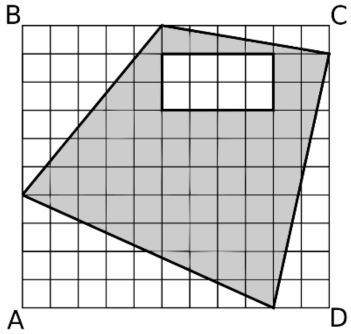
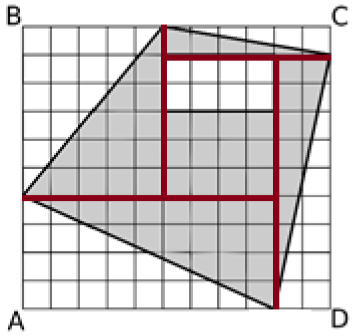
23 апреля 2016г.

Решения

1. Комната в общежитии имеет форму прямоугольника. Часть комнаты – свободная, она закрашена в темный цвет; оставшаяся площадь (белая) заставлена мебелью. Какой территории больше – свободной или занятой? Ответ объясни.



Решение: *Можно разделить комнату на прямоугольники способом, показанным на рисунке справа. Тогда в крайних прямоугольниках окажется одинаковое количество свободной и занятой зоны, а в центральном - больше свободной зоны. Таким образом, в комнате больше свободного места, чем занятого.*
Также возможно решение, при котором вычисляется площадь занятой и свободной зоны.
$S_{\text{занят.}} = 53\text{кл.} < S_{\text{свобод.}} = 57\text{кл.}$



Ответ: *Свободной зоны больше с разницей в 4 клетки.*

Критерии:
- *Есть идея делить комнату на прямоугольники или считать клеточки - 0.3 балла.*
- *Свободной зоны больше, но не на 4 клеточки – 0.9 баллов*
- *Решение доведено до конца, разница – 4 клеточки - 1 балл.*

2. В упаковке лежат 6 мелков. Как раздать эти мелки между шестью преподавателями так, чтобы каждый из них получил по одному мелку и при этом один мелок остался в упаковке?

Решение: *Нужно раздать пять мелков пятерым преподавателям, а шестому отдать упаковку с оставшимся мелком.*
Возможны и другие оригинальные логичные верные решения.

Ответ: *Один мел идет с коробкой*

Критерии:
- *Участник пытается разделить 5 мелков на шестерых преподавателей – 0.1 балла.*
- *Приведено логичное верное решение, при котором каждый преподаватель получает целый мелок - 1 балл.*

3. Найди корень вещественного уравнения $(x+7)^3 = 216$

Решение: *Пренебрегая комплексными корнями, получаем следующее:*

$$(x+7)^3 = 216 = 6^3$$

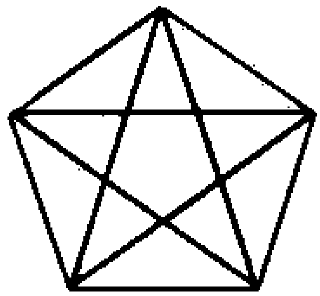
Тогда , $x + 7 = 6$, *отсюда* $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Критерии:

- *Раскрытием скобок получен кубический полином на x:* $x^3 + 21x^2 + 147x + 343 = 216$ - *0.3 балла*
- *Получено* $x + 7 = 6$, *но x вычислен из этого выражения неверно – 0,7 балла.*
- *Решение (через взятие корня или находя корни полинома) доведено до конца с правильным ответом - 1 балл.*

4. Проверь свою геометрическую наблюдательность: сосчитай, сколько треугольников в фигуре справа.



Решение: *Если рассмотреть треугольники по числу входящих в них компонент фигуры, получим:*
(число компонент: число треугольников)
(1: 10); (2: 10); (3: 10); (5: 5).

Ответ: 35

Критерии:

- *Больше 10, меньше 20 – 0.1 балла*
- *Больше 20, меньше 30 – 0.3 балла*
- *Больше 30 – 0.7 балла*
- *Приведен верный ответ в 35 треугольников – 1 балл.*

5. Найди значение выражения:

$$\left(\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Решение:

$$\left(\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1\cdot2\cdot4\,(1^3+2^3+3^3+\cdots)}{1\cdot3\cdot9\,(1^3+2^3+3^3+\cdots)}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Критерии:

- *Есть идея вынесения общих коэфф-тов за скобки – 0.3 балла*
- *Найден ответ, но с арифметической (минимальной) ошибкой – 0.9 баллов.*
- *Решение доведено до конца - 1 балл.*

6. (Задача-шутка) Корабль плывет по реке Пироговка неподалёку от берега со спущенной на воду лестницей вдоль борта. У лестницы 16 ступенек, расстояние между которыми составляет 35 см. Самая нижняя ступенька касается поверхности воды. Внезапно начинается дождик, который поднимает воду на 20 см за каждый час.
   Сколько времени уйдет на то, чтобы покрылась водой 5-я ступенька лесенки?

