισμός Α.2.

Έστω η σ.α. $\{X_t\}_{t \geq 0}$. Με $\{X_s^{t,x}\}$, $s \geq t$ συμβολίζουμε την προηγούμενη σ.α. που ξεκίνησε τη στιγμή t από το σημείο x . Επιπρόσθετα, για απλοποίηση, με $\{X_s^x\}_{s \geq 0}$ θα συμβολίζουμε την $\{X_s^{0,x}\}_{s \geq 0}$, δηλαδή την σ.α. που ξεκινάει τη στιγμή 0 από το σημείο x (βλ. και Εικόνα Α.1).

Σε ολοκληρωτική μορφή η (A.3) γράφεται:

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s \mu(X_u^{t,x}, u) du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x}, u) dB_u \quad (\text{A.4})$$

Εξ ορισμού, η $\{X_s^{t,x}\}_{s \geq 0}$ ορίζεται για κάθε (t, x) σ.β.. Ωστόσο, υποθέτοντας ότι η (A.3) έχει ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης, είναι δυνατή η κατασκευή μιας σ.α. που εξαρτάται από τα (t, x, s) , και η οποία είναι συνεχής σχεδόν βεβαίως ως προς αυτές τις μεταβλητές και είναι η λύση της εν λόγω εξίσωσης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι δύσκολο να αποδειχθεί

και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [29], Κεφ. 3 για μια απόδειξη και για την πλήρη διατύπωση των όσων ακολουθήσουν.

Λήμμα Α.3.

Αν η (Α.3) έχει ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης, τότε για κάθε $s \geq t$

$$X_s^{0,x} = X_s^{t,X_t^x} \quad P - \sigma.β.$$

Έτσι, η ιδιότητα Markov (Α.1) μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως.

Θεώρημα Α.4 (Ιδιότητα Markov των λύσεων).

Έστω $\{X_t\}_{t \geq 0}$ να είναι η λύση της (Α.3). Τότε αυτή έχει την ιδιότητα Markov ως προς την $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ που παράγει η κίνηση Brown. Επιπρόσθετα, για κάθε Borel συνάρτηση f έχουμε (με την σ.β. έννοια)

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[f(X_t^{s,x})] \quad (\text{Α.5})$$

Παρατήρηση Α.5.

Η ισότητα (Α.5) γράφεται συχνά στη Βιβλιογραφία [56] και ως

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[f(X_t^{s,x})]_{|x=X_s} \quad (\text{Α.6})$$

Διερωτόμαστε τώρα αν το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει και όταν θεωρήσουμε μια συνάρτηση που εξαρτάται από όλη την ανέλιξη μετά τη στιγμή s . Τα επόμενα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα, όταν κάνουμε υπολογισμούς στην τιμολόγηση ομολόγων μέσω ενός στοχαστικού μοντέλου για τα επιτόκια.

Θεώρημα Α.6.

Έστω $\{X_t\}_{t \geq 0}$ να είναι η λύση της (Α.3) και $r: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $T > t$ και f όπως προηγουμένως ισχύει (με την σ.β. έννοια) ότι

$$E \left[f(X_T) \exp \left(- \int_t^T r(X_u, u) du \right) | \mathcal{F}_t \right] = E \left[f(X_T^{t,X_t}) \exp \left(- \int_t^T r(X_u^{t,X_t}, u) du \right) \right]$$

ή κατά την Παρατήρηση Α.5:

$$E \left[f(X_T) \exp \left(- \int_t^T r(X_u, u) du \right) | \mathcal{F}_t \right] = E \left[f(X_T^{t,x}) \exp \left(- \int_t^T r(X_u^{t,x}, u) du \right) \right]_{|x=X_t}$$

Παρατήρηση Α.7.

Όταν οι συναρτήσεις μ, σ στην (Α.3) δεν έχουν εξάρτηση από το χρόνο (η ανέλιξη λέγεται τότε χρονικά ομογενής), μπορεί ναδειχθεί ότι η κατανομή της $X_{t+T}^{t,x}$ είναι η ίδια με

εκείνης της $X_T^{0,x}$. Αυτό συνεπάγεται ότι, εάν η f είναι μια φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$E \left[f \left(X_{t+T}^{t,x} \right) \right] = E \left[f \left(X_T^{0,x} \right) \right]$$

Επεκτείνοντας αυτό το αποτέλεσμα μπορεί ναδειχθεί ότι όταν η r είναι σταθερή ως προς τη δεύτερη της μεταβλητή (για τα επιτόκια ομολόγων: χρόνος λήξης), τότε

$$E \left[f \left(X_{t+T}^{t,x} \right) \exp \left(- \int_t^{t+T} r \left(X_u^{t,x} \right) du \right) \right] = E \left[f \left(X_T^{0,x} \right) \exp \left(- \int_0^T r \left(X_u^{0,x} \right) du \right) \right]$$

Χρησιμοποιώντας την [Παρατήρηση Α.7](#), για τα επιτόκια r ενός ομολόγου με σταθερό χρόνο λήξης T το [Θεώρημα Α.6](#) παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Πόρισμα Α.8.

