Exercise 1.13

Behauptung: $Fib(n) = \frac{(\phi^n - \psi^n)}{\sqrt{5}}$
Beweis:
Sei $n = 0$, dann gilt $\frac{(\phi^0 - \psi^0)}{\sqrt{5}} = 0 = Fib(0)$ der Induktionsanfang.
Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $Fib(n) = \frac{(\phi^n - \psi^n)}{\sqrt{5}}$
Induktionsschritt: Zu zeigen ist $Fib(n+1) = \frac{(\phi^{n+1} - \psi^{n+1})}{\sqrt{5}}$
Dasfür benötigen wir noch zwei kleine Beweise: $\phi = 1 + \phi^{-1} \Leftrightarrow \phi - \phi^{-1} = 1$ und $\psi = 1 + \psi^{-1} \Leftrightarrow \psi - \psi^{-1} = 1$.
Es gilt $\phi - \phi^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^2 - 4}{2+2\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-4}{2+2\sqrt{5}} = \frac{2+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} = 1$ und $\psi - \psi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})^2 - 4}{2-2\sqrt{5}} = \frac{1-2\sqrt{5}+5-4}{2-2\sqrt{5}} = \frac{2-2\sqrt{5}}{2-2\sqrt{5}} = 1$
Nun kommen wir zum Hauptbeweis.
Es gilt

$$\begin{aligned}
Fib(n+1) = Fib(n) + Fib(n-1) &= \frac{(\phi^n - \psi^n)}{\sqrt{5}} + \frac{(\phi^{n-1} - \psi^{n-1})}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\phi^n - \psi^n + \phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\phi^n \overbrace{(1 + \phi^{-1})}^{\phi} - \psi^n \overbrace{(1 + \psi^{-1})}^{\psi}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{(\phi^{n+1} - \psi^{n+1})}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $Fib(n) = \frac{(\phi^n - \psi^n)}{\sqrt{5}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.