   Решение: *Задача не на арифметику, а на смекалку. Поскольку корабль находится на плаву, 5-я ступенька никогда не уйдёт в воду.*

   Ответ: *Формально – бесконечно долго.*

   Критерии:
   - *Приведен неверный ответ* - *0 баллов.*
   - *Приведен верный (схожий по смыслу) ответ* - *1 балл.*

7. Участники заседания обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что всего рукопожатий было 66. Сколько человек явилось на заседание?

   Решение: *Каждый из участников пожал x-1 руку. Значит, всех рукопожатий должно быть x*(x-1), однако надо иметь в виду, когда Вася пожимает руку Пете и наоборот (Петя Васе) – это всё одно рукопожатие, поэтому число будет вдвое меньше. Тогда имеем уравнение:*

   $$\frac{x(x-1)}{2} = 66$$

   После преобразований получим $x^2 - x - 132 = 0$, *откуда* $x_1 = 12, x_2 = -11.$ *Поскольку значение в -11 человек лишено реального смысла, мы его отбрасываем и оставляем лишь первый корень.*

   Ответ: *12 человек*

   Критерии:
   - *Получено неверное уравнение* $x^2 - x - 66 = 0$ *– 0,1 балл*
   - *Получено правильное уравнение* $x^2 - x - 132 = 0$ *– 0,3 балла*
   - *Отброшен отрицательный корень, положительный найден с ошибкой – 0,7 балла*
   - *Верный ответ с обоснованием – 1 балл*

8. Андрей мчался на автомобиле по шоссе с постоянной скоростью. Рядом с ним сидела его жена Аня.
“Ты заметила, - обратился он к ней, - что эти надоедливые щиты с рекламой рекламы на щитах расставлены на одинаковом расстоянии друг от друга? Хотелось бы знать, на каком именно”.
Аня посмотрела на часы и сосчитала, сколько рекламных щитов промелькнуло за окном в течение одной минуты.
“Какое странное совпадение! - воскликнула она. - Если это число умножить на 10, то получится в точности скорость нашей машины в милях в час”.
Предположим, что скорость машины постоянна, щиты расставлены через равные промежутки, а минута, отмеренная Аней, начинается и кончается в моменты, когда машина находится как раз посреди расстояния, отделяющего один рекламный щит от другого. Спрашивается, чему равно это расстояние?

Решение:
Пусть x - число щитов, промелькнувших в течение одной минуты. За час машина проедет мимо 60x щитов. Скорость машины, как известно из условия задачи, равна 10x миль/ч. Пройдя расстояние в 10x миль, машина проедет мимо 60x рекламных щитов, следовательно, на расстоянии 1 мили она проедет $\frac{60x}{10x}$ *или 6 щитов. Это означает, что расстояние между щитами равно* $\frac{1}{6}$ *мили, или 880 футам.*

Ответ: 1/6 мили (880 футов)

Критерии:
- *За час машина проедет мимо 60x щитов – 0,3 балла*
- *За милю проезжает 6 щитов – 0,7 балла*
- *Верный ответ с обоснованием – 1 балл*

9. Ежедневно в полдень из Египта в Турцию отправляется паром, в тот же самый момент паром той же компании отправляется из Турции в Египет. Путешествие занимает ровно 6 суток в один конец (для обоих направлений). Спрашивается, сколько же судов повстречается на пути парому, который отходит из Турции сегодня в полдень?

Решение: *Паром, отчаливший сегодня в полдень, встретит в дороге 11 судов, поскольку в море они встречаются в полдень и в полночь; да ещё два, один в момент отхода (прибывший из Египта), другой в момент захода (отходящий из Египта). Если взять за единицу путь от Турции до Египта, то паром, вышедший из Египта на 5 суток ранее, встретится с нашим паромом на расстоянии 0.5(1 – 5/6) = 1/12, и так далее (0/12, 1/12, …, 12/12).*
Итого 13.

Ответ: 13 судов.