Αν $\{X_t\}_{t \geq 0}$, r είναι όπως στο [Θεώρημα Α.6](#), τότε για κάθε $T > t$

$$E \left[f \left(X_T \right) \exp \left(- \int_t^T r \left(X_u \right) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = E \left[f \left(X_{T-t}^{0,x} \right) \exp \left(- \int_0^{T-t} r \left(X_u^{0,x} \right) du \right) \right] \Bigg|_{x=X_t} \quad (\text{Α.7})$$

Το [Πόρισμα Α.8](#) κατά τα σχόλια της [§6.1-1](#) μας διευκολύνει στον υπολογισμό της μέσης τιμής [\(6.9\)](#) που με τη σειρά της μας δίνει την τιμή ενός T -ομολόγου.

Παράρτημα \mathcal{B}

Υλοποιήσεις που χρησιμοποιήθηκαν

Στο κεφάλαιο αυτό συμπεριλαμβάνονται οι κώδικες που παρήγαγαν τις εικόνες της εργασίας, αλλά και μια προσπάθεια υλοποίησης των θεωρητικών αποτελεσμάτων του [Κεφ. 6](#).

Αλγόριθμος B.1 Προσομοίωση της 2D-κίνησης Brown.

Είσοδος: $t_0, B_0, \Delta t$

Έξοδος: (B_0, \dots, B_N)

- 1: **Για** $i = 1, 2, \dots, N$ **επανάλαβε**
 - 2: $t_i \leftarrow t_{i-1} + \Delta t$
 - 3: **Παρήγαγε** $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$
 - 4: $B_i \leftarrow B_{i-1} + Z\sqrt{\Delta t}$
 - 5: **Τέλος_Επανάληψης**
 - 6: **Επέστρεψε** (B_0, \dots, B_N)
-

Υλοποιώντας τον [Αλγ. B.1](#) στη γλώσσα R κατασκευάζουμε τους ακόλουθους δύο κώδικες. Μια έξοδος του [Αλγ. B.2](#) φαίνεται στην [Εικόνα 4.3](#), σελ. 86. Ο [Αλγ. B.5](#) αποτελεί μικρή τροποποίηση του προηγούμενου, ώστε να συμπεριλάβει την έννοια του χρόνου διακοπής (stopping time) του [Κεφ. 1](#). Η [Εικόνα 1.1](#) αποτελεί την έξοδο του [Αλγ. B.5](#).

Αλγόριθμος B.2 Κώδικας σε R για την προσομοίωση της κίνησης Brown.

```
1: > k <- 5000
2: > Dt <- 0.0002
3: > W <- c(0,rep(NA,k-1))
4: > for(i in 2:k)
5: + {
6: + z <- rnorm(1,0,1)
7: + W[i] <- W[i-1]+z*sqrt(Dt)
8: + }
9: > plot(W,type='l')
10: > abline(h=0)
```

[Κ. Στούρας](#), Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω Path Integrals. *Efarmog'h se mont'ela epitok'iwn*.

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010

Στον [Αλγ. Β.4](#) παρατίθεται η πιο απλή μορφή του Σχήματος Euler-Maruyama, που χρησιμοποιείται για την αριθμητική προσέγγιση (προσομοίωση) λύσεων Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Ο [Αλγ. Β.3](#) αποτελεί απλή παράθεση του υπολογισμού του ολοκληρώματος (συνεχές «άθροισμα») μιας συνάρτησης, της οποίας γνωρίζουμε μόνο κάποιες (διακριτές) της τιμές.

Τέλος, ο [Αλγ. Β.6](#) είναι μια διακριτή προσέγγιση της τιμής ενός T -ομολόγου υποθέτοντας ότι τα επιτόκια ακολουθούν ένα μοντέλο της μορφής του [Πίνακα 6.1](#), σελ. 136. Ο [Αλγ. Β.6](#) χρησιμοποιεί ουσιαστικά μια Monte Carlo προσέγγιση της μέσης τιμής (6.48), σελ. 125. Τα όποια ζητήματα σύγκλισης αυτού, ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρούσης εργασίας, αλλά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στον [32]. Μας ενδιαφέρει, όμως, το κατά πόσο η λύση της ΣΔΕ που επιλύεται ταυτίζεται με τη λύση του (ντετερμινιστικού) Προβλήματος Αρχικών Τιμών (6.49), (6.50) (σελ. 125). Για περισσότερα βλ. [Κεφ. 3](#) και τα σχόλια της §3.6.

