Matematyczna Przygoda

Dariusz Klonowski

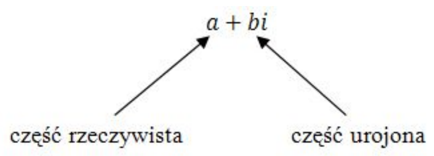
12 grudnia 2014

Spis treści

1 Spotkanie pierwszego stopnia z liczbami zespolonymi

1.1 Liczby zespolone - definicja

Liczbą zespoloną nazywamy liczbę postaci:



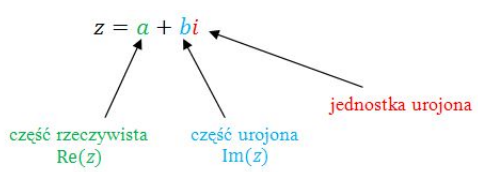
Rysunek 1: Schemat liczby zespolonej

gdzie a, b - to dowolne liczby rzeczywiste.

Rysunek (1) świetnie pokazuje, że jeżeli weźmiemy $b = 0$, to otrzymamy zwykłą liczbę rzeczywistą. Jeżeli natomiast weźmiemy $a = 0$, to otrzymamy liczbę zespoloną, która będzie czysto urojona (tzn. nie bedzie mieć części rzeczywistej).

Gdy podajemy część urojoną liczby zespolonej, to ograniczamy się jedynie do współczynnika liczbowego stojącego przy i (samej jednostki urojonej i nie piszemy). Liczby zespolone często oznacza się symbolem z. Możemy zapisać np.: $z = 7 + 13i$. To jest tylko takie umowne oznaczenie, podobnie jak np. liczby naturalne oznaczamy często literką n. Na początku rozdziału pokazaliśmy sobie, że każda liczba zespolona składa się z części rzeczywistej i części urojonej. Teraz to trochę uściślimy i powiemy sobie co dokładnie oznaczają poznane przed chwilą pojęcia.

Przyjmijmy, że mamy daną liczbę zespoloną $z = a + bi$. Wówczas mamy:



Rysunek 2: Schemat liczby zespolonej z

UWAGA odnośnie zapisu części rzeczywistej i urojonej.

- `Część rzeczywistą` liczby zespolonej z oznaczamy symbolem: `Re(z)` (ang. `Real`).
- `Część urojoną` liczby zespolonej z oznaczamy symbolem: `Im(z)` (ang. `Imaginary`).

Liczba zespolona jako para liczb rzeczywistych (punkt)

Wiemy już, że każdą liczbę zespoloną jednoznacznie określają dwie liczby rzeczywiste (część rzeczywista i część urojona). W związku z tym, każdą liczbę zespoloną $z = a + bi$ można utożsamiać z parą liczb rzeczywistych:

$$(a, b) \tag{1}$$

[1]

1.2 Sprzężenie liczby zespolonej

Przyjmijmy, że mamy daną liczbę zespoloną $z = a+bi$. Wówczas liczbę $a-bi$ nazywamy liczbą sprzężoną do z i oznaczamy symbolem $\overline{z}$. Czyli:

$$\overline{z} = a - bi \tag{2}$$

Dla liczb sprzężonych zachodzą:

Dla dowolnych z, z_1, $z_2 \in C$ mamy:

$$z + \overline{z} = 2Re(z)$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$z\overline{z} = |z|^2$$

W trzecim podpunkcie pojawił się nowy symbol $|z|$, który oznacza moduł liczby z. Moduł liczby zespolonej $z = a + bi$ liczymy ze wzoru:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

Pojęcie modułu zostanie wyjaśnione w rozdziale 1.3 [3]

1.3 Moduł liczby zespolonej

Przyjmijmy, że mamy daną liczbę zespoloną $z = a + bi$. Wówczas liczbę $sqrta^2 + b^2$ nazywamy `modułem` liczby z i oznaczamy symbolem $|z|$. Czyli:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4}$$

Z modułem liczby zespolonej są związane następujące fakty:

Dla dowolnych z, z_1, $z_2 \in C$ mamy:
$z\overline{z} = \|z\|^2$
$\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$
$\|z_1 + z_2\| \leqslant \|z_1\| \cdot \|z_2\|$

[4]

