Решения задач по математической статистике

КОНСТАНТИН ЗЮБИН

Задача 1а

Пусть случайные величины X, Y, Z распределены по закону $\mathrm{E}(\frac{1}{\theta})$.

Предварительно заметим, что в силу независимости и одинаковой распределённости выполнены равенства

$$\mathrm{E}_\theta X = \mathrm{E}_\theta Y = \mathrm{E}_\theta Z = \theta,$$
$$\mathrm{E}_\theta X^2 = \mathrm{E}_\theta Y^2 = \mathrm{E}_\theta Z^2 = 2\theta^2,$$
$$\mathrm{E}_\theta XY = \mathrm{E}_\theta YZ = \mathrm{E}_\theta ZX = \theta^2.$$

Вычислим условным математические ожидания.

$$a(X,Y) = \mathrm{E}_\theta(XY + XZ - Y^2 \mid X,Y) = \mathrm{E}_\theta(XY \mid X,Y) + \mathrm{E}_\theta(XZ \mid X,Y) - \mathrm{E}_\theta(Y^2 \mid X,Y) =$$
$$= XY + X\,\mathrm{E}_\theta(Z) - Y^2 = XY - \theta X - Y^2.$$

Далее,

$$b(Y,Z) = \mathrm{E}_\theta(XY+XZ-Y^2 \mid Y,Z) = \mathrm{E}_\theta(X(Y+Z) \mid Y,Z) - Y^2 = (Y+Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2 = \theta(Y+Z) - Y^2,$$

$$c(Z,X) = \mathrm{E}_\theta(XY + XZ - Y^2 \mid Z,X) = \mathrm{E}_\theta(XY \mid Z,X) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2) =$$
$$= X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \theta X + XZ - 2\theta^2.$$

Задача 1б

Теперь вычислим условные математические ожидания величин a, b, c:

$$a_X(X) = \mathrm{E}_\theta(a(X,Y) \mid X) = \mathrm{E}_\theta\left(XY - Y^2 + X\,\mathrm{E}_\theta(Z) \mid X\right) =$$
$$= X\,\mathrm{E}_\theta(Y) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) + X\,\mathrm{E}_\theta(Z) = \theta X - 2\theta^2 + \theta X = 2\theta X - 2\theta^2.$$

$$a_Y(Y) = \mathrm{E}_\theta(a(X,Y) \mid Y) = \mathrm{E}_\theta\left(XY - Y^2 + X\,\mathrm{E}_\theta(Z) \mid Y\right) =$$
$$= Y\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2 + \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Z) = \theta Y - Y^2 + \theta^2 = \theta Y - Y^2 + \theta^2.$$

$$b_Y(Y) = \mathrm{E}_\theta(b(Y,Z) \mid Y) = \mathrm{E}_\theta\left((Y+Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2 \mid Y\right) =$$
$$= \mathrm{E}_\theta(X)(Y + \mathrm{E}_\theta(Z)) - Y^2 = \theta Y - Y^2 + \theta^2.$$

$$b_Z(Z) = \mathrm{E}_\theta(b(Y,Z) \mid Z) = \mathrm{E}_\theta\left((Y+Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2 \mid Z\right) =$$
$$= \mathrm{E}_\theta(X)(\mathrm{E}_\theta(Y) + Z) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \theta Z - \theta^2.$$

$$c_Z(Z) = \mathrm{E}_\theta(c(Z,X) \mid Z) = \mathrm{E}_\theta\left(X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2) \mid Z\right) =$$
$$= \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Y) + \mathrm{E}_\theta(X)\cdot Z - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \theta Z + \theta^2 - 2\theta^2 = \theta Z - \theta^2.$$

$$c_X(X) = \mathrm{E}_\theta(c(Z,X) \mid X) = \mathrm{E}_\theta\left(X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2) \mid X\right) =$$
$$= X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + X\cdot\mathrm{E}_\theta(Z) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = 2\theta X - 2\theta^2.$$

Задача 1в

Вычислим матожидания $XY + XZ - Y^2, a, b, c, a_X, a_Y, b_Y, b_Z, c_Z, c_X$ и убедимся, что они совпадают.

