Notas de física 1

Claudia Giribet

Departamento de Física,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires.

E-mail: first@one.univ

Índice general

Capítulo 1

Cinemática

La cinemática es la rama de la mecánica que estudia los movimientos sin tener en cuenta las causas que los producen. Desde su punto de vista es netamente descriptivo.

Comencemos por definir lo que es movimiento. Se dice que un objeto está en movimiento cuando cambia su posición en el tiempo. De igual forma, si su posición no cambia con el tiempo, se dice que está en reposo. Vamos a ver que tanto el concepto de movimiento como el de reposo son conceptos absolutos.

Por ejemplo, supongamos que en una estación hay un tren esperando a arrancar. Un pasajero se encuentra asomado a la ventanilla, despidiéndose de alguien en el andén. En ese momento, el hombre en el andén observa que el pasajero del tren está en reposo (i.e. no se mueve) respecto de él. Otro pasajero, que se encuentra sentado junto al primero, también observa que este se encuentra en reposo respecto de él. Es decir, la descripción del estado de movimiento del primer pasajero es la misma tanto para el hombre del andén, como para el segundo pasajero. Ahora el tren se pone en marcha. El hombre del andén observa que su amigo en el tren se aleja de él (i.e. cambia su posición en el tiempo respecto de él); y, por lo tanto, razona que su amigo está en movimiento y él está en reposo. Sin embargo, para el segundo pasajero, el estado de movimiento del primer pasajero no ha variado y si varia el del hombre del andén. Entonces el hombre en el andén se esta moviendo respecto de ambos pasajeros. ¿Quién tiene razón? Tanto el peatón como el segundo pasajero, lo único que ha cambiado es el punto de vista del observador. La moraleja es que para referir a un sistema en movimiento hace falta un observador o sistema de referencia. El peatón define al anden como su sistema de referencia, el andén está en reposo respecto de él, por lo tanto, cualquier objeto que cambie su posición respecto del andén estará en movimiento respecto de este. El segundo pasajero define como sus sistema de referencia al tren y, por lo tanto, el peatón esta en movimiento respecto de él. Ninguno de los dos sistemas es absoluto, puede decirse que uno está en reposo y el otro en movimiento pero solo hablando en forma relativa (i.e. en reposo o en movimiento respecto de él). Aunque pareciera natural elegir el andén como sistema en reposo, observen que este se encuentra moviéndose con la Tierra respecto del Sol, que el Sol se encuentra moviéndose respecto de las estrellas y así se podría seguir.

Consecuencia Cuando se habla de un sistema en movimiento, siempre hay que referirlo a algún sistema de referencia.

1.1 Sistema de referencia y sitema de coordenadas

Vamos a analizar como se especifica la posición de un objeto. Si el objeto es extenso (por ejemplo, el triángulo de la Fig. 1.1) el observador O puede elegir

a) Un punto del objeto, y ver a que distancia, dirección y sentido se haya respecto de él. Si elige el punto A, lo anterior se puede representar con el vector que va desde O hasta A. La variación de la posición de A nos va a estar mostrando como se traslada todo el cuerpo pues A se traslada y todo el cuerpo lo acompaña. En este caso, estamos ante un movimiento de traslación.
b) Si el objeto esta girando, lo anterior no basta y hay que dar la orientación del objeto, por ejemplo, como varia la posición de B respecto de A. En este caso, estamos ante un movimiento de rotación.

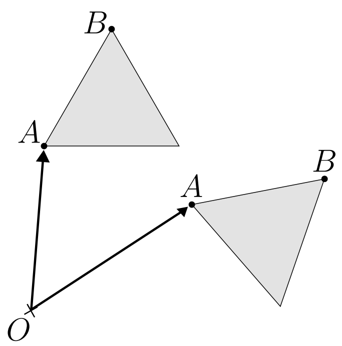

Figura 1.1

Si el objeto se puede considerar puntual, no tiene sentido hablar de su orientación, o sea no se puede hablar de rotación, entonces, el movimiento más general de un objeto puntual es una traslación. Igualmente, si se trata de un objeto extenso trasladándose solo basta conocer el movimiento de un punto para conocer el de todos, lo podemos considerar puntual. Un ejemplo de esto último es un tren circulando por una vía.

Objeto puntual Es aquel cuyas dimensiones son despreciables frente a las distancias típicas del problema. Por ejemplo, un avión en vuelo para un observador en tierra.

