需要関数の推定 #1

Takahiro KONNO

https://github.com/tkkon/DemandEstimation

なぜ需要関数の推定？

- 企業が行動を決定する要因としてコストは重要。
  でも我々はふつうコストを観測することができない。

- NEIOではこの問題を念頭に間接アプローチが盛んに。
  その中で、需要関数の推定が大きなトピックになった。

例：企業の市場支配力

- 市場支配力はマークアップ $\frac{p-mc}{p}$ で測られる。
  ここで問題、*mc* が観測できない！

- 解決策：企業のマークアップを間接的に推定する。
  そのために需要関数が必要。

$$\frac{p^* - mc(q(p^*))}{p^*} = -\frac{1}{\varepsilon(p^*)}$$

復習

- 線形の需給モデルを考える。

$$\begin{aligned} Demand: q_t^d &= \gamma_1 p_t + \mathrm{x}_{t1}'\beta_1 + u_{t1} \\ Supply: p_t &= \gamma_2 q_t^s + \mathrm{x}_{t2}'\beta_2 + u_{t2} \\ Equilibrium: q_t^d &= q_t^s \end{aligned}$$

- p_t に内生性の問題が生じているため、

  通常の最小2乗法は使えない。

- 需要関数の推定ではふつう操作変数(IV)法を使う。

- 操作変数が満たすべき条件は、
  1. 誤差項と相関がない
  2. 内生変数(p_t)との相関が非ゼロ

- 需要側の操作変数には Cost shifters を使い、
  供給側の操作変数には Demand shifters を使う。

なぜ離散変数モデルか？

需要関数の導出 ― 古典的アプローチ

- 古典的アプローチでの2財の需要関数は、

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \quad s.t. \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

FOCを解いて $x_1^*(p_1, p_2, M), x_2^*(p_1, p_2, M)$ を求めるか、

あるいは間接効用関数 $V(p_1, p_2, M)$ から、

$$x_1^*(p_1, p_2, M) = -\frac{\partial V}{\partial p_1} \Big/ \frac{\partial V}{\partial M}$$

$$x_2^*(p_1, p_2, M) = -\frac{\partial V}{\partial p_2} \Big/ \frac{\partial V}{\partial M}$$

として求める。

古典的アプローチの限界

- 古典的アプローチがうまくいかない市場も少なくない。
  うまくいかない市場の特徴は、
  代替財がたくさんある。
  個人の消費行動は、選択肢の中から1つ選ぶ。

- このような市場を扱う方法として、離散選択モデル
  各消費者は、選択肢から1つだけを選んで消費すると仮定。

離散選択モデル

離散選択モデル

- *J* 個の代替可能な財(*j=1,…,J*)。
- 消費者*i*は自分の所得 y_i を財の(最大)1つか、outside good に割りあてる。

$$\max_{j,z} U_i(x_j, z) \quad s.t. \quad p_j + p_z z = y_i$$

- x_j はブランド*j*の特性。p_j は価格。
- *z*は、outside good の量。p_zは価格。
- Outside good(*j=0*) は、代替可能な財を購入しないということ。

- 各財の条件付き間接効用関数は、

$$U_{ij}^* = U_i(x_j, \frac{y - p_j}{p_z})$$

- Outside goodの効用は、

$$U_{i0}^* = U_i(0, \frac{y}{p_z})$$

- 消費者は効用関数を最大にする財を選択する。

$$\max_j U_{ij}^*$$

- U^*_{ij}は観測できる変数の関数と、
  観測できない要素を表す項で構成されるとする。
$$U^*_{ij} = V_{ij}(p_j, p_z, y_i) + \epsilon_{ij}$$

- ϵ_{ij}をstructural errorと呼ぶ。
  ϵ_{ij}は消費者は観測できるが、我々は観測できない。
  効用や選択は、消費者にとっては決定論的に決まる。

