

# Контрольная Σума

Ф.И.О. участника \_\_\_\_\_

Информация о себе \_\_\_\_\_

21 апреля 2013г.

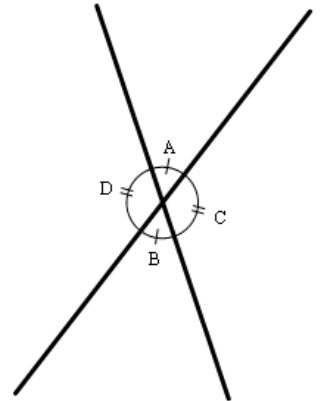
## Задания

- 1) Один из четырёх углов, образующихся при пересечении двух прямых, равен  $41^\circ$ . Чему равны три остальных угла? (5 баллов)

Решение: Пусть  $A = 41^\circ$ , тогда  $D = 180^\circ - 41^\circ = 139^\circ$ , т.к. углы  $A$  и  $D$  – смежные.

$A = B$ ,  $C = D$ , т.к. являются попарно вертикальными углами.

Ответ:  $41^\circ$ ,  $139^\circ$ ,  $139^\circ$ .



- 2) Найдите значение выражения  $\frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{-\frac{7}{5}}}$  при  $n=8$ . (5 баллов)

Решение:  $\frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{-\frac{7}{5}}} = n^{\frac{3}{5}} \cdot n^{\frac{7}{5}} = n^{\frac{10}{5}} = n^2$

Ответ: 64.

- 3) Найдите корень уравнения  $\log_3(x - 3) = 2$ . (5 баллов)

Решение:  $x > 3$

$$x - 3 = 3^2$$

$$x - 3 = 9$$

$$x = 12$$

Ответ:  $x = 12$ .

- 4) Преобразуйте в многочлен выражение  $2(b + 1)(b + 4) + (b - 6)(b^2 + 6b + 36)$ . (5 баллов)

Ответ:  $b^3 + 2b^2 + 10b - 208$ .

- 5) Найдите область определения функции  $f(x) = \frac{(4 + \log_{2013}(\pi^2 + 17))^{\sqrt{x}}}{2 - \sqrt[3]{x+9}}$ . (6 баллов)

Решение: Найдем множество, на котором задается функция  $f(x)$ .

$$x \geq 0$$

$$2 - \sqrt[3]{x+9} \neq 0$$

$$x + 9 \neq 8$$

$$x \neq -1$$

Ответ:  $D(f) = [0; +\infty)$ .

- 6) Решить уравнение  $2x^2 + 6x = |x + 3|$ . (6 баллов)

Решение:

Раскроем модуль и решим два уравнения:

$$2x^2 + 6x = x + 3 \text{ при } x + 3 \geq 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 + 6x = -x - 3 \text{ при } x + 3 < 0$$

$$1) 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Данные корни уравнения попадают в промежуток  $x \in [-3; +\infty)$ .

$$2) 2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Данные корни уравнения НЕ попадают в промежуток  $x \in (-\infty; -3)$ .

Ответ:  $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$ .

- 7) Отгадайте четырёхзначное число по описанию: Первая цифра - это удвоенная четвертая и на два больше, чем вторая. Третья цифра на 1 больше первой и на 5 больше четвертой. Что это за число? (6 баллов)

Решение:

Пусть число состоит из цифр  $a, b, c, d$ , тогда

$$\begin{cases} a = 2d \\ a = b + 2 \\ c = a + 1 \\ c = d + 5 \end{cases}, \text{отсюда} \begin{cases} a = 2d \\ a = b + 2 \\ 2d = b + 2 \\ d + 5 = 2d + 1 \end{cases}$$

Решая систему получаем:

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \\ c = 9 \\ d = 4 \end{cases}$$

Ответ: 8694

- 8) Решить неравенство  $\sqrt{x^2 + x + 7} \geq 7$ . (6 баллов)

Решение:

$$x^2 + x + 7 \geq 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 7 = -27$$

Следовательно  $x^2 + x + 7$  всегда строго больше 0.

$$x^2 + x + 7 \geq 49$$

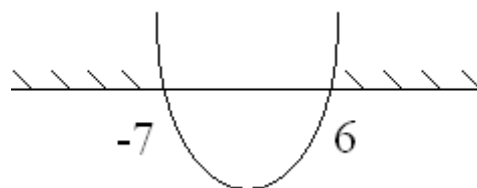
$$x^2 + x - 42 \geq 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 42 = 169.$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2}$$

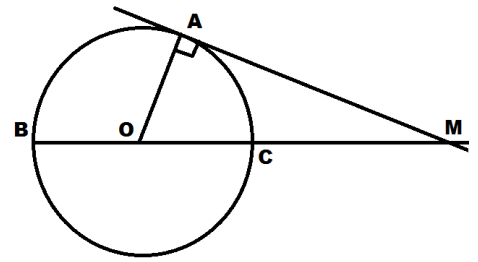
$$x_1 = -7$$

$$x_2 = 6$$



Ответ:  $x \in (-\infty; -7] \cup [6; +\infty)$ .

