КОНТРОЛЬНАЯ СУММА

15 апреля 2017г.

Решения

1. В Академгородке $\frac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\frac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какова доля семейных жителей в совокупности от общего числа?

Решение: *Пусть число супружеских пар в районе равно N, то есть замужем N женщин, женаты N мужчин. Замужние женщины составляют* $\frac{3}{5}$ *всех женщин района, значит, в районе* $\frac{5}{3}N$ *женщин. Женатые мужчины составляют* $\frac{2}{3}$ *всех мужчин района, значит, в Академгородке* $\frac{3}{2}N$ *мужчин. Всего получается* $\frac{5}{3}N + \frac{3}{2}N = \frac{19}{6}N$ *жителей, а в браке состоит 2N жителей. Искомая доля равна* $\frac{2N}{\frac{19}{6}N} = \frac{12}{19}$.

Ответ: $\frac{12}{19}$ *от общего числа.*

Критерии:
- *Ошибка в середине решения, повлиявшая на ответ – 0.5 балла*
- *Решение доведено до конца – 1 балл.*

2. Игорь переставляет цифры в числе 2017, после чего ставит знак умножения между любыми двумя цифрами и вычисляет значение получившегося выражения. Например: 170*2=340. Какое наибольшее число у него может получиться в итоге? Ответ аргументируйте.

Решение: *Заметим сразу два факта, обоснование которых очевидно. Во-первых, при максимальном произведении в каждом из сомножителей цифры следуют в порядке убывания (т.е. ставим по возможности наибольшую цифру в самый старший разряд, вторую по величине в разряд поменьше и так далее). Посему 0 обязан стоять в конце множителя. Во-вторых, нет никакой разницы, в конце какого из сомножителей поставить 0, произведение от этого не меняется (например, 250*3 = 25*30 = 750). Поэтому можно переставить его так, чтобы оба сомножителя стали двузначными. После чего остается перебрать три варианта:*

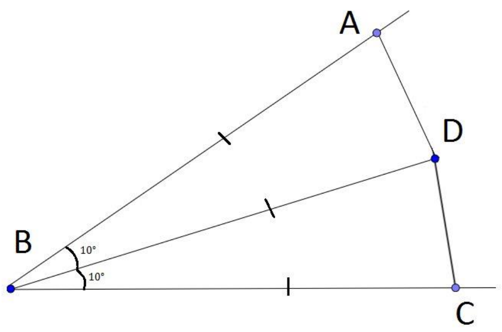
1) 70*21 = 1470; ***2)*** *72*10 = 720;* ***3)*** *71*20 = 1420;*

Ответ: *1470.*

Критерии:
- *Правильный ответ с примером. Не объяснено, почему он правильный – 0.3 балла*
- *Указано, что рассматривать можно лишь половину допустимых случаев (скажем, произведение трехзначного и однозначного числа) – 0.5 балла*
- *Правильный ответ с разбором всех случаев – 1 балл.*

3. Пусть дан угол ABC, равный 20°. На его сторонах и на биссектрисе отложили равные по величине отрезки AB, BC и BD. Определите величину угла ADC.

Решение: $\angle ABD = \angle DBC = 10°$. Поскольку AB = BC = BD по условию, то образованные треугольники ABD и DBC являются равнобедренными, и более того, равными между собой по признаку равенства треугольников (две стороны и угол между ними). Тогда имеем $\angle BAD = \angle BDA = \angle BDC = \angle BCD$ в силу равенства углов при основании равнобедренного треугольника, и величина этих углов составляет $\frac{180-10}{2} = 85$ градусов. В итоге получаем, что $\angle ADC = 85*2 = 170°$.



Ответ: 170°.

Критерии:

- *Доказательство наличия двух равнобедренных треугольников – 0.3 балла*
- *Равенство всех 4-х углов у оснований этих треугольников – 0.5 балла*
- *Ошибка на шаге вычисления этих углов – 0.7 балла*
- *Ошибка вычисления требуемого угла при верно вычисленных углов у оснований равнобедренных треугольников – 0.9 балла*
- *Приведен верный ответ с решением – 1 балл.*

4. Решите следующую систему уравненнй:

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ y + z + u + v = 2 \\ z + u + v + x = 0 \\ u + v + x + y = 1 \\ v + x + y + z = 7 \end{cases}$$

Решение: *Сложив все пять уравнений и разделив результат на 4, получим:*

$$x + y + z + u + v = 2.5.$$

Теперь остается вычесть из получившегося соотношения каждое уравнение системы по очереди, чтобы получить шаг за шагом значения всех неизвестных:

Ответ: $v = 2.5, x = 0.5, y = 2.5, z = 1.5, u = -4.5$.

