*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение* *высшего образования*

|  |  |
| --- | --- |
| **Изображение выглядит как эмблема, герб, нашивка, символ  Автоматически созданное описание** | ***«Московский государственный технический университет  имени Н.Э. Баумана»***  ***(национальный исследовательский университет)***  ***(МГТУ им. Н.Э. Баумана)*** |

**ФАКУЛЬТЕТ** ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ\_\_\_\_\_\_\_\_

**КАФЕДРА** ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (ФН11)\_

**НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ** МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ (02.03.01)

**Отчет**

**по лабораторной работе № \_5\_**

**Название лабораторной работы: Проверка гипотез о параметрах нормального распределения**

**Вариант № 2**

**Дисциплина:** Теория вероятности и математическая статистика

Студент группы ФН11-52Б **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Кожемякин Г.А.**

(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Преподаватель  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Облакова Т.В.**

(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Москва, 2024

**Задание**

По данной выборке из нормально распределенной генеральной совокупности:

1) постройте критерий уровня и проверьте гипотезу против односторонней альтернативы , если неизвестно;

2) постройте критерий уровня и проверьте гипотезу против альтернативы , если неизвестно;

3) постройте оптимальный критерий уровня и проверьте против простой альтернативы , если известно;

4) найдите ошибку второго рода критерия ;

5) найдите такие значения для которых ошибка второго рода критерия не превосходит ;

6) постройте совмещенные графики гистограммы относительных частот данной выборки и плотностей нормального распределения с параметрами и

**Исходные данные**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -21.057 | -14.597 | -11.356 | -13.153 | -9.221 | -14.814 | -10.336 | -13.539 | -15.996 | -15.144 |
| -5.179 | -15.539 | -19.106 | -11.762 | -11.226 | -14.907 | -12.371 | -16.74 | -9.65 | -11.85 |
| -8.535 | -6.885 | -11.704 | -12.286 | -8.729 | -9.687 | -3.822 | -11.15 | -13.873 | -9.015 |
| -12.949 | -10.62 | -19.12 | -13.785 | -11.333 | -9.046 | -12.113 | -10.035 | -12.317 | -10.029 |
| -11.247 | -10.116 | -11.453 | -15.089 | -12.566 | -11.871 | -9.962 | -14.874 | -12.061 | -10.429 |
| -15.141 | -15.219 | -10.488 | -12.556 | -6.501 | -15.068 | -9.235 | -14.619 | -9.286 | -15.039 |
| -10.143 | -13.752 | -10.578 | -10.234 | -15.48 | -9.082 | -11.872 | -12.558 | -7.085 | -11.626 |
| -12.213 | -8.93 | -12.331 | -5.643 | -10.078 | -14.568 | -9.024 | -11.993 | -17.757 | -11.451 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вар |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 0.05 |  |  | 3.3 |  |  | 3 | 0.05 | 80 |

**Решение задачи**

**Первоначальная обработка статистических данных**

Обработка статистических данных произведена при помощи математических пакетов языка Python.

* Крайние члены вариационного ряда и размах выборки

Если элементы выборки упорядочить по возрастанию, получится новый набор элементов, называемый вариационным рядом. Тогда крайние члены вариационного ряда находятся как минимум и максимум выборки :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Размахом выборки называется расстояние между максимальным и минимальным членом вариационного ряда:

* Группировка данных

Объединим по группам элементы выборки и построим интервальный вариационный ряд. Для этого отрезок разбивается на равных интервалов. Количество интервалов вычислим по правилу Стёрджеса:

где – обозначение целой части числа.

Для группировки данных определим интервальный шаг:

Найдем границы интервалов группировки:

Распределим элементы выборки по полученным интервалам с помощью функции:

Найдем частоты попадания элементов из  в каждый из  интервалов:

Далее находим относительные частоты путем деления частот попадания элементов из в каждый интервал на элементов выборки:

Проверим, что сумма вероятности равна 1:

Найдем вектор *плотности относительной частоты*:

Таким образом была произведена группировка статистических данных. Р езультатом группировки является интервальный вариационный ряд, который можно представить в виде Таблицы 1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Интервал | Частота | Относительная частота | Плотность относительной частоты |
|  | 3 |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | 26 |  |  |
|  |  |  |  |
|  | 5 |  |  |
|  |  |  |  |

Таблица 1 – Интервальный вариационный ряд

* Гистограмма относительных частот

Построим гистограмму относительных частот, для этого по оси абсцисс указывается столбец , а по оси ординат – столбец .

