Решения задач по математической статистике

КОНСТАНТИН ЗЮБИН

Задача 1 («нулёвка»)

Пусть случайная величина X_1 распределена по закону

$$\mathrm{P}_{\theta_1,\theta_2}(X_1 = k) = \theta_1 \cdot \tfrac{e^{-1}}{k!} + (1-\theta_1) \cdot \tfrac{e^{-\theta_2}\theta_2^k}{k!},$$

где $\theta_1 \in (0,1)$ и $\theta_2 > 0$. Построим оценки методом моментов для (θ_1, θ_2).

Имеем

$$a_1(\theta) = \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2} X_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} k\theta_1 \tfrac{e^{-1}}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-\theta_1)\tfrac{e^{-\theta_2}\theta_2^k}{k!} = \theta_1 + (1-\theta_1)\theta_2,$$

$$a_2(\theta) = \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2} X_1^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\theta_1 \tfrac{e^{-1}}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} k^2(1-\theta_1)\tfrac{e^{-\theta_2}\theta_2^k}{k!} = \theta_1\cdot(1+1^2)+(1-\theta_1)\cdot(\theta_2+\theta_2^2) = 2\theta_1+(1-\theta_1)\cdot(\theta_2+\theta_2^2).$$

Далее для упрощения записи будем опускать обозначение аргумента у a_1 и a_2. Выразим θ_2 из первого равенства:

$$\tfrac{a_1-\theta_1}{1-\theta_1} = \theta_2.$$

Аналогично преобразуем второе равенство и подставим в него выражение для θ_2:

$$\tfrac{a_2-2\theta_1}{1-\theta} = \theta_2 + \theta_2^2,$$

$$\tfrac{a_2-2\theta_1}{1-\theta} = \tfrac{a_1-\theta_1}{1-\theta_1} + \left(\tfrac{a_1-\theta_1}{1-\theta_1}\right)^2.$$

Умножая на $(1-\theta_1)^2$ получаем

$$(a_2 - 2\theta_1)(1-\theta_1) = (a_1-\theta_1)(1-\theta_1) + (a_1-\theta_1)^2,$$

$$a_2 + \theta_1(-a_2-2) + 2\theta_1^2 = a_1 + a_1^2 + \theta_1(-a_1 - 1 - 2a_1) + 2\theta_1^2,$$

$$\theta_1 = \tfrac{a_2-a_1-a_1^2}{1+a_2-3a_1}.$$

Подставим в выражение для θ_2:

$$\theta_2 = \tfrac{a_1(1+a_2-3a_1)-(a_2-a_1-a_1^2)}{(1+a_2-3a_1)-(a_2-a_1-a_1^2)} = \tfrac{-2a_1^2-2a_1-a_2+a_1a_2}{(a_1-1)^2}.$$

Тогда

$$\widehat{\theta}_1 = \tfrac{\overline{X^2}-\overline{X}-\overline{X}^2}{1+\overline{X^2}-3\overline{X}}, \widehat{\theta}_2 = \tfrac{-2\overline{X}^2-2\overline{X}-\overline{X^2}+\overline{X}\,\overline{X^2}}{(1-\overline{X})^2}.$$

Задача 2 (нормальное распределение)

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathcal{N}(\theta,1)$. Имеем формулу для плотности $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$. Тогда

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\theta)^2}.$$

Для нахождения точки максимума достаточно исследовать точки минимума функции $\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\theta)^2$. Дифференцируя по θ и приравнивая производную к 0, получаем

$$0=\sum_{j=1}^{n}2(x_j-\theta)=\sum_{j=1}^{n}2x_j-2n\theta,$$

$$\theta=\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j.$$

Таким образом, экстремум достигается в точке $\theta=\overline{X}$. Поскольку функция $\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\theta)^2$ является квадратичным многочленом от θ с положительным старшим коэффициентом, то её экстремум является точкой минимума.

Согласно центральной предельное теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}}\eta\sim\mathcal{N}(0,1).$$

Следовательно, оценка асимптотически нормальна для θ и асимптотическая дисперсия равна 1.

