Новосибирский государственный технический университет
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра теоретической и прикладной информатики

Лабораторная работа № 2

«Активная параметрическая идентификация моделей линейных дискретных динамических стохастических систем»

по дисциплине

«Математические методы планирования эксперимента»

Группа: ПММ-61
Студент: Горбунов К. К.
Преподаватель: Чубич В. М.

Новосибирск, 2017 г.

Цель работы

Реализовать процедуру активной параметрической идентификации, экспериментально подтвердить её эффективность.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Изучить соответствующий теоретический материал.
2. Последовательно выполнить все задания к лабораторной работе.
3. Проверить правильность реализации алгоритмов и работоспособность программ.

Задание к лабораторной работе

1. Связать разработанные ранее программные модули оценивания параметров и планирования оптимальных входных сигналов.
2. Для некоторой модели стохастической линейной дискретной системы получить начальные оценки параметров по некоторому произвольному начальному плану эксперимента.
3. При полученных начальных оценках параметров синтезировать оптимальный непрерывный план идентификационного эксперимента, округлить полученный непрерывный план до дискретного.
4. Провести идентификационный эксперимент согласно полученному дискретному оптимальному плану.
5. Сравнить точность оценивания параметров по исходному и оптимальному планам.

Теоретический материал

Основы активной параметрической идентификации

Предоположим, что экспериментатор может произвести ν повторных запусков системы, причем сигнал α_1 он подает на вход системы k_1 раз, сигнал α_2 — k_2 раза и так далее, наконец, сигнал α_q — k_q раз. В этом случае дискретный (точный) нормированный план эксперимента ξ_ν представляет собой совокупность точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, называемых спектром плана, и соответствующих им долей повторных запусков:

$$\xi_\nu = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \\ \frac{k_1}{\nu}, \frac{k_2}{\nu}, \ldots, \frac{k_q}{\nu} \end{array} \right\}, \ \alpha_i \in \Omega_\alpha, \ i = 1, 2, \ldots, q.$$

Каждая точка α_i спектра плана представляет собой последовательность импульсов, «развернутую во времени», т.е.

$$\alpha_i^T = U_i^T = \left\{ [u^i(t_0)]^T, [u^i(t_1)]^T, \ldots, [u^i(t_{N-1})]^T \right\}, \ i = 1, 2, \ldots, q.$$

Множество планирования Ω_α определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Под непрерывным планом ξ понимается совокупность величин

$$\xi = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \\ p_1, p_2, \ldots, p_q \end{array} \right\}, \ p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{q} p_i = 1, \ \alpha_i \in \Omega_\alpha, \ i = 1, 2, \ldots, q.$$

В отличие от дискретного нормированного плана в непрерывном нормированном плане снимается условие рациональности весов p_i.

Из непрерывного плана можно получить дискретный путем его округления.

Если $L(Y_1^N; \Theta)$ — плотность совместного распределения вероятностей по совокупности измерений $Y_1^N = \{y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_N)\}$ при фиксированном значении вектора параметров Θ, то информационная матрица Фишера одноточечного плана определяется выражениями [1]:

$$M(\alpha) = \left\| \underset{Y}{E} \left[\frac{\partial \ln L(Y_1^N; \Theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln L(Y_1^N; \Theta)}{\partial \theta_j} \right] \right\| = \left\| \underset{Y}{E} \left[- \frac{\partial^2 \ln L(Y_1^N; \Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right\|$$

Тогда нормированная информационная матрица $M(\xi)$ плана ξ определяется соотношением:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{q} p_i M(\alpha_i),$$

где $M(\alpha_i)$ — информационные матрицы точек спектра плана.

Задача построения оптимального плана эксперимента ξ^* сводится к задаче:

$$\xi^* = \arg\min_{\xi \in \Omega_\xi} X[M(\xi)],$$

где Ω_ξ — область планирования, X — критерий оптимальности. Данную задачу можно решать путем прямой и двойственной процедур.

Если через $Y_{i,j}$ обозначить j-ю реализацию выходного сигнала $(j = 1, 2, \ldots, k_i)$, соответствующему i-му входному сигналу U_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$, то в результате проведения по плану ξ_ν идентификационных экспериментов будет сформировано множество

$$\Xi = \{(U_i, Y_{i,j}),\ j = 1, 2, \ldots, k_i,\ i = 1, 2, \ldots, q\}$$

Уточним структуру $Y_{i,j}$:

$$Y_{i,j} = \left\{[y^{i,j}(t_1)]^T, [y^{i,j}(t_2)]^T, \ldots, [y^{i,j}(t_N)]^T\right\},\ j = 1, 2, \ldots, k_i,\ i = 1, 2, \ldots, q$$

Задача оценивания параметров θ сводится к задаче:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta \in \Omega_\theta} \chi(\Xi, \theta),$$

где χ — критерий идентификации.

Алгоритм процедуры активной параметрической идентификации:

1. взять произвольный (можно случайный) план ξ_0, тогда в результате проведения идентификационных экспериментов по данному плану будет сформировано множество Ξ_0,

2. получить начальные оценки $\hat{\theta}_0$ параметров модели по плану ξ_0, решая задачу:

$$\hat{\theta}_0 = \arg\min_{\theta \in \Omega_\theta} \chi(\Xi_0, \theta),$$

3. провести процедуру (прямую или двойственную) оптимального планирования входных сигналов — получить план ξ^*, решая следующую задачу, используя найденные найденные ранее оценки $\hat{\theta}_0$:

$$\xi^* = \arg\min_{\xi \in \Omega_\xi} X[M(\xi), \hat{\theta}_0].$$

   Множество, сформированное в результате проведения идентификационных экспериментов по плану ξ^* обозначим как Ξ^*.