Критерии:

- *Приведен неверный ответ – 0 баллов*
- *Указано решение, но содержится ошибка в подсчете одного-двух значений – 0.7 балла*
- *Приведен верный ответ с решением – 1 балл.*

5. Известно, что два числа x и y удовлетворяют соотношениям $x + y = x * y = 17$. Найти значение выражения:

$$(x^2 - 17x)\left(y + \frac{17}{y}\right)$$

Решение: *По условиям* $x - 17 = -y, \frac{17}{y} = x$. *Тогда искомое выражение будет равно:*

$$x(x - 17) * (y + x) = -xy * 17 = -289$$

Ответ: -289.

Критерии:

- Присутствует решение, но с серьезной ошибкой, влияющей на его ход – *0.3 балла*
- *Одна арифметическая ошибка при правильном в целом решении – 0.7 балла*
- *Решение доведено до конца с правильным ответом – 1 балл.*

6. Вася пишет на доске выражение: ((((0…)…)…)….), где количество скобок выбирает по своему желанию. Потом после каждого многоточия он вписывает знак сложения, вычитания, умножения или деления и натуральное число от 1 до 9, причем каждое число – не более одного раза. Затем вычисляет значение получившегося выражения. Приведем пару примеров: $\left(\left((0 + 2) * 3\right) - 1\right) = 5$; $\left(\left(((0 + 5) * 9) * 3\right) + 7\right) = 142$. Вася хочет написать выражение с результатом 2017. Помогите ему это сделать.

Решение: *Один из возможных ответов выглядит так:*

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left((0 + 3) + 4\right) * 6\right) - 1\right) + 9\right) * 8\right) + 2\right) * 5\right) + 7\right) = 2017$$

Критерии:

- *Приведенный вариант содержит небольшую ошибку – 0.7 балла*
- *Верное выражение без ошибок – 1 балл.*

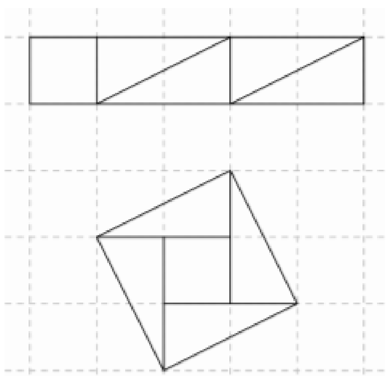
7. Профессор использует для передвижения до университета весьма старомодный велосипед, у которого окружность переднего колеса в два раза больше окружности заднего. При этом известно, что уменьшив длину окружности переднего колеса на 1 метр, а заднего на этот же метр увеличив, получим, что на протяжении 60 метров переднее колесо сделает на 30 оборотов больше заднего. Необходимо определить длину окружности каждого колеса.

Решение: *Пусть длина окружности заднего колеса будет x м. Тогда окружность переднего – 2x м. После увеличения длины окружности заднего колеса на 1 м и уменьшения длины окружности переднего на 1 м, заднее сделает* $\frac{60}{x+1}$ *оборотов на пути в 60 м, а переднее* $\frac{60}{2x-1}$. *Так как переднее при этом сделает на 30 оборотов больше заднего, то получим уравнение* $\frac{2}{2x-1} = \frac{2}{x+1} + 1$, *которое приводится после упрощений к такому* $2x^2 + 3x - 5 = 0$. *Из двух его корней* $x_1 = 1$ *и* $x_2 = -\frac{5}{2}$ *только первый удовлетворяет задаче, поскольку дистанции отрицательными быть не могут. Итак, длина окружности заднего колеса равна 1 м, а переднего 2 м.*

Ответ: *1м и 2м.*

Критерии:
- *Получено уравнение – 0.5 балла*
- *Верно решено уравнение, приведено два корня уравнения – 0.8 балла*
- *Верный ответ с обоснованием – 1 балл.*

8. Дан прямоугольник, у которого одна сторона ровно в 5 раз длиннее другой. Продемонстрируйте, каким образом можно разрезать этот прямоугольник на 5 частей, чтобы из них можно было собрать квадрат. Частички допустимо поворачивать и переворачивать, но нельзя загибать, накладывать друг на друга и так далее (то есть площадь квадрата должна остаться такой же, как и у исходного прямоугольника).



Ответ: *На рисунке справа.*

Критерии:
- *Верная идея разрезания, но размеры частей неправильные – 0.3 балла*
- *Отсутствует верная схема сборки квадрата при наличии правильных фрагментов – 0.5 балла*
- *Верный ответ – 1 балл.*

9. Третьекурсники купили на празднование медианы 4 арбуза, любые два из которых имеют разный вес. Возможно ли за 4 взвешивания на чашечных весах без каких-либо гирь найти два самых тяжелых арбуза из имеющихся, и если да, то как?