Задача 2 (экспоненциальное распределение)

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$, где $\theta>0$. Имеем формулу для плотности $f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ при $x\geqslant 0$. Тогда

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{j=1}^{n}f_\theta(x_j)=\tfrac{1}{\theta^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{\theta}}$$

при $x_1,\ldots,x_n\geqslant 0$, и $f_\theta(x_1,\ldots,x_n)=0$, если хотя бы одна из координат отрицательна. Для нахождения точек максимума продифференцируем совместную плотность по θ при фиксированных x_i:

$$\tfrac{d}{d\theta}f_\theta(x_1,\ldots,x_n)=\tfrac{-n}{\theta^{n+1}}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\theta}}+\sum_{j=1}^{n}\tfrac{x_j}{\theta^{n+2}}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\theta}}=\tfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j-n\theta}{\theta^{n+2}}e^{-\frac{nx}{\theta}}.$$

Равенство нулю достигается при $\theta=\overline{X}$. Поскольку при больших значениях производная будет отрицательна, а при меньших — положительна, точка $\theta=\overline{X}$ является точкой максимума.

Математическое ожидание X_1 равно $\mathrm{E}_\theta X_1=\theta$, а дисперсия — $\mathrm{D}_\theta X_1=\theta^2$. Согласно центральной предельное теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}}\eta\sim\mathcal{N}(0,\theta^2).$$

Следовательно, оценка асимптотически нормальна для θ и асимптотическая дисперсия равна θ^2.

Задача 2 (распределение Пуассона)

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathrm{Poiss}(\theta)$, где $\theta>0$. Имеем

$$L(\theta,x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{P}_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(X_j=x_j)=e^{-n\theta}\tfrac{1}{x_1!\ldots x_n!}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}.$$

Достаточно найти точки максимума для функции $e^{n\theta}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}$. Продифференцируем:

$$-ne^{-n\theta}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}+(x_1+x_2+\ldots+x_n)e^{-n\theta}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)-1}=(-n\theta+x_1+x_2+\ldots+x_n)e^{-\frac{n}{\theta}}\theta^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)-1}.$$

Производная принимает значение 0 в точке $\theta=\overline{X}$, положительнапри меньших значениях и отрицательна при больших, поэтому точка $\theta=\overline{X}$ является точкой максимума.

Матожидание и дисперсия X_1 равны $\mathrm{E}_\theta X_1=\theta$ и $\mathrm{D}_\theta X_1=\theta^2$, соответственно. Согласно центральной предельное теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}}\eta\sim\mathcal{N}(0,\theta^2).$$

Следовательно, оценка асимптотически нормальна для θ и асимптотическая дисперсия равна θ^2.

Задача 2 (геометрическое распределение)

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathrm{Geom}(\theta)$, где $\theta\in(0,1)$. Имеем

$$L(\theta,x_1,\ldots,x_n)=\mathrm{P}_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(X_j=x_j)=\theta^n(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}.$$

Продифференцируем:

$$n\theta^{n-1}(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}-(x_1+\ldots+x_n-n)\theta^n(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n-1}=$$
$$=(n(1-\theta)-(x_1+\ldots+x_n-n)\theta)\theta^{n-1}(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n-1}=$$
$$=(n-(x_1+\ldots+x_n)\theta)\theta^{n-1}(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n-1}.$$

Нуль достигается в точке $\theta=\frac{1}{\overline{X}}$. Поскольку при меньших значениях производная положительна, а при больших отрицательна, то точка $\theta=\frac{1}{\overline{X}}$ является точкой максимума.

