

2 Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Τοπολογία και Τοπολογικοί Χώροι

Η τοπολογία, με την καθαρή της έννοια, πρόκειται για έναν εξαιρετικά ευρύ τομέα των μαθηματικών. Οποιαδήποτε ανάλυση ενός τοπολογικού χώρου και των χαρακτηριστικών του πέφτει κάτω από την ομπρέλα της, και οι τοπολογικοί χώροι με την σειρά τους αποτελούν μια πολύ γενική κατηγορία μαθηματικών χώρων. Διαισθητικά, για τον ορισμό ενός τοπολογικού χώρου αρκεί να ορίσουμε ένα σύνολο, του οποίου τα στοιχεία αποκαλούμε "σημεία", και κάποια έννοια "γειτνίασης" ανάμεσα σε αυτά τα στοιχεία. Πιο αυστηρά, ένας τοπολογικός χώρος ορίζεται από ένα σύνολο X και μία τοπολογία τ αυτού του συνόλου, η οποία ορίζεται ως εξής [1]:

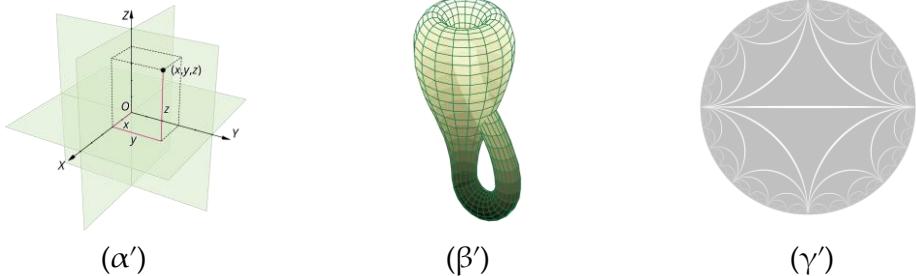
Ορισμός 2.1.1. Μια τοπολογία ενός συνόλου X ορίζεται ως μια συλλογή τ υποσυνόλων του X , η οποία ικανοποιεί τις εξής προϋποθέσεις:

1. Το κενό σύνολο \emptyset και το σύνολο X αποτελούν στοιχεία του τ .
2. Για οποιαδήποτε συλλογή στοιχείων του τ , η ένωσή τους αποτελεί επίσης στοιχείο του τ .
3. Για οποιαδήποτε πεπερασμένη συλλογή στοιχείων του τ , η τομή τους αποτελεί επίσης στοιχείο του τ .

Τα στοιχεία της τοπολογίας τ ονομάζονται **ανοιχτά σύνολα**. Χρησιμοποιώντας τα ορίζουμε την **γειτονιά** ενός σημείου x ως εξής [2]:

Ορισμός 2.1.2. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, και $x \in X$ ένα σημείο του. Μία γειτονιά του x είναι ένα σύνολο U το οποίο περιλαμβάνει ένα ανοιχτό σύνολο V που περιλαμβάνει το x ($x \in V \subseteq U \subseteq X$).

Είναι ξεκάθαρο πως αυτός ο ορισμός περιλαμβάνει μια τεράστια ποικιλία χώρων: από τους γνωστούς σε όλους Ευκλείδειους χώρους, μέχρι γενικότερες έννοιες όπως οι πολλαπλότητες (manifolds), οι οποίες μοιάζουν τοπικά με Ευκλείδειο χώρο κοντά σε κάθε σημείο, καθώς και άλλους μετρικούς και μη χώρους. Τοπολογικό χώρο μπορεί να αποτελέσει ακόμη και ένα σύνολο λέξεων με μήκος n χαρακτήρες, στο οποίο θεωρούμε ως μετρική απόστασης ανάμεσα σε κάθε ζεύγος των



Σχήμα 2.1.1: (α') Τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος, (β') Φιάλη του Κλάιν (πολλαπλότητα), (γ') Δισδιάστατος υπερβολικός χώρος (ψηφίδωση με ιδανικά τριγώνα) [33]

αριθμό χαρακτήρων σε αντίστοιχες θέσεις που διαφέρουν (απόσταση Hamming).

Για τους σκοπούς της τοπολογικής ανάλυσης δεδομένων, θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε ένα συγκεκριμένο τύπο χώρου, τα πλεγματικά σύμπλοκα, και μία συγκεκριμένη ιδιότητά τους, την εμμένουσα ομολογία.

2.2 Πλεγματικά Σύμπλοκα

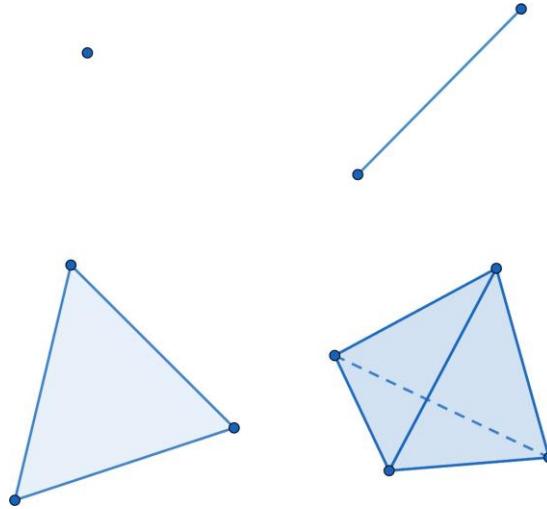
Τα πλεγματικά σύμπλοκα αποτελούν ιδανικό εργαλείο για την τοπολογική ανάλυση δεδομένων, καθώς η απλότητά τους συνεπάγεται εύκολη κατασκευή από τα εισαγόμενα δεδομένα και εύκολη ανάλυση των τοπολογικών τους ιδιοτήτων, ενώ ταυτόχρονα διατηρούν τα απαραίτητα χαρακτηριστικά για την εξαγωγή ουσιαστικών συμπερασμάτων.

Για να ορίσουμε ένα πλεγματικό σύμπλοκο πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια του πλέγματος. Μπορούμε να σκευτούμε ένα πλέγμα ως την γενίκευση ενός τριγώνου σε οποιαδήποτε διάσταση. Πιο τυπικά:

Ορισμός 2.2.1. Έστω ένα σύνολο $U = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία (δηλαδή τα διανύσματα $u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots, u_k - u_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους). Το k -πλέγμα που ορίζεται από τις $k+1$ κορυφές είναι το κυρτό περίβλημά τους και ορίζεται ως το σύνολο σημείων

$$X = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \cdot \left\{ \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \text{ και } \alpha_i > 0 \text{ για } i = 0, 1, \dots, k \right\}$$

Ορισμός 2.2.2. Μια όψη ενός k -πλέγματος είναι το κυρτό περίβλημα οποιουδήποτε μη κενού υποσυνόλου των $k + 1$ κορυφών που ορίζουν το πλέγμα.

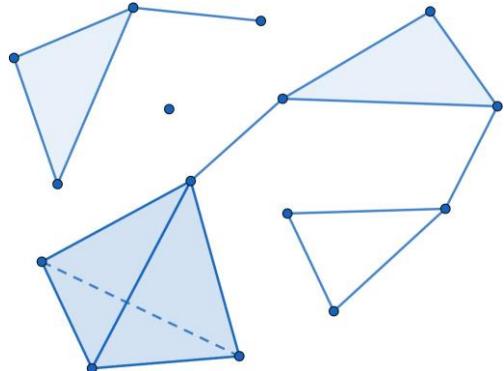


Σχήμα 2.2.1: Τα τέσσερα πλέγματα που μπορούν να αναπαρασταθούν εξ' ολοκλήρου στον τρισδιάστατο χώρο.

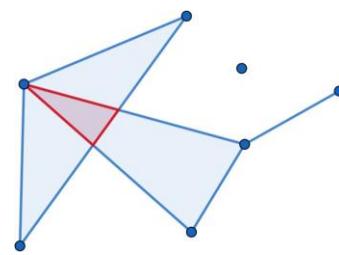
Συνοπτικά, το 0-πλέγμα είναι ένα σημείο, το 1-πλέγμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, το 2-πλέγμα είναι ένα τρίγωνο, και το 3-πλέγμα είναι ένα τετράεδρο. Συγκεκριμένα, διευκρινίζουμε πως ένα πλέγμα δεν είναι συνώνυμο με το σύνολο των όψεών του. Για παράδειγμα, το 2-πλέγμα είναι ολόκληρος ο χώρος του τριγώνου, και όχι μόνο οι πλευρές του. Και με αυτή την επεξήγηση είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε το πλεγματικό σύμπλοκο:

Ορισμός 2.2.3. Ένα πλεγματικό σύμπλοκο X είναι ένα σύνολο πλεγμάτων που πληρεί τις εξής συνθήκες:

1. Κάθε όψη ενός πλέγματος που ανήκει στο X ανήκει επίσης στο X .
2. Κάθε μη κενή τομή δύο πλεγμάτων α και β που ανήκουν στο X , είναι όψη των α και β .



