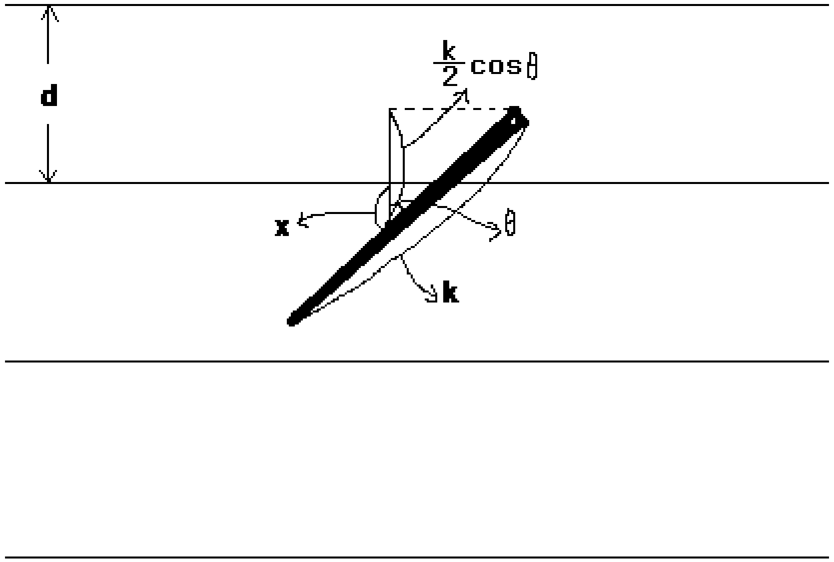
전산통계

Chapter 3.1 몬테카를로

몬테카를로 방법 (Monte Carlo method)

- 난수를 이용하여 함수의 값을 확률적으로 계산하는 알고리즘
- 확률적 실험에 의한 방법
- Buffon의 바늘 실험 : 일정한 간격 d로 가로줄이 있는 마루판에 길이가 $k, (k < d)$ 인 바늘이 떨어졌을 때 바늘이 가로줄에 걸릴 확률을 구하는 실험
- 해석학적 방법 : $\hat{\lambda} = P(X < \frac{k}{2cos\theta})$
- 몬테카를로 방법 : : $\hat{\lambda} = \frac{\text{던진 것 중 선에 걸쳐진 횟수}}{\text{총 던진 횟수}}$



- 원주율 π
- 한 변의 길이가 2인 정사각형에 내접하는 원
- $\hat{\lambda} = \frac{\text{원 안에 찍힌 점의 수}}{\text{점의 총 수}}$
- $\hat{\pi} = 4\hat{\lambda}$

- 확률밀도함수를 이용한 확률의 계산
- 사후분포를 구하기 위한 주변확률분포의 계산

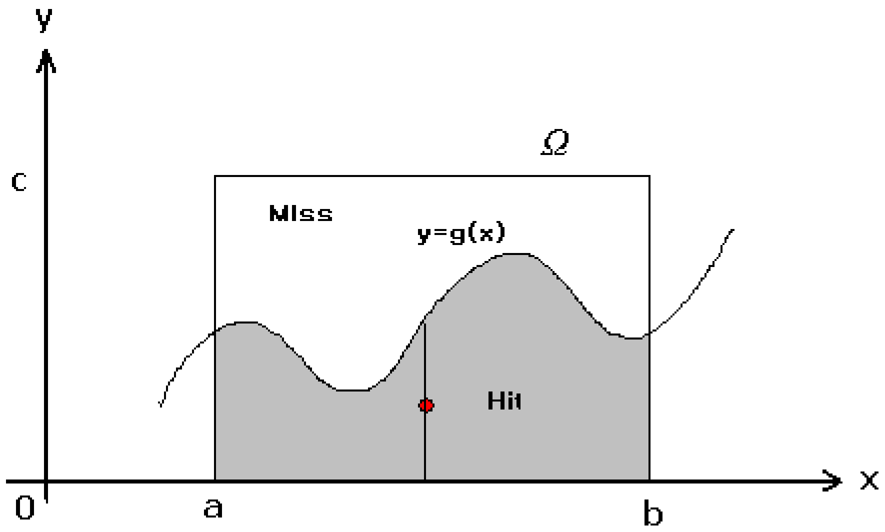
→ 정적분 값을 구하기가 어려운 경우가 많이 발생

- 확률분포를 이용한 통계적 방법으로 근사치를 구하여 추정

→ 몬테카를로 적분

Hit or Miss 방법

- 몬테카를로 적분 방법 중 가장 단순한 방법
- $I = \int_a^b g(x)dx\,,\ where\ 0 < g(x) < c,\ a < x < b$
- $p = \frac{S}{\Omega} = \frac{I}{c(b-a)}$
- 정적분 추정값 $\hat{I} = (\text{직사각형 면적}) \times \frac{N_H}{N}$, N =시행횟수, N_H = 맞춘횟수
- $g(x) \geq y$를 만족하면 성공



- 1단계 : 초기화 단계 $N_H = 0,\ c$값 지정
- 2단계 : 반복 단계 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$
    - 난수 $u_i,\ v_i$를 생성
    - $x_i = a + u_i(b - a)$를 계산
    - $g(x_i) \geq cv_i$이면 N_H를 1 증가
- 3단계 : 종료 단계 $\hat{I} = c(b - a) \times \frac{N_H}{N}$
- 성공확률의 추정량 : $\hat{p} = \frac{N_H}{N}$

- 두 가지 결과만 나오는 실험의 N회 독립반복시행에서 성공횟수의 분포는 이항분포
- $\hat{I} \sim B(N,\ p)$
- I의 불편추정량 : $\hat{I} = c(b-a) \times \frac{N_H}{N},\quad E(\hat{I}) = c(b-a) \times E(\hat{p}) = I$
- $Var(\hat{I}) = (c(b-a))^2 \times Var(\hat{p}) = (c(b-a))^2 \times \frac{p(1-p)}{N} = \frac{1}{N}\{c(b-a) - I\}$

- Ex1) $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx$

- Ex2) $\int_0^1 e^x\,dx$