Решения задач по математической статистике

КОНСТАНТИН ЗЮБИН

Задача 1 ($\mathcal{N}(\theta, \theta)$)

Построим асимптотические доверительные интервалы в модели $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \theta)$ на основе оценки максимального правдоподобия $T = \frac{-1+\sqrt{1+4\overline{X^2}}}{2}$ (см. домашнюю работу 3). Эта оценка состоятельна для θ и имеет асимптотическую дисперсию $2\theta^2$ (см. домашнюю работу 4). Тогда оценка $\frac{-1+\sqrt{1+4\overline{X^2}}}{\sqrt{2}}$ состоятельна для $\sqrt{2}\theta$.

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(T-\theta)}{\sqrt{2}\theta} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(T-\theta)}{\sqrt{2}T} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(T(1 - \tfrac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}}) \leqslant \theta \leqslant T(1 - \tfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{n}})) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a).$$

Для $\Phi(b) - \Phi(a) = 1 - \alpha$ положим $a = z_{\frac{\alpha}{2}}, b = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Тогда доверительным будет интервал $(T(1 - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}), T(1 - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}))$.

Задача 1 ($\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$)

Построим асимптотические доверительные интервалы в модели $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ на основе оценки максимального правдоподобия $T = \frac{-\overline{X}\pm\sqrt{\overline{X}^2+4\overline{X^2}}}{2}$ (см. домашнюю работу 3). Эта оценка состоятельна для θ и имеет асимптотическую дисперсию $\frac{\theta^2}{3}$ (см. домашнюю работу 4). Тогда оценка $\frac{T}{\sqrt{3}}$ состоятельна для $\frac{\theta}{\sqrt{3}}$.

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{3n}(T-\theta)}{\theta} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{3n}(T-\theta)}{T} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(T(1 - \tfrac{b}{\sqrt{3n}}) \leqslant \theta \leqslant T(1 - \tfrac{a}{\sqrt{3n}})) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a).$$

Для $\Phi(b) - \Phi(a) = 1 - \alpha$ положим $a = z_{\frac{\alpha}{2}}, b = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Тогда доверительным будет интервал $(T(1 - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3n}}), T(1 - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3n}}))$.

Задача 1 ($\mathcal{N}(0, \theta)$)

Построим асимптотические доверительные интервалы в модели $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \theta)$ на основе оценки максимального правдоподобия $T = \overline{X^2}$ (см. домашнюю работу 3). Эта оценка состоятельна для θ и имеет асимптотическую дисперсию $2\theta^2$ (см. домашнюю работу 4). Тогда оценка $\sqrt{2}T$ состоятельна для $\sqrt{2}\theta$.

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(T-\theta)}{\sqrt{2}\theta} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \tfrac{\sqrt{n}(T-\theta)}{\sqrt{2}T} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(T(1 - \tfrac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}}) \leqslant \theta \leqslant T(1 - \tfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{n}})) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b) - \Phi(a).$$

Для $\Phi(b)-\Phi(a)=1-\alpha$ положим $a=z_{\frac{\alpha}{2}}, b=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Тогда доверительным будет интервал $(T(1-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}), T(1-\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}))$.

Задача 2

Построим асимптотические доверительные интервалы в модели $X_1,\ldots,X_n \sim \mathrm{Cauchy}(\theta)$ на основе оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$. Эта оценка состоятельна для θ и имеет асимптотическую дисперсию 2 (см. домашнюю работу 4). Тогда

$$\mathrm{P}_\theta(a \leqslant \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)}{\sqrt{2}} \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a),$$

$$\mathrm{P}_\theta(\hat{\theta}_n-\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_n-\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{n}}) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(b)-\Phi(a).$$

Для $\Phi(b)-\Phi(a)=1-\alpha$ положим $a=z_{\frac{\alpha}{2}}, b=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Тогда доверительным будет интервал $(\hat{\theta}_n-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n-\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{n}})$.

Задача 3 (равномерное распределение)

Пусть $X_1,\ldots,X_n \sim \mathrm{R}[0,\theta]$. Пусть $Y_i=\frac{X_i}{\theta} \sim \mathrm{R}[0,1]$. Оценка максимального правдоподобия в модели есть $X_{(n)}$ (см. домашнюю работу 3). Тогда случайные величины $\frac{X_{(n)}}{\theta}$ и $Y_{(n)}$ имеют одинаковые распределения. Имеем $F_{\frac{X_{(n)}}{\theta},\theta}(x)=F_{Y_{(n)}}(x)=x^n I(0<x<1)+I(x>1)$. Тогда из равенства $F_{\frac{X_{(n)}}{\theta},\theta}(q_\alpha)=\alpha$ получаем $q_\alpha=\sqrt[n]{\alpha}$.