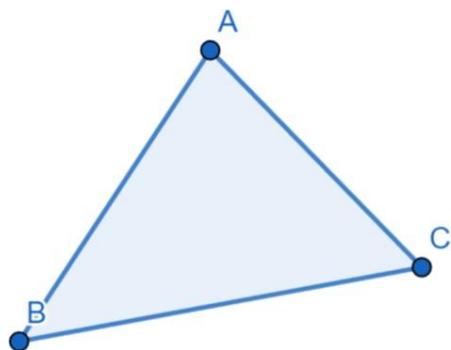
(α')



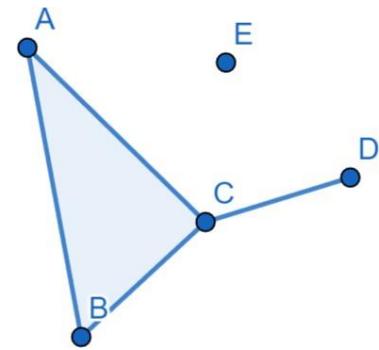
(β')

Σχήμα 2.2.2: (α') Τρισδιάστατο πλεγματικό σύμπλοκο, (β') δισδιάστατο σύνολο πλεγμάτων που δεν αποτελεί πλεγματικό σύμπλοκο εξαιτίας της κόκκινης περιοχής.

Για να αναπαραστήσουμε ένα πλέγμα, θα χρησιμοποιούμε το σύνολο των κορυφών του. Αντίστοιχα, για να αναπαραστήσουμε ένα πλεγματικό σύμπλογο μπορούμε να χρησιμποιήσουμε το σύνολο των πλεγμάτων που το αποτελούν, ως εξής:



(α')



(β')

Σχήμα 2.2.3: (α') Πλέγμα $\langle A, B, C \rangle$, (β') Πλεγματικό Σύμπλοκο $\langle A, B, C \rangle, \langle A, B \rangle, \langle A, C \rangle, \langle B, C \rangle, \langle C, D \rangle, \langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle D \rangle, \langle E \rangle$

Χάριν συντομίας, μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε μόνο τα **μεγιστικά πλέγματα** (facets) του πλεγματικού σύμπλοκου, δηλαδή τα πλέγματα που δεν είναι όψεις κάποιου άλλου πλέγματος του σύμπλοκου. Εξ' ορισμού, όλες οι όψεις τους είναι αναγκαστικά μέ- λη του σύμπλοκου, άρα μπορούμε να τις παραλείψουμε. Με αυτόν τον τρόπο, το παραπάνω σύμπλοκο μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$\langle A, B, C \rangle, \langle C, D \rangle, \langle E \rangle .$$

2.3 Ομολογία

Έχοντας ορίσει την δομή του τοπολογικού χώρου που θα χρησιμοποιήσουμε για την τοπολογική ανάλυση δεδομένων, προχωράμε στον ορισμό της συγκεκριμένης ιδιότητας που θα μελετήσουμε για να βρούμε μοτίβα στα δεδομένα μας. Μας ενδιαφέρουν οι **τοπολογικές αναλλοίωτες** (topological invariants) του χώρου, δηλαδή οι ιδιότητές του που μένουν ίδιες για **ομοιομορφικούς** χώρους. Δύο χώροι X και Y θεωρούνται ομοιομορφικοί εάν υπάρχει ομοιομορφισμός f που μπορεί να μετατρέψει τον έναν στον άλλο. Για να ορίσουμε την έννοια του ομοιομορφισμού χρειαζόμαστε τους εξής ορισμούς [3]:

Ορισμός 2.3.1. Μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ καλείται συνάρτηση όταν αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο του τοπολογικού χώρου X με ένα μοναδικό στοιχείο του τοπολογικού χώρου Y .

Ορισμός 2.3.2. Μία συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ καλείται μονομορφισμός εάν για κάθε ζεύγος στοιχείων $x_1, x_2 \in X$ τέτοια ώστε $x_1 = x_2$, να ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Η f καλείται, επίσης, 1 – 1.

Ορισμός 2.3.3. Μία συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ καλείται επιμορφισμός εάν για κάθε στοιχείο $y \in Y$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

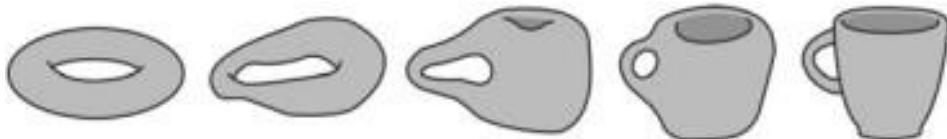
Ορισμός 2.3.4. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής, αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο A του Y , το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X .

Ορισμός 2.3.5. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ καλείται ομοιομορφισμός εάν η f είναι 1 – 1, επί, συνεχής και

έχει συνεχή αντίστροφη συνάρτηση.

Η ομολογία (Homology - ετυμολογικά η έρευνα της ομοιότητας) ενός τοπολογικού χώρου είναι ένα σύνολο τοπολογικών αναλλοίωτων που ονομάζονται ομάδες ομολογίας: $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$, ...

Διαισθητικά, κάθε μια από αυτές τις ομάδες $H_k(X)$ αντικατοπτρίζει τον αριθμό οπών στον χώρο X με k -διάστατα σύνορα. Για να κατανοήσουμε καλύτερα τι σημαίνει αυτό, εάν ο χώρος X είναι ένα πλεγματικό σύμπλοκο το οποίο αποτελείται από τις τρεις κορυφές και τρεις πλευρές ενός "κενού" τριγώνου, τότε έχει μία οπή, με τις πλευρές του τριγώνου ως το μονοδιάστατο σύνορο της. Αντίστοιχα, ένα "κούφιο" τετράεδρο έχει μία οπή με δισδιάστατο σύνορο τις έδρες του, κ.ο.κ.. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ο αριθμός οπών με 0-διάστατο σύνορο, που είναι συνώνυμος με τον αριθμό συνδεδεμένων συνιστωσών του χώρου. Για παράδειγμα, ένας χώρος με δύο ασύνδετα σημεία έχει δύο τέτοιες οπές.



Σχήμα 2.3.1: Ένα διάσημο παράδειγμα δύο καθημερινών αντικειμένων που είναι τοπολογικά ισοδύναμα [4]. Ένα ντόνατ και ένα φλυτζάνι καφέ μπορούν να μετατραπούν το ένα στο άλλο χωρίς να αλλάξουν- νε τα τοπολογικά χαρακτηριστικά τους, όπως η ομολογία. Πράγματι παρατηρούμε πως και τα δύο αντικείμενα έχουν μία οπή με μονοδιάστατο σύνορο.

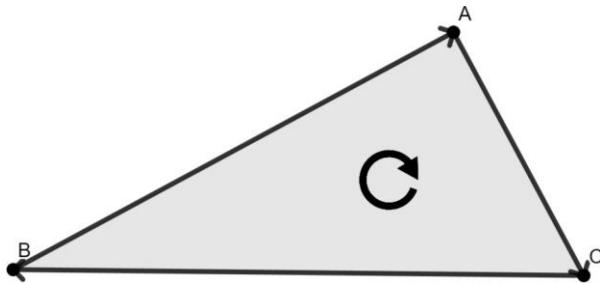
Ο πιο σχολαστικός ορισμός της ομολογίας είναι αρκετά πολύπλοκος στην γενική περίπτωση (δηλαδή για οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο X) και δεν μας αφορά στη μελέτη της τοπολογικής ανάλυσης δεδομένων. Θα επικεντρωθούμε οπότε στην ομολογία πλεγματικών σύμπλοκων (simplicial homology). Ακόμα όμως θα χρειαστούμε πρώτα μερικούς καινούριους όρους:

Ορισμός 2.3.6. Ο προσανατολισμός ενός k -πλέγματος δίνεται ως μία συγκεκριμένη διάταξη των κορυφών του, π.χ. $[a_1, a_3, a_2]$. Ως σύμβαση,

Θα χρησιμοποιούμε [] αντί για $\langle\rangle$ για την αναπαράσταση προσανατολισμένων πλεγμάτων.

