삼단논법(syllogism)

삼단논법 : 두 (대/소)전제로부터 결론을 유도함

- 대전제 : 모든 사람(M)은 죽는(P)다. MaP
- 소전제 : (모든) 나는(S) 사람(M)이다. SaM
- 결 론: ∴ 나는(S) 죽는(P)다. ∴SaP
- If MaP and SaM, then SaP.
-
- 삼단논법은 대전제와 소전제를 결합하여 새로운 명제의 진위를 유도하는 양식을 말한다.

명제논리학

(*) "Aristoteles 삼단논법"은 적용범위가 좁고 부자연스러운데, Boole 대수체계는 Aristoteles 삼단논법 파악에 성공, 논리학자들은 더욱 일반적인 접근법을 사용함

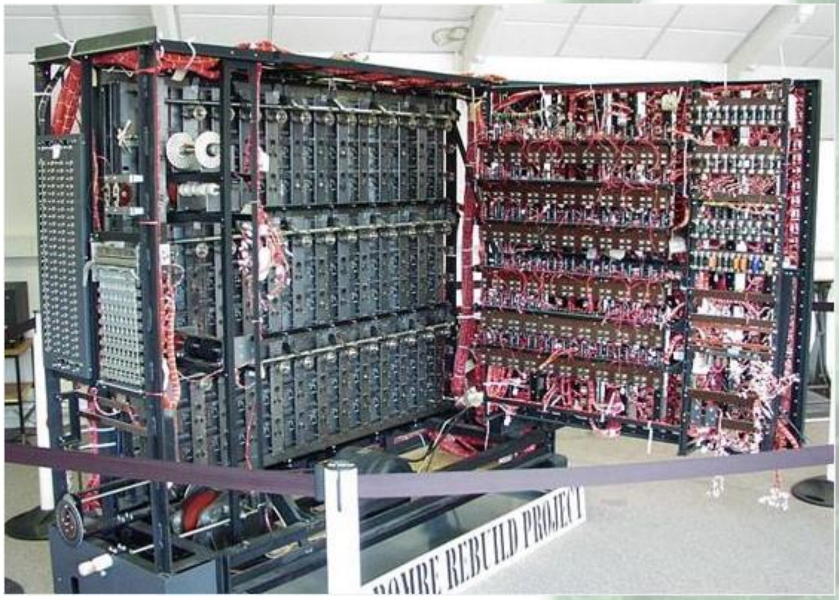
명제 논리학 : 복합 명제로 구성된 논의의 분석

진리양식 : 명제를 결합시킬 때의 양식을 진리표로써 표현 가능

- 1) 합접(conjunction)연산 : p 와 q ($p \wedge q$) : 즉 p, q 모두 참일 때 참임
- 2) 이접(disjunction)연산 : p 또는 q ($p \vee q$) : p, q 중 하나가 참이면 참임

- 3) 부정(negation) : –p ($\neg p$)
  p가 참이면 –p는 거짓,
  p가 거짓이면 –p는 참임.
- 4) 조건(conditional) : p이면 q ($p \rightarrow q$) p가 참인데도 q가 거짓이면 거짓임 (인과관계)
- 진리양식은 명제들을 결합시키는 규칙을 설명

(*)*그러면 하나의 명제로부터 다른 명제를 유도하는 양식은 무엇인가?*
그것은 긍정식(modus ponens)이라는 규칙이다.
즉 “ $p \rightarrow q$와 p“로부터 q를 추론한다
(*) 컴퓨터는 명제논리학 양식의 복잡한 배열임. 컴퓨터 개척자 튜링과 노이만은 수리논리학 전문가


REBUILD PROJECT

진리표 (Truth Table)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T

기호의 의미

- P => Q : P -> Q 라는 명제가 항상 참, 즉 항진(恒眞, tautology)일 때를 나타낸다.
- P ⇔ Q : P 와 Q가 동치(同値, equivalent)임을 표시한다

- 긍정식 (modus ponens MP)

  “ $p \to q$ 와 p“ 로 부터 q를 추론한다.

  즉 $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

- 부정식 (modus tollens MT)

  “ $p \to q$ 와 $\neg q$ “ 로 부터 $\neg p$를 추론한다.

  즉 $(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

-

- 배리법 (reductio ad absurdum RA)

  ” $[p \wedge \neg q] \to c$ “ 로 부터 $p \to q$ 를 추론.

  (c 는 모순을 뜻함).

  즉 $(p \to q) \Leftrightarrow [p \wedge \neg q] \to c$

- 긍정식은 추론형식 중 하나이다.
그러므로 긍정식이란 결론을 도출해 내는 과정 중 "전제가 긍정이면, 결론도 긍정이다“ 는 틀을 뜻한다.