- このとき、消費者*i*が財*j*を購入する確率は、

$$D_{ij} = Prob\{\epsilon_{i0}, ..., \epsilon_{iJ} : U^*_{ij} > U^*_{ij'} \quad for \quad j' \neq j\}$$

- ϵ_{ij} の分布の仮定が選択確率の関数型を決定する。

よく使われる分布の仮定は2つ。

– $(\epsilon_{i0}, ..., \epsilon_{iJ})$ が多変量正規分布に従う。

– $(\epsilon_{i0}, ..., \epsilon_{iJ})$ が独立に同一の第1種極値分布に従う。

$$F(\epsilon) = exp[-exp(-\frac{\epsilon - \eta}{\mu})]$$

- 独立に同一の第1種極値分布に従うと仮定すると、選択確率は簡単なロジット型となる。

$$D_{ij}(...) = \frac{exp(V_{ij})}{\sum_{j'=1,...,J} exp(V_{ij'})}$$

- この選択確率は選択肢が増えても扱いやすいので、IOではこの仮定がよく用いられる。

IIA問題

- Homogeneous Logit モデルの問題点

  どの2ブランドの間の Odds ratio も代替財の数に依存しない。

$$\frac{D_j}{D_{j'}} = \frac{exp(V_j)}{exp(V_{j'})}$$

- RV車とBMWが同じシェアのとき、

  プリウスの価格が低下すると各需要は等しく影響を受ける。

IIA問題の解決 1：Nested Logit

- Utility shock $(\epsilon_{i0}, ..., \epsilon_{iN})$に特別な相関を仮定する。

  Nest 内のブランド同士は、異なるネストのブランド同士に比べて代替性が大きいと仮定する。

  Utility shock が Generalized Extreme Value に従うと仮定して導出する。

IIA問題の解決 2: Random Coefficient

- 消費者 *i* について coefficient が消費者で異なると仮定する。

$$U^*_{ij} = X'_j\beta_i - \alpha_i p_j + \epsilon_{ij}$$

- 個人レベルの選択確率は、

$$D_{ij} = \frac{exp(X'_j\beta_i - \alpha_i p_j)}{\sum_{j'} exp(X'_j\beta_i - \alpha_i p_{j'})}$$

- 集計マーケットシェアは、

$$\int \frac{exp(X'_j\beta_i - \alpha_i p_j)}{\sum_{j'} exp(X'_j\beta_i - \alpha_i p_{j'})} \cdot dF(\alpha_i, \beta i)$$

4.　Berry (1994)による需要関数の推定

Berry(1994)

- 集計データから差別化財の需要関数を推定する。

  内生性の問題にうまく対処した。

- 個別の効用モデル

$$U_{ij}^{*} = \underbrace{X_j'\beta - \alpha p_j + \xi_j}_{\equiv \delta_j} + \epsilon_{ij}$$

から、市場シェアを求める。

$$U_{ij}^* = \underbrace{X_j'\beta - \alpha p_j + \xi_j}_{\equiv\delta_j} + \epsilon_{ij}$$

- i は消費者。 j はブランド。
- δ_j はブランド j の mean utility
- 分析者は ξ_j も ϵ_{ij} も観測できない。消費者は観測できる。
- ξ_j は観測できない品質として解釈できる。
- 観測できない品質 ξ_j は、価格 p_j と相関する。（内生性）

- ϵ_{ij} は独立に同一の第一種極値分布に従うと仮定。
- Choice indicator を以下のように定義する。

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{if } i \text{ chooses brand } j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

- この仮定のもと、選択確率は logit 型となる。

$$Pr(y_{ij} = 1 \mid \beta, x_{j'}, \xi_1, ..., \xi_J) = \frac{exp(\delta_j)}{\sum_{j'=1}^{J} exp(\delta_{j'})}$$