Αλγόριθμος Β.3 Διακριτή προσέγγιση ολοκληρώματος Riemann.

Είσοδος: $T, M, (r_0, \dots, r_M)$

1: $\Delta t \leftarrow \frac{T}{M}$

2: **Υπολόγισε**

$$\hat{I}(t) \leftarrow \sum_{j=1}^M r_j \cdot \Delta t$$

3: **Επέστρεψε** $\hat{I}(t)$

Αλγόριθμος Β.4 Αριθμητική επίλυση Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης (σχήμα Euler-Maruyama).

Είσοδος: $T, M, B_0, r_0, \Sigma \Delta E$

1: $\Delta t \leftarrow \frac{T}{M}$

2: **Για** $i = 1, 2, \dots, M$ **επανάλαβε**

3: $t_{i+1} \leftarrow t_i + \Delta t$

4: **Παρήγαγε** $Z^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

5: **Υπολόγισε**

$$\Delta B^{(i)} \leftarrow Z^{(i)} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

6: **Υπολόγισε**

$$r_{i+1} \leftarrow r_i + m(r_i, t_i) dt + \sigma(r_i, t_i) \Delta B^{(i)}$$

7: **Τέλος_Επανάληψης**

8: **Επέστρεψε** (r_0, \dots, r_M)

Αλγόριθμος Β.5 Κώδικας σε R για την προσομοίωση τριών κινήσεων Brown με χρόνους διακοπής.

```
1: > k <- 4000
2: > Dt <- 0.0002
3: > M <- 0.5
4: > t <- seq(0,k, Dt)
5: >
6: > W1 <- c(0,rep(NA,k-1))
7: > W2 <- c(0,rep(NA,k-1))
8: > W3 <- c(0,rep(NA,k-1))
9: > BM <- cbind(W1, W2, W3)
10: >
11: > simaia <- c(0, 0, 0)
12: > flag <- c(NA, NA, NA)
13: >
14: > for(j in 1:3){
15: + for(i in 2:k)
16: + {
17: + if ( simaia[j]==0 ){
18: + z <- rnorm(1,0,1)
19: + check <- BM[i-1, j] + z*sqrt(Dt)
20: + if ( check>=M ){
21: + simaia[j] <- 1
22: + flag[j] <- i-1
23: + BM[i, j] <- M
24: + break
25: + }
26: + else{
27: + BM[i, j] <- BM[i-1, j] + z*sqrt(Dt)
28: + }
29: + }
30: + else{
31: + simaia[j] <- 1
32: + flag[j] <- i-1
33: + break
34: + }
35: + }
36: + }
```

Αλγόριθμος Β.6 Προσομοίωση της τιμής ομολόγων μέσω της Feynman-Kač formula.

Είσοδος: N , risk premium, interest-rate model, maturity του ομολόγου

Έξοδος: Εκτίμηση της τιμής του ομολόγου, \hat{V}

1: **Δώσε** ένα (σταθερό) risk premium, $q^Q(t) := q$.

2: **Για** $k = 1, 2, \dots, N$ **επανάλαβε**

3: **Παρήγαγε** αρχική τιμή $r_0^{(k)} \sim \mathcal{U}(0, 1)$

4: **Χρησιμοποίησε** τον [Αλγ. Β.4](#) και λύσε μια ΣΔΕ της μορφής

$$\begin{aligned} dr_t^{(k)} &= \left[\kappa \left(r_t^{(k)} \right) + \sigma \left(r_t^{(k)} \right) q \right] dt + \sigma \left(r_t^{(k)} \right) dB_t^Q \\ &= m \left(r_t^{(k)} \right) dt + \sigma \left(r_t^{(k)} \right) dB_t^Q \end{aligned}$$

5: **Χρησιμοποίησε** τον [Αλγ. Β.3](#) και υπολόγισε το ολοκλήρωμα

$$\hat{I}^{(k)}(t) \leftarrow \int_t^T \hat{r}_s^{(k)} ds$$

6: **Υπολόγισε**

$$\hat{Y}^{(k)}(t) \leftarrow e^{-\hat{I}^{(k)}(t)}$$

7: **Τέλος_Επανάληψης**

8: $\hat{Y}(t) \leftarrow \left(\hat{Y}^{(1)}(t), \dots, \hat{Y}^{(N)}(t) \right)$

9: $\hat{E}_Q \left[\hat{Y}(t) \right] \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{Y}^{(k)}(t)$

10: $\hat{V} \leftarrow \hat{E}_Q \left[\hat{Y}(t) \right]$

11: **Επέστρεψε** \hat{V}

Συμβολισμοί

διάφορες μεταβλητές:

B_t	κίνηση Brown
$\mathcal{F}_t, \mathcal{B}, \mathcal{A}$	κλάσεις (οικογένειες) συνόλων
$(\mathcal{F}f)(s)$	μετασχηματισμός Fourier της f στο s
$(\mathcal{L}f)(s)$	μετασχηματισμός Laplace της f στο s
$u(x, t)$	λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης για (x, t)
$X_t, X, X(t)$	τυχαία μεταβλητή
x	διάνυσμα
x	αριθμός

γενικά μαθηματικά σύμβολα:

\Longleftrightarrow	ισοδυναμία
\equiv	ταυτίζεται με
\implies	συνεπαγωγή
$[a, b]$	το κλειστό διάστημα $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$[a, b)$	το ημιανοικτό διάστημα $a \leq x < b$ (ανάλογα $(a, b]$, (a, b))
Δ	$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, η Λαπλασιανή (Laplacian)
$s \wedge u$	$\min\{s, u\}$
\mathbb{C}	το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
\subseteq	υποσύνολο του, \subset γνήσιο υποσύνολο
$\exp()$	εκθετική συνάρτηση (exponential)
$E[]$	μέση τιμή
\in	ανήκει σε
$\in \mathcal{C}^k[a, b]$	k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη
f^+	$\max\{f, 0\}$
\hbar	$1.054571 \text{ J} \cdot \text{sec}$, η σταθερά του Planck διαιρεμένη με 2π
$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$	το σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων από το \mathbb{R} στο \mathbb{C}
\ln	φυσικός λογάριθμος
\mathbb{N}	το σύνολο των φυσικών αριθμών

Κ. Στούρας, Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω *Path Integrals*. Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων.

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010

$\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2
$P[]$	πιθανότητα
\mathbb{R}	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\sim \mathcal{U}(0, 1)$	ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$
$V[]$	διασπορά
Ω	δειγματικός χώρος

υποδείξεις στην οργάνωση:

§ ενότητα (ή υποενότητα)

§2.3-1 αριθμός της υποενότητας [§2.3-1](#)

(Το δεύτερο ψηφίο σε όλες τις αριθμήσεις των υποενοτήτων αναφέρεται στην ενότητα και το ψηφίο μετά την “-” στην υποενότητα)

Βιβλιογραφία

Οι βιβλιογραφικές αναφορές είναι ταξινομημένες με αλφαβητική σειρά, κατά την αγγλική αλφάβητο (και όχι σύμφωνα με την εμφάνισή τους στο κείμενο). Αναφορές με περισσότερους από ένα συγγραφείς έχουν ταξινομηθεί σύμφωνα με το επίθετο του πρώτου.

- [1] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn και S. Mazzucchi. *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals. An Introduction*. Springer Verlag, Berlin/ Heidelberg, 2η έκδοση, 2008. [24](#)
- [2] P. Artzner και F. Delbaen. Term structure of interest rates: The martingale approach. *Adv. Appl. Math.*, **10**:95–129, 1989. [107](#), [111](#)
- [3] B. Baaquie. *Quantum Finance - Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates*. Cambridge University Press, 2004. [107](#)
- [4] T. Björk. *Arbitrage Pricing Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 1998. [107](#), [111](#), [116](#), [127](#)
- [5] F. Black και P. Karasinski. Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. *Financial Analysts Journal*, **47**:52–59, 1991. [126](#), [127](#)
- [6] F. Black και M. Scholes. Pricing of Options and Corporate Liabilities. *J. Political Econ.*, **81**:637–654, 1973. [67](#)
- [7] A. Brace. Swaprate Volatilities in BGM. *FMMA NOTES*, 1998. [127](#)
- [8] A. Brace, D. Gatarek και M. Musiela. The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Math. Finance*, **7**:127–156, 1997. No 2. [107](#)
- [9] D. Brigo και F. Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer-Verlag, 2006. [107](#), [126](#), [127](#), [134](#)
- [10] F. E. Burk. *A Garden of Integrals*. Dolciani Mathematical Expositions, 2007. [24](#)
- [11] R. Cameron. A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals. *J. Math. and Phys.*, **39**:126–141, 1960. [36](#), [39](#)
- [12] *The Chicago Manual of Style*, 15η έκδοση, University of Chicago Press, Chicago, 2003.
- [13] R. Cont. Modelling term structure dynamics: an infinite dimensional approach. *Lyapunov Institute Workshop on Mathematical Finance*, 1998. Rocquencourt. [110](#)
- [14] J. C. Cox, Ingersoll J. E. και S. A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**:385–407, 1985. [126](#), [127](#), [132](#)
- [15] M. J. Crawley. *The R Book*. John Wiley and Sons, 2007.
- [16] P. J. Daniell. A general form of integral. *Annals of Mathematics*, **19**:279–94, 1918. [30](#)

Κ. Στούρας, Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω *Path Integrals*. Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων.