- 9) Радиус окружности равен  $r$ . Из точки  $M$  проведены касательная  $MA$  и секущая  $MB$ , проходящая через центр окружности (см. рисунок). Найти расстояние между точкой  $M$  и центром окружности, если  $MB = 2MA$ . (6 баллов)



Решение:

По теореме радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной, соответственно  $OA = OB = OC = r$ . Поэтому по теореме Пифагора  $MO^2 = r^2 + AM^2$ . С другой стороны

$$MO = MB - BO = MB - r = 2MA - r$$

Приравнявая эти два уравнения получаем:

$$4MA^2 - 4MA * r + r^2 = r^2 + MA^2$$

$$3 * MA = 4r$$

$$MA = \frac{4r}{3}$$

$$MO = 2 * \frac{4r}{3} - r = \frac{5}{3}r$$

Ответ:  $MO = \frac{5}{3}r$ .

- 10) Решить уравнение  $2 \cos^2 x = 3 \sin x$ . (6 баллов)

Решение:

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

Тогда перепишем уравнение:

$$2 - 2\sin^2 x = 3 \sin x$$

$$2\sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = t$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_1 = -2 \quad \text{— не подходит, т.к. } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

- 11) В резервуар, содержащий 100 кг водного раствора соли, в котором соль составляет 15%, по одной трубе со скоростью 20 кг/мин поступает раствор, содержащий 5% соли, а по другой трубе со скоростью 10 кг/мин поступает раствор, содержащий 15% соли. Через какое время в резервуаре окажется раствор, содержащий 10% соли? (7 баллов)

Решение: Всего из двух труб через время  $t$  будет  $100+30t$  кг раствора, в том числе  $15+2.5t$  соли. Тогда для получения 10% раствора необходимо чтобы:

$$15 + 2.5t = 0.1(100 + 30t)$$

$$0.5t = 5$$

$$t = 10$$

Ответ: через 10 минут.

12) о р ф

г п ш

л и ?

Какой буквы не хватает? (7 баллов)

Решение: Не хватает буквы **М**, т.к. каждая следующая буква в ряду получается добавлением одного элемента.

13) Продавец для взвешивания товара пользуется чашечными весами и четырьмя гирями общим весом 40 кг. Причем, используя различные комбинации гирь, можно взвесить любой груз, масса которого выражается целым числом килограммов (от 1 до 40 кг). Сколько весит каждая гиря? (10 баллов)

Решение:

Гиря в 1 кг должна быть обязательно, т.к. без нее не взвесить 39 кг. Чтобы взвесить 2 кг, нужна гиря в 2 кг или лучше в 3 кг, которая дает больше возможностей получить другие массы:  $2=3-1$ ,  $3=3$ ,  $4=3+1$ . Здесь и далее знак минус стоит перед массой той гири, которая на весах на той же чаше, что и взвешиваемый продукт.

Итак, первые гири: 1 кг и 3 кг. Следующая гиря тяжелее суммы масс этих на 5 кг, т.е. 9 кг, тогда  $5=9-(1+3)$ ,  $6=9-3$ ,  $7=9+1-3$ ,  $8=9-1$  и т.д. до 13 кг. Т.к. вместе гири весят 40 кг, то последняя 27 кг, тогда  $14=27-(9+3+1)$ ,  $15=27-(9+3)$  и т.д.

Ответ: 1,3,9,27

14) Вася и Петя продают гусей. Подходит покупатель и начинается диалог:

Покупатель: Сколько стоит гусь?

Вася: 600 рублей.

Покупатель: Слишком дорого!

Петя: А Вася увеличивает все числа, которые называет в 12 раз.

Покупатель: Значит, гусь стоит 50 рублей?

Вася: Что вам сказал Петя? Так вот, он уменьшает все числа в три раза.

Сколько стоит гусь, если известно, что каждый из продавцов или увеличивает, или уменьшает все числа в некоторое число раз? (10 баллов)

Решение: Пусть Вася увеличивает в  $x$  раз, а Петя уменьшает в  $y$  раз. Тогда по условию задачи получаем систему уравнений

$$\frac{x}{y} = 12$$

$$xy = 3$$

Отсюда получаем, что  $x = 6$ , а  $y = \frac{1}{2}$ , т.е. Петя на самом деле увеличивает в 2 раза.

Ответ: Гусь стоит 100 рублей.

15) Сравнить числа  $8^{32}$  и  $28^{23}$ . (10 баллов)

Решение:

$$8^{32} < 9^{32} < 3^{64} < 3^{69} = 27^{23} < 28^{23}$$