Τα προσανατολισμένα πλέγματα έχουν την εξής ιδιότητα:

$[a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k] = [a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_k]$. Δηλαδή, η αντιμετώπιση δύο κορυφών στην διάταξη εισάγει ένα σύμβολο του μείον. Από αυτήν την ιδιότητα είναι προφανές πως για κάθε μη 0-διάστατο πλέγμα έχουμε πρακτικά δύο δυνατούς προσανατολισμούς που είναι αντίθετοι μεταξύ τους (κάθε άλλος προσανατολισμός μπορεί αναγκαστικά να μετατραπεί σε έναν από τους δύο με ζυγό αριθμό αντιμεταθέσεων, άρα είναι ισοδύναμος μαζί του).



Σχήμα 2.3.2: Προσανατολισμένο 2-πλέγμα $[A, C, B]$

Ορισμός 2.3.7. Έστω έγα πλεγματικό σύμπλοκο S και $[s_1], [s_2], \dots, [s_n]$ τα k -πλεγμάτα του. Μία k -αλυσίδα (k -chain) c_k είναι ένα άθροισμα της μορφής $\sum_{i=1}^n x_i [s_i]$, όπου κάθε $x_i \in \mathbb{Z}$. Η αβελιανή ομάδα των k -αλυσίδων του S ονομάζεται k -αλυσιδωτή ομάδα και συμβολίζεται ως C_k .

Για να ορίσουμε μία k -αλυσίδα, αρκεί να ορίσουμε τα n στοιχεία c_i . Καθώς αυτά όλα ανήκουν στον χώρο \mathbb{Z} , η k -αλυσιδωτή ομάδα είναι ισομορφική με τον χώρο \mathbb{Z}^n .

Ορισμός 2.3.8. Έστω προσανατολισμένο k -πλέγμα $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ και $[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ i -οστή κορυφή. Ο συνοριακός τελεστής (boundary operator) $\delta_k : C_k \rightarrow$

C_{k-1} είναι ο ομοιομορφισμός

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_k]$$

Ορισμός 2.3.9. Με τον συνοριακό τελεστή, μπορούμε να ενώσουμε τις αλυσιδωτές ομάδες διαφορετικών διαστάσεων σε ένα αλυσιδωτό σύμπλοκο (chain complex), το οποίο συμβολίζεται ως (C_*, ∂_*) :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} \xrightarrow{\partial_k} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \xrightarrow{\partial_2} \xrightarrow{\partial_1} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Ορισμός 2.3.10. Ένα στοιχείο $x \in C_k$ θνομάζεται k -κύκλος αν είναι μέλος του πυρήνα του συνοριακού τελεστή ∂_k , ο οποίος συμβολίζεται ως Z_k ή $\ker(\partial_k)$ και ορίζεται ως εξής:

$$Z_k = \ker(\partial_k) = \{ x \in C_k : \partial_k(x) = 0 \}$$

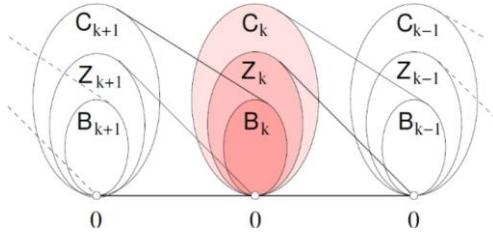
Ορισμός 2.3.11. Ένα στοιχείο $y \in C_k$ ονομάζεται k -σύνορο αν είναι μέλος της εικόνας του συνοριακού τελεστή ∂_{k+1} , η οποία συμβολίζεται ως B_k ή $\text{im}(\partial_{k+1})$ και ορίζεται ως εξής:

$$B_k = \text{im}(\partial_{k+1}) = \{ y \in C_k : \exists z \in C_{k+1} : y = \partial_{k+1}(z) \}$$

Εδώ είναι σημαντικό να επισημάνουμε την εξής ιδιότητα του συνοριακού τελεστή: το σύνορο ενός συνόρου είναι πάντα κενό. Δηλαδή $\partial_k(\partial_{k+1}(\dots)) = 0$. Μπορούμε να δούμε την ιδιότητα σε δράση με ένα απλό παραδειγμα:

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_2([A, B, C])) &= \partial_1([B, C] - [A, C] + [A, B]) \\ &= \partial_1([B, C]) - \partial_1([A, C]) + \partial_1([A, B]) \\ &= [C] - [B] - ([C] - [A]) + [B] - [A] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Με βάση αυτήν την ιδιότητα και τους ορισμούς μου μόλις δώσαμε, μπορούμε να συμπεράνουμε πως $B_k \subset C_k$ όπως αναπαριστάται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 2.3.3: Σχέση μεταξύ αλυσίδων, κύκλων και συνόρων στις διαστάσεις $k + 1, k, k - 1$. Οι συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών διαστάσεων αναπαριστούν εφαρμογή του συνοριακού τελεστή.[5]

Έχοντας διευκρινίσει αυτές τις έννοιες, μπορούμε επιτέλους να δώσουμε τον επίσημο ορισμό των ομάδων ομολογίας ενός πλεγματικού σύμπλοκου:

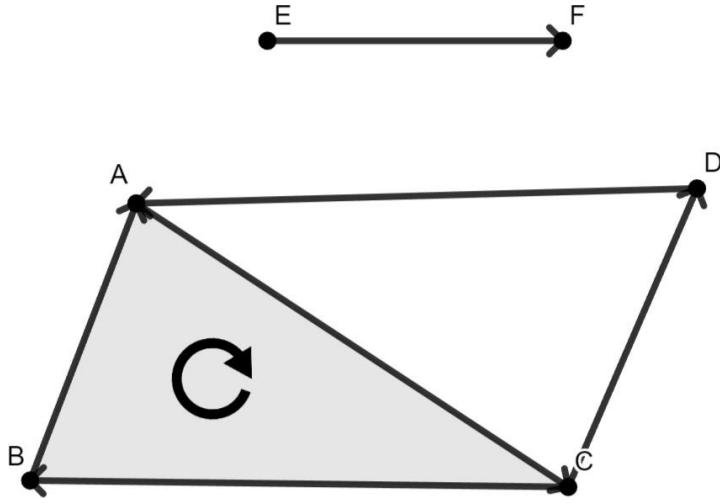
Ορισμός 2.3.12. Έστω ένα πλεγματικό σύμπλοκο S και το αντίστοιχο αλυσιδωτό σύμπλοκο (C_*, δ_*) . Η k -οστή ομάδα ομολογίας του είναι η ομάδα πηλίκο

$$H_k = \frac{Z_k}{B_k}$$

Δηλαδή, η ομάδα H_k είναι η ομάδα Z_k αν αντιμετωπίσουμε όλα τα στοιχεία της ομάδας B_k ως μηδενικά. Πιο απλοϊκά, είναι οι k -κύκλοι που δεν είναι σύνορα μιας $k + 1$ -αλυσίδας. Ας δούμε ένα παράδειγμα, για να γεφυρώσουμε την διαισθητική κατανόηση με τους αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς.

