Politechnika Łódzka

# Przekształcenia Liniowe w 3D
# Rotacja, Odbicie, Skalowanie

Jan Banaszkiewicz    Jakub Kopaniewski

**Matematyka Grafiki Komputerowej**

# Skalowanie obiektów w przestrzeni 3D



Skalowanie to przekształcenie liniowe zmieniające rozmiar obiektu względem początku układu współrzędnych o zadany współczynnik **k**. Dla przestrzeni trójwymiarowej macierz skalowania ma postać:

$$S(k_x, k_y, k_z) = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

gdzie:

- $k_x$, $k_y$, $k_z$ – współczynniki skali wzdłuż osi $x$, $y$, $z$

# Skalowanie wzdłuż osi układu współrzędnych

Skalowanie wzdłuż osi polega na zmianie wymiaru obiektu względem płaszczyzn współrzędnych. Jeżeli współczynniki skalowania są jednakowe, skalowanie jest **jednolite**; w przeciwnym razie — **niejednolite**.

Mnożąc wektor przez macierz skalowania, otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x x \\ k_y y \\ k_z z \end{pmatrix}$$

lub równoważnie:

$S(k_x, k_y, k_z) \cdot (v) = (v')$, gdzie $v' = (k_x x, k_y y, k_z z)$

# Skalowanie jednolite



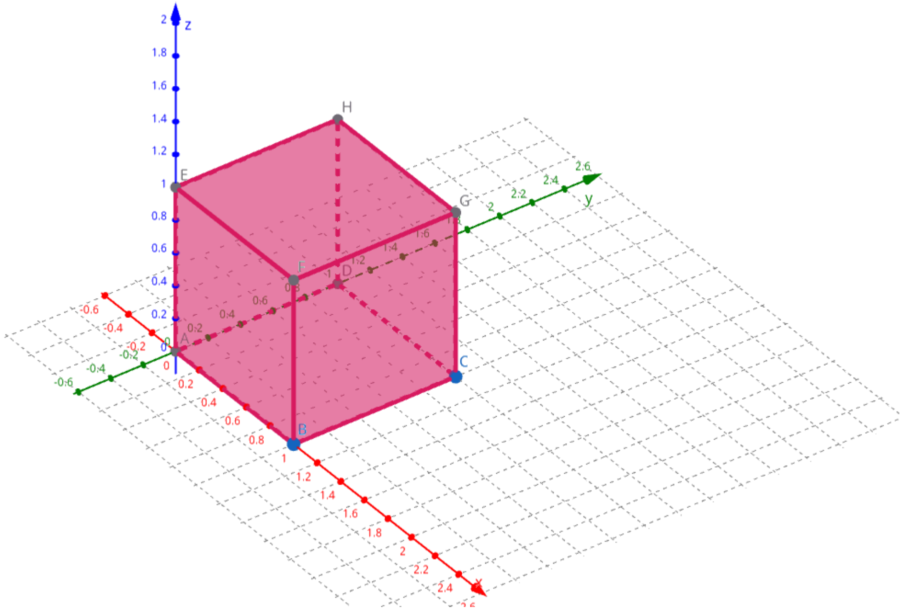
Jednolite skalowanie to przekształcenie liniowe, w którym każdy wymiar obiektu jest powiększany lub pomniejszany o ten sam współczynnik $k$. Skalowanie odbywa się względem początku układu współrzędnych.

**Macierz skalowania w 3D:** $S = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

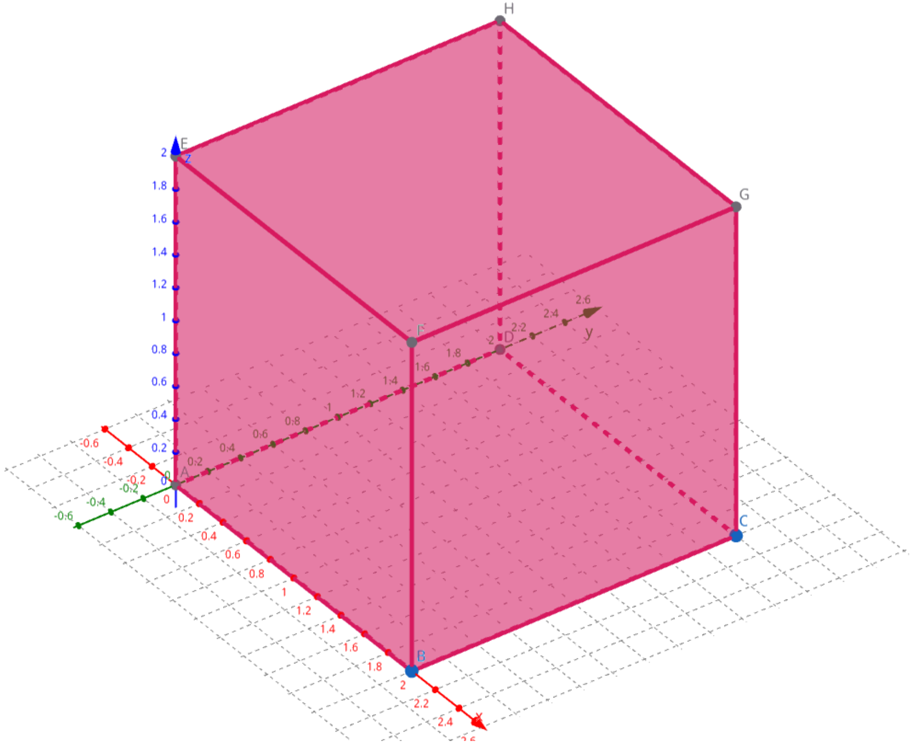
**Własności:**

- zachowuje kształt i kąty (nie zniekształca obiektu),
- kierunek kształtu jest zawsze zachowany
- wszystkie wymiary rosną proporcjonalnie do $k$,
- pole powierzchni rośnie jak $k^2$,
- objętość rośnie jak $k^3$.

