

# Решения задач по математической статистике

КОНСТАНТИН ЗЮБИН

## СОДЕРЖАНИЕ

### 1. Дз 1

1

### 1. Дз 1

Приведём несколько стандартных утверждений.

**Предложение 1.** Пусть  $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$  — нормально распределённая случайная величина. Тогда

$$\mathbb{E} X = a, \mathbb{E} X^2 = \sigma^2 + a^2, \mathbb{D} X = \sigma^2, \mathbb{E} |X - a| = \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

*Доказательство.* Для матожиданий имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = a \cdot 1 = a. \\ \mathbb{E} X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2at}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt^2 + 0 + a^2 \cdot 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-\sigma^2) de^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} + a^2 = \\ &= -\frac{t\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + a^2 = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + a^2 = \sigma^2 + a^2. \\ \mathbb{E} |X - a| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u-a|}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt^2 = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-\sigma^2) de^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Из формулы дисперсии получаем

$$\mathbb{D} X = \mathbb{E} X^2 - (\mathbb{E} X)^2 = (\sigma^2 + a^2) - a^2 = \sigma^2.$$

□

**Предложение 2.** Пусть  $X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$  — две нормально распределённые случайные величины. Тогда их свёртка  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  имеет нормальное распределение.

### Задача 1а

Пусть даны независимые случайные величины  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ ,  $\theta_2 > 0$ . Проверим, что оценка  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  несмещена относительно  $\theta_1$ . Действительно, по линейности матожидания и так как  $E_{\theta_1, \theta_2} X_i = \theta_1$  имеем

$$E_{\theta_1, \theta_2} \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{\theta_1, \theta_2} X_i = \frac{1}{n} \cdot n\theta_1 = \theta_1.$$

### Задача 1б

Проверим, что оценка

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i \bar{X} + (\bar{X})^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2(\bar{X})^2 + (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2$$

смещена относительно  $\theta_2^2$ . Имеем

$$\theta_2^2 = D_{\theta_1, \theta_2} X_i = E_{\theta_1, \theta_2} X_i^2 - (E_{\theta_1, \theta_2} X_i)^2 = E_{\theta_1, \theta_2} X_i^2 - \theta_1^2.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} E_{\theta_1, \theta_2} \bar{X}^2 &= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n E_{\theta_1, \theta_2} X_i^2 + \sum_{i < j}^n E_{\theta_1, \theta_2} (2X_i X_j) \right) = \\ &= \frac{1}{n^2} (n(\theta_1^2 + \theta_2^2) + n(n-1) E_{\theta_1, \theta_2} X_i E_{\theta_1, \theta_2} X_j) = \frac{1}{n^2} (n(\theta_1^2 + \theta_2^2) + n(n-1)\theta_1^2) = \\ &= \frac{1}{n}\theta_2^2 + \theta_1^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$E_{\theta_1, \theta_2} S_n^2 = E_{\theta_1, \theta_2} \bar{X}^2 - E_{\theta_1, \theta_2} \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \cdot n(\theta_1^2 + \theta_2^2) - (\frac{1}{n}\theta_2^2 + \theta_1^2) = \frac{n-1}{n}\theta_2^2 \neq \theta_2^2.$$

### Задача 1в

В качестве чисел  $a_n$  (для  $n > 1$ ) следует взять дроби  $\frac{n}{n-1}$ . Тогда, по доказанному выше

$$E_{\theta_1, \theta_2} \left( \frac{n}{n-1} \cdot S_n^2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \theta_2^2 = \theta_2^2.$$

Положим  $T = \sum_{i=1}^{n-1} |X_i - X_{i+1}|$ . Случайная величина  $-X_{i+1}$  имеет распределение  $\mathcal{N}(-\theta_1, \theta_2^2)$ . По формуле для свёртки нормально распределённых случайных величин случайная величина  $X_i - X_{i+1}$  имеет распределение  $\mathcal{N}(0, 2\theta_2^2)$ . Первый момент такой случайной величины равен  $\sqrt{2}\theta_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{2\theta_2}{\sqrt{\pi}}$ . Теперь мы можем вычислить матожидание  $T$ :

$$E_{\theta_1, \theta_2} T = (n-1) E_{\theta_1, \theta_2} |X_1 - X_2| = \frac{2(n-1)}{\sqrt{\pi}} \cdot \theta_2.$$

В качестве членов последовательности  $b_n$  следует взять числа  $\frac{\sqrt{\pi}}{2(n-1)}$ .

