Решения задач по математической статистике

СЕМИНАРИСТ И АВТОР ЗАДАЧ: Г.А. БАКАЙ
РЕШЕНИЯ: К. ЗЮБИН

Содержание

1. Несмещённые оценки

Приведём несколько стандартных утверждений.

Предложение 1. *Пусть $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ — нормально распределённая случайная величина. Тогда*

$$\mathrm{E}\,X = a, \mathrm{E}\,X^2 = \sigma^2 + a^2, \mathrm{D}\,X = \sigma^2, \mathrm{E}\,|X - a| = \sigma \cdot \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}.$$

Доказательство. Для матожиданий имеем

$$\mathrm{E}\,X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 0 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = a \cdot 1 = a.$$

$$\mathrm{E}\,X^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{u^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{t^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{2at}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{a^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} d\tfrac{t^2}{2} + 0 + a^2 \cdot 1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-\sigma^2) de^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} + a^2 =$$

$$= -\tfrac{t\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + a^2 = 0 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{\sigma \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + a^2 = \sigma^2 + a^2.$$

$$\mathrm{E}\,|X-a| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u-a|}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}d\frac{t^2}{2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-\sigma^2)de^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Из формулы дисперсии получаем

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{E}\,X^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 = (\sigma^2 + a^2) - a^2 = \sigma^2.$$

$\square$

Предложение 2. *Пусть $X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$ — две нормально распределённые случайные величины. Тогда их свёртка $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ имеет нормальное распределение.*

Задача 1а

Пусть даны независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2), \theta_2 > 0$. Проверим, что оценка $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ несмещена относительно θ_1. Действительно, по линейности матожидания и так как $\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2} X_i = \theta_1$ имеем

$$\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,X_i = \frac{1}{n}\cdot n\theta_1 = \theta_1.$$

Задача 1б

Проверим, что оценка

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + (\overline{X})^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2(\overline{X})^2 + (\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - (\overline{X})^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

смещена относительно θ_2^2. Имеем

$$\theta_2^2 = \mathrm{D}_{\theta_1,\theta_2}\,X_i = \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,X_i^2 - (\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,X_i)^2 = \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,X_i^2 - \theta_1^2.$$

Кроме того,

$$\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,\overline{X}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,X_i^2 + \sum_{i<j}^{n}\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}(2X_iX_j)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n(\theta_1^2 + \theta_2^2) + n(n-1)\,\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,X_i\,\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,X_j\right) = \frac{1}{n^2}\left(n(\theta_1^2 + \theta_2^2) + n(n-1)\theta_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\theta_2^2 + \theta_1^2.$$

Отсюда

$$\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,S_n^2 = \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,\overline{X^2} - \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}\,\overline{X}^2 = \frac{1}{n}\cdot n(\theta_1^2 + \theta_2^2) - (\frac{1}{n}\theta_2^2 + \theta_1^2) = \frac{n-1}{n}\theta_2^2 \neq \theta_2^2.$$

Задача 1в

В качестве чисел a_n (для $n > 1$) следует взять дроби $\frac{n}{n-1}$. Тогда, по доказанному выше

$$\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}(\frac{n}{n-1}\cdot S_n^2) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\theta_2^2 = \theta_2^2.$$

Положим $T = \sum\limits_{i=1}^{n-1} |X_i - X_{i+1}|$. Случайная величина $-X_{i+1}$ имеет распределение $\mathcal{N}(-\theta_1, \theta_2^2)$. По формуле для свёртки нормально распределённых случайных величин случайная величина $X_i - X_{i+1}$ имеет распределение $\mathcal{N}(0, 2\theta_2^2)$. Первый момент такой случайной величины равен $\sqrt{2}\theta_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{2\theta_2}{\sqrt{\pi}}$. Теперь мы можем вычислить матожидание T:

$$\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2} T = (n-1)\,\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2} |X_1 - X_2| = \tfrac{2(n-1)}{\sqrt{\pi}} \cdot \theta_2.$$

В качестве членов последовательности b_n следует взять числа $\frac{\sqrt{\pi}}{2(n-1)}$.

Задача 2а

Вычислим моменты случайной величины $X \sim \mathrm{E}(\theta)$ с экспоненциальным распределением. Имеем

$$\mathrm{E}\, X^k = \int\limits_0^{+\infty} \theta x^k e^{-\theta x} dx = - \int\limits_0^{+\infty} x^k de^{-\theta x} =$$

$$= -x^k e^{-\theta x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx^k = \int\limits_0^{+\infty} k x^{k-1} e^{-\theta x} dx = \tfrac{k}{\theta}\,\mathrm{E}\, X^{k-1}.$$

Согласно это формуле

$$\mathrm{E}\, X^k = \tfrac{k!}{\theta^k}\,\mathrm{E}\, X^0 = \tfrac{k!}{\theta^k}.$$

Пусть теперь $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$ — независимые одинаково распределённые случайные величины. Тогда имеем

$$\mathrm{E}_\theta\, \overline{X^k} = \tfrac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_\theta\, X_i^k = \tfrac{1}{n} \cdot n \cdot \mathrm{E}_\theta\, X_1^k = k! \cdot \theta^k.$$

Подходящей последовательностью чисел c_k будет последовательность $\frac{1}{k!}$. Действительно, $\mathrm{E}_\theta\, \overline{X^k} \cdot c_k = k! \cdot \theta^k \cdot \frac{1}{k!} = \theta^k$.

Задача 2б

Пусть $P(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \theta^k$ — многочлен. Проверим, что оценка $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \overline{X^k}$ несмещена для $P(\theta)$. Имеем

$$\mathrm{E}_\theta \sum_{k=0}^{n} \tfrac{a_k}{k!} \overline{X^k} = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{a_k}{k!} \cdot \mathrm{E}_\theta\, \overline{X^k} = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{a_k}{k!} \cdot k! \cdot \theta^k = P(\theta).$$

Задача 3а

Вычислим матожидание случайной величины $X \sim \mathrm{Geom}(\theta)$ ($\mathrm{P}(X = k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$) с геометрическим распределением:

$$\mathrm{E}\, X = \sum_{k=1}^{+\infty} k\theta(1-\theta)^{k-1} = \theta \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-\theta)^{k-1} = \theta \left(- \sum_{k=1}^{+\infty} (1-\theta)^k \right)' =$$

$$= \theta \left(-\tfrac{1-\theta}{1-(1-\theta)} - 1 \right)' = \theta \left(\tfrac{-1}{\theta} \right)' = \theta \cdot \tfrac{1}{\theta^2} = \tfrac{1}{\theta}.$$

Пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Geom}(\theta)$ имеют геометрическое распределение ($\theta \in (0,1)$).

Пусть $g(X_1)$ — несмещённая оценка для функции $f(\theta)$. Тогда

$$f(\theta) = \mathrm{E}_\theta\, g(X_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)\theta(1-\theta)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k+1)(-1)^k\theta(\theta-1)^k.$$

или

$$\tfrac{f(\theta)}{\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k+1)(-1)^k(\theta-1)^k.$$

Далее будем рассматривать разложение в ряд Тейлора функции $\frac{f(\theta)}{\theta}$ около точки 1. Чтобы ряды сходились к одной и той же функции, их коэффициенты обязаны быть равными. Таким образом, сопоставляя коэффициенты рядов, мы вычислим функцию g.

Для $f(\theta) = \theta$ имеем $\frac{f(\theta)}{\theta} = 1 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 0 \cdot (\theta-1)^k$. Тогда $g(1) = 1$ и $g(k) = 0$ для $k \neq 1$. Имеем $g(k) = I(k=1)$ и $g(X_1) = I(X_1 = 1)$.

Для $f(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta}$ имеем

$$\tfrac{f(\theta)}{\theta} = \tfrac{1-\theta}{\theta^2} = \tfrac{1}{\theta^2} - \tfrac{1}{\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^k(k+1)!}{k!}(\theta-1)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^k k!}{k!}(\theta-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1-1)(\theta-1)^k.$$

Отсюда $g(k+1)(-1)^k = (-1)^k k$ и $g(k) = k-1$.

Для $f(\theta) = \theta^2$ имеем

$$\tfrac{f(\theta)}{\theta} = \theta = 1 + (\theta - 1).$$

Отсюда $g(1)(-1)^0 = 1, g(2)(-1)^1 = 1$ и $g(k) = 0$ при $k \neq 1, 2$. Поэтому

$$g(k) = I(k=1) - I(k=2).$$

Задача 3б

Рассмотрим функцию $g(X_1, X_2) = I(X_1 = 1) \cdot I(X_2 = 1)$. Поскольку X_1 и X_2 независимы, то независимы $I(X_1 = 1)$ и $I(X_2 = 1)$. Поэтому

$$\mathrm{E}_\theta\, g(X_1, X_2) = \mathrm{E}_\theta\, I(X_1 = 1) \cdot \mathrm{E}_\theta\, I(X_1 = 1) = \theta \cdot \theta = \theta^2.$$

Задача 3в

Предположим, что g — искомая оценка. Тогда, как было показано ранее, выполнено равенство

$$\tfrac{1}{1-\theta} = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)\theta(1-\theta)^k.$$

Отсюда

$$\tfrac{1}{\theta} = \sum_{k=1}^{+\infty} g(k)(-1)^k(\theta-1)^k.$$

Разложим $\frac{1}{\theta}$ в ряд Тейлора около точки 1:

$$\tfrac{1}{\theta} = \tfrac{1}{1+(\theta-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(\theta-1)^k.$$

В разложении в ряд присутствует ненулевой свободный член, тогда как в сумме $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} g(k)(-1)^k(\theta - 1)^k$ он равен 0, поэтому эти ряды не могут сходиться к одной и той же функции.

Задача 4а

Пусть $X \sim R[0,\theta]$ — случайная величины. Вычислим её моменты:

$$\mathrm{E}_\theta\, \xi^k = \int\limits_0^\theta \tfrac{x^k}{\theta-0} dx = \tfrac{1}{\theta} \cdot \tfrac{\theta^{k+1}-0^{k+1}}{k+1} = \tfrac{1}{k+1} \cdot \tfrac{\theta^{k+1}}{\theta} = \tfrac{\theta^k}{k+1}.$$

Из вычисления выше следует, что оценка $(k+1)X^k$ несмещена для θ^k.

Пусть теперь $X_1, \ldots, X_n \sim R[0,\theta]$ — независимые случайные величины. Тогда

$$\mathrm{E}_\theta (k+1)\overline{X^k} = \tfrac{k+1}{n} \cdot n \cdot \mathrm{E}_\theta\, X_1^k = (k+1) \cdot \tfrac{\theta^k}{k+1} = \theta^k.$$

Вычислим среднеквадратичный риск:

$$\mathrm{D}_\theta (k+1)\overline{X^k} = (k+1)^2 \cdot \tfrac{1}{n^2} \cdot \sum_{m=1}^{n} \mathrm{D}\, X_m^k = (k+1)^2 \cdot \tfrac{n}{n^2}\, \mathrm{D}\, X_1^k =$$

$$= \tfrac{(k+1)^2}{n} \cdot (\mathrm{E}\, X_1^{2k} - (\mathrm{E}\, X_1^k)^2) = \tfrac{(k+1)^2}{n} \cdot (\tfrac{\theta^{2k}}{2k+1} - \tfrac{\theta^{2k}}{(k+1)^2}) = \tfrac{\theta^{2k}}{n} \cdot \tfrac{k^2}{2k+1}.$$

Задача 4б

Из определения функции распределения, независимости и одинаковой распределённости имеем:

$$F_{X_{(n)},\theta}(x) = \mathrm{P}_\theta(\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x) = \mathrm{P}_\theta(X_1 \leqslant x \wedge \ldots \wedge X_n \leqslant x) =$$

$$= \mathrm{P}_\theta(X_1 \leqslant x) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}_\theta(X_n \leqslant x) = F_{X_1,\theta}(x) \cdot \ldots \cdot F_{X_n,\theta}(x) = (\tfrac{x}{\theta})^n \cdot I(x \in [0,\theta]) + I(x \in (\theta, +\infty)).$$

Поскольку в точках непрерывности функции плотности, она совпадает с производной от функции распределения, то $f_{X_{(n)},\theta}(x) = \tfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} \cdot I(x \in [0,\theta])$.

Задача 4в

Найдём несмещённую оценку для $\frac{1}{\theta^3}$ от $X_{(n)}$ (здесь $n > 3$). Предположим, что g — искомая оценка. Тогда мы имеем равенство

$$\tfrac{1}{\theta^3} = \mathrm{E}_\theta\, g(X_{(n)}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{g(t) \cdot nt^{n-1}}{\theta^n} \cdot I(t \in [0,\theta]) dt = \int\limits_0^\theta \tfrac{g(t) \cdot nt^{n-1}}{\theta^n} dt.$$

Отсюда

$$\theta^{n-3} = \int\limits_0^\theta g(t) \cdot nt^{n-1} dt.$$

Дифференцируя по θ, получаем

$$(n-3)\theta^{n-4} = ng(\theta)\theta^{n-1}$$

и, наконец,

$$g(\theta) = \tfrac{n-3}{n\theta^3}, g(X_{(n)}) = \tfrac{n-3}{nX_{(n)}^3}.$$

задача 4г

Предположим, что существует оценка g такая, что $\mathrm{E}_\theta\, g(X_1) = \frac{1}{\theta^3}$. Тогда выполнено равенство

$$\tfrac{1}{\theta^3} = \int\limits_0^\theta \tfrac{g(t)}{\theta} dt.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\theta^2} = \int\limits_0^\theta g(t)dt$$

и после дифференцирования по θ получаем

$$\frac{-2}{\theta^3} = g(\theta).$$

Однако, интеграл $\int\limits_0^\theta \frac{-2}{t^3}dt$ расходится, что противоречит предположению о существовании такой оценки g.

2. Асимптотические нормальные оценки

Задача 1аб

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{R}[0,\theta]$ — независимые случайные величины. Докажем, что оценки $\sqrt[k]{(k+1)\overline{X^k}}$ асимптотически нормальны для θ.

Прежде проверим, что оценка (последовательность оценок) $(k+1)\overline{X^k}$ асимптотически нормальна для θ и вычислим её асимптотическую дисперсию. Согласно вычислениям в задаче 4 первой домашней работы $\mathrm{E}_\theta(k+1)X_1^k = \theta^k$ и $\mathrm{D}_\theta(k+1)X_1^k = \frac{\theta^{2k}k^2}{2k+1}$. Тогда по центральной предельной теореме

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (k+1)X_i^k - \theta^k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{\theta^{2k}k^2}{2k+1}).$$

Пусть $f(x) = \sqrt[k]{x}$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}}$ не равно 0 при $\theta > 0$. По лемме об асимптотической нормальности для функции $f(x)$ получаем

$$\sqrt{n}\left(\sqrt[k]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (k+1)X_i^k} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \tilde{\eta} \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{\theta^{2k}k^2}{2k+1} \cdot (\tfrac{1}{k\theta^{k-1}})^2).$$

Асимптотическая дисперсия равна

$$\frac{\theta^{2k}k^2}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{k\theta^{k-1}}\right)^2 = \frac{\theta^2}{2k+1}.$$

Поскольку для $m > k$ выполнено неравенство $\frac{\theta^2}{2m+1} < \frac{\theta^2}{2k+1}$, то среди оценок такого вида нет оценки с наименьшей (при фиксированном θ) асимптотической дисперсией.

Задача 2а

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{R}[0,\theta]$ — независимые случайные величины. Проверим, что оценка $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ состоятельна для θ. Согласно вычислениям, выполненным ранее, имеем формулу

$$F_{X_{(n)},\theta}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & x \in [0,\theta]; \\ 1, & x > \theta. \end{cases}$$

Поэтому для малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathrm{P}_\theta(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon) = 1 - F_{X_{(n)}}(\theta+\varepsilon) + F_{X_{(n)}}(\theta-\varepsilon) = 1 - 1 + \frac{(\theta-\varepsilon)^n}{\theta^n} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n.$$

Последнее выражение стремится к 0 при $n \to +\infty$, так как $|1 - \frac{\varepsilon}{\theta}| < 1$. Следовательно, последовательность $X_{(n)}$ сходится по вероятности к θ и, по определению, состоятельна для θ.

Задача 2б

Найдём функцию распределения величины $n(\theta - X_{(n)})$:

$$F_{n(\theta - X_{(n)}),\theta}(x) = \mathrm{P}_\theta(n(\theta - X_{(n)}) \leqslant x) = \mathrm{P}_\theta(X_{(n)} \geqslant \theta - \tfrac{x}{n}) = 1 - F_{X_{(n)},\theta}(\theta - \tfrac{x}{n}) =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - (1 - \frac{x}{n\theta})^n, & x \in [0, n\theta]; \\ 1, & x > n\theta. \end{cases}$$

При $n \to +\infty$ данная последовательность функций распределений сходится к функции экспоненциального распределению

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, $n(\theta - X_{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}} \xi \sim \mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$.

Задача 3а

Пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ имеют стандартное нормальное распределение. Случайная величина $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, как свёртка n независимых нормально распределённых случайных величин, имеет распределение $\mathcal{N}(n\theta, n)$. Тогда случайная величина $\overline{X} = \frac{1}{n} S_n$ имеет распределение $\mathcal{N}(\theta, \frac{1}{n})$.

Задача 3б

Докажем, что при $\theta \neq 0$ последовательность случайных величин $\overline{X}^2$ является асимптотически нормальной для θ^2.

По центральной предельной теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \theta) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}} \eta \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Положим $f(x) = x^2$. При $\theta \neq 0$ производная $f'(x) = 2x$ не равна 0, поэтому по лемме об асимптотической нормальности имеем

$$\sqrt{n}(\overline{X}^2 - \theta^2) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}} \tilde{\eta} \sim \mathcal{N}(0, (2\theta)^2).$$

Задача 3в

В случае $\theta = 0$ рассмотрим функцию распределения случайной величины $\sqrt{n}\overline{X}^2$ при $n \to +\infty$:

$$F_{\sqrt{n}\overline{X}^2}(x) = \iint\limits_{x_1 x_2 \leqslant \frac{x}{\sqrt{n}}} \frac{n}{2\pi} e^{-\frac{n(x_1^2 + x_2^2)}{2}} dx_1 dx_2 = \iint\limits_{u_1 u_2 \leqslant \sqrt{n} x} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u_1^2 + u_2^2}{2}} du_1 du_2.$$

Для $x > 0$ имеем

$$\iint\limits_{u_1 u_2 \leqslant \sqrt{n} x, u_1^2 + u_2^2 \leqslant n} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u_1^2 + u_2^2}{2}} du_1 du_2 \leqslant \iint\limits_{u_1 u_2 \leqslant \sqrt{n} x} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u_1^2 + u_2^2}{2}} du_1 du_2 \leqslant 1.$$

Поскольку интеграл сходится абсолютно на всей плоскости, то при $x > 0$ выражение в левой части неравенства при $n \to +\infty$ стремится к 1, поэтому при $x > 0$ выполнено

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\sqrt{n}\overline{X}^2}(x) = 1.$$

При $x < 0$ имеем

$$0 \leqslant \iint\limits_{u_1u_2\leqslant\sqrt{n}x} \tfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}} du_1du_2 = \iint\limits_{-u_1u_2\geqslant-\sqrt{n}x} \tfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}} du_1du_2 \leqslant \iint\limits_{u_1^2+u_2^2\geqslant-\sqrt{n}x} \tfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}} du_1du_2.$$

Правая часть двойного неравенства стремится к 0 при $n \to +\infty$, поэтому для $x < 0$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\sqrt{n}\overline{X}^2}(x) = 0.$$

Таким образом, функции распределения $F_{\sqrt{n}\overline{X}^2}$ сходятся к функции распределения тождественно нулевой случайной величины и $\sqrt{n}\overline{X}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{d} 0$.

Задача 4а

Пусть даны независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Be}(\theta)$, где $\theta \in (0, 1)$. Поскольку $\mathrm{E}\, X_i = \theta$ и $\mathrm{D}\, X_i = \theta(1 - \theta)$, то по центральной предельной теореме имеем

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta)).$$

Положим $f(x) = e^x$. Тогда производная $f'(x) = e^x$ нигде не равна 0 и по лемме об асимптотической нормальности

$$\sqrt{n}(e^{\overline{X}} - e^\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \tilde{\eta} \sim \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta) \cdot e^{2\theta}).$$

Асимптотическая дисперсия равна $\theta(1 - \theta)e^{4\theta^2}$.

Задача 4б

Пусть даны независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Poiss}(\theta)$, где $\theta > 0$. Поскольку $\mathrm{E}\, X_i = \theta$ и $\mathrm{D}\, X_i = \theta$, то по центральной предельной теореме имеем

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, \theta).$$

Положим $f(x) = x^3$. Тогда производная $f'(x) = 3x^2$ не равна 0 при $\theta > 0$. По лемме об асимптотической нормальности

$$\sqrt{n}(\overline{X}^3 - \theta^3) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \tilde{\eta} \sim \mathcal{N}(0, \theta \cdot (3\theta^2)^2).$$

Асимптотическая дисперсия равна $9\theta^5$.

Задача 4в

Пусть даны независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Geom}(\theta)$, где $\theta \in (0, 1)$. Поскольку $\mathrm{E}\, X_i = \frac{1}{\theta}$ и $\mathrm{D}\, X_i = \frac{1-\theta}{\theta^2}$, то по центральной предельной теореме имеем

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \tfrac{1}{\theta}) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{1-\theta}{\theta^2}).$$

Положим $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда производная $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ не равна 0 при $\theta \in (0, 1)$. По лемме об асимптотической нормальности

$$\sqrt{n}(\overline{X}^{-2} - \theta^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \tilde{\eta} \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{1-\theta}{\theta^2} \cdot (-2\theta^3)^2).$$

Асимптотическая дисперсия равна $4(1-\theta)\theta^4$.

3. Построение оценок. Метод моментов и оценка максимального правдоподобия

Задача 1 («нулёвка»)

Пусть случайная величина X_1 распределена по закону

$$\mathrm{P}_{\theta_1,\theta_2}(X_1=k)=\theta_1\cdot\tfrac{e^{-1}}{k!}+(1-\theta_1)\cdot\tfrac{e^{-\theta_2}\theta_2^k}{k!},$$

где $\theta_1\in(0,1)$ и $\theta_2>0$. Построим оценки методом моментов для (θ_1,θ_2).

Имеем

$$a_1(\theta)=\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}X_1=\sum_{k=0}^{+\infty}k\theta_1\tfrac{e^{-1}}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}k(1-\theta_1)\tfrac{e^{-\theta_2}\theta_2^k}{k!}=\theta_1+(1-\theta_1)\theta_2,$$

$$a_2(\theta)=\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}X_1^2=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\theta_1\tfrac{e^{-1}}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}k^2(1-\theta_1)\tfrac{e^{-\theta_2}\theta_2^k}{k!}=\theta_1\cdot(1+1^2)+(1-\theta_1)\cdot(\theta_2+\theta_2^2)=2\theta_1+(1-\theta_1)\cdot(\theta_2+\theta_2^2).$$

Далее для упрощения записи будем опускать обозначение аргумента у a_1 и a_2. Выразим θ_2 из первого равенства:

$$\tfrac{a_1-\theta_1}{1-\theta_1}=\theta_2.$$

Аналогично преобразуем второе равенство и подставим в него выражение для θ_2:

$$\tfrac{a_2-2\theta_1}{1-\theta}=\theta_2+\theta_2^2,$$

$$\tfrac{a_2-2\theta_1}{1-\theta}=\tfrac{a_1-\theta_1}{1-\theta_1}+\left(\tfrac{a_1-\theta_1}{1-\theta_1}\right)^2.$$

Умножая на $(1-\theta_1)^2$ получаем

$$(a_2-2\theta_1)(1-\theta_1)=(a_1-\theta_1)(1-\theta_1)+(a_1-\theta_1)^2,$$

$$a_2+\theta_1(-a_2-2)+2\theta_1^2=a_1+a_1^2+\theta_1(-a_1-1-2a_1)+2\theta_1^2,$$

$$\theta_1=\tfrac{a_2-a_1-a_1^2}{1+a_2-3a_1}.$$

Подставим в выражение для θ_2:

$$\theta_2=\tfrac{a_1(1+a_2-3a_1)-(a_2-a_1-a_1^2)}{(1+a_2-3a_1)-(a_2-a_1-a_1^2)}=\tfrac{-2a_1^2-2a_1-a_2+a_1a_2}{(a_1-1)^2}.$$

Тогда

$$\widehat{\theta_1}=\tfrac{\overline{X^2}-\overline{X}-\overline{X}^2}{1+\overline{X^2}-3\overline{X}},\widehat{\theta_2}=\tfrac{-2\overline{X}^2-2\overline{X}-\overline{X^2}+\overline{X}\,\overline{X^2}}{(1-\overline{X})^2}.$$

Задача 2 (нормальное распределение)

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathcal{N}(\theta,1)$. Имеем формулу для плотности $f_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$. Тогда

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{j=1}^n f_\theta(x_j)=(2\pi)^{\frac{-n}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^n(x_j-\theta)^2}.$$

Для нахождения точки максимума достаточно исследовать точки минимума функции $\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\theta)^2$. Дифференцируя по θ и приравнивая производную к 0, получаем

$$0 = \sum_{j=1}^{n} 2(x_j - \theta) = \sum_{j=1}^{n} 2x_j - 2n\theta,$$

$$\theta = \tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Таким образом, экстремум достигается в точке $\theta = \overline{X}$. Поскольку функция $\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\theta)^2$ является квадратичным многочленом от θ с положительным старшим коэффициентом, то её экстремум является точкой минимума.

Согласно центральной предельное теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Следовательно, оценка асимптотически нормальна для θ и асимптотическая дисперсия равна 1.

Задача 2 (экспоненциальное распределение)

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$, где $\theta > 0$. Имеем формулу для плотности $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ при $x \geqslant 0$. Тогда

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = \tfrac{1}{\theta^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\theta}}$$

при $x_1,\ldots,x_n \geqslant 0$, и $f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = 0$, если хотя бы одна из координат отрицательна. Для нахождения точек максимума продифференцируем совместную плотность по θ при фиксированных x_i:

$$\tfrac{d}{d\theta} f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = \tfrac{-n}{\theta^{n+1}}e^{-\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\theta}} + \sum_{j=1}^{n}\tfrac{x_j}{\theta^{n+2}}e^{-\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\theta}} = \tfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j - n\theta}{\theta^{n+2}}e^{-\frac{nx}{\theta}}.$$

Равенство нулю достигается при $\theta = \overline{X}$. Поскольку при больших значениях производная будет отрицательна, а при меньших — положительна, точка $\theta = \overline{X}$ является точкой максимума.

Математическое ожидание X_1 равно $\mathrm{E}_\theta X_1 = \theta$, а дисперсия — $\mathrm{D}_\theta X_1 = \theta^2$. Согласно центральной предельное теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0,\theta^2).$$

Следовательно, оценка асимптотически нормальна для θ и асимптотическая дисперсия равна θ^2.

Задача 2 (распределение Пуассона)

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathrm{Poiss}(\theta)$, где $\theta > 0$. Имеем

$$L(\theta,x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{P}_\theta(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) = \prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(X_j = x_j) = e^{-n\theta}\tfrac{1}{x_1!\ldots x_n!}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}.$$

Достаточно найти точки максимума для функции $e^{n\theta}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}$. Продифференцируем:

$$-ne^{-n\theta}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}+(x_1+x_2+\ldots+x_n)e^{-n\theta}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)-1} = (-n\theta+x_1+x_2+\ldots+x_n)e^{-\frac{n}{\theta}}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)-1}.$$

Производная принимает значение 0 в точке $\theta = \overline{X}$, положительнапри меньших значениях и отрицательна при больших, поэтому точка $\theta = \overline{X}$ является точкой максимума.

Матожидание и дисперсия X_1 равны $\mathrm{E}_\theta X_1 = \theta$ и $\mathrm{D}_\theta X_1 = \theta^2$, соответственно. Согласно центральной предельное теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, \theta^2).$$

Следовательно, оценка асимптотически нормальна для θ и асимптотическая дисперсия равна θ^2.

Задача 2 (геометрическое распределение)

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathrm{Geom}(\theta)$, где $\theta \in (0, 1)$. Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j = x_j) = \theta^n(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}.$$

Продифференцируем:

$$n\theta^{n-1}(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n} - (x_1+\ldots+x_n-n)\theta^n(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n-1} =$$
$$= (n(1-\theta) - (x_1+\ldots+x_n-n)\theta)\theta^{n-1}(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n-1} =$$
$$= (n - (x_1+\ldots+x_n)\theta)\theta^{n-1}(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n-1}.$$

Нуль достигается в точке $\theta = \frac{1}{\overline{X}}$. Поскольку при меньших значениях производная положительна, а при больших отрицательна, то точка $\theta = \frac{1}{\overline{X}}$ является точкой максимума.

Матожидание и дисперсия X_1 равны $\mathrm{E}_\theta X_1 = \frac{1}{\theta}$ и $\mathrm{D}_\theta X_1 = \frac{1-\theta}{\theta^2}$, соответственно. Согласно центральной предельное теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \tfrac{1}{\theta}) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{1-\theta}{\theta^2}).$$

Поскольку производная функции $g(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$ не обращается в 0, то по лемме о асимптотической нормальности имеем

$$\sqrt{n}(\tfrac{1}{\overline{X}} - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \tilde{\eta} \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{1-\theta}{\theta^2} \cdot \theta^4).$$

Таким образом, оценка $\frac{1}{\overline{X}}$ асимптотически нормальна для θ и имеет асимптотическую дисперсию $(1-\theta)\theta^2$.

Задача 3

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{R}[\theta_1, \theta_2]$ независимы и одинаково распределены. Они имеют плотности $f_{\theta_1,\theta_2}(x) = \frac{1}{\theta_2-\theta_1} I(\theta_1 \leqslant x \leqslant \theta_2)$. Найдём оценку методом моментов и оценку максимального правдоподобия.

Имеем

$$a_1(\theta) = \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2} X_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tfrac{u}{\theta_2-\theta_1} du = \tfrac{\theta_1+\theta_2}{2},$$

$$a_2(\theta) = \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2} X_1^2 = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \tfrac{u^2}{\theta_2-\theta_1} du = \tfrac{\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2}{3}.$$

Отсюда

$$(2a_1)^2 - 3a_2 = (\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + \theta_2^2) - (\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2) = \theta_1\theta_2.$$

Тогда θ_1 и θ_2 являются корнями уравнения $\tau^2 - 2a_1\tau + (4a_1^2 - 3a_2) = 0$. Имеем $\theta_1 = \frac{2a_1 - \sqrt{4a_1^2 - 4(4a_1^2 - 3a_2)}}{2} = a_1 - \sqrt{3(a_2 - a_1^2)}$ и $\theta_2 = a_1 + \sqrt{3(a_2 - a_1^2)}$ (можно отметить, что под знаком корня стоит утроенная дисперсия, и поэтому оба значения θ_1 и θ_2 будут вещественными). Окончательно, $\hat{\theta}_1 = \overline{X} - \sqrt{3(\overline{X^2} - \overline{X}^2)}$ и $\hat{\theta}_2 = \overline{X} + \sqrt{3(\overline{X^2} - \overline{X}^2)}$.

Теперь вычислим оценку максимального правдоподобия. Из формулы для плотности имеем

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_\theta(x_j) = \tfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n},$$

при всех $x_i \in [\theta_1, \theta_2]$ и $f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = 0$ иначе. Наибольшее значение достигается для отрезка $[\theta_1, \theta_2]$ наименьшей длины, содержащего все точки x_i (чтобы значение не стало равным 0). Эта ситуация достигается, когда $\theta_1 = \min\limits_{i=1\ldots n} X_i = X_{(1)}$ и $\theta_2 = \max\limits_{i=1\ldots n} X_i = X_{(n)}$.

Задача 4

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ распределены с плотностью $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} I(x \geqslant \theta)$.

Найдём оценку методом моментов. Имеем

$$a_1(\theta) = \mathrm{E}\, X_1 = \int\limits_\theta^{+\infty} ue^{-(u-\theta)}du = \int\limits_0^{+\infty} (s+\theta)e^{-s}ds = -se^{-s}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}ds + \int\limits_0^{+\infty} \theta e^{-s}ds = \theta + 1.$$

Тогда $\theta = a_1(\theta) - 1$ или $\hat{\theta} = \overline{X} - 1$.

Вычислим оценку максимального правдоподобия. Из формулы для плотности имеем

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_\theta(x_j) = e^{x_1+\ldots+x_n-n\theta} \cdot \prod_{j=1}^n I(x_j \geqslant \theta).$$

Наибольшее значение достигается при наибольшем θ таком, что для всех j выполнены неравенства $x_j \geqslant \theta$, то есть при $\theta = \min\limits_{j=1\ldots n} X_i = X_{(1)}$.

Чтобы проверить асимптотическую нормальности вычислим функцию распределения

$$Y = \sqrt{n}(X_{(1)} - \theta):$$

$$F_{Y,\theta}(x) = \mathrm{P}_\theta(\sqrt{n}(X_{(1)} - \theta) \leqslant x) = \mathrm{P}_\theta(X_{(1)} \leqslant \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}_\theta(X_{(1)} > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta) = 1 - \mathrm{P}_\theta(X_1 > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta, X_2 > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta, \ldots, X_n > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}(X_1 > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta)^n = 1 - \left(\int\limits_{\frac{x}{\sqrt{n}}+\theta}^{+\infty} e^{-(u-\theta)} I(u \geqslant \theta) du \right)^n = 1 - \left(\int\limits_{\max(\frac{x}{\sqrt{n}}+\theta, \theta)}^{+\infty} e^{-(u-\theta)} du \right)^n =$$

$$= 1 - \left(\int\limits_{\max(\frac{x}{\sqrt{n}}, 0)}^{+\infty} e^{-s} ds \right)^n = 1 - e^{-n \cdot \max(\frac{x}{\sqrt{n}}, 0)}.$$

При $n \to +\infty$ получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X(1),\theta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, функции распределения $F_{Y,\theta}$ сходятся к функции распределения константы 0 и оценка $X_{(1)}$ не является асимптотически нормальной.

Задача 5 (уравнение правдоподобия для первой «нулёвки»)

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Cauchy}(\theta)$ независимы и имеют распределение Коши. Плотность имеет вид $f_\theta(x) = \frac{1}{\pi((x-\theta)^2+1)}$. Тогда

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_\theta(x_j) = \frac{1}{\pi^n} \cdot \frac{1}{\prod_{j=1}^n((x_j-\theta)^2+1)}.$$

Продифференцируем по θ и приравняем к 0, чтобы получить уравнение правдоподобия:

$$\frac{1}{\pi^n} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{2x_j - 2\theta}{((x_j-\theta)^2+1)^2} \cdot \prod_{k\neq j} \frac{1}{(x_k-\theta)^2+1} \right) = 0.$$

Задача 5 (уравнение правдоподобия для второй «нулёвки»)

Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{j=1}^n \mathrm{P}(X_j = x_j) = \prod_{j=1}^n \left(\theta_1 \cdot \frac{e^{-1}}{x_j!} + (1-\theta_1) \cdot \frac{e^{-\theta_2}\theta_2^{x_j}}{x_j!} \right) =$$

$$= \frac{1}{x_1! \ldots x_n!} \cdot \prod_{j=1}^n (\theta_1 e^{-1} + (1-\theta_1)e^{-\theta_2}\theta_2^{x_j}).$$

Выпишем частные производные от $g(\theta) = \prod\limits_{j=1}^n (\theta_1 e^{-1} + (1-\theta_1)e^{-\theta_2}\theta_2^{x_j})$ по θ_i и приравняем их к 0, чтобы получить уравнения правдоподобия.

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_1}\Big|_{\theta_1,\theta_2} = \sum_{j=1}^n \left((e^{-1} - e^{-\theta_2}\theta_2^{x_j}) \cdot \prod_{i\neq j} (\theta_1 e^{-1} + (1-\theta_1)e^{-\theta_2}\theta_2^{x_i}) \right) = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_2}\Big|_{\theta_1,\theta_2} = (1-\theta_1) \sum_{j=1}^n \left(e^{-\theta_2}(-\theta_2^{x_j} + x_j\theta_2^{x_j-1}) \cdot \prod_{i\neq j} (\theta_1 e^{-1} + (1-\theta_1)e^{-\theta_2}\theta_2^{x_i}) \right) = 0.$$

Задачи к семинару 25.09

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Имеем формулу для плотности $f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Тогда

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_\theta(x_j) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^n (x_j-a)^2}.$$

Далее будем исследовать точки максимума логарифма

$$M(a, \sigma) = \ln\left(\frac{1}{\sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^n (x_j-a)^2} \right) = -n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (x_j-a)^2.$$

Вычислим частные производные по a и σ. Тогда производную функции $g(\theta) = M(a_0(\theta), \sigma_0(\theta))$ можно будет вычислить по формуле

$$\frac{dg}{d\theta}\Big|_\theta = \frac{\partial M}{\partial a}\Big|_{a_0(\theta)} \frac{da_0}{d\theta}\Big|_\theta + \frac{\partial M}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma_0(\theta)} \frac{d\sigma_0}{d\theta}\Big|_\theta.$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial a}\Big|_a = -\frac{1}{\sigma^2}\left(na - \sum_{j=1}^n x_j\right),$$

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma}\Big|_\sigma = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{j=1}^n (x_j - a)^2.$$

Пусть $a_0(\theta) = \theta, \sigma_0(\theta)^2 = \theta^2, \theta \neq 0$. Тогда производная приобретает вид

$$\frac{dg}{d\theta}\Big|_{(\theta)} = -\frac{1}{\theta^2}\left(n\theta - \sum_{j=1}^n x_j\right) - \frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum_{j=1}^n (x_j - \theta)^2 =$$

$$= -\frac{n}{\theta} - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{\theta^2} + \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{\theta^3} = -\frac{n\theta^2 + \theta(x_1 + \ldots + x_n) - (x_1^2 + \ldots + x_n^2)}{\theta^3}.$$

Значение 0 достигается в корнях квадратного многочлена: $\theta = \frac{-\overline{X} \pm \sqrt{\overline{X}^2 + 4\overline{X^2}}}{2}$. Одно из значений отрицательно, а другое положительно, поэтому при переходе через каждый корень производная меняет знак с положительного на отрицательный и, следовательно, обе точки являются точками максимума.

Пусть $a_0(\theta) = 0, \sigma_0(\theta) = \sqrt{\theta}, \theta > 0$. Тогда производная приобретает вид

$$\frac{dg}{d\theta}\Big|_{(\theta)} = \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\left(-\frac{n}{\sqrt{\theta}} + \frac{1}{\theta\sqrt{\theta}}\sum_{j=1}^n x_j^2\right) =$$

$$= \frac{-n\theta + x_1^2 + \ldots + x_n^2}{2\theta^2}.$$

Значение 0 достигается в точке $\theta = \overline{X^2}$. При меньших θ производная положительна, а при больших — отрицательна. Следовательно, $\theta = \overline{X^2}$ — точка максимума.

Пусть $a_0(\theta) = \theta, \sigma_0(\theta) = \sqrt{\theta}, \theta > 0$. Тогда производная приобретает вид

$$\frac{dg}{d\theta}\Big|_{(\theta)} = -\frac{1}{\theta}\left(n\theta - \sum_{j=1}^n x_j\right) + \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\left(-\frac{n}{\sqrt{\theta}} + \frac{1}{\theta\sqrt{\theta}}\sum_{j=1}^n (x_j - \theta)^2\right) =$$

$$= \frac{-n\theta^2 - n\theta + x_1^2 + \ldots + x_n^2}{2\theta^2}.$$

Значение 0 достигается в корнях квадратного многочлена: $\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\overline{X^2}}}{2}$. Поскольку между корнями производная принимает положительные значения, то точкой максимума является только больший корень: $\theta = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\overline{X^2}}}{2}$.

4. Информация Фишера

Задача 1 («нулёвка»)

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ независимы и одинаково распределены. Вычислим информация Фишера. Имеем формулу для плотности $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$. Тогда

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_\theta(x_j) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^n (x_j - \theta)^2}.$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\big|_\theta = -\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\theta-x_j) = -n\theta+\sum_{i=1}^{n}x_j.$$

Окончательно,

$$\mathrm{E}_\theta\left(-n\theta+\sum_{i=1}^{n}X_j\right)^2 = n^2\theta^2-2n\theta\cdot\mathrm{E}_\theta\left(\sum_{i=1}^{n}X_j\right)+\mathrm{E}_\theta\left(\sum_{i=1}^{n}X_j\right)^2 =$$

$$= n^2\theta^2-2n\theta\cdot n\theta+n^2\theta^2+n=n.$$

Задача 2 ($\mathcal{N}(\theta,\theta^2)$)

Вычислим информацию Фишера для независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1,\ldots,X_n\sim\mathcal{N}(\theta,\theta^2)$. Из вычислений выше имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\big|_\theta = -\tfrac{n}{\theta}-\tfrac{x_1+\ldots+x_n}{\theta^2}+\tfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{\theta^3}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\Big|_\theta = \tfrac{n}{\theta^2}+2\cdot\tfrac{x_1+\ldots+x_n}{\theta^3}-3\cdot\tfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{\theta^4}.$$

Отсюда

$$\mathrm{E}_\theta\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(X_1,\ldots,X_n,\theta)\big|_\theta\right)^2 = \mathrm{E}_\theta\left(-\tfrac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln L(X_1,\ldots,X_n,\theta)\Big|_\theta\right) = \mathrm{E}_\theta(-\tfrac{n}{\theta^2}-2\cdot\tfrac{X_1+\ldots+X_n}{\theta^3}+3\cdot\tfrac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{\theta^4}) =$$

$$= -\tfrac{n}{\theta^2}-\tfrac{2n\theta}{\theta^3}+\tfrac{3n(\theta^2+\theta^2)}{\theta^4}=\tfrac{3n}{\theta^2}.$$

Задача 2 ($\mathcal{N}(0,\theta)$)

Вычислим информацию Фишера для независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1,\ldots,X_n\sim\mathcal{N}(0,\theta)$. Из вычислений выше имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\big|_\theta = -\tfrac{n}{2\theta}+\tfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{2\theta^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\Big|_\theta = \tfrac{n}{2\theta^2}-\tfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{\theta^3}.$$

Отсюда

$$\mathrm{E}_\theta\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(X_1,\ldots,X_n,\theta)\big|_\theta\right)^2 = \mathrm{E}_\theta\left(-\tfrac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln L(X_1,\ldots,X_n,\theta)\Big|_\theta\right) = \mathrm{E}_\theta(-\tfrac{n}{2\theta^2}+\tfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{\theta^3}) =$$

$$= -\tfrac{n}{2\theta^2}+\tfrac{n\theta}{\theta^3}=\tfrac{n}{2\theta^2}.$$

Задача 2 ($\mathcal{N}(\theta,\theta)$)

Вычислим информацию Фишера для независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1,\ldots,X_n\sim\mathcal{N}(\theta,\theta)$. Из вычислений выше имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\big|_\theta = \tfrac{-n}{2}+\tfrac{-n}{2\theta}+\tfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{2\theta^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\Big|_\theta = \tfrac{n}{2\theta^2}-\tfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{\theta^3}.$$

Отсюда

$$\mathrm{E}_\theta\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(X_1,\ldots,X_n,\theta)\big|_\theta\right)^2 = \mathrm{E}_\theta\left(-\tfrac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln L(X_1,\ldots,X_n,\theta)\Big|_\theta\right) = \mathrm{E}_\theta(-\tfrac{n}{2\theta^2}+\tfrac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{\theta^3}) =$$

$$= -\tfrac{n}{2\theta^2}+\tfrac{n\theta}{\theta^3}=\tfrac{n}{2\theta^2}.$$

Задача 3

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Cauchy}(\theta)$ независимы и имеют распределение Коши. Плотность имеет вид $f_\theta(x) = \frac{1}{\pi((x-\theta)^2+1)}$. Вычислим информацию Фишера. Имеем

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = \tfrac{1}{\pi^n} \cdot \tfrac{1}{\prod_{j=1}^{n}((x_j-\theta)^2+1)}.$$

Далее,

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x_1, \ldots, x_n, \theta)\big|_\theta = \tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(-n\ln\pi - \sum_{j=1}^{n}\ln((x_j-\theta)^2+1)\right)\Bigg|_\theta = \sum_{j=1}^{n}\tfrac{2(x_j-\theta)}{(x_j-\theta)^2+1}.$$

Имеем

$$\mathrm{E}_\theta\, \tfrac{2(X_j-\theta)}{(X_j-\theta)^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{2(x_j-\theta)dx_j}{\pi((x_j-\theta)^2+1)^2} = 0,$$

поскольку подынтегральная функция после сдвига на θ становится нечётной. Из независимости для $j \neq k$ получаем

$$\mathrm{E}_\theta\, \tfrac{2(X_j-\theta)}{(X_j-\theta)^2+1} \cdot \tfrac{2(X_k-\theta)}{(X_k-\theta)^2+1} = \mathrm{E}_\theta\, \tfrac{2(X_j-\theta)}{(X_j-\theta)^2+1} \cdot \mathrm{E}_\theta\, \tfrac{2(X_k-\theta)}{(X_k-\theta)^2+1} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Также получаем

$$\mathrm{E}_\theta \left(\tfrac{2(X_j-\theta)}{(X_j-\theta)^2+1}\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{4(x_j-\theta)^2 dx_j}{\pi((x_j-\theta)^2+1)^3} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{4x_j^2 dx_j}{\pi(x_j^2+1)^3} = \tfrac{8}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \tfrac{x_j^2 dx_j}{(x_j^2+1)^3} =$$

$$= \{x_j = \operatorname{tg}\varphi\} = \tfrac{8}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos^{-2+6-2}\varphi\; d\varphi = \tfrac{8}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\; d\varphi = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\varphi)\; d\varphi =$$

$$= \tfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1-\cos(4\pi)}{2} d\varphi = \tfrac{2}{\pi} \cdot \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Введём обозначение $g(x,\theta) = \frac{2(x-\theta)}{(x-\theta)^2+1}$. Тогда

$$\mathrm{E}_\theta \left(\sum_{j=1}^{n} g(X_j,\theta)\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)^2 + 2\sum_{j<k} \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)g(X_k,\theta) = \tfrac{n}{2} + 0 = \tfrac{n}{2}.$$

Задача 4а

Рассмотрим случайные величины с распределением $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$, где $\theta > 0$. Имеем формулу для плотности $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} I(x \geqslant 0)$. Тогда

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = \tfrac{1}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\theta}}$$

при $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, и $f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если хотя бы одна из координат отрицательна.

Вычислим информацию Фишера. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\big|_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-n\ln\theta - \tfrac{1}{\theta}\sum_{j=1}^n x_j\right)\Bigg|_\theta = -\tfrac{n}{\theta} + \tfrac{1}{\theta^2}\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n \tfrac{x_j-\theta}{\theta^2}.$$

Обозначим через $g(x,\theta) = \frac{x-\theta}{\theta^2}$. Тогда (в последней формуле при $j\neq k$)

$$\mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)^2 = \mathrm{E}_\theta\left(\tfrac{X_j^2}{\theta^4} - \tfrac{2X_j}{\theta^3} + \tfrac{1}{\theta^2}\right) = \tfrac{\theta^2+\theta^2}{\theta^4} - \tfrac{2\theta}{\theta^3} + \tfrac{1}{\theta^2} = \tfrac{1}{\theta^2};$$

$$\mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta) = \mathrm{E}_\theta\,\tfrac{X_j-\theta}{\theta^2} = \tfrac{\theta-\theta}{\theta^2} = 0;$$

$$\mathrm{E}_\theta\left(g(X_j,\theta)g(X_k,\theta)\right) = \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)\,\mathrm{E}_\theta\, g(X_k,\theta) = 0\cdot 0 = 0.$$

Далее,

$$\mathrm{E}_\theta\left(\sum_{j=1}^n \tfrac{x_j-\theta}{\theta^2}\right)^2 = \sum_{j=1}^n \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)^2 + 2\sum_{j<k}\mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)g(X_k,\theta) = \tfrac{n}{\theta^2} + 0 = \tfrac{n}{\theta^2}.$$

Задача 4б

Рассмотрим случайные величины с распределением $\mathrm{Geom}(\theta)$, где $\theta\in(0,1)$. Имеем

$$L(\theta,x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{P}_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n) = \prod_{j=1}^n \mathrm{P}(X_j=x_j) = \theta^n(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}.$$

Вычислим информацию Фишера. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\big|_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(n\ln\theta + (-n+\sum_{j=1}^n x_j)\ln(1-\theta)\right)\Bigg|_\theta = \tfrac{n}{\theta} - \tfrac{-n+\sum\limits_{j=1}^n x_j}{1-\theta} = \tfrac{n}{\theta(1-\theta)} - \sum_{j=1}^n \tfrac{x_j}{1-\theta}.$$

Обозначим через $g(x,\theta) = \frac{1-x\theta}{\theta(1-\theta)}$. Тогда (в последней формуле при $j\neq k$)

$$\mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)^2 = \mathrm{E}_\theta\,\tfrac{1-2X_j\theta+X_j^2\theta^2}{\theta^2(1-\theta)^2} = \tfrac{1-2\frac{\theta}{\theta}+\frac{\theta^2(2-\theta)}{\theta^2}}{\theta^2(1-\theta)^2} = \tfrac{1-\theta}{\theta^2(1-\theta)^2} = \tfrac{1}{\theta^2(1-\theta)};$$

$$\mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta) = \mathrm{E}_\theta\,\tfrac{1-X_j\theta}{\theta(1-\theta)} = \tfrac{1-\frac{\theta}{\theta}}{\theta^2(1-\theta)^2} = 0;$$

$$\mathrm{E}_\theta\left(g(X_j,\theta)g(X_k,\theta)\right) = \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)\,\mathrm{E}_\theta\, g(X_k,\theta) = 0\cdot 0 = 0.$$

Далее,

$$\mathrm{E}_\theta\left(\sum_{j=1}^n \tfrac{x_j-\theta}{\theta^2}\right)^2 = \sum_{j=1}^n \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)^2 + 2\sum_{j<k}\mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)g(X_k,\theta) = \tfrac{n}{\theta^2(1-\theta)} + 0 = \tfrac{n}{\theta^2(1-\theta)}.$$

Задача 4в

Рассмотрим случайные величины с распределением $\Gamma(\alpha,\frac{1}{\theta})$, где $\theta>0,\alpha\leqslant 1$. Имеем формулу для плотности $f_\theta(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}e^{-\frac{x}{\theta}}I(x\geqslant 0)$. Тогда

$$L(\theta,x_1,\ldots,x_n) = f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^n f_\theta(x_j) = \tfrac{(x_1\ldots x_n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)^n\theta^n}\cdot e^{-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n\alpha} x_j}{\theta}}.$$

Вычислим информацию Фишера и оценку максимального правдоподобия. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)\big|_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\left((\alpha-1)\sum_{j=1}^n(\ln x_j) - n\ln\Gamma(\alpha) - n\alpha\ln\theta + -\tfrac{1}{\theta}\sum_{j=1}^n x_j\right)\Bigg|_\theta =$$

$$= -\frac{n\alpha}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{\theta^2}\left(-n\alpha\theta + \sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - \alpha\theta}{\theta^2}.$$

При $\theta = \overline{X}$ производная обращается в 0, при меньших значениях положительна, а при больших — отрицательна. Следовательно, в точке $\overline{X}$ достигается максимум и $\overline{X}$ — оценка максимального правдоподобия.

Вычислим матожидание и дисперсию случайной величины X_j.

$$\mathrm{E}_\theta\, X_j = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} e^{-\frac{u}{\theta}} du = \frac{\theta}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} s^\alpha e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta = \alpha\theta,$$

$$\mathrm{E}_\theta\, X_j^2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} e^{-\frac{u}{\theta}} du = \frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} s^{\alpha+1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta^2 = \alpha(\alpha+1)\theta^2.$$

Обозначим через $g(x,\theta) = \frac{x_j - \alpha\theta}{\theta^2}$. Тогда (в последней формуле при $j \neq k$)

$$\mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)^2 = \mathrm{E}_\theta\, \frac{X_j^2 - 2X_j\alpha\theta + \alpha^2\theta^2}{\theta^4} = \frac{\alpha(\alpha+1)\theta^2 - 2\alpha^2\theta^2 + \alpha^2\theta^2}{\theta^4} = \frac{\alpha}{\theta^2};$$

$$\mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta) = \mathrm{E}_\theta\, \frac{X_j - \alpha\theta}{\theta^2} = \frac{\alpha\theta - \alpha\theta}{\theta^2} = 0;$$

$$\mathrm{E}_\theta\, (g(X_j,\theta)g(X_k,\theta)) = \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)\, \mathrm{E}_\theta\, g(X_k,\theta) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Далее,

$$\mathrm{E}_\theta \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - \alpha\theta}{\theta^2}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)^2 + 2\sum_{j<k} \mathrm{E}_\theta\, g(X_j,\theta)g(X_k,\theta) = \frac{n\alpha}{\theta^2} + 0 = \frac{n\alpha}{\theta^2}.$$

Задача 5

Пусть случайные вектора $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ независимы и таковы, что их компоненты X_i, Y_i независимы и распределены по закону $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta_1})$ и $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta_2})$, соответственно. Вычислим информационную матрицу. Поскольку плотности случайных X_i не зависят от θ_2, а плотности Y_i — от θ_1, то в информационная матрица будет диагональной, а на диагонали будут стоять информации Фишера для соответствующих компонент. Таким образом, матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{\theta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{\theta_2^2} \end{pmatrix}.$$

5. Условные математические ожидания

Задача 1a

Пусть случайные величины X, Y, Z распределены по закону $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$.

Предварительно заметим, что в силу независимости и одинаковой распределённости выполнены равенства

$$\mathrm{E}_\theta\, X = \mathrm{E}_\theta\, Y = \mathrm{E}_\theta\, Z = \theta,$$
$$\mathrm{E}_\theta\, X^2 = \mathrm{E}_\theta\, Y^2 = \mathrm{E}_\theta\, Z^2 = 2\theta^2,$$
$$\mathrm{E}_\theta\, XY = \mathrm{E}_\theta\, YZ = \mathrm{E}_\theta\, ZX = \theta^2.$$

Вычислим условным математические ожидания.

$$a(X,Y) = \mathrm{E}_\theta(XY + XZ - Y^2 \mid X,Y) = \mathrm{E}_\theta(XY \mid X,Y) + \mathrm{E}_\theta(XZ \mid X,Y) - \mathrm{E}_\theta(Y^2 \mid X,Y) =$$

$$= XY + X\,\mathrm{E}_\theta(Z) - Y^2 = XY - \theta X - Y^2.$$

Далее,

$$b(Y,Z) = \mathrm{E}_\theta(XY+XZ-Y^2 \mid Y,Z) = \mathrm{E}_\theta(X(Y+Z) \mid Y,Z) - Y^2 = (Y+Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2 = \theta(Y+Z) - Y^2,$$

$$c(Z,X) = \mathrm{E}_\theta(XY + XZ - Y^2 \mid Z,X) = \mathrm{E}_\theta(XY \mid Z,X) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2) =$$
$$= X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \theta X + XZ - 2\theta^2.$$

Задача 1б

Теперь вычислим условные математические ожидания величин a, b, c:

$$a_X(X) = \mathrm{E}_\theta(a(X,Y) \mid X) = \mathrm{E}_\theta\left(XY - Y^2 + X\,\mathrm{E}_\theta(Z) \mid X\right) =$$
$$= X\,\mathrm{E}_\theta(Y) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) + X\,\mathrm{E}_\theta(Z) = \theta X - 2\theta^2 + \theta X = 2\theta X - 2\theta^2.$$

$$a_Y(Y) = \mathrm{E}_\theta(a(X,Y) \mid Y) = \mathrm{E}_\theta\left(XY - Y^2 + X\,\mathrm{E}_\theta(Z) \mid Y\right) =$$
$$= Y\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2 + \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Z) = \theta Y - Y^2 + \theta^2 = \theta Y - Y^2 + \theta^2.$$

$$b_Y(Y) = \mathrm{E}_\theta(b(Y,Z) \mid Y) = \mathrm{E}_\theta\left((Y+Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2 \mid Y\right) =$$
$$= \mathrm{E}_\theta(X)(Y + \mathrm{E}_\theta(Z)) - Y^2 = \theta Y - Y^2 + \theta^2.$$

$$b_Z(Z) = \mathrm{E}_\theta(b(Y,Z) \mid Z) = \mathrm{E}_\theta\left((Y+Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2 \mid Z\right) =$$
$$= \mathrm{E}_\theta(X)(\mathrm{E}_\theta(Y) + Z) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \theta Z - \theta^2.$$

$$c_Z(Z) = \mathrm{E}_\theta(c(Z,X) \mid Z) = \mathrm{E}_\theta\left(X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2) \mid Z\right) =$$
$$= \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Y) + \mathrm{E}_\theta(X)\cdot Z - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \theta Z + \theta^2 - 2\theta^2 = \theta Z - \theta^2.$$

$$c_X(X) = \mathrm{E}_\theta(c(Z,X) \mid X) = \mathrm{E}_\theta\left(X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2) \mid X\right) =$$
$$= X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + X\cdot\mathrm{E}_\theta(Z) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = 2\theta X - 2\theta^2.$$

Задача 1в

Вычислим матожидания $XY + XZ - Y^2, a, b, c, a_X, a_Y, b_Y, b_Z, c_Z, c_X$ и убедимся, что они совпадают.

$$\mathrm{E}_\theta(XY + XZ - Y^2) = \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Y) + \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Z) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) =$$
$$= \theta^2 + \theta^2 - 2\theta^2 = 0.$$

$$\mathrm{E}_\theta(a(X,Y)) = \mathrm{E}_\theta\left(XY - Y^2 + X\,\mathrm{E}_\theta(Z)\right) = \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Y) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) + \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Z) =$$
$$= \theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 = 0.$$

$$\mathrm{E}_\theta(b(Y,Z)) = \mathrm{E}_\theta\left((Y+Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2\right) = \mathrm{E}_\theta(Y)\,\mathrm{E}_\theta(X) + \mathrm{E}_\theta(Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) =$$
$$= \theta^2 + \theta^2 - 2\theta^2 = 0.$$

$$\mathrm{E}_\theta(c(Z,X)) = \mathrm{E}_\theta\left(X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2)\right) = \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Y) + \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Z) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) =$$
$$= \theta^2 + \theta^2 - 2\theta^2 = 0.$$

$$\mathrm{E}_\theta(a_X(X)) = \mathrm{E}_\theta(2\theta X - 2\theta^2) = 2\theta^2 - 2\theta^2 = 0.$$
$$\mathrm{E}_\theta(a_Y(X)) = \mathrm{E}_\theta(\theta Y - Y^2 + \theta^2) = \theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 = 0.$$
$$\mathrm{E}_\theta(b_Y(X)) = \mathrm{E}_\theta(\theta Y - Y^2 + \theta^2) = \theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 = 0.$$
$$\mathrm{E}_\theta(b_Z(X)) = \mathrm{E}_\theta(\theta Z - \theta^2) = \theta^2 - \theta^2 = 0.$$
$$\mathrm{E}_\theta(c_Z(X)) = \mathrm{E}_\theta(\theta Z - \theta^2) = \theta^2 - \theta^2 = 0.$$
$$\mathrm{E}_\theta(c_X(X)) = \mathrm{E}_\theta(2\theta X - 2\theta^2) = 2\theta^2 - 2\theta^2 = 0.$$

Задача 2а (распределение Пуассона)

Пусть имеются независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Poiss}(\theta)$. Вычислим условные математические ожидания.

$$\mathrm{E}_\theta(X_1 \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}_\theta(X_i \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \tfrac{1}{n}\,\mathrm{E}_\theta(X_1{+}\ldots{+}X_n \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{n} = \overline{X}.$$

Вычислим

$$\mathrm{P}_\theta(X_1 = k \mid X_1 + \ldots + X_n = m) = \tfrac{\mathrm{P}_\theta(X_1=k, X_2+\ldots+X_n=m-k)}{\mathrm{P}_\theta(X_1+\ldots+X_n=m)} = \tfrac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} \cdot \tfrac{e^{-(n-1)\theta}((n-1)\theta)^{m-k}}{(m-k)!} \cdot \tfrac{m!}{e^{-n\theta}(n\theta)^m} =$$
$$= \tfrac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \left(\tfrac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{m-k}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^m k^2 \cdot \tfrac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \left(\tfrac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{m-k} = \tfrac{m}{n}\sum_{k=1}^m k \cdot \tfrac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \cdot \left(\tfrac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{m-k} =$$
$$= \tfrac{m}{n}\,\mathrm{E}_\theta(X_1 + 1 \mid X_1 + \ldots + X_n)\big|_{X_1+\ldots+X_n=m-1} = \tfrac{m}{n}\left(\tfrac{m-1}{n} + 1\right) = \tfrac{m}{n} + \tfrac{m(m-1)}{n^2}.$$

Поэтому

$$\mathrm{E}_\theta(X_1^2 \mid X_1 + \ldots + X_n) = \overline{X} + \overline{X}(\overline{X} - \tfrac{1}{n}).$$

Задача 2б (геометрическое распределение)

Пусть имеются независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Geom}(\theta)$. Вычислим условные математические ожидания.

$$\mathrm{E}_\theta(X_1 \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}_\theta(X_i \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \tfrac{1}{n}\,\mathrm{E}_\theta(X_1{+}\ldots{+}X_n \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{n} = \overline{X}.$$

Найдём распределение свёртки геометрических случайных величин:

$$\mathrm{P}(X_1{+}\ldots{+}X_n = m) = \sum_{x_1+\ldots+x_n=m}\prod_{i=1}^n \mathrm{P}(X_i = x_i) = \sum_{x_1+\ldots+x_n=m}\prod_{i=1}^n \theta(1{-}\theta)^{x_i-1} = \tfrac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}\theta^n(1{-}\theta)^{m-n}.$$

Вычислим (для $m \geqslant k + n - 1$) условную вероятность

$$\mathrm{P}_\theta(X_1 = k \mid X_1 + \ldots + X_n = m) = \tfrac{\mathrm{P}_\theta(X_1=k, X_2+\ldots+X_n=m-k)}{\mathrm{P}_\theta(X_1+\ldots+X_n=m)} =$$
$$= \theta(1-\theta)^{k-1} \cdot \tfrac{(m-k-1)!}{(m-k-n+2)!(n-2)!}\theta^{n-1}(1-\theta)^{m-k-(n-1)} \cdot \tfrac{(m-n)!(n-1)!}{(m-1)!}\tfrac{1}{\theta^n(1-\theta)^{m-n}} =$$
$$= (C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot C_{m-k-1}^{n-2}.$$

Отсюда

$$(C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-n+1} k^2 C_{m-k-1}^{n-2} = (C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot \sum_{j=n-2}^{m-2} (m-1-j)^2 C_j^{n-2}.$$

Так как
$$\sum_{j=n-2}^{m-2} C_j^{n-2} = 1 + C_{n-1}^{n-2} + \ldots + C_{m-2}^{n-2} = C_{m-1}^{n-1}$$
и
$$\sum_{j=n-2}^{m-2} (j+1) C_j^{n-2} = (n-1) \sum_{j=n-2}^{m-2} C_{j+1}^{n-1} = (n-1) C_m^n,$$
а также
$$\sum_{j=n-2}^{m-2} (j+1)^2 C_j^{n-2} = \sum_{j=n-2}^{m-2} ((j+2)(j+1) - (j+1)) C_j^{n-2} = n(n-1) C_{m+1}^{n+1} - (n-1) C_m^n,$$
то
$$(C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-n+1} k^2 C_{m-k-1}^{n-2} = (C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot \big(m^2 C_{m-1}^{n-1} - 2m(n-1) C_m^n + n(n-1) C_{m+1}^{n+1} - (n-1) C_m^n\big) =$$
$$= m^2 - \tfrac{2m(n-1)m}{n} + \tfrac{n(n-1)m(m+1)}{n(n+1)} - \tfrac{m(n-1)}{n} =$$
$$= \tfrac{m}{n(n+1)} \left(mn(n+1) - 2m(n-1)(n+1) + n(n-1)(m+1) - (n-1)(n+1)\right) =$$
$$= \tfrac{m}{n(n+1)} \cdot \big(m(n^2 + n - 2n^2 + 2 + n^2 - n) + n^2 - n - n^2 + 1\big) = \tfrac{m(2m-n+1)}{n(n+1)}.$$

Тогда условное матождание равно $g(S_n) = \frac{S_n(2S_n - n+1)}{n(n+1)}$.

Задача 3

Пусть случайная величина X имеет распределение $\mathrm{E}(1)$ и случайная величина $Y \mid X$ распределена так же, как $\exp(X)$. Вычислим совместную плотность для (X, Y) и условные матожидания $\mathrm{E}(X^2 \mid Y), \mathrm{E}(X \mid Y)$.

Имеем $f_{Y|X}(y \mid x) = xe^{-yx} I(y > 0)$ и $f_X(x) = e^{-x} I(x > 0)$. Тогда совместная плотность равна $f_{X,Y}(x, y) = xe^{-x(y+1)} I(x > 0, y > 0)$.

Далее,
$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x(y+1)} I(x > 0, y > 0) dx = I(y > 0) \cdot \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dx =$$
$$= I(y > 0) \cdot \left(-\tfrac{xe^{-x(y+1)}}{y+1} \Big|_{x=0}^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \tfrac{e^{-x(y+1)}}{y+1} dx \right) = \tfrac{I(y>0)}{(y+1)^2}.$$
Тогда
$$f_{X|Y}(x \mid y) = \tfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = x(y+1)^2 e^{-x(y+1)} I(x > 0, y > 0).$$
Поэтому
$$\mathrm{E}(X \mid Y)(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 (Y+1)^2 e^{-x(Y+1)} I(x > 0, Y > 0) dx =$$
$$= (Y+1)^2 I(Y > 0) \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x(Y+1)} dx = (Y+1)^2 I(Y > 0) \cdot \tfrac{2}{(Y+1)^3} = \tfrac{2I(Y>0)}{Y+1}.$$

Вычислим второе условное матожидание:

$$\mathrm{E}(X^2 \mid Y)(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 (Y+1)^2 e^{-x(Y+1)} I(x>0, Y>0) dx =$$

$$= (Y+1)^2 I(Y>0) \int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x(Y+1)} dx = (Y+1)^2 I(Y>0) \cdot \tfrac{6}{(Y+1)^4} = \tfrac{6I(Y>0)}{(Y+1)^2}.$$

6. Полные и достаточные статистики

Задача 1а

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathrm{Geom}(\theta)$. Найдём достаточную статистику. Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta (1-\theta)^{x_i - 1} I(x_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}) =$$

$$= \theta^n (1-\theta)^{\sum\limits_{i=1}^n x_i - n} \cdot I(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}).$$

Положим $g(\theta, T) = \theta^n (1-\theta)^{T-n}$ и $h(X_1, \ldots, X_n) = I(X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1})$. Тогда $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = g(\theta, x_1 + \ldots + x_n) h(x_1, \ldots, x_n)$ и по критерию факторизации статистика $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ достаточна.

Задача 1б

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$. Найдём достаточную статистику. Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i, \theta}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} I(x_i > 0) =$$

$$= \theta^{-n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum\limits_{i=1}^n x_i} \cdot I(x_1, \ldots, x_n > 0).$$

Положим $g(\theta, T) = \theta^{-n} e^{-\frac{T}{\theta}}$ и $h(X_1, \ldots, X_n) = I(X_1, \ldots, X_n > 0)$. Тогда $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = g(\theta, x_1 + \ldots + x_n) h(x_1, \ldots, x_n)$ и по критерию факторизации статистика $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ достаточна.

Задача 1в

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathcal{N}(\theta, \theta)$. Найдём достаточную статистику. Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i, \theta}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\theta}} =$$

$$= \theta^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum\limits_{i=1}^n x_i^2} e^{-\frac{n\theta}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}.$$

Положим $g(\theta, T) = \theta^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{T}{2\theta}} e^{-\frac{n\theta}{2}}$ и $h(X_1, \ldots, X_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}$. Тогда $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = g(\theta, x_1^2 + \ldots + x_n^2) h(x_1, \ldots, x_n)$ и по критерию факторизации статистика $S_n^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ достаточна.

Задача 1г

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Найдём достаточную статистику. Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i,\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}} =$$

$$= e^{\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} e^{-\frac{n\theta^2}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Положим $g(\theta, T) = e^{\theta T} e^{-\frac{n\theta^2}{2}}$ и $h(X_1, \ldots, X_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$. Тогда $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = g(\theta, x_1 + \ldots + x_n) h(x_1, \ldots, x_n)$ и по критерию факторизации статистика $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ достаточна.

Задача 1д

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathrm{R}[0, \theta]$. Найдём достаточную статистику. Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i,\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\theta} I(0 < x_i < \theta) =$$

$$= \tfrac{1}{\theta^n} I(X_{(n)} < \theta) I(X_{(1)} > 0).$$

Положим $g(\theta, T) = \frac{1}{\theta^n} I(T < \theta)$ и $h(X_1, \ldots, X_n) = I(X_{(1)} > 0)$. Тогда $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = g(\theta, \max(x_1, \ldots, x_n)) h(x_1, \ldots, x_n)$ и по критерию факторизации статистика $X_{(1)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ достаточна.

Задача 2

Пусть T — достаточная статистика. По критерию факторизации имеем $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = g(\theta, T(x_1, \ldots, x_n)) \cdot h(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta} \left(\ln L(\theta, x_1, \ldots, x_n)\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} g(\theta, T(x_1, \ldots, x_n))}{g(\theta, T(x_1, \ldots, x_n))}.$$

По теореме о неявной функции в окрестности всякого θ_0, при котором вторая частная производная по θ не равна 0, можно выразить значения θ, удовлетворяющие условию $\frac{\partial}{\partial\theta} g(\theta, T(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, как функцию от $T(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, оценка максимального правдоподобия выражается через достаточную статистику.

Задача 3а

Найдём несмещённые статистики с наименьшей дисперсией для случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, распределённых по закону $\mathrm{Poiss}(\theta)$. Для начала найдём полную и достаточную статистику. Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta} \tfrac{\theta^{x_i}}{x_i!} I(x_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}) =$$

$$= e^{-n\theta} \frac{\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!} I(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}).$$

Положим $g(\theta, T) = e^{-n\theta} \theta^T$ и $h(X_1, \ldots, X_n) = \frac{I(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!}$. Тогда $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = g(\theta, x_1 + \ldots + x_n) h(x_1, \ldots, x_n)$ и по критерию факторизации статистика $T = X_1 + \ldots + X_n$ достаточна.

Проверим, что статистика $X_1+\ldots+X_n$ полна. Пусть $\mathrm{E}_\theta f(X_1+\ldots+X_n)=0$. Отсюда для всех θ выполнено равенство

$$0=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(f(m)\sum_{x_1+\ldots+x_n=m}L(\theta,x_1,\ldots,x_n)\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{f(m)\cdot n^m e^{-n\theta}}{m!}\theta^m.$$

После домножения на $e^{-n\theta}$ воспользуемся равенством коэффициентов разложения в ряд Тейлора. Тогда $f(m)=0$ для всех целых m и, следовательно, f почти наверное равна 0 (относительно распределения $\mathrm{Poiss}(\theta)$).

Теперь для каждой функции $a(\theta)$ достаточно подобрать функцию f такую, что $\mathrm{E}_\theta(f(T))=a(\theta)$. Тогда полученная статистика будет иметь наименьшую дисперсию. Значения f можно определить из разложения в ряд Тейлора, приведённого выше.

Пусть $a(\theta)=e^{-\theta}$. Имеем

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{f(m)\cdot n^m}{m!}\theta^m=e^{(n-1)\theta}=\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{(n-1)^m}{m!}\theta^m.$$

Отсюда $f(m)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^m$ и $f(X_1+\ldots+X_n)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{X_1+\ldots+X_n}$.

Пусть $a(\theta)=e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}$. Имеем

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{f(m)\cdot n^m}{m!}\theta^m=e^{(n-1)\theta}\cdot\tfrac{\theta^n}{n!}=\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{(n-1)^m}{m!n!}\theta^{m+n}=\sum_{m=n}^{+\infty}\tfrac{(n-1)^{m-n}}{(m-n)!n!}\theta^m.$$

Отсюда $f(m)=C_m^n\left(\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-n}I(m\geqslant n)$ и

$$f(X_1+\ldots+X_n)=C^n_{X_1+\ldots+X_n}\left(\tfrac{1}{n}\right)^n\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{X_1+\ldots+X_n-n}I(X_1+\ldots+X_n\geqslant n).$$

Пусть $a(\theta)=\theta^3$. Имеем

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{f(m)\cdot n^m}{m!}\theta^m=e^{n\theta}\theta^3=\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{n^m}{m!}\theta^{m+3}=\sum_{m=3}^{+\infty}\tfrac{n^{m-3}}{(m-3)!}\theta^m.$$

Отсюда $f(m)=\frac{m(m-1)(m-2)}{n^3}$ и

$$f(X_1+\ldots+X_n)=\tfrac{(X_1+\ldots+X_n)(X_1+\ldots+X_n-1)(X_1+\ldots+X_n-2)}{n^3}.$$

Задача 3б

Найдём несмещённые статистики с наименьшей дисперсией для случайных величин $X_1,\ldots,X_n$, распределённых по закону $\mathrm{Geom}(\theta)$. Для начала найдём полную и достаточную статистику.

Имеем

$$L(\theta,x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^n\mathrm{P}_\theta(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^n\theta(1-\theta)^{x_i-1}I(x_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1})=$$

$$=\theta^n(1-\theta)^{\sum\limits_{i=1}^n x_i-n}I(x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}).$$

Положим $g(\theta,T)=\theta^n(1-\theta)^{T-n}$ и $h(X_1,\ldots,X_n)=I(x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1})$. Тогда $L(\theta,x_1,\ldots,x_n)=g(\theta,x_1+\ldots+x_n)h(x_1,\ldots,x_n)$ и по критерию факторизации статистика $T=X_1+\ldots+X_n$ достаточна.

Проверим, что статистика $X_1+\ldots+X_n$ полна. Пусть $\mathrm{E}_\theta\, f(X_1+\ldots+X_n)=0$. Отсюда для всех θ выполнено равенство

$$0=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(f(m)\sum_{x_1+\ldots+x_n=m}L(\theta,x_1,\ldots,x_n)\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{f(m)(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}\theta^n(1-\theta)^{m-n}.$$

После деления на $\theta^n(1-\theta)^{-n}$ воспользуемся равенством коэффициентов разложения в ряд Тейлора в точке 1. Тогда $f(m)=0$ для всех целых m и, следовательно, f почти наверное равна 0 (относительно распределения $\mathrm{Geom}(\theta)$).

Теперь для каждой функции $a(\theta)$ достаточно подобрать функцию f такую, что $\mathrm{E}_\theta(f(T))=a(\theta)$. Тогда полученная статистика будет иметь наименьшую дисперсию. Значения f можно определить из разложения в ряд Тейлора, приведённого выше.

Пусть $a(\theta)=\theta$. Имеем

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{f(m)(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}(1-\theta)^m=\tfrac{(1-\theta)^n}{\theta^{n-1}}=\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{(m+n-2)!}{m!(n-2)!}(1-\theta)^{m+n}=\sum_{m=n}^{+\infty}\tfrac{(m-2)!}{(m-n)!(n-2)!}(1-\theta)^m.$$

Отсюда $f(m)=\frac{n-1}{m-1}I(m\geqslant n)$ и $f(X_1+\ldots+X_n)=\frac{n-1}{X_1+\ldots+X_n-1}I(X_1+\ldots+X_n\geqslant n)$.

Пусть $a(\theta)=\theta(1-\theta)$. Имеем

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{f(m)(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}(1-\theta)^m=\tfrac{(1-\theta)^{n+1}}{\theta^{n-1}}=\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{(m+n-2)!}{m!(n-2)!}(1-\theta)^{m+n+1}=\sum_{m=n+1}^{+\infty}\tfrac{(m-3)!}{(m-n-1)!(n-2)!}(1-\theta)^m.$$

Отсюда $f(m)=\frac{(m-n)(n-1)}{(m-1)(m-2)}I(m\geqslant n+1)$ и

$$f(X_1+\ldots+X_n)=\tfrac{(X_1+\ldots+X_n-n)(n-1)}{(X_1+\ldots+X_n-1)(X_1+\ldots+X_n-2)}I(X_1+\ldots+X_n\geqslant n+1).$$

Пусть $a(\theta)=\theta^2$.

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{f(m)(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}(1-\theta)^m=\tfrac{(1-\theta)^n}{\theta^{n-2}}=\sum_{m=0}^{+\infty}\tfrac{(m+n-3)!}{m!(n-3)!}(1-\theta)^{m+n}=\sum_{m=n}^{+\infty}\tfrac{(m-3)!}{(m-n)!(n-3)!}(1-\theta)^m.$$

Отсюда $f(m)=\frac{((n-1)(n-2))}{(m-1)(m-2)}I(m\geqslant n)$ и

$$f(X_1+\ldots+X_n)=\tfrac{((n-1)(n-2))}{(X_1+\ldots+X_n-1)(X_1+\ldots+X_n-2)}I(X_1+\ldots+X_n\geqslant n).$$

Задача 3в

Найдём несмещённые статистики с наименьшей дисперсией для случайных величин $X_1,\ldots,X_n$, распределённых по закону $\mathrm{R}[0,\theta]$. Для начала найдём полную и достаточную статистику.

$$L(\theta,x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i,\theta}(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{\theta}I(0<x_i<\theta)=$$
$$=\tfrac{1}{\theta^n}I(X_{(n)}<\theta)I(X_{(1)}>0).$$

Положим $g(\theta,T)=\frac{1}{\theta^n}I(T<\theta)$ и $h(X_1,\ldots,X_n)=I(X_{(1)}>0)$. Тогда $L(\theta,x_1,\ldots,x_n)=g(\theta,\max(x_1,\ldots,x_n))h(x_1,\ldots,x_n)$ и по критерию факторизации статистика $X_{(1)}=\max(X_1,\ldots,X_n)$ достаточна (мы уже проверяли это в задаче 1д).

Вычислим функцию распределения $X_{(n)}$ и её плотность. Имеем

$$F_{X_{(n)},\theta}(x)=\mathrm{P}_\theta(X_{(n)}\leqslant x)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X_i\leqslant x)=\tfrac{x^n}{\theta^n}I(0<x<\theta)+I(x\geqslant\theta),$$

$$f_{X_{(n)},\theta} = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} I(0 \leqslant x \leqslant \theta).$$

Проверим, что статистика $X_{(n)}$ полна. Пусть $\mathrm{E}_\theta\, f(X_(n)) = 0$. Отсюда для всех θ выполнено равенство

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) f_{\theta, X_{(1)}} dx = \int\limits_0^\theta \frac{nf(x)x^{n-1}dx}{\theta^n}.$$

Тогда

$$0 = \int\limits_0^\theta f(x)x^{n-1}dx$$

и после дифференцирования по θ получаем $f(\theta)\theta^{n-1} = 0$ и $f(\theta) = 0$. Таким образом, f почти наверное равна 0 (относительно распределения $\mathrm{R}[0,\theta]$) и $X_{(n)}$ полна.

Теперь для каждой функции $a(\theta)$ достаточно подобрать функцию f такую, что $\mathrm{E}_\theta(f(T)) = a(\theta)$. Тогда полученная статистика будет иметь наименьшую дисперсию.

Пусть $a(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. Имеем

$$\int\limits_0^\theta f(x)x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\theta^{n-2}.$$

Продифференцируем по θ. Для $n \geqslant 3$ получаем $f(\theta)\theta^{n-1} = \frac{n-2}{n}\theta^{n-3}$ и $f(\theta) = \frac{n-2}{n}\theta^{-2}$. Отсюда $f(X_{(n)}) = \frac{n-2}{n(X_{(n)})^2}$.

Пусть $a(\theta) = \ln\theta$. Имеем

$$\int\limits_0^\theta f(x)x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\theta^n \ln\theta.$$

Продифференцируем по θ. Получаем $f(\theta)\theta^{n-1} = \theta^{n-1}\ln\theta + \frac{1}{n}\theta^{n-1}$ и $f(\theta) = \ln\theta + \frac{1}{n}$. Отсюда $f(X_{(n)}) = \ln X_{(n)} + \frac{1}{n}$.

Пусть $a(\theta) = e^\theta$. Имеем

$$\int\limits_0^\theta f(x)x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\theta^n e^\theta.$$

Продифференцируем по θ. Получаем $f(\theta)\theta^{n-1} = \theta^{n-1}e^\theta + \frac{1}{n}\theta^n e^\theta$ и $f(\theta) = e^\theta(1 + \frac{\theta}{n})$. Отсюда $f(X_{(n)}) = e^{X_{(n)}}(1 + \frac{X_{(n)}}{n})$.

Задача 3г

Найдём несмещённые статистики с наименьшей дисперсией для случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, распределённых по закону $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$. Для начала найдём полную и достаточную статистику.

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i,\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} I(x_i > 0) =$$
$$= \theta^{-n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^n x_i} \cdot I(x_1, \ldots, x_n > 0).$$

Положим $g(\theta, T) = \theta^{-n} e^{-\frac{T}{\theta}}$ и $h(X_1, \ldots, X_n) = I(X_{(1)} > 0)$. Тогда $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = g(\theta, x_1 + \ldots + x_n) h(x_1, \ldots, x_n)$ и по критерию факторизации статистика $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ достаточна (мы ранее проверяли это в задаче 1б).

Случайная величина S_n имеет гамма-распределение $\Gamma(n, \frac{1}{\theta})$ и плотность $f_{S_n,\theta}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(n)\theta^n} I(x > 0)$

Проверим, что статистика S_n полна. Пусть $\mathrm{E}_\theta f(S_n) = 0$. Отсюда для всех θ выполнено равенство

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) f_{\theta, X_{(1)}} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x)x^{n-1}e^{-\frac{x}{\theta}} dx}{\Gamma(n)\theta^n}.$$

Тогда

$$0 = \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)x^{n-1}e^{-\frac{x}{\theta}} dx.$$

В правой части равенства написано преобразование Лапласса от функции $f(x)x^{n-1}$ (или преобразование Меллина от функции $f(x)e^{-\frac{x}{\theta}}$). Из его инъективности (или инъективности преобразования Меллина) получаем $f(x)x^{n-1} = 0$ и $f(x) = 0$ (почти наверное). Поэтому статистика S_n полна.

Теперь для каждой функции $a_k(\theta) = \theta^k$ подберём несмещённую статистику T_k для a_k, а после вычислим условное матожидание $\mathrm{E}_\theta(T_k \mid S_n)$. Имеем $\mathrm{E}(X_1^k) = k!\theta^k$ и $\mathrm{E}(\frac{1}{k!}\overline{X^k}) = \theta^k$.

Из симметричности и линейности

$$\mathrm{E}_\theta(\tfrac{1}{k!}\overline{X^k} \mid S_n) = \tfrac{1}{k!}\mathrm{E}_\theta(X_1^k \mid S_n) = \tfrac{1}{k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_{X_1|S_n,\theta}(x \mid y)dx = \tfrac{1}{k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot \frac{f_{X_1,S_n,\theta}(x,y)}{f_{S_n,\theta}(y)}dx =$$

$$= \tfrac{1}{k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot \frac{f_{S_n|X_1,\theta}(y|x) f_{X_1,\theta}(x)}{f_{S_n,\theta}(y)}dx = \tfrac{1}{k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot \frac{f_{S_{n-1},\theta}(y-x) f_{X_1,\theta}(x)}{f_{S_n,\theta}(y)}dx =$$

$$= \tfrac{1}{k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot \frac{(y-x)^{n-2}e^{-\frac{y-x}{\theta}}}{\Gamma(n-1)\theta^{n-1}} I(y-x>0) \cdot \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta} I(x>0) \cdot \frac{\Gamma(n)\theta^n}{y^{n-1}e^{-\frac{y}{\theta}}} I(y>0)dx =$$

$$= \tfrac{n-1}{k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k(y-x)^{n-2}}{y^{n-1}} I(y-x>0) \cdot I(x>0) \cdot I(y>0)dx = \tfrac{n-1}{k!} I(y>0) \int\limits_{0}^{y} x^k(1-\tfrac{x}{y})^{n-2} d\tfrac{x}{y} =$$

$$= \tfrac{(n-1)y^k}{k!} I(y>0) \int\limits_{0}^{1} t^k(1-t)^{n-2}dt = \tfrac{(n-1)y^k}{k!} I(y>0) B(k+1, n-1) =$$

$$= y^k \cdot \tfrac{(n-1)k!(n-2)!}{k!(n+k-1)!} I(y>0) = y^k \tfrac{(n-1)!}{(n+k-1)!} I(y>0).$$

Отсюда $E_\theta(T_k \mid S_n) = (S_n)^k \frac{(n-1)!}{(n+k-1)!} I(S_n > 0)$.

Задача 4а

Пусть $X_1, \dots, X_n$ распределены по закону $\mathrm{R}[\theta_1, \theta_2]$. Имеем

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i,\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\theta_2-\theta_1} I(\theta_1 < x_i < \theta_2) =$$

$$= \tfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} I(X_{(n)} < \theta_2) I(X_{(1)} > \theta_1).$$

Положим $g(\theta, T) = \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} I(T_2 < \theta_2) I(T_1 > \theta_1)$, где T — вектор, и $h(X_1, \dots, X_n) = 1$. Тогда $L(\theta, x_1, \dots, x_n) = g(\theta, (\min(x_1, \dots, x_n), \max(x_1, \dots, x_n))) h(x_1, \dots, x_n)$ и по критерию факторизации статистика $(X_{(1)}, X_{(n)})$ достаточна.

Задача 4б

Докажем неполноту (? см. ниже) статистики из предыдущего пункта, построив ненулевые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $\mathrm{E}_\theta(a_n X_{(1)} + b_n X_{(n)}) = 0$ для любого $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Вычислим функции распределения и плотности величин $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$.

$$F_{X_{(n)},\theta}(x) = \mathrm{P}_\theta(X_{(n)} \leqslant x) = \mathrm{P}_\theta(X_1 \leqslant x, \dots, X_n \leqslant x) = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(X_i \leqslant x) =$$

$$= \left(\tfrac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n I(\theta_1 < x < \theta_2) + I(x \geqslant \theta_2),$$

$$f_{X_{(n)},\theta}(x) = \tfrac{n(x-\theta_1)^{n-1}}{(\theta_2-\theta_1)^n} I(\theta_1 < x < \theta_2).$$

$$F_{X_{(1)},\theta}(x) = \mathrm{P}_\theta(X_{(1)} \leqslant x) = 1 - \mathrm{P}_\theta(X_{(1)} > x) = 1 - \mathrm{P}_\theta(X_1 > x, \dots, X_n > x) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathrm{P}(X_i \leqslant x)) = 1 - \left(\tfrac{\theta_2-x}{\theta_2-\theta_1}\right)^n I(\theta_1 < x < \theta_2) + I(x \leqslant \theta_1),$$

$$f_{X_{(n)},\theta}(x) = \tfrac{n(\theta_2-x)^{n-1}}{(\theta_2-\theta_1)^n} I(\theta_1 < x < \theta_2).$$

Теперь вычислим их матожидания:

$$\mathrm{E}_\theta(X_{(n)}) = \tfrac{n}{(\theta_2-\theta_1)^n} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x(x-\theta_1)^{n-1} dx = \tfrac{n}{(\theta_2-\theta_1)^n} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} (x-\theta_1)^n dx + \theta_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (x-\theta_1)^{n-1} dx \right) =$$

$$= \tfrac{n}{(\theta_2-\theta_1)^n} \left(\tfrac{(\theta_2-\theta_1)^{n+1}}{n+1} + \tfrac{\theta_1(\theta_2-\theta_1)^n}{n} \right) = \tfrac{n}{n+1}\theta_2 + \tfrac{1}{n+1}\theta_1.$$

$$\mathrm{E}_\theta(X_{(1)}) = \tfrac{n}{(\theta_2-\theta_1)^n} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x(\theta_2-x)^{n-1} dx = \tfrac{n}{(\theta_2-\theta_1)^n} \left(-\int_{\theta_1}^{\theta_2} (\theta_2-x)^n dx + \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\theta_2-x)^{n-1} dx \right) =$$

$$= \tfrac{n}{(\theta_2-\theta_1)^n} \left(-\tfrac{(\theta_2-\theta_1)^{n+1}}{n+1} + \tfrac{\theta_2(\theta_2-\theta_1)^n}{n} \right) = \tfrac{n}{n+1}\theta_1 + \tfrac{1}{n+1}\theta_2.$$

Теперь $\mathrm{E}_\theta(a_n X_{(1)} + b_n X_{(n)}) = 0$ для любого $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ тогда и только тогда, когда $a_n n + b_n = 0$ и $a_n + n b_n = 0$. Таким образом, при $n = 1$ получаем $a_1 = -b_1$ и при больших n выполнено $a_n = b_n = 0$ (вроде, хотели получить ненулевые a_k, b_k?)

7. Асимптотические и точные доверительные интервалы

Задача 1 ($\mathcal{N}(\theta, \theta)$)

Построим асимптотические доверительные интервалы в модели $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \theta)$ на основе оценки максимального правдоподобия $T = \frac{-1+\sqrt{1+4\overline{X^2}}}{2}$ (см. домашнюю работу 3). Эта оценка состоятельна для θ и имеет асимптотическую дисперсию $2\theta^2$ (см. домашнюю работу 4). Тогда оценка $\frac{-1+\sqrt{1+4\overline{X^2}}}{\sqrt{2}}$ состоятельна для $\sqrt{2}\theta$.

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(T-\theta)}{\sqrt{2}\theta} \leqslant b) \underset{n \to +\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(T-\theta)}{\sqrt{2}T} \leqslant b) \underset{n \to +\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(T(1-\tfrac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}}) \leqslant \theta \leqslant T(1-\tfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{n}})) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a).$$

Для $\Phi(b)-\Phi(a) = 1-\alpha$ положим $a = z_{\frac{\alpha}{2}}, b = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Тогда доверительным будет интервал $(T(1-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}), T(1-\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}))$.

Задача 1 ($\mathcal{N}(\theta,\theta^2)$)

Построим асимптотические доверительные интервалы в модели $X_1,\dots,X_n \sim \mathcal{N}(\theta,\theta^2)$ на основе оценки максимального правдоподобия $T = \frac{-\overline{X}\pm\sqrt{\overline{X}^2+4\overline{X^2}}}{2}$ (см. домашнюю работу 3). Эта оценка состоятельна для θ и имеет асимптотическую дисперсию $\frac{\theta^2}{3}$ (см. домашнюю работу 4). Тогда оценка $\frac{T}{\sqrt{3}}$ состоятельна для $\frac{\theta}{\sqrt{3}}$.

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{3n}(T-\theta)}{\theta} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{3n}(T-\theta)}{T} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(T(1-\tfrac{b}{\sqrt{3n}}) \leqslant \theta \leqslant T(1-\tfrac{a}{\sqrt{3n}})) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a).$$

Для $\Phi(b)-\Phi(a) = 1-\alpha$ положим $a = z_{\frac{\alpha}{2}}, b = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Тогда доверительным будет интервал $(T(1-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3n}}), T(1-\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3n}}))$.

Задача 1 ($\mathcal{N}(0,\theta)$)

Построим асимптотические доверительные интервалы в модели $X_1,\dots,X_n \sim \mathcal{N}(0,\theta)$ на основе оценки максимального правдоподобия $T = \overline{X^2}$ (см. домашнюю работу 3). Эта оценка состоятельна для θ и имеет асимптотическую дисперсию $2\theta^2$ (см. домашнюю работу 4). Тогда оценка $\sqrt{2}T$ состоятельна для $\sqrt{2}\theta$.

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(T-\theta)}{\sqrt{2}\theta} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(T-\theta)}{\sqrt{2}T} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(T(1-\tfrac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}}) \leqslant \theta \leqslant T(1-\tfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{n}})) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a).$$

Для $\Phi(b)-\Phi(a) = 1-\alpha$ положим $a = z_{\frac{\alpha}{2}}, b = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Тогда доверительным будет интервал $(T(1-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}), T(1-\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}))$.

Задача 2

Построим асимптотические доверительные интервалы в модели $X_1,\dots,X_n \sim \mathrm{Cauchy}(\theta)$ на основе оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$. Эта оценка состоятельна для θ и имеет асимптотическую дисперсию 2 (см. домашнюю работу 4). Тогда

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)}{\sqrt{2}} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(\hat{\theta}_n - \tfrac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_n - \tfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{n}}) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a).$$

Для $\Phi(b)-\Phi(a) = 1-\alpha$ положим $a = z_{\frac{\alpha}{2}}, b = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Тогда доверительным будет интервал $(\hat{\theta}_n - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}})$.

Задача 3 (равномерное распределение)

Пусть $X_1,\dots,X_n \sim \mathrm{R}[0,\theta]$. Пусть $Y_i = \frac{X_i}{\theta} \sim \mathrm{R}[0,1]$. Оценка максимального правдоподобия в модели есть $X_{(n)}$ (см. домашнюю работу 3). Тогда случайные величины $\frac{X_{(n)}}{\theta}$ и $Y_{(n)}$ имеют одинаковые распределения. Имеем $F_{\frac{X_{(n)}}{\theta},\theta}(x) = F_{Y_{(n)}}(x) = x^n I(0 < x < 1) + I(x > 1)$. Тогда из равенства $F_{\frac{X_{(n)}}{\theta},\theta}(q_\alpha) = \alpha$ получаем $q_\alpha = \sqrt[n]{\alpha}$.

Пусть $\mathrm{P}_\theta(q_1 < \frac{X_{(n)}}{\theta} < q_2) = 1 - \alpha$. Тогда $\mathrm{P}_\theta(\frac{X_{(n)}}{q_2} < \theta < \frac{X_{(n)}}{q_1}) = 1 - \alpha$ и $q_2^n - q_1^n = 1 - \alpha$. Функция $l(q_2) = \frac{1}{\sqrt[n]{q_2^n - (1-\alpha)}} - \frac{1}{q_2}$ имеет производную

$$\frac{1}{q_2^2} - \frac{q_2^{n-1}}{(q_2^n - (1-\alpha))^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{q_2^{n+1} - (q_2^n - (1-\alpha))^{\frac{n+1}{n}}}{q_2^2(q_2^n - (1-\alpha))^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Поскольку $1 - \alpha > 0$, то производная всегда принимает положительные значения и, следовательно, функция l принимает наименьшее значение при наибольшем допустимом значении q_2. Поскольку $0 \leqslant q_2 \leqslant 1$, то минимум достигается при $q_2 = 1$. Тогда $q_1 = \sqrt[n]{\alpha}$. Следовательно, точный доверительный интервал имеет вид $(X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}})$.

Задача 3 ($f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} I(x > \theta)$)

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ распределены с плотностью $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} I(x > \theta)$. Пусть $Y_i = X_i - \theta \sim \mathrm{Exp}(1)$. Оценка максимального правдоподобия в модели есть $X_{(1)}$ (см. домашнюю работу 3). Тогда случайные величины $X_{(1)} - \theta$ и $Y_{(1)} \sim \mathrm{Exp}(n)$ имеют одинаковые распределения.

Пусть $\mathrm{P}_\theta(q_1 < X_{(1)} - \theta < q_2) = 1 - \alpha$. Тогда $\mathrm{P}_\theta(X_{(1)} - q_2 < \theta < X_{(1)} - q_1) = 1 - \alpha$ и $(1 - e^{-nq_2}) - (1 - e^{-nq_1}) = 1 - \alpha$. Отсюда $1 - \alpha = e^{-nq_1} - e^{-nq_2} = e^{-nq_1}(1 - e^{-n(q_2 - q_1)})$. Тогда наименьшее значение разности $q_2 - q_1$ достигается при наименьшем возможном q_1, то есть при $q_1 = 0$. В этом случае $q_2 = -\frac{1}{n}\ln\alpha$ (поскольку $\alpha < 0$, то q_2 будет положительным).

Точный доверительный интервал будет иметь вид $(X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln\alpha, X_{(1)})$.

Задача 4 ($\mathcal{N}(\theta, \theta)$)

Построим точный доверительный интервал для $\theta > 0$ в случае $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \theta)$ на основе $\overline{X}$. Имеем $\frac{X_i - \theta}{\sqrt{\theta}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\frac{(\overline{X} - \theta)\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Имеем

$$\mathrm{P}_\theta(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\overline{X} - \theta)\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}_\theta(-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \overline{X} - \theta < \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha,$$

$$\mathrm{P}_\theta((\overline{X} - \theta)^2 < \frac{\theta}{n} z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2) = 1 - \alpha,$$

Корни уравнения $(\overline{X} - \theta)^2 = \frac{\theta}{n} z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ относительно θ равны

$$\overline{X} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\overline{X} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}\right)^2 - 4\overline{X}^2}.$$

Тогда точный доверительный интервал есть

$$\left(\overline{X} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\overline{X} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}\right)^2 - 4\overline{X}^2}, \overline{X} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\overline{X} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{n}\right)^2 - 4\overline{X}^2}\right).$$

Задача 4 ($\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$)

Построим точный доверительный интервал для θ в случае $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ на основе $\overline{X}$. Имеем $\frac{X_i - \theta}{\theta} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\frac{(\overline{X} - \theta)\sqrt{n}}{\theta} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Имеем (для $\theta > 0$)

$$\mathrm{P}_\theta(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\theta} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}_\theta(-\frac{\theta}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \overline{X} - \theta < \frac{\theta}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha,$$

$$\mathrm{P}_\theta\left(\overline{X}\left(1-\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^{-1} < \theta < \overline{X}\left(1+\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^{-1}\right) = 1-\alpha,$$

Тогда точный доверительный интервал есть

$$\left(\overline{X}\left(1-\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^{-1}, \overline{X}\left(1+\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^{-1}\right).$$

8. Распределения, связанные с нормальным распределением

Задача 1а (о плотности распределения Стьюдента)

Пусть $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $Y \sim \chi^2_n$. Положим $\xi = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$. Вычислим условную плотности ξ при условии Y. При фиксированном $Y = y_0$ плотность ξ равна плотности случайной величины $\frac{X}{\sqrt{\frac{y_0}{n}}}$, то есть равна $\sqrt{\frac{y_0}{2\pi n}} e^{-\frac{y_0 z^2}{2n}}$. Тогда $f_{\xi|Y}(z \mid y) = \sqrt{\frac{y}{2\pi n}} e^{-\frac{yz^2}{2n}}$.

Задача 1б (о плотности распределения Стьюдента)

Вычислим условные матожидания $\mathrm{E}(\xi \mid Y)$ и $\mathrm{E}(\xi^2 \mid Y)$.

Имеем

$$\mathrm{E}(\xi \mid Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\sqrt{\frac{Y}{2\pi n}} e^{-\frac{Yz^2}{2n}}\,dz = 0,$$

так как подынтегральная функция нечётна по z.

Далее,

$$\mathrm{E}(\xi^2 \mid Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\sqrt{\frac{Y}{2\pi n}} e^{-\frac{Yz^2}{2n}}\,dz = 0 + \frac{Y}{n} = \frac{Y}{n},$$

как дисперсия нормально распределённой случайной величины с параметрами 0 и $\frac{Y}{n}$.

Задача 1а (о плотности распределения Стьюдента)

Вычислим плотность величины ξ. Имеем

$$f_\xi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi|Y}(z \mid y) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{y}{2\pi n}} e^{-\frac{yz^2}{2n}} \cdot \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{y}{2}} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi n}} e^{-\frac{y}{2}(1+\frac{z^2}{n})} dy =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot I,$$

где I — интеграл по всему $\mathbb{R}$ от плотности случайной величины с распределением $\Gamma(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{z^2}{2n})$. Тогда $I = 1$ и

$$f_\xi(z) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Задача 2а (распределение Фишера-Снедекора)

Пусть $X \sim \xi_n^2 = \Gamma(\frac{n}{2}, 2)$ и $Y \sim \xi_n^2 = \Gamma(\frac{m}{2}, 2)$ независимы. Положим $\xi = \frac{X/n}{Y/m}$.

Найдём условную плотность ξ при условии Y. При $Y = y$ величина $\xi = \frac{X}{yn/m}$ имеет распределение $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{2m}{yn})$ и плотность $\frac{z^{\frac{n}{2}-1}(yn)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})(2m)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{zyn}{2m}} I(z > 0)$.

Задача 2б (распределение Фишера-Снедекора)

Найдём плотность ξ. Имеем

$$f_\xi(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi|Y}(z \mid y) f_Y(y) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{\frac{n}{2}-1}(yn)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})(2m)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{zyn}{2m}} \cdot \frac{y^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{y}{2}} I(z > 0) I(y > 0) dy =$$

$$\frac{z^{\frac{n}{2}-1} n^{\frac{n}{2}}}{B(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})(2m)^{\frac{n}{2}}} \cdot 2^{\frac{n+m}{2}} \cdot \left(1 + \frac{zn}{m}\right)^{-\frac{n+m}{2}} I(z > 0) \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\frac{(n+m)}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n+m}{2}) 2^{\frac{n+m}{2}} \cdot \left(1 + \frac{zn}{m}\right)^{-\frac{n+m}{2}}} e^{-\frac{y}{2}(1+\frac{zn}{m})} I(y > 0) dy =$$

$$= 2^{\frac{m}{2}} z^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{B(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})} \cdot (m + zn)^{-\frac{n+m}{2}} I(z > 0).$$

Интеграл в предпоследней строчке равен 1, как интеграл от плотности случайной величины по $\mathbb{R}$.

Задача 2в (распределение Фишера-Снедекора)

Найдём $\mathrm{E}\,\xi$ и $\mathrm{E}\,\xi^2$. Предварительно для случайной величины T с распределением $\Gamma(\alpha, \beta)$ вычислим $\mathrm{E}\,T^s$. Имеем

$$\mathrm{E}\,T^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{s+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} = \frac{\Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta^s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{s+\alpha-1}}{\Gamma(s+\alpha)\beta^{s+\alpha}} e^{-\frac{x}{\beta}} = \frac{\Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta^s.$$

Теперь

$$\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\,\frac{mX}{nY} = \frac{m}{n}\,\mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,\frac{1}{Y} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{mn}{n(m-2)} = \frac{m}{m-2}.$$

и матожидание будет конечным при $m > 2$.

Далее,

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \mathrm{E}\,\frac{m^2X^2}{n^2Y^2} = \frac{m^2}{n^2}\,\mathrm{E}\,X^2 \cdot \mathrm{E}\,\frac{1}{Y^2} = \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+2)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2}-2)}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{m^2 n(n+2)}{n^2(m-4)(m-2)} = \frac{m^2(n+2)}{n(m-4)(m-2)}.$$

и матожидание будет конечным при $m > 4$.

Задача 3

Пусть $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $Y_m \sim \mathcal{N}(0,1)$ — последовательности попарно независимых (между последовательностями тоже) случайных величин. Положим $\tilde{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$, $\tilde{Y}_m = \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i^2$ и $\xi_m^{(n)} = \frac{\tilde{X}_n}{\tilde{Y}_n} \sim F_{n,m}$. Тогда $\mathrm{E}\,Y_i^2 = 1$ и по закону больших чисел $\tilde{Y}_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathrm{P}} 1$. По лемме Слуцкого $\xi_m^{(n)} = \tilde{X}_n \cdot \frac{1}{\tilde{Y}_m} \xrightarrow[m\to+\infty]{d} \tilde{X}_n$.

Пусть $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ — ещё одна случайная величина, независимая с Y_m. Положим $\eta_m = \frac{Z}{\sqrt{\tilde{Y}_m}} \sim t_m$. Выше было показано, что $\tilde{Y} \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathrm{P}} 1$. Тогда $\sqrt{\tilde{Y}_m} \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathrm{P}} 1$ и снова по лемме Слуцкого

$$\eta_m = Z \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{Y}_m}} \xrightarrow[m\to+\infty]{d} Z.$$

Задача 4

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_x, \sigma^2)$ и $Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathcal{N}(\theta_y, \sigma^2)$. Построим точный доверительный интервал для $\theta_x - \theta_y$ на основе оценки

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}.$$

Положим $S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(-Y_i+\overline{Y})^2}{n+m-2}$. Случайная величина $(\overline{X}-\overline{Y})-(\theta_x-\theta_y)$ имеет распределение $\mathcal{N}(0, \sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}))$. Тогда случайная величина $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\theta_x-\theta_y)}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$ имеет распределение Стьюдента t_{n+m-2}. Имеем

$$\mathrm{P}\left(t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\theta_x-\theta_y)}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

Тогда

$$\mathrm{P}\left((\overline{X}-\overline{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} < (\theta_x-\theta_y) < (\overline{X}-\overline{Y}) - t_{\frac{\alpha}{2}}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right) = 1-\alpha$$

и доверительный интервал есть

$$\left((\overline{X}-\overline{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}, (\overline{X}-\overline{Y}) - t_{\frac{\alpha}{2}}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right).$$

Задача 5а ($\mathcal{N}(0,\theta)$)

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0,\theta)$. Построим точный доверительный интервал на основе оценки максимального правдоподобия $T = \overline{X^2}$ (см. домашнюю работу 3). Поскольку случайные величины $\frac{X_i}{\sqrt{\theta}}$ имеют стандартное нормальное распределение, то случайная величина $\frac{nT}{\theta}$ имеет χ^2_n-распределение. Обозначим через $c_{\alpha,n}$ — квантиль уровня α для функции распределения случайной величины с распределением χ^2_n. Тогда

$$\mathrm{P}\left(c_{1-\frac{\alpha}{2},n} < \frac{nT}{\theta} < c_{\frac{\alpha}{2},n}\right) = 1-\alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}\left(\frac{nT}{c_{\frac{\alpha}{2},n}} < \theta < \frac{nT}{c_{1-\frac{\alpha}{2},n}}\right) = 1-\alpha$$

и точный доверительный интервал есть

$$\left(\frac{nT}{c_{\frac{\alpha}{2},n}}, \frac{nT}{c_{1-\frac{\alpha}{2},n}}\right).$$

Задача 5б ($\mathcal{N}(\theta_1,\theta)$)

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_1,\theta)$. Построим точный доверительный интервал на основе оценки максимального правдоподобия (для θ): $T = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})$ (см. вычисление после решений задач, где $a = \theta_1$ и $\theta = \sigma^2$). Поскольку случайные величины $Y_i = \frac{X_i - \theta_1}{\sqrt{\theta}}$ имеют стандартное нормальное распределение, то случайная величина

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\theta_i}{\sqrt{\theta}} - \frac{\overline{X}-\theta_i}{\sqrt{\theta}}\right)^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\theta} = \frac{nT}{\theta}$$

имеет χ^2_{n-1}-распределение. Обозначим через $c_{\alpha,n}$ — квантиль уровня α для функции распределения случайной величины с распределением χ^2_n. Тогда

$$\mathrm{P}\left(c_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{nT}{\theta} < c_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}\left(\frac{nT}{c_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \theta < \frac{nT}{c_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$$

и точный доверительный интервал есть

$$\left(\frac{nT}{c_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{nT}{c_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right).$$

Задача 5в ($\mathcal{N}(\theta_1, \theta)$)

Пусть $X_1, \ldots, X_n, Y \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta)$. Построим аналог точного доверительного интервала для Y. Случайная величина $\overline{X} - Y$ имеет распределение $\mathcal{N}(0, \frac{n+1}{n}\theta)$, а случайные величины $X_i - \overline{X} = (X_i - Y) - (\overline{X} - Y)$ — распределение $\mathcal{N}(0, \frac{n-1}{n}\theta)$. Тогда следующая случайная величина имеет распределение Стьюдента t_{n-1}:

$$\frac{\sqrt{\frac{n}{(n+1)\theta}}(\overline{X}-Y)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{(n-1)\theta}(X_i-\overline{X})^2}} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}T,$$

где $T = \frac{\overline{X}-Y}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}$. Теперь

$$\mathrm{P}\left(c_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\overline{X}-Y}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} < c_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} - c_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} < Y < \overline{X} - c_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right) = 1-\alpha$$

и точный доверительный интервал есть

$$\left(\overline{X} - c_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}, \overline{X} - c_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right).$$

Вычисление ОМП для $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Имеем формулу для плотности $f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Тогда

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a)^2}.$$

Далее будем исследовать точки максимума логарифма

$$M(a,\sigma)=\ln\left(\frac{1}{\sigma^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a)^2}\right)=-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2.$$

Вычислим частные производные по a и σ:

$$\frac{\partial M}{\partial a}\Big|_a=-\frac{1}{\sigma^2}\left(na-\sum_{j=1}^{n}x_j\right),$$

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma}\Big|_\sigma=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2.$$

Тогда приравнивая их к 0, получаем $a=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ и $\hat{a}=\overline{X}$, а также $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$, откуда $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.

9. Критерии отклонения гипотез. Критерий Неймана-Пирсона

Задача 1

Пусть нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что $X_1\sim \mathrm{R}[0,1]$, а альтернатива H_1 заключается в том, что X_1 имеем функцию распределения $F_{X_1}(x)=\sin(\frac{\pi x}{2})I(0<x<1)+I(x\geqslant 1)$.

Построим наиболее мощный критерий и вычислим мощность.

Теперь $\frac{L_1(x_1)}{L_0(x_1)}=\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x_1}{2})$ и неравенство $\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x_1}{2})>c_\alpha$ выполнено тогда и только тогда, когда $x_1<\frac{2\arccos(\frac{2c_\alpha}{\pi})}{\pi}$. Поэтому

$$\alpha=\mathrm{P}_0(\tfrac{L_1(x_1)}{L_0(x_1)}>c_\alpha)=\mathrm{P}_0(x_1<\tfrac{2\arccos(\frac{2c_\alpha}{\pi})}{\pi})=\tfrac{2\arccos(\frac{2c_\alpha}{\pi})}{\pi}.$$

Отсюда $c_\alpha=\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi\alpha}{2})$. Таким образом, если $\frac{L_1(x_1)}{L_0(x_1)}>\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi\alpha}{2})$, то нулевая гипотеза отклоняется.

Вычислим мощность критерия.

$$\mathrm{P}_1(\tfrac{L_1(x_1)}{L_0(x_1)}>\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{\pi\alpha}{2}))=\mathrm{P}_1(\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{\pi x_1}{2}>\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{\pi\alpha}{2}))=\mathrm{P}_1(\tfrac{\pi x_1}{2}<\tfrac{\pi\alpha}{2})=\mathrm{P}_1(x_1<\alpha)=\sin(\tfrac{\pi\alpha}{2}).$$

Задача 2 (почему возникает достаточная статистика)

По критерию факторизации для достаточной статистики T и некоторых функций $g(\theta,t)$ и $h(x_1,\dots,x_n)$ имеется равенство $L(\theta,x_1,\dots,x_n)=g(\theta,t)h(x_1,\dots,x_n)$. При решении задач используется критерий Неймана-Пирсона, в построении которого участвует функция

$$\frac{L(s,X_1,\dots,X_n)}{L(s_0,X_1,\dots,X_n)}=\frac{g(s,T)h(X_1,\dots,X_n)}{g(s_0,T)h(X_1,\dots,X_n)}=\frac{g(s,T)}{g(s_0,T)}.$$

Тогда неравенство $\frac{g(s,T)}{g(s_0,T)}>c_\alpha$ равносильно некоторому неравенству для T.

Задача 2аб ($\mathrm{Exp}(1),\mathrm{Exp}(\frac{1}{s})$)

Пусть в соответствии с нулевой гипотезой случайные величины $X_1,\dots,X_n$ имеют распределение $\mathrm{Exp}(1)$. Альтернативной является гипотеза о распределении $\mathrm{Exp}(\frac{1}{s})$. Если $X_1,\dots,X_n\sim\mathrm{Exp}(\frac{1}{s})$, то $\overline{X}\sim\Gamma(n,\frac{s}{n})$. Вычислим функции правдоподобия в предположении нулевой гипотезы и альтернативы.

$$L_0(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}e^{-x_i}I(X_{(1)}>0);$$

$$L_1(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}s^{-1}e^{-s^{-1}x_i}I(X_{(1)}>0).$$

Тогда

$$\tfrac{L_1(x_1,\ldots,x_n)}{L_0(x_1,\ldots,x_n)}=s^{-n}e^{-(s^{-1}-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}.$$

Отсюда

$$\alpha=\mathrm{P}_0(\tfrac{L_1(X_1,\ldots,X_n)}{L_0(X_1,\ldots,X_n)}>c_\alpha)=\mathrm{P}_0(-(s^{-1}-1)\sum_{i=1}^{n}X_i>\ln c_\alpha+n\ln s).$$

Если $s<1$, то

$$\alpha=\mathrm{P}_0(\overline{X}<\tfrac{\ln c_\alpha-n\ln s}{1-s^{-1}}).$$

Поэтому $\frac{\ln c_\alpha-n\ln s}{1-s^{-1}}=\gamma_{n,\frac{1}{n},\alpha}$, где $\gamma_{n,\frac{1}{n},\alpha}$ — квантиль уровня α для $\Gamma(n,\frac{1}{n})$-распределения. Тогда $c_\alpha=s^n e^{(1-s^{-1})\gamma_{n,\frac{1}{n},\alpha}}$.

Вычислим мощность критерия:

$$\beta=\mathrm{P}_1(\tfrac{L_1(X_1,\ldots,X_n)}{L_0(X_1,\ldots,X_n)}>c_\alpha)=\mathrm{P}_1(-(s^{-1}-1)\sum_{i=1}^{n}X_i>\ln c_\alpha-n\ln s)=\mathrm{P}_1(\overline{X}<\tfrac{\ln c_\alpha-n\ln s}{1-s^{-1}})=$$

$$=\mathrm{P}_1(\overline{X}<\gamma_{n,\frac{1}{n},\alpha})=\int\limits_0^{\gamma_{n,\frac{1}{n},\alpha}}\tfrac{n^n x^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{nx}dx.$$

Если $s<1$, то

$$\alpha=\mathrm{P}_0(\overline{X}>\tfrac{\ln c_\alpha-n\ln s}{1-s^{-1}}).$$

Поэтому $\frac{\ln c_\alpha-n\ln s}{1-s^{-1}}=\gamma_{n,\frac{1}{n},1-\alpha}$, где $\gamma_{n,\frac{1}{n},1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$ для $\Gamma(n,\frac{1}{n})$-распределения. Тогда $c_\alpha=s^n e^{(1-s^{-1})\gamma_{n,\frac{1}{n},1-\alpha}}$.

Вычислим мощность критерия:

$$\beta=\mathrm{P}_1(\tfrac{L_1(X_1,\ldots,X_n)}{L_0(X_1,\ldots,X_n)}>c_\alpha)=\mathrm{P}_1(-(s^{-1}-1)\sum_{i=1}^{n}X_i>\ln c_\alpha-n\ln s)=\mathrm{P}_1(\overline{X}<\tfrac{\ln c_\alpha-n\ln s}{1-s^{-1}})=$$

$$=\mathrm{P}_1(\overline{X}>\gamma_{n,\frac{1}{n},\alpha})=1-\int\limits_0^{\gamma_{n,\frac{1}{n},1-\alpha}}\tfrac{n^n x^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{nx}dx.$$

Вычислим асимптотические квантили. Имеем $\mathrm{E}_0(\overline{X})=1$, $\mathrm{D}_0(\overline{X})=\frac{1}{n}$. Тогда $\sqrt{n}(\overline{X}-1)\xrightarrow[n\to+\infty]{d}\eta\sim\mathcal{N}(0,1)$. Поэтому

$$\mathrm{P}_0(\overline{X}<1+\tfrac{z_\alpha}{\sqrt{n}})\to\alpha.$$

Задача 2аб ($\mathcal{N}(0,1),\mathcal{N}(s,1)$)

Пусть в соответствии с нулевой гипотезой случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ имеют распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Альтернативной является гипотеза о распределении $\mathcal{N}(s,1)$. Если $X_1,\ldots,X_n\sim\mathcal{N}(s,1)$, то $\overline{X}\sim\mathcal{N}(s,\frac{1}{n})$. Вычислим функции правдоподобия в предположении нулевой гипотезы и альтернативы.

$$L_0(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{2}};$$

$$L_1(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-s)^2}{2}}.$$

Тогда

$$\tfrac{L_1(x_1,\ldots,x_n)}{L_0(x_1,\ldots,x_n)}=e^{\frac{2s\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-ns^2}{2}}.$$

Отсюда

$$\beta=\mathrm{P}_0(\tfrac{L_1(X_1,\ldots,X_n)}{L_0(X_1,\ldots,X_n)}>c_\alpha)=\mathrm{P}_0(2s\overline{X}-s^2>\tfrac{2\ln c_\alpha}{n})=\mathrm{P}_0(2s\overline{X}>s^2+\tfrac{2\ln c_\alpha}{n}).$$

Если $s>0$, то

$$\alpha=\mathrm{P}_0(\overline{X}>\tfrac{s}{2}+\tfrac{\ln c_\alpha}{sn}).$$

Поэтому $\frac{s}{2}+\frac{\ln c_\alpha}{sn}=\frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$, где z_α — квантиль уровня α для $\mathcal{N}(0,1)$-распределения. Тогда $c_\alpha=e^{\sqrt{n}sz_{1-\alpha}-\frac{ns^2}{2}}$.

Вычислим мощность критерия:

$$\beta(s)=\mathrm{P}_1(\tfrac{L_1(X_1,\ldots,X_n)}{L_0(X_1,\ldots,X_n)}>c_\alpha)=\mathrm{P}_1(2s\overline{X}-s^2>\tfrac{2\ln c_\alpha}{n})=\mathrm{P}_1(2s\overline{X}>s^2+\tfrac{2\ln c_\alpha}{n})=$$

$$=\mathrm{P}_1(\overline{X}>\tfrac{s}{2}+\tfrac{\ln c_\alpha}{sn})=1-\Phi(\sqrt{n}(\tfrac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}-s))=1-\Phi(z_{1-\alpha}-\sqrt{n}s).$$

Если $s<0$, то

$$\alpha=\mathrm{P}_0(\overline{X}<\tfrac{s}{2}+\tfrac{\ln c_\alpha}{sn}).$$

Поэтому $\frac{s}{2}+\frac{\ln c_\alpha}{sn}=\frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$, где z_α — квантиль уровня α для $\mathcal{N}(0,1)$-распределения. Тогда $c_\alpha=e^{\sqrt{n}sz_\alpha-\frac{ns^2}{2}}$.

Вычислим мощность критерия:

$$\beta=\mathrm{P}_1(\tfrac{L_1(X_1,\ldots,X_n)}{L_0(X_1,\ldots,X_n)}>c_\alpha)=\mathrm{P}_1(2s\overline{X}-s^2>\tfrac{2\ln c_\alpha}{n})=\mathrm{P}_1(2s\overline{X}>s^2+\tfrac{2\ln c_\alpha}{n})=$$

$$=\mathrm{P}_1(\overline{X}<\tfrac{s}{2}+\tfrac{\ln c_\alpha}{sn})=\Phi(\sqrt{n}(\tfrac{z_\alpha}{\sqrt{n}}-s))=\Phi(z_\alpha-\sqrt{n}s).$$

Вычислим асимптотические квантили. Имеем $\mathrm{E}_0(\overline{X})=0$, $\mathrm{D}_0(\overline{X})=\frac{1}{n}$. Тогда $\sqrt{n}\overline{X}\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}}\eta\sim\mathcal{N}(0,1)$. Поэтому

$$\mathrm{P}_0(\overline{X}<\tfrac{z_\alpha}{\sqrt{n}})\to\alpha.$$

Задача 2аб ($\mathrm{Poiss}(1),\mathrm{Poiss}(s)$)

Пусть в соответствии с нулевой гипотезой случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ имеют распределение Poiss(1). Если $X_1,\ldots,X_n\sim\mathrm{Poiss}(s)$, то $n\overline{X}\sim\mathrm{Poiss}(ns)$. Альтернативной является гипотеза о распределении $\mathrm{Poiss}(s)$. Вычислим функции правдоподобия в предположении нулевой гипотезы и альтернативы.

$$L_0(x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{P}_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=e^{-n}\tfrac{1}{x_1!\ldots x_n!};$$

$$L_1(s,x_1,\ldots,x_n)=e^{-ns}\tfrac{1}{x_1!\ldots x_n!}s^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}.$$

Тогда

$$\tfrac{L_1(x_1,\ldots,x_n)}{L_0(x_1,\ldots,x_n)}=e^{n(1-s)}s^{x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Отсюда

$$\alpha=\mathrm{P}_0(\tfrac{L_1(X_1,\ldots,X_n)}{L_0(X_1,\ldots,X_n)}>c_\alpha)=\mathrm{P}_0(n(1-s)+n\overline{X}\ln s<c_\alpha)=\mathrm{P}_0(n\overline{X}\ln s<c_\alpha+n(s-1)).$$

Если $s>1$, то

$$\alpha=\mathrm{P}_0(n\overline{X}<\tfrac{c_\alpha+n(s-1)}{\ln s}).$$

Поэтому $\frac{c_\alpha+n(s-1)}{\ln s} = p_{s,\alpha}$, где $p_{n,\alpha}$ — квантиль уровня α для распределения $\mathrm{Poiss}(n)$. Тогда $c_\alpha = p_{s,\alpha}\ln s - n(s-1)$.

Вычислим мощность критерия:

$$\beta = \mathrm{P}_1\left(\tfrac{L_1(X_1,\dots,X_n)}{L_0(X_1,\dots,X_n)} > c_\alpha\right) = \mathrm{P}_1(n(1-s)+n\overline{X}\ln s < c_\alpha) = \mathrm{P}_1(n\overline{X}\ln s < c_\alpha + n(s-1)) =$$

$$= \mathrm{P}_1\left(n\overline{X} < \tfrac{c_\alpha+n(s-1)}{\ln s}\right) = 1 - F_{ns}(p_{s,\alpha}),$$

где F_{ns} — функция распределения для случайной величины с распределением $\mathrm{Poiss}(ns)$.

Если $s<1$, то

$$\alpha = \mathrm{P}_0\left(n\overline{X} > \tfrac{c_\alpha+n(s-1)}{\ln s}\right).$$

Поэтому $\frac{c_\alpha+n(s-1)}{\ln s} = p_{n,1-\alpha}$, где $p_{n,\alpha}$ — квантиль уровня α для распределения $\mathrm{Poiss}(n)$. Тогда $c_\alpha = p_{s,1-\alpha}\ln s - n(s-1)$.

Вычислим мощность критерия:

$$\beta = \mathrm{P}_1\left(\tfrac{L_1(X_1,\dots,X_n)}{L_0(X_1,\dots,X_n)} > c_\alpha\right) = \mathrm{P}_1(n(1-s)+n\overline{X}\ln s < c_\alpha) = \mathrm{P}_1(n\overline{X}\ln s < c_\alpha + n(s-1)) =$$

$$= \mathrm{P}_1\left(n\overline{X} > \tfrac{c_\alpha+n(s-1)}{\ln s}\right) = 1 - F_{ns}(p_{s,1-\alpha}),$$

где F_{ns} — функция распределения для случайной величины с распределением $\mathrm{Poiss}(ns)$.

Вычислим асимптотические квантили. Имеем $\mathrm{E}_0(n\overline{X}) = n$, $\mathrm{D}_0(n\overline{X}) = n$. Тогда $\sqrt{n}(\overline{X} - n) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \eta \sim \mathcal{N}(0,1)$. Поэтому

$$\mathrm{P}_0\left(\overline{X} < n + \tfrac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \to \alpha.$$

Задача 3аб

Пусть $X_1,\dots,X_n \sim \mathcal{N}(\theta_1,\theta_2)$.

Пусть нулевая гипотеза состоит в том, что $\theta_1 = 0$, а альтернатива заключается в том, что $\theta_1 \neq 0$. Построим критерий на основе $g(\theta_1,X_1,\dots,X_n) = \frac{\overline{X}-\theta_1}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}}$. Тогда при фиксированном θ_1 случайная величина $g\sqrt{n}$ имеет распределение t_{n-1}. Тогда

$$\mathrm{P}_0(q_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < g\sqrt{n} < q_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

и

$$\mathrm{P}_0\left(\tfrac{q_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < g < \tfrac{q_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = \alpha.$$

Критерий уровня $1-\alpha$ будет состоять в отклонении нулевой гипотезы при $|g(0,X_1,\dots,X_n)| > \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$.

Пусть теперь нулевая гипотеза состоит в том, что $\theta_2 = 1$, а альтернатива утверждает обратное. Построим критерий на основе $h(X_1,\dots,X_n) = \sum\limits_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$. Тогда при фиксированном θ_2 случайная величина $\frac{h}{(n-1)\theta_2}$ имеет распределение χ^2_{n-1}. В предположении $\theta_2 = 1$ имеем

$$\mathrm{P}_0\left(\tfrac{h}{n-1} > c_{n-1,\alpha}\right) = 1-\alpha.$$

Критерий уровня α будет состоять в отклонении нулевой гипотезы при $h(0,X_1,\dots,X_n) > (n-1)c_{n-1,\alpha}$.

10. Байесовские оценки

Задача 1а

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ и $\theta \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Вычислим апостериорную плотность θ. Имеем

$$\pi_{\theta|X_1,\ldots,X_n}(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_{\theta,X_1,\ldots,X_n}(t,x_1,\ldots,x_n)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-t)^2}{2}}}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)} =$$

$$= C(x_1, \ldots, x_n, \mu)e^{-\frac{t^2-2t\mu}{2}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-t)^2}{2}} = C(x_1, \ldots, x_n, \mu)e^{-\frac{1}{2}\left((n+1)t^2-2t\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-2t\mu+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)} =$$

$$= \tilde{C}(x_1, \ldots, x_n, \mu)e^{-\frac{n+1}{2}\left(t-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\frac{\mu}{n+1}\right)^2}.$$

Тогда $\pi_{\theta|X_1,\ldots,X_n}$ — плотность случайной величины $\hat{\theta}$ с распределением

$$\mathcal{N}\left(\frac{n\overline{X}+\mu}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right).$$

Задача 1б

Вычислим байесовскую оценка для абсолютного риска. Имеем

$$\frac{1}{2} = F_{\hat{\theta}}(q) = \Phi_{\frac{n\overline{X}+\mu}{n+1},\frac{1}{n+1}}(q).$$

Отсюда $q - \frac{n\overline{X}+\mu}{n+1} = 0$ и $q = \frac{n\overline{X}+\mu}{n+1}$.

Вычислим байесовскую оценку для среднеквадратичного риска:

$$S = \mathrm{E}\,\hat{\theta} = \frac{n\overline{X}+\mu}{n+1}.$$

Вычислим байесовский доверительный интервал. В условиях задачи имеем

$$q_\alpha = \frac{z_\alpha}{\sqrt{n+1}} + \frac{n\overline{X}+\mu}{n+1}.$$

Тогда доверительный интервал $(q_{\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}})$ равен

$$\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n+1}} + \frac{n\overline{X}+\mu}{n+1}, \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n+1}} + \frac{n\overline{X}+\mu}{n+1}\right).$$

Задача 2аб

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\theta})$ и $\theta \sim \Gamma(2, \beta)$. Вычислим апостериорную плотность θ. Имеем

$$\pi_{\theta|X_1,\ldots,X_n}(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_{\theta,X_1,\ldots,X_n}(t,x_1,\ldots,x_n)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\frac{t}{\beta^2}e^{-\frac{t}{\beta}}I(t>0)\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_i^2 t}{2}}}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)} =$$

$$= C(x_1, \ldots, x_n, \beta)t^{1+\frac{n}{2}}e^{-\frac{t}{2}(\frac{2}{\beta}+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)}.$$

Тогда $\pi_{\theta|X_1,\ldots,X_n}$ — плотность случайной величины $\hat{\theta}$ с распределением

$$\Gamma\left(2 + \frac{n}{2}, \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}S_n^2\right)^{-1}\right),$$

где $S_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$.

Вычислим байесовскую оценку для среднеквадратичного риска:

$$S = \mathrm{E}\,\hat{\theta} = \frac{2+\frac{n}{2}}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{2}S_n^2}.$$

Задача 3аб

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{R}[0, \theta]$ и $\theta \sim \mathrm{B}(\alpha, 1)$. Вычислим апостериорную плотность θ. Имеем

$$\pi_{\theta|X_1,\ldots,X_n}(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_{\theta,X_1,\ldots,X_n}(t,x_1,\ldots,x_n)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\frac{1}{B(\alpha,1)} t^{\alpha-1} I(0<t<1) \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{t} I(0<x_i<t)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)} =$$

$$= C(x_1, \ldots, x_n, \alpha) t^{\alpha-n-1} I(\max_{i=1\ldots n} x_i < t < 1).$$

Тогда $\pi_{\theta|X_1,\ldots,X_n} = C(X_1, \ldots, X_n, \alpha) t^{\alpha-n-1} I(X_{(n)} < t < 1)$ — плотность случайной величины $\hat{\theta}$. Для $C(X_1, \ldots, X_n)$ имеем выражение:

$$C(X_1, \ldots, X_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-n-1} I(X_{(n)} < t < 1) dt = \int\limits_{X_{(n)}}^{1} t^{\alpha-n-1} dt = t^{\alpha-n}\Big|_{X_{(n)}}^{1} = 1 - X_{(n)}^{\alpha-n}.$$

Таким образом,

$$\pi_{\theta|X_1,\ldots,X_n} = \frac{t^{\alpha-n-1} I(X_{(n)}<t<1)}{1-X_{(n)}^{\alpha-n}}.$$

Вычислим квантили этого распределения. Имеем

$$\beta = \int\limits_{-\infty}^{q_\beta} \frac{t^{\alpha-n-1} I(X_{(n)}<t<1)}{1-X_{(n)}^{\alpha-n}} dt = \int\limits_{X_{(n)}}^{q_\beta} \frac{t^{\alpha-n-1}}{1-X_{(n)}^{\alpha-n}} dt = \frac{q_\beta^{\alpha-n} - X_{(n)}^{\alpha-n}}{1-X_{(n)}^{\alpha-n}}.$$

Отсюда

$$q_\beta = \left(\beta(1 - X_{(n)}^{\alpha-n}) + X_{(n)}^{\alpha-n}\right)^{\frac{1}{\alpha-n}} = \left(\beta + (1-\beta) X_{(n)}^{\alpha-n}\right)^{\frac{1}{\alpha-n}}.$$

Тогда байесовский доверительный интервал для $1-\beta$ есть

$$\left(\left(\frac{\beta}{2} + (1 - \frac{\beta}{2}) X_{(n)}^{\alpha-n}\right)^{\frac{1}{\alpha-n}}, \left(1 - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} X_{(n)}^{\alpha-n}\right)^{\frac{1}{\alpha-n}}\right).$$

Байесовская оценка для абсолютного риска равна

$$q = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} X_{(n)}^{\alpha-n}\right)^{\frac{1}{\alpha-n}}.$$

Задача 4аб

Пусть T — достаточная статистика. По критерию факторизации имеется разложение

$$L(t, x_1, \ldots, x_n) = g(t, T(x_1, \ldots, x_n)) h(x_1, \ldots, x_n)$$

для некоторых g и h. Тогда апостериорная плотность равна

$$\pi_{\theta|X_1,\ldots,X_n}(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_{\theta,X_1,\ldots,X_n}(t,x_1,\ldots,x_n)}{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{g(t,T) h(x_1,\ldots,x_n)}{\int\limits_\Theta g(t,T) h(x_1,\ldots,x_n) dt} = \frac{h(x_1,\ldots,x_n)}{\int\limits_\Theta g(t,T) h(x_1,\ldots,x_n) dt} \cdot g(t,T) = \frac{g(t,T)}{\int\limits_\Theta g(t,T) dt}.$$

Таким образом, параметры апостериорного распределения выражаются через достаточную статистику T.

В задаче 1 в качестве такой статистики выступает $\overline{X}$. В задаче 2 в качестве такой статистики выступает $S_n^2 = \sum X_i^2$. В задаче 3 в качестве такой статистики выступает $X_{(n)}$. Все эти оценки возникают как оценки максимального правдоподобия или пропорциональные им (задача 2) и были посчитаны в 3-й домашней работе (такие оценки являются достаточными).

11. КООП, Vald, score-test

Задача 1 (КООП)

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_x, \theta_1^2)$ и $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathcal{N}(\theta_y, \theta_2^2)$ — независимые случайные величины. Пусть нулевая гипотеза заключается в равенстве $\theta_1 = \theta_2$, а альтернатива — её отрицание.

Построим критерий обобщённого отношения правдоподобий.

Имеем в общем случае

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_x, \theta_y, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2\pi\theta_1\theta_2} e^{-\frac{(X_i-\theta_x)^2}{2\theta_1^2} - \frac{(Y_i-\theta_y)^2}{2\theta_2^2}}.$$

Тогда

$$\ln L(\theta_1, \theta_2, \theta_x, \theta_y, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = -n\ln(\theta_1) - n\ln(\theta_2) - n\ln(2\pi) - \tfrac{1}{2\theta_1^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_x)^2 - \tfrac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta_y)^2,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_x} L(\theta_1, \theta_2, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = \tfrac{1}{\theta_1^2}\left(-n\theta_x + \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_y} L(\theta_1, \theta_2, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = \tfrac{1}{\theta_2^2}\left(-n\theta_y + \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = 0,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_1} L(\theta_1, \theta_2, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = -\tfrac{n}{\theta_1} + \tfrac{1}{\theta_1^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_x)^2 = 0,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_2} L(\theta_1, \theta_2, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = -\tfrac{n}{\theta_2} + \tfrac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta_y)^2 = 0.$$

Поэтому максимум достигается в точке $\hat{\theta_x} = \overline{X}$, $\hat{\theta_y} = \overline{Y}$, $\hat{\theta_1} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ и $\hat{\theta_2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$.

При $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ имеем

$$L(\theta, \theta_x, \theta_y, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2\pi\theta^2} e^{-\frac{(X_i-\theta_x)^2}{2\theta^2} - \frac{(Y_i-\theta_y)^2}{2\theta^2}}.$$

Тогда

$$\ln L(\theta, \theta_x, \theta_y, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = -2n\ln(\theta) - n\ln(2\pi) - \tfrac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_x)^2 - \tfrac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta_y)^2,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_x} L(\theta_1, \theta_2, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = \tfrac{1}{\theta^2}\left(-n\theta_x + \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_y} L(\theta_1, \theta_2, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = \tfrac{1}{\theta^2}\left(-n\theta_y + \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = 0,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta} L(\theta, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = -\tfrac{2n}{\theta} + \tfrac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_x)^2 + \tfrac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\theta_y)^2 = 0.$$

Тогда максимум достигается в точек $\hat{\theta_x} = \overline{X}, \hat{\theta_y} = \overline{Y}$ и $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left((X_i - \overline{X})^2 + (Y_i - \overline{Y})^2\right)}$.

Положим $S_X = \sum\limits_{i=1}^n (X_i - \overline{X}), S_Y = \sum\limits_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})$ и $S = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n \left((X_i - \overline{X})^2 + (Y_i - \overline{Y})^2\right)$.

Имеем

$$\lambda = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta_1,\theta_2,\theta_x,\theta_y,X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta,\theta_x,\theta_y,X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n)} = \frac{\frac{1}{S_X^{\frac{n}{2}} S_Y^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^n}e^{-n}}{\frac{1}{S^n}\cdot\frac{1}{(2\pi)^n}e^{-n}} = \frac{S^n}{\sqrt{S_X^n S_Y^n}}$$

и

$$\ln\lambda = n\ln S - \tfrac{n}{2}\ln S_X - \tfrac{n}{2}\ln S_Y.$$

Так как $\dim\Theta - \dim\Theta_0 = 4 - 3 = 1$, то $2\ln\lambda \xrightarrow[\theta\in\Theta_0]{d} \xi \sim \chi_1^2$.

Тогда $\mathrm{P}_{H_0}(2n\ln S - n\ln S_X - n\ln S_Y > q_{1-\alpha}) \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$, где $q_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$ распределения χ_1^2. Нулевая гипотеза отклоняется при $2n\ln S - n\ln S_X - n\ln S_Y > q_{1-\alpha}$.

Задача 1 (Vald)

Построим вальдовский критерий в рамках задачи 1а. Пусть $h(\theta_1,\theta_x,\theta_2,\theta_y) = \theta_1 - \theta_2$. Нулевая гипотеза в этом случае обретает равносильную формулировку $h(\theta_1,\theta_2,\theta_x,\theta_y) = 0$.

Выше мы вычислили точку максимума на Θ как точку с координатами $\hat\theta_x = \overline{X}$, $\hat\theta_y = \overline{Y}$, $\hat\theta_1 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} = \sqrt{S_X}$ и $\hat\theta_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2} = \sqrt{S_Y}$.

Вычислим информационную матрицу для $n = 1$ в точке максимума:

$$I_1(\theta_1,\theta_x,\theta_2,\theta_y) = \mathrm{E}(-\tfrac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\ln L)\Big|_{\theta=\hat\theta} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} \mathrm{E}\left(-\frac{n}{\theta_1^2}+\frac{3}{\theta_1^4}\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\theta_x)^2\right) & \mathrm{E}\left(\frac{2}{\theta_1^3}\left(-n\theta_x+\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)\right) & 0 & 0 \\ \mathrm{E}\left(\frac{2}{\theta_1^3}\left(-n\theta_x+\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)\right) & \mathrm{E}\,\frac{n}{\theta_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{E}\left(-\frac{n}{\theta_2^2}+\frac{3}{\theta_2^4}\sum\limits_{i=1}^n (Y_i-\theta_y)^2\right) & \mathrm{E}\left(\frac{2}{\theta_2^3}\left(-n\theta_y+\sum\limits_{i=1}^n Y_i\right)\right) \\ 0 & 0 & \mathrm{E}\left(\frac{2}{\theta_2^3}\left(-n\theta_y+\sum\limits_{i=1}^n Y_i\right)\right) & \mathrm{E}\,\frac{n}{\theta_2^2} \end{pmatrix}\right|_{\theta=\hat\theta,n=1} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} \frac{2n}{\theta_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{\theta_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2n}{\theta_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{\theta_2^2} \end{pmatrix}\right|_{\theta=\hat\theta,n=1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{S_X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{S_Y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S_Y} \end{pmatrix}.$$

Градиент h есть $(1,0,-1,0)$, поэтому

$$JI_1^{-1}(\hat\theta)J^T = \tfrac{S_X+S_Y}{2}.$$

Тогда для квантиля $q_{1-\alpha}$ получаем

$$\mathrm{P}_{H_0}\left(\tfrac{2n(\sqrt{S_Y}-\sqrt{S_X})^2}{S_X+S_Y} > q_{1-\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha.$$

Нулевая гипотеза отвергается при $\frac{2n(\sqrt{S_Y}-\sqrt{S_X})^2}{S_X+S_Y} > q_{1-\alpha}$.

Задача 2

Пусть фиксировано целое положительное число k и имеются k последовательностей независимых случайных величин $X_{k,1},\ldots,X_{k,n_k} \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\theta_k})$. Пусть нулевая гипотеза состоит в том, что $\theta_1 = \ldots = \theta_k$.

Построим score-test для проверки гипотезы.

Имеем
$$\ln L(\overrightarrow{\theta}, X_{ij}) = \ln \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} \tfrac{1}{\theta_i} e^{-\frac{X_{ij}}{\theta_i}} I(X_{ij} > 0) = \sum_{i=1}^{k} \left(-n_i \ln \theta_i - \tfrac{1}{\theta_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \right).$$
Частная производная по θ_i не равна нулю только для i-го слагаемого в внешней сумме. Поэтому
$$\tfrac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\overrightarrow{\theta}, X_{ij}) = \tfrac{\partial}{\partial \theta_i} \left(-n_i \ln \theta_i - \tfrac{1}{\theta_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \right) = \tfrac{-n_i}{\theta_i} + \tfrac{1}{\theta_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}.$$
Найдём оценку максимального правдоподобия при условии гипотезы ($\theta = \theta_1 = \ldots = \theta_k$). Имеем
$$\sum_{i=1}^{k} \left(\tfrac{-n_i}{\theta} + \tfrac{1}{\theta^2} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \right) = 0.$$
Отсюда
$$\hat{\theta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i}.$$
Вычислим информационную матрицу. Из формул для частных производных видим, что вторые частные производные по θ_i и θ_j равны 0 при $i \neq j$. Поэтому матрица диагональна. Вычислим значения элементов на диагонали. Тогда
$$-\tfrac{\partial^2}{\partial^2 \theta_i} \ln L(\theta, X_{ij}) = -\tfrac{n_i}{\theta_i^2} + \tfrac{2}{\theta_i^3} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij},$$
$$I_{ii}(\theta_i) = \mathrm{E} \left(-\tfrac{n_i}{\theta_i^2} + \tfrac{2}{\theta_i^3} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \right) = -\tfrac{n_i}{\theta_i^2} + \tfrac{2}{\theta_i^3} \cdot n_i \theta_i = \tfrac{n_i}{\theta_i^2}.$$
Отсюда
$$\sum_{i=1}^{k} \tfrac{\hat{\theta}^2}{n_i} \left(\tfrac{-n_i}{\hat{\theta}} + \tfrac{1}{\hat{\theta}^2} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \right)^2 = \tfrac{\hat{\theta}^2}{\hat{\theta}^4} \sum_{i=1}^{k} \tfrac{1}{n_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} - n_i \hat{\theta} \right)^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \left(\sum\limits_{j=1}^{n_i} X_{ij} - n_i \hat{\theta} \right)^2}{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} \right)^2}.$$
Эта случайная величина сходится по распределению к χ^2_{k-1}-случайной величине. Пусть $q_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1 - \alpha$. Тогда
$$\mathrm{P} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \left(\sum\limits_{j=1}^{n_i} X_{ij} - n_i \hat{\theta} \right)^2}{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} \right)^2} > q_{1-\alpha} \right) \underset{n \to +\infty}{\to} \alpha.$$

Задача 3а

Пусть имеются три набора независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_1, \sigma^2)$, $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathcal{N}(\theta_2, \sigma^2)$ и $Z_1, \ldots, Z_n \sim \mathcal{N}(\theta_3, \sigma^2)$, представляющие значения длин рёбер параллелепипеда.

Пусть V — фиксированное положительное число. Построим критерий Вальда для проверки гипотезы о том, что объём параллелепипеда равен V:

$$\theta_1\theta_2\theta_3 = V.$$

В пространстве всех допустимых значений $\Theta = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \sigma) \mid \theta_1, \theta_2, \theta_3, \sigma > 0\}$ равенство $\theta_1\theta_2\theta_3 = V$ определяет гиперповерхность, то есть подмногообразие размерности $3 - 1 = 2$.

Для построения критерия Вальда будем рассматривать функцию $h(x, y, z, t) = xyz - V$. Тогда $\operatorname{grad} h = (yz, zx, xy, 0)$.

Вычислим функцию правдоподобия:

$$L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}\sigma^3} e^{-\frac{(X_i-\theta_1)^2+(Y_i-\theta_2)^2+(Z_i-\theta_3)^2}{2\sigma^2}};$$

$$\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = -\tfrac{3n}{2}\ln(2\pi) - 3n\ln\sigma - \tfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta_1)^2 + (Y_i-\theta_2)^2 + (Z_i-\theta_3)^2\right).$$

Для частных производных имеем:

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = \tfrac{1}{\sigma^2}(-n\theta_1 + \sum_{i=1}^{n} X_i) = \tfrac{n}{\sigma^2}(\overline{X} - \theta_1),$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_2}\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = \tfrac{1}{\sigma^2}(-n\theta_2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i) = \tfrac{n}{\sigma^2}(\overline{Y} - \theta_2),$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_3}\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = \tfrac{1}{\sigma^2}(-n\theta_3 + \sum_{i=1}^{n} Z_i) = \tfrac{n}{\sigma^2}(\overline{Z} - \theta_3),$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\sigma}\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = -\tfrac{n}{\sigma} + \tfrac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta_1)^2 + (Y_i-\theta_2)^2 + (Z_i-\theta_3)^2\right).$$

Тогда точка максимума есть точка с координатами $\hat\theta_1 = \overline{X}, \hat\theta_2 = \overline{Y}, \hat\theta_3 = \overline{Z}$ и $\hat\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left((X_i - \overline{X})^2 + (Y_i - \overline{Y})^2 + (Z_i - \overline{Z})^2\right)$. Матождиания от минус частных производных второго порядка равны

$$-\operatorname{E}\tfrac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = -\operatorname{E}\left(-\tfrac{n}{\sigma^2}\right) = -\tfrac{n}{\sigma^2};$$

$$-\operatorname{E}\tfrac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = -\operatorname{E}0 = 0\ (i \neq j);$$

$$-\operatorname{E}\tfrac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = -\operatorname{E}\left(\tfrac{n}{\sigma^2} - \tfrac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta_1)^2 + (Y_i-\theta_2)^2 + (Z_i-\theta_3)^2\right)\right) = -\tfrac{n}{\sigma^2} + \tfrac{9\sigma^2}{\sigma^3} = \tfrac{8n}{\sigma^2};$$

$$-\operatorname{E}\tfrac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\theta_1}\ln L(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = -\operatorname{E}\tfrac{2}{\sigma^3}(n\theta_1 - \sum_{i=1}^{n} X_i) = 0.$$

Тогда информационная матрица в точке максимума равна

$$I_n(\hat\theta) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\hat\sigma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{\hat\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{\hat\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8n}{\hat\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$g = \operatorname{grad} h(\hat\theta) I_1(\hat\theta)^{-1} \operatorname{grad} h(\hat\theta)^t = \hat\sigma^2(\overline{X}^2\overline{Y}^2 + \overline{Y}^2\overline{Z}^2 + \overline{Z}^2\overline{X}^2).$$

Тогда случайная величина

$$\frac{nh^2}{g} = \frac{n(\overline{XYZ}-V)^2}{\hat{\sigma}^2(\overline{X}^2\overline{Y}^2+\overline{Y}^2\overline{Z}^2+\overline{Z}^2\overline{X}^2)}$$

сходится по распределению к $\chi^2_{3-2} = \chi^2_1$.

Если $q_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$ соответствующего распределения, то

$$\mathrm{P}\left(\frac{n(\overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z}-V)^2}{\hat{\sigma}^2(\overline{X}^2\overline{Y}^2+\overline{Y}^2\overline{Z}^2+\overline{Z}^2\overline{X}^2)} > q_{1-\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha.$$

Задача 3б

В условиях задачи 3а построим score-test для проверки гипотезы $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$. Данная система задаёт подмногообразие размерности 2 в пространстве $\Theta = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \sigma) \mid \theta_1, \theta_2, \theta_3, \sigma > 0\}$.

Найдём точку максимума функции правдоподобия на этом подмногообразии. Имеем

$$L_{H_0}(\theta, \sigma, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}\sigma^3} e^{-\frac{(X_i-\theta)^2+(Y_i-\theta)^2+(Z_i-\theta)^2}{2\sigma^2}};$$

$$\ln L_{H_0}(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = -\frac{3n}{2}\ln(2\pi) - 3n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta)^2 + (Y_i-\theta)^2 + (Z_i-\theta)^2\right).$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L_{H_0}(\theta, \sigma, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = \frac{1}{\sigma^2}(-3n\theta + \sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i + Z_i));$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L_{H_0}(\theta, \sigma, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) = -\frac{3n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta)^2 + (Y_i-\theta)^2 + (Z_i-\theta)^2\right).$$

Тогда координаты точки максимума равны $\hat{\theta}_{H_0} = \frac{1}{3}(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})$ и
$\hat{\sigma}^2_{H_0} = \frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left((X_i-\hat{\theta})^2 + (Y_i-\hat{\theta})^2 + (Z_i-\hat{\theta})^2\right)$.

Оценка

$$T = \frac{1}{n}\,\mathrm{grad}\, L(\hat{\theta}_{H_0}, \hat{\theta}_{H_0}, \hat{\theta}_{H_0}, \hat{\sigma}_{H_0}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}) I_1(\hat{\theta}_{H_0}, \hat{\theta}_{H_0}, \hat{\theta}_{H_0}, \hat{\sigma}_{H_0})^{-1}\,\mathrm{grad}\, L(\hat{\theta}_{H_0}, \hat{\theta}_{H_0}, \hat{\theta}_{H_0}, \hat{\sigma}_{H_0}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})^t =$$

$$= \frac{\hat{\sigma}^2_{H_0}}{n}\cdot\frac{n^2}{\hat{\sigma}^4_{H_0}}\left((\hat{\theta}_{H_0} - \overline{X})^2 + (\hat{\theta}_{H_0} - \overline{Y})^2 + (\hat{\theta}_{H_0} - \overline{Z})^2\right) +$$

$$+\frac{\hat{\sigma}^2_{H_0}}{8n}\cdot\left(-\frac{n}{\hat{\sigma}_{H_0}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3_{H_0}}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\hat{\theta}_{H_0})^2 + (Y_i-\hat{\theta}_{H_0})^2 + (Z_i-\hat{\theta}_{H_0})^2\right)\right)^2$$

сходится по распределению к ξ^2_2.

Если $q_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$, то имеем

$$\mathrm{P}(T > q_{1-\alpha}) \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha.$$

Задача 4

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_x, \theta^2)$ и $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathcal{N}(\theta_y, \theta^2)$ — независимые случайные величины. Построим критерий обобщённого отношения правдоподобий для проверки гипотезы $\theta_x = \theta_y$.

Вычислим функции правдоподобия в общем случае и при условии гипотезы.

$$L(\theta_x, \theta_y, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi\theta^2}e^{-\frac{(X_i-\theta_x)^2+(Y_i-\theta_y)^2}{2\theta^2}};$$

$$\ln L(\theta_x, \theta_y, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = -n \ln 2\pi - 2n \ln \theta - \tfrac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - \theta_x)^2 + (Y_i - \theta_y)^2 \right).$$

Вычислим частные производные:

$$\tfrac{\partial}{\partial \theta_x} \ln L(\theta_x, \theta_y, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \tfrac{1}{\theta^2} \left(-n\theta_x + \sum_{i=1}^{n} X_i \right);$$

$$\tfrac{\partial}{\partial \theta_y} \ln L(\theta_x, \theta_y, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \tfrac{1}{\theta^2} \left(-n\theta_y + \sum_{i=1}^{n} Y_i \right);$$

$$\tfrac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta_x, \theta_y, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = -\tfrac{2n}{\theta} + \tfrac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - \theta_x)^2 + (Y_i - \theta_y)^2 \right).$$

Максимум достигается в точке с координатами $\hat{\theta}_x = \overline{X}, \hat{\theta}_y = \overline{Y}$ и $\hat{\theta}^2 = \frac{1}{2n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left((X_i - \overline{X})^2 + (Y_i - \overline{Y})^2 \right)$. В точке максимума значение равно

$$L(\hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y, \hat{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \tfrac{ne^{-n}}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + (Y_i - \overline{Y})^2 \right)^{-1}.$$

В предположении гипотезы имеем

$$L_0(\theta_0, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2\pi\theta^2} e^{-\frac{(X_i - \theta_0)^2 + (Y_i - \theta_0)^2}{2\theta^2}};$$

$$\ln L(\theta_x, \theta_y, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = -n \ln 2\pi - 2n \ln \theta - \tfrac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - \theta_0)^2 + (Y_i - \theta_0)^2 \right).$$

Снова вычислим частные производные:

$$\tfrac{\partial}{\partial \theta_0} \ln L(\theta_0, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \tfrac{1}{\theta^2} \left(-2n\theta_0 + \sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i) \right);$$

$$\tfrac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta_x, \theta_y, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = -\tfrac{2n}{\theta} + \tfrac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - \theta_0)^2 + (Y_i - \theta_0)^2 \right).$$

Максимум достигается в точке $\hat{\theta}_0 = \frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2}$, $\hat{\theta}^2 = \frac{1}{2n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left((X_i - \frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2 + (Y_i - \frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2 \right)$. Значение в этой точке равно

$$L(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \tfrac{ne^{-n}}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \tfrac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2 + (Y_i - \tfrac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2 \right)^{-1}.$$

Тогда для

$$\lambda = \tfrac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta_x, \theta_y, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta_0, \theta, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})}$$

имеем

$$2 \ln \lambda = \ln \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \tfrac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2 + (Y_i - \tfrac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2 \right) - \ln \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + (Y_i - \overline{Y})^2 \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{d} \xi \sim \chi_1^2.$$

Если $q_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$, то

$$\mathrm{P}\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tfrac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2+(Y_i-\tfrac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2\right)-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\right)>q_{1-\alpha}\right)\to\alpha.$$

12. Точный критерий обобщённого отношения правдоподобий

Задача 1аб

Пусть $X_1,\ldots,X_n\sim\mathcal{N}(\theta_x,\theta^2)$ и $Y_1,\ldots,Y_n\sim\mathcal{N}(\theta_y,\theta^2)$ — независимые случайные величины. Пусть нулевая гипотеза предполагает истинность неравенства $\theta_x\geqslant\theta_y$.
Вычислим функцию правдоподобия и найдём её точку максимума.

$$L(\theta_x,\theta_y,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=\prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2\pi\theta^2}e^{-\frac{(X_i-\theta_x)^2+(Y_i-\theta_y)^2}{2\theta^2}};$$

$$\ln L(\theta_x,\theta_y,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=-n\ln 2\pi-2n\ln\theta-\tfrac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta_x)^2+(Y_i-\theta_y)^2\right).$$

Частные производные равны

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_x}\ln L(\theta_x,\theta_y,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=\tfrac{1}{\theta^2}\left(-n\theta_x+\sum_{i=1}^{n}X_i\right);$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_y}\ln L(\theta_x,\theta_y,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=\tfrac{1}{\theta^2}\left(-n\theta_y+\sum_{i=1}^{n}Y_i\right);$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta_x,\theta_y,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=-\tfrac{2n}{\theta}+\tfrac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta_x)^2+(Y_i-\theta_y)^2\right).$$

Точка максимума имеет координаты $\hat\theta_x=\overline{X},\hat\theta_y=\overline{Y},\hat\theta^2=\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\right)$. Значение в точке максимума равно

$$\tfrac{e^{-n}}{2^n\pi^n\hat\theta^{2n}}.$$

Если $\overline{X}>\overline{Y}$, то точка максимума при условии гипотезы оказывается такой же, как и в общем случае. Поэтому будем рассматривать случай, когда $\overline{X}\leqslant\overline{Y}$. Тогда максимум достигается на границе $\theta_x=\theta_y=:\theta_{xy}$. Вычислим точку максимума и его значение. Имеем

$$L(\theta_0,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=\prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2\pi\theta^2}e^{-\frac{(X_i-\theta_{xy})^2+(Y_i-\theta_{xy})^2}{2\theta^2}};$$

$$\ln L(\theta_0,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=-n\ln 2\pi-2n\ln\theta-\tfrac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta_0)^2+(Y_i-\theta_0)^2\right).$$

Частные производные равны

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_x}\ln L(\theta_x,\theta_y,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=\tfrac{1}{2\theta^2}\left(-2n\theta_{xy}+\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i\right);$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta_x,\theta_y,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=-\tfrac{2n}{\theta}+\tfrac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\theta_{xy})^2+(Y_i-\theta_{xy})^2\right).$$

Точка максимума имеет координаты $\hat{\theta}_{xy} = \frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2}, \hat{\theta}^2_{H_0} = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i - \frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2 + (Y_i - \frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2\Big)$. Значение в точке максимума равно

$$\frac{e^{-n}}{2^n\pi^n\hat{\theta}^{2n}_{H_0}}.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta_x,\theta_y,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta_0,\theta,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})} = \frac{\hat{\theta}^{2n}_{H_0}}{\hat{\theta}^{2n}}.$$

$$\sqrt[n]{\lambda} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2+(Y_i-\frac{\overline{X}+\overline{Y}}{2})^2\Big)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X}-\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{2})^2+(Y_i-\overline{Y}-\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{2})^2\Big)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)} = 1 + \frac{2n(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{2})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)}.$$

Отсюда

$$\sqrt[n]{\lambda} - 1 = \frac{n}{2}\cdot\frac{(\overline{X}-\overline{Y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)}.$$

Имеем следующие распределения для случайных величин

$$(\overline{X}-\overline{Y}) - (\theta_x-\theta_y) \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{2\theta^2}{n});$$

$$\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \xi^2_{n-1};$$

$$\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2 \sim \xi^2_{2n-2};$$

Тогда

$$\sqrt{\sqrt[n]{\lambda}-1}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}\cdot\frac{\frac{n}{2\theta^2}}{\frac{1}{(2n-2)\theta^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{n}{2\theta^2}}((\overline{X}-\overline{Y})-(\theta_x-\theta_y))}{\sqrt{\frac{1}{(2n-2)\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)}} \sim t_{2n-2}$$

и

$$\sqrt{\sqrt[n]{\lambda}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n-2}} \sim t_{2n-2}.$$

Пусть q_α — квантиль уровня α для распределения Стьюдента t_{2n-2}. Будем отклонять гипотезу при $\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{2n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)}} < q_\alpha$.

Обозначим через $F_{t_{2n-2}}$ — функцию распределения Стьюдента. Тогда

$$\sup_{\theta_x\geqslant\theta_y} \mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2n}(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{2})}{\sqrt{\frac{1}{2n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)}} < q_\alpha\right) =$$

$$= \sup_{\theta_x\geqslant\theta_y} \mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}((\overline{X}-\overline{Y})-(\theta_x-\theta_y))}{\sqrt{\frac{1}{2n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)}} < q_\alpha - \frac{\sqrt{\frac{n}{2}}(\theta_x-\theta_y)}{\sqrt{\frac{1}{2n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)}}\right) =$$

$$= \sup_{\theta_x\geqslant\theta_y} F_{t_{2n-2}}\left(q_\alpha - \frac{\sqrt{\frac{n}{2}}(\theta_x-\theta_y)}{\sqrt{\frac{1}{2n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\Big)}}\right) = F_{t_{2n-2}}(q_\alpha - 0) = \alpha.$$

Аналогично, имеем выражение для мощности:

$$\beta(\theta_1,\theta_2) = F_{t_{2n-2}}\left(q_\alpha - \frac{\sqrt{\frac{n}{2}}(\theta_x-\theta_y)}{\sqrt{\frac{1}{2n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left((X_i-\overline{X})^2+(Y_i-\overline{Y})^2\right)}}\right),$$

что больше $F_{t_{2n-2}}(q_\alpha) = \alpha$ при $\theta_x < \theta_y$.

Задача 2

Рассмотрим независимые случайные величины $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\mu_x,\theta_x^2)$ и $Y_1,\ldots\mathcal{N}(\mu_y,\theta_y^2)$. Параметры μ_x,μ_y будем считать известными числами.

Пусть гипотеза состоит в том, что $\theta_x \geqslant 2\theta_y$. Построим точный критерий обобщённого отношения правдоподобий. Имеем

$$L(\theta_x,\theta_y,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = \prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2\pi\theta_x\theta_y}e^{-\frac{(X_i-\mu_x)^2}{2\theta_x^2}-\frac{(Y_i-\mu_y)^2}{2\theta_y^2}},$$

$$\ln L(\theta_x,\theta_y,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = -n\ln 2\pi - n\ln\theta_x - n\ln\theta_y - \tfrac{1}{2\theta_x^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_x)^2 - \tfrac{1}{2\theta_y^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_y)^2.$$

Тогда

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_x}\ln L(\theta_x,\theta_y,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = -\tfrac{n}{\theta_x} + \tfrac{1}{\theta_x^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_x)^2,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_y}\ln L(\theta_x,\theta_y,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = -\tfrac{n}{\theta_y} + \tfrac{1}{\theta_y^3}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_y)^2.$$

Максимум достигается в точке с координатами $S_x^2 := \hat{\theta}_x^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_x)^2$ и $S_y^2 := \hat{\theta}_y^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_y)^2$.

Заметим, что

$$\frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_x)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_y)^2} = \frac{\frac{1}{n\theta_x^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_x)^2}{\frac{1}{n\theta_y^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_y)^2}\cdot\frac{\theta_x^2}{\theta_y^2}$$

и $\dfrac{\frac{1}{n\theta_x^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_x)^2}{\frac{1}{n\theta_y^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_y)^2} \sim F_{n,n}$.

Если $S_x^2 \geqslant 4S_y^2$, то точка максимума лежит в подмножестве $\{\theta_x > 2\theta_y\}$ и поэтому отношение супремумов правдоподобий будет равно 1. Будем рассматривать случай, когда $S_x^2 < 4S_y^2$. Тогда максимум достигается на границе области $\theta_x = 2\theta_y$, $\theta_y =: \theta_{xy}$. Найдём его

$$L(\theta_{xy},\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = \prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{4\pi\theta_{xy}^2}e^{-\frac{(X_i-\mu_x)^2}{8\theta_{xy}^2}-\frac{(Y_i-\mu_y)^2}{2\theta_{xy}^2}},$$

$$\ln L(\theta_{xy},\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = -n\ln 4\pi - 2n\ln\theta_{xy} - \tfrac{1}{8\theta_{xy}^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_x)^2 - \tfrac{1}{2\theta_{xy}^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_y)^2.$$

Тогда

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta_{xy}}\ln L(\theta_x,\theta_y,\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = -\tfrac{2n}{\theta_{xy}} + \tfrac{1}{\theta_{xy}^3}\sum_{i=1}^{n}(\tfrac{1}{4}(X_i-\mu_x)^2+(Y_i-\mu_y)^2).$$

Точка максимума есть $\hat{\theta}^2_{xy} = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{4}(X_i-\mu_x)^2+(Y_i-\mu_y)^2) = \frac{1}{8}S_x^2+\frac{1}{2}S_y^2$.

Имеем

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\vec{\theta}\in\Theta} L(\theta_x,\theta_y,\vec{X},\vec{Y})}{\sup\limits_{\vec{\theta}\in\Theta_0} L(\theta_x,\theta_y,\vec{X},\vec{Y})} = \left(\frac{\hat{\theta}^2_{xy}}{S_xS_y}\right)^n = \left(\frac{\frac{1}{8}S_x^2+\frac{1}{2}S_y^2}{S_xS_y}\right)^n = \left(\frac{1}{8}\frac{S_x}{S_y}+\frac{1}{2}(\frac{S_x}{S_y})^{-1}\right)^n,$$

$$\sqrt[n]{\lambda} = \frac{1}{8}\frac{S_x}{S_y}+\frac{1}{2}(\frac{S_x}{S_y})^{-1}.$$

По предположению $0<\frac{S_x}{S_y}<2$. Рассмотрим функцию $f(u)=\frac{u}{8}+\frac{1}{2u}$. Её производная равна $f'(u)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2u^2}$ и она меньше нуля при $0<u<2$. Следовательно, функция f монотонно убывает на $(0,2)$.

Имеем

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_x^2}{S_y^2}<c_\alpha\right) = \mathrm{P}\left(\frac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\frac{\theta_y^2}{\theta_x^2}<\frac{c_\alpha\theta_y^2}{\theta_x^2}\right) = F_{F_{2n,2n}}(\frac{c_\alpha\theta_y^2}{\theta_x^2}).$$

Будет отвергать гипотезу при $\frac{S_x^2}{S_y^2}<4q_\alpha=c_\alpha$, где q_α — квантиль уровня α распределения Фишера-Снедекора. Тогда можно вычислить уровень значимости

$$\sup_{\theta_x\geqslant 2\theta_y}\mathrm{P}\left(\frac{S_x^2}{S_y^2}<c_\alpha\right) = \sup_{\theta_x\geqslant 2\theta_y}F_{F_{2n,2n}}(\frac{2\theta_y^2}{\theta_x^2}\cdot q_\alpha)=\alpha$$

и мощность критерия:

$$\beta(\theta_x,\theta_y) = \mathrm{P}\left(\frac{S_x^2}{S_y^2}<c_\alpha\right) = F_{F_{2n,2n}}(\frac{4\theta_y^2}{\theta_x^2}\cdot q_\alpha)>\alpha.$$