# Wizualizacja skalowania jednolitego (sześcian)



Sześcian przed skalowaniem (długość boku = 1)



Sześcian po skalowaniu o współczynnik k = 2 (długość boku = 2)

# Wizualizacja skalowania jednolitego (sześcian)



**Obliczenia:** Dla punktu $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz

macierzy: $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

mamy: $P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dla kolejnych wierzchołków sześcianu:

$$[0, 0, 0] \to [0, 0, 0]$$
$$[0, 0, 1] \to [0, 0, 2]$$
$$[0, 1, 0] \to [0, 2, 0]$$
$$[0, 1, 1] \to [0, 2, 2]$$
$$[1, 0, 1] \to [2, 0, 2]$$
$$[1, 1, 0] \to [2, 2, 0]$$
$$[1, 1, 1] \to [2, 2, 2]$$

Każda współrzędna została pomnożona przez $2$. Zatem sześcian o boku $1$ został powiększony do boku $2$, a objętość zwiększyła się $8$-krotnie ($2^3 = 8$).

# Skalowanie niejednolite (anisotropowe)



Jeśli chcemy „rozciągnąć” lub „ścisnąć” obiekt, możemy zastosować różne współczynniki skalowania w różnych kierunkach. Takie przekształcenie nazywamy **skalowaniem niejednolitym (anisotropowym)**. Nierównomierna skala nie zachowuje kątów ani proporcji między wymiarami.

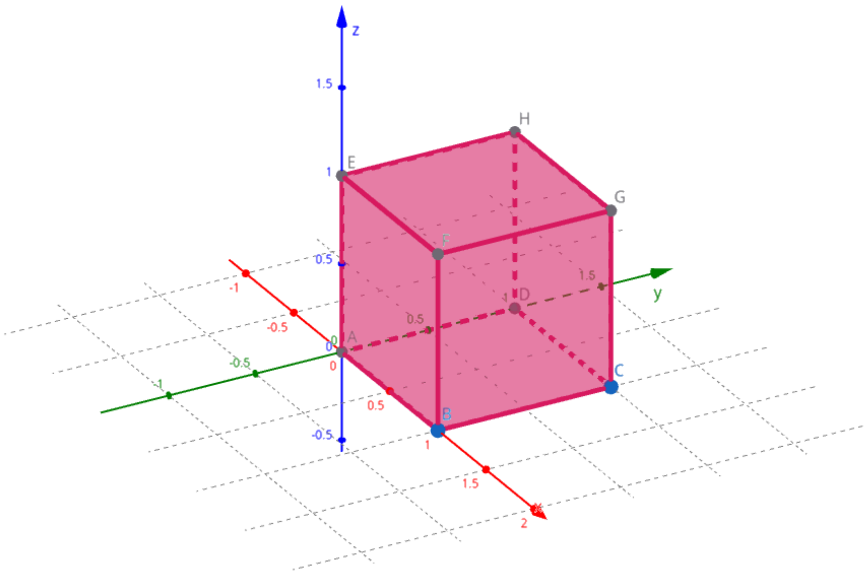
**Macierz skalowania:** $S = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$

**Własności:**

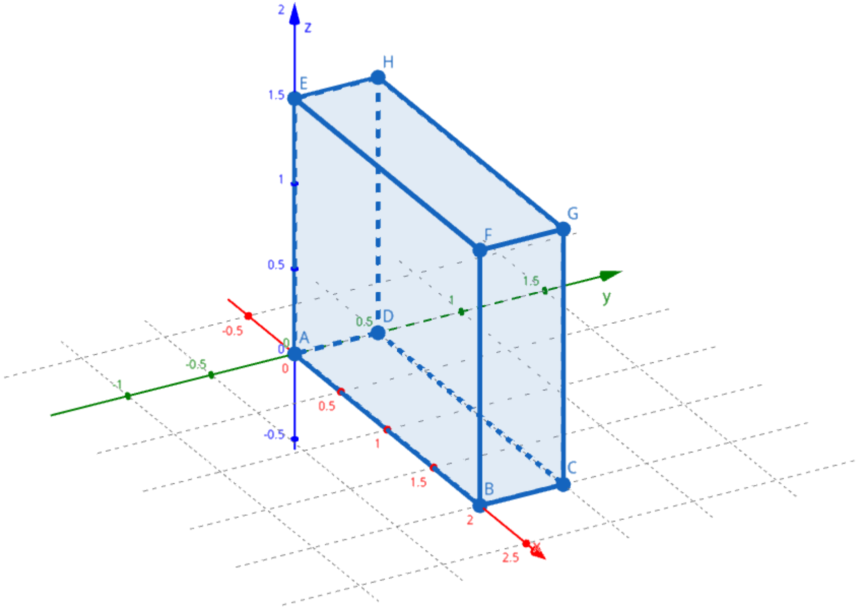
- nie zachowuje kształtów ani kątów między osiami,
- kierunki osi pozostają zachowane (osie nie zmieniają orientacji),
- zmiana długości wzdłuż osi X, Y, Z następuje odpowiednio o współczynniki $k_x$, $k_y$, $k_z$,
- pole powierzchni zmienia się proporcjonalnie do $k_x k_y$,
- objętość zmienia się proporcjonalnie do $k_x k_y k_z$,