- 集計マーケットシェアは、

$$s_j = \frac{1}{M}[M \cdot Pr(y_{ij} = 1 \mid \beta, x_{j'}, \xi_1, ..., \xi_J)] = \frac{exp(\delta_j)}{\sum_{j'=1}^{J} exp(\delta_{j'})}$$

$$\equiv \tilde{s_j}(\delta_0, \delta_1, ..., \delta_J) \equiv \tilde{s_j}(\alpha, \beta, x_{j'}, \xi_1, ..., \xi_J)$$

どうやって推定する？

- 実際に観測されたシェア$\hat{s}_j$（ *j=1,…,J* ）。

（Outside good のシェアは$1-\sum_{j=1}^{J}\hat{s}_j$）

- モデルとパラメータから予測シェア$\tilde{s}_j(\alpha,\beta,x_{j'},\xi_1,\dots,\xi_J)$。

- $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ は、観測されたシェアと予測シェアのズレが最小に

なるように決定される。どうやる？

Berry（1994）のアプローチ

- 操作変数 Z が存在すると仮定。Z は$E(\xi Z)=0$
- このモーメント条件のSample analogyは、

$$\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\xi_j Z_j=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}(\delta_j-X_j\beta+\alpha p_j)Z_j$$

- サンプル数を増やせば、真のパラメータに対して
  この値はゼロに近づくはず。→これでパラメータを測る。
- 推定の問題は、δ_j がわからないこと。
  Berryは 2-step approach を提案。

Step1：Inversion

- $\hat{s_i}$と$\tilde{s_i}$ がすべてのjに対して等しいとする ($\delta_0 = 0$ と標準化)。
- 未知の$\delta_1, ..., \delta_J$に関する J 個の等式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{s_1} &= \tilde{s_1}(\delta_1, ..., \delta_J) \\ &\vdots \\ \hat{s_J} &= \tilde{s_J}(\delta_1, ..., \delta_J) \end{aligned}$$

- これを解いて、$\delta_1, ..., \delta_J$を $\hat{s_1}, ..., \hat{s_J}$ の関数として書ける。
- このステップで、$\hat{\delta}_j \equiv \delta_j(\hat{s_1}, ..., \hat{s_J})$を得る。

Step2 : IV estimation

- ここでδ_jの定義に戻る。

$$\begin{aligned} \delta_1 &= X_i\beta - \alpha p_1 + \xi_1 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \delta_J &= X_J\beta - \alpha p_J + \xi_J \end{aligned}$$

- $\hat{\delta}_j$を使ってSample moment conditionを計算できる。

$$\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}(\hat{\delta}_j - X_j\beta + \alpha p_j)Z_j$$

について最小化問題をとけばいい。

- もし δ_j が線形なら linear IV method を使えばよい。

Homogeneous Logit Case

- 予測シェアは、$\tilde{s_j}(\delta_1, ..., \delta_J) = \dfrac{exp(\delta_j)}{1 + \sum_{j'=1}^{J} exp(\delta_{j'})}$

- 観測シェアと予測シェアの連立方程式は、

$$\hat{s_0} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{J} exp(\delta_j)}$$

$$\hat{s_1} = \frac{exp(\delta_1)}{1 + \sum_{j=1}^{J} exp(\delta_j)}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\hat{s_J} = \frac{exp(\delta_J)}{1 + \sum_{j=1}^{J} exp(\delta_j)}$$

- 連立方程式の自然対数をとる。

$$
\begin{aligned}
\ln \hat{s_1} &= \delta_1 - \ln(denom) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\ln \hat{s_J} &= \delta_J - \ln(denom) \\
\ln \hat{s_0} &= \delta_0 - \ln(denom)
\end{aligned}
$$