De acuerdo a (a), la posición se conoce si se conoce el segmento orientado desde el punto de referencia O al punto A, al cual llamaremos vector posición de A. Como el movimiento se realiza en el espacio, conviene plantear un sistema de coordenadas para poder describir este vector posición.

Notar que sistema de referencia no es igual a sistema de coordenadas.

Sistema de referencia Sistema al cual se refiere el movimiento.

Sistema de coordenadas Se adosa al sistema de referencia para describir el movimiento.

Ejemplo 1.1: Por ejemplo, en la Fig. 1.2 tenemos que $\vec{r}_A$ da la posición de A desde el sistema de referencia O y $\vec{r}\,'_A$ da la posición de A desde el sistema de referencia O'. Entonces estamos cambiando de sistema de referencia.

En la Fig. 1.3 tenemos el sistema de referencia O el cual tiene dos sistemas de coordenadas adosados a él, (x, y, z) y (x', y', z'). El vector $\vec{r}_A$ es el mismo pero cambia su descripción. Para el primer sistema de coordenadas tenemos que

$$\vec{r}_A(t) = (x_A(t), y_A(t), z_A(t))$$

mientras que para el segundo sistema de coordenadas es

$$\vec{r}_A(t) = (x'_A(t), y'_A(t), z'_A(t))$$

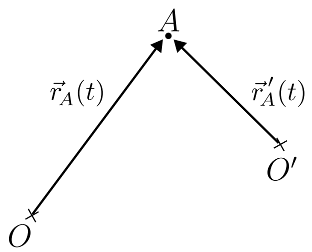

Figura 1.2

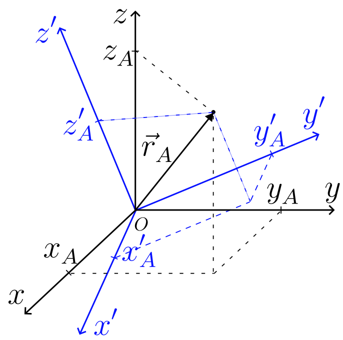

Figura 1.3

Supongamos un sistema A (Fig.1.4) en movimiento respecto del observador O. El vector posición sigue a A en su movimiento. Su extremo describe la curva que A describe en el espacio. Esa curva se denomina *trayectoria* y caracteriza al movimiento.

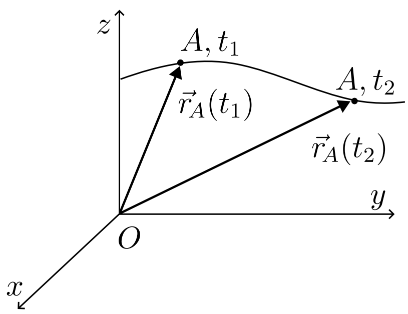

Figura 1.4

Para estudiar el movimiento de traslación nos interesa conocer

- La trayectoria (curva que describe en el espacio).
- Magnitudes físicas que lo describen.
- Relaciones entre las magnitudes.

1.2 Grados de libertad y vínculos

La trayectoria siempre es una curva en el espacio, sin embargo, se observa que no es exactamente lo mismo describir el movimiento de:

1. Una mosca moviéndose libremente en la habitación.
2. Una mosca moviéndose sobre una mesa.
3. Una mosca moviéndose sobre un hilo tenso.

En (1) se necesitan tres ejes coordenados para describir el movimiento, mientras que en (2) bastan solo dos y en (3) solo uno.

Se dice que un sistema tiene *n grados de libertad* si se requieren n parámetros independientes para fijar su posición. Cada grado de libertad corresponde a una posibilidad de movimiento. En el caso de la traslación el movimiento puede tener hasta 3 grados de libertad. ¿Cuando se tienen menos? Cuando hay condiciones materiales que limitan el movimiento (vínculos). Ejemplo: una hormiga se mueve sobre la superficie de una piedra. Esa superficie esta caracterizada por $z = f(x, y)$. Entonces tengo 2 parámetros independientes (x e y), o sea, 2 grados de libertad.

1.3 Movimiento unidimensional rectilíneo

En el espacio, basta con trabajar con un eje cartesiano. Si la trayectoria es una recta (Fig. 1.5), entonces hacemos coincidir el eje de coordenadas con la trayectoria. Con este sistema de coordenadas nuestro vector posición es $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x}$.