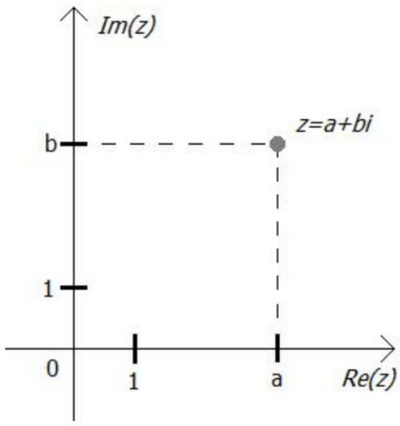
1.4 Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

W rozdziale 1.1 Liczby zespolone - definicja powiedzieliśmy sobie, że każdej liczbie zespolonej $z = a + bi$ odpowiada uporządkowana para liczb (a, b). Przykładowo:

$a + bi$	(a, b)
$2 + 5i$	$(2, 5)$
$5 + 2i$	$(5, 2)$
$7 - i$	$(7, -1)$
$-8 - 2i$	$(-8, -2)$
i	$(0, 1)$
1	$(1, 0)$
0	$(0, 0)$
$12 - \sqrt{5} + (7 - \sqrt{2})i$	$(12 - \sqrt{5}, 7 - \sqrt{2})$

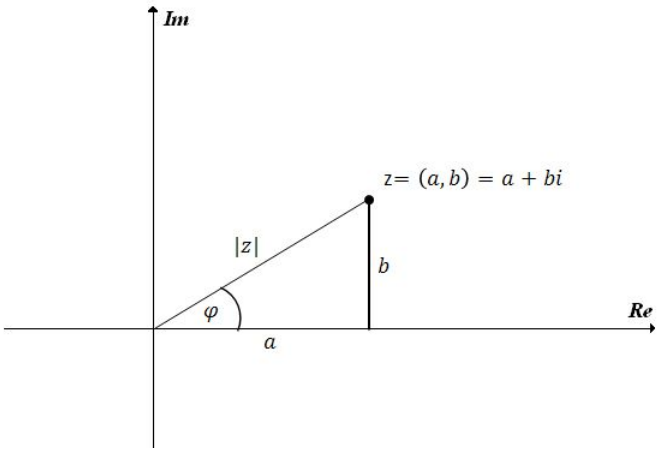
W związku z tym możemy interpretować liczby zespolone jako punkty na płaszczyźnie. Na osi x będziemy zaznaczać część rzeczywistą liczby zespolonej, a na osi y część urojoną.

Rysunek 3 pokazuje przykładową liczbę zespoloną na płaszczyźnie:



Rysunek 3: Interpretacja geometryczna liczby z

Zaznaczymy teraz jeden ogólny punkt na płaszczyźnie zespolonej i określimy dla niego kilka własności.



Rysunek 4: Liczba z tworzy trójkąt prostokątny

Zauważmy na początku, że odległość liczby zespolonej $z = a + bi$ od początku układu współrzędnych, z twierdzenia Pitagorasa, wyraża się wzorem:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5}$$

Czyli jest to po prostu moduł liczby z.

Literką ϕ (czytamy: fi) oznaczyliśmy kąt między osią Re, a półprostą wychodzącą z początku układu współrzędnych i przechodzącą przez punkt z. Oczywiście nie trzeba obowiązkowo stosować literki ϕ na oznaczenie tego kąta. Można posługiwać się dowolną inną literką, np.: α, β, γ.

Dla ułatwienia przyszłych rachunków miarę zaznaczonego kąta ϕ będziemy zazwyczaj wyrażać w radianach (a nie w stopniach). Możemy zatem napisać, że $\phi \in R$. Liczbę ϕ nazywamy argumentem liczby z i oznaczamy $Argz$. Dla liczby z którą zaznaczyliśmy w powyższym układzie współrzędnych mamy:

$$Argz = \phi \tag{6}$$

Korzystając wprost z definicji funkcji trygonometrycznych dla trójkąta prostokątnego narysowanego w powyższym 4 układzie współrzędnych, otrzymujemy:

$$cos\phi = \frac{a}{|z|}, \qquad sin\phi = \frac{b}{|z|}, \qquad cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{7}$$

