Отрицательное биноминальное распределение

Семён Дубков

May 2025

1 Определение

Говорят что случайная величина ξ имеет отрицательное биноминальное распределение с параметрами p и r, если :

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r},\ k = r, r+1 \ldots, r+k,\ q = 1-p$$

Обозначается так: $\xi \sim NB(p, r)$
Например число испытаний в схеме Бернулли необходимых для r успехов имеет отрицательное биноминальное распределение

2 Математическое ожидание и дисперсия

Найдем математическое ожидание с помощью производящей функции

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} x^k = p^r \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r-1}^{r-1} q^k x^{k+r} =$$
$$p^r x^r \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r-1}^{r-1} (qx)^k = p^r x^r (1-qx)^{-r} = \left(\frac{px}{1-qx}\right)^r$$

Последний переход следует из разложения в ряд Тейлора функции:

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \ldots$$

Так как $\mathbb{M}\xi^{[k]} = \varphi^{(k)}(1-)$, где $\xi^{[k]} \overset{def}{=} \xi(\xi-1)\dots(\xi-k+1)$, то при $k=1$ получаем $\mathbb{M}\xi = \varphi'(1-)$

$$\varphi'(x) = p^r r (\frac{x}{1-qx})^{r-1}\frac{1-qx+qx}{(1-qx)^2} = p^r r\frac{x^{r-1}}{(1-qx)^{r+1}}$$

$$\varphi'(1-) = p^r r\frac{1^{r-1}}{(1-q)^{r+1}} = \frac{p^r r}{p^{r+1}} = \frac{r}{p}$$

Получаем ответ:

$$\boxed{\mathbb{M}\xi = \frac{r}{p}}$$

Найдем дисперсию $\mathbb{D}\xi = \mathbb{M}\xi^2 - (\mathbb{M}\xi)^2$

$$\mathbb{M}\xi^{[2]} = \varphi''(1-),\ \mathbb{M}\xi = \varphi'(1-)$$

$$\mathbb{M}\xi^{[2]} = \mathbb{M}\xi(\xi-1) = \mathbb{M}\xi^2 - \mathbb{M}\xi$$

Выражаем $\mathbb{M}\xi^2 = \mathbb{M}\xi^{[2]} + \mathbb{M}\xi = \varphi''(1-) + \varphi'(1-)$, и подставляем в дисперсию $\mathbb{D}\xi = \varphi''(1-) + \varphi'(1-) - (\varphi'(1-))^2$. Получили связь между дисперсией и производящей функцией. Найдем $\varphi''(1-)$

$$\varphi''(x) = \left(p^r r\tfrac{x^{r-1}}{(1-qx)^{r+1}}\right)' = p^r r\tfrac{(r-1)x^{r-2}(1-qx)^{r+1} + q(r+1)(1-qx)^r x^{r-1}}{(1-qx)^{2r+2}}$$

$$\varphi''(1-) = p^r r\tfrac{(r-1)(1-q)^{r+1} + q(r+1)(1-q)^r}{(1-q)^{2r+2}} = p^r r\tfrac{(r-1)p^{r+1} + q(r+1)p^r}{p^{2r+2}} =$$
$$p^{2r} r\tfrac{(r-1)p + q(r+1)}{p^{2r+2}} = r\tfrac{rp-p+qr+q}{p^2} = r\tfrac{r-p+q}{p^2}$$

$$\mathbb{D}\xi = \varphi''(1-) + \varphi'(1-) - (\varphi'(1-))^2 =$$

$$r\frac{r-p+q}{p^2} + \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{r^2 - pr + qr + pr - r^2}{p^2} = \frac{qr}{p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{D}\xi = \frac{qr}{p^2}}$$