4. получить конечные оценки $\hat{\theta}$ параметров модели по ранее синтезированному оптимальному плану ξ^*:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta \in \Omega_\theta} \chi(\Xi^*, \theta),$$

   и закончить процесс.

Описание модельной структуры

Модель стохастической динамической линейной дискретной системы в пространстве состояний в виде [1]:

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) &= Fx(t_k) + Cu(t_k) + Gw(t_k), \\ y(t_{k+1}) &= Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \qquad\qquad k = 0, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь:

$x(t_k)$ – n-вектор состояния;

F – матрица перехода состояния;

$u(t_k)$ – r-вектор управления (входного воздействия);

C – матрица управления;

$w(t_k)$ – p-вектор возмущений;

G – матрица влияния возмущений;

H – матрица наблюдения;

$v(t_{k+1})$ – m-вектор шума измерений;

$y(t_{k+1})$ – m-вектор наблюдений (измерений) отклика;

F, C, G, H — матрицы соответствующих размеров.

Априорные предположения:

- F устойчива;
- пары (F, C) и (F, G) управляемы;
- пара (F, H) — наблюдаема;

- $w(t_k)$ и $v(t_{k+1})$ — случайные векторы, образующие стационарные белые гауссовские последовательности, причем:

$$E[w(t_k)] = 0, \; E[w(t_k)w^T(t_l)] = Q\delta_{k,l} \; ;$$

$$E[v(t_{k+0}) = 0, \; E[v(t_{k+1})v^T(t_{l+1})] = R\delta_{k,l}$$

$$E[v(t_k)w^T(t_k)] = 0,$$

для любых $k, l = 0, 1, \ldots, N-1$ ($\delta_{k,l}$ — символ Кронекера);

- начальное состояние $x(0)$ имеет нормальное распределение с параметрами $\overline{x}(0)$ и $P(0)$ и не коррелирует с $w(t_k)$ и v_{k+1} при любых значениях k.

  Будем считать, что подлежащие оцениванию параметры $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ могут входить в элементы матриц $F, C, G, H, Q, R, P(0)$ и в вектор $\overline{x}(0)$ в различных комбинациях.

Критерий идентификации

В качестве критерия идентификации используется логарифмическая функция правдоподобия. Для одноточечного плана эксперимента она имеет вид [1]:

$$\chi(\theta, U_i, Y_{i,j}) = -\ln L(\theta) = \frac{Nm}{2}\; ln2\pi + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\varepsilon^T(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1})\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\ln\det B^{-1}(t_{k+1}).$$

Критерий идентификации для многоточечного плана имеет вид:

$$\chi(\Xi, \theta) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{k_i}\chi(\theta, U_i, Y_{i,j})$$

Градиент критерия идентификации

Выражение для градиента критерия для одноточечного плана имеет вид [1]:

$$\frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right]^T B^{-1}(t_{k+1}) \left[\varepsilon(t_{k+1}) \right] -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\varepsilon(t_{k+1}) \right]^T B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}) +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{Sp} \left[B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} \right].$$

Выражение градиента критерия для многоточечного плана можно легко получить по правилу дифференцирования суммы.

Примеры решений

Пример 1

$$\begin{pmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t_k) + \begin{pmatrix} w_1(t_k) \\ w_2(t_k) \end{pmatrix}$$

$$y(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1(t_{k+1}) \\ v_2(t_{k+1}) \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P(0) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},\ R = 0.1$$

Истинные значения параметров $\theta_{true} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

Оценивание параметров по произвольному начальному плану

Число точек в плане $q = 4$.

Длина точки плана $N = 20$.

Область планирования: $u(t_k) \in [-1,\ 1],\ k = 0, 1, \ldots, N$.

Область оценивания: $0.25 \le \theta_i \le 0.75,\ i = 1, 2$.

Общее число запусков $\nu = 10$.

Полученные оценки параметров: $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.342 & 0.559 \end{bmatrix}$.

Относительная погрешность в пространстве параметров:

$$\delta_\theta = \frac{||\hat{\theta} - \hat{\theta}_{true}||}{||\hat{\theta}_{true}||} = 23.9\%.$$

Средняя относительная погрешность в пространстве откликов:

$$\overline{\delta}_Y = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{||\hat{Y}^{i,j} - \hat{Y}^{i,j}_{true}||}{||\hat{Y}^{i,j}_{true}||} = 11.8\%.$$

Синтез оптимального плана и оценивание параметров по плану

По проведению двойственной процедуры планирования входных сигналов был получен некоторый оптимальный план. В результате проведения идентификационных экспериментов по данному плану были получены оценки параметров.

Полученные оценки параметров: $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.47 \end{bmatrix}$.

Относительная погрешность в пространстве параметров:

$$\delta_\theta = \frac{||\hat{\theta} - \hat{\theta}_{true}||}{||\hat{\theta}_{true}||} = 6.7\%.$$

Средняя относительная погрешность в пространстве откликов:

$$\overline{\delta}_Y = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{||\hat{Y}^{i,j} - \hat{Y}^{i,j}_{true}||}{||\hat{Y}^{i,j}_{true}||} = 2.6\%.$$

Выводы

По результатам эксперимента видно уменьшение погрешности оценок при оценивании по оптимальному плану. Таким образом подтверждается эффективность процедуры активной параметрической идентификации.

Список литературы

[1] Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем: монография / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова, Д.И. Бобылева. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. — 192 с. (Серия «Монографии НГТУ»).

Исходные тексты программ

?? PythonTeX ??