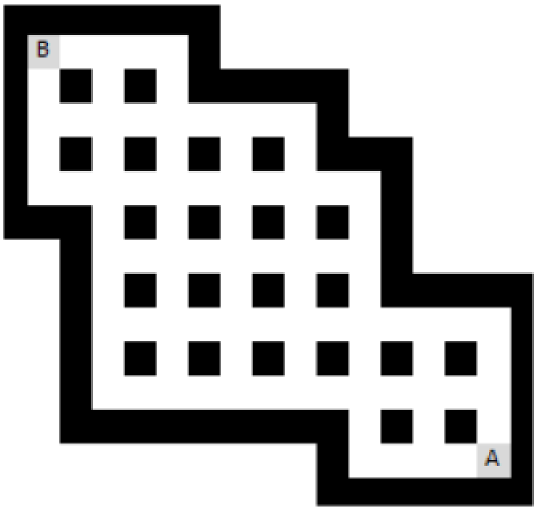
Решение: *Вначале покажем, как за 2 взвешивания найти самый лёгкий арбуз из 3-х. Пусть веса 3-х арбузов равны a, b, c. Взвесим арбузы a и b. Если $a > b$, то взвесим затем b и c. Если $b > c$, то c – самый лёгкий, если же $b < c$, то b – самый лёгкий. Если на первом взвешивании было $a < b$, то взвешиваем затем a и c и рассуждаем аналогично.*

Пусть теперь имеются 4 арбуза. Вначале выберем 3 из них, и за два взвешивания найдём самый лёгкий из этих 3-х. Затем выкинем его, и ещё за два взвешивания найдём самый лёгкий из оставшихся 3-х. Выкинем его тоже. Оставшиеся 2 арбуза будут самыми тяжёлыми

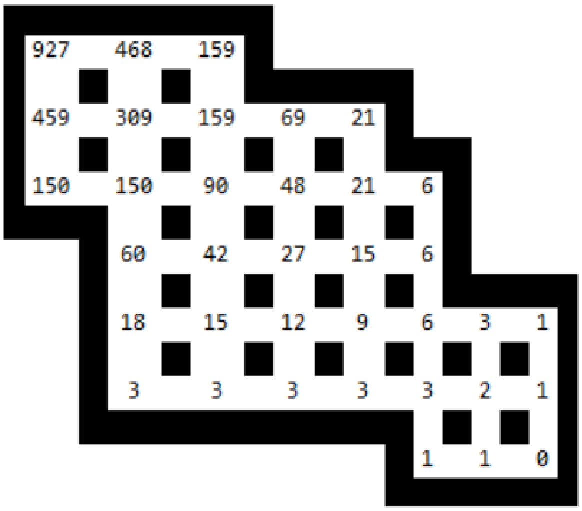
Критерии:

- *Отображено нахождение самого легкого/тяжелого арбуза из трех в 2 взвешивания – 0.3 балла*
- *Показано, как из всех четырех найти один из двух самых тяжёлых арбузов, или как исключить один из двух не самых тяжёлых – 0.5 балла*
- *Приведен полный правильный алгоритм взвешиваний – 1 балл.*

10. Сотрудник НИИ Комбинаторики хочет добраться из одного конца института (А) и другой (В). Укажите, сколько различных маршрутов он может выбрать при условии, что двигаться можно лишь на север и запад, то бишь вверх и влево.



Решение: Ход решения отображен на рисунках. Мы стартуем с позиции А и двигаемся в ближайшие перекрёстные клетки сверху и слева (синие); присваиваем им значения “1”, поскольку до них из точки А можно дойти единственным маршрутом. Далее движемся уже от синих клеток до ближайших перекрёстков (обозначены красным цветом), и <u>присваиваем им сумму от значений соседей снизу и справа</u> (черные клетки соответствуют нулю, поскольку через них никакого пути быть не может). Далее от красных к оранжевым, от оранжевых к пурпурным и так далее до самого конца. В итоге получим 927 вариантов.



Ответ: 927.

Критерии:

- *Отображен алгоритм подсчета количества путей через перекрестки – 0.3 балла*
- *Правильный ход решения при мелких недочётах в арифметике – 0.7 балла*
- *Решение доведено до конца с верным ответом – 1 балл.*

11. Планета Цефей имеет форму шара, и на её орбите расположены 637 астероидов. Будем считать их точечными. Нужно доказать, что на поверхности Цефея всегда можно подобрать точку, глядя из которой наблюдатель не сможет запечатлить более 317 астероидов.
Положим, что расположенный на линии горизонта астероид не виден.

Решение: Проведём через центр планеты и произвольную пару астероидов плоскость П, будем считать её экваториальной. Проведём ось планеты, перпендикулярную плоскости П. Она пересекает поверхность планеты в "полюсах" A и B. Тогда легко видеть, что наблюдатели в точках A и B видят вместе лишь $637 - 2 = 635$ астероидов, а потому один из них видит менее 318 астероидов.

Критерии:
- *Есть идея об экваториальной плоскости (или аналогичный по конструктивности шаг) – 0.3 балла*
- *Вкупе с прошлым шагом используются полюса (или аналогичный ход, почти решающий задачу) – 0.7 балла*
- *Полное верное обоснование – 1 балл.*

12. Пусть d_n обозначает число в записи единиц суммы $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ для положительного целого числа n. Т.е. для $\mathrm{n} = 9$ имеем $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$, и $d_9 = 5$, а для $\mathrm{n} = 17$ сумма равна $1 + 2 + 3 + \cdots + 17 = 153$, тогда $d_{17} = 3$. Найдите остаток от деления на 1000 у

$$\sum_{n=1}^{2017} d_n$$

Решение: *Для того, чтобы уловить закономерность в поведении этой величины, стоит её посчитать вручную для первых значений n. Тогда заметим, что* $\sum_{n=1}^{20} d_n = 70$, $\sum_{n=1}^{17} d_n = 69$, *и что* $d(n + 20) = d(n)$, *поскольку* $d_{20} = 0$. *Отсюда получим*

$$\sum_{n=1}^{2017} d_n = 100 * 70 + 69 = 7069$$

И остатком от деления на 1000 будет 69.

Ответ: 69

Критерии:
- *Проведён перебор значений* d_n *для* $n \leq 20$ *– 0.1 балла*
- *Показано, что* $d(n + 20) = d(n)$ *– 0.3 балла*
- *Верный ход решений с недочетами – 0.7 балла*
- *Верный ответ с полным обоснованием – 1 балл.*

13. Докажите, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$$

Решение: Пусть $\log_2 \pi = a$, $\log_5 \pi = b$. Тогда $2^a = \pi$, $5^b = \pi$, что равносильно $\pi^{1/a} = 2$, $\pi^{1/b} = 5$. Поэтому $\pi^{1/a + 1/b} = 2 * 5 = 10$. В силу того, что $\pi^2 < 10$, получаем требуемое.
Можно обойтись и без замен переменных, проведя другие выкладки:

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \frac{1}{\frac{\ln \pi}{\ln 2}} + \frac{1}{\frac{\ln \pi}{\ln 5}} = \frac{\ln 2}{\ln \pi} + \frac{\ln 5}{\ln \pi} = \frac{\ln 10}{\ln \pi} = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} \pi} = \frac{1}{\log_{10} \pi}$$

И опять же, раз $\pi < \sqrt{10}$, то логарифм в знаменателе меньше $\frac{1}{2}$, что доказывает искомую оценку.

Критерии:
- *Нет верного решения, но упомянута оценка $\pi^2 < 10$ или $\pi < \sqrt{10}$ – 0.3 балла*
- *Сумма дробей преобразована к единому члену – 0.5 балла*
- *Недостает логического перехода при в целом верном док-ве – 0.7 балла*
- *Верное обоснованное решение – 1 балл.*

14. Участники научной конференции сходили на ужин в ресторан Дома ученых. По итогу они должны заплатить в сумме S руб., но k участников оставили деньги в гостинице, и поэтому каждый из остальных внёс ещё T руб.
Сколько было участников?

Решение:
Обозначим число экскурсантов за x. Каждый из них должен был заплатить $\frac{S}{x}$ руб. Но из-за отсутствия у k экскурсантов денег остальные x-k уплатили каждый по $\left(\frac{S}{x} + T\right)$ руб., а все вместе, принявшие участие в платеже, $\left(\frac{S}{x} + T\right)(x - k)$. Последняя сумма составляет полный расход, т.е. S руб., и поэтому получаем уравнение $\left(\frac{S}{x} + T\right)(x - k)$=S, решив которое, найдем $x = \frac{Tk \pm \sqrt{T^2k^2 + 4TSk}}{2T}$. Знак минус нужно отбросить, так как в этом случае решение отрицательное ($Tk < \sqrt{T^2k^2 + 4TSk}$), что лишено смысла в контексте задачи – речь о количестве человек на ужине.

Ответ: $\frac{Tk + \sqrt{T^2k^2 + 4TSk}}{2T}$.

Критерии:
- *Получено уравнение на x – 0.5 балла*
- *Верно решено уравнение, приведено два корня уравнения – 0.8 балла*
- *Решение обоснованно доведено до конца – 1 балл.*