Множества. Формула включений и исключений.

В природе существует внутренне присущая ей скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых математических законов. Именно этим объясняется, почему природные явления удаётся предсказывать с помощью комбинации наблюдений и математического анализа..

Герман Вейль

Множество есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое. Множество можно задать

- описав его $A = \{\text{дизельные генераторы}\}, B = \{p \,|\, p = 10^n + 1, n \in \mathbb{N}\}, C = \{p \,|\, p^2 + \sqrt{p} = 0\}$,
- перечислив его элементы $B = \{1, \text{гироскоп, амёба}, \aleph, \{\varnothing\}\}, B = \{\circledast, \triangle, \square, \circledcirc\}$,
- с помощью других множеств $A = B \cup C,\ D = E \setminus F,\ G = H \cup (J \cap K) \setminus L$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$. Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то говорят, что A *есть подмножество множества* B. Обозначается это $A \subset B$. Например, $\{1, 5\} \subset \{1, 2, 4, 5\}$, $\{\text{детские книги}\} \subset \{\text{книги}\}$, $\{x \,|\, x > 0\} \subset \{x \,|\, x \geq -2\}$. Пустое множество является подмножество является подмножеством любого множества X: $\varnothing \subset X$. Так же каждое множество является своим подмножеством: $X \subset X$.

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих сразу обоим. Обозначается $A \cap B$. Например, $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4\}$, $\{-1, -2, -3\} \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing$.

Объединением двух множеств называется множество, содержащее все их элементы и только их. Обозначается $A \cup B$. Например, $\{1, 2, 3\} \cup \{0, -1\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $\{\text{мужчины}\} \cup \{\text{женщины}\} = \{\text{люди}\}$.

Мощностью множества называется количество элементов в этом множестве. Обозначается $|A|$. Мощность пустого множества равна нулю.

Формула включений и исключений.

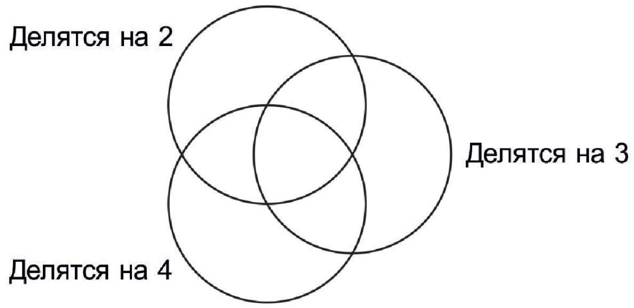
$$N = N_\alpha + N_\beta - N_{\alpha\beta}$$

$$N = N_\alpha + N_\beta + N_\gamma - N_{\alpha\beta} - N_{\alpha\gamma} - N_{\beta\gamma} + N_{\alpha\beta\gamma}$$

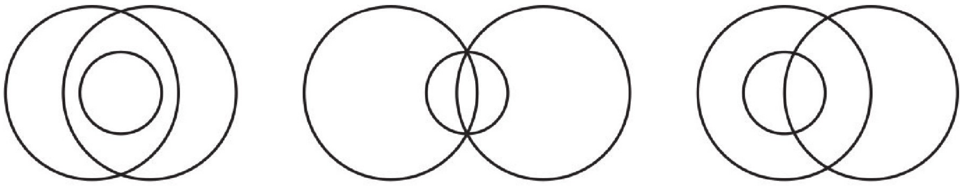
1. Перечислите все элементы и все подмножества множества {теодолит, курвиметр, манометр}.
2. Пусть $A = \{\diamond, \ddagger\}, B = \{\ddagger, \circ, \natural\}$. Запишите пересечение и объединение этих двух множеств. Сколько в них элементов?
3. Пусть $A = \{\text{чётные числа}\}, B = \{\text{числа, которые делятся на } 4\}, C = \{\text{натуральные числа меньше } 10\}$. Чему равны $A \cap B, A \cap B \cap C, B \cap C, A \cup B$?

4. Сколько подмножеств у множества, содержащего 2 элемента; 4 элемента? Существует ли множество, у которого ровно 7 подмножеств? Сколько подмножеств у множества, содержащего n элементов?

5. Расположите на диаграмме числа $7, 6, 24, 15$ и 9 так, что бы в каждом из кругов оказались те и только те числа, которые обладают указанным рядом с кругом свойством.



6. Выберите из трёх диаграмм, изображённых ниже, ту, на которой свойства из предыдущей задачи можно сопоставить кругам так, что всем натуральным числам найдётся место, а пустых областей не будет.



7. Обязательно ли старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков — это один или тот же человек?
   Обязательно ли лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков — это один и тот же человек?

8. В классе 29 человек. 15 из них занимаются в музыкальном кружке, 21 — в математическом. Сколько человек посещают оба кружка, если известно, что только Вовочка не ходит ни в один из этих кружков?

9. На полу площадью $12\,\text{м}^2$ лежат три ковра. Площадь одного ковра $5\,\text{м}^2$, другого — $4\,\text{м}^2$, третьего — $3\,\text{м}^2$. Каждые два ковра перекрываютсяна площади $1,5\,\text{м}^2$. Все три ковра перекрываются на площади $0,5\,\text{м}^2$. Какова площадь пола, не покрытая коврами? Какова площадь, покрытая только первым ковром?

10. На заводе работают 40 фрезеровщиков, каждый из которых является художником, философом или поэтом. Всего среди них 28 художников, 27 философов и 11 поэтов. Какое наибольшее количество фрезеровщиков могут быть одновременно и художниками, и философами?

11. У 20 марсиан есть уши, а у остальных — нет. У 40 марсиан есть глаза,а у остальных — нет. У 10 марсиан есть и уши, и глаза. Какое наименьшее количество марсиан может быть?

12. На доске нарисовали две окружности и отметили 200 точек. Внутри каждой из окружностей оказалось по 120 точек, а внутри их пересечения — 40. Сколько точек не попали ни в одну из окружностей?

13. Сколько всего существует натуральных чисел от 1 до 300 ,которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

14. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

15. Каждый десятый математик — философ. Каждый сотый философ — математик. Кого больше: философов или математиков?

16. Каждый из трех игроков записывает 100 слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычеркивают из всех списков. Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 61 слово, у второго — 80 слов, а у третьего — 82 слова?

17. Дядя Федор собирается все 92 дня каникул провести в деревне. При этом он строго придерживаетсятакого распорядка: каждый второй день (то есть через день) ходит купаться, каждый третий — ходит в магазин за продуктами, и каждый пятый — работает в огороде. В первый день дядя Федор занимался сразу всем. Сколько за каникулы будет: а) «приятных» дней, когда дядя Федор будет только купаться; б) «скучных» дней, когда у него не будет никаких дел; в) «тяжелых» дней, когда ему придется делать все три дела?

18. Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составилиразное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, занего даётся 1 очко, у одного игрока — 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

19. В классе есть a_1 учеников, получивших в течение года хотя бы одну двойку, a_2 учеников, получивших не менее двух двоек, $\dots$, a_k учеников, получивших не менее k двоек. Сколько всего двоек было получено в течение года учениками этого класса? (Предполагается, что больше k двоек ни у кого нет.)