Dwa ostatnie wzory otrzymaliśmy z dwóch pierwszych, po prostu podstawiając do nich wzór na moduł. Dla wygody dalej będziemy posługiwali się głównie tymi wzorami po lewej (bo są krótsze w zapisie). Bezpośrednio z nich otrzymujemy, że:

$$a = |z|cos\phi, \qquad b = |z|sin\phi. \tag{8}$$

Możemy zatem zapisać, że:

$$z = a + bi = |z|cos\phi + (|z|sin\phi)i = |z|(cos\phi + isin\phi) \tag{9}$$

Wzór, który otrzymaliśmy: $z = |z|(cos\phi + isin\phi)$ to **postać trygonometryczna** liczby zespolonej $z = a + bi$.

Wiemy już, że możemy przedstawić jedną liczbę zespoloną na trzy różne sposoby:

- w postaci ogólnej $z = a + bi$,
- jako punkt (a, b) na płaszczyźnie,
- w postaci trygonometrycznej $z = |z|(cos\phi + isin\phi)$.

Każda z nich ma swoje plusy i minusy. Zaletą postaci trygonometrycznej jest to, że umożliwia w łatwy sposób podnoszenie liczb zespolonych do dużych potęg. [5]

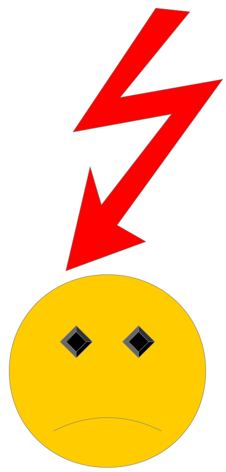
1.5 Liczby zespolone w macierzach

A teraz, specjalnie dla tych, którzy poszukują mocnych wrażeń:

Ćwiczenie 1. Oblicz wyznacznik $DetA$ macierzy A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15+46i & -27-3i & -7+17i & 87 \\ 48-18i & -37+7i & -23-\sqrt{17}i & -18+i \\ -65+5i & -11-7i & 14i & 15 \\ \sqrt{13}+i & 9i & 18 & 79-48i \end{bmatrix}$$

POWODZENIA!!! ;-)



Rysunek 5: Tak wygląda czacha po nauce matematyki...

2 Po ciężkiej pracy (czyt. nauce matymatyki) należy się nieco relaksu. . .

2.1 Kilka żartów . . .

1. Pewien informatyk poszedł na ryby.
   Złapał złotą rybkę, która obiecała spełnić tradycyjnie trzy życzenia.
   Informatyk mówi:
   - Żeby był pokój na świecie.
   - Za trudne.
   - No to, aby Windows się nie zacinał.
   - To już niech będzie ten pokój na świecie. . .

   [6]

2. Żona do męża informatyka:
   - Poznajesz człowieka na fotografii?
   - Tak.
   - Ok, dzisiaj o 15 odbierzesz go z przedszkola.

   [7]

3. Jak informatyk wywiesza pranie?
   - Na linkach.

   [8]

4. - Czym różni się doświadczony informatyk od początkującego?
   - Początkujący uważa, że 1 KB to 1000 B, a doświadczony jest pewien, że 1 km to 1024 m.

   [9]

5. Informatyk do informatyka:
   - Pożycz mi 500 zł. Albo nie, 512 dla równego rachunku.

   [10]

6. Jaki rozmiar piersi powinna mieć żona informatyka?
C++.

[2]

3 Podziękowania

Dziękuję za przeczytanie i zachęcam do pozytywnej oceny mojej pracy[1]!!! Mam nadzieję, że się podobało ;-)

Literatura

[1] Definicja liczby zespolonej. 1.1

[2] Jaki rozmiar. 2.1

[3] Sprzężenie liczby zespolonej. 1.2

[4] Moduł liczby zespolonej. 1.3

[5] Interpretacja geometryczna liczby zespolonej. 1.4

[6] Informatyk na rybach. 1

[7] Żona do męża informatyka. 2

[8] Informatyk wywiesza. 3

[9] Różnice pomiędzy informatykami. 4

[10] Pożyczka. 5

[1] Zdanie *"zachęcam do pozytywnej oceny mojej pracy"* należy uznać za skrzywienie zawodowe, ponieważ pracuję w infolinii sieci `PLAY` i muszę namawiać do niej klientów.