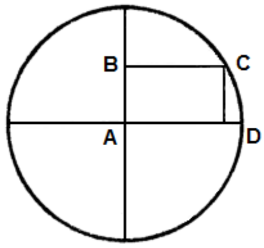
КОНТРОЛЬНАЯ СУММА

25 апреля 2015г.

Решения

1) На двух взаимно перпендикулярных диаметрах окружности, радиус которой равен 2 см, построен прямоугольник ABCD, причем AD = 1,5 см. Определить диагональ BD.



<u>Решение</u>: *Т.к. ABCD – прямоугольник, то его диагонали равны, т.е. AC=BD. При этом AC является радиусом окружности, т.к. соединяет центр окружности и точку, лежащую на самой окружности. Значит AC = 2, тогда и BD = 2.*

<u>Ответ</u>: *BD = 2.*

<u>Критерии</u>:
Дан ответ – <u>1 балл.</u>

2) Упростить выражение:

$$2 \cdot 2^{2014} + 3 \cdot 2^{2015}$$

<u>Решение</u>: $2^{2015}+3*2^{2015}=2^{2015}(1+3)=4*2^{2015}=2^2*2^{2015}=2^{2017}$

<u>Ответ</u>: 2^{2017}.

<u>Критерии</u>:
Доведено до 2^2*2^{2015} – <u>0.7 балла.</u>
Дан ответ - 2^{2017} – <u>1 балл.</u>

3) Сколько целых чисел находится между числами $-\pi$ и 3π?

<u>Решение</u>: $-\pi \cong - 3.14$, $3\pi \cong 9.42$
Тогда нас интересуют числа от -3 до 9. Таких чисел 13.

<u>Ответ</u>: *13 целых чисел.*

<u>Критерии</u>:
Получили интервал – <u>0.7 балла.</u>
Дан ответ – <u>1 балл.</u>

4) Коля решил научить своего младшего брата Сашу пользоваться контурными картами. Саша долго искал, но в конце концов нашел свой дом на карте. Коля измерил его и у него получилось, что периметр их дома на карте рамен 10 см. Спросив у папы, мальчики выяснили, что на самом деле их дом имеет форму прямоугольника 40 м на 60 м. Какой масштаб у карты?

Решение: *Периметр реального дома = 2*(40м + 60м) = 200м = 20 000 см.*
Тогда масштаб: 10 / 20 000 = 1 : 2000.

Ответ: *1:2000.*

Критерии:
Получен периметр – 0.7 балла.
Дан ответ – 1 балл.

5) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 5 \end{cases}$$

Решение: *Запишем сначала первое уравнение, потом второе, из которого вычтено первое, потом третье, из которого вычтено второе, и т.д.:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_5 & = & 1. \end{array} \right.$$

Теперь можно последовательно найти x_5, x_4, x_3, x_2, x_1.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$.

Критерии:
Сделано более 3 разностей уравнений – 0.3 балла
Получена верхнеугольная система – 0.7 балла
Найден ответ, но с арифметической (минимальной) ошибкой – 0.9 баллов
Дан ответ – 1 балл.

6) Мальчик Петя любит посещать метро ради эскалаторов. Эскалаторы - это его страсть. Мальчику Пете нужно 50 секунд, чтобы спуститься пешком по неподвижному эскалатору. А движущийся эскалатор поднимает его, стоящего на ступеньке, за 60 секунд. Сколько секунд нужно неугомонному мальчику Пете, чтобы спуститься пешком по поднимающемуся эскалатору?

Решение: *Пусть v_1 – скорость мальчика Пети, v_2 – скорость эскалатора, а S – длина лестничного проема неподвижного эскалатора. Тогда составим систему из трех уравнений:*

$$50v_1 = S$$

$$60v_2 = S$$

$$(v_1 - v_2)t = S$$

$$Тогда\ \left(\frac{S}{50}-\frac{S}{60}\right)t = S$$

$$Сокращаем\ на\ S\ и\ получаем\ \ \left(\frac{1}{50}-\frac{1}{60}\right)t = 1$$

$$\frac{10}{300}t = 1$$

$$t = 300$$

Ответ: *300 секунд нужно мальчику Пете, чтобы спуститься пешком по поднимающемуся эскалатору.*

Критерии:

Верно составлены уравнения – 0.3 балла.
Получено итоговое уравнение – 0.7 балла.
Найден ответ, но с арифметической (минимальной) ошибкой – 0.9 баллов
Дан ответ – 1 балл.

7) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 \le x \le \pi$; $0 \le y \le \pi$.

Решение: *Из первого уравнения получим* $x + y = \pi k$. *Из второго уравнения* $x - y = \pi k_1$.
Отсюда $x = ((k + k_1)\pi)/2$, $y = ((k - k_1)\pi)/2$. *Поскольку нам необходимо выбрать значения для x и y в пределах от 0 до π, то*

$$\begin{cases} 0 \le k + k_1 \le 2; \\ 0 \le k - k_1 \le 2. \end{cases}$$

Из этой системы неравенств находим возможные значения k и k_1. *k может иметь значения 0,1,2. При k=0,* k_1 *может иметь значение 0; при k=1,* k_1*=-1,0,1, при k=2,* k_1*=0.*

Тогда получим соответствующие пары (x, y): (0, 0), (0, π), (π/2, π/2), (π, 0), (π, π).

Ответ: *(0, 0), (0, π), (π/2, π/2), (π, 0), (π, π).*

Критерии:
Получены решения одного из уравнений из системы – 0.3 балла.
Получены решения обоих уравнений системы – 0.7 балла.
Найден ответ, но с арифметической (минимальной) ошибкой – 0.9 балла.
Дан ответ – 1 балл.

8) Купец продаёт двух коней с сёдлами, причем цена одного седла составляет 120 рублей, а другого – 25 рублей. Первый конь с хорошим седлом втрое дороже другого с дешёвым, а другой конь с хорошим седлом вдвое дешевле первого коня с дешёвым. Какова цена каждого коня?

Решение: *Обозначим цены на коней через x и y. По условию* $x + 120 = 3(y + 25)$, $x + 25 = 2(y + 120)$. *Решив эту систему, находим:* $x = 735$, $y = 260$.

Ответ: *735 и 260 рублей.*

Критерии:

Составлена система – <u>0.3 балла.</u>
Найден один из корней – <u>0.7 балла.</u>
Найдено оба корня, но с арифметической (минимальной) ошибкой – <u>0.9 балла.</u>
Дан ответ – <u>1 балл.</u>

9) Решить уравнение

$$\left||x+3|+x\right| = 1$$

<u>Решение</u>: *Для решения этого уравнения раскроем модули, начиная с внутреннего. Рассмотрим два случая: 1) $x \geq -3$ и 2) $x < -3$.*

1) В этом случае $|x + 3| = x + 3$, и исходное уравнение преобразуется к виду $|2x + 3| = 1$. Решая это уравнение, получаем корни -2 и -1.

2) При $x < -3$ раскрываем внутренний модуль: $|x + 3| = -x - 3$. Получаем уравнение $|-3| = 1$, которое решений не имеет.

<u>Ответ</u>: *{-2, -1}*.

<u>Критерии</u>:
Найдены интервалы – <u>0.3 балла.</u>
Решено одно из уравнений – <u>0.7 балла.</u>
Найдено оба решения, но с арифметической (минимальной) ошибкой – <u>0.9 балла.</u>
Дан ответ – <u>1 балл.</u>

10) На станции "Тихая глушь" 1 января 2015 года остановились на два часа пять поездов: Стрела, Миг, Ракета, Пуля и Тихоход. Машинисты поездов были старыми друзьями и, встретившись на перроне, стали друг друга расспрашивать о делах и вспоминать былое. Но подошло время, и поездам нужно было отправляться. Тогда машинист Стрелы спросил у остальных:
- Слушайте, вот мой поезд бывает на этой станции каждый второй день, Миг - каждый третий, Ракета - каждый четвертый, Пуля - каждый пятый, ну а Тихоход вообще каждый шестой. Через сколько дней же мы еще раз все вместе соберемся на этой станции?
- Да это легко, - сказал машинист Ракеты. - Лучше вот скажи, сколько будет таких дней, когда "Тихую глушь" никто из нас не посетит, до того, как мы в следующий раз встретимся?

Так через сколько дней в очередной раз на станции снова соберутся все 5 машинистов, и сколько дней будет пустовать «Тихая глушь» до их следующей встречи?