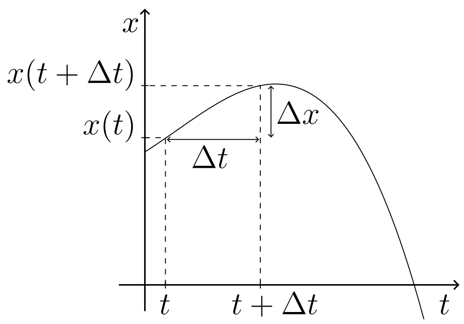

Figura 1.5

Podemos representar (Fig. 1.6) cómo varía $x(t)$. Esta va a ser nuestra curva paramétrica u horaria de la trayectoria.

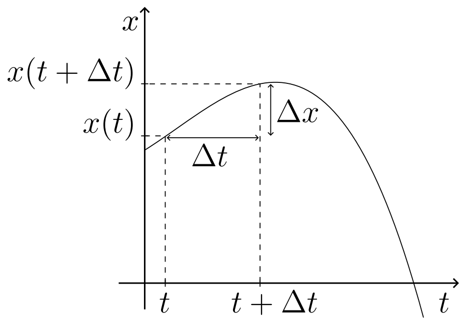

Figura 1.6

Supongamos que se quiere conocer la rapidez con que cambia la posición con t. Al tiempo t, el móvil se encuentra en $x(t)$. Un Δt después, al tiempo $t+\Delta t$, se encuentra en $x(t+\Delta t)$. Defino que, en ese Δt, la *rapidez media* fue

$$\langle \vec{v}_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{x} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\hat{x}$$

A esa *rapidez media* se la llama *velocidad media*.

Si queremos saber la rapidez con que cambia instante a instante, afinamos la medición tomando un Δt cada vez más chico.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\hat{x} \equiv \frac{dx(t)}{dt}\hat{x} \equiv \dot{x}(t)\hat{x} = v_x(t)\hat{x}$$

$v_x(t)$ se llama la *velocidad instantánea* (o velocidad a secas) en la dirección x. Observemos que su valor es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva horaria en cada punto.

Veamos sus características:

- La velocidad es un vector. En general vamos a ver que

  $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

  En nuestro caso (movimiento unidimensional)

  $$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x}$$

  donde $\hat{x}$ marca la dirección del movimiento, dt es la rapidez con que cambia la coordenada y dx es el sentido del movimiento.

- La velocidad es tangente a la trayectoria punto a punto. Queda claro que es tangente a la curva horaria. Tambien podemos ver que es tangente a la trayectoria (ver Fig. 1.7).

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Entonces $\vec{v}$ es paralelo a $\Delta\vec{r}$ y $\Delta\vec{r}$ es tangente a la curva cuando $\Delta t \to 0$.

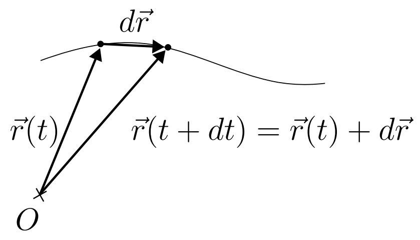

Figura 1.7

Ejemplo 1.2: Supongamos que $x(t)$ varia segun la Fig. 1.8

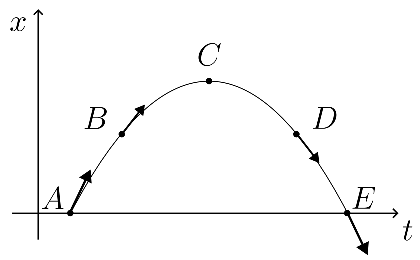

Figura 1.8

Del gráfico anterior vemos que (por el valor de la pendiente en cada punto)

$$v_A, v_B > 0, \quad v_A > v_B$$
$$v_C = 0$$
$$v_D, v_E < 0, \quad |v_E| > |v_D|$$

De la misma manera podemos definir la rapidez media e instantánea con que cambia la velocidad. Esa rapidez se denomina *aceleración*. Siguiendo el mismo proceso que antes resulta que

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$
$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

En nuestro caso (movimiento unidimensional)

$$\vec{a}_x(t) = \dot{v_x}\hat{x} = \ddot{x}\hat{x}$$

Por analogía con lo anterior, vemos que la aceleración es tangente a la curva $v(t)$ en cada punto.

Ejemplo 1.3: Supongamos que $v(t)$ varía como se muestra en la Fig. 1.9.