# Wizualizacja skalowania niejednolitego






Sześcian przed skalowaniem (długość boku = 1)




Sześcian po skalowaniu o różne współczynniki k

# Wizualizacja skalowania niejednolitego



**Obliczenia:** Dla punktu $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz

macierzy: $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$

mamy: $P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dla kolejnych wierzchołków sześcianu:

$$[0, 0, 0] \to [0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \to [0.0, 0.0, 1.5]$$

$$[0, 1, 0] \to [0.0, 0.5, 0.0]$$

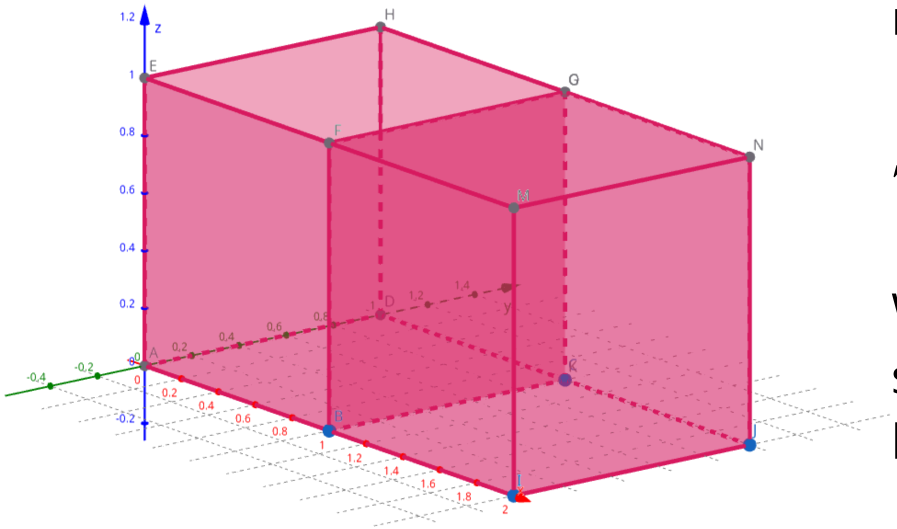
$$[0, 1, 1] \to [0.0, 0.5, 1.5]$$

$$[1, 0, 1] \to [2.0, 0.0, 1.5]$$

$$[1, 1, 0] \to [2.0, 0.5, 0.0]$$

$$[1, 1, 1] \to [2.0, 0.5, 1.5]$$

# Skalowanie wzdłuż jednej osi




Skalowanie sześcianu o długości boku = 1 tylko względem osi x o wartość 2

Aby “rozciągnąć” lub “ścisnąć” tylko względem jednej osi możemy użyć następujących macierzy.

$$S_x = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

W naszym przykładzie “rozciągniemy” nasz sześcian względem osi x. Więc nasza macierz będzie wyglądać nastepująco:

$$S_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Skalowanie w dowolnym kierunku



Skalowanie nie musi odbywać się wyłącznie wzdłuż osi układu współrzędnych. Możemy skalować obiekt wzdłuż dowolnego kierunku określonego przez wektor jednostkowy $\hat{\boldsymbol{n}}$.

**Macierz skalowania wzdłuż kierunku $\hat{n}$:**

$$S = I + (k-1)\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T$$

gdzie:

- $I$ — macierz jednostkowa,
- $\hat{\boldsymbol{n}}$ — wektor jednostkowy kierunku skalowania,
- $k$ — współczynnik skali wzdłuż tego kierunku.

Rozpisując równanie $\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T$, otrzymujemy:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{pmatrix}$$

# Skalowanie w dowolnym kierunku



Po podstawieniu do $S = I + (k-1)\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T$, otrzymujemy:

$$S(\hat{\boldsymbol{n}}, k) = \begin{pmatrix} 1+(k-1)n_x^2 & (k-1)n_x n_y & (k-1)n_x n_z \\ (k-1)n_y n_x & 1+(k-1)n_y^2 & (k-1)n_y n_z \\ (k-1)n_z n_x & (k-1)n_z n_y & 1+(k-1)n_z^2 \end{pmatrix}$$

Skalowanie w dowolnym kierunku jest uogólnieniem skalowania wzdłuż osi:

- dla $\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mamy skalowanie wzdłuż osi X,
- dla $\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — wzdłuż osi Y,
- dla $\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — wzdłuż osi Z.

# Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego



Załóżmy, że chcemy skalować wzdłuż kierunku ukośnego, który leży w płaszczyźnie XY i biegnie pod kątem 45° do osi X oraz dla współczynnika skali $k = 2$.
Ten kierunek opisuje wektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

,który nie jest wektorem jednostkowym więc musimy go znormalizować. Jego długość teraz wynosi:

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Aby przekształcenie było poprawne, potrzebujemy wektora jednostkowego:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \to \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego



Obliczamy macierz $\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T$:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Po podstawieniu do równania na $S$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (2-1) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ostatecznie:

$$S = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

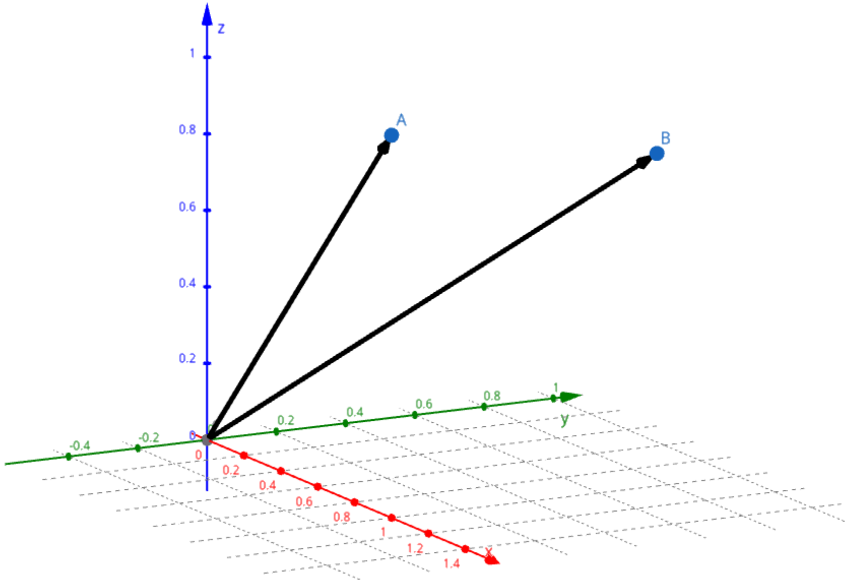
# Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego



**Działanie na przykładzie punktu:**

Dla $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt został przeskalowany wzdłuż kierunku ukośnego $(1, 1, 0)$ — jego współrzędne zmieniły się proporcjonalnie w obu osiach. Obiekt został rozciągnięty dwukrotnie wzdłuż tego kierunku, natomiast w kierunku prostopadłym pozostał bez zmian.



# Odbicie względem płaszczyzny



Odbicie (lub **lustrzane odbicie**) to przekształcenie liniowe, które odwraca położenie punktów obiektu względem danej płaszczyzny. W przestrzeni trójwymiarowej płaszczyzna odbicia przechodzi przez początek układu współrzędnych, a jej orientację określa wektor jednostkowy normalny $\hat{\boldsymbol{n}}$. Odbicie można interpretować jako **skalowanie wzdłuż kierunku** $\hat{n}$ ze współczynnikiem $k = -1$.

**Macierz odbicia:**

$$R(\hat{\boldsymbol{n}}) = S(\hat{\boldsymbol{n}}, -1) = \begin{pmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_y n_x & 1-2n_y^2 & -2n_y n_z \\ -2n_z n_x & -2n_z n_y & 1-2n_z^2 \end{pmatrix}$$

**Własności odbicia:**

- odwraca orientację obiektu (powstaje obraz lustrzany),
- jest izometrią — zachowuje długości i kąty między wektorami,
- dwukrotne zastosowanie odbicia przywraca pierwotny kształt: $R(\hat{\boldsymbol{n}})^2 = I$,

# Przykład — odbicie względem płaszczyzny XY



Rozważmy odbicie względem płaszczyzny XY, której wektor normalny to:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Macierz odbicia:**

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dla wierzchołków piramidy mamy:

$$[0, -0.5, 0] \to [0, -0.5, 0]$$

$$[-0.5, 0, 0] \to [-0.5, 0, 0]$$

$$[0, 0.5, 0] \to [0, 0.5, 0]$$

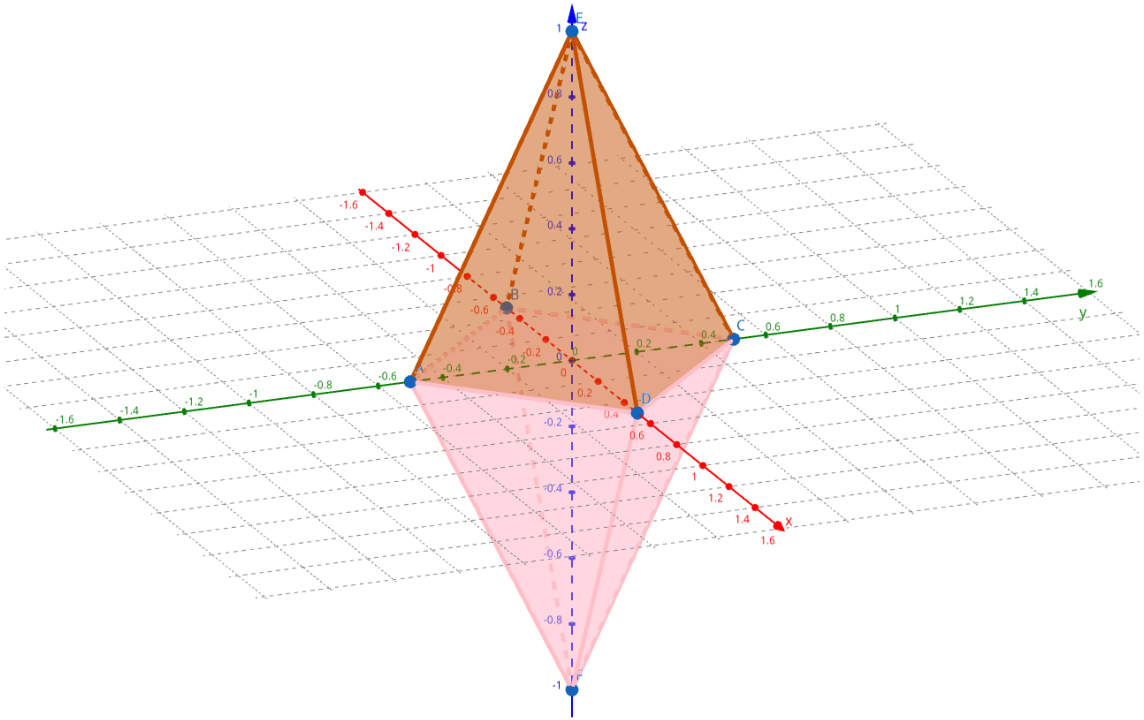
$$[0.5, 0, 0] \to [0.5, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \to [0, 0, -1]$$

