Przekształcenia Liniowe w 3D
Rotacja, Odbicie, Skalowanie

Jan Banaszkiewicz Jakub Kopaniewski

Matematyka Grafiki Komputerowej

Agenda

1. Czym jest przekształcenie liniowe - typy przekształceń.
2. Rotacja.
3. Skalowanie.
4. Projekcja ortograficzna.
5. Odbicie.
6. Shearing.
7. Łączenie transformacji.

Przekształcenia geometryczne

Pojęcie przekształcenia geometrycznego

Przekształcenie T to funkcja która przekształca punkt A do innego punktu $T(A)$.

Przekształcenie	Liniowe	Afiniczne	Odwracalne	Zachowuje kąty
Transformacja liniowa	✓	✓		
Transformacja afiniczna		✓		
Transformacja odwracalna			✓	
Zachowujące kąty		✓	✓	✓
Ortogonalna		✓	✓	
Translacja		✓	✓	✓
Rotacja	✓	✓	✓	✓
Jednorodne skalowanie	✓	✓	✓	✓
Niejednorodne skalowanie	✓	✓	✓	
Rzut ortograficzny	✓	✓		
Odbicie	✓	✓	✓	
Ścinanie (shear)	✓	✓	✓	

Porównanie właściwości różnych przekształceń geometrycznych.
Brak ptaszka oznacza - “nie zawsze”.

Przestrzeń liniowa

Przestrzeń wektorowa (liniowa) - definicja

Przestrzenią liniową nazywamy trójkę $(V, +, \cdot)$, w której V jest niepustym zbiorem oraz

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V,$$

są funkcjami spełniającymi następujące warunki:

1. $\forall_{x,y,z \in V} \quad (x, y) + z = x + (y = z),$
2. $\exists_{\theta \in V} \forall_{x \in V} \quad x + \theta = x,$
3. $\forall_{x \in V} \exists_{-x \in V} \quad x + (-x) = \theta,$
4. $\forall_{x,y \in V} \quad x + y = y + x,$
5. $\forall_{x \in V} \quad 1 \cdot x = x,$
6. $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \forall_{x \in V} \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$
7. $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{x,y \in V} \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$
8. $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \forall_{x \in V} \quad (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$

- Elementy zbioru V nazywamy wektorami.
- Wektor θ nazywamy wektorem zerowym

Baza przestrzeni liniowej

Baza przestrzeni liniowej

Mówimy, że wektory $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ tworzą **bazę** przestrzeni liniowej $(V, +, \cdot)$, jeżeli są one liniowo niezależne i rozpinają przestrzeń $(V, +, \cdot)$. ♣

Przykład wektorów, które są bazą przestrzeni liniowej 3 wymiarowych wektorów:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Przykład wektorów, które **nie** są bazą przestrzeni liniowej 3 wymiarowych wektorów:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Przekształcenie liniowe

Przekształcenie liniowe

Niech $(V, +, \cdot)$ i $(W, +, \cdot)$ będą przestrzeniami liniowymi.
Odwzorowanie (funkcje) $T : V \to W$ nazywamy liniowym, jeżeli

1. $\forall_{x \in V} \quad T(u + v) = T(u) + T(v)$ (przekształcenie addytywne)
2. $\forall_{x \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$ (przekształcenie jednorodne)

Warto zauważyć że ta definicja nie mówi nam nic o punktach, jednak dla rozpatrywanych przez nas transformacji liniowych (nie jest prawdą dla np. Transformacji nieliniowych), po oznaczeniu początku układu O, można myśleć o punktach P jako o wektorze $[\overrightarrow{OP}]$.

Przekształcenie liniowe

Możemy zapisać vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, jako liniową kombinację wektorów bazy.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stosując przekształcenie liniowe na liniowej kombinacji wektorów opisujących wektor $\vec{v}$ możemy zapisać:

$$T(\vec{v}) = 3T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Innymi słowy aby dowiedzieć się gdzie wektor $\vec{v}$ zostanie przekształcony, musimy dowiedzieć się gdzie wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zostaną przekształcone.

Przekształcenie liniowe

Niech T będzie przekształceniem liniowym, które jest opisane następującym wzorem:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$$

To dla wektora $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$:

$$T(\vec{v}) = 3T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 5T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\40\\17\end{pmatrix}$$

Powyższe przekształcenie można zapisać w formie macierzy:

$$M = \begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\4 & 2 & 4\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Zatem powyższe przekształcenie możemy zapisać jako mnożenie wektora przez macierz:

$$T(\vec{v}) = M \cdot \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\4 & 2 & 4\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\40\\17\end{pmatrix}$$

Przekształcenie liniowe

Z powyższego przykładu można wywnioskować ogólną formułę aplikowania odwzorowań T.

$$T(\vec{v}) = M\vec{v}$$

Przykład. Niech T będzie liniowym odwzorowaniem które przekształca

$$\text{punkt } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{punkt } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{i punkt } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(C) = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punkty A, B, C przed przekształceniem można zapisać w formie macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Punkty A, B, C po przekształceniu można zapisać w formie macierzy $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Przekształcenie liniowe

Aby znaleźć Macierz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ reprezentującą to przekształcenie musimy obliczyć układ równań

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c &= 5, & d + 2e + 3f &= -2, & g + 2h + 3i &= 6, \\ 3a + 7b + 4c &= -1, & 3d + 7e + 4f &= 4, & 3g + 7h + 4i &= 8, \\ 2a + 9b + 3c &= 9, & 2d + 9e + 3f &= 2, & 2g + 9h + 3i &= 3, \end{aligned}$$

Powyższe równanie można policzyć korzystając z właściwości macierzy:

$$MA = B \Rightarrow M = BA^{-1}$$

$$M = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{213}{22} & \frac{43}{22} & \frac{79}{22} \\ \frac{4}{22} & 0 & -2 \\ -\frac{137}{22} & \frac{7}{22} & \frac{85}{22} \end{pmatrix}$$

W taki sposób znaleźliśmy macierz przekształceń, którą można zastosować, dla każdego innego punktu.