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010

- [17] P. J. Daniell. Integrals in an infinite number of dimensions. *Annals of Mathematics*, **20**:281–288, 1919. [30](#)
- [18] P. J. Daniell. Further properties of the general integral. *Annals of Mathematics*, **21**:203–220, 1920. [30](#)
- [19] L. U. Dothan. On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, **6**:59–69, 1978. [126](#), [127](#)
- [20] N. Dunford και J. Schwartz. *Linear Operators*. Interscience Publishers, 1963. [33](#)
- [21] J. Dupačová και J. Štěpán. *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003. [107](#)
- [22] R. Durrett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. Wadsworth, 1984. [43](#), [50](#), [55](#), [60](#), [61](#), [80](#)
- [23] P. Erdős και M. Kač. On the number of positive sums of independent random variables. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**:1011–1020, 1947. [69](#)
- [24] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, τόμος 1. John Wiley & Sons, 1950. [69](#), [73](#), [75](#), [77](#)
- [25] R. Feynman. *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics*. PhD dissertation, Princeton University, Department of Physics, Ιούνιος-Αύγουστος 1942. Πρόσφατα εκδόθηκε ως *Feynman's Thesis - A New Approach To Quantum Theory*, edited by Laurie M. Brown (Northwestern University, USA, 2005). [23](#), [150](#)
- [26] R. P. Feynman. Space-Time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, **20**:367–387, 1948. (Βασισμένο στην Διδακτορική Διατριβή του Feynman, Princeton, 1942 [[25](#)]). [23](#), [24](#), [36](#)
- [27] Δ. Φουσκάκης. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Στατιστική*. 9ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2010.
- [28] A. Friedman. *Partial Differential Equations of parabolic type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964. [55](#), [60](#)
- [29] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations*, τόμος 1. Academic Press, 1975. [61](#), [113](#), [114](#), [141](#)
- [30] I. M. Gelfrand και A. M. Yaglom. Integration in functional spaces. *J. Math. Phys.*, **1**:48–69, 1960. [24](#)
- [31] J. Gerald και M. Lapidus. *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus*. Oxford University Press, 2000. [24](#), [36](#), [40](#)
- [32] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, 2004. [68](#), [144](#)
- [33] K. Hamza, S. D. Jacka και F. C. Klebaner. The EMM conditions in a general model for interest rates. *Applied Probability*, 2005. [107](#), [111](#)
- [34] J. M. Harrison και S. R. Pliska. A stochastic model of continuous trading: Complete markets. *Stoch. Proc. Appl.*, **15**:313–316, 1983. [107](#), [110](#)
- [35] D. Heath, R. Jarrow και A. Morton. Bond pricing and the Term Structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, **60**:77–105, 1992. [107](#), [119](#), [123](#)
- [36] S. Heston. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, **13**:585–625, 1993.
- [37] T. Hida, H. H. Kuo, J. Potthoff και L. Streit. *White Noise: An Infinite Dimensional Calculus*. Kluwer Academic Publishers, 1993. [36](#)

-
- [38] J. Hull και A. White. Pricing Interest Rate Derivative Securities. *The Review of Financial Studies*, **3**:573–592, 1990. [126](#), [127](#)
- [39] D. H. Hyers, G. Isac και Th. M. Rassias. *Topics in Nonlinear Analysis and Applications*. World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, 1997.
- [40] D. H. Hyers, G. Isac και Th. M. Rassias. *Stability of Functional Equations in Several Variables*. Birkhäuser Boston, Basel, Berlin, 1998.
- [41] K. Itô. Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **20**:519–524, 1944. [1](#)
- [42] K. Itô. *On Stochastic Differential Equations*, τόμος 4. Memoir, Amer. Math. Soc., 1951.
- [43] K. Itô. Extension of stochastic integrals. *Proc. International Symp. Stochastic Diff. Equations*, **20**:95–109, 1978. Kinokuniya.
- [44] K. Itô και H. P. McKean. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer Verlag, 1965.
- [45] M. Kac. Integration in Function Spaces and Some of its Applications. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980. [38](#), [40](#)
- [46] M. Kac. On Distributions of certain Wiener functionals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65**:1–13, 1949. [38](#), [41](#)
- [47] M. Kac. On some connections between probability theory and differential integral equations. Στο *Proceedings of the Second Berkeley Symposium*, σελίδες 89–215, 1951. [61](#)
- [48] M. Kac. An Application of Probability Theory to the study of Laplace’s equation. *Ann. de Socièté. Math. Polonaise.*, **25**:122–130, 1953.
- [49] M. Kac. On some probabilistic aspects of classical Analysis. *Amer. Math. Monthly.*, **77**:586–597, 1970. [61](#)
- [50] J. P. Kahane. Brownian motion and Classical Analysis. *Bull. London Math. Soc.*, **7**:145–155, 1976.
- [51] G. Kallianpur και V. G. Papanicolaou. Exact computation of Feynman-type integrals involving Gaussian random fields. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment Journal*, **14**(1):33–49, Μάρτιος 2000. Springer Berlin/ Heidelberg. [24](#)
- [52] Σ. Καρανάσιος. *Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές*. Ε. Μ. ΙΙ., 2009. [33](#)
- [53] I. Karatzas και S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 1991. [61](#)
- [54] G. Keller, G. Kersting και U. Rösler. On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations. *Z. Wahrscheinlichkeit.*, **68**:163–189, 1984. [24](#)
- [55] D. Khandekar, S. Lawande και K. Bhagwat. *Path-Integral Methods and their Applications*. World Scientific, 1993. [24](#), [107](#)
- [56] F. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus With Applications*. Imperial College Press, 2η έκδοση, 2006. [12](#), [111](#), [112](#), [116](#), [128](#), [133](#), [141](#)
- [57] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics Statistics Polymer Physics and Financial Markets*. World Scientific, 5η έκδοση, 2009. [24](#), [107](#)
- [58] P. E. Kloeden και E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1995. [68](#)
- [59] P. E. Kloeden, E. Platen και H. Schurz. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. Springer-Verlag, New York, 1994. [68](#)
- [60] Γ. Ε. Κοκολάκης. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Ανάλυση Χρονοσειρών*. 8ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.
- [61] Γ. Ε. Κοκολάκης. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Στοχαστικές Ανελίξεις*. 7ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.
- [62] H. H. Kuo. *White Noise Distribution Theory*. CRC Press, 1996. [36](#)

