

# 需要関数の推定 #1

Takahiro KONNO

# なぜ需要関数の推定？

- 企業が行動を決定する要因としてコストは重要。  
でも我々はふつうコストを観測することができない。
- NEIOではこの問題を念頭に間接アプローチが盛んに。  
その中で、需要関数の推定が大きなトピックになった。

## 例：企業の市場支配力

- 市場支配力はマークアップ  $\frac{p - mc}{p}$  で測られる。  
ここで問題、 $mc$  が観測できない！
- 解決策：企業のマークアップを間接的に推定する。  
そのために需要関数が必要。

$$\frac{p^* - mc(q(p^*))}{p^*} = -\frac{1}{\varepsilon(p^*)}$$

# 復習

- 線形の需給モデルを考える。

$$Demand : q_t^d = \gamma_1 p_t + \mathbf{x}_{t1}' \beta_1 + u_{t1}$$

$$Supply : p_t = \gamma_2 q_t^s + \mathbf{x}_{t2}' \beta_2 + u_{t2}$$

$$Equilibrium : q_t^d = q_t^s$$

- $p_t$  に内生性の問題が生じているため、  
通常 of 最小2乗法は使えない。

- 需要関数の推定ではふつう操作変数(IV)法を使う。
- 操作変数が満たすべき条件は、
  1. 誤差項と相関がない
  2. 内生変数( $p_t$ )との相関が非ゼロ
- 需要側の操作変数には Cost shifters を使い、  
供給側の操作変数には Demand shifters を使う。

なぜ離散変数モデルか？

# 需要関数の導出 — 古典的アプローチ

- 古典的アプローチでの2財の需要関数は、

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \quad s.t. \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

FOCを解いて  $x_1^*(p_1, p_2, M)$ ,  $x_2^*(p_1, p_2, M)$  を求めるか、  
あるいは間接効用関数  $V(p_1, p_2, M)$  から、

$$x_1^*(p_1, p_2, M) = -\frac{\partial V}{\partial p_1} / \frac{\partial V}{\partial M}$$

$$x_2^*(p_1, p_2, M) = -\frac{\partial V}{\partial p_2} / \frac{\partial V}{\partial M}$$

として求める。

# 古典的アプローチの限界

- 古典的アプローチがうまくいかない市場も少なくない。  
うまくいかない市場の特徴は、  
代替財がたくさんある。  
個人の消費行動は、選択肢の中から1つ選ぶ。
- このような市場を扱う方法として、離散選択モデル  
各消費者は、選択肢から1つだけを選んで消費すると仮定。



# 離散選択モデル

# 離散選択モデル

- $J$  個の代替可能な財 ( $j=1, \dots, J$ )。
- 消費者  $i$  は自分の所得  $y_i$  を財の(最大)1つか、outside good に割りあてる。

$$\max_{j,z} U_i(x_j, z) \quad s.t. \quad p_j + p_z z = y_i$$

- $x_j$  はブランド  $j$  の特性。  $p_j$  は価格。
- $z$  は、outside good の量。  $p_z$  は価格。
- Outside good ( $j=0$ ) は、代替可能な財を購入しないということ。

- 各財の条件付き間接効用関数は、

$$U_{ij}^* = U_i(x_j, \frac{y - p_j}{p_z})$$

- Outside goodの効用は、

$$U_{i0}^* = U_i(0, \frac{y}{p_z})$$

- 消費者は効用関数を最大にする財を選択する。

$$\max_j U_{ij}^*$$

- $U_{ij}^*$  は観測できる変数の関数と、  
観測できない要素を表す項で構成されたとする。

$$U_{ij}^* = V_{ij}(p_j, p_z, y_i) + \epsilon_{ij}$$

- $\epsilon_{ij}$  を **structural error** と呼ぶ。  
 $\epsilon_{ij}$  は消費者は観測できるが、我々は観測できない。  
効用や選択は、消費者にとっては決定論的に決まる。