Έστω το πλεγματικό σύμπλοκο της παρακάτω εικόνας:

$$S = [A, C, B], [C, D], [D, A], [E, F]$$



Σχήμα 2.3.4

Με μια ματιά μπορούμε να δούμε μία 1-διάστατη οπή (στο κέντρο του τριγώνου A, C, D), και δύο 0-διάστατες οπές, καθώς το σύμπλοκο αποτελείται από δύο ασύνδετα "κομμάτια". Ας δούμε πως αυτό αντικατοπτρίζεται στις ομάδες ομολογίας. Κατ' αρχήν, ας δούμε τα πλέγματα του S σε κάθε διάσταση:

$0 : [A], [B], [C], [D], [E], [F]$	$n = 6$
$1 : [A, C], [C, B], [B, A], [C, D], [D, A], [E, F]$	$n = 6$
$2 : [A, C, B]$	$n = 1$
$\geq 3 : \emptyset$	$n = 0$

Αρα αντίστοιχα έχουμε τις k -αλυσιδωτές ομάδες:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= x_0[A] + x_1[B] + x_2[C] + x_3[D] + x_4[E] + x_5[F] \\
 C_1 &= x_0[A, C] + x_1[C, B] + x_2[B, A] + x_3[C, D] + x_4[D, A] + x_5[E, F] \\
 C_2 &= x_0[A, C, B] \\
 C_{\geq 3} &= 0
 \end{aligned}$$

Τις ομάδες k -κύκλων:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \{ (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \partial_0 c_0(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \} \\
&= C_0 \cong Z^6 \text{ καθώς } \partial_0(c) = 0 \forall c \in C_0. \\
Z_1 &= \{ (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \partial_1 c_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \} \\
&\stackrel{[1]}{=} \{ (x_1 + x_3, x_1, x_1, x_3, x_3, 0) \} \\
&= \{ (x_1, x_1) \}_{\{1\}} \cong Z^2 \\
Z_2 &= \{ (x_0) : {}^3\partial_2 c_2(x_0) = 0 \} \\
&= \{ (x_0) : x_0 \partial_2[A, C, B] = 0 \} \\
&= \{ 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[1] : \partial_1 c_1 = 0 \Rightarrow \\
&x_0 \partial_1([A, C]) + x_1 \partial_1([C, B]) + x_2 \partial_1([B, A]) + \\
&x_3 \partial_1([C, D]) + x_4 \partial_1([D, A]) + x_5 \partial_1([E, F]) = 0 \Rightarrow \\
&x_0[A] - x_0[C] + x_1[C] - x_1[B] + x_2[B] - x_2[A] + \\
&x_3[C] - x_3[D] + x_4[D] - x_4[A] + x_5[E] - x_5[F] = 0 \Rightarrow \\
&(x_0 - x_2 - x_4)[A] + (-x_1 + x_2)[B] + (-x_0 + x_1 + x_3)[C] + \\
&(-x_3 + x_4)[D] + x_5[E] - x_5[F] = 0 \Rightarrow \\
&x_0 - x_2 - x_4 = 0, -x_1 + x_2 = 0, -x_0 + x_1 + x_3 = 0, \\
&-x_3 + x_4 = 0, x_5 = 0, -x_5 = 0 \Rightarrow \\
&x_0 = x_2 + x_4, x_1 = x_2, x_0 = x_1 + x_3, x_3 = x_4, x_5 = 0 \Rightarrow \\
&x_0 = x_1 + x_3, x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_5 = 0
\end{aligned}$$

Τις ομάδες k -συνόρων:

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{ (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) : c_0(y_0, \dots, y_5) = \partial_1 c_1(z_0, \dots, z_5) \} \\
&\stackrel{[1]}{=} \{ (y_0, y_1, -y_0 - y_1, y_3, y_4, -y_4) \} \\
&= \{ (y_1, y_1, y_1, y_1) \}_{\{0\}} \cong Z^4 \\
B_1 &= \{ (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) : c_0(y_0, \dots, y_5) = \partial_2 c_2(z_0) \} \\
&\stackrel{[2]}{=} \{ (z_0, z_0, z_0, 0, 0, 0) \} \\
&= \{ (z_0) \}_{\{0\}} \cong Z \\
B_2 &= 0, \text{ καθώς } C_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[1] : c_0 = \partial_1 c_1 \Rightarrow \\
y_0[A] + y_1[B] + y_2[C] + y_3[D] + y_4[E] + y_5[F] = \\
z_0 \partial_1[A, C] + z_1 \partial_1[C, B] + z_2 \partial_1[B, A] + z_3 \partial_1[C, D] + z_4 \partial_1[D, A] + z_5 \partial_1[E, F] \Rightarrow \\
y_0[A] + y_1[B] + y_2[C] + y_3[D] + y_4[E] + y_5[F] = z_0[A] - z_0[C] + z_1[C] - \\
z_1[B] + z_2[B] - z_2[A] + z_3[C] - z_3[D] + z_4[D] - z_4[A] + z_5[E] - z_5[F] \Rightarrow \\
y_0[A] + y_1[B] + y_2[C] + y_3[D] + y_4[E] + y_5[F] = (z_0 - z_2 - z_4)[A] + \\
(-z_1 + z_2)[B] + (-z_0 + z_1 + z_3)[C] + (-z_3 + z_4)[D] + z_5[E] - z_5[F] \Rightarrow \\
y_0 = z_0 - z_2 - z_4, \quad y_1 = -z_1 + z_2, \quad y_2 = -z_0 + z_1 + z_3, \\
y_3 = -z_3 + z_4, \quad y_4 = z_5, \quad y_5 = -z_5 \Rightarrow \\
y_0 = z_0 - z_2 - z_4, \quad y_1 = -z_1 + z_2, \quad y_2 = -y_0 - y_1 - y_3, \\
y_3 = -z_3 + z_4, \quad y_4 = z_5, \quad y_5 = -y_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[2] : c_1 = \partial_2 c_2 \Rightarrow \\
y_0[A, C] + y_1[C, B] + y_2[B, A] + y_3[C, D] + y_4[D, A] + y_5[E, F] = \\
z_0 \partial_2[A, C, B] \Rightarrow \\
y_0[A, C] + y_1[C, B] + y_2[B, A] + y_3[C, D] + y_4[D, A] + y_5[E, F] = \\
z_0[A, C] + z_0[C, B] + z_0[B, A] \Rightarrow \\
y_0 = z_0, \quad y_1 = z_0, \quad y_2 = z_0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = 0
\end{aligned}$$

Και τελικά τις ομάδες ομολογίας:

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{Z_0}{B_0} = \frac{Z^6}{Z^4} = Z^2 \\
H_1 &= \frac{Z_1}{B_1} = \frac{Z}{Z} = Z \\
H_2 &= \frac{Z_2}{B_2} = \frac{0}{0} = 0
\end{aligned}$$

$$H_{\geq 3} = 0$$

Βλέπουμε λοιπόν πως ο αριθμός οπών που περιμέναμε να βρούμε

σε κάθε διάσταση ταιριάζει με τον αριθμό "αντιγράφων" του χώρου

Ζ στην αντίστοιχη ομάδα ομολογίας. Αυτός ο αριθμός αντιγράφων ονομάζεται **τάξη**, που είναι αντίστοιχη έννοια με την διάσταση ενός διανυσματικού χώρου.

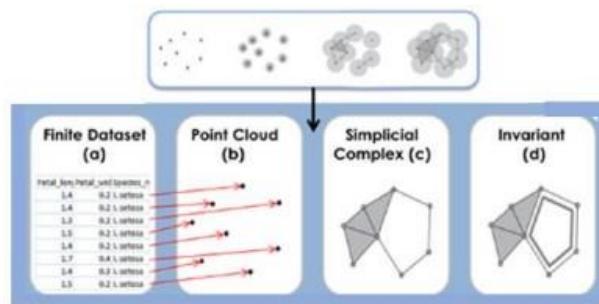
Ορισμός 2.3.13. Η τάξη της k -οστής ομάδας ομολογίας ενός πλεγματικού σύμπλοκου S ονομάζεται ο k -οστός αριθμός $Betti$ του S και συμβολίζεται ως β_k .

$$\beta_k = \text{rank}(H_k) = \text{rank}(Z_k) - \text{rank}(B_k)$$

Ολοκληρώνοντας, πρέπει να σημειώσουμε πως είμαστε ακόμη ένα βήμα μακριά από τον ορισμό της εμμένουσας ομολογίας, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυσή μας. Για να κατανοήσουμε όμως αυτήν την έννοια, πρέπει πρώτα να εξηγήσουμε τον τρόπο επεξεργασίας των δεδομένων μας από την αρχή.

