전산통계

Chapter 4.1 비선형방정식의 해법

고정점 반복

- 비선형방정식 $f(x) = 0$의 해를 구하는 문제
- 계산 알고리즘을 이용한 반복적인 수치의 변환을 통하여 해를 찾아가는 수치해석적인 방법 사용
- 순환공식 : $x_{n+1} = g(x_n)$
- 순환공식으로 생성된 수열 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$
- 수열의 극한값 $\xi = g(\xi)$, $f(\xi) = 0$을 만족하면 비선형방정식 ξ은 $f(x) = 0$의 해

- 순환공식을 이용한 기본 알고리즘

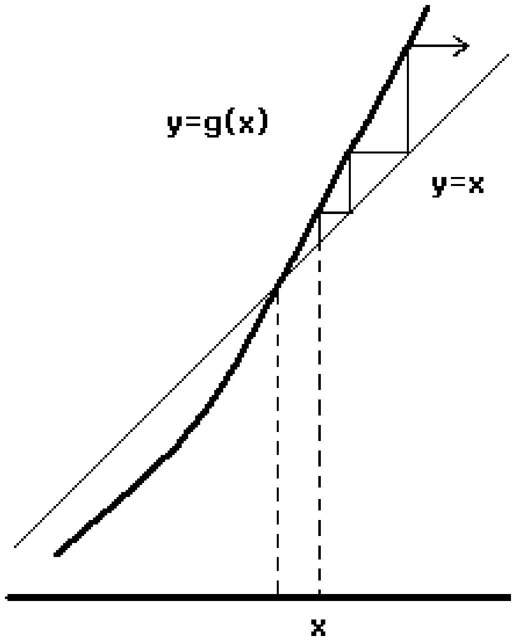
  - 1단계 : (초기화 단계) 순환 함수 $g(x)$, 초기치 x_0, 허용한계치 $\varepsilon = 10^{-6}$를 정해 준다

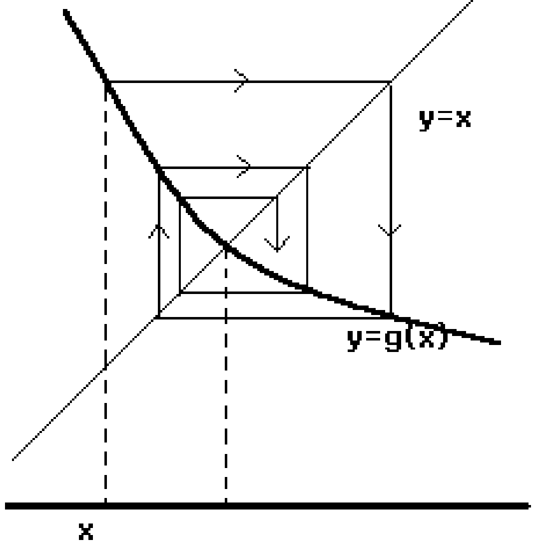
  - 2단계 : (반복 단계) $x_{n+1} = g(x_n),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

  - 3단계 : (종료 단계) 반복 단계에서 $\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n|} < \varepsilon$이면 반복을 중단하고 마지막 x_{n+1}을 해로 추정한다.

- 수열값과 극한값의 차이 : $e_n = \xi - x_n$
  - 평균값 정리 : $e_n = \xi - x_n = g(\xi) - g(x_{n-1}) = g'(\eta_n)(\xi - x_{n-1}) = g'(\eta_n)e_{n-1}$, 여기서 $\eta_n \in (\xi,\ x_{n-1})$
  - $|g'(x)| \leq M$이면, $|e_n| \leq M|e_{n-1}| \leq M^2|e_{n-2}| \leq \cdots \leq M^n|e_0|$

    $\Rightarrow M < 1$이면 e_n은 n이 증가함에 따라 0으로 수렴 ($|g'(x)| \leq M < 1$이면 $n \to \infty$일 때, $x_n \to \xi$)





- 방정식의 해 ξ와 x_n의 차이가 충분히 작아지면 $\eta_n \fallingdotseq \xi$이므로 $e_{n+1} \fallingdotseq g'(\xi)e_n$

  $\Rightarrow g'(\xi)$값이 작을수록 e_n이 0으로 수렴하는 속도가 빠르다.

  $\Rightarrow g'(\xi) = 0$이면 수렴속도가 가장 빠르다.

- $f(x) = x^2 - x - 2 = 0, \;\; x > 0$
  - $g(x) = x^2 - 2$
  - $g(x) = \sqrt{x+2}, \; g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$

뉴턴 알고리즘

- 미분가능한 비선형 방정식 $f(x)=0$의 해 x^*를 구한다.
- 해결방법 : 순환공식을 사용하여 근사적으로 해를 구한다. $x_{n+1}=g(x_n)$
- 순환공식의 결정
  - x_n을 중심으로 한 테일러 급수전개 : $0=f(x^*)\approx f(x_n)+f'(x_n)(x^*-x_n)$
  - $f'(x_n)\neq 0$인 경우, 위 식을 x^*에 대하여 정리하면 $x^* \fallingdotseq x_n-\frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)}$
  - $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)}$로 두면, 순환공식은 $g(x)=x-\frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)}$
  - 순환공식으로 수열 생성. $\{x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$
  - 수열이 극한값 ξ를 갖는 경우, $\xi=\xi-\frac{f(\xi)}{f\prime(\xi)}$가 되므로 $f(\xi)=0$
  - $g'(x)=1-\frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}=\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$이고, $f(\xi)=0$이므로 $g'(\xi)=0$

- 뉴턴 알고리즘

  - 1단계 : (초기화 단계) 순환 함수 $g(x)$, 초기치 x_0, 허용한계치 $\varepsilon = 10^{-6}$를 정해 준다

  - 2단계 : (반복 단계) $x_{n+1} = g(x_n),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

  - 3단계 : (종료 단계) 반복 단계에서 $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|} < \varepsilon$이면 반복을 중단하고 마지막 x_{n+1}을 해로 추정한다.

- 뉴턴 알고리즘은 수렴속도가 빠르지만, 초기값이 방정식의 해의 근처에서 시작해야 수렴이 된다.

- 도함수를 구할 수 없는 경우, 평균변화율을 대입해 사용

  - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{[f(x_n) - f(x_{n-1})]/(x_n - x_{n-1})}$

- $f(x) = x^3 - 7x^2 - 7x - 8 = 0, \quad x > 0$
  - $f'(x) = 3x^2 - 14x - 7$