- このとき、消費者*i*が財*j*を購入する確率は、

$$D_{ij} = Prob\{\epsilon_{i0}, \dots, \epsilon_{iJ} : U_{ij}^* > U_{ij'}^* \quad for \quad j' \neq j\}$$

- $\epsilon_{ij}$  の分布の仮定が選択確率の関数型を決定する。

よく使われる分布の仮定は2つ。

- $(\epsilon_{i0}, \dots, \epsilon_{iJ})$  が多変量正規分布に従う。
- $(\epsilon_{i0}, \dots, \epsilon_{iJ})$  が独立に同一の第1種極値分布に従う。

$$F(\epsilon) = exp[-exp(-\frac{\epsilon - \eta}{\mu})]$$

- 独立に同一の第1種極値分布に従うと仮定すると、  
選択確率は簡単なロジット型となる。

$$D_{ij}(\dots) = \frac{\exp(V_{ij})}{\sum_{j'=1, \dots, J} \exp(V_{ij'})}$$

- この選択確率は選択肢が増えても扱いやすいので、  
IOではこの仮定がよく用いられる。

## IIA問題

- Homogeneous Logit モデルの問題点

どの2ブランドの間の Odds ratio も代替財の数に依存しない。

$$\frac{D_j}{D_{j'}} = \frac{\exp(V_j)}{\exp(V_{j'})}$$

- RV車とBMWが同じシェアのとき、  
プリウスの価格が低下すると各需要は等しく影響を受ける。

# IIA問題の解決 1 : Nested Logit

- Utility shock  $(\epsilon_{i0}, \dots, \epsilon_{iN})$  に特別な相関を仮定する。

Nest 内のブランド同士は、異なるネストのブランド同士に比べて代替性が大きいと仮定する。

Utility shock が Generalized Extreme Value に従うと仮定して導出する。



## IIA問題の解決 2: Random Coefficient

- 消費者  $i$  について coefficient が消費者で異なると仮定する。

$$U_{ij}^* = X_j' \beta_i - \alpha_i p_j + \epsilon_{ij}$$

- 個人レベルの選択確率は、

$$D_{ij} = \frac{\exp(X_j' \beta_i - \alpha_i p_j)}{\sum_{j'} \exp(X_j' \beta_i - \alpha_i p_{j'})}$$

- 集計マーケットシェアは、

$$\int \frac{\exp(X_j' \beta_i - \alpha_i p_j)}{\sum_{j'} \exp(X_j' \beta_i - \alpha_i p_{j'})} \cdot dF(\alpha_i, \beta_i)$$

## 4. Berry (1994)による需要関数の推定

# Berry(1994)

- 集計データから差別化財の需要関数を推定する。  
内生性の問題にうまく対処した。

- 個別の効用モデル

$$U_{ij}^* = \underbrace{X_j' \beta - \alpha p_j + \xi_j}_{\equiv \delta_j} + \epsilon_{ij}$$

から、市場シェアを求める。

$$U_{ij}^* = \underbrace{X_j' \beta - \alpha p_j + \xi_j}_{\equiv \delta_j} + \epsilon_{ij}$$

- $i$  は消費者。  $j$  はブランド。
- $\delta_j$  はブランド  $j$  の mean utility
- 分析者は  $\xi_j$  も  $\epsilon_{ij}$  も観測できない。消費者は観測できる。
- $\xi_j$  は観測できない品質として解釈できる。
- 観測できない品質  $\xi_j$  は、価格  $p_j$  と相関する。(内生性)

- $\epsilon_{ij}$  は独立に同一の第一種極値分布に従うと仮定。
- Choice indicator を以下のように定義する。

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{if } i \text{ chooses brand } j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

- この仮定のもと、選択確率は logit 型となる。

$$Pr(y_{ij} = 1 \mid \beta, x_{j'}, \xi_1, \dots, \xi_J) = \frac{\exp(\delta_j)}{\sum_{j'=1}^J \exp(\delta_{j'})}$$