2.4 Από Χρονοσειρές σε Νέφη Σημείων - 'Ενθεση Χρονοκαθυστέρησης

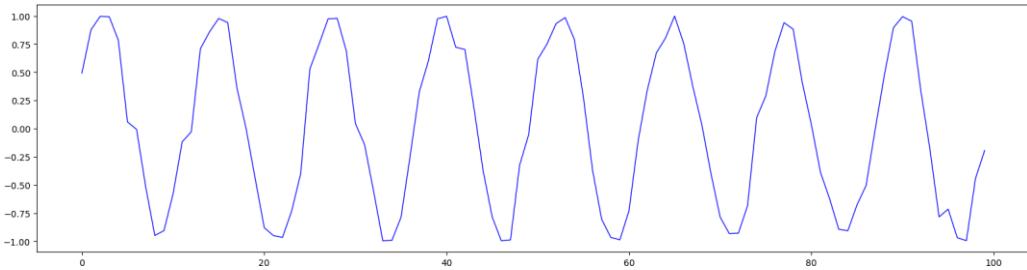
Έχοντας ορίσει λοιπόν την δομή που θα χρησιμοποιήσουμε για την τοπολογική ανάλυση δεδομένων, καθώς και τις τοπολογικές αναλλοίωτες που θέλουμε να εξάγουμε από αυτήν, η προφανής ερώτηση που ακολουθεί είναι πώς θα την κατασκευάσουμε από το σύνολο δεδομένων που θέλουμε να μελετήσουμε.



Σχήμα 2.4.1: Διαδικασία επεξεργασίας δεδομένων στην τοπολογική ανάλυση.

Γενικά, η μετατροπή ακολουθεί μια πορεία όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα: από δεδομένα σε νέφη σημείων, από νέφη σημείων σε πλεγματικά σύμπλοκα και τελικά από πλεγματικά σύμπλοκα στις τοπολογικές αναλλοίωτές τους. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε με το πρώτο βήμα σε αυτή τη σειρά, και θα εξετάσουμε τα υπόλοιπα στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Μιας και το ενδιαφέρον μας είναι αφορά συγκεκριμένα δεδομένα σε μορφή χρονοσειρών, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής τυχαία χρονοσειρά, η οποία προέκυψε από την δειγματοληψία μιας ημιτονικής συνάρτησης με θόρυβο, ως παράδειγμα:



Σχήμα 2.4.2

Η πρώτη πρόκληση που αντιμετωπίζουμε είναι πως η δομή μιας χρονοσειράς δεν είναι κατάλληλη για αναπαράσταση ως νέφος σημείων. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ένθεσης χρονοκαθυστέρησης (time-delay embedding, επίσης γνωστή ως Takens' embedding [6]).

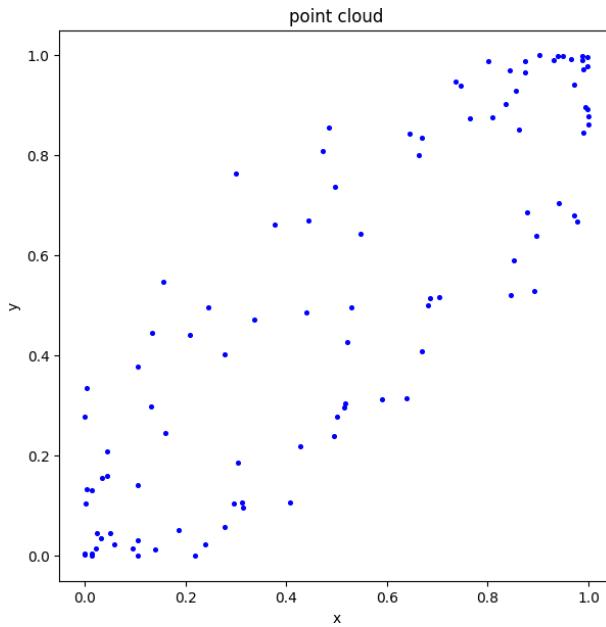
Ορισμός 2.4.1. Δεδομένου μίας χρονοσειράς $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και μίας παραμέτρου α , μία ένθεση χρονοκαθυστέρυσης είναι μία ανύψωση σε μία χρονοσειρά $\phi : t \rightarrow \mathbb{R}^d$, η οποία ορίζεται ως εξής [7]:

$$\phi(t) = (f(t), f(t + \alpha), \dots, f(t + (d - 1)\alpha))$$

Για τους σκοπούς του παραδείγματος θα κρατήσουμε τα πράγματα απλά επιλέγοντας $d = 2$ και $\alpha = 1$. Θα συζητήσουμε την κατάληλη επιλογή αυτών των παραμέτρων περαιτέρω όταν έρθει η ώρα να εφαρμόσουμε αυτήν την μέθοδο σε πραγματικά δεδομένα. Επίσης, θα κανονικοποιήσουμε τα δεδομένα μας στο διάστημα $[0, 1]$, χρησιμοποιώντας min-max scaling, δηλαδή ως εξής:

$$x' = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}$$

Αυτή η επεξεργασία μας δίνει το εξής νέφος σημείων:



Σχήμα 2.4.3

2.5 Από Νέφη Σημείων σε Πλεγματικά Σύμπλοκα - Σύμπλοκα Čech και Vietoris-Rips

Το επόμενο βήμα στην επεξεργασία μας είναι η μετατροπή του νέφους σημείων σε πλεγματικό σύμπλοκο. Εδώ οι δύο πιο γνωστές προσεγγύσεις είναι η χρήση του σύμπλοκου Čech και Vietoris-Rips. Και οι δύο μέθοδοι δέχονται ένα σύνολο σημείων εμφυτευμένο σε ένα μετρικό χώρο (όπως ο δισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος του παραδείγματός μας) και ένα όριο απόστασης ϵ , και με βάση αυτά συνδέουν τα σημεία, κατασκευάζοντας ένα πλεγματικό σύμπλοκο.

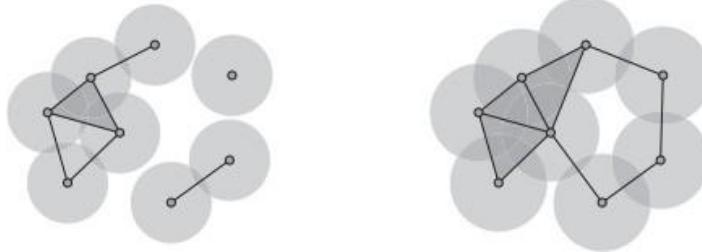
Ορισμός 2.5.1. Έστω ένας μετρικός χώρος (M, d) , ένα σημείο $x \in M$,

και ένας αριθμός $\epsilon > 0$. Η ανοιχτή ϵ -μπάλα με κέντρο x είναι το σύνολο:

$$B_\epsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}$$

Ορισμός 2.5.2. Έστω ένας μετρικός χώρος (M, d) , ένα σύνολο σημείων $X \subseteq M$, ένας αριθμός $\epsilon > 0$ και ένα πλέγμα $s = [x_0, x_1, \dots, x_k], x_i \in X$ για $i = 0, 1, \dots, k$. Το πλεγματικό σύμπλοκο $\check{C}ech_\epsilon(X)$ ορίζεται ως εξής:

$$s \in \check{C}ech_\epsilon(X) \Leftrightarrow \bigcap_{i=0}^k B_\epsilon(x_i) \neq \emptyset$$



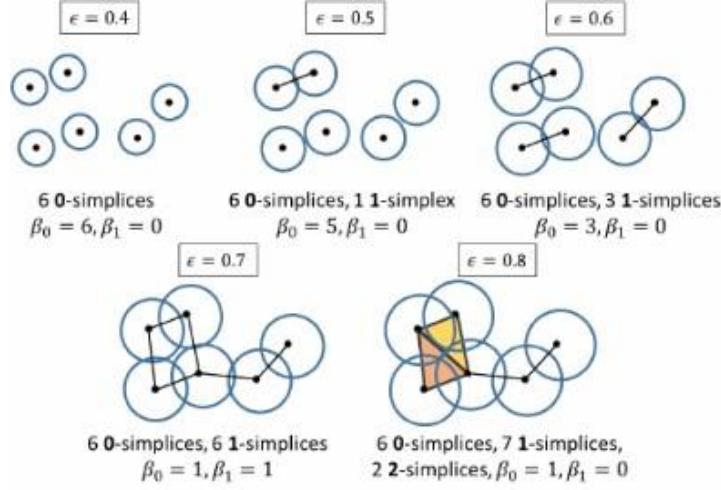
Σχήμα 2.5.1: Γραφική αναπαράσταση σύμπλοκων $\check{C}ech_{\epsilon_1}$ και $\check{C}ech_{\epsilon_2}$, $\epsilon_1 < \epsilon_2$. [10]