Матожидание и дисперсия X_1 равны $\mathrm{E}_\theta X_1=\frac{1}{\theta}$ и $\mathrm{D}_\theta X_1=\frac{1-\theta}{\theta^2}$, соответственно. Согласно центральной предельное теореме имеем сходимость

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\tfrac{1}{\theta})\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}}\eta\sim\mathcal{N}(0,\tfrac{1-\theta}{\theta^2}).$$

Поскольку производная функции $g(x)=\frac{1}{x}$ на интервале $(0,1)$ не обращается в 0, то по лемме о асимптотической нормальности имеем

$$\sqrt{n}(\tfrac{1}{\overline{X}}-\theta)\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d}}\tilde{\eta}\sim\mathcal{N}(0,\tfrac{1-\theta}{\theta^2}\cdot\theta^4).$$

Таким образом, оценка $\frac{1}{\overline{X}}$ асимптотически нормальна для θ и имеет асимптотическую дисперсию $(1-\theta)\theta^2$.

Задача 3

Пусть случайные величины $X_1,\ldots,X_n\sim\mathrm{R}[\theta_1,\theta_2]$ независимы и одинаково распределены. Они имеют плотности $f_{\theta_1,\theta_2}(x)=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}I(\theta_1\leqslant x\leqslant\theta_2)$. Найдём оценку методом моментов и оценку максимального правдоподобия.

Имеем

$$a_1(\theta)=\mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2}X_1=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\tfrac{u}{\theta_2-\theta_1}du=\tfrac{\theta_1+\theta_2}{2},$$

$$a_2(\theta) = \mathrm{E}_{\theta_1,\theta_2} X_1^2 = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \tfrac{u^2}{\theta_2-\theta_1} du = \tfrac{\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2}{3}.$$

Отсюда

$$(2a_1)^2 - 3a_2 = (\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + \theta_2^2) - (\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2) = \theta_1\theta_2.$$

Тогда θ_1 и θ_2 являются корнями уравнения $\tau^2 - 2a_1\tau + (4a_1^2 - 3a_2) = 0$. Имеем $\theta_1 = \frac{2a_1-\sqrt{4a_1^2-4(4a_1^2-3a_2)}}{2} = a_1 - \sqrt{3(a_2 - a_1^2)}$ и $\theta_2 = a_1 + \sqrt{3(a_2 - a_1^2)}$ (можно отметить, что под знаком корня стоит утроенная дисперсия, и поэтому оба значения θ_1 и θ_2 будут вещественными). Окончательно, $\hat{\theta}_1 = \overline{X} - \sqrt{3(\overline{X^2} - \overline{X}^2)}$ и $\hat{\theta}_2 = \overline{X} + \sqrt{3(\overline{X^2} - \overline{X}^2)}$.

Теперь вычислим оценку максимального правдоподобия. Из формулы для плотности имеем

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = \tfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n},$$

при всех $x_i \in [\theta_1,\theta_2]$ и $f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = 0$ иначе. Наибольшее значение достигается для отрезка $[\theta_1,\theta_2]$ наименьшей длины, содержащего все точки x_i (чтобы значение не стало равным 0). Эта ситуация достигается, когда $\theta_1 = \min\limits_{i=1\ldots n} X_i = X_{(1)}$ и $\theta_2 = \max\limits_{i=1\ldots n} X_i = X_{(n)}$.

Задача 4

Пусть случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ распределены с плотностью $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} I(x \geqslant \theta)$.

Найдём оценку методом моментов. Имеем

$$a_1(\theta) = \mathrm{E}\, X_1 = \int\limits_{\theta}^{+\infty} ue^{-(u-\theta)} du = \int\limits_0^{+\infty} (s+\theta)e^{-s} ds = -se^{-s}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-s} ds + \int\limits_0^{+\infty} \theta e^{-s} ds = \theta + 1.$$

Тогда $\theta = a_1(\theta) - 1$ или $\hat{\theta} = \overline{X} - 1$.

Вычислим оценку максимального правдоподобия. Из формулы для плотности имеем

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = e^{x_1+\ldots+x_n-n\theta} \cdot \prod_{j=1}^{n} I(x_j \geqslant \theta).$$

Наибольшее значение достигается при наибольшем θ таком, что для всех j выполнены неравенства $x_j \geqslant \theta$, то есть при $\theta = \min\limits_{j=1\ldots n} X_i = X_{(1)}$.

