**ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ**

**К.К. Горбунов**

**к.т.н., доцент О.С. ЧЕРНИКОВА**

**Новосибирский государственный технический университет,**

**г. Новосибирск,** gorbunov.2011@stud.nstu.ru

Проведен сравнительный анализ методов вычисления градиентов целевых функций при численном решении задач нелинейного математического программирования и обзор существующих программных средств, реализующих автоматическое дифференцирование. Реализована программная процедура вычисления критерия максимального правдоподобия и его градиента методом автоматического дифференцирования для модели линейной непрерывно-дискретной стохастической системы, проведена процедура оценивания параметров.

The paper provides a survey, including bibliography survey, starting from the origins and basics of automatic differentiation, continuing by a comparative analysis of overall differentiation methods applicable to nonlinear mathematical programming problems solving and finishing by an overview of existing software tools, frameworks implementing automatic differentiation. A software procedure computing the likelihood and its’ gradient using automatic differentiation for linear continuous-time dynamic stochastic model was implemented as well as parameter estimation based on the computed gradient.

Вычисление производных является неотъемлемой частью численного решения оптимизационных задач градиентными методами. К задачам оптимизации сводятся многие практические задачи математического моделирования, обработки и анализа данных, задачи математической физики [1]. *Объектами* текущих исследований являются методы и алгоритмы вычисления производных.

Наиболее распространенными методами вычисления градиентов являются:

1. Аналитические методы, использующие вычисления на основе полученных аналитических выражений для градиента оптимизируемой функции.
2. Численные методы приближенного вычисления, основанные на различных аппроксимациях (методы конечных разностей и т.п.).
3. Методы символьного дифференцирования, представленные в специализированных системах компьютерной алгебры (напр., Maple, Mathematica и др.), оперирующими аналитическими выражениями.
4. Метод автоматического дифференцирования (АД) (также в некоторых источниках [1] называемый алгоритмическим дифференцированием), о котором далее подробнее пойдет речь.

Аналитические методы являются точными и “прямолинейными” (простыми в методологическом смысле), но при решении некоторых задач аналитические выводы могут быть крайне сложны и трудоемки, если вообще применимы, например, при отсутствии аналитического выражения целевой функции как такового.

Численные методы приближенных вычислений просты в использовании, но зачастую приводят к ошибкам вычислений, отчасти связанных с некорректным выбором шага или порядка аппроксимации.

Методы символьного дифференцирования оперируют аналитическими выражениями и неприменимы в тех случаях, когда выражение неизвестно, или когда в алгоритме вычисления присутствуют условные операторы (ветвления) и циклы, то есть так же как и аналитические методы, неприменимы, когда функция задана в виде вычислительной компьютерной программы ЭВМ.

Метод автоматического дифференцирования, основанный на представлении целевой функции в виде суперпозиции элементарных функций и арифметических операций, на правиле дифференцирования сложной функции (цепное правило), позволяет не только точно вычислять градиент оптимизируемой функции, но и быть применимым в том числе к функциям, не имеющим строгого математического описания.

Первые публикации, описывающие данный метод датированы концом 80х – началом 90х годов прошлого века в отечественных литературных источниках [2] и в зарубежных источниках [3]. Несмотря на то, что методу уже почти 30 лет, до настоящего времени он используется недостаточно широко, и даже когда появилось большое количество свободно распространяемых программных средств [4], [5], его реализующих, остается недостаточно востребованным среди специалистов.

В настоящей работе метод АД удалось привлечь при вычислении критерия (и его градиента) идентификации моделей стохастических линейных непрерывно-дискретных систем вида:

(1)

Здесь:

* вектор состояния;
* матрица перехода состояния;
* вектор-функция управления (входного воздействия);
* матрица управления;
* вектор возмущений объекта;
* матрица влияния возмущений;
* матрица наблюдения;
* вектор шумов измерений (наблюдений);
* вектор измерений (наблюдений) (отклик).

Все шумы, возмущения белые, гауссовские, некоррелированные.

Отметим, что аналитическое выражение для критерия идентификации модели (1) и его градиента ранее были получены [7], и имели сложное математическое представление.

В результате использования метода АД при параметрической идентификации модели автором были получены оценки неизвестных параметров по точности оценивания сопоставимые с оценками, полученных при идентификации на основе аналитического выражения критерия.

Литература:

1. Baydin A., Pearlmutter B., Radul A., Siskind J. Automatic Differentiation in Machine Learning: a Survey [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2017. Дата обновления: 17.08.2017. URL: https://arxiv.org/abs/1502.05767 (дата обращения: 01.10.2017).

2. К. Р. Айда-заде, Ю. Г. Евтушенко, “Быстрое автоматическое дифференцирование на ЭВМ”, Матем. моделирование, 1:1 (1989), 120–131

3. Rall, Louis B. (1981). Automatic Differentiation: Techniques and Applications. Lecture Notes in Computer Science. 120. Springer. ISBN 3-540-10861-0.

4. Abadi A., Agarwal A., Barham P., Brevdo E. et al. TensorFlow: Large-Scale Machine Learning on Heterogeneous Distributed Systems [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2017. Дата обновления: 16.03.2016. URL: https://arxiv.org/abs/1603.04467 (дата обращения: 01.10.2017).

5. Alain G., Almahairi A., Ballas N. et al. Theano: A Python framework for fast computation of mathematical expression [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2017. Дата обновления: 09.05.2016. URL: https://arxiv.org/pdf/1605.02688 (дата обращения: 01.10.2017).

6. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем: монография / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова, Д.И. Бобылева. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. — 192 с. (Серия «Монографии НГТУ»).