Ορισμός 2.5.3. Έστω ένας μετρικός χώρος (M, d) , ένα σύνολο σημείων $X \subseteq M$, ένας αριθμός $\epsilon > 0$ και ένα πλέγμα $s = [x_0, x_1, \dots, x_k], x_i \in X$ για $i = 0, 1, \dots, k$. Το πλεγματικό σύμπλοκο Vietoris-Rips $Rips_\epsilon(X)$ ορίζεται ως εξής:

$$s \in Rips_\epsilon(X) \Leftrightarrow d(x_i, x_j) \forall i, j \in [0, 1, \dots, k]$$

Η διαφορά δηλαδή μεταξύ των δύο σύμπλοκων είναι η εξής: το σύμπλοκο Čech περιλαμβάνει ένα k -πλέγμα αν και μόνο αν οι ϵ -μπάλες όλων των κορυφών του μαζί έχουνε μη κενή τομή. Σε αντίθεση, το σύμπλοκο Vietoris-Rips απαιτεί μόνο κάθε ζευγάρι κορυφών να έχει απόσταση $\leq \epsilon$. Εναλλακτικά, για να κατανοήσουμε την σχέση μεταξύ των δύο καλύτερα, μπορούμε να εκφράσουμε αυτή τη συνθήκη ως εξής: οι $\frac{\epsilon}{2}$ -μπάλες κάθε ζευγαριού κορυφών έχουνε μη κενή τομή. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε την εξής σχέση:

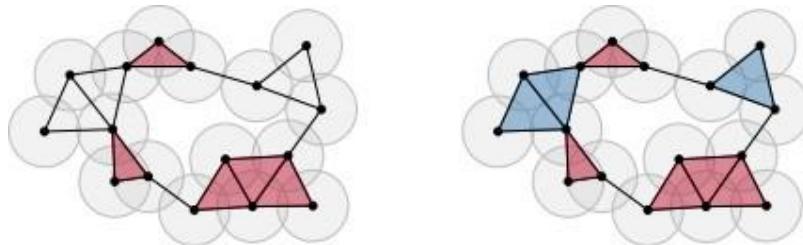
$$\check{C}ech_{\epsilon}(X) \subseteq Rips_{2\epsilon}(X)$$



Σχήμα 2.5.2: Γραφική αναπαράσταση σύμπλοκων $Rips_\epsilon$ για διαφορετικές τιμές του ϵ , και οι αριθμοί Betti του καθενός. [9]

Επίσης με τη σειρά του το σύμπλοκο $Rips_{2\epsilon}(X)$ αποτελεί υποσύνολο του $\check{Cech}_{2\epsilon}(X)$, καθώς οι 2ϵ -μπάλες των κορυφών οποιουδήποτε k -πλέγματος που ανήκει στο $Rips_{2\epsilon}(X)$ αναμφισβήτητα έχουν μη κενή τομή, καθώς η κάθε μία περιέχει όλες τις κορυφές του πλέγματος, σύμφωνα με τον ορισμό του σύμπλοκου Vietoris-Rips. Άρα η σχέση επεκτείνεται ως εξής:

$$\check{Cech}_\epsilon(X) \subseteq Rips_{2\epsilon}(X) \subseteq \check{Cech}_{2\epsilon}(X) \quad (1)$$



Σχήμα 2.5.3: Γραφική αναπαράσταση των σύμπλοκων \check{Cech}_ϵ και $Rips_{2\epsilon}$ και της σχέσης μεταξύ τους.[8]

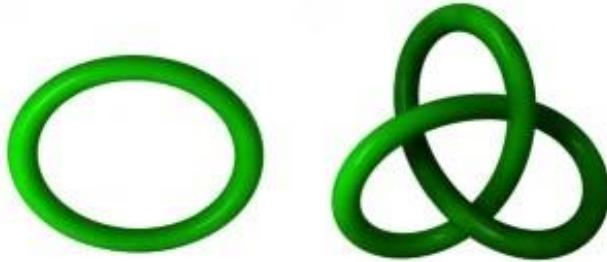
Προκειμένου να κατανοήσουμε όμως την πραγματική σημασία της διαφοράς μεταξύ των δύο σύμπλοκων πρέπει να εξηγήσουμε την λογική

πίσω από την δομή τους. Για αυτό χρειάζεται πρώτα να εισάγουμε μερικές ακόμα μαθηματικές έννοιες.

Ορισμός 2.5.4. Έστω οι τοπολογικοί χώροι X, Y και οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : X \rightarrow Y$. Μία *ομοιοποίηση* τους είναι μία συνεχής συνάρτηση $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ για την οποία ισχύει:

1. $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X$
2. $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$

Διαισθητικά, η ύπαρξη μίας ομοιοποίησης ανάμεσα σε δύο χώρους σημαίνει πως ο ένας χώρος μπορεί να μετατραπεί στον άλλο με συνεχή παραμόρφωση. Δύο τέτοιοι χώροι θεωρούνται *ομοιοτοπικοί* ή *ομοιοποικά ισοδύναμοι*. Αυτή η σχέση είναι πιο περιοριστική από την σχέση ανάμεσα σε ομοιομορφικούς χώρους που είδαμε προηγουμένως, καθώς σε ομοιομορφικούς χώρους η παραμόρφωση δεν χρειάζεται απαραίτητα να είναι συνεχής.



Σχήμα 2.5.4: Κύκλος και κόμπος trefoil, δύο ομοιομορφικοί αλλά όχι ομοιοτοπικοί χώροι. Μπορούμε να "κόψουμε" τον κόμπο, να τον ξεμπερδέψουμε και να τον ξανακολλήσουμε, φτιάχνοντας έναν κύκλο. Δεν μπορούμε όμως να καταφέρουμε το ίδιο με μία συνεχής παραμόρφωση.[11]

Ορισμός 2.5.5. Ένας τοπολογικός χώρος X θεωρήται *συσταλτός* αν είναι ομοιοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο.

Ορισμός 2.5.6. Ανοιχτό κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X είναι μία συλλογή ανοιχτών συνόλων $C = \{U_i \mid i \in I\}$ η οποία ικανοποιεί την

εξής συνθήκη:

$$X \subseteq \bigsqcup_{i \in I} U_i$$

Δηλαδή, η συλλογή αυτή "καλύπτει" ολόκληρο τον τοπολογικό χώρο X . Ένα κάλυμμα θεωρείται καλό αν τα σύνολα που το αποτελούν, καθώς και όλες οι δυνατές μη κενές τομές μεταξύ τους είναι συσταλτές [12].

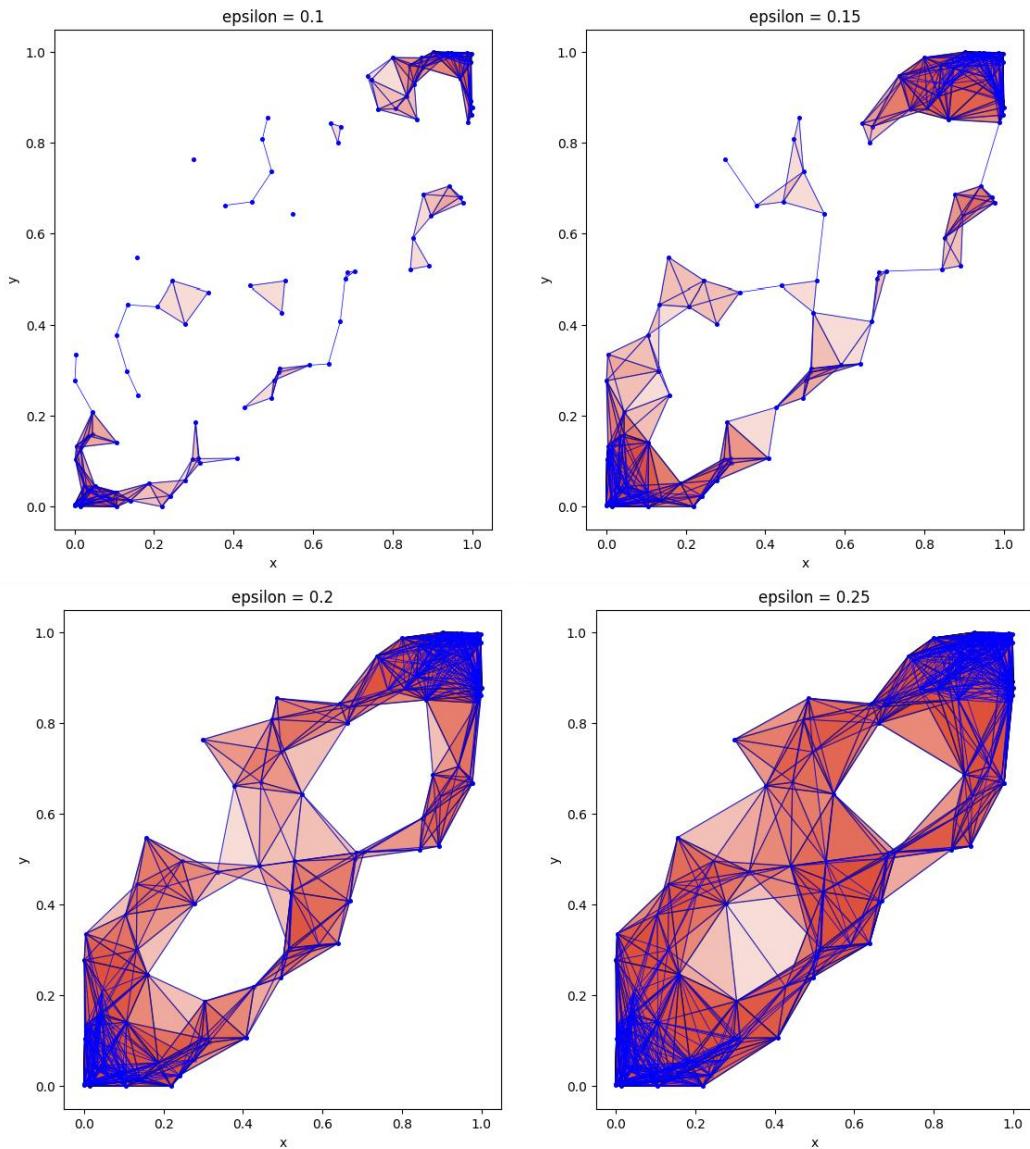
Ορισμός 2.5.7. Έστω ένας τοπολογικός χώρος X και ένα ανοιχτό κάλυμμα του $C = \{U_i\}_{i \in I}$. Το νεύρο (nerve) $N(C)$ είναι ένα πλεγματικό σύμπλοκο S που ορίζεται ως εξής:

- Κάθε ανοιχτό σύνολο του καλύμματος αντιστοιχεί σε ένα 0-πλέγμα του πλεγματικού συνόλου.
- Κάθε συλλογή K ανοιχτών συνόλων $\{U_j\}_{j \in K} \subseteq I$ που ικανοποιεί την συνθήκη $\bigcap_{j \in K} U_j \neq \emptyset$ αντιστοιχεί σε ένα k -πλέγμα κρούνφρες τα 0-πλέγματα που αντιστοιχούν στα σύνολα της συλλογής.

Θεώρημα Νεύρων του Leray (Leray's Nerve Theorem): Αν C ένα καλό ανοιχτό κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X , και $N(C)$ το νεύρο του, το $N(C)$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με την ένωση των συνόλων του C .[13]

Παρατηρώντας καλύτερα τον ορισμό του νεύρου, συνειδητοποιεί κανείς πως μοιάζει αρκετά με τον ορισμό που δώσαμε για το σύμπλοκο Čech. Πράγματι, το σύμπλοκο $\check{C}ech_\epsilon(X)$ ενός νέφους σημείων X , δεν είναι παρά το νεύρο του καλύμματος αυτού του χώρου που ορίζεται από την συλλογή των ϵ -μπαλών με κέντρα τα σημεία του. Αυτό έχει πολύ μεγάλη σημασία, καθώς με βάση το θεώρημα νεύρων γνωρίζουμε ότι έχουμε επιτυχώς διατηρήσει πλήρως τα τοπολογικά χαρακτηριστικά του αρχικού χώρου στη νέα δομή.

Αυτή η εξαιρετική αναπαράσταση όμως έχει ένα κόστος, το οποίο αντιμετωπίζουμε στην υπολογιστική της πολυπλοκότητά. Ο αριθμός πιθανών υποσυνόλων που πρέπει να ελεγχθούν αυξάνεται δραματικά όσο αυξάνεται ο αριθμός σημείων στο νέφος, γρήγορα καθιστώντας τον χρόνο που χρειάζεται για τον υπολογισμό απαγορευτικά μεγάλο. Για πρακτικούς λόγους λοιπόν προκύπτει η ανάγκη για μία μέθοδο που προσεγγίζει την ακρίβεια του σύμπλοκου Čech, με σημαντικά μικρότερο



Σχήμα 2.5.5: Vietoris-Rips σύμπλοκα που κατασκευάστηκαν από το νέφους σημείων του προηγούμενου κεφαλαίου, για τιμές $\epsilon = [0.1, 0.15, 0.2, 0.25]$.

υπολογιστικό κόστος. Έτσι καταλήγουμε στο σύμπλοκο Vietoris-Rips, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί πολύ πιο εύκολα, καθώς χρειάζεται να ελέγξει μόνο την απόσταση ανάμεσα σε ζευγάρια σημείων, και προσεγγίζει ικανοποιητικά το σύμπλοκο Čech, όπως είδαμε στη σχέση (1) (σελίδα 20). Αυτή τη μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν κι εμείς στο παρόντα για μας. Συγκεκριμένα, δεν επιλέγουμε μία μόνο τιμή του ϵ αλλά πολλές, σε αύξουσα σειρά, παράγοντας μια σειρά από πλεγματικά σύμπλοκα, το καθένα από τα οποία είναι υποσύνολο του επόμενου. Η συλλογή F που προκύπτει ονομάζεται διήθηση (filtration).

$$F = [S_0, S_1, \dots, S_n], S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n$$

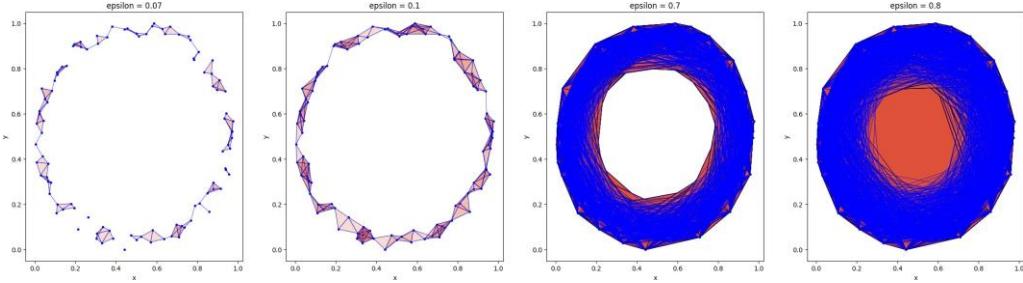
2.6 Από Πλεγματικά Σύμπλοκα σε Τοπολογικές Αναλογίες - Εμμένουσα Ομολογία

Έχοντας λοιπόν εισάγει την έννοια της διήθησης, μπορούμε επιτέλους να κατανοήσουμε τι σημαίνει εμμένουσα ομολογία. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε πολλές τιμές του ϵ , είναι ώστε να μπορέσουμε να ξεχωρίσουμε πόσο σημαντική είναι η κάθε οπή που ανιχνεύουμε στα σύμπλοκα που μελετάμε. Για αρκετά μικρές τιμές του ϵ , έχουμε ένα ασύνδετο σύμπλοκο με πολλές 0-διάστατες οπές, ενώ αν αυξήσουμε την τιμή αρκετά θα πάρουμε ένα πλήρως συνδεδεμένο σύμπλοκο. Στις ενδιάμεσες τιμές του ϵ πολλές οπές θα δημιουργηθούν και εξαφανιστούν όσο το μεταβάλουμε. Όμως, αυτές που υφίστανται για το μεγαλύτερο διάστημα είναι πολύ πιο πιθανό να αποτελούν σημαντική πληροφορία για το σχήμα των δεδομένων μας. Αυτή είναι η έννοια της εμμένουσας ομολογίας: ομολογία που παραμένει στις διαφορετικές αναπαραστάσεις του χώρου.

