求解线性方程组(2)：最小范数解

对于$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b}\in\mathbb{R}^{m}$.
如果 $m\leq n, \operatorname{rank}(\mathbf{A})=m$, 则最小范数解 $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^{\top}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\top})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}$

解释：如果方程数量不超过未知数个数时，该方程组存在无穷多个解。举一个最简单的例子，$x+2y=-1$ 存在无数解 $\mathbf{x}=(x,y)^{\top}$， 几何上即这条直线上的所有点的集合，但是直线上只存在一个最接近原点的点，即有唯一最小范数解$\hat{\mathbf{x}}$（范数$\|x\|$表示一个向量的模）。证明见《最优化导论》P161。
$\hat{\mathbf{x}}$是如下优化问题的解：

$$\begin{gathered}\min\|\mathbf{x}\|\\ \text{subject to}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\end{gathered}$$

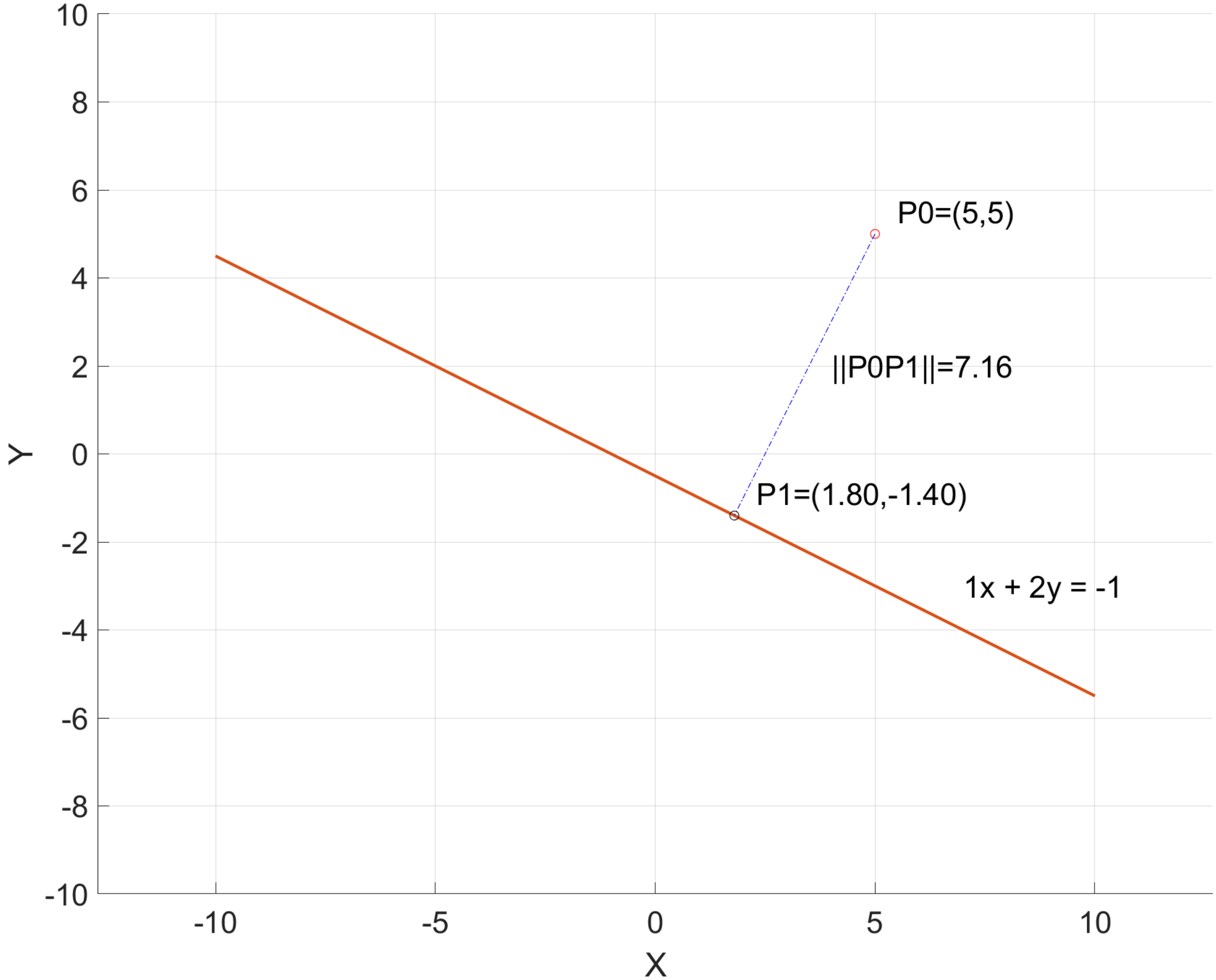
例1 求平面内点到直线的最短距离和垂点

已知有一条直线 $ax+by=c$ 和直线外一点 $P_0=(x_0,y_0)$。P_0到直线上任意一点的距离为$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$。如果从$P_0$到直线做垂线，垂足为$P_1=(x_1,y_1)$，满足方程 $ax_1+by_1=c$ 。点到直线最短距离为$\min\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$，其中$\Delta x=x_1-x_0$，$\Delta y=y_1-y_0$，约束方程为$a\Delta x+b\Delta y=-(ax_0+by_0)+c$。约束方程表示为矩阵形式，即