- 集計マーケットシェアは、

$$\begin{aligned} s_j &= \frac{1}{M} [M \cdot Pr(y_{ij} = 1 \mid \beta, x_{j'}, \xi_1, \dots, \xi_J)] = \frac{\exp(\delta_j)}{\sum_{j'=1}^J \exp(\delta_{j'})} \\ &\equiv \tilde{s}_j(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_J) \equiv \tilde{s}_j(\alpha, \beta, x_{j'}, \xi_1, \dots, \xi_J) \end{aligned}$$

# どうやって推定する？

- 実際に観測されたシェア  $\hat{s}_j$  ( $j=1, \dots, J$ )。  
(Outside good のシェアは  $1 - \sum_{j=1}^J \hat{s}_j$ )
- モデルとパラメータから予測シェア  $\tilde{s}_j(\alpha, \beta, x_{j'}, \xi_1, \dots, \xi_J)$ 。
- $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  は、観測されたシェアと予測シェアのズレが最小になるように決定される。どうやる？

# Berry (1994) のアプローチ

- 操作変数  $Z$  が存在すると仮定。 $Z$  は  $E(\xi Z) = 0$
- このモーメント条件のSample analogyは、

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \xi_j Z_j = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (\delta_j - X_j \beta + \alpha p_j) Z_j$$

- サンプル数を増やせば、真のパラメータに対してこの値はゼロに近づくはず。→これでパラメータを測る。
- 推定の問題は、 $\delta_j$  がわからないこと。

Berryは 2-step approach を提案。

# Step1 : Inversion

- $\hat{s}_i$ と $\tilde{s}_i$  がすべての $j$ に対して等しいとする ( $\delta_0 = 0$  と標準化)。
- 未知の $\delta_1, \dots, \delta_J$ に関する  $J$  個の等式が得られる。

$$\begin{aligned}\hat{s}_1 &= \tilde{s}_1(\delta_1, \dots, \delta_J) \\ &\vdots \\ \hat{s}_J &= \tilde{s}_J(\delta_1, \dots, \delta_J)\end{aligned}$$

- これを解いて、 $\delta_1, \dots, \delta_J$ を  $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_J$  の関数として書ける。
- このステップで、 $\hat{\delta}_j \equiv \delta_j(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_J)$  を得る。



## Step2 : IV estimation

- ここで $\delta_j$ の定義に戻る。

$$\delta_1 = X_1\beta - \alpha p_1 + \xi_1$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\delta_J = X_J\beta - \alpha p_J + \xi_J$$

- $\hat{\delta}_j$ を使ってSample moment conditionを計算できる。

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (\hat{\delta}_j - X_j\beta + \alpha p_j) Z_j$$

について最小化問題をとけばいい。

- もし $\delta_j$ が線形なら linear IV method を使えばよい。

# Homogeneous Logit Case

- 予測シェアは、 $\tilde{s}_j(\delta_1, \dots, \delta_J) = \frac{\exp(\delta_j)}{1 + \sum_{j'=1}^J \exp(\delta_{j'})}$

- 観測シェアと予測シェアの連立方程式は、

$$\begin{aligned}\hat{s}_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^J \exp(\delta_j)} \\ \hat{s}_1 &= \frac{\exp(\delta_1)}{1 + \sum_{j=1}^J \exp(\delta_j)} \\ &\vdots \\ \hat{s}_J &= \frac{\exp(\delta_J)}{1 + \sum_{j=1}^J \exp(\delta_j)}\end{aligned}$$

- 連立方程式の自然対数をとる。

$$\ln \hat{s}_1 = \delta_1 - \ln(\text{denom})$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\ln \hat{s}_J = \delta_J - \ln(\text{denom})$$