<u>Решение</u>: *На первый вопрос — через сколько дней на станции соберутся одновременно все 5 машинистов — мы легко ответим, если сумеем разыскать наименьшее из всех чисел, которое делится без остатка на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6. Нетрудно сообразить, что число это 60. Значит, на 61-й день снова соберутся 5 машинистов, т.е. 2 марта 2015 года.*

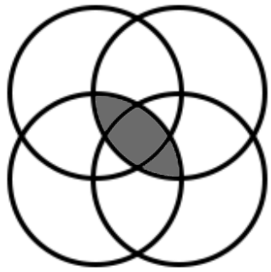
На второй вопрос задачи, чтобы разыскать такие дни, можно выписать по порядку все числа от 1 до 61 и зачеркивать в этом ряду дни прибытия на станцию поездов поочередно. Незачеркнутыми останутся дни, в которые ни один из поездов не посещал станцию. Таких дней будет 16.

<u>Ответ</u>: *1) через 60 дней. 2) 16 дней.*

Критерии:

Есть верные идеи для нахождения ответа на первый вопрос – 0.3 балла.
Дан ответ на первый вопрос – 0.7 балла.
Найдены ответы на оба вопроса, но с арифметической (минимальной) ошибкой – 0.9 балла.
Дан ответ – 1 балл.

11) Найти площадь закрашенной части, если известно, что радиусы окружностей равны 1, и точки пересечения противоположных окружностей являются центрами двух других противоположных окружностей.



Решение: *Рассмотрим квадрат, вершинами которого являются центры окружностей. Т.к. сторона квадрата равна радиусу окружности, то площадь квадрата равна 1.*
Найдем площадь закрашенной фигуры. Заметим, что данная фигура образуется с помощью сектора окружности.

Площадь сектора окружности равна ¼ площади круга, т.е. $\frac{\pi}{4}$.
Тогда площадь закрашенной части равна S’ = 1 - $\frac{\pi}{4}$.
Тогда для нахождения искомой площади достаточно вычесть из площади квадрата две площади S’, т.е. искомая площадь S = $\frac{\pi}{2} - 1$.
Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.

Критерии:

Есть верные идеи об использовании квадрата – 0.3 балла.
Найдена площадь закрашенной фигуры – 0.7 балла.
Найдена искомая площадь, но с арифметической (минимальной) ошибкой – 0.9 балла.
Дан ответ – 1 балл.

12) Двое заспорили о содержимом бочки. Один спорщик говорил, что воды в бочке более, чем наполовину, а другой утверждал, что меньше. Как убедиться, кто прав, не употребляя ни палки, ни веревки, ни вообще какого-либо приспособления для измерения?

Решение: *Если бы вода в бочке была налита ровно до половины, то, наклонив бочку так, чтобы уровень воды пришелся как раз у края бочки, мы увидели бы, что высшая точка дна находится также на уровне воды. Это ясно из того, что плоскость, проведенная через диаметрально противоположные точки верхней и нижней окружностей бочки, делит ее на две равные части. Если вода налита менее чем до половины, то при таком же наклонении бочки должен выступить из воды больший или меньший сегмент дна. Наконец, если воды в бочке более половины, то при наклонении верхняя часть дна окажется под водой.*

Критерии:
Есть идея про наклон бочки – 0.7 балла.
Есть доказательство – 1 балл.

13) На нефтяной станции осталось 7 полных цистерн с бензином, 7 наполовину наполненных и 7 пустых. Все это было заказано тремя станциями, которым, потом, понадобилось поделить тару и бензин поровну. Как поделить бензин без переливаний?
Если знаете несколько способов – предложите все.

Решение: *Задача решается довольно легко, если понять, что в 21 купленной цистерне было бензина 7 + 3.5, то есть 10.5 полных цистерн.*
Значит, каждая станция получит 3,5 цистерны бензина в различных тарах.

Выполнить дележ можно двумя способами.
По одному способу станции получают:
1-й: 3 полных и одну полупустую и 3 пустых
2-й: 2 полных 3 полуполных 2 пустых
3-й: 2 полных 3 полуполных 2 пустых

По другому способу станции получают:
1-й 3 полных 1 полуполную 3 пустых
2-й 3 полных 1 полуполную 3 пустых
3-й 1 полную 5 полуполных 1 пустую

Ответ:
По одному способу станции получают:
1-й: 3 полных и одну полупустую и 3 пустых
2-й: 2 полных 3 полуполных 2 пустых
3-й: 2 полных 3 полуполных 2 пустых

По другому способу станции получают:
1-й 3 полных 1 полуполную 3 пустых
2-й 3 полных 1 полуполную 3 пустых
3-й 1 полную 5 полуполных 1 пустую

Критерии:
Определено сколько должно быть бензина для каждой станции – 0.3 балла.
Есть один вариант – 0.7 балла.
Найдено оба варианта, но с арифметической (минимальной) ошибкой – 0.9 балла.
Есть оба варианта – 1 балл.