### Задача 2а

Вычислим моменты случайной величины  $X \sim E(\theta)$  с экспоненциальным распределением. Имеем

$$\begin{aligned} E X^k &= \int_0^{+\infty} \theta x^k e^{-\theta x} dx = - \int_0^{+\infty} x^k d e^{-\theta x} = \\ &= -x^k e^{-\theta x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx^k = \int_0^{+\infty} k x^{k-1} e^{-\theta x} dx = \frac{k}{\theta} E X^{k-1}. \end{aligned}$$

Согласно это формуле

$$E X^k = \frac{k!}{\theta^k} E X^0 = \frac{k!}{\theta^k}.$$

Пусть теперь  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim E(\frac{1}{\theta})$  — независимые одинаково распределённые случайные величины. Тогда имеем

$$E_\theta \overline{X^k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E_\theta X_i^k = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E_\theta X_1^k = k! \cdot \theta^k.$$

Подходящей последовательностью чисел  $c_k$  будет последовательность  $\frac{1}{k!}$ . Действительно,  $E_\theta \overline{X^k} \cdot c_k = k! \cdot \theta^k \cdot \frac{1}{k!} = \theta^k$ .

### Задача 26

Пусть  $P(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \theta^k$  — многочлен. Проверим, что оценка  $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \overline{X^k}$  несмещена для  $P(\theta)$ . Имеем

$$E_\theta \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \overline{X^k} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \cdot E_\theta \overline{X^k} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \cdot k! \cdot \theta^k = P(\theta).$$

### Задача 3а

Вычислим матожидание случайной величины  $X \sim \text{Geom}(\theta)$  ( $P(X = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$ ) с геометрическим распределением:

$$\begin{aligned} E X &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \theta (1-\theta)^{k-1} = \theta \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-\theta)^{k-1} = \theta \left( - \sum_{k=1}^{+\infty} (1-\theta)^k \right)' = \\ &= \theta \left( - \frac{1-\theta}{1-(1-\theta)} - 1 \right)' = \theta \left( \frac{-1}{\theta} \right)' = \theta \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Пусть независимые случайные величины  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Geom}(\theta)$  имеют геометрическое распределение ( $\theta \in (0, 1)$ ).

Пусть  $g(X_1)$  — несмешённая оценка для функции  $f(\theta)$ . Тогда

$$f(\theta) = E_\theta g(X_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k) \theta (1-\theta)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k+1) (-1)^k \theta (\theta-1)^k.$$

или

$$\frac{f(\theta)}{\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k+1) (-1)^k (\theta-1)^k.$$

Далее будем рассматривать разложение в ряд Тейлора функции  $\frac{f(\theta)}{\theta}$  около точки 1. Чтобы ряды сходились к одной и той же функции, их коэффициенты обязаны быть равными. Таким образом, сопоставляя коэффициенты рядов, мы вычислим функцию  $g$ .

Для  $f(\theta) = \theta$  имеем  $\frac{f(\theta)}{\theta} = 1 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 0 \cdot (\theta - 1)^k$ . Тогда  $g(1) = 1$  и  $g(k) = 0$  для  $k \neq 1$ . Имеем  $g(k) = I(k = 1)$  и  $g(X_1) = I(X_1 = 1)$ .

Для  $f(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta}$  имеем

$$\frac{f(\theta)}{\theta} = \frac{1-\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k+1)!}{k!} (\theta - 1)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{k!} (\theta - 1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1-1)(\theta - 1)^k.$$

Отсюда  $g(k+1)(-1)^k = (-1)^k k$  и  $g(k) = k - 1$ .

Для  $f(\theta) = \theta^2$  имеем

$$\frac{f(\theta)}{\theta} = \theta = 1 + (\theta - 1).$$

Отсюда  $g(1)(-1)^0 = 1$ ,  $g(2)(-1)^1 = 1$  и  $g(k) = 0$  при  $k \neq 1, 2$ . Поэтому

$$g(k) = I(k = 1) - I(k = 2).$$

### Задача 3б

Рассмотрим функцию  $g(X_1, X_2) = I(X_1 = 1) \cdot I(X_2 = 1)$ . Поскольку  $X_1$  и  $X_2$  независимы, то независимы  $I(X_1 = 1)$  и  $I(X_2 = 1)$ . Поэтому

$$\mathbb{E}_\theta g(X_1, X_2) = \mathbb{E}_\theta I(X_1 = 1) \cdot \mathbb{E}_\theta I(X_2 = 1) = \theta \cdot \theta = \theta^2.$$