$$\ln \hat{s}_0 = \delta_0 - \ln(\text{denom})$$

- これを解くと、

$$\delta_j = \ln \hat{s}_j - \ln \hat{s}_0, \quad j = 1, \dots, J$$

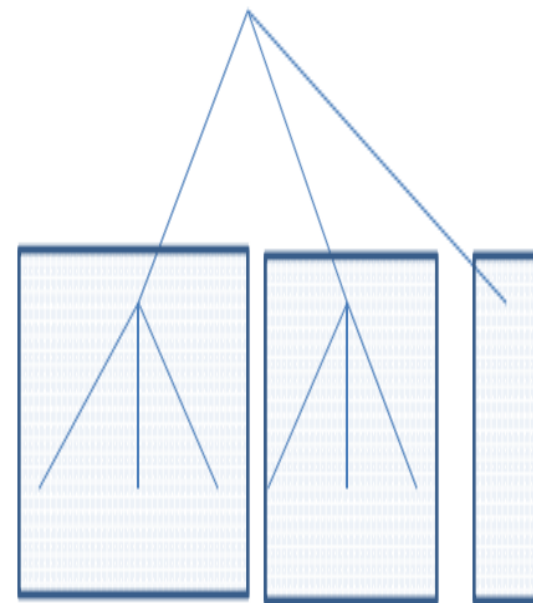
- Second step では、

$$\ln \hat{s}_j - \ln \hat{s}_0 = \delta_j = X_j \beta - \alpha p_j + \xi_j$$

この式の IV regression を行えばいい。

# Nested Logit

- (グループ  $g$  の財  $j$  が選択される確率)  
= (グループ  $g$  内で財  $j$  が選択される確率)  
× (グループ  $g$  が選択される確率)



のようにモデルを設定。

- 実際に推定する式は、

$$\ln(s_{jt}) - \ln(s_{0t}) = \delta_{jt} = X'_j\beta - \alpha p_j + \sigma \ln(s_{jt}/s_{Gt}) + \xi_j$$

- 詳しくはBerry(1994)とか北野(2012)で

# $\sigma$ の解釈

- $0 < \sigma < 1$  は、グループ内の需要の相関。

$\sigma = 0$  ならば、グループの違いが代替関係に影響しない。

$\sigma = 1$  ならば、グループ間の財の代替は行われませんが、グループ内の財の代替関係は完全代替に近づく。

データについて

# 必要なデータ

- 集計“市場”データ

時系列：1つの市場、複数期間のデータ。

クロスセクション：複数市場、1期間のデータ。

パネル：複数市場、複数期間のデータ。

- 推定に使う変数

集計需要 or 集計シェア

価格・財の特性・操作変数

市場規模の定義（＝潜在需要）

（デモグラフィックデータ）

# 適切な操作変数は？ ①製品の特徴

- 他製品の特徴 (BLP)

自社が作る他製品の特徴の平均

他社が作る製品の特徴の平均

Bertrand競争を仮定しているため



## 適切な操作変数は？ ②Cost shifter

- コストに影響するが、需要に影響しないような要因

見つけるのは難しい・・・

BLPでは規模の経済性を仮定→生産量を使っている

- 生産要素価格

価格に影響するが、需要には直接影響しない

クロスセクションデータでは使えない可能性がある

## 適切な操作変数は？ ③他市場の価格

- 他市場の価格 ( Nevo(2001), Hausman(1996) )  
複数市場にわたってCost shockがあれば、  
他市場の価格は操作変数として使える。

その他、特性が相関しているときはラグを用いたりするらしい

# 潜在需要

- シェアを求めるために必要。  $s_{jt} = \frac{q_j}{M_t}$   $s_{0t} = 1 - \sum_{i=1}^J s_j$   
先行研究に従うか、あるいは自分で決める。

例えば、

- 自動車 → 世帯数
- ゲーム機 → テレビの所有世帯数
- ポータルサイト → インターネット利用者数

# 演習1. Homogenous Logit

- 推定式は、

$$\underbrace{\ln(s_{jt}) - \ln(s_{0t})}_{y_{jt}} = \delta_{jt} = X'_j\beta - \alpha p_j + \xi_j$$

- もし外生性がなければOLSで推定。
- 価格の外生性があれば、操作変数法(2SLS)で推定。

$$\underbrace{\ln(s_{jt}) - \ln(s_{0t})}_{y_{jt}} = \delta_{jt} = X'_j\beta - \alpha p_j + \xi_j$$