- [63] H. H. Kuo. *Introduction to Stochastic Integration*. Springer-Verlag, 2006. [3](#), [7](#), [8](#), [36](#), [80](#)
- [64] P. Lévy. Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositia Mathematica*, **7**:283–339, 1939. [69](#)
- [65] S. Mazzucchi. *Mathematical Feynman Path Integrals and their Applications*. World Scientific, 2009. [107](#)
- [66] H. P. McKean. Δ plus a bad potential. *J. Math. Phys.*, **18**:1277–1279, 1977.
- [67] F. Mercurio και J.M. Moraleda. An Analytically Tractable Interest Rate Model with Humped Volatility. *European Journal of Operational Research*, **120**:205–214, 2000. [126](#)
- [68] F. Mittelbach, D. Carlisle Goosens, M. (με J. Braams και C. Rowley). *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley, Reading, MA, 2η έκδοση, 2004.
- [69] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1955. [26](#)
- [70] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, 2η έκδοση, 1995. [9](#)
- [71] V. G. Papanicolaou. Short Time Asymptotics for the Trace of One- and Multi-Dimensional Schrödinger Semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **107** (4):927–935, 1989. [24](#)
- [72] V. G. Papanicolaou. On the Convergence of the Feynman Path Integral for a Certain Class of Potentials. *Journal of Mathematical Physics*, **31** (2):342–347, 1990. [24](#)
- [73] V. G. Papanicolaou. The Probabilistic Solution of the Third Boundary Value Problem for Second Order Elliptic Equations. *Probability Theory and Related Fields*, **87**:27–77, 1990. [24](#)
- [74] Β. Γ. Παπανικολάου. Σημειώσεις στο Μάθημα: Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές. 9ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2010. [1](#), [3](#), [12](#), [44](#), [48](#)
- [75] Θ. Μ. Ρασσιάς. Σημειώσεις στο Μάθημα: Μαθηματική Ανάλυση Ι. 1ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.
- [76] Θ. Μ. Ρασσιάς. Σημειώσεις στο Μάθημα: Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ. 2ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.
- [77] Th. Rassias. On the stability of the linear mapping in Banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **72**:297–300, 1978.
- [78] Th. Rassias. On the stability of functional equations and a problem of Ulam. *Acta Appl. Math.*, **62**:23–130, 2000.
- [79] Th. Rassias. On the stability of minimum points. *Mathematica*, **45** (68) (1):93–104, 2003.
- [80] Th. M. Rassias. *Functional Equations, Inequalities and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston, London, 2003.
- [81] R. Rebonato. *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives*. Princeton University Press, 2002. [107](#)
- [82] D. Revuz και M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer Verlag, New York, 2η έκδοση, 1999. [5](#), [111](#)
- [83] R. Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2η έκδοση, 2004. [68](#), [107](#)
- [84] S. Shreve, P. Chalasani και S. Jha. *Stochastic Calculus and Finance*. Lecture Notes, Ιούλιος 1997.
- [85] S. Smale. *The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [86] Ι. Σπηλιώτης. Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά. Συμμετρία, 2004. [2](#), [6](#), [9](#), [10](#), [61](#), [111](#), [119](#)
- [87] Ι. Σπηλιώτης. Σημειώσεις στο Μάθημα: Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές. 9ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009. [1](#)