- 예) 1) 날씨가 좋으면(전제), 회사에 간다.(결론)
그런데 날씨가 좋다, 그래서 회사에 간다.
- 2) 늦게 자면(전제), 지각한다.(결론)
- 3) 지각하면(전제), 사장님께 혼난다.(결론)

- 이렇게 "A이면 B이다" 식을 긍정식이라고 한다.

- 부정식 (modus tollens MT)

$p \to q$와 $\neg q$로 부터 $\neg p$를 추론한다.

$$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

- 부정식도 추론형식 중 하나이며, " 결론이 부정이면, 전제도 부정이다 " 는 틀을 뜻한다.

- 예) 지각하면(전제), 사장님께 혼난다.(결론)
  그런데 혼나지 안았다.(결론 부정)
  그래서 지각을 안한 것이다. (전제 부정)

- 이렇게 “B가 아니면, A가 아니다" 식을 말한다.

- 논리합 삼단논법(disjunctive syllogism DS) :

$p \vee q$ 와 $\neg q$로 부터 p를 추론한다

즉 $[(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$

- 추이법칙 (transitive law) :

즉 $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$

<*> 각각 진리표를 만들어 항진인지 확인할 것

(Q) 진리표를 이용하여 긍정식은 항진임을 유도하라

p	q		$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$
T	T		T	T	T T T
T	F		F	F	F T F
F	T		T	F	F T T
F	F		T	F	F T F

몇 가지 범하기 쉬운 오류들

- 후건긍정의 오류 : 길이 얼면 우편배달부는 늦는다. 우편배달부가 늦었다. 그러므로 길이 얼었다?? (얼지 않아도 늦을 수가 있다)
- 전건부정의 오류 : 길이 얼면 우편배달부는 늦는다. 길이 얼지 않았다. 따라서 우편 배달부는 늦지 않을 것이다?? (얼지 않아도 늦을 수가 있다)
- '일부를 전체로' 의 오류 : 창의적인 사람은 거짓말을 할 가능성이 높다고 실험결과 알려져 있다.
그는 창의적인 (일부의)사람이다. 그러므로 그는 거짓말쟁이다.

- 이외에도 이중부정의 법칙, 결합법칙, 분배법칙, 드모르강의 법칙 등이 있음

- 명제논리학 (Boole대수와 관련, 1과 0은 전류의 '흐름'과 '단절'로 컴퓨터 혁명 이론 주된 이론) 은 전기의 병렬, 직렬 등과 관련이 있어 컴퓨터의 설계에 지대한 공헌을 함 :

- (명제논리학 응용 예)
  - 삼선공사와 명제 (전선 접지)
  - 신호등 설계
  - 지하철노선 설계 등

술어논리학 (predicate logic)

- 수학적 증명과 관련된 양식찾기 노력의 마지막 단계 (19세기말) : Peano와 Frege가 성질이나 술어를 기초로 하는 명제논리학보다 확장된 논리학을 구성.
  구성규칙들은 모든 명제연산과 2개의 한정기호(“모든(all)” ∀과 “일부(some)” ∃) 로 이루어진다.

- 예) Aristoteles의 술어명제 [모든 사람은 죽는다]를 다음과 같은 술어논리학의 문법으로 분리하여, **명제의 내부적 구조를 노출시킨다.**

  [모든 x에 대하여, x가 사람이면 x는 죽는다]

  즉 한정기호와 술어 및 술어들 사이의 관계(조건 →)를 명백히 나타내는 것이다.

- 술어논리학을 이용하여 논리적 구조가 아무리 복잡하더라도, 순차적으로 구조를 쉽게 파악할 수 있음
- 술어논리학은 수학적 증명의 양식을 형식적인 방법으로 파악할 수 있는 도구를 수학자들에게 제공. 이 연구 덕분에 술어논리학이 수학적 진실성을 확립하는 믿음직한 방법임을 확인하게 됨
- 술어논리학의 연산규칙 중 하나 :

"모든 사람 (x)이 행복한 것 ($P(x)$)" 은 아니다"
= "일부 사람은 불행하다" 즉, 기호로써는?

$$\neg[\forall x : P(x)] = [\exists x : \neg P(x)]$$

추상적 개념과 공리론적 방법

- 모든 수학은 추상적 개념을 다루고 있다. 수학의 많은 부분이 물리적 세계에서 자극을 받고 이를 묘사하는데 사용될 수는 있지만, 수학자들이 실제로 다루고 있는 것은 "수, 도형, 양식과 구조" 등 순수한 추상적 개념이다.
- 미적분학에서 다루는 추상적 개념은 "무한 " 에 관한 수학적 개념과 관련 있음. 그러면 수학자들은 추상적 개념에 관한 주장의 진위여부를 어떻게 결정하는가?
  물리학이나 화학 등과 같이, 실험에 의하여 진위여부를 판단할 선택권은 수학에는 없다.
- 즉 수학적 진실은 일상적인 경험과 직관에 매우 모순될 수도 있다.
  (예) 수학에서는 만 가지가 성립하다가 한 가지만 성립하지 않아도, "일반적으로 성립하지 않는다"고 함

수학에서의 진실 표현은?