### 1. OLSで推定する

```
reg y price adp cals fat sugar
```

### 2. 2SLS: 自社が生産する他ブランドの特性の平均値

```
ivreg y (price = z1adp z1cals z1fat z1sugar) adp cals fat sugar
```

### 3. 2SLS: 他社が生産するブランドの特性の平均値

```
ivreg y (price = z2adp z2cals z2fat z2sugar) adp cals fat sugar
```

## 演習2. Nested Logit

- 推定式は、

$$\underbrace{\ln(s_{jt}) - \ln(s_{0t})}_{y_{jt}} = \delta_{jt} = X_j' \beta - \alpha p_j + \sigma \ln(s_{jt}/s_{Gt}) + \xi_j$$

- $0 < \sigma < 1$  は、グループ内の需要の相関。
- 価格の外生性がなくても、操作変数法を用いる。

$$\underbrace{\ln(s_{jt}) - \ln(s_{0t})}_{y_{jt}} = \delta_{jt} = X'_j\beta - \alpha p_j + \sigma \ln(s_{jt}/s_{Gt}) + \xi_j$$

### ~~1.1. OLSで推定する~~

~~reg y price adp cals fat sugar lngsh~~

### 2. 2SLS: 自社が生産する他ブランドの特性の平均値

ivreg y (price = z1adp z1cals z1fat z1sugar) adp cals fat sugar lngsh

### 3. 2SLS: 他社が生産するブランドの特性の平均値

ivreg y (price = z2adp z2cals z2fat z2sugar) adp cals fat sugar lngsh

おまけ



# マークアップを計算する

- 需要の推定を利用して企業のマークアップを求める。
- 推定されたブランド  $j$  の需要関数は、

$$D^j \left( \underbrace{X_1, \dots, X_J}_{\equiv \vec{X}}; \underbrace{p_1, \dots, p_J}_{\equiv \vec{p}}; \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_J}_{\equiv \vec{\xi}} \right)$$

- ブランド  $j$  を生産するコストは、

$$C^j(q_j, w_j, \omega_j)$$

- $w_j$  は観測可能なコスト要因。
- $\omega_j$  は観測できないコスト要因。

- ブランド  $j$  の利潤は、

$$\Pi_j = D^j(\vec{X}, \vec{p}, \vec{\xi})p_j - C^j(D^j(\vec{X}, \vec{p}, \vec{\xi}), w_j, \omega_j)$$

- 複数財を生産する企業  $k$  の利潤は、

$$\tilde{\Pi}_k = \sum_{j \in \mathcal{K}} \Pi_j = \sum_{j \in \mathcal{K}} \left[ D^j(\vec{X}, \vec{p}, \vec{\xi})p_j - C^j(D^j(\vec{X}, \vec{p}, \vec{\xi}), w_j, \omega_j) \right]$$

- 範囲の経済性は存在しないと仮定している。

- 議論をすすめるために、寡占競争の仮定を導入する。

Bertrand 競争を仮定するのが一般的。

- 価格競争のもとでの最適化条件は、

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}_k}{\partial p_j} = 0, \quad \forall j \in \mathcal{K}, \quad \forall k$$

$$\Leftrightarrow D^j + \sum_{j' \in \mathcal{K}} \frac{\partial D_{j'}}{\partial p_j} \left( p_{j'} - C_1^{j'} \Big|_{q_{j'} = D^{j'}} \right) = 0$$

- $C_1^j$  は、 $C^j$  の1つ目の変数  $q_j$  での偏微係数。(= 限界費用)
- $J$  本の方程式から  $J$  個のマージンを求められる。

- 限界費用は、

$$\vec{c} = \vec{p} + (\Delta D)^{-1} \vec{D}$$

- ただし、

$$\Delta D_{(i,j)} = \begin{cases} \frac{\partial D^i}{\partial p_j} & \text{if models } (i,j) \text{ produced by the same firm} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- マークアップの指標は  $\frac{p_j - C_1^j}{p_j}$

- 推定結果から計算した限界費用を使って、  
マークアップを計算すれば良い。