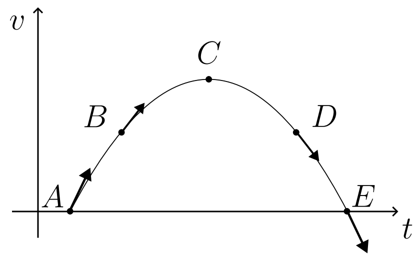

Figura 1.9

Del gráfico anterior vemos que (por el valor de la pendiente en cada punto)

$$a_A, a_B > 0, \quad a_A > a_B$$
$$a_C = 0$$
$$a_D, a_E < 0, \quad |a_E| > |a_D|$$

Tenemos que para todo tiempo t, la velocidad v es mayor o igual a cero. Esto implica que el móvil avanza hacia los x positivos para todo t. Sin embargo

$$t_A < t < t_C : a > 0 \Longrightarrow v \text{ aumenta}$$
$$t_C < t < t_E : a < 0 \Longrightarrow v \text{ disminuye}$$

Representando la trayectoria

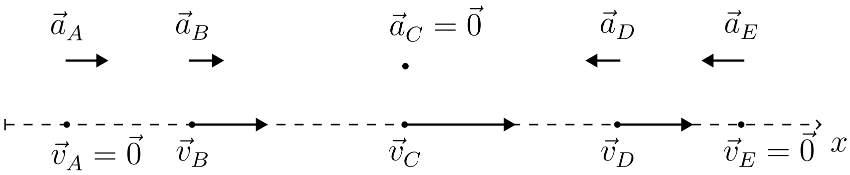

Figura 1.10. ¿Qué pasa en E? En E se detiene.

La aceleración con igual sentido que la velocidad aumenta ésta, mientras que una aceleración contraria a la velocidad disminuye su módulo. Es un error decir que una aceleración negativa disminuye la velocidad; que la velocidad aumente o disminuya depende del sentido relativo de la aceleración.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \longrightarrow \\ \vec{v} \longrightarrow \end{array}\right\} \vec{v} \text{ aumenta} \qquad \left.\begin{array}{l} \vec{a} \longrightarrow \\ \vec{v} \longleftarrow \end{array}\right\} \vec{v} \text{ disminuye}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \longleftarrow \\ \vec{v} \longrightarrow \end{array}\right\} \vec{v} \text{ disminuye} \qquad \left.\begin{array}{l} \vec{a} \longleftarrow \\ \vec{v} \longleftarrow \end{array}\right\} \vec{v} \text{ aumenta}$$

En general, si conocemos $\vec{v}(t) = v(t)\hat{x}$, podemos llegar a conocer $x(t)$

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{x} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x} \Longrightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Longrightarrow v(t)dt = dx(t)$$

Integramos esta última igualdad

$$\int\limits_{x(t_0)}^{x(t)} dx(t) = \int\limits_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Notemos que

- t_0 es el instante en que comienza el movimiento, o bien en que comienza la observación del movimiento.
- $x(t_0)$ es la posición del móvil al instante t_0.
- El origen del tiempo puede elegirse de acuerdo a cada problema en particular. Por ejemplo, $t_0 = 0$.

Si conocemos $\vec{a}(t) = a(t)\hat{x}$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Longrightarrow dv(t) = a(t)dt$$

Integramos

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

1.3.1 Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Está caracterizado por

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{cte} \\ \vec{a}(t) = \vec{0} \end{cases}$$

Hacemos coincidir al eje x con la dirección del movimiento. Entonces

$$\vec{v}(t) = v_0\hat{x} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \Longrightarrow dx = v_0 dt$$

Integramos

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0)$$

si $x(t_0) = x_0$, llegamos a

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Representemos $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ para el caso particular donde $x_0 > 0$ y $v_0 > 0$

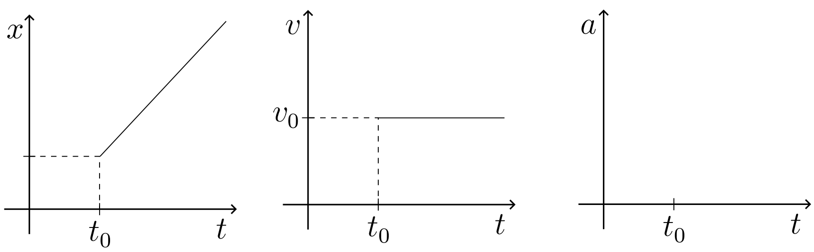

Figura 1.11

1.3.2 Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Caracterizado por $\vec{a}(t) = \vec{cte}$ (en módulo, dirección y sentido). Nuevamente hacemos coincidir al eje x con la dirección de movimiento

