ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Метод сеток решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа

Постановка задачи. Пусть требуется найти $u(x,t)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (1)$$
$$0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T,$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям

$$u(0,t) = \gamma_0(t), \qquad u(l,t) = \gamma_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \alpha(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \beta(x), \qquad 0 \le x \le l. \qquad (3)$$

Здесь $f(x,t)$, $\gamma_0(t)$, $y_1(t)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $a(x,t)$ - заданные функции. Будем предполагать, что эти функции достаточно гладкие, причем $\gamma_0(0) = \alpha(0)$, $\gamma_1(0) = \beta(l)$. Будем также считать, что начально-краевая задача (1)-(3) имеет единственное, достаточно гладкое решение.

Метод решения. Пусть требуется найти решение дифференциальной задачи

$$Lu = f, \qquad (4)$$

поставленной в некоторой области Ω с границей Γ.

Для решения задачи (4) по методу сеток в области $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ необходимо:

1) заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения, т.е. выбрать в этой области некоторое конечное множество точек (такое множество точек называется *сеткой*, а отдельные точки – *узлами* сетки; функцию, определенную в узлах сетки, будем называть сеточной функцией);
2) заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностный аналог для краевых условий и начальных данных (построить разностную схему);
3) исследовать сходимость разностной схемы (установить аппроксимацию исходной задачи разностной схемой, проверить устойчивость разностной схемы).

Пусть u_h – точное решение задачи (4) в узлах сетки. Как правило, вычислить u_h не удается. Поэтому находят сеточную функцию $y_h \approx u_h$ как решение задачи

$$L_h y_h = f_h, \qquad (5)$$

«близкой» к задаче (4). Задачу (5) называют разностной схемой.

Для задачи (1)-(3) в качестве сетки возьмем совокупность точек

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \left\{(x_i, t_j) : x_i = i \cdot h,\ t_j = j \cdot \tau;\ i = \overline{0,N},\ j = \overline{0,M};\ h = l/N,\ \tau = T/M\right\}.$$

Пользуясь заменой вторых производных разностными отношениями, из (1) получим разностное уравнение, относительно сеточной функции $y(x,t)$

$$\frac{y(x_i,t_{j-1}) - 2y(x_i,t_j) + y(x_i,t_{j+1})}{\tau^2} = a^2(x_i,t_j)\frac{y(x_{i-1},t_j) - 2y(x_i,t_j) + y(x_{i+1},t_j)}{h^2} + \qquad (6)$$
$$+ f(x_i,t_j), \qquad i = 1,\dots,N-1, \quad j = 1,\dots,M-1.$$

Из граничных условий (2) имеем

$$y_0^j = \gamma_0(t_j), \quad y_N^j = \gamma_1(t_j), \quad j = 0,1,\dots,M. \qquad (7)$$

Решение y_i^{j+1} выражается явным образом через значения на предыдущих слоях

$$y_i^{j+1} = s_i^j y_{i+1}^j + 2(1-s_i^j)\, y_i^j + s_i^j y_{i-1}^j - y_i^{j-1} + \tau^2 f(x_i, t_j),$$
$$i = 1,2,\dots,N-1, \quad j = 1,2,\dots,M-1, \qquad (8)$$
$$y_i^j = y(x_i, t_j), \quad s_i^j = \frac{\tau^2}{h^2} a^2(x_i, t_j).$$

Следовательно, мы сможем найти y_i^{j+1} при $j = 1,2,\dots,M-1$ по (8), если будут известны y_i^0, y_i^1 при $i = 1,2,\dots,N-1$.

Для вычисления y_i^0 и y_i^1 следует использовать условия (3). Это можно сделать, например, следующим способом:

По формуле Тейлора имеем

$$u(x,t_1) = u(x,t_0) + \frac{\tau}{1!}\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x,\tilde{t}_1)}{\partial t^3}, \quad t_0 \le \tilde{t}_1 \le t_1.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = \frac{u(x,t_1) - u(x,t_0)}{\tau} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u(x,\tilde{t}_1)}{\partial t^3}, \quad t_0 \le \tilde{t}_1 \le t_1. \qquad (9)$$

Если $\alpha(x)$ имеет конечную вторую производную, то из (1) и (3) получим

$$\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial t^2} = a^2(x,t_0)\frac{\partial^2 u(x,t_0)}{\partial x^2} + f(x,t_0) = a^2(x,t_0)\,\alpha''(x) + f(x,t_0).$$

Подставив это значение в (9), найдем

$$y_i^0 = \alpha(x_i), \quad y_i^1 = \alpha(x_i) + \tau\beta(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\left[a^2(x_i,0)\,\alpha''(x_i) + f(x_i,0)\right], \quad i = 1,2,\dots,N-1.$$

Указания и требования. Построить разностную схему для следующей смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2(\alpha^2 - 1)}{(x + \alpha t + 1)^3}, \quad 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le t \le 1,$$
$$u(0,t) = \frac{1}{\alpha t + 1}, \quad u(1,t) = \frac{1}{\alpha t + 2}, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$u(x,0) = \frac{1}{1+x}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{(1+x)^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

здесь $\alpha = 0{,}5 + 0{,}1N$, где N – номер варианта. Исследовать сходимость полученной разностной схемы (погрешность аппроксимации, устойчивость разностной схемы). Отрезок $[0,l]$ разбить на 10 частей и выдать полученное решение $y(x,t)$ на десяти слоях.

Литература

1. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.:«Наука». 1983.
2. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. М.: «Наука». 1989.
3. **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы, Т.2. М.: «Наука». 1977.
4. **Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.** Численные методы анализа. М.: «Наука». 1967.