Przykład dla punktu $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$$T(E) = ME = \begin{pmatrix} -\frac{213}{22} & \frac{43}{22} & \frac{79}{22} \\ \frac{4}{22} & 0 & -2 \\ -\frac{137}{22} & \frac{7}{22} & \frac{85}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 \\ -2 \\ \frac{219}{22} \end{pmatrix}$$

Przykład - różnica transformacji

Przykład różnicy transformacji liniowej od afinicznej dla sześcianu, rozpiętego na punktach:

$$A = \{0, 0, 0\}, B = \{1, 1, 1\}$$

Przekształcenie liniowe

$$\lambda(x, y, z) = (2x, 3y, z)$$

$$\underbrace{\begin{gathered}\lambda(B) = \{2 \cdot 1, 3 \cdot 1, 1\} = \{2, 3, 1\} \\ \lambda(A) = \{2 \cdot 0, 3 \cdot 0, 0\} = \{0, 0, 0\}\end{gathered}}_{f\left(\vec{\theta}\right) = \vec{\theta}}$$

Przekształcenie afiniczne

$$\varphi(x, y, z) = (2x + 1, 3y - 2, z)$$

$$\underbrace{\begin{gathered}\varphi(B) = \{2 \cdot 1 + 1, 3 \cdot 1 - 2, 1\} = \{3, 1, 1\} \\ \varphi(A) = \{2 \cdot 0 + 1, 3 \cdot 0 - 2, 0\} = \{1, -2, 0\}\end{gathered}}_{f\left(\vec{\theta}\right) = \vec{b}}$$

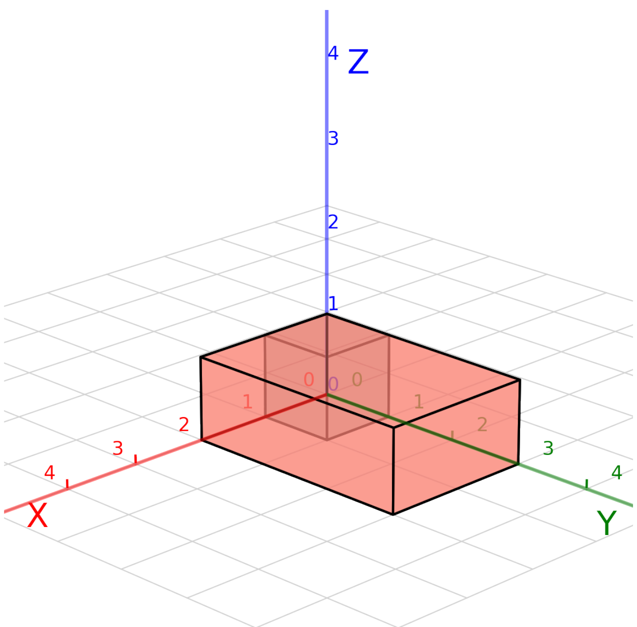


Figure 2: Odwzorowanie liniowe

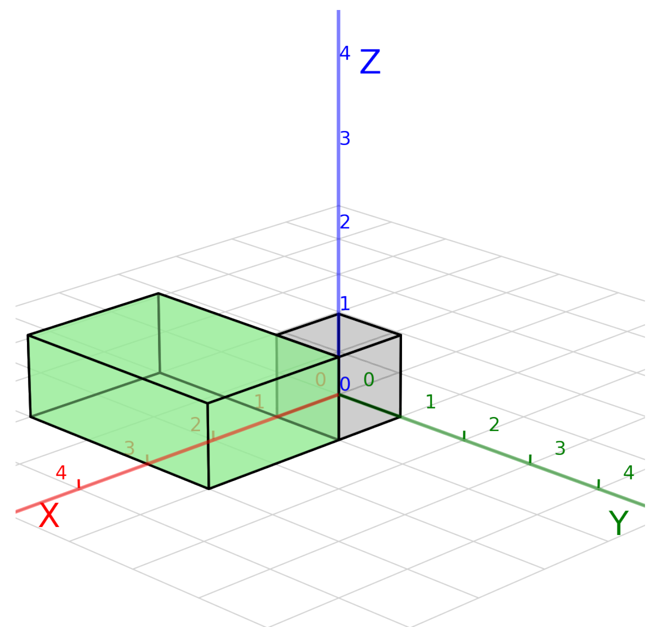


Figure 3: Odwzorowanie afiniczne

Rodzaje przekształceń liniowych

Przekształcenia wchodzące w skład przekształceń liniowych:

- Rotacja
- Skalowanie
- Rzut ortograficzny
- Odbicie
- Shear

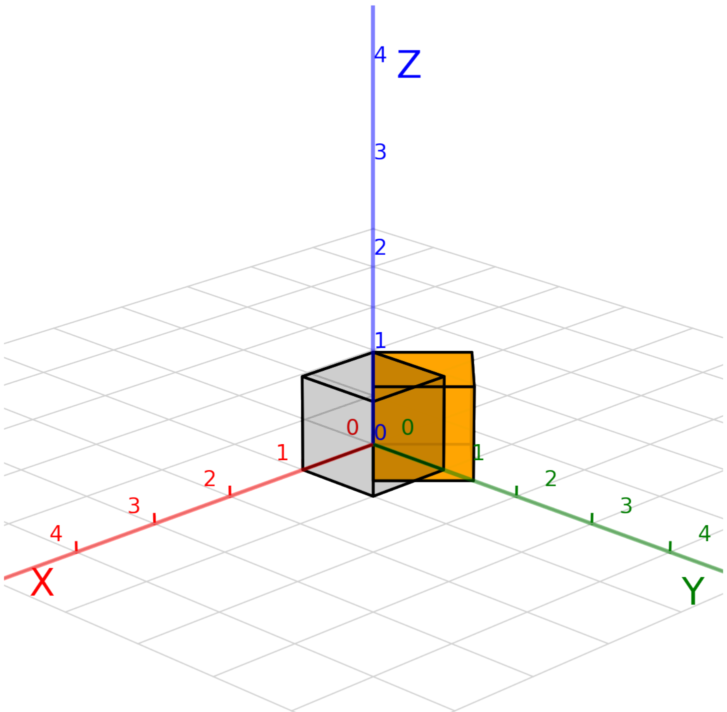


Figure 4: Rotacja

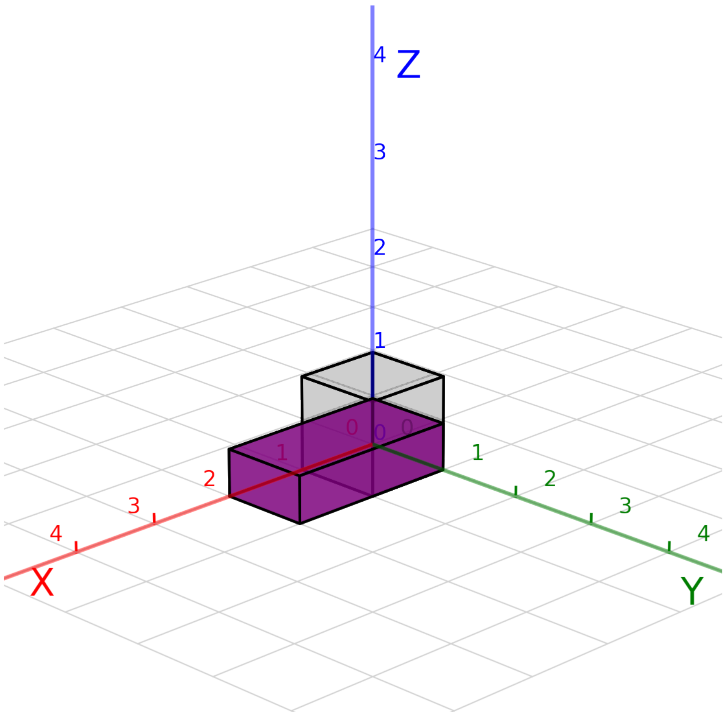


Figure 5: Skalowanie

Rodzaje przekształceń liniowych

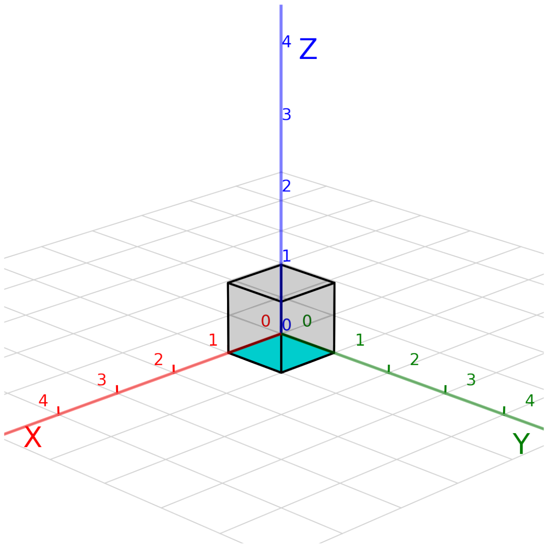


Figure 6: Rzut ortograficzny

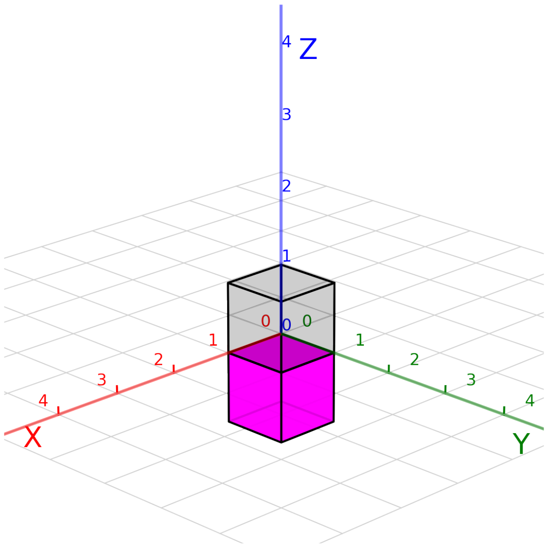


