<u>Лабораторная работа №1</u>

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно разделить на две группы: 1) прямые (точные); 2) итерационные (методы последовательных приближений).

С помощью точных методов, проделав конечное число операций, можно получить точные значения неизвестных. При этом предполагается, что коэффициенты и правые части системы известны точно, а все вычисления проводятся без округлений. Примером прямого метода является метод Гаусса.

Пусть задана СЛАУ

$$Ax = f, \tag{1}$$

где A – вещественная квадратная матрица порядка n, а f – заданный и x – искомый векторы. Будем предполагать, что определитель матрицы A отличен от нуля. Тогда для каждого вектора f система (1) имеет единственное решение.

Или можно записать систему (1) в развернутом виде

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n,
\end{aligned} \tag{2}$$

Метод Гаусса решения системы (2) состоит в последовательном исключении неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из этой системы (курс алгебры). После исключения неизвестных система (2) преобразуется в систему, матрица которой содержит нули всюду ниже главной диагонали. Получение такой системы называется прямой ход метода Гаусса. Обратный ход заключается в нахождении неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из полученной системы.

Может оказаться, что система $Ax = f$ имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы A равен нулю. Кроме того, заранее неизвестно, все ли угловые миноры матицы A отличны от нуля. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента. Основная идея состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшем по модулю. Различают метод Гаусса с выбором главного элемента по строке. Он эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге проводится соответствующая перенумерация переменных. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация строк. Иногда применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент среди всех элементов матрицы системы.

Нахождение матрицы, обратной матрицы A, эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX = E, \tag{3}$$

где E – единичная матрица и X – искомая квадратная матрица. Пусть $A = [a_{ij}]$, $X = [x_{ij}]$. Уравнение (3) можно записать в виде системы n^2 уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1,2,...,n, \tag{4}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Далее, можно заметить, что система (4) распадается на n независимых систем уравнений с одной и той же матрицей A, но с различными правыми частями. Эти системы имеют вид

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \qquad j = 1,2,...,n, \tag{5}$$

где $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj})^T$, у вектора $\delta^{(j)}$ равна единице j-я компонента и равны нулю остальные компоненты.

<u>Указания и требования.</u> 1) Требуется решить систему линейных уравнений $Ax = f$ с выбором главного элемента по строкам или столбцам:

а) $\begin{aligned} &4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 = 8.6, \\ &7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 = 6.68, \\ &8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.8x_3 + 3.5x_4 = 9.95, \\ &3.2x_1 - 1.4x_2 + 8.9x_3 + 3.3x_4 = 1. \end{aligned}$	д) $\begin{aligned} &-2.00x_1 + 3.01x_2 + 0.12x_3 - 0.11x_4 = 4.13, \\ &2.92x_1 - 0.17x_2 + 0.11x_3 + 0.22x_4 = 3.46, \\ &0.66x_1 + 0.52x_2 + 3.17x_3 + 2.11x_4 = 2.79, \\ &3.01x_1 + 0.42x_2 - 0.27x_3 + 0.15x_4 = 1.01. \end{aligned}$
б) $\begin{aligned} &1.28x_1 + 0.42x_2 + 0.54x_3 + 1.00x_4 = 1.34, \\ &2.11x_1 + 3.01x_2 + 4.02x_3 + 0.22x_4 = 1.56, \\ &0.18x_1 + 3.41x_2 + 0.15x_3 + 1.43x_4 = 1.78, \\ &2.14x_1 + 0.17x_2 + 0.26x_3 + 0.18x_4 = 1.91. \end{aligned}$	е) $\begin{aligned} &3.25x_1 + 1.54x_2 + 2.91x_3 + 5.43x_4 = 4.14, \\ &-6.34x_1 - 8.17x_2 - 10.2x_3 + 3.93x_4 = 3.15, \\ &4.52x_1 + 6.73x_2 + 1.37x_3 - 9.89x_4 = 2.92, \\ &7.13x_1 + 8.21x_2 + 4.47x_3 - 2.11x_4 = 5.65. \end{aligned}$
в) $\begin{aligned} &1.00x_1 + 0.47x_2 - 0.11x_3 + 0.55x_4 = 1.09, \\ &0.42x_1 + 1.00x_2 + 0.35x_3 + 0.17x_4 = 2.87, \\ &-0.25x_1 + 0.67x_2 + 1.00x_3 + 0.36x_4 = 3.65, \\ &0.54x_1 - 0.32x_2 - 0.74x_3 + 1.00x_4 = 4.43. \end{aligned}$	ж) $\begin{aligned} &3.25x_1 + 1.54x_2 + 4.91x_3 + 2.43x_4 = 0.14, \\ &-3.34x_1 + 1.17x_2 + 3.2x_3 + 5.13x_4 = 1.15, \\ &-9.52x_1 + 2.73x_2 + 3.37x_3 - 5.89x_4 = 0.92, \\ &1.13x_1 + 2.21x_2 + 4.47x_3 + 5.11x_4 = 5.65. \end{aligned}$
г) $\begin{aligned} &0.34x_1 + 1.17x_2 + 0.2x_3 + 8.13x_4 = 4.15, \\ &3.52x_1 + 4.73x_2 + 4.37x_3 + 5.89x_4 = 2.92, \\ &-6.25x_1 + 2.54x_2 + 6.91x_3 - 5.43x_4 = -3.14, \\ &-2.13x_1 + 2.21x_2 + 4.17x_3 + 6.11x_4 = 7.65. \end{aligned}$	

– метод и система определяются преподавателем.

2) Вычислить вектор невязки $r = A\tilde{x} - f$, где $\tilde{x}$ – полученное решение.

3) Вычислить определитель матрицы A используя метод Гаусса.

4) Найти обратную матрицу A^{-1} используя метод Гаусса.

5) Сделать проверку, умножить матрицу A на полученную матрицу A^{-1}.

6) Оформить отчет. В отчете должна быть приведена постановка задачи, описан алгоритм решения задачи и приведена теоретическая задача, с подробным решением (дается преподавателем).

Литература

1. **Демидович Б.П., Марон И.А.** *Основы вычислительной математики.* – М.: «Наука», 1970.
2. **Самарский А.А., Гулин А.В.** *Численные методы.* – М.: «Наука», 1989.