-
- [88] J. Spiliotis. Certain results on a parabolic type Monge-Ampère equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **163**(2):484–511, 1992.
- [89] J. Spiliotis και J. Tsinias. Notions of exponential robust stochastic stability, ISS and their Lyapunov characterizations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **13**:173–187, 2003.
- [90] J. M. Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer-Verlag, New York, 2001. [9](#), [64](#), [65](#), [79](#)
- [91] L. Tan και S. Xiang. On the Aleksandrov-Rassias problem and the Hyers-Ulam-Rassias stability problem. *Banach J. Math. Anal.*, **1**:11–22, 2007.
- [92] O. Vasicek. An equilibrium characterization of the Term Structure. *J. Fin. Econ.*, **5**:177–188, 1977. [107](#), [126](#), [131](#)
- [93] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1980. [18](#)
- [94] N. Wiener. *Math. Physics*, **2**, 1923; *Proc. London Math. Soc.* **22**, 454, 1924; *Acta Math.* **55**, 117, 1930. [30](#), [38](#)
- [95] N. Wiener. *Generalized Harmonic Analysis and Tauberian Theorems*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1964. [30](#)

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Ευρετήριο

Πλάγιοι αριθμοί υποδηλώνουν εικόνες ή πίνακες, **έντονοι** αριθμοί υποδηλώνουν ορισμούς. Λέξεις που ξεκινάνε με μαθηματικά σύμβολα έχουν τοποθετηθεί στην αρχή του Ευρετηρίου.

Μαθηματικά Σύμβολα

\mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη, **2**

h , **32**

$\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$, **2**, **4**

Q -κινδυνουδέτερη τιμή, **112**

$Q \sim P$, **111**

Δ , **32**

γ^2 , **2**

A, a

affirmative covenants, **93**

arcsine law, **76**, **77**, **79**, **87**

αθέτηση αποπληρωμής, **92**

αθροιστική παρούσα αξία, **109**

απόδοση, **94**

αρχή

αβεβαιότητας, **26**, **31**

δυσισμού, **27**

ελάχιστης δράσης, **31**

υπέρθησης, **25**, **24–27**, **29**

B, b

Behavioral Finance, **105**

Black-Karasinski model, **136**

bond indenture, **93**

Γ, c

calibration, **119**, **135**

Cameron, **39**

cap, **104**

CFA Institute, **92**, **99**

Chung, **77**

cir model, **136**

CIR++ model, **136**

cost of capital, **100**

coupon rate, **96**

coupon, **96**

current ratio, **93**

Δ, d

default, **92**

deferred coupon bond, **99**

Dirac, **29**

discount rate, **100**

dothan model, **136**

duration, **97**

Durrett, **43**, **55**, **60**, **80**

διαχείριση επενδύσεων, **91**

Διεθνές Νομισματικό Ταμείο, **94**

δίκαιη τιμή, **100**, **108**

δικαίωμα, **104**, βλ. επίσης ομολόγο ως δικαίωμα, **126**

δύλιση, **2**

δράση, **31**

E, e

EAR, **108**

embedded options, **104**

Enterprise Risk Management, **134**

Erdős, **69**

exponential Vasiček model, **136**

Extended Exponential Vasiček model, **136**

εκδότης ομολόγου, **92**, **104**

K. Στούρας, *Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω Path Integrals. Εφαρμογή σε μοντέλα επιτοκίων.*

Διπλωματική Εργασία

© Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010

εκθετικό martingale, 114

εξίσωση

Black-Scholes, 64, 67, 117, 125

Euler-Lagrange, 30

Schrödinger, 18–19, 32, 39, 61

θερμότητας, 38, 47, 52, 56

επέκταση στον $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$, βλ. επίσης $\mathcal{L}_{\text{LOC}}^2$, 5