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, снимок экрана

Автоматически созданное описание

Рисунок 1 – Гистограмма относительных частот

* Выборочные характеристики выборки

Найдем выборочное среднее и среднее квадратичное отклонение выборки **:**

Решение:

1. Построим критерий уровня и проверим гипотезу против левосторонней альтернативы если неизвестно.

Критическое множество для среднего при альтернативе имеет вид:

Рассмотрим статистику:

Тогда по определению ошибки первого рода :

Выразим :

Следовательно, гипотеза принимается, потому что не принадлежит критическому множеству .

1. Построим критерий уровня и проверим гипотезу против левосторонней альтернативы если неизвестно.

Критическое множество для среднего квадратического отклонения при альтернативе имеет вид:

Рассмотрим статистику:

Тогда по определению ошибки первого рода :

Выразим :

Следовательно, гипотеза принимается, потому что не принадлежит критическому множеству .

1. Построим критерий уровня и проверим гипотезу против левосторонней альтернативы , если известно .

Критическое множество для среднего квадратического отклонения при альтернативе имеет вид:

Рассмотрим статистику:

Тогда по определению ошибки первого рода :

Выразим :

Следовательно, гипотеза принимается, так как не принадлежит критическому множеству .

1. Найдем ошибку второго рода критерия

Согласно определению ошибки второго рода :

1. Найдем значения , для которых ошибка второго рода критерия не превосходит .

Оптимальное значение , при котором ошибка второго рода не превышает , можно вычислить по формуле:

1. Построим совмещенные графики гистограммы относительных частот выборки и плотностей нормального распределения и

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, График

Автоматически созданное описание

Рисунок 2 – Совмещенные графики гистограммы относительных частот выборки и плотностей нормального распределения и .

**Выводы**

В ходе выполнения лабораторной работы освоены этапы первоначальной обработки статистических данных и изучены основные теоретические аспекты данной темы. Приобретены навыки составления интервального вариационного ряда, являющегося результатом группировки данных (Таблица 1), по заданной выборке, а также вычисления выборочного среднего и среднего квадратичного отклонения выборки. При помощи специализированных математических пакетов языка Python построены гистограмма относительных частот и графики плотностей нормального распределения с различными значениями параметров (Рисунок 1, 2). По Рисунку 2 видно, что кривая плотности нормального закона для основной гипотезы лучше ложится на гистограмму, чем в случае альтернативы , что согласуется с пунктом 3. Помимо этого, были посчитаны критические множества для среднего и среднего квадратичного отклонения, а также проверены 3 гипотезы с разными альтернативами, найдена ошибка второго рода для критерия и такое значение параметра , при котором ошибка второго рода критерия не превосходит .

**Приложение**

В приложении представлен программный код на языке Python, при помощи которого была выполнена лабораторная работа.

**import** numpy **as** np  
**import** matplotlib.pyplot **as** plt  
**from** scipy.stats **import** t, chi2, norm  
  
Data = [-21.057,-14.597,-11.356,-13.153,-9.221,-14.814,-10.336,-13.539,-15.996,-15.144,  
 -5.179, -15.539,-19.106,-11.762,-11.226,-14.907,-12.371,-16.74,-9.65,-11.85,  
 -8.535,-6.885,-11.704,-12.286,-8.729,-9.687,-3.822,-11.15,-13.873,-9.015,  
 -12.949,-10.62,-19.12,-13.785,-11.333,-9.046,-12.113,-10.035,-12.317,-10.029,  
 -11.247,-10.116,-11.453,-15.089,-12.566,-11.871,-9.962,-14.874,-12.061,-10.429,  
 -15.141,-15.219,-10.488,-12.556,-6.501,-15.068,-9.235,-14.619,-9.286,-15.039,  
 -10.143,-13.752,-10.578,-10.234,-15.48,-9.082,-11.872,-12.558,-7.085,-11.626,  
 -12.213,-8.93,-12.331,-5.643,-10.078,-14.568,-9.024,-11.993,-17.757,-11.451]  
  