Критерии:
- *Указано, что встретит 2 парома сразу на выходе и на входе – 0,3 балла*
- *Подчеркнуто, что в дороге встретятся 11 судов – 0,5 балла*
- *Верный ответ с обоснованием – 1 балл*

10. Какая из двух величин больше: $\sqrt[8]{8!}$ или $\sqrt[9]{9!}$?
Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$

Решение:
Допустим $\sqrt[8]{8!} > \sqrt[9]{9!}$. *Возведя обе части данного неравенства в 72-ю степень, получим* $(8!)^9 \geq (9!)^8$. *Разделив обе его части на* $(8!)^8$, *мы получим при этом* $8! \geq 9^8$, *что неверно (поскольку слева каждый множитель меньше каждого множителя справа). Таким образом,* $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$.

Ответ: $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$.

Критерии:
- *Получено* $(8!)^9 \geq (9!)^8$ *– 0,5 балла.*
- *Решение доведено до конца - 1 балл.*

11. – Не скажешь ли мне по секрету, в каком порядке пять красавиц заняли призовые места в вашем конкурсе красоты?
- Разумеется, я не могу преждевременно разглашать тайну, однако скажу, правильно ли ты угадал места.
- Предположим, что места распределились в порядке Vor-Fro-Maz-Gla-Gor? – спросил я.
- Хахаха, ты не только не угадал непосредственно места участниц, но и не угадал ни для одной из них соперницу, занявшую непосредственно предшествующее место.
- Хм. Тогда, наверное, результат оказался таков: Gla-Vor-Gor-Maz-Fro.
- Так-то гораздо лучше! Ты правильно указал места для двух участниц, а для двух из них даже верно назвал соперницу, оказавшуюся на предшествующем месте.
После некоторых раздумий я сообщил правильный порядок, и организатор взяла с меня слово не разглашать его. Как же распределились места среди пяти участниц конкурса?

Решение: *При порядке* Gla-Vor-Gor-Maz-Fro *две участницы, стоящие на верных местах, должны следовать непосредственно друг за другом. В противном случае, поскольку у двух участниц верно указаны непосредственные предшественницы (то есть девушки, занявшие непосредственно предшествующее место), были бы правильно указаны места не для двух, а для трех девушек.*
Это означает, что верна названа одна из пар Gla-Vor, Vor-Gor, Gor-Maz *или* Maz-Fro.

Пары Vor-Gor *и* Gor-Maz *следует отбросить, так как при таких комбинациях у двух участниц нельзя было бы верно назвать непосредственных предшественниц.*

Если бы верной парой оказалась Gla-Vor*, то порядок должен был бы совпасть либо с* Gla-Vor-Fro-Gor-Maz*, либо с* Gla -Vor-Maz-Fro-Gor*, и мы пришли бы к противоречию с комментарием, который дала издательница относительно первой догадки.*
Следовательно, верно угадана пара Maz-Fro*. Порядок* Vor-Gor-Gla-Maz-Fro *следует отбросить, опять-таки учитывая комментарий к первой догадке.*

Таким образом, остается единственное возможное распределение мест Gor- Gla -Vor-Maz -Fro*, удовлетворяющее всем условиям.*

Ответ: Gor-Gla-Vor-Maz-Fro

Критерии:

- *Показано, что верно указанные участницы идут друг за другом – 0.1 балла*
- *Отброшены пары Vor-Gor и Gor-Maz – 0.3 балла*
- *Доказано, что верно угадана пара Maz-Fro – 0.7 балла*
- *Верный ответ с обоснованием – 1 балл*

12. Строится новый корпус университета. Для перевозки потребовалось упаковать сферу диаметром в 30 м в кубический ящик со стороной 32 м. И чтобы сфера не двигалась во время перевозки, в углы ящика пришлось поместить 8 одинаковых маленьких сфер. Чему же равен диаметр такой маленькой сферы?

Решение: *Поскольку центр меньшей сферы радиуса* r *лежит на диагонали и отстоит от соответствующего угла ящика на* $16\sqrt{3}-15-r$ *метров, для решения задачи нам нужно лишь приравнять эту величину к* $r\sqrt{3}$ *и решить полученное уравнение относительно* r*. В результате мы найдем искомый диаметр*
$D = (16\sqrt{3}-15)(\sqrt{3}-1) = 63-31\sqrt{3} \simeq 9{,}3$ м.

Ответ: $63-31\sqrt{3} \simeq 9{,}3$ м.