1) 수학에서의 진실은 다수결이나 권위에 의하여 결정되지 않고 다만, 증명에 의하여서만 결정된다.

2) 그러나 증명이 수학의 전부라고 말하는 것은 아니다. 새로운 양식을 찾고 분석하며, 그 양식이 새로운 영역에도 있는지 조사하고 실제 현장에 사용가능한지 적용하는 것과도 관련 있다.

3) 수학적 진실의 표현 형태는 기본적으로 $A \to B$ 꼴을 갖는다. 이것은 모든 수학적 사실이 몇 개의 초기 가정, 즉 공리로부터 연역에 의하여 증명되기 때문이다.

(*) 공리(axiom)-'원리'라는 라틴어 axioma에서 유래

1) "어떤 사실 B가 참이다" 는 것은 이 사실이 가정된 공리들 중의 일부에 근거하여 증명되었다는 의미이고, 공리(公理)란 명백하거나 적어도 수학계 안에서 널리 받아들여진 가정을 뜻한다.

2) 일반적으로 공리들이 묘사하는 체계는 묘사하려고 원했던 체계가 아닐 가능성도 충분히 있다.

(예) 유클리드기하학은 우리 주변의 일부 근사적 사실만 묘사하고 있음 (즉, 비유클리드기하학도 있다는 것)을 19세기가 되어서야 비로소 알게 되었다.

(*) 오늘날 물리학 이론들은 유클리드 기하학과 다른 기하학을 가정하고 있다. **(13주차 강의 내용)**

집합론과 E형 논리의 이해

1) 추상적 집합론에 대한 수학적 이론은 19세기말 독일Georg Cantor(1845-1918)에 의하여 완성됨: 20세기초까지 집합론은 수학의 일반적 체제가 됨.

2) 집합론의 모순 발견 (1902년 6월) - 공리체계에서 모순성은 치명적임. 어떤 성질을 만족하는 대상 전체의 집합은 존재한다는 믿음에 대한 근거를 보장하지 않음. 러셀(1872 -1970, 수학과 출신으로 노벨문학상을 수상) - 러셀의 파라독스

러셀-"신비주의와 논리학" 에서

- "수학은 진실 뿐만 아니라 최상의 아름다움을 가지고 있다. 이것은 조각품의 아름다움과 같이 우리의 나약한 감정의 어떠한 부분에도 호소하지 않고 그림이나 음악과 같이 장식도 없지만,
- 최고의 순수하고 단지 최고의 예술만이 보여줄 수 있는 것과 같은 완벽성을 갖고있는 냉정하고 준엄한 아름다움이다."

Russel의 역설 (Paradox)

- Cantor의 "소박한 집합론"(Naïve set theory)에서 발견되는 역설 (1901년 제기)
- 이런 역설을 배제하기 위해선 집합을 소박하게 정의하지 않고 엄밀하게 정의해야 하는 교훈을 얻음
- 이후, 집합론을 공리적으로 구성하고, 현재의 집합론에서는 러셀의 역설이 발생하지 않음

이발사의 역설(The barber Paradox)

<한 마을에 이발사가 (a) 스스로 면도를 하지 않는 사람에게는 면도를 해 주지만, (b) 자기 스스로 면도를 하는 사람에겐 면도를 해 주지 않는다고 광고를 냈다. 어느 날 그 이발사는 자기 스스로 면도를 하는가 혹은 하지 않는가? 라는 질문을 받았다. >

[1] 만약 이발사가 "자기 스스로 면도를 한다"고 답변하면,
광고 (b)에 의해 그는 스스로 면도하지 않는 사람이 된다.

[2] 만약 이발사가 "자기 스스로 면도를 하지 않는다"고 답변하면.
광고 (a)에 의해 그는 스스로 면도하는 사람이 된다.

(*) 따라서 이발사는 자기 스스로 면도를 한다고 하면, 자기 스스로 면도를 하지 않는다. 이 점이 바로 역설에 빠진 것을 보여준다.

(*) "자기 스스로 면도를 한다" = P 라면

$$P \supset \sim P, \quad \sim P \supset P \;\rightarrow\; P \equiv \sim P$$

거짓말쟁이의 역설 (Liar Paradox)

1) 거짓말쟁이가 " 내가 말하고 있는 것은 거짓말이다" 라고 할 때의 문장의 진위 판단은?