# Przykład — odbicie względem płaszczyzny XY



Wierzchołki leżące w płaszczyźnie XY pozostają niezmienione, natomiast punkt znajdujący się powyżej zostaje odbity symetrycznie poniżej niej.



# Rzut równoległy jako przypadek skalowania



Rzut równoległy (ortograficzny) można traktować jako **szczególny przypadek skalowania**, w którym współczynnik skali wzdłuż jednego z kierunków wynosi zero. W takim przypadku wszystkie punkty zostają „spłaszczone" na płaszczyznę — czyli ich współrzędne wzdłuż danego kierunku zanikają.

**Interpretacja geometryczna:** Punkty oraz ich obrazy są połączone prostymi równoległymi do kierunku rzutu. Dlatego przekształcenie to nazywa się **rzutem równoległym**.

**Własności rzutu równoległego:**

- nie zachowuje perspektywy (brak zbiegu linii równoległych),
- zachowuje kształt i proporcje obiektów,
- jest liniowym przekształceniem macierzowym,
- w praktyce odpowiada „pominięciu" współrzędnej $z$ (dla rzutu na płaszczyznę XY).

# Rzutowanie na oś lub płaszczyznę kardynalną



Rzutowanie na jedną z płaszczyzn głównych (kardynalnych) można przedstawić za pomocą **macierzy skalowania** ze współczynnikiem $k = 0$ w kierunku normalnym do tej płaszczyzny.

W ten sposób rzut 3D $\longrightarrow$ 2D realizowany jest przez „wyzerowanie” jednej współrzędnej punktu:

**Rzut na płaszczyznę XY:** $P_{\text{xy}} = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

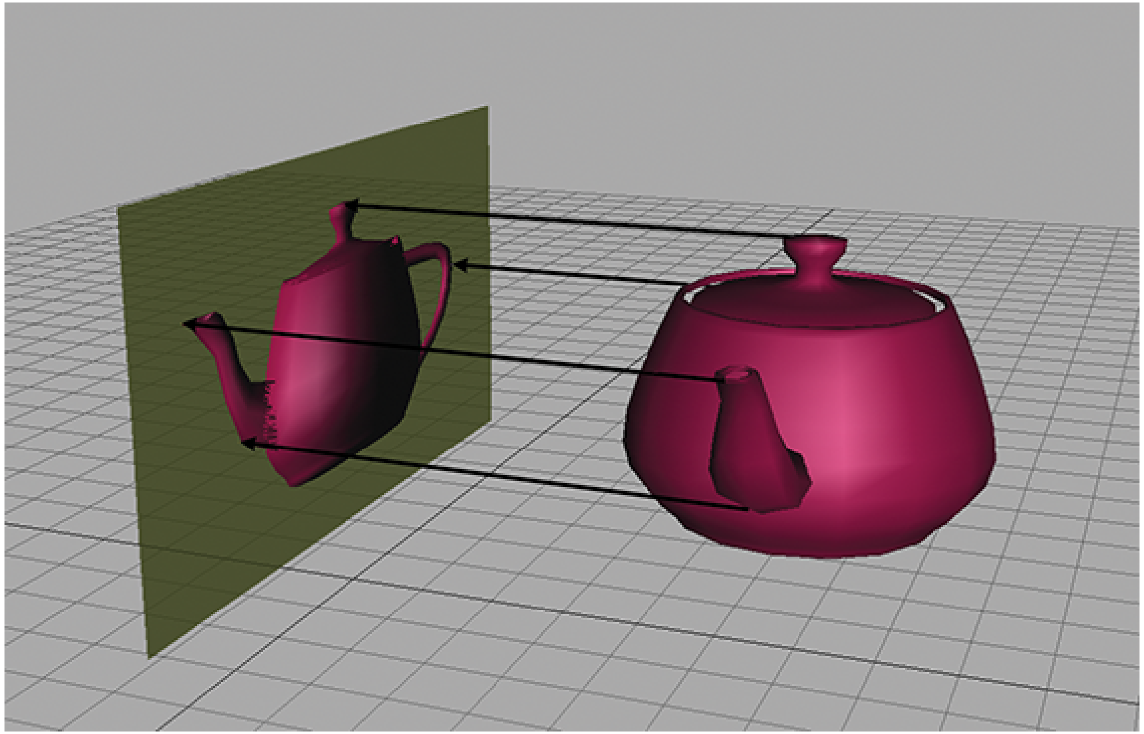
**Rzut na płaszczyznę XZ:** $P_{\text{xz}} = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Rzut na płaszczyznę YZ:** $P_{\text{yz}} = S\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

# Rzutowanie na oś lub płaszczyznę kardynalną



W każdym przypadku współrzędna wzdłuż kierunku normalnego do płaszczyzny zostaje usunięta, co odpowiada „rzutowi" wszystkich punktów na daną płaszczyznę przy zachowaniu ich pozostałych współrzędnych.



