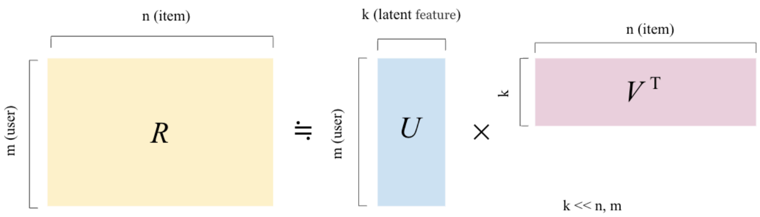
ユーザーを行、アイテムを列として、ユーザがアイテムに下した評価スコアを表す評価値行列 R :$m \times n$（ユーザ数×アイテム数） があるとする。R は一般的に、巨大かつ疎な行列であるため、 R を U :$m \times k$ と V :$n \times k$ の行列の積で近似することを考える。（k は潜在因子で人間に理解できる保証はない。）

つまり、

$$R \fallingdotseq UV^T (= \hat{R})$$



	映画1	映画2	映画3	…
私	4	?	2	…
A	4	5	2	…
…	…	…	…	…

	k1	k2	k3
私	4	2	2
A	4	5	2
…	…	…	…

	映画1	映画2	映画3	…
k1	4	0	2	…
k2	4	5	2	…
k3	2	3	2	…

図 1: 評価値行列の行列分解

この時、推定した評価値行列 $\hat{R} = UV^T$ の ij 成分を $\hat{r}_{ij}$ とすると

$$\hat{r}_{ij} = \sum_{s=1}^{k} u_{is} v_{sj}$$

である。ここで、

$$U = [u_{is}]_{m \times k}$$

$$V = [v_{is}]_{n \times k}$$

$$V^T = [v_{sj}]_{k \times n}$$

である。

以下の目的関数を最小化させる。（単純な 2 乗誤差）

$$J = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^{k} u_{is} v_{sj})^2$$

勾配降下法を用いて、

$$\frac{\partial J}{\partial u_{iq}} = \sum_{j:(i,j) \in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^{k} u_{is} v_{sj})(-v_{qj})$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_{qj}} = \sum_{i:(i,j)\in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^{k} u_{is} v_{sj})(-u_{iq})$$

$$u_{iq} \longleftarrow u_{iq} - \alpha \left[\frac{\partial J}{\partial u_{iq}} \right]$$

$$v_{qi} \longleftarrow v_{qi} - \alpha \left[\frac{\partial J}{\partial v_{qi}} \right]$$

ここで、目的関数に正則化項

$$\frac{\lambda_1}{2} \|U\|_F^2 + \frac{\lambda_2}{2} \|V\|_F^2$$

を加えると、

$$J = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^{k} u_{is} v_{sj})^2 + \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} u_{is}^2 + \frac{\lambda_2}{2} \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} v_{sj}^2$$

勾配は、

$$\frac{\partial J}{\partial u_{iq}} = \sum_{j:(i,j)\in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^{k} u_{is} v_{sj})(-v_{qj}) + \lambda_1 u_{iq}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_{qj}} = \sum_{i:(i,j)\in S} (r_{ij} - \sum_{s=1}^{k} u_{is} v_{sj})(-u_{iq}) + \lambda_2 v_{qj}$$

とかける。（更新式は先ほどと同じ）