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow a_0\hat{x} = \frac{dv}{dt}\hat{x} \Longrightarrow a_0 = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow dv = a_0 dt$$

Integramos para obtener $v(t)$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a_0 dt$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

donde $v_0 = v(t_0)$. Integramos $v(t)$ para obtener $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Longrightarrow dx = v(t)dt$$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a_0(t - t_0)]dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

donde t_0 es el instante en que comienza el movimiento o éste comienza a observarse, x_0 es es la posición del móvil a $t = t_0$ y v_0 es la velocidad del móvil a $t = t_0$.

Representemos $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ para el caso particular donde $x_0, v_0, a_0 > 0$

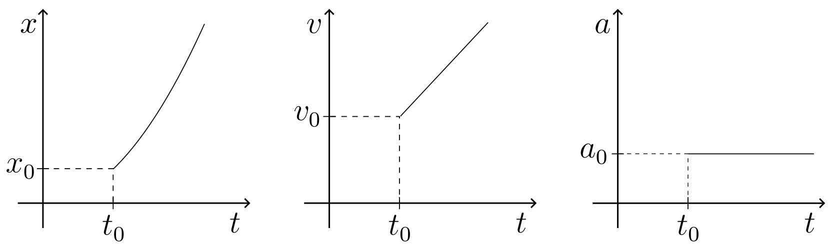

Figura 1.12

1.3.3 Caída libre

Un caso muy imporante del *MRUV* lo constituye la caída de los cuerpos bajo la acción de la atracción gravitatoria. Se debe a Galileo el descubrimiento que todos los cuerpos que están cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con una aceleración constante, dirigida hacia el centro de la Tierra, independiente de la forma, tamaño y material que los compone. Esta acelaración se denomina *aceleración de la gravedad* y la denotamos con $\vec{g}$. El valor de $\vec{g}$ depende del lugar de la Tierra y la altura sobre el nivel del mar. A nivel del mar $|\vec{g}| = 9{,}8\ m/s^2$.

Supongamos un cuerpo que a $t = 0$ se lo deja caer desde una altura h con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = -v_0\hat{z}$. De acuerdo a lo que vimos

$$
\begin{aligned}
z(t) &= z(t=0) + v_z(t=0)t + \frac{1}{2}a_z t^2 \\
v_z(t) &= v_z(t=0) + a_z t
\end{aligned}
$$

Según los datos del problema

$$z(t=0) = h,\ v_z(t=0) = -v_0,\ a_z = -g$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
z(t) &= h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\
v_z(t) &= -v_0 - gt
\end{aligned}
$$

En particular, si se lo lanza sin una velocidad inicial ($v_0 = 0$)

$$
\begin{aligned}
z(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \\
v_z(t) &= -gt
\end{aligned}
$$

Si queremos saber el tiempo que tarda en caer desde h hasta el suelo, podemos plantear $z(t = t_c) = 0$, donde t_c es el tiempo de caída.

$$
\begin{aligned}
z(t_c) = 0 &= h - \frac{1}{2}gt_c^2 \\
t_c &= \sqrt{\frac{2h}{g}}
\end{aligned}
$$

La velocidad con que llega al suelo es

$$v(t_c) = -gt_c = -\sqrt{2hg}$$

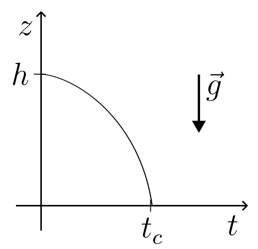

Figura 1.13

1.4 Movimiento en 3 dimensiones

El móvil describe una trayectoria general en el espacio (Fig. 1.14). El vector posición sigue a P en su movimiento; su extremo describe la curva que P describe en el espacio (trayectoria), la cual caracteriza al movimiento.