a0 = -11.6  
alpha = 0.05  
s0 = 3.3  
s1 = 3  
a1 = -12.6  
n = len(Data)  
min = min(Data)  
max = max(Data)  
omega = max - min  
print(**f'Крайние члены вариационного ряда: минимум - {**min**}, максимум - {**max**}'**)  
print(**f'Размах выборки: {**omega**}'**)  
  
l = 7 *# Число интервалов*h = omega / l  
print(**f'Интервальный шаг: {**h**}'**)  
  
borders = [0 **for** i **in** range(l+1)]  
print(**'Границы интервалов:'**)  
**for** i **in** range(l+1):  
 **if** i == 0:  
 borders[i] = min  
 print(**f'{**i**}: {**borders[i]**}'**)  
 **else**:  
 borders[i] = borders[i-1] + h  
 print(**f'{**i**}: {**borders[i]**}'**)  
  
nu = [0 **for** i **in** range(l)]  
**for** elem **in** Data:  
 i = 0  
 **while** elem >= borders[i]:  
 i += 1  
 nu[i-1] += 1  
  
print(**'Количество элементов в каждом из интервалов:'**, nu)  
p = [nu[i] / n **for** i **in** range(len(nu))]  
print(**'Относительные частоты:'**, p)  
pr = [p[i] / h **for** i **in** range(len(p))]  
print(**'Вектор плотности относительной частоты:'**, pr)  
  
*# Гистограмма относительных частот*widths = np.diff(borders)  
plt.figure(figsize=(10, 6))  
plt.bar(borders[:-1], pr, width=widths, align=**'edge'**, edgecolor=**'black'**, color=**'orange'**)  
plt.xlabel(**'Интервалы (int)'**)  
plt.ylabel(**'Относительные частоты (pr)'**)  
plt.title(**'Гистограмма относительных частот'**)  
plt.grid(axis=**'y'**, linestyle=**'--'**, alpha=0.7)  
plt.xlim([-21.057, -3.822])  
plt.show()  
  
avg = sum(Data) / n  
print(**f'Выборочное среднее: {**avg**}'**)  
  
s2 = 0  
**for** elem **in** Data:  
 s2 += (elem - avg) \* (elem - avg)  
  
s2 /= (n - 1)  
s = s2 \*\* (1 / 2)  
print(**f'Выборочная дисперсия: {**s2**}'**)  
print(**f'СКО: {**s**}'**)  
  
*# №1*C2 = a0 + t.ppf(alpha, df=n-1) \* s / (n \*\* (1/2))  
print(C2)  
  
*# №2*C3 = s0 \* s0 \* chi2.ppf(alpha, df=n-1) / (n - 1)  
print(C3)  
  
*# №3*u005 = -1.64485 *# квантиль нормального распределения*C1 = a0 + s1 \* u005 / (n \*\* (1 / 2))  
print(C1)  
  
*# №4*beta = 1 - 0.90932  
print(beta)  
  
*# №5*a1b = C1 - 1.644853627 \* s1 / (n \*\* (1/2))  
print(a1b)  
  
*# №6*x = np.linspace(borders[0], borders[-1], 500)  
density\_a0 = norm.pdf(x, loc=a0, scale=s1)  
density\_a1 = norm.pdf(x, loc=a1, scale=s1)  
widths = np.diff(borders)  
plt.figure(figsize=(10, 6))  
plt.bar(borders[:-1], pr, width=widths, align=**'edge'**, edgecolor=**'black'**, color=**'orange'**, alpha=0.7, label=**'Гистограмма относительных частот'**)  
plt.plot(x, density\_a0, color=**'blue'**, label=**f'N({**a0**}, {**s1**})'**)  
plt.plot(x, density\_a1, color=**'green'**, label=**f'N({**a1**}, {**s1**})'**)  
plt.xlabel(**'Интервалы (int)'**)  
plt.ylabel(**'Относительные частоты (pr)'**)  
plt.title(**'Гистограмма относительных частот с графиками плотностей нормального распределения'**)  
plt.grid(axis=**'y'**, linestyle=**'--'**, alpha=0.7)  
plt.xlim([-21.057, -3.822])  
plt.legend()  
plt.show()