2) 신약성서 디도스 1장12절 - "크레타사람들은 언제나 거짓말쟁이이고 몹쓸 짐승이고 먹는 것 밖에 모르는 게으름뱅이다. 그리고 이 증언은 옳은 말이다" 라고 바울은 말한다. (기원전 6세기 : Epimenides의 역설)

(*) Epimenides도 크레타사람임 – 섬사람 중 한 명이라도 진실을 말하면 이 문장은 거짓이다.

직관과 감각

- 1) 우리의 감각이 어떤 관념을 이해의 영역으로 옮길 때, 우리와는 상관없이 무엇인가가 실제로 존재하고 있었다는 사실을 받아들이게 된다. 그리고 그 사실은 우리 감각에 영향을 끼치며 그로 인해 우리의 지각체계가 사물을 알아 챈다. 그 후에 비로소 우리가 감지하고 있다는 생각을 만들어 낸다. 아직까지 우리는 감각이 만들어 낸 것을 의심할 수가 없다. (존 로크)

- 2) 그 무엇도 직관만으로 이해할 수는 없으며, 감각 또한 그 자체만으로 아무것도 생각하지 못한다. 오로지 그들이 조화를 이룰 때 지식이 나타날 수 있다. (칸트)

3) 우리는 어떤 사물에 대한 우리의 주관적 경험이 그 사물의 속성을 있는 그대로 담고 있다고 자동적으로 가정하고 있는 것이다.
우리는 우선 보이는 그대로를 믿고 굳이 그 믿음을 버려야 한다면 그때 가서야 그 믿음을 저버린다.

어떤 것의 부재를 생각하지 못하는 현상은 우리 일상생활에서 벌어지는 많은 오류 중의 원천이라는 것이 밝혀졌다. (대니얼 길버트)

힐버트(1862-1943)계획과 괴델(1906-1978)의 불완전성의 정리

< 힐버트 계획(Hilbert Program)>

러셀이 칸토어 집합론을 파괴하고 30년 경과 후, 똑같은 파괴적인 결과를 낳은 혼란 발생 (힐버트 발견)

Hilbert 계획 : 무모순이고 완전한 공리체계의 발견을 목적으로 함.

1) 완전한 공리체계 (그 공리에서 발생한 문제는 그 공리 내에서 해결 가능 : 다시 말하면 추가적 공리의 불필요)

2) 무모순 공리체계 (모순이 발생하지 않는 체계)

Gœdel (1931년)의 불완전성의 정리

이 정리로 말미암아 Hilbert project가 무산됨.

불완전성 정리: "무모순인 임의의 공리체계를 설정하더라도 (필요한 경우 추가적 공리를 삽입하더라도), 그 체계는 반드시 불완전하다."

즉, 공리에 근거해서 답할 수 없는 문제가 그 공리체계 내에 존재한다는 것이다.

(이는 언어의 이중구조인 이율배반(二律背反)때문에 일어나는 현상)

수리논리학의 황금시대 (1930~1980)

1) 증명이론 (proof theory) : Aristoteles가 시작, Boole에 의해 지평이 넓어짐, 최근 AI분야로 발전,

2) 결정불가능성의 이론 : (Paul Cohen이 개발)

"어떤 수학적 명제는 결정불가능하다",

그는 1900년 힐버트가 제시한 연속체 문제 (23문제 중 1번문제)를 해결함

3) 계산 가능성 이론 (computability theory) : 괴델, 복잡도문제,

Turing : 원하는 모든 계산을 수행하도록 '프로그램'시킬 수 있는 단 하나의 계산기의 이론적 존재가능성을 입증하는 추상적 정리를 증명

Kleene : 위의 계산기를 위한 프로그램은 실행될 데이터와 본질적으로 같다는 추상적 정리를 증명

Fuzzy 이론 (다가 논리): 미사일, 전자제품 적용

참고 : 영문법의 규칙들은 모두 수학적 논리양식으로 표현가능 (MIT – Noam Chomsky)

오늘날 과학에서 발견된 중요 사상

1) 불완전성 정리 (괴델)

2) 상대성이론 (아인슈타인) ; – 절대적 기준의 사라짐

3) 불확정성의 원리 (하이젠베르크) : – 양자역학에서의 불확정성

4) 과학혁명의 구조 (토마스 쿤) : – 과학혁명이 일어나려면 축적된 지식과 넘지 못하는 사고의 벽이 한참 동안 작동해야, 사고의 벽을 넘는 창의적 사고가 출현하게 됨

(*) 수학이 파악한 많은 추상적 논리구조는 물리적 세계에서 나타나지만, 다른 추상적 구조도 비슷 (언어의 구조)