$$\begin{gathered}\mathrm{E}_\theta(XY + XZ - Y^2) = \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Y) + \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Z) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \\ = \theta^2 + \theta^2 - 2\theta^2 = 0.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{E}_\theta(a(X,Y)) = \mathrm{E}_\theta\left(XY - Y^2 + X\,\mathrm{E}_\theta(Z)\right) = \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Y) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) + \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Z) = \\ = \theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 = 0.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{E}_\theta(b(Y,Z)) = \mathrm{E}_\theta\left((Y+Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - Y^2\right) = \mathrm{E}_\theta(Y)\,\mathrm{E}_\theta(X) + \mathrm{E}_\theta(Z)\,\mathrm{E}_\theta(X) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \\ = \theta^2 + \theta^2 - 2\theta^2 = 0.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{E}_\theta(c(Z,X)) = \mathrm{E}_\theta\left(X\,\mathrm{E}_\theta(Y) + XZ - \mathrm{E}_\theta(Y^2)\right) = \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Y) + \mathrm{E}_\theta(X)\,\mathrm{E}_\theta(Z) - \mathrm{E}_\theta(Y^2) = \\ = \theta^2 + \theta^2 - 2\theta^2 = 0.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{E}_\theta(a_X(X)) = \mathrm{E}_\theta(2\theta X - 2\theta^2) = 2\theta^2 - 2\theta^2 = 0. \\ \mathrm{E}_\theta(a_Y(X)) = \mathrm{E}_\theta(\theta Y - Y^2 + \theta^2) = \theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 = 0. \\ \mathrm{E}_\theta(b_Y(X)) = \mathrm{E}_\theta(\theta Y - Y^2 + \theta^2) = \theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 = 0. \\ \mathrm{E}_\theta(b_Z(X)) = \mathrm{E}_\theta(\theta Z - \theta^2) = \theta^2 - \theta^2 = 0. \\ \mathrm{E}_\theta(c_Z(X)) = \mathrm{E}_\theta(\theta Z - \theta^2) = \theta^2 - \theta^2 = 0. \\ \mathrm{E}_\theta(c_X(X)) = \mathrm{E}_\theta(2\theta X - 2\theta^2) = 2\theta^2 - 2\theta^2 = 0.\end{gathered}$$

Задача 2а (распределение Пуассона)

Пусть имеются независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Poiss}(\theta)$. Вычислим условные математические ожидания.

$$\mathrm{E}_\theta(X_1 \mid X_1 + \ldots + X_n) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_\theta(X_i \mid X_1 + \ldots + X_n) = \tfrac{1}{n}\,\mathrm{E}_\theta(X_1 + \ldots + X_n \mid X_1 + \ldots + X_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}.$$

Вычислим

$$\begin{gathered}\mathrm{P}_\theta(X_1 = k \mid X_1 + \ldots + X_n = m) = \tfrac{\mathrm{P}_\theta(X_1 = k, X_2 + \ldots + X_n = m-k)}{\mathrm{P}_\theta(X_1 + \ldots + X_n = m)} = \tfrac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} \cdot \tfrac{e^{-(n-1)\theta}((n-1)\theta)^{m-k}}{(m-k)!} \cdot \tfrac{m!}{e^{-n\theta}(n\theta)^m} = \\ = \tfrac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \left(\tfrac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{m-k}.\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{m} k^2 \cdot \tfrac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \left(\tfrac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{m-k} = \tfrac{m}{n}\sum_{k=1}^{m} k \cdot \tfrac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \cdot \left(\tfrac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{m-k} = \\ = \tfrac{m}{n}\,\mathrm{E}_\theta(X_1 + 1 \mid X_1 + \ldots + X_n)\big|_{X_1 + \ldots + X_n = m-1} = \tfrac{m}{n}\left(\tfrac{m-1}{n} + 1\right) = \tfrac{m}{n} + \tfrac{m(m-1)}{n^2}.\end{gathered}$$

Поэтому

$$\mathrm{E}_\theta(X_1^2 \mid X_1 + \ldots + X_n) = \overline{X} + \overline{X}(\overline{X} - \tfrac{1}{n}).$$

Задача 2б (геометрическое распределение)

Пусть имеются независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Geom}(\theta)$. Вычислим условные математические ожидания.

$$\mathrm{E}_\theta(X_1 \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_\theta(X_i \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \tfrac{1}{n}\,\mathrm{E}_\theta(X_1{+}\ldots{+}X_n \mid X_1{+}\ldots{+}X_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}.$$

Найдём распределение свёртки геометрических случайных величин:

$$\mathrm{P}(X_1{+}\ldots{+}X_n = m) = \sum_{x_1+\ldots+x_n=m} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i = x_i) = \sum_{x_1+\ldots+x_n=m} \prod_{i=1}^{n} \theta(1{-}\theta)^{x_i-1} = \tfrac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}\theta^n(1{-}\theta)^{m-n}.$$