- これを解くと、

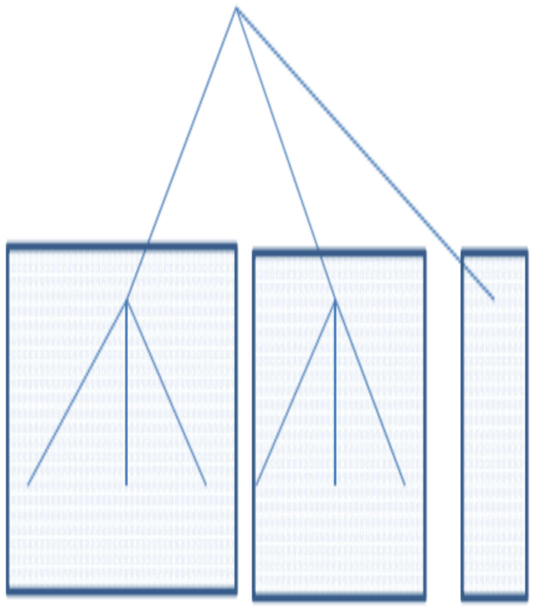
$$\delta_j = \ln \hat{s_j} - \ln \hat{s_0}, \;\; j = 1, ..., J$$

- Second step では、

$$\boxed{\ln \hat{s_j} - \ln \hat{s_0} = \delta_j = X_j \beta - \alpha p_j + \xi_j}$$

この式の IV regression を行えばいい。

Nested Logit



- (グループ g の財 j が選択される確率)

  =(グループ g 内で財 j が選択される確率)

  ×(グループ g が選択される確率)

のようにモデルを設定。

- 実際に推定する式は、

$$ln(s_{jt}) - ln(s_{0t}) = \delta_{jt} = X_j'\beta - \alpha p_j + \sigma ln(s_{jt}/s_{Gt}) + \xi_j$$

- 詳しくはBerry(1994)とか北野(2012)で

σの解釈

- $0 < \sigma < 1$ は、グループ内の需要の相関。

  $\sigma = 0$ ならば、グループの違いが代替関係に影響しない。

  $\sigma = 1$ ならば、グループ間の財の代替は行われないが、

  グループ内の財の代替関係は完全代替に近づく。

データについて

必要なデータ

- 集計“市場”データ

  時系列：1つの市場、複数期間のデータ。

  クロスセクション：複数市場、1期間のデータ。

  パネル：複数市場、複数期間のデータ。

- 推定に使う変数

  集計需要 or 集計シェア

  価格・財の特性・ 操作変数

  市場規模の定義（＝潜在需要）

  （デモグラフィックデータ）

適切な操作変数は？ ①製品の特性

- 他製品の特性（BLP）
  - 自社が作る他製品の特性の平均
  - 他社が作る製品の特性の平均

Bertrand競争を仮定しているため

適切な操作変数は？　②Cost shifter

- コストに影響するが、需要に影響しないような要因

  見つけるのは難しい‥

  BLPでは規模の経済性を仮定→生産量を使っている

- 生産要素価格

  価格に影響するが、需要には直接影響しない

  クロスセクションデータでは使えない可能性がある

適切な操作変数は？　③他市場の価格

- 他市場の価格（ Nevo(2001), Hausman(1996) ）

  複数市場にわたってCost shockがあれば、

  他市場の価格は操作変数として使える。

その他、特性が相関しているときはラグを用いたりするらしい

潜在需要

- シェアを求めるために必要。 $s_{jt} = \dfrac{q_j}{M_t}$ $s_{0t} = 1 - \sum_{i=1}^{J} s_j$

  先行研究に従うか、あるいは自分で決める。

例えば、

- 自動車 -> 世帯数
- ゲーム機 -> テレビの所有世帯数
- ポータルサイト -> インターネット利用者数

演習1. Homogenous Logit

- 推定式は、

$$\boxed{\underbrace{ln(s_{jt}) - ln(s_{0t})}_{y_{jt}} = \delta_{jt} = X_j'\beta - \alpha p_j + \xi_j}$$

- もし外生性がなければOLSで推定。
- 価格の外生性があれば、操作変数法(2SLS)で推定。

$$\boxed{\underbrace{ln(s_{jt}) - ln(s_{0t})}_{y_{jt}} = \delta_{jt} = X_j'\beta - \alpha p_j + \xi_j}$$