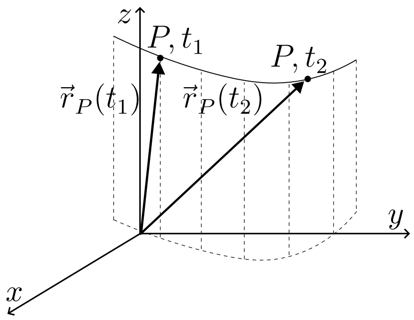

Figura 1.14

Si se elige una terna de ejes coordenados (x, y, z), la posición del objeto se puede descomponer como una suma de 3 vectores (ver Fig.(1.15)). Las proyecciones de $\vec{r}_P(t)$ en el sistema de ejes es

$$\begin{aligned}\vec{r}_P(t) &= \vec{x}_P(t) + \vec{y}_P(t) + \vec{z}_P(t)\\ \vec{r}_P(t) &= x_P(t)\hat{x} + y_P(t)\hat{y} + z_P(t)\hat{z}\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Por lo tanto, la posición del objeto queda determinada en cada instante dando 3 datos.

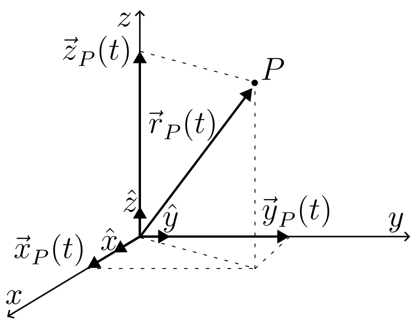

Figura 1.15

Esto permite descomponer el movimiento en 3 *movimientos unidimensionales independientes* (en realidad, solo ligados a través de t). Entonces la Ec.(1.4.1) se descompone en 3 ecuaciones escalares, llamadas ecuaciones paramétricas de la trayectoria o curvas horarias.

Ejemplo 1.4: Supongamos un móvil moviendóse (Fig. 1.16) de tal manera que sus curvas horarias son

$$\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = kt^2 \end{cases} \tag{1.4.2}$$

donde v y k son constantes.

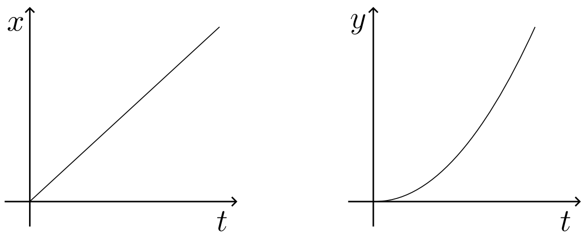

Figura 1.16

Queremos encontrar la trayectoria $y(x)$. ¿Qué nos dice la Ec.(1.4.2)? Nos dice que para cada instante t (el mismo instante), el móvil se encuentra en un punto del plano de coordenadas $(x, y) = (vt, kt^2)$.

El móvil alcanza el valor x en $t = x/v$. En ese momento, su posición en y será

$$y\left(t = \frac{x}{v}\right) = k\left(\frac{x}{v}\right)^2$$
$$y(x) = \frac{k}{v^2}x^2$$

la cuál es una trayectoria parabólica (ver Fig.(1.17)). Observemos que y varía cuadraticamente, mientras que x varía linealmente.

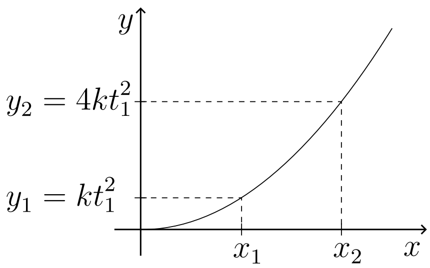

Figura 1.17. $x_1 = vt_1$ y $x_2 = 2vt_1$

Lo mismo se puede hacer con la velocidad y la aceleración. Habiamos visto que

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$
$$\vec{v}(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

Entonces las ecuaciones paramétricas (o curvas horarias) de la velocidad son

$$\begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) \\ v_y(t) = \dot{y}(t) \\ v_z(t) = \dot{z}(t) \end{cases}$$

Para el caso de la aceleración

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$
$$\vec{a}(t) = \dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_y\hat{y} + \dot{v}_z\hat{z}$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

Entonces las ecuaciones paramétricas (o curvas horarias) de la aceleración son

$$\begin{cases} a_x(t) = \ddot{x}(t) \\ a_y(t) = \ddot{y}(t) \\ a_z(t) = \ddot{z}(t) \end{cases}$$

Notar que cada coordenada (cada movimiento unidireccional) varía con su propia velocidad y aceleración.

1.5 Tiro oblicuo en el vacío

Supongamos que se arroja un objeto con una cierta velocidad inicial $\vec{v}_0$, desde el suelo. La aceleración presente es la de la gravedad, $\vec{g}$. La velocidad $\vec{v}_0$ y $\vec{g}$ están contenidas en un mismo plano, entonces todo el movimiento se desarrollará en ese plano. Caracterizamos al plano con 2 ejes cartesianos x e y, y vamos a descomponer el movimiento según esos ejes.