Критерии:

- *Нарисовано корректное сечение плоскостью – 0,3 балла*
- *Получено уравнение – 0,7 балла.*
- *Решение доведено до конца – 1 балл.*

13. Найди целое девятизначное число вида $\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$, которое представляло бы собой произведение квадратов четырех различных простых чисел, причем
$$\overline{b_1b_2b_3} = 2\overline{(a_1a_2a_3)} \qquad (a_1 \neq 0).$$

Решение:
$$N = \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3} = \overline{a_1a_2a_3}\cdot 1000000 + \overline{b_1b_2b_3}\cdot 1000 + \overline{a_1a_2a_3} =$$
$$= \overline{a_1a_2a_3}(100000 + 2\cdot 1000 + 1) = \overline{a_1a_2a_3}\cdot 1002001 = \overline{a_1a_2a_3}\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2.$$

Следовательно, число $\overline{a_1a_2a_3}$ *равно квадрату простого числа P, отличного от 7, 11 и 13. Далее,* $a_1 \neq 0$, *а* $\overline{b_1b_2b_3} < 1000$, $\overline{(a_1a_2a_3)} < 500$, *поэтому* $10 < P < 23$.

Тогда P совпадает либо с 17, либо с 19; $\overline{a_1a_2a_3}=289$ *либо* $\overline{a_1a_2a_3}=361$; *N= 289578289, либо N=361722361. Оба эти случая дают решение задачи.*

Ответ: *289578289 и 361722361.*

Критерии:

- *Получено разложение* $\overline{a_1a_2a_3}\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2$ *– 0,3 балла.*
- *Получено 10 < P < 23 – 0,5 балла.*
- *Приведен только один ответ – 0,7 балла.*
- *Решение доведено до конца - 1 балл.*

14. В одном Университете имеется 13 факультетов (пока). Однажды было принято решение о реструктуризации капитала, мол, факультетов много, нужно провести независимую кампанию по глобальной борьбе с неэффективными вложениями и тому подобным…

Суть этой независимой кампании вот в чём: на начальный момент времени каждому факультету соответствует капитал (предполагается, что равных значений нет, т.е. капитал любых двух факультетов отличаются хотя бы на 1 рубль), у самого богатого факультета изымаются все деньги, какие есть, а всем остальным начисляется по миллиону рублей.

На следующий год процедура повторяется: у самого богатого факультета отнимаются все деньги, а всем остальным, включая экспроприированного в прошлый раз, начисляется по миллиону. Так повторяется несколько раз.

Предполагается, что в промежутке между процедурами капитал факультетов не меняется.

Известно, что изначально у факультетов в сумме было 31 миллион рублей.

Какое наибольшее количество денег при этих условиях могло оказаться у факультетов после очередного года? Достаточно найти ответ с точностью до 1000 рублей.

Указание: Если прошло более 13 лет, то каждый из факультетов уже экспроприировали, и поэтому распределение денег будет таким: у самого бедного (экспроприированого в этм году) 0 рублей, у второго (стал жертвой год назад) 1 миллион, у следующего 2 и т.д. – всего 0 + 1 + 2 + … + 12 = 78 миллионов. Возможно, имеется способ остаться с большей суммой на конец одного из предыдущих лет?

Решение: *Допустим, что прошло k лет, k < 13, тогда имеется k экпроприированных факультетов, у которых имеется* $0 + 1 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ *миллионов. Кроме того, есть (13-k) тех, до кого ещё руки не доходили. У них денег* $N + (13-k) * k$, *где N – количество денег, которое было у них изначально.*

Поскольку вначале эти факультеты были самыми бедными,

$$N \leq \frac{31(13-k)}{13}$$

Максимум достигается, если, во-первых, это неравенство является “почти равенством” (т.е. поначалу у всех факультетов было практически поровну денег), и во-вторых, при подходящем k.

Найти нужное k проще всего так: поначалу все должны были иметь поровну рублей, т.е. по 31/13 = 2,… Обозначим это число r (миллионов).

Тогда в k-й год факультеты получают суммарно 12 миллионов, а теряют r+(k-1). Поскольку 2<r<3, отсюда сразу видно, что в первые 10 лет их суммарный капитал прибывает, а на 11-й начинает убывать; максимум достигается после 10 лет кампании. В этот момент три факультета ещё не раскулачены; они имеют 30+3r миллионов, а остальные – $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$ *миллионов. Итого*

$$75 + 3r = 75 + \frac{93}{13} = 82 + \frac{2}{13} = 82.154.000$$

Т.е. 82 миллиона 154 тысячи (с ошибкой в пределах 1000). Это и есть ответ.

Ответ: *82 154 000 рублей*

Критерии:

- *Есть выражение для ещё не тронутых факультетов* $N + (13 - k) * k$ *– 0.1 балла*
- *Получено неравенство на N и* k *– 0.3 балла*
- *Показано, что в первые 10 лет суммарный капитал прибывает – 0.7 балла*
- *Досчитано до 82 миллионов – 0.9 балла*
- *Верный ответ с полным обоснованием – 1 балл*