Figure 7: Odbicie

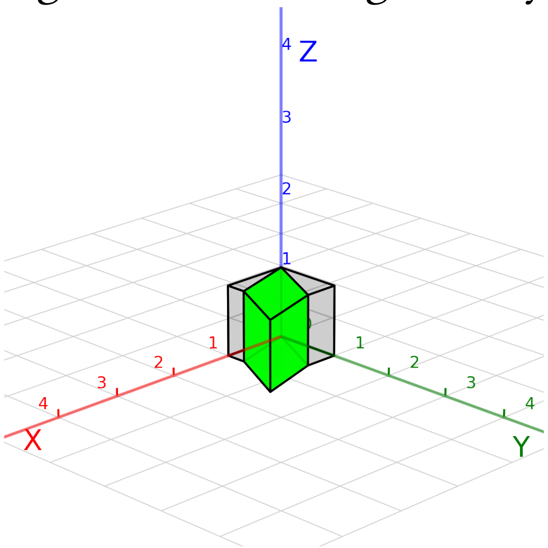


Figure 8: Shear

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

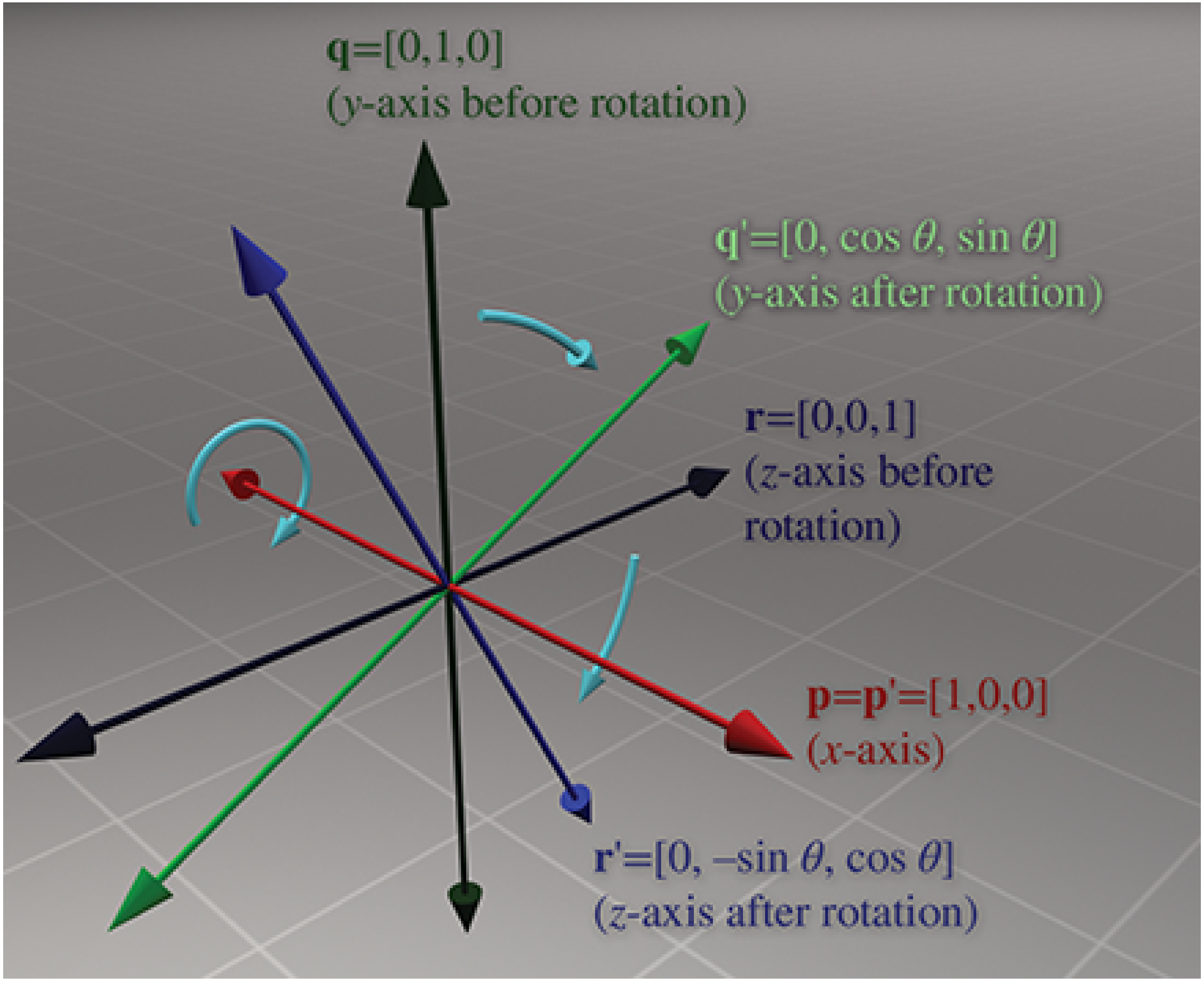


Figure 9: Rotacja wokół osi x w 3d

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

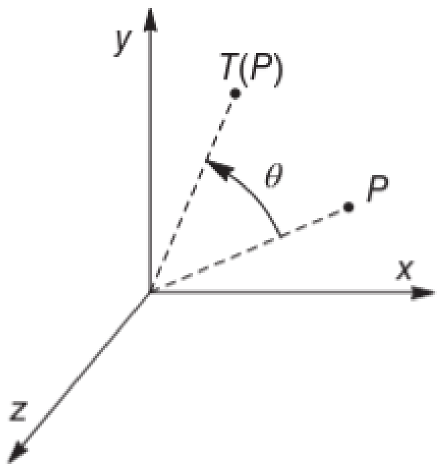


Figure 10: Rotacja wokół osi z (ang. yaw)