# Przekształcenie skośne w 3D (Shearing)



**Przekształcenie skośne** (ang. **shearing**, inaczej **pochylenie** lub **skoszenie**) w przestrzeni trójwymiarowej polega na przesunięciu punktów obiektu wzdłuż jednego kierunku proporcjonalnie do ich położenia w innym kierunku. Przekształcenie to zachowuje objętość, ale **zniekształca kąty i kształty** obiektu.

Dla przykładu, jeśli przesuwamy współrzędne $x$ i $y$ proporcjonalnie do wartości $z$, to:

$$x' = x + k_{\mathrm{xz}} z, \quad y' = y + k_{\mathrm{yz}} z, \quad z' = z$$

W postaci macierzowej:

$$S_{\{z\}}(k_{\mathrm{xz}}, k_{\mathrm{yz}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k_{\mathrm{xz}} \\ 0 & 1 & k_{\mathrm{yz}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie $k_{\mathrm{xz}}$ i $k_{\mathrm{yz}}$ określają stopień pochylenia względem osi $z$.

# Przekształcenie skośne w 3D (Shearing)



Ogólnie istnieje sześć możliwych macierzy przekształceń skośnych w 3D — w zależności od tego, względem której osi wykonywane jest pochylenie:

$$S_{\{x\}}(k_{\mathrm{xy}}, k_{\mathrm{xz}}) = \begin{pmatrix} 1 & k_{\mathrm{xy}} & k_{\mathrm{xz}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{\{y\}}(k_{\mathrm{yx}}, k_{\mathrm{yz}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{\mathrm{yx}} & 1 & k_{\mathrm{yz}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{\{z\}}(k_{\mathrm{zx}}, k_{\mathrm{zy}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_{\mathrm{zx}} & k_{\mathrm{zy}} & 1 \end{pmatrix}$$

**Własności przekształcenia skośnego:**

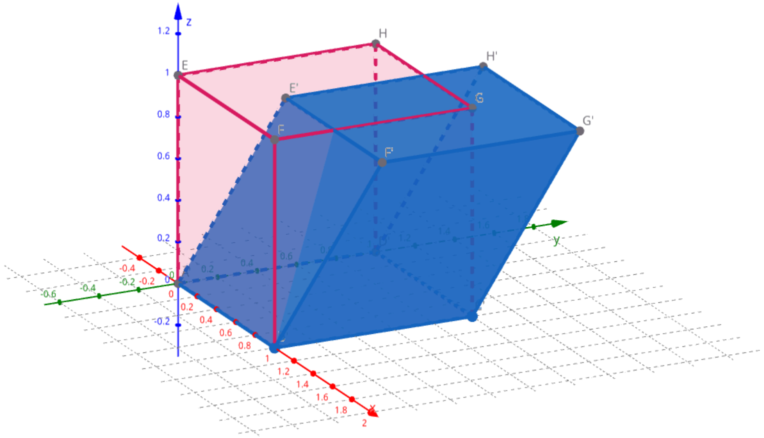
- zachowuje objętość, ale nie zachowuje kątów ani kształtów,
- jest liniowym przekształceniem (determinant macierzy = 1),
- w połączeniu ze skalowaniem może imitować rotację z deformacją.

# Przykład — przekształcenie skośne względem osi Z



$$S_{\{z\}}(0.5, 0.3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dla tego przekształcenia punkty przesuwają się proporcjonalnie do swojej współrzędnej $z$, tworząc efekt „pochylenia” obiektu w kierunku osi $x$ i $y$.



# Łączenie transformacji



W praktyce przekształcenia obiektów w grafice komputerowej rzadko wykonuje się pojedynczo. Najczęściej stosuje się ich **sekwencję** — np. **skalowanie**, potem **rotację**. Aby uprościć obliczenia, można je połączyć w jedną macierz transformacji.

**Zasada łączenia:** Jeśli mamy dwie macierze transformacji:

$A$ — pierwsza transformacja (np. skalowanie),

$B$ — druga transformacja (np. rotacja),

to ich złożenie (czyli zastosowanie jednej po drugiej) opisuje macierz:

$$M = B \cdot A$$

Kolejność jest **istotna** — najpierw stosujemy transformację $A$, potem $B$. Mnożenie macierzy **nie jest przemienne**, więc $B \cdot A \neq A \cdot B$.

# Łączenie transformacji



**Przykład:**

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{z(90°)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kolejność zastosowania:

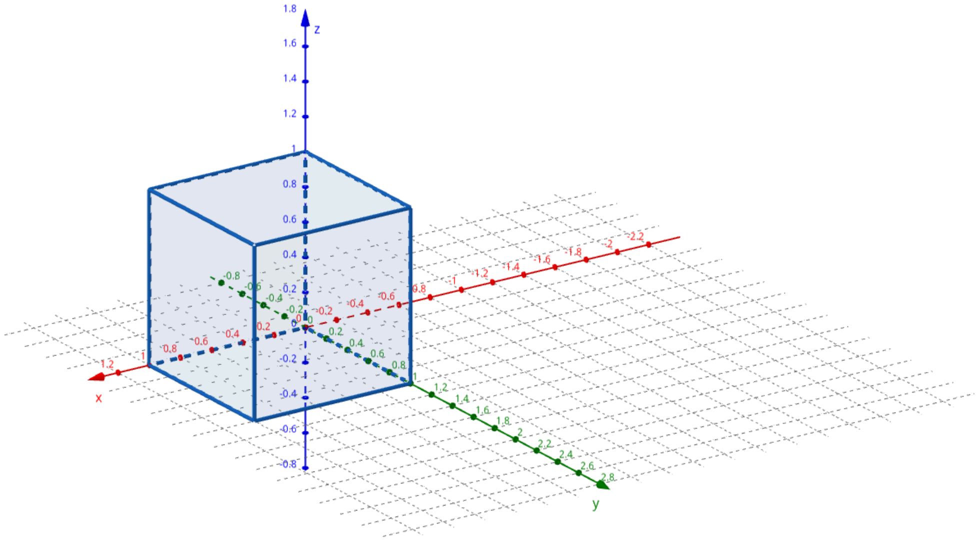
$$M_{\mathrm{RS}} = R_z \cdot S \implies \text{najpierw skalowanie, potem rotacja}$$
$$M_{\mathrm{SR}} = S \cdot R_z \implies \text{najpierw rotacja, potem skalowanie}$$

$$M_{\mathrm{RS}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; M_{\mathrm{SR}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Łączenie transformacji



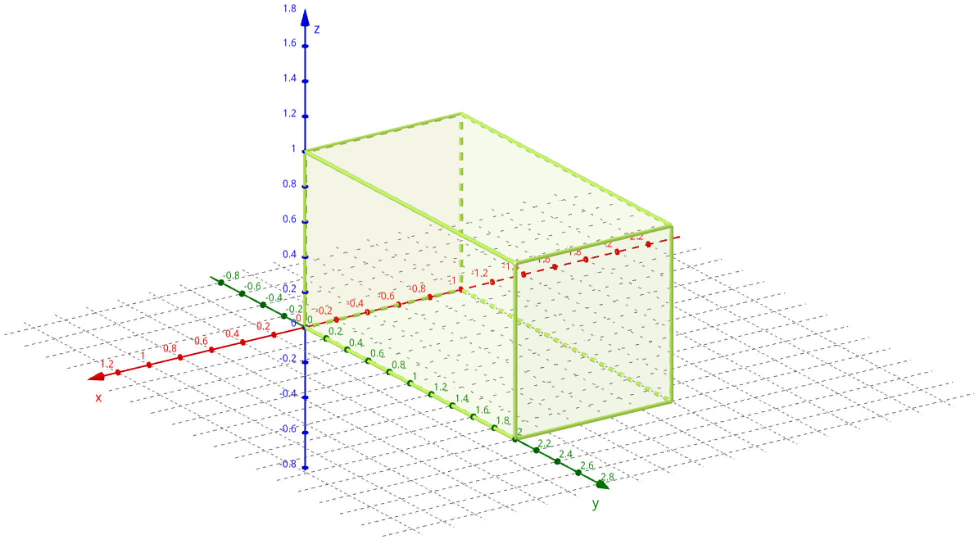
Wyniki tych dwóch operacji różnią się geometrycznie. Przykład dla sześcianu.



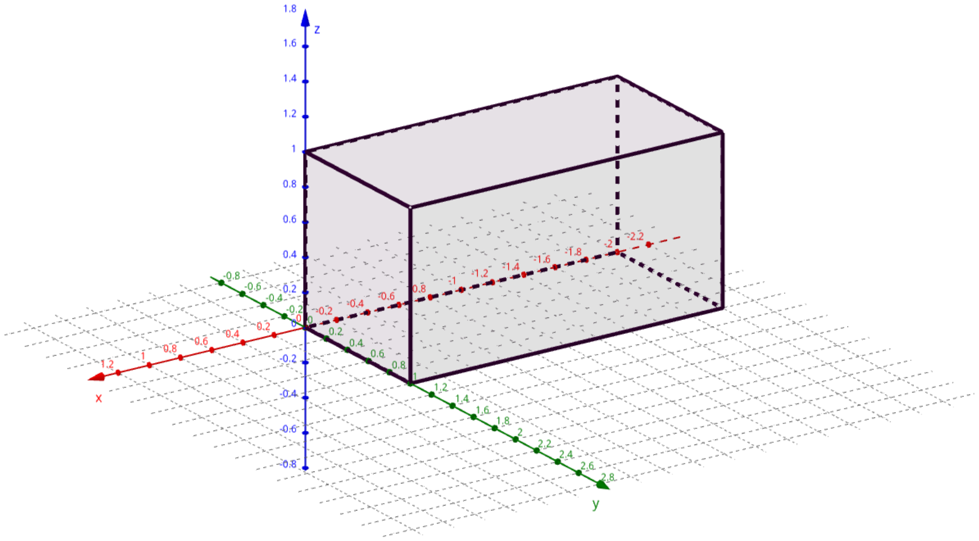

$$A = (0, 0, 0)$$
$$B = (1, 0, 0)$$
$$C = (1, 1, 0)$$
$$D = (0, 1, 0)$$
$$E = (0, 0, 1)$$
$$F = (1, 0, 1)$$
$$G = (1, 1, 1)$$
$$H = (0, 1, 1)$$

# Łączenie transformacji






Najpierw skalowanie, potem rotacja




Najpierw rotacja, potem skalowanie

**Podsumowanie:**

# Łączenie transformacji



- Kolejność mnożenia macierzy decyduje o wyniku.
- Mnożenie macierzy jest sposobem **komponowania** transformacji.
- Można więc złożyć złożone przekształcenia w jedną macierz i stosować ją jednokrotnie.