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+c=\mathbf{b}$$

最小范数解 $\hat{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{\top}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\top})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}=\mathbf{A}^{\top}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\top})^{-\mathbf{1}}\left(-\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\mathbf{c}\right)$

垂点P_1可表示为 $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{\top}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\top})^{-\mathbf{1}}\left(-\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\mathbf{c}\right)+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$



以下为matlab脚本实现：

```
% 利用最小范数法求解点到直线的最短距离和垂点
clear all
clc
set(groot, 'DefaultAxesFontSize', 20);

% 创建坐标轴
figure;
grid on;
axis([-10 10 -10 10]);
axis equal;
xlabel('X');
ylabel('Y');

% 原始点
P0 = [5;5];
% 平面方程 ax + by = c
a = 1; b = 2; c = -1;

hold on;
% 绘制P0
plot(P0(1), P0(2), 'ro');

% 定义直线
x = -10:0.1:10;
y = (c - a*x)/b;
% 绘制直线
plot(x, y);

% 计算垂点P1
A = [a, b];
% x_hat = P1 - P0
x_hat =  A'*inv(A*A')*(-A*P0+c);
P1 = A'*inv(A*A')*(-A*P0+c)+P0;

% 绘制垂点
plot(P1(1), P1(2), 'ko');
% 绘制垂线
plot([P0(1), P1(1)], [P0(2), P1(2)], 'b-.');

% 绘制标签
P0_label = sprintf('P0=(%d,%d)', P0(1), P0(2));
text(P0(1)+0.5, P0(2)+0.5, P0_label, 'FontSize', 20, 'Color', 'black');
P1_label = sprintf('P1=(%.2f,%.2f)', P1(1), P1(2));
```

```
text(P1(1)+0.5, P1(2)+0.5, P1_label, 'FontSize', 20, 'Color', 'black');
line_label = sprintf('%dx + %dy = %d', a, b, c);
text(7, -3, line_label, 'FontSize', 20, 'Color', 'black');
d_label = sprintf('||P0P1||=%.2f', norm(x_hat));
text(4, 2, d_label, 'FontSize', 20, 'Color', 'black');

hold off;
```

例2 求空间中点到平面的最短距离和垂点

已知三维空间中有一个平面 $ax+by+cz=d$ 和平面外一点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$。从P_0到平面上任意一点的距离为 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$。如果从$P_0$到平面做垂线，垂足为$P_1=(x_1,y_1,z_1)$，满足方程 $ax_1+by_1+cz_1=d$ 。点到平面最短距离为

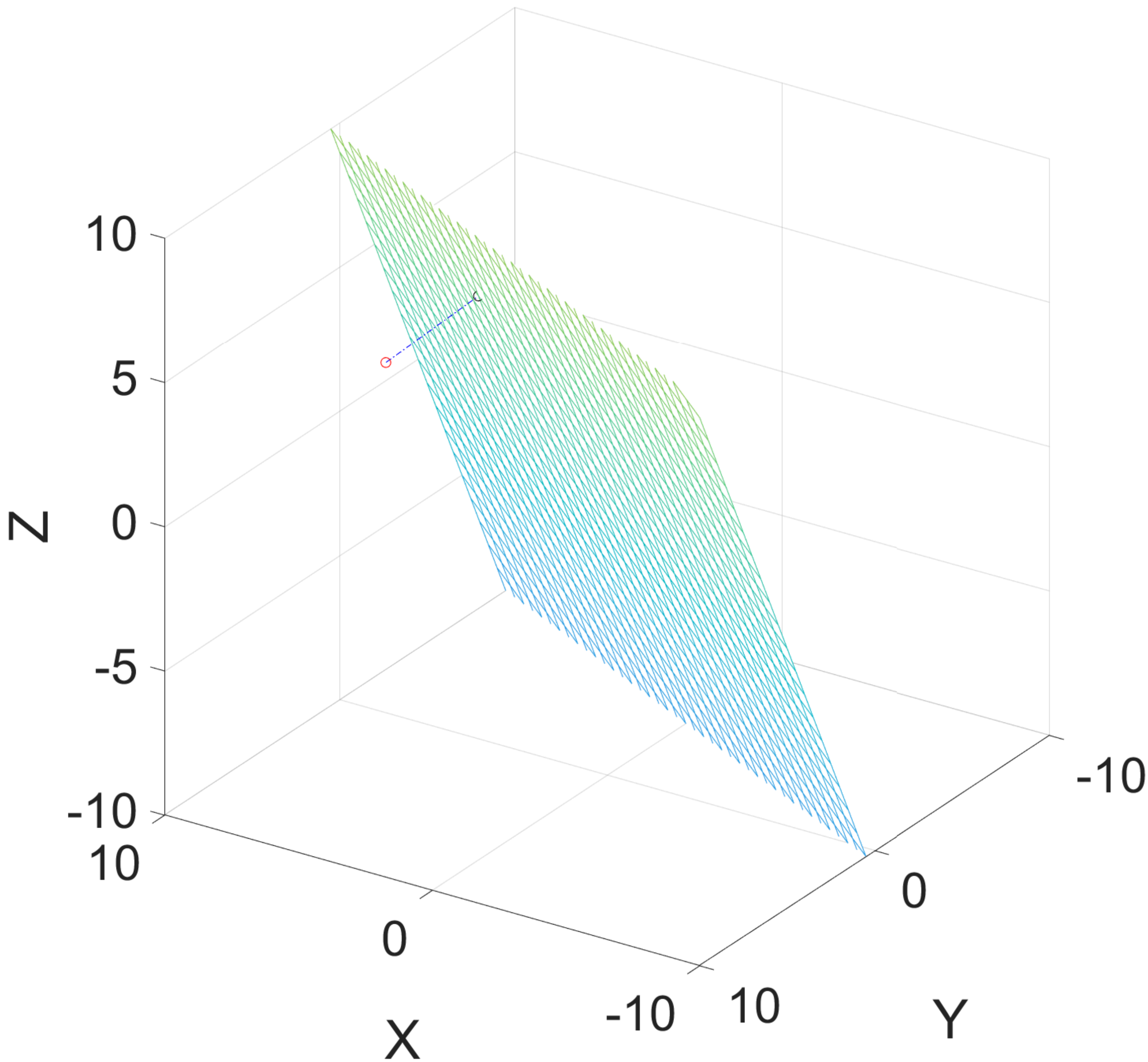
$$\min\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right)$$

, 其中$\Delta x=x_1-x_0$，$\Delta y=y_1-y_0$，$\Delta z=z_1-z_0$ 。约束方程为$a\Delta x+b\Delta y+c\Delta z=-(ax_0+by_0+cz_0)+d$。约束方程表示为矩阵形式，即

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}+d=\mathbf{b}$$

最小范数解 $\hat{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=\mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}\left(-\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}+d\right)$

垂点P_1可表示为 $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=\mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}\left(-\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}+d\right)+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$



以下为matlab脚本实现：

```
clear
clc
set(groot, 'DefaultAxesFontSize', 30);

% 创建坐标轴
figure;
grid on;
axis([-10 10 -10 10 -10 10]);
axis equal;
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');

% 原始点
P0 = [5;5;5];
% 平面方程 ax + by + cz = d
a = 1; b = 2; c = -1; d = 1;

hold on;

% 绘制P0
plot3(P0(1), P0(2), P0(3), 'ro');

% 生成网格点
[u, v] = meshgrid(-10:0.5:10);

%绘制平面
z = (d - a.*u - b.*v)/c;
mesh(u, v, z);



% 计算P0到平面的垂点P1
A = [a, b, c];
P1 = A'*inv(A*A')*(-A*P0+d)+P0;

% 绘制垂点
plot3(P1(1), P1(2), P1(3), 'ko');

% 绘制垂线
plot3([P0(1), P1(1)], [P0(2), P1(2)], [P0(3), P1(3)], 'b-.');
hold off;
view(120,30);
```

例3 求空间中点到两平面交线的最短距离和垂点

已知三维空间中两个平面的交线

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

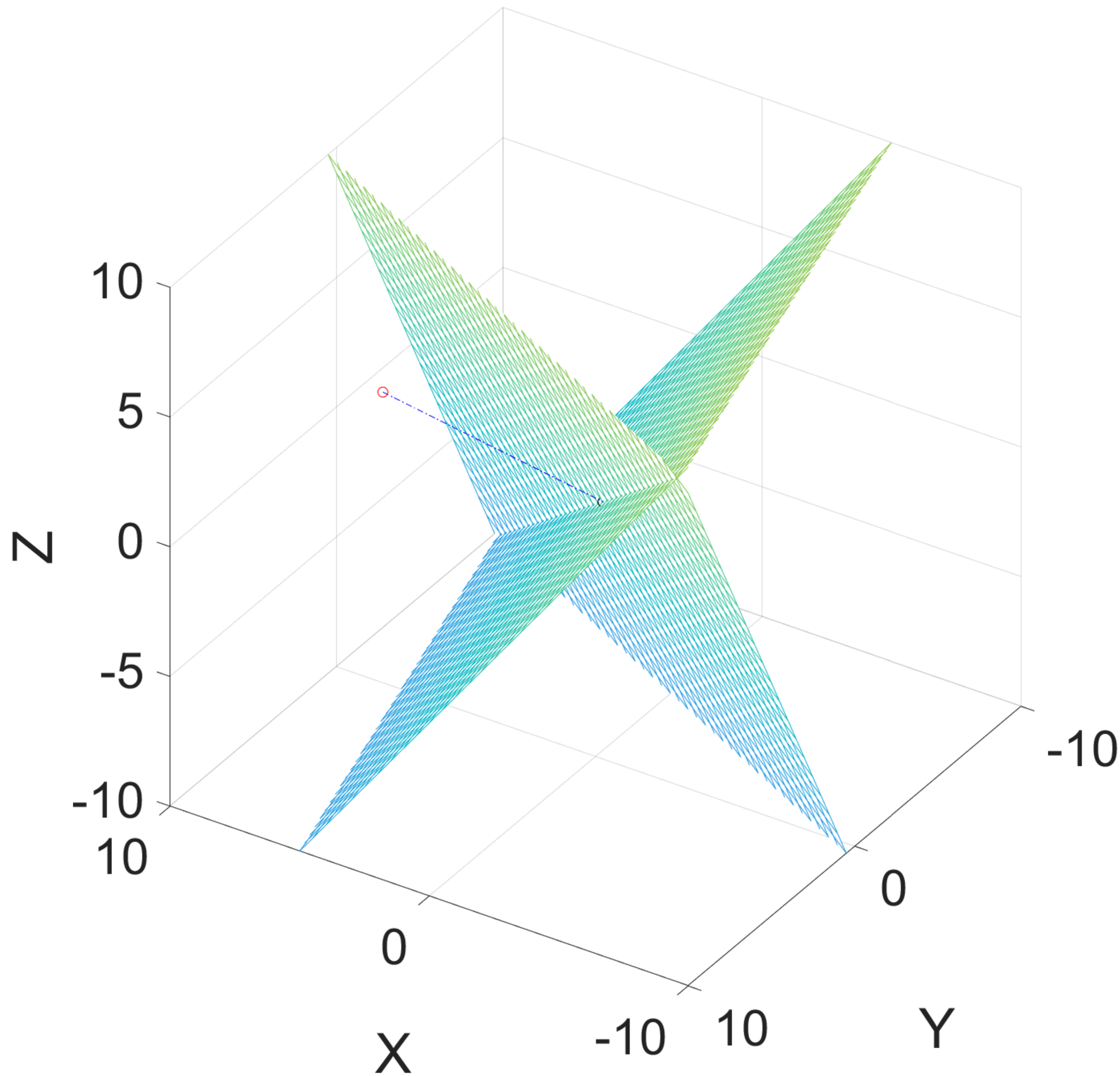
和平面外一点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$。与例二类似，点到平面交线的最短距离为

$$\min\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right)$$

约束方程为

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

最小范数解 $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}$



以下为matlab脚本实现：

```
% MinimumNormSolution_3d_demo2
clear
clc
set(groot, 'DefaultAxesFontSize', 30);

% 创建坐标轴
figure;
grid on;
axis([-10 10 -10 10 -10 10]);
axis equal;
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');

% 原始点
P0 = [5;5;5];
% 平面方程1: a1*x + b1*y + c1*z = d1
a1 = 1; b1 = 2; c1 = -1; d1 = 1;
% 平面方程2: a2*x + b2*y + c2*z = d2
a2 = 4; b2 = 1; c2 = 3; d2 = 0;

hold on;

% 绘制P0
plot3(P0(1), P0(2), P0(3), 'ro');

% 生成网格点
[u, v] = meshgrid(-10:0.5:10);

%绘制平面
z1 = (d1 - a1.*u - b1.*v)/c1;
mesh(u, v, z1);
z2 = (d2 - a2.*u - b2.*v)/c2;
mesh(u, v, z2);



% 计算P0到平面的垂点P1
A = [a1, b1, c1;
     a2, b2, c2];
D = [d1;d2];
P1 = A'*inv(A*A')*(-A*P0+D)+P0;

% 绘制垂点
```

```
plot3(P1(1), P1(2), P1(3), 'ko');

% 绘制垂线
plot3([P0(1), P1(1)], [P0(2), P1(2)], [P0(3), P1(3)], 'b-.');
hold off;
view(120,30);
```