Вычислим (для $m \geqslant k + n - 1$) условную вероятность

$$\mathrm{P}_\theta(X_1 = k \mid X_1 + \ldots + X_n = m) = \tfrac{\mathrm{P}_\theta(X_1=k, X_2+\ldots+X_n=m-k)}{\mathrm{P}_\theta(X_1+\ldots+X_n=m)} =$$
$$= \theta(1-\theta)^{k-1} \cdot \tfrac{(m-k-1)!}{(m-k-n+2)!(n-2)!}\theta^{n-1}(1-\theta)^{m-k-(n-1)} \cdot \tfrac{(m-n)!(n-1)!}{(m-1)!}\tfrac{1}{\theta^n(1-\theta)^{m-n}} =$$
$$= (C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot C_{m-k-1}^{n-2}.$$

Отсюда

$$(C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-n+1} k^2 C_{m-k-1}^{n-2} = (C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot \sum_{j=n-2}^{m-2} (m-1-j)^2 C_j^{n-2}.$$

Так как

$$\sum_{j=n-2}^{m-2} C_j^{n-2} = 1 + C_{n-1}^{n-2} + \ldots + C_{m-2}^{n-2} = C_{m-1}^{n-1}$$

и

$$\sum_{j=n-2}^{m-2} (j+1) C_j^{n-2} = (n-1) \sum_{j=n-2}^{m-2} C_{j+1}^{n-1} = (n-1) C_m^n,$$

а также

$$\sum_{j=n-2}^{m-2} (j+1)^2 C_j^{n-2} = \sum_{j=n-2}^{m-2} ((j+2)(j+1) - (j+1)) C_j^{n-2} = n(n-1) C_{m+1}^{n+1} - (n-1) C_m^n,$$

то

$$(C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-n+1} k^2 C_{m-k-1}^{n-2} = (C_{m-1}^{n-1})^{-1} \cdot \bigl(m^2 C_{m-1}^{n-1} - 2m(n-1)C_m^n + n(n-1)C_{m+1}^{n+1} - (n-1)C_m^n\bigr) =$$
$$= m^2 - \tfrac{2m(n-1)m}{n} + \tfrac{n(n-1)m(m+1)}{n(n+1)} - \tfrac{m(n-1)}{n} =$$
$$= \tfrac{m}{n(n+1)}\left(mn(n+1) - 2m(n-1)(n+1) + n(n-1)(m+1) - (n-1)(n+1)\right) =$$
$$= \tfrac{m}{n(n+1)} \cdot \bigl(m(n^2 + n - 2n^2 + 2 + n^2 - n) + n^2 - n - n^2 + 1\bigr) = \tfrac{m(2m-n+1)}{n(n+1)}.$$

Тогда условное матождание равно $g(S_n) = \frac{S_n(2S_n-n+1)}{n(n+1)}$.

Задача 3

Пусть случайная величина X имеет распределение $\mathrm{E}(1)$ и случайная величина $Y \mid X$ распределена так же, как $\exp(X)$. Вычислим совместную плотность для (X, Y) и условные матожидания $\mathrm{E}(X^2 \mid Y), \mathrm{E}(X \mid Y)$.

Имеем $f_{Y|X}(y \mid x) = xe^{-yx} I(y > 0)$ и $f_X(x) = e^{-x} I(x > 0)$. Тогда совместная плотность равна $f_{X,Y}(x, y) = xe^{-x(y+1)} I(x > 0, y > 0)$.

Далее,

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x(y+1)} I(x > 0, y > 0) dx = I(y > 0) \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dx =$$

$$= I(y > 0) \cdot \left(-\frac{xe^{-x(y+1)}}{y+1} \Bigg|_{x=0}^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x(y+1)}}{y+1} dx \right) = \frac{I(y>0)}{(y+1)^2}.$$

Тогда

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = x(y+1)^2 e^{-x(y+1)} I(x > 0, y > 0).$$

Поэтому

$$\mathrm{E}(X \mid Y)(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 (Y+1)^2 e^{-x(Y+1)} I(x > 0, Y > 0) dx =$$

$$= (Y+1)^2 I(Y > 0) \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x(Y+1)} dx = (Y+1)^2 I(Y > 0) \cdot \frac{2}{(Y+1)^3} = \frac{2I(Y>0)}{Y+1}.$$

Вычислим второе условное матожидание:

$$\mathrm{E}(X^2 \mid Y)(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 (Y+1)^2 e^{-x(Y+1)} I(x > 0, Y > 0) dx =$$

$$= (Y+1)^2 I(Y > 0) \int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x(Y+1)} dx = (Y+1)^2 I(Y > 0) \cdot \frac{6}{(Y+1)^4} = \frac{6I(Y>0)}{(Y+1)^2}.$$