14) Найдите четырехзначное число, представляющее точный квадрат, зная, что две первые его цифры между собой равны, и две последние между собой равны.

Решение:
Представим число в виде xxyy.
Распишем:
xx*100+yy=x*11*100+y*11=11(x*100+y).
Т.е. искомое число делится на 11. Но, так как оно квадрат какого-то числа, то и второй множитель должен делится на 11. Т.е. 100x+y кратно 11.
Представим число множитель как «ab», тогда:
11+ab=100x+y
a*100 + 10* (a+b)+b=100x+y
Так как все переменные меньше 10, то:

1. y=b;
2. a+b=10;
3. из предыдущего, a=x-1.

Отсюда:
x-1+y=10
x+y=11; y=11-x
Теперь воспользуется тем, что ab – это квадрат какого-то числа:

$ab=(x-1)*10 + y=10x+y-10=c^2$
$10x+y-10=c^2$
$10x+(11-x)-10=c^2$
$9x+1=c^2$
$9x=(c-1)(c+1)$
Так как $0<x<10$ и $0<c<10$, то $c-1 \not\equiv 9$
$c+1=9 \Rightarrow c=8 \Rightarrow x=7 \Rightarrow y=4$
Ответ: 7744.

Критерии:
Найдено, что число делится на 11 – 0.3 балла.
Получено уравнение (в различных вариациях) y=11-x – 0.7 балла.
Найдено число перебором – 0.9 балла
Найдено полное математическое решение – 1 балл.

15) Игорь и Олег только что познакомились с Иваном. Они хотят знать, когда состоится следующая «Контрольная сумма». Иван предложил им десять возможных дат: 5 февраля, 6 февраля, 9 февраля, 7 марта, 8 марта, 4 апреля, 6 апреля, 4 мая, 5 мая и 7 мая. Затем Иван сказал Игорю месяц даты проведения, а Олегу — день. После этого состоялся диалог.
Игорь: Я не знаю, когда состоится следующая «Контрольная сумма», но я знаю, что Олег тоже не знает.
Олег: Поначалу я не знал, когда состоится мероприятие, но знаю теперь.
Игорь: Теперь я тоже знаю эту дату.

Когда состоится следующая «Контрольная Сумма»?

Решение: *Дат всего 10, а дни находятся в промежутке от 4 до 9. При этом только 8 и 9 числа встречаются по одному разу. Если дата проведения 8-го или 9-го, то Олег сразу бы мог сказать и месяц.*

Но откуда Игорь знает, что Олег не знает ответа? Если Иван сказал Игорю, что мероприятие состоится в феврале или марте, значит, датой может быть 9 февраля или 8 марта. При таком раскладе Олег может знать, когда состоится мероприятие. Факт, что Игорь точно знает о том, что Олег не знает ответа, говорит о том, что февраль и март можно исключить, а «Контрольная сумма» состоится либо в апреле, либо в мае.

Изначально Олег не знал, когда состоится мероприятие. Каким образом он узнал ответ после реплики Игоря? Из оставшихся пяти дат в апреле и мае, варьирующихся от 5 до 7, только 4 встречаются дважды. Если Иван сказал бы Олегу, что дата проведения 4-го, значит Олег после предположения Игоря всё ещё не мог бы дать точного ответа. Тот факт, что он сразу всё понял, говорит о том, что «Контрольная сумма» состоится не 4-го. Остаются три возможные даты: 6 апреля, 5 мая и 7 мая.

После того, как Олег заговорил, Игорь узнал дату проведения мероприятия. Так как Игорь знает месяц, то рассмотрим два варианта:

1) *месяц май: тогда бы, раз Олег догадался о дате, то это не 4 мая. Т.е. остается 5 и 7 мая. И тогда бы Игорь не смог бы догадаться. Значит месяц - апрель.*
2) *месяц апрель. Олег догадался о дате, но это не 4 апреля. Отсюда получаем 6 апреля.*

Ответ: *6 апреля состоится следующая «Контрольная сумма».*

Критерии:
Исключены 9 февраля и 8 марта – 0.3 балла.
Исключены февраль и март – 0.7 балла.
Остаются три возможные даты: 6 апреля, 5 мая и 7 мая – 0.9 балла
Получен ответ – 1 балл.