<u>Лабораторная работа №3</u>

Метод сеток решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

<u>Постановка задачи.</u> Пусть требуется найти $u(x,t)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = \gamma_0(t), \qquad u(l,t) = \gamma_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \psi(x) \qquad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Здесь $f(x,t)$, $\gamma_0(t)$, $y_1(t)$, $\psi(x)$, $a(x,t)$ – известные функции, причем $\psi(0) = \gamma_0(0)$, $\psi(l) = \gamma_1(0)$. Будем считать, что задача (1)-(3) имеет единственное, достаточно гладкое решение.

<u>Метод решения.</u> Для задачи (1)-(3) в качестве сетки возьмем совокупность точек

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \left\{(x_i, t_j) : x_i = i \cdot h,\, t_j = j \cdot \tau;\, i = \overline{0,N},\, j = \overline{0,M};\, h = l/N,\, \tau = T/M\right\}.$$

Пользуясь заменой вторых производных разностными отношениями, из (1) можем получить, например, такое разностное уравнение, относительно сеточной функции $y(x,t)$

$$\frac{y(x_i,t_j) - y(x_i,t_{j-1})}{\tau} = a^2(x_i,t_j)\frac{y(x_{i-1},t_j) - 2y(x_i,t_j) + y(x_{i+1},t_j)}{h^2} + f(x_i,t_j), \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad j = 1,2,\ldots,M, \tag{4}$$

из начально-краевых условий (2)-(3) имеем

$$y_0^j = \gamma_0(t_j), \quad y_N^j = \gamma_1(t_j), \quad j = 0,1,\ldots,M, \qquad y_i^0 = \psi(x_i), \quad i = 1,\ldots,N-1. \tag{5}$$

Полученная разностная схема называется – *чисто неявной разностной схемой* для уравнения теплопроводности (схемой с опережением). Решение системы (4) находится по слоям начиная $j = 1$. Для нахождения y_i^j по известным y_i^{j-1} требуется решить систему уравнений

$$s_i^j y_{i-1}^j - (1 + 2s_i^j)\, y_i^j + s_i^j y_{i+1}^j = -\tau f(x_i,t_j) - y_i^{j-1}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad j = 1,2,\ldots,M, \quad y_i^j = y(x_i,t_j), \quad s_i^j = \frac{\tau}{h^2}a^2(x_i,t_j). \tag{6}$$

Эту систему можно решать методом прогонки, смотри [1], [2].

<u>Указания и требования.</u> Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\left(x^2 - 2t\right), \qquad 0 \le x \le 1, \; 0 \le t \le 0.05,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \alpha t, \qquad 0 \le t \le 0.05,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1,$$

а) по *чисто неявной* разностной схеме, б) по *чисто явной* разностной схеме [1-2], в) по *схеме Кранка-Николсона* [2], взяв $h = 0.1$, $\tau = 0.01$; здесь $\alpha = 0.5 * N$, где N – номер варианта. Получаемую систему линейных алгебраических уравнений (с трехточечной матрицей) решать методом 1) *правой*, 2) *встречных*, 3) *левой* прогонок (определяется преподавателем) [3]. Исследовать сходимость полученной разностной схемы (погрешность аппроксимации, устойчивость разностной схемы).

Литература

1. **Самарский А.А**. Теория разностных схем. М.: Наука. 1983.
2. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. М.: Наука. 1989.
3. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978.