Пусть $\mathrm{P}_\theta(q_1<\frac{X_{(n)}}{\theta}<q_2)=1-\alpha$. Тогда $\mathrm{P}_\theta(\frac{X_{(n)}}{q_2}<\theta<\frac{X_{(n)}}{q_1})=1-\alpha$ и $q_2^n-q_1^n=1-\alpha$. Функция $l(q_2)=\frac{1}{\sqrt[n]{q_2^n-(1-\alpha)}}-\frac{1}{q_2}$ имеет производную

$$\frac{1}{q_2^2}-\frac{q_2^{n-1}}{(q_2^n-(1-\alpha))^{\frac{n+1}{n}}}=\frac{q_2^{n+1}-(q_2^n-(1-\alpha))^{\frac{n+1}{n}}}{q_2^2(q_2^n-(1-\alpha))^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Поскольку $1-\alpha>0$, то производная всегда принимает положительные значения и, следовательно, функция l принимает наименьшее значение при наибольшем допустимом значении q_2. Поскольку $0\leqslant q_2\leqslant 1$, то минимум достигается при $q_2=1$. Тогда $q_1=\sqrt[n]{\alpha}$. Следовательно, точный доверительный интервал имеет вид $(X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}})$.

Задача 3 ($f_\theta(x)=e^{-(x-\theta)}I(x>\theta)$)

Пусть случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ распределены с плотностью $f_\theta(x)=e^{-(x-\theta)}I(x>\theta)$. Пусть $Y_i=X_i-\theta\sim\mathrm{Exp}(1)$. Оценка максимального правдоподобия в модели есть $X_{(1)}$ (см. домашнюю работу 3). Тогда случайные величины $X_{(1)}-\theta$ и $Y_{(1)}\sim\mathrm{Exp}(n)$ имеют одинаковые распределения.

Пусть $\mathrm{P}_\theta(q_1<X_{(1)}-\theta<q_2)=1-\alpha$. Тогда $\mathrm{P}_\theta(X_{(1)}-q_2<\theta<X_{(1)}-q_1)=1-\alpha$ и $(1-e^{-nq_2})-(1-e^{-nq_1})=1-\alpha$. Отсюда $1-\alpha=e^{-nq_1}-e^{-nq_2}=e^{-nq_1}(1-e^{-n(q_2-q_1)})$. Тогда наименьшее значение разности q_2-q_1 достигается при наименьшем возможном q_1, то есть при $q_1=0$. В этом случае $q_2=-\frac{1}{n}\ln\alpha$ (поскольку $\alpha<0$, то q_2 будет положительным).

Точный доверительный интервал будет иметь вид $(X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\alpha, X_{(1)})$.

Задача 4 ($\mathcal{N}(\theta,\theta)$)

Построим точный доверительный интервал для $\theta>0$ в случае $X_1,\ldots,X_n\sim\mathcal{N}(\theta,\theta)$ на основе $\overline{X}$. Имеем $\frac{X_i-\theta}{\sqrt{\theta}}\sim\mathcal{N}(0,1)$ и $\frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}\sim\mathcal{N}(0,1)$.

Имеем

$$\mathrm{P}_\theta(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}<z_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}_\theta(-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \overline{X} - \theta < \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha,$$

$$\mathrm{P}_\theta((\overline{X} - \theta)^2 < \frac{\theta}{n} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha,$$

Корни уравнения $(\overline{X} - \theta)^2 = \frac{\theta}{n} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ относительно θ равны

$$\overline{X} + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\overline{X} + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^2 - 4\overline{X}^2}.$$

Тогда точный доверительный интервал есть

$$\left(\overline{X} + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\overline{X} + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^2 - 4\overline{X}^2}, \overline{X} + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\overline{X} + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^2 - 4\overline{X}^2}\right).$$

Задача 4 ($\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$)

Построим точный доверительный интервал для θ в случае $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ на основе $\overline{X}$. Имеем $\frac{X_i - \theta}{\theta} \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $\frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\theta} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Имеем (для $\theta > 0$)

$$\mathrm{P}_\theta(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{\theta} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}_\theta(-\frac{\theta}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \overline{X} - \theta < \frac{\theta}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha,$$

$$\mathrm{P}_\theta\left(\overline{X}\left(1 - \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^{-1} < \theta < \overline{X}\left(1 + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^{-1}\right) = 1-\alpha,$$

Тогда точный доверительный интервал есть

$$\left(\overline{X}\left(1 - \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^{-1}, \overline{X}\left(1 + \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)^{-1}\right).$$