

ユーザーを行、アイテムを列として、ユーザがアイテムに下した評価スコアを表す評価値行列 $R : m \times n$ (ユーザ数 \times アイテム数) があるとする。 R は一般的に、巨大かつ疎な行列であるため、 R を $U : m \times k$ と $V : n \times k$ の行列の積で近似することを考える。(k は潜在因子で人間に理解できる保証はない。)

つまり、

$$R \approx UV^T (= \hat{R})$$

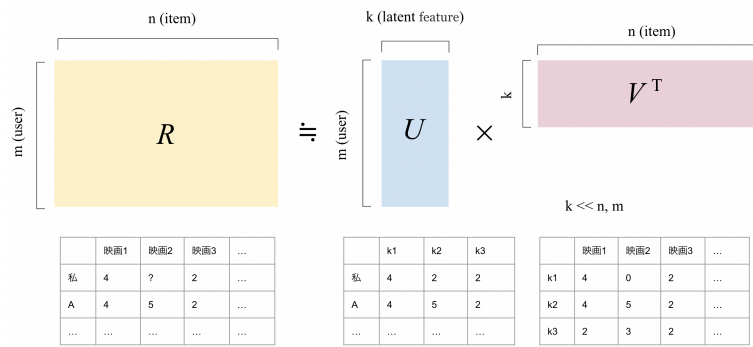


図 1: 評価値行列の行列分解

この時、推定した評価値行列 $\hat{R} = UV^T$ の ij 成分を \hat{r}_{ij} とすると

$$\hat{r}_{ij} = \sum_{s=1}^k u_{is} v_{sj}$$

である。ここで、

$$U = [u_{is}]_{m \times k}$$

$$V = [v_{is}]_{n \times k}$$

$$V^T = [v_{sj}]_{k \times n}$$

である。

以下の目的関数を最小化させる。(単純な 2 乗誤差)

$$J = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^k u_{is} v_{sj})^2$$

勾配降下法を用いて、

$$\frac{\partial J}{\partial u_{iq}} = \sum_{j:(i,j) \in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^k u_{is} v_{sj})(-v_{qj})$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_{qj}} = \sum_{i:(i,j) \in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^k u_{is} v_{sj})(-u_{iq})$$

$$u_{iq} \leftarrow u_{iq} - \alpha \left[\frac{\partial J}{\partial u_{iq}} \right]$$

$$v_{qi} \leftarrow v_{qi} - \alpha \left[\frac{\partial J}{\partial v_{qi}} \right]$$

ここで、目的関数に正則化項

$$\frac{\lambda_1}{2} \|U\|_F^2 + \frac{\lambda_2}{2} \|V\|_F^2$$

を加えると、

$$J = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^k u_{is} v_{sj})^2 + \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^k u_{is}^2 + \frac{\lambda_2}{2} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^n v_{sj}^2$$

勾配は、

$$\frac{\partial J}{\partial u_{iq}} = \sum_{j:(i,j) \in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^k u_{is} v_{sj})(-v_{qj}) + \lambda_1 u_{iq}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_{qj}} = \sum_{i:(i,j) \in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^k u_{is} v_{sj})(-u_{iq}) + \lambda_2 v_{qj}$$

とかける。(更新式は先ほどと同じ)