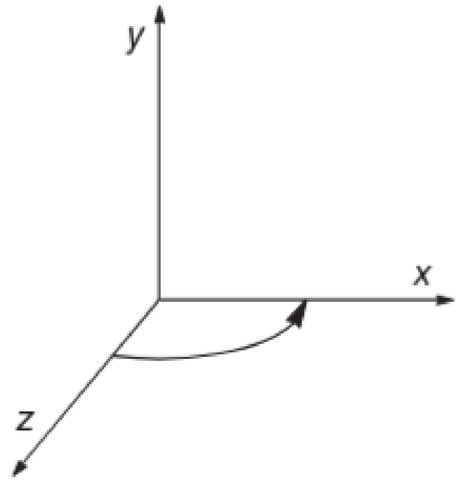


Figure 11: Rotacja wokół osi y (ang. pitch)

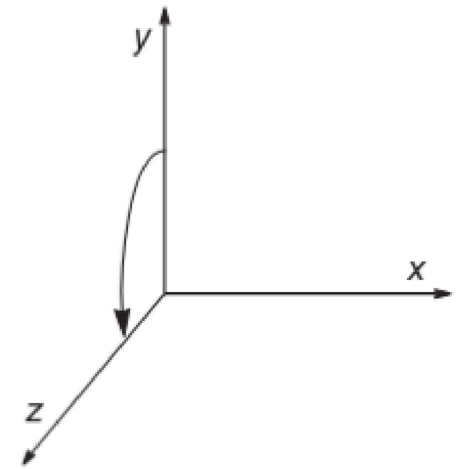


Figure 12: Rotacja wokół osi x (ang. roll)

$$M_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

> Zwróć uwagę, że wiersz macierzy reprezentujący oś po której obracamy elementy przestrzeni wektorowej, mają postać wektora jednostkowego.

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

Stosując macierze rotacji można obrócić elementy przestrzeni wektorowej, wokół dowolnie wybranej osi.

$$R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

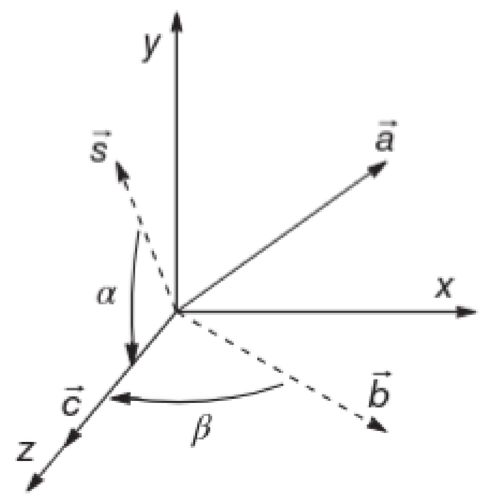
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) \neq R_y(\beta)R_z(\alpha)R_x(\gamma) \neq$$
$$R_x(\gamma)R_z(\alpha)R_y(\beta) \neq R_z(\alpha)R_x(\gamma)R_y(\beta) \neq$$
$$R_y(\beta)R_x(\gamma)R_y(\alpha) \neq R_y(\beta)R_y(\beta)R_y(\alpha)$$

Różna kolejność stosowania macierzy rotacji, spowoduje obrót wokół innej osi.

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

Obrót wokół dowolnej osi. Przypuśćmy że chcemy wykonać operacje rotacji wokół wektora jednostkowego $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, czyli takiego którego długość jest równa $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$, o postaci macierzy M_φ, o kąt θ.



Aby tego dokonać, możemy znaleźć takie macierze rotacji, aby dopasować wektor $\vec{a}$ do jednej z osi układu współrzędnych, np. Osi z. Następnie zastosować Macierz rotacji dla osi do której sprowadziliśmy wektor $\vec{a}$.

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

Dla wektora $\vec{a}$ podanego na rysunku możemy to zrobić w następujący sposób:

- Użyć macierzy rotacji wokół osi X aby przekształcić wektor $\vec{a}$ do wektora oznaczonego na rysunku jako $\vec{b}$. W tym celu musimy znaleźć kąt pomiędzy wektorem $\vec{a}$ a osią X. Jeżeli $g = a_y^2 + a_z^2$

  $$\cos\alpha = \frac{a_z}{g}$$

  Mając kąt α, możemy zastosować macierz rotacji dla osi X aby przekształcić wektor do płaszczyzny XZ czyli do postaci wektora $\vec{b}$.

  $$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_z}{g} & -\frac{a_y}{g} \\ 0 & \frac{a_y}{g} & \frac{a_z}{g} \end{pmatrix}$$

  Zatem

  $$\vec{b} = M_x(\alpha) \cdot \vec{a},$$

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

- Następnie musimy przenieść wektor $\vec{b}$ do wektora położonego na wybranej osi, na rysunku nazwanego jako $\vec{c}$. W tym celu musimy znaleźć kąt pomiędzy wektorem $\vec{b}$ a osią Z.

$$\cos \beta = g$$

  Mając kąt β, możemy zastosować macierz rotacji dla osi Y aby przekształcić wektor do postaci wektora docelowego $\vec{c}$

$$M_y(\beta) = \begin{pmatrix} g & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & 0 \\ a_x & 0 & g \end{pmatrix}$$