επιτόκιο

βραχυπρόθεσμο, 103

βραχυπρόθεσμο στο $[t, T]$, 116

κουπονιού ομολόγου, 96

ονομαστικό, 96

προθεσμιακό στο $[S, T]$, 115

πρόσω, 103

πρόσω στο $[S, T]$, 115

στιγμιαίο τρέχουσας τοποθέτησης, 117

στιγμιαίο προθεσμιακό, 117

τρέχουσας τοποθέτησης στο $[S, T]$, 116

εποχή, 71

Z, f

face value, 95

fair value, 100, 108

Feller, 69, 73, 77

Feynman-Kač formula, 44, 46, 61, 64, 80, 128

Feynman, 23, 29

filtration, 2

floating rate securities, 99

floor, 104

Forward-Rate Curve, 117

forward rate in $[S, T]$, 115

Friedman, 55

functional integral, 30

H, g

ημερομηνία λήξης ομολόγου, 94

Θ, h

Hamiltonian, 33

Heisenberg, βλ. επίσης αρχή αβεβαιότητας, 29

HJM Συνθήκη Συμβατότητας, 119, 123

Ho-Lee model, 132–133, 136

Hull-White model, 136

θεώρημα

Fubini, 2, 13, 16, 85, 121

Plancherel, 17, 33

I, i

IMF, 94

instantaneous forward rate, 117

instantaneous spot rate, 117

interest rate risk, 97

interest, 92

investment management, 91

issuer, 92

Itô

formula, 9–14, 47, 53, 57, 62, 121

ανέλιξη, 12, 120

ολοκληρώσιμη, 2

IMM Υπόθεση, 111, 122

ισοδύναμα μέτρα, 111

ισομετρία τελεστή, 33

K, j

Klebaner, 112

Καμπύλη

Αποδόσεων, 116

Καμπύλη Προθεσμιακών Επιτοκίων, 117

Καμπύλη

Αποδόσεων, 95, 125, 133

κανόνας γινομένου, 14

κινδυνουδέτερη τιμή, 112

κίνδυνος επανεπένδυσης, 98

κίνηση Brown, 7, 51, 77, 86, 143–147

κόστος

ευκαιρίας, 100

κεφαλαίου, 100

κουπόνι, 96

Λ, k

Kač, 38, 41, 69, 77

killing

a process, 45, 80

rate, 45, 56, 80

Kuo, 80

Λαγκρασιανή, 30

M, l

Lagragian, 30

Laplacian, 32

Lévy, 77

LIBOR, 99

Lie-Kato-Trotter φόρμουλα, 34

local martingale, 6, 8, 47, 53, 57, 63

localization method, βλ. *επίσης* local martingale, 2, 47
 localizing sequence, 4
 Μαρκοβιανή ιδιότητα, 49, 54, 59, 128, 138–143
 μέθοδος
 Euler, 67
 Monte Carlo, 68, 126, 134
 χωρισμού μεταβλητών, 52
 μεταβλητότητα, 67
 τιμής ομολόγου, 95, 132
 μετασχηματισμός
 Fourier, 15, 35, 43
 Laplace, 19, 81
 μετρήσιμη, 2
 μέτρο Wiener, 38

N, n

martingale, 5, 7, 48, 111, βλ. *επίσης* local martingale, 127
 maturity date, 92, 94
 maturity, 95, 102
 mean reversion property, 131
 Mercurio-Moraleda model, 136
 Merton model, 136
 modeling, 133–135
 νόρμα τελεστή, 32

Ξ, n

negative covenants, 93
 nominal rate, 96
 NPV, 109

O, o

opportunity cost, 100
 option, 104–105, 126
 ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, 15
 ομόλογο, 92, 95, 96, 101
 κυμαινόμενου επιτοκίου, 99
 χωρίς κουπόνια, 97
 ως παράγωγο, βλ. *επίσης* option, 112

Π, p

par value, 95, 102
 path integral, 28, 31, 36, 51, 56, 61, 64
 Present Value, 100
 price volatility, 95
 principal, 92

probability amplitude, 24, 28
 path integral, 39
 παιχνίδι του νομίσματος, 70, 74, 75, 78, 85
 παρούσα αξία, 100
 πείραμα διπλής σχισμής, 27
 πλάτος πιθανότητας, 24, 29
 προσαρμοσμένη, βλέπε \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη

Σ, r

random field, 110
 renormalization constant, 34
 replicating portfolio, 122
 risk
 neutral, 111
 premium, 97, 115
 reinvestment, 98
 Σπηλιώτης, 6
 στοχαστική προσομοίωση, 10, 67–68, 126, 143–147
 συνέλιξη, 16, 84

T, s

Schrödinger, βλ. *επίσης* εξίσωση Schrödinger, 29
 Schwartz χώρος, 17, 34, 43
 spot rate in $[t, T]$, 116
 Steele, 79
 step-up notes, 98
 superposition principle, 24
 τελεστής
 ορθομοναδιαίος, 33
 συνεχής, 32
 φραγμένος, 32
 τιμή ομολόγου, 108, 112, 113, 117, 124, 133, 143–147
 τιμολόγηση (γενικά), 100
 τόκος, 92
 τυχαίο πεδίο, 110, 118

Υ, t

technical default, 93
 term
 Structure of Interest Rates, 116
 to maturity, 94
 traders, 92
 trading at discount (premium), 97
 trustee, 93

Φ , uunitary, [33](#) φ άση, **26****X, v**Vasiček model, [127–132](#), [135](#), [136](#)volatility, [67](#) **Ψ , w**Wiener, [30](#), [38](#)Integral, [30](#)Path Integral, **39****y**Yield Curve, [95](#), [116](#)yield, **94****Z**zero coupon bonds, [97–98](#), [108–112](#)