### Задача 3в

Предположим, что  $g$  — искомая оценка. Тогда, как было показано ранее, выполнено равенство

$$\frac{1}{1-\theta} = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)\theta(1-\theta)^k.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\theta} = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)(-1)^k(\theta - 1)^k.$$

Разложим  $\frac{1}{\theta}$  в ряд Тейлора около точки 1:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{1+(\theta-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (\theta - 1)^k.$$

В разложении в ряд присутствует ненулевой свободный член, тогда как в сумме  $\sum_{k=1}^{+\infty} g(k)(-1)^k(\theta - 1)^k$  он равен 0, поэтому эти ряды не могут сходиться к одной и той же функции.

### Задача 4а

Пусть  $X \sim R[0, \theta]$  — случайная величина. Вычислим её моменты:

$$\mathbb{E}_\theta \xi^k = \int_0^\theta \frac{x^k}{\theta - 0} dx = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\theta^{k+1} - 0^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\theta^{k+1}}{\theta} = \frac{\theta^k}{k+1}.$$

Из вычисления выше следует, что оценка  $(k+1)X^k$  несмещена для  $\theta^k$ .

Пусть теперь  $X_1, \dots, X_n \sim R[0, \theta]$  — независимые случайные величины. Тогда

$$\mathbb{E}_\theta (k+1) \overline{X^k} = \frac{k+1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}_\theta X_1^k = (k+1) \cdot \frac{\theta^k}{k+1} = \theta^k.$$

Вычислим среднеквадратичный риск:

$$\begin{aligned} D_\theta(k+1)\overline{X^k} &= (k+1)^2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{m=1}^n D X_m^k = (k+1)^2 \cdot \frac{n}{n^2} D X_1^k = \\ &= \frac{(k+1)^2}{n} \cdot (\mathbb{E} X_1^{2k} - (\mathbb{E} X_1^k)^2) = \frac{(k+1)^2}{n} \cdot \left( \frac{\theta^{2k}}{2k+1} - \frac{\theta^{2k}}{(k+1)^2} \right) = \frac{\theta^{2k}}{n} \cdot \frac{k^2}{2k+1}. \end{aligned}$$

### Задача 4б

Из определения функции распределения, независимости и одинаковой распределённости имеем:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)},\theta}(x) &= P_\theta(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P_\theta(X_1 \leq x \wedge \dots \wedge X_n \leq x) = \\ &= P_\theta(X_1 \leq x) \cdot \dots \cdot P_\theta(X_n \leq x) = F_{X_1,\theta}(x) \cdot \dots \cdot F_{X_n,\theta}(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \cdot I(x \in [0, \theta]) + I(x \in (\theta, +\infty)). \end{aligned}$$

Поскольку в точках непрерывности функции плотности, она совпадает с производной от функции распределения, то  $f_{X_{(n)},\theta}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \cdot I(x \in [0, \theta])$ .

### Задача 4в

Найдём несмешённую оценку для  $\frac{1}{\theta^3}$  от  $X_{(n)}$  (здесь  $n > 3$ ). Предположим, что  $g$  — искомая оценка. Тогда мы имеем равенство

$$\frac{1}{\theta^3} = \mathbb{E}_\theta g(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t) \cdot nt^{n-1}}{\theta^n} \cdot I(t \in [0, \theta]) dt = \int_0^\theta \frac{g(t) \cdot nt^{n-1}}{\theta^n} dt.$$

Отсюда

$$\theta^{n-3} = \int_0^\theta g(t) \cdot nt^{n-1} dt.$$

Дифференцируя по  $\theta$ , получаем

$$(n-3)\theta^{n-4} = ng(\theta)\theta^{n-1}$$

и, наконец,

$$g(\theta) = \frac{n-3}{n\theta^3}, g(X_{(n)}) = \frac{n-3}{nX_{(n)}^3}.$$

### задача 4г

Предположим, что существует оценка  $g$  такая, что  $\mathbb{E}_\theta g(X_1) = \frac{1}{\theta^3}$ . Тогда выполнено равенство

$$\frac{1}{\theta^3} = \int_0^\theta \frac{g(t)}{\theta} dt.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\theta^2} = \int_0^\theta g(t) dt$$

и после дифференцирования по  $\theta$  получаем

$$\frac{-2}{\theta^3} = g(\theta).$$

Однако, интеграл  $\int_0^\theta \frac{-2}{t^3} dt$  расходится, что противоречит предположению о существовании такой оценки  $g$ .

