Кумулянт Биндера

Кумулянт Биндера — это статистический показатель, который используется для обнаружения критических точек в системе. Он помогает исследовать фазовый переход, избавляя нас от необходимости точно знать критическую температуру и позволяет различать области порядка и хаоса. В системе, такой как модель Изинга, кумулянт Биндера позволяет определить фазовое состояние системы при различных температурах и размерах решёток.

Определим намагниченность системы:

$$M = \sum_{\{i\}} s_i$$

Кумулянт Биндера U_L для системы размера $L \times L$ определяется как отношение четвёртого кумулянта магнитизации к квадрату второго кумулянта:

$$U_L = 1 - \frac{\langle M^4 \rangle}{3\langle M^2 \rangle^2}.$$

Особенности кумулянта Биндера:

- При низких температурах ($T < T_c$) система находится в упорядоченном состоянии, и U_L стремится к 2/3.
- При высоких температурах ($T > T_c$) система в парамагнитном состоянии, и U_L стремится к 0.
- Вблизи критической точки $T = T_c$ кумулянт Биндера приобретает универсальное значение, которое не зависит от размера системы. Это свойство позволяет определить критическую температуру по пересечению графиков U_L для разных L.

Пример нахождения критической температуры с использованием кумулянта Биндера

Мы можем построить график $U_L(T)$ для различных размеров решёток L. Пересечение этих графиков указывает на критическую температуру T_c. Это пересечение возникает из-за того, что при фазовом переходе распределение магнитизации перестаёт зависеть от масштаба системы.

Размерный скейлинг и критические индексы

Чтобы более точно определить параметры критической точки и её свойства, используют метод размерного скейлинга, который позволяет вычислить **критические индексы**. В модели Изинга ключевые индексы включают:

- α: индекс, характеризующий поведение теплоёмкости.
- β: индекс для поведения средней магнитизации.
- γ: индекс, описывающий флуктуации магнитизации.
- ν: индекс, связанный с корреляционной длиной.

Эти индексы указывают на то, как различные физические величины ведут себя вблизи критической точки, и играют важную роль в теории универсальности. Для двумерной модели Изинга известные значения этих индексов: $\beta = 1/8$, $\gamma = 7/4$, $\nu = 1$.

Корреляционная длина и размерный скейлинг

В критической точке корреляционная длина ξ стремится к бесконечности. В приближении к критической точке она масштабируется с температурой как:

$$\xi \propto |T - T_c|^{-\nu}.$$

Когда мы исследуем системы конечного размера L, корреляционная длина ξ не может превышать L, и это ограничивает критическое поведение. Поэтому величины, такие как магнитизация, могут быть связаны с размером системы и температурой в форме, описываемой **гипотезой размерного скейлинга**. Например, магнитизация подчиняется следующему соотношению:

$$\langle |M| \rangle \propto L^{-\beta/\nu} f\left((T - T_c) L^{1/\nu} \right),$$

где f — универсальная функция скейлинга.

Пример: Определение критического индекса ν с помощью размерного скейлинга кумулянта Биндера

Для кумулянта Биндера функция скейлинга выглядит как:

$$U_L(T) = f\left((T - T_c) L^{1/\nu} \right).$$

Построив U_L в зависимости от $(T - T_c)L^{1/\nu}$ для разных размеров L, мы можем подобрать ν так, чтобы все кривые совпадали. Это называется **коллапсом данных** и является важным инструментом в вычислительных методах исследования критических явлений.

1. Сначала строим $U_L(T)$ для различных L и находим критическую температуру T_c по их пересечению.
2. Затем подбираем значение ν, при котором происходит коллапс всех кривых U_L на одной линии.

Этот подход позволяет не только определить критическую точку, но и уточнить значения критических индексов.

Краткий алгоритм:

1. Выполните симуляции модели Изинга для различных температур и размеров решёток.
2. Рассчитайте кумулянт Биндера для каждого размера и температуры.
3. Постройте графики $U_L(T)$ для разных размеров L и определите T_c.
4. Используя размерный скейлинг, определите критический индекс ν путём подгонки данных для $U_L(T)$.