# Zastosowania przekształceń liniowych w 3D



Przekształcenia liniowe stanowią podstawowy element grafiki komputerowej 3D, umożliwiając opis i kontrolę położenia, orientacji oraz kształtu obiektów w przestrzeni. W praktyce wykorzystywane są w wielu dziedzinach technologii i nauki.

**Najważniejsze zastosowania:**

- **Modelowanie 3D** — skalowanie, obrót i odbicie pozwalają na tworzenie złożonych obiektów poprzez transformacje prostych brył.
- **Animacja komputerowa** — płynne ruchy i deformacje obiektów wynikają z sekwencji transformacji liniowych (np. macierze kości w animacjach szkieletowych).
- **Grafika w grach** — przekształcenia obiektów względem kamery i sceny w czasie rzeczywistym (tzw. **world**, **view** i **projection matrices**).
- **Symulacje fizyczne** — opis ruchu brył sztywnych, zderzeń i przemieszczeń w przestrzeni.
- **Przetwarzanie obrazu i wizualizacja danych** — rotacje, skalowania i rzuty w systemach CAD, GIS oraz oprogramowaniu inżynierskim.

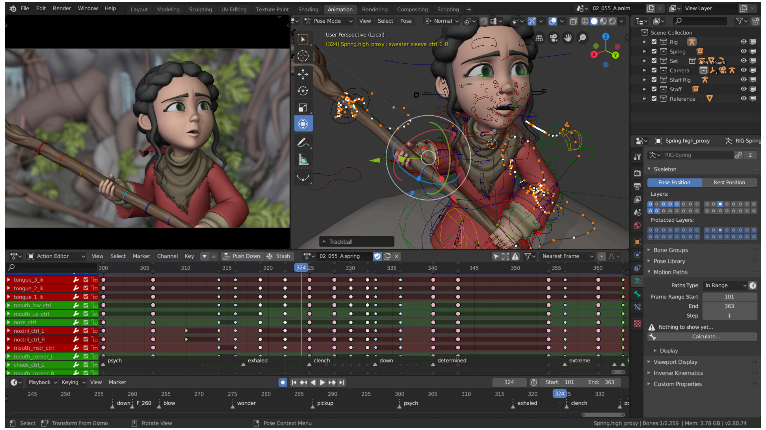
# Zastosowania przekształceń liniowych w 3D

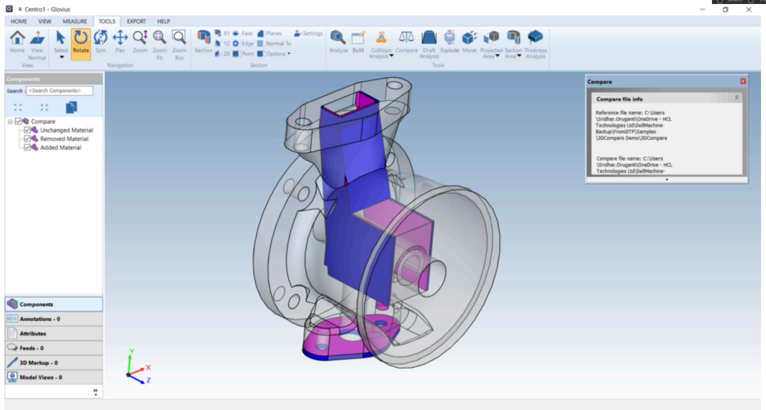


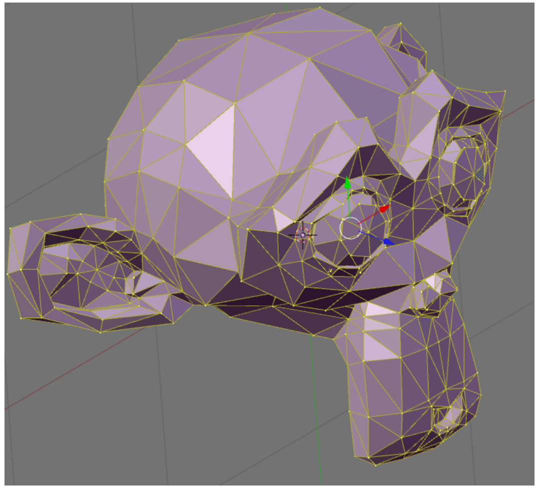
**Podsumowanie:** Przekształcenia liniowe umożliwiają precyzyjne opisywanie i modyfikowanie przestrzeni trójwymiarowej. Dzięki nim grafika komputerowa łączy matematykę i geometrię z praktyczną wizualizacją rzeczywistości.

# Zastosowania przekształceń w praktyce









# Dziękujemy za uwagę.

# Bibliografia



[1] F. Dunn and I. Parberry, “3D Math Primer for Graphics and Game Development.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://gamemath.com/book/matrixtransforms.html

[2] S. J. Janke, “Mathematical Structures For Computer Graphics.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://resource.laikipia.ac.ke/sites/default/files/Mathematical%20Structures%20for%20Computer%20Graphics.pdf

[3] G. Sanderson, “Three-dimensional linear transformations.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://www.3blue1brown.com/lessons/3d-transformations

[4] G. Szwoch, “Transformacje obiektów 3D.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://sound.eti.pg.gda.pl/student/so/02-Transformacje.pdf