1. OLSで推定する

reg y price adp cals fat sugar

2. 2SLS: 自社が生産する他ブランドの特性の平均値

ivreg y (price = z1adp z1cals z1fat z1sugar) adp cals fat sugar

3. 2SLS: 他社が生産するブランドの特性の平均値

ivreg y (price = z2adp z2cals z2fat z2sugar) adp cals fat sugar

演習2. Nested Logit

- 推定式は、

$$\boxed{\underbrace{ln(s_{jt}) - ln(s_{0t})}_{y_{jt}} = \delta_{jt} = X_j'\beta - \alpha p_j + \sigma ln(s_{jt}/s_{Gt}) + \xi_j}$$

- $0 < \sigma < 1$ は、グループ内の需要の相関。
- 価格の外生性がなくても、操作変数法を用いる。

$$\boxed{\underbrace{ln(s_{jt}) - ln(s_{0t})}_{y_{jt}} = \delta_{jt} = X_j'\beta - \alpha p_j + \sigma ln(s_{jt}/s_{Gt}) + \xi_j}$$

~~1.1. OLSで推定する~~

~~reg y price adp cals fat sugar lngsh~~

2. 2SLS: 自社が生産する他ブランドの特性の平均値

ivreg y (price = z1adp z1cals z1fat z1sugar) adp cals fat sugar lngsh

3. 2SLS: 他社が生産するブランドの特性の平均値

ivreg y (price = z2adp z2cals z2fat z2sugar) adp cals fat sugar lngsh

おまけ

マークアップを計算する

- 需要の推定を利用して企業のマークアップを求める。
- 推定されたブランド j の需要関数は、

$$D^j\left(\underbrace{X_1,\ldots,X_J}_{\equiv\vec{X}};\underbrace{p_1,\ldots,p_J}_{\equiv\vec{p}};\underbrace{\xi_1,\ldots,\xi_J}_{\equiv\vec{\xi}}\right)$$

- ブランド j を生産するコストは、

$$C^j(q_j,w_j,\omega_j)$$

- w_j は観測可能なコスト要因。
- ω_j は観測できないコスト要因。

- ブランド j の利潤は、

$$\Pi_j = D^j(\vec{X}, \vec{p}, \vec{\xi})p_j - C^j(D^j(\vec{X}, \vec{p}, \vec{\xi}), w_j, \omega_j)$$

- 複数財を生産する企業 k の利潤は、

$$\tilde{\Pi}_k = \sum_{j \in \mathcal{K}} \Pi_j = \sum_{j \in \mathcal{K}} \left[D^j(\vec{X}, \vec{p}, \vec{\xi})p_j - C^j(D^j(\vec{X}, \vec{p}, \vec{\xi}), w_j, \omega_j) \right]$$

- 範囲の経済性は存在しないと仮定している。

- 議論をすすめるために、寡占競争の仮定を導入する。

  Bertland 競争を仮定するのが一般的。

- 価格競争のもとでの最適化条件は、

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}_k}{\partial p_j} = 0, \ \forall j \in \mathcal{K}, \ \forall k$$

$$\leftrightarrow D^j + \sum_{j' \in \mathcal{K}} \frac{\partial D_{j'}}{\partial p_j} \left(p_{j'} - C_1^{j'} \Big|_{q_{j'} = D^{j'}} \right) = 0$$

- C_1^j は、C^j の1つ目の変数 q_j での偏微係数。(= 限界費用)
- J 本の方程式から J 個のマージンを求められる。

- 限界費用は、

$$\vec{c} = \vec{p} + (\Delta D)^{-1} \vec{D}$$

- ただし、

$$\Delta D_{(i,j)} = \begin{cases} \frac{\partial D^i}{\partial p_j} & \text{if models } (i,j) \text{ produced by the same firm} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- マークアップの指標は $\frac{p_j - C_1^j}{p_j}$

- 推定結果から計算した限界費用を使って、
  マークアップを計算すれば良い。