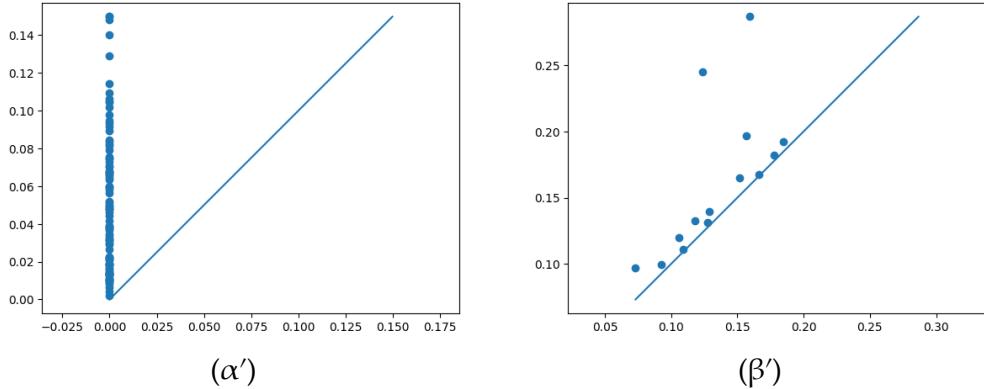
Ορισμός 2.6.1. Έστω μία διήθηση $F = [S_0, S_1, \dots, S_n]$, και δύο δείκτες, i, j , τέτοιοι ώστε $0 < i \leq j$. Η k -οστή ομάδα εμμένουσας ομολογίας είναι:

$$H_k^{i,j} = \frac{Z_k(S_i)}{\sum_{j'} Z_k(S_{j'})}$$

Δηλαδή, η ομάδα $H_k^{i,j}$ περιέχει τις τάξεις ομολογίας του S_i που υπάρχουν ακομά στο S_j [14]. Επίσης, αντίστοιχα με τις ομάδες εμμένουσας ομολογίας, θα έχουμε τις τάξεις ομολογίας του S_j που υπάρχουν ακομά στο S_i .



Σχήμα 2.6.1: Τα Vietoris-Rips σύμπλοκα ενός κυκλικού νέφους σημείων παρουσιάζουν μία μονοδιάστατη οπή για πολύ μεγάλο εύρος τιμών της παράμετρου ϵ .



Σχήμα 2.6.2: Διαγράμματα εμμονής του παραδείγματός μας [(α') Διάσταση 0, (β') Διάσταση 1].

νουσας ομολογίας, έχουμε και τους αριθμούς εμμονής Betti:

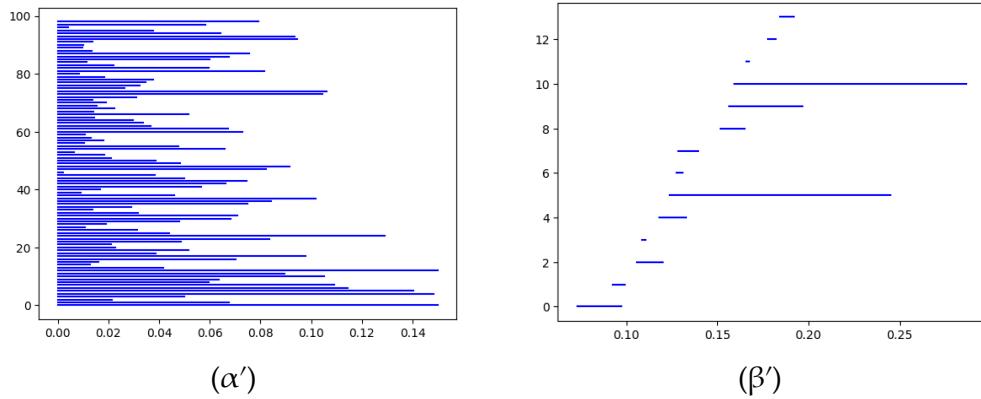
$$\beta_k^{i,j} = \text{rank}(\mathcal{H}_k^{i,j})$$

Για κάθε οπή, η ελάχιστη τιμή του δείκτη i στην οποία εμφανίζεται αποκαλείται ο χρόνος γέννησής της, και η ελάχιστη τιμή του j στην οποία εξαφανίζεται ο χρόνος θανάτου της. Με βάση αυτό το ζευγάρι τιμών μπορούμε να δημιουργήσουμε γραφικές αναπαραστάσεις των ευρημάτων μας, στη μορφή των διαγραμμάτων εμμονής και barcode.

Τα διαγράμματα εμμονής αναπαριστούν τον χρόνο γέννησης στον άξονα x και τον χρόνο θανάτου στον άξονα y . Άρα, όσο μεγαλύτερο το διάστημα στο οποίο εμφανίζεται μία οπή, τόσο πιο μακριά θα είναι

το σημείο που την αντιπροσωπεύει από την διαγώνιο.

Σε αντίθεση, τα διαγράμματα barcode αντιπροσωπεύουν κάθε οπή όχι με σημεία, αλλά με μία τιμή στον άξονα y , ενώ ο άξονας x χρησιμοποιείται για να ενδείξει τους χρόνους γέννησης και θανάτου. Στην τιμή y που αντιστοιχεί σε κάθε οπή χαράζεται μια οριζόντια γραμμή, που ξεκινάει στον χρόνο γέννησής της και σταματάει στον χρόνο θανάτου της. Προφανώς, όσο πιο μακριά η γραμμή, τόσο μεγαλύτερο το διάστημα στο οποίο εμφανίζεται η οπή.



Σχήμα 2.6.3: Διαγράμματα barcode του παραδείγματός μας [(α') Διάσταση 0, (β') Διάσταση 1].

Πράγματι, και στα δύο διαγράμματα βλέπουμε δύο μονοδιάστατες οπές να ξεχωρίζουν στη διάρκειά τους, όπως θα περιμέναμε με βάση το Σχήμα 2.5.5.

3 Εναλλακτικές Μέθοδοι

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε σε σειρά μερικές από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους που χρησιμοποιούνται σε κάθε βήμα της τοπολογικής ανάλυσης δεδομένων, προκειμένου να παρουσιάσουμε ένα ξεκάθαρο παράδειγμα απ' την αρχή μέχρι το τέλος. Σε αυτό το κεφάλαιο θα επεκτείνουμε πάνω στις διάφορες τεχνικές και εναλλακτικές προσεγγίσεις που έχουμε στη διάθεσή μας σε κάθε μέρος της διαδικασίας ανάλυσης.

3.1 Πολυδιάστατες Χρονοσειρές

Στο κεφάλαιο 2.4 παρουσιάσαμε την ένθεση χρονοκαθυστέρησης ως λύση στο πρόβλημα μετατροπής μίας μονοδιάστατης χρονοσειράς σε νέφος σημείων. Όταν αναλύουμε δεδομένα όμως, είναι πιθανό να θέλουμε να δουλέψουμε με πολυδιάστατες χρονοσειρές (δηλαδή χρονοσειρές με περισσότερες από μία μεταβλητές), όπως για παράδειγμα η αξίες ενός συνόλου μετοχών στο ίδιο χρονικό διάστημα. Σε αυτή τη περίπτωση, μπορούμε να παραλείψουμε το βήμα της ένθεσης χρονοκαθυστέρησης και να κατασκευάσουμε το νέφος σημείων χρησιμοποιώντας τις τιμές όλων των μεταβλητών την ίδια στιγμή ως συντεταγμένες του κάθε σημείου. Δηλαδή, έστω μία πολυδιάστατη χρονοσειρά που αποτελείται από d μονοδιάστατες χρονοσειρές $f^d(t)$, όπου $d = 1, \dots, k$. Για κάθε χρονική στιγμή t_n παίρνουμε ένα σημείο:

$$x(t_n) = (f^1(t_n), f^2(t_n), \dots, f^d(t_n)) \in \mathbb{R}^d$$

Στην εργασία [20], οι Gidea και Katz προτείνουν επιπλέον την εισαγωγή ενός χρονικού παραθύρου w , και την κατασκευή μέσω αυτού μίας σειράς από νέφη σημείων, αντί για ένα. Αυτά τα νέφη σημείων X_n έχουν την εξής μορφή:

$$X_n = (x(t_n), x(t_{n+1}), \dots, x(t_{n+w-1}))$$

Οι Wu και Hargreaves γενίκευσαν περαιτέρω τον παραπάνω τύπο στην εργασία [23], εισάγοντάς άλλη μια μεταβλητή s , που ελέγχει πόσο ολισθαίνει το χρονικό παράθυρο ανάμεσα σε κάθε νέφος σημείων. Ο τύπος που προκύπτει είναι ο εξής:

$$X_n = (x(t_{1+s(n-1)}), x(t_{2+s(n+1)}), \dots, x(t_{w+s(n-1)}))$$