  Zatem

$$\vec{c} = M_y(\beta) \cdot \vec{b},$$

- Ostatnim krokiem naszego algorytmu jest zastosowanie macierz rotacji wokół osi Z, tej którą chcieliśmy zastosować dla naszego wektora początkowego $\vec{a}$, oznaczoną wcześniej jako M_φ.

$$\vec{'a} = M_\varphi \vec{c}$$

W taki sposób możemy obrócić elementy przestrzeni liniowej wokół dowolnego wektora. Ogólna postać tego algorytmu to macierz M_{arb} podana wzorem:

$$M_{arb} = M_x^{-1}(\alpha) M_y^{-1}(\beta) M_z(\theta) M_y(\beta) M_x(\alpha)$$

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

$$M_{arb} = \begin{pmatrix} c + (1-c)a_x^2 & (1-c)a_x a_y - s a_z & (1-c)a_x a_z + s a_y \\ (1-c)a_x a_y + s a_z & c + (1-c)a_y^2 & (1-c)a_y a_z - s a_x \\ (1-c)a_x a_z - s a_y & (1-c)a_y a_z + s a_x & c + (1-c)a_z^2 \end{pmatrix}$$

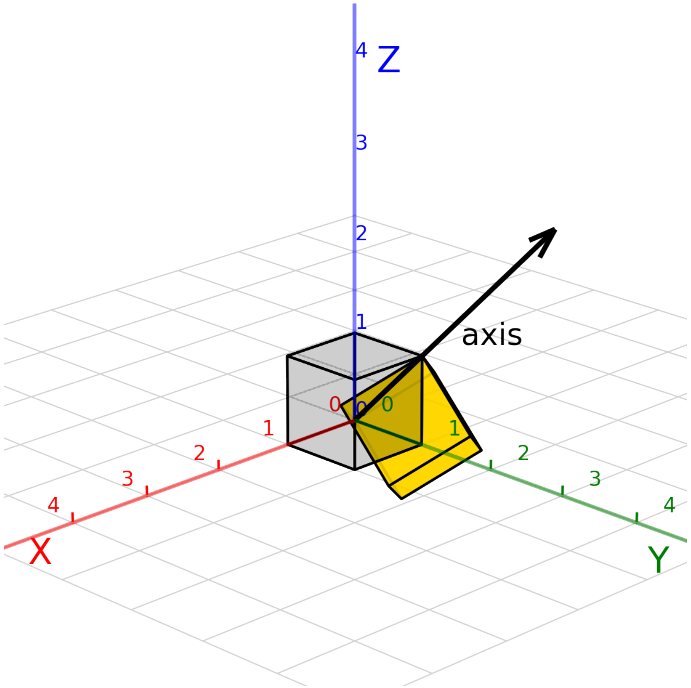


Figure 14: Rotacja wokół wektora $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, o 90 stopni.

Rotacja jako odwzorowanie w przestrzeni liniowej, zachowuje kąty, długości wektorów powierzchnie i objętości figur.

Skalowanie obiektów w przestrzeni 3D

Skalowanie to przekształcenie liniowe zmieniające rozmiar obiektu względem początku układu współrzędnych o zadany współczynnik **k**. Dla przestrzeni trójwymiarowej macierz skalowania ma postać:

$$S(k_x, k_y, k_z) = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

gdzie:

- k_x, k_y, k_z – współczynniki skali wzdłuż osi x, y, z

Skalowanie wzdłuż osi polega na zmianie wymiaru obiektu względem płaszczyzn współrzędnych. Jeżeli współczynniki skalowania są jednakowe, skalowanie jest **jednolite**; w przeciwnym razie — **niejednolite**.

Mnożąc wektor przez macierz skalowania, otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x x \\ k_y y \\ k_z z \end{pmatrix}$$

lub równoważnie:

$$S(k_x, k_y, k_z) \cdot (v) = (v'), \text{ gdzie } v' = (k_x x, k_y y, k_z z)$$

Skalowanie jednolite

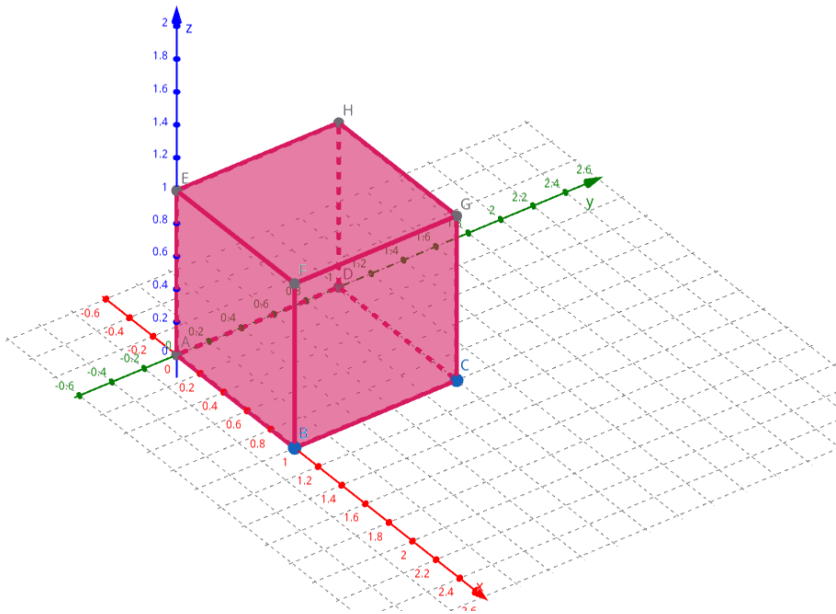
Jednolite skalowanie to przekształcenie liniowe, w którym każdy wymiar obiektu jest powiększany lub pomniejszany o ten sam współczynnik k. Skalowanie odbywa się względem początku układu współrzędnych.

Macierz skalowania w 3D: $S = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

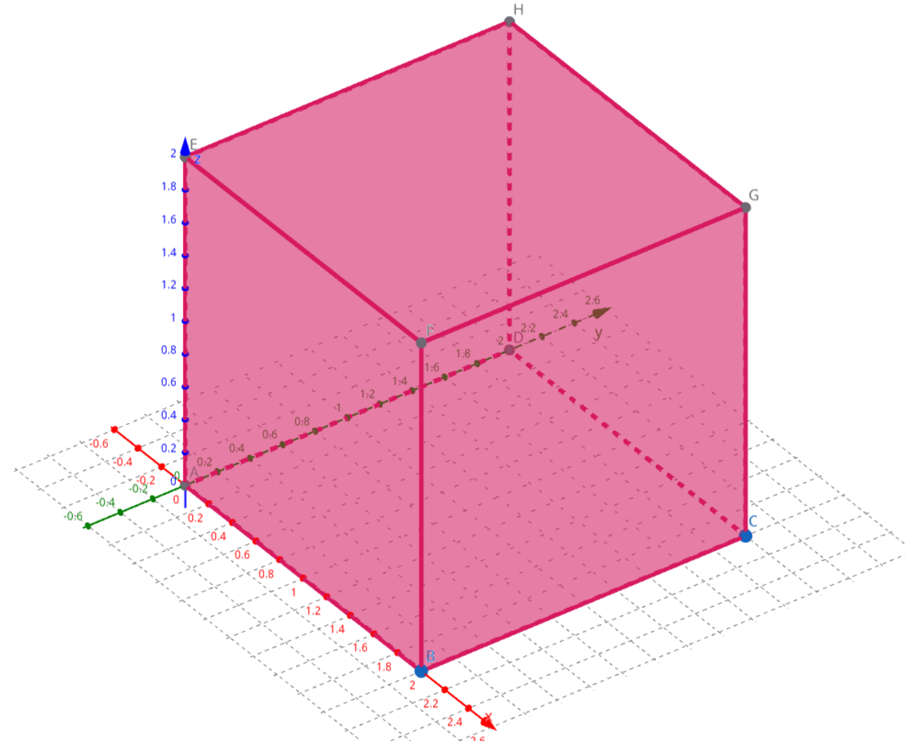
Własności:

- zachowuje kształt i kąty (nie zniekształca obiektu),
- kierunek kształtu jest zawsze zachowany
- wszystkie wymiary rosną proporcjonalnie do k,
- pole powierzchni rośnie jak k^2,
- objętość rośnie jak k^3.

Wizualizacja skalowania jednolitego (sześcian)



Sześcian przed skalowaniem (długość boku = 1)



Sześcian po skalowaniu o współczynnik k = 2 (długość boku = 2)

Wizualizacja skalowania jednolitego (sześcian)

Obliczenia:

Dla punktu $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz

macierzy: $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

mamy: $P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dla kolejnych wierzchołków sześcianu:

$$[0, 0, 0] \to [0, 0, 0]$$
$$[0, 0, 1] \to [0, 0, 2]$$
$$[0, 1, 0] \to [0, 2, 0]$$
$$[0, 1, 1] \to [0, 2, 2]$$
$$[1, 0, 1] \to [2, 0, 2]$$
$$[1, 1, 0] \to [2, 2, 0]$$
$$[1, 1, 1] \to [2, 2, 2]$$

Każda współrzędna została pomnożona przez 2. Zatem sześcian o boku 1 został powiększony do boku 2, a objętość zwiększyła się 8-krotnie ($2^3 = 8$).

Skalowanie niejednolite (anisotropowe)

Jeśli chcemy „rozciągnąć” lub „ścisnąć” obiekt, możemy zastosować różne współczynniki skalowania w różnych kierunkach. Takie przekształcenie nazywamy **skalowaniem niejednolitym (anisotropowym)**. Nierównomierna skala nie zachowuje kątów ani proporcji między wymiarami.

Macierz skalowania: $S = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$

Własności:

- nie zachowuje kształtów ani kątów między osiami,
- kierunki osi pozostają zachowane (osie nie zmieniają orientacji),
- zmiana długości wzdłuż osi X, Y, Z następuje odpowiednio o współczynniki k_x, k_y, k_z,
- pole powierzchni zmienia się proporcjonalnie do $k_x k_y$,
- objętość zmienia się proporcjonalnie do $k_x k_y k_z$,

Skalowanie niejednolite (anisotropowe)

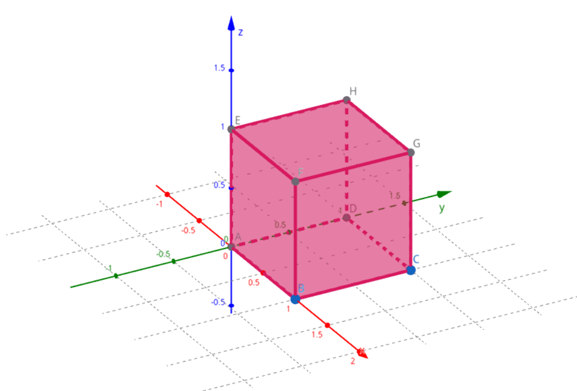
Obliczenia: Dla punktu $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

oraz macierzy: $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$ mamy:

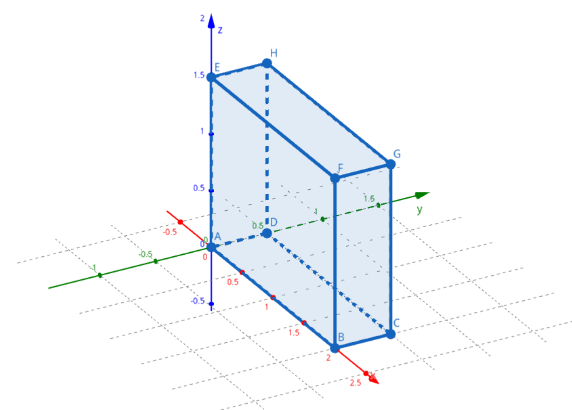
$$P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dla kolejnych wierzchołków sześcianu:

$$[0, 0, 0] \to [0, 0, 0]$$
$$[0, 0, 1] \to [0.0, 0.0, 1.5]$$
$$[0, 1, 0] \to [0.0, 0.5, 0.0]$$
$$[0, 1, 1] \to [0.0, 0.5, 1.5]$$
$$[1, 0, 1] \to [2.0, 0.0, 1.5]$$
$$[1, 1, 0] \to [2.0, 0.5, 0.0]$$
$$[1, 1, 1] \to [2.0, 0.5, 1.5]$$

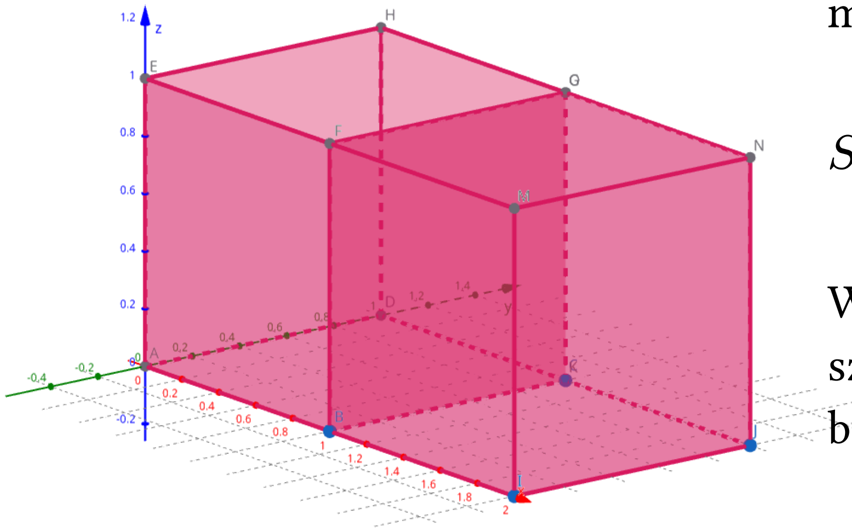


Sześcian przed skalowaniem (długość boku = 1)



Sześcian po skalowaniu o różne współczynniki k

Skalowanie wzdłuż jednej osi



Skalowanie sześcianu o długości boku = 1 tylko względem osi x o wartość 2

Aby “rozciągnąć” lub “ścisnąć” tylko względem jednej osi możemy użyć nastepujących macierzy.

$$S_x = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

W naszym przykładzie “rozciągniemy” nasz sześcian względem osi x. Więc nasza macierz będzie wyglądać nastepująco:

$$S_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skalowanie w dowolnym kierunku

Skalowanie nie musi odbywać się wyłącznie wzdłuż osi układu współrzędnych. Możemy skalować obiekt wzdłuż dowolnego kierunku określonego przez wektor jednostkowy $\hat{\boldsymbol{n}}$.

Macierz skalowania wzdłuż kierunku $\hat{\boldsymbol{n}}$:

$$S = I + (k-1)\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T$$

gdzie:

- I – macierz jednostkowa,
- $\hat{\boldsymbol{n}}$ – wektor jednostkowy kierunku skalowania,
- k – współczynnik skali wzdłuż tego kierunku.

Rozpisując równanie $\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T$, otrzymujemy:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{pmatrix}$$

Skalowanie w dowolnym kierunku

Po podstawieniu do

$$S = I + (k-1)\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T,$$

otrzymujemy:

$$S(\hat{\boldsymbol{n}}, k) = \begin{pmatrix} 1+(k-1)n_x^2 & (k-1)n_x n_y & (k-1)n_x n_z \\ (k-1)n_y n_x & 1+(k-1)n_y^2 & (k-1)n_y n_z \\ (k-1)n_z n_x & (k-1)n_z n_y & 1+(k-1)n_z^2 \end{pmatrix}$$

Skalowanie w dowolnym kierunku jest uogólnieniem skalowania wzdłuż osi:

- dla $\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mamy skalowanie wzdłuż osi X,
- dla $\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — wzdłuż osi Y,
- dla $\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — wzdłuż osi Z.

Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego

Załóżmy, że chcemy skalować wzdłuż kierunku ukośnego, który leży w płaszczyźnie XY i biegnie pod kątem 45° do osi X oraz dla współczynnika skali $k = 2$.
Ten kierunek opisuje wektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

który nie jest wektorem jednostkowym więc musimy go znormalizować. Jego długość teraz wynosi:

