# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

## *Метод Ритца решения граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения*

Метод Ритца или энергетический метод дает возможность найти приближенное решение граничной задачи в виде суммы функций.

**Постановка задачи.** Требуется найти решение следующего уравнения

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \qquad x \in (a,b), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(a) = \mu_1, \qquad u(b) = \mu_2, \tag{2}$$

где $k(x) \ge k_0 > 0$, $k(x) \in C^1[a,b]$, $q(x) \ge 0$, $q(x)$ и $f(x)$ принадлежат классу $C[a,b]$.

**Метод решения.** Рассмотрим следующий функционал

$$J(u) = \int_a^b \left[ k(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2 - 2f(x)u \right] dx, \tag{3}$$

где $u(x)$ принадлежит классу допустимых функций, то есть функций, удовлетворяющих двум условиям:

1) эти функции непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$;
2) они удовлетворяют граничным условиям (2).

**Теорема.** *Если функция $u_*(x)$ доставляет минимум функционалу $J(u)$ среди всех допустимых функций, то она является решением граничной задачи (1), (2).*

Таким образом, задачу вычисления решения $u(x)$ граничной задачи (1), (2) можно заменить задачей отыскания минимума функционала (3) в классе непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, принимающих заданные значения $u(a) = \mu_1$ и $u(b) = \mu_2$ на концах отрезка.

В методе Ритца решение ищется в виде

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \tag{4}$$

здесь $c_k$ – численные параметры, $\varphi_k$ – система некоторых известных функций. Выбор этих функций подчиняют условиям:

1) $\varphi_k(x) \in C^1[a,b]$, $k = 0,1,2,\ldots$;
2) $\varphi_0(a) = \mu_1$, $\varphi_0(b) = \mu_2$, $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$, $k = 1,2,\ldots$;
3) при любом конечном $n$ функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно независимы;
4) функции $\varphi_k(x)$ образуют в классе функций $C^1[a,b]$, удовлетворяющих условию (2), полную систему, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $u(x)$ из допустимого класса можно указать такое $n$ и такие параметры $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что имеет место неравенство

$$\left| u^{(i)}(x) - u_n^{(i)}(x) \right| < \varepsilon, \qquad i = 0,1, \ a \le x \le b,$$

где $u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$.

Заметим, что при любом выборе параметров $c_k$ функция $u_n(x) \in C^1[a,b]$, $u_n(a) = \mu_1$, $u_n(b) = \mu_2$. Подставив $u_n(x)$ в функционал $J(u)$, получим

$$J(u_n) = D_0 + 2\sum_{k=1}^{n} B_k c_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik} c_i c_k, \tag{5}$$

где $D_0 = J(\varphi_0)$.

Параметры $c_1, c_2, ..., c_n$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_k} \equiv \sum_{i=1}^{n} A_{ik} c_i + B_k = 0, \qquad k = 1,2,,\ldots,n. \qquad (6)$$

В итоге имеем следующий алгоритм метода Ритца применительно к граничной задаче (1), (2):

1) выбираем систему функций $\{\varphi_k(x)\}$, подчиняя их выбор сформулированным выше условиям;
2) вычисляем коэффициенты матрицы и столбца СЛАУ $Ac = B$;
3) решаем полученную СЛАУ и выписываем ее решение $c_1, c_2, ..., c_n$;
4) значение параметров $c_1, c_2, ..., c_n$ подставляем в формулу (4) и полученную функцию $u_n(x)$ принимаем за приближенное решение к искомому решению $u(x)$ граничной задачи (1), (2).

**Указания и требования.** Система $\{\varphi_k\}$ выбрать следующим образом:

1) $\varphi_0$ – линейная функция, удовлетворяющая граничным условиям (2) (выписать уравнение самостоятельно); либо $\varphi_0(x) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\sin\frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}$;
2) $\varphi_k = (b-x)(x-a)^k$, $k = \overline{1,n}$, либо $\varphi_k = (b-x)^k(x-a)$, $k = \overline{1,n}$, либо $\varphi_k = \sin k\pi\frac{x-a}{b-x}$, $k = \overline{1,n}$.

Отрезок $[a,b]$ разбить на 5 частей и выдать решение $u(x)$ в полученных точках. Выдать также на печать матрицу $A$, столбец $b$ и решение системы $c_1, c_2, ..., c_n$.

3) Возникающие задачу численного решения СЛАУ решать методом Гаусса; задачи численного интегрирования решать по формулам левых, правых или центральных прямоугольников, трапеций и Симпсона (метод определяется преподавателем), с автоматическим выбором шага интегрирования, с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

4) Рассмотреть вопросы *о числе обусловленности матрицы* $A$ и *о знакоопределенности матрицы* $A$ (использовать критерий Сильвестра). Для этих вычислений можно пользоваться математическим пакетом *Maple*.

5) Конкретные функции взять из таблицы, а $n$ положить 3 для нечетных вариантов и 4 для четных вариантов.

| | $a$ | $b$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $k(x)$ | $q(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 0 | $\frac{3}{2}-\frac{N}{25}$ | $\frac{N}{2}-1$ | 0 | $\sqrt{\frac{x}{5}+\frac{N}{3}}$ | $\frac{x+4}{x^2+\frac{N}{3}}$ | $\frac{2x}{N+1}$ |
| 2. | $\frac{3}{5}-\frac{N}{13}$ | $2-\frac{N}{13}$ | $\frac{15}{N+3}$ | $-\frac{6N}{21}$ | $\frac{4-0.1x}{x^2+\frac{N}{16}}$ | $\frac{x+5}{x^2+0.9N}$ | $\frac{N+x}{3.5}$ |

здесь $N$ – номер варианта.

5) Оформить отчет. Также в отчете привести формулы вычисление элементов матрицы $A$ и столбца $b$ (получить самостоятельно или списать где-нибудь (с выводом, естественно)).

*Литература*

1. **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы. – Т.2. – М.: Наука, 1977.

2. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. – М.: БИНОМ, 2004.
3. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989.
4. **Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.** Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967.