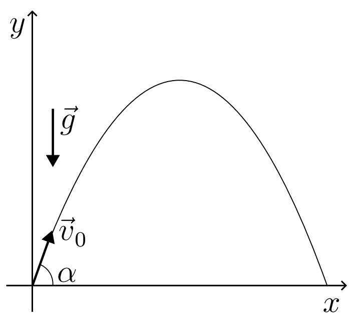

Figura 1.18

Según nuestro sistema de ejes

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

y nuestro vector aceleración es

$$\vec{a} = -g\hat{y}$$

Entonces en la dirección x tendremos un MRU pues la acelaración en esa dirección es cero, y en la dirección de y tendremos un MRUV pues la aceleración en esa dirección es constante.

Escribamos el vector posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

donde

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Eligiendo $t_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$ y reemplazando el valor de la aceleración en y

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t \\ y(t) &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

¿Cuánto vale la velocidad inicial? Si $|\vec{v}_0| = v_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y} \\ \vec{v}_0 &= v_0\cos(\alpha)\hat{x} + v_0\operatorname{sen}(\alpha)\hat{y} \end{aligned}$$

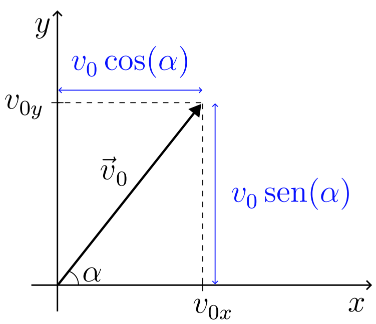

Figura 1.19

Entonces

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha) t & (1.5.1) \\ y(t) = v_0 \operatorname{sen}(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 & (1.5.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}(\alpha) - g t & (1.5.3) \\ v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$$

¿Qué tipo de trayectoria describe? Despejamos t de la Ec.(1.5.1)

$$x = v_0 \cos(\alpha) t \Longrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Reemplazamos t en la Ec.(1.5.2) y obtenemos una parábola

$$y(x) = x \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2$$

Vamos a encontrar algunas características de la trayectoria:

1. Altura máxima H que alcanza el móvil. Está caracterizada porque corresponde a tener $v_y = 0$. Sea t_H el instante tal que $v_y(t_H) = 0$. Evaluamos la Ec.(1.5.3) en t_H

$$v_y(t_H) = v_0 \operatorname{sen}(\alpha) - g t_H = 0 \Longrightarrow t_H = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y(t_H) = H &= v_0 \operatorname{sen}(\alpha) t_H - \frac{1}{2} g t_H^2 \\ H &= v_0 \operatorname{sen}(\alpha) \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} \right)^2 \\ H &= \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(\alpha)^2}{g} \end{aligned}$$

2. Alcance máximo L que alcanza el móvil. Está caracterizado porque corresponde a tener $y = 0$. Sea t_L el instante tal que $y(t_L) = 0$. Evaluamos la Ec.(1.5.2) en t_L

$$\begin{aligned} y(t_L) = v_0 \operatorname{sen}(\alpha) t_L - \frac{1}{2} g t_L^2 = 0 &\Longrightarrow t_L \left(v_0 \operatorname{sen}(\alpha) - \frac{1}{2} g t_L \right) = 0 \\ &\Longrightarrow t_L = 0 \vee t_L = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x(t_L) = L = \frac{2v_0 \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)}{g}$$
$$L = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\alpha)$$

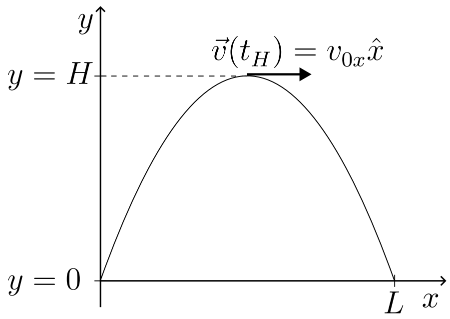

Figura 1.20

Observación

Bibliografía

[1] Author, *Title*, *J. Abbrev.* **vol** (year) pg.

[2] Author, *Title*, arxiv:1234.5678.

[3] Author, *Title*, Publisher (year).