Чтобы проверить асимптотическую нормальности вычислим функцию распределения

$$Y = \sqrt{n}(X_{(1)} - \theta):$$

$$F_{Y,\theta}(x) = \mathrm{P}_\theta(\sqrt{n}(X_{(1)} - \theta) \leqslant x) = \mathrm{P}_\theta(X_{(1)} \leqslant \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}_\theta(X_{(1)} > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta) = 1 - \mathrm{P}_\theta(X_1 > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta, X_2 > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta, \ldots, X_n > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}(X_1 > \tfrac{x}{\sqrt{n}} + \theta)^n = 1 - \left(\int\limits_{\frac{x}{\sqrt{n}}+\theta}^{+\infty} e^{-(u-\theta)} I(u \geqslant \theta) du \right)^n = 1 - \left(\int\limits_{\max(\frac{x}{\sqrt{n}}+\theta,\theta)}^{+\infty} e^{-(u-\theta)} du \right)^n =$$

$$= 1 - \left(\int\limits_{\max(\frac{x}{\sqrt{n}},0)}^{+\infty} e^{-s} ds \right)^n = 1 - e^{-n\cdot\max(\frac{x}{\sqrt{n}},0)}.$$

При $n \to +\infty$ получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X(1),\theta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, функции распределения $F_{Y,\theta}$ сходятся к функции распределения константы 0 и оценка $X_{(1)}$ не является асимптотически нормальной.

Задача 5 (уравнение правдоподобия для первой «нулёвки»)

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Cauchy}(\theta)$ независимы и имеют распределение Коши. Плотность имеет вид $f_\theta(x) = \frac{1}{\pi((x-\theta)^2+1)}$. Тогда

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = \tfrac{1}{\pi^n} \cdot \tfrac{1}{\prod_{j=1}^{n}((x_j-\theta)^2+1)}.$$

Продифференцируем по θ и приравняем к 0, чтобы получить уравнение правдоподобия:

$$\tfrac{1}{\pi^n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\tfrac{2x_j - 2\theta}{((x_j-\theta)^2+1)^2} \cdot \prod_{k\neq j} \tfrac{1}{(x_k-\theta)^2+1} \right) = 0.$$

Задача 5 (уравнение правдоподобия для второй «нулёвки»)

Имеем

$$L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j = x_j) = \prod_{j=1}^{n} \left(\theta_1 \cdot \tfrac{e^{-1}}{x_j!} + (1-\theta_1) \cdot \tfrac{e^{-\theta_2}\theta_2^{x_j}}{x_j!} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{x_1! \ldots x_n!} \cdot \prod_{j=1}^{n} (\theta_1 e^{-1} + (1-\theta_1) e^{-\theta_2} \theta_2^{x_j}).$$

Выпишем частные производные от $g(\theta) = \prod\limits_{j=1}^{n} (\theta_1 e^{-1} + (1-\theta_1) e^{-\theta_2}\theta_2^{x_j})$ по θ_i и приравняем их к 0, чтобы получить уравнения правдоподобия.

$$\tfrac{\partial g}{\partial \theta_1}\Big|_{\theta_1,\theta_2} = \sum_{j=1}^{n} \left((e^{-1} - e^{-\theta_2}\theta_2^{x_j}) \cdot \prod_{i \neq j} (\theta_1 e^{-1} + (1-\theta_1) e^{-\theta_2} \theta_2^{x_i}) \right) = 0,$$

$$\tfrac{\partial g}{\partial \theta_2}\Big|_{\theta_1,\theta_2} = (1-\theta_1) \sum_{j=1}^{n} \left(e^{-\theta_2} (-\theta_2^{x_j} + x_j \theta_2^{x_j - 1}) \cdot \prod_{i \neq j} (\theta_1 e^{-1} + (1-\theta_1) e^{-\theta_2} \theta_2^{x_i}) \right) = 0.$$

Задачи к семинару 25.09

Найдём оценку максимального правдоподобия для случайных величин с распределением $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Имеем формулу для плотности $f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Тогда

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \cdot \tfrac{1}{\sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - a)^2}.$$

Далее будем исследовать точки максимума логарифма

$$M(a, \sigma) = \ln \left(\tfrac{1}{\sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - a)^2} \right) = -n \ln \sigma - \tfrac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a)^2.$$

Вычислим частные производные по a и σ. Тогда производную функции $g(\theta) = M(a_0(\theta), \sigma_0(\theta))$ можно будет вычислить по формуле

$$\tfrac{dg}{d\theta}\big|_{\theta} = \tfrac{\partial M}{\partial a}\big|_{a_0(\theta)} \tfrac{da_0}{d\theta}\big|_{\theta} + \tfrac{\partial M}{\partial \sigma}\big|_{\sigma_0(\theta)} \tfrac{d\sigma_0}{d\theta}\big|_{\theta}.$$

Имеем

$$\tfrac{\partial M}{\partial a}\big|_{a} = -\tfrac{1}{\sigma^2}\left(na - \sum_{j=1}^{n} x_j\right),$$

$$\tfrac{\partial M}{\partial \sigma}\big|_{\sigma} = -\tfrac{n}{\sigma} + \tfrac{1}{\sigma^3}\sum_{j=1}^{n}(x_j - a)^2.$$

Пусть $a_0(\theta) = \theta, \sigma_0(\theta)^2 = \theta^2, \theta \neq 0$. Тогда производная приобретает вид

$$\tfrac{dg}{d\theta}\big|_{(\theta)} = -\tfrac{1}{\theta^2}\left(n\theta - \sum_{j=1}^{n} x_j\right) - \tfrac{n}{\theta} + \tfrac{1}{\theta^3}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \theta)^2 =$$

$$= -\tfrac{n}{\theta} - \tfrac{x_1 + \ldots + x_n}{\theta^2} + \tfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{\theta^3} = -\tfrac{n\theta^2 + \theta(x_1 + \ldots + x_n) - (x_1^2 + \ldots + x_n^2)}{\theta^3}.$$

Значение 0 достигается в корнях квадратного многочлена: $\theta = \frac{-\overline{X} \pm \sqrt{\overline{X}^2 + 4\overline{X^2}}}{2}$. Одно из значений отрицательно, а другое положительно, поэтому при переходе через каждый корень производная меняет знак с положительного на отрицательный и, следовательно, обе точки являются точками максимума.

Пусть $a_0(\theta) = 0, \sigma_0(\theta) = \sqrt{\theta}, \theta > 0$. Тогда производная приобретает вид

$$\tfrac{dg}{d\theta}\big|_{(\theta)} = \tfrac{1}{2\sqrt{\theta}}\left(-\tfrac{n}{\sqrt{\theta}} + \tfrac{1}{\theta\sqrt{\theta}}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) =$$

$$= \tfrac{-n\theta + x_1^2 + \ldots + x_n^2}{2\theta^2}.$$

Значение 0 достигается в точке $\theta = \overline{X^2}$. При меньших θ производная положительна, а при больших — отрицательна. Следовательно, $\theta = \overline{X^2}$ — точка максимума.

Пусть $a_0(\theta) = \theta, \sigma_0(\theta) = \sqrt{\theta}, \theta > 0$. Тогда производная приобретает вид

$$\tfrac{dg}{d\theta}\big|_{(\theta)} = -\tfrac{1}{\theta}\left(n\theta - \sum_{j=1}^{n} x_j\right) + \tfrac{1}{2\sqrt{\theta}}\left(-\tfrac{n}{\sqrt{\theta}} + \tfrac{1}{\theta\sqrt{\theta}}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \theta)^2\right) =$$

$$= \tfrac{-n\theta^2 - n\theta + x_1^2 + \ldots + x_n^2}{2\theta^2}.$$

Значение 0 достигается в корнях квадратного многочлена: $\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\overline{X^2}}}{2}$. Поскольку между корнями производная принимает положительные значения, то точкой максимума является только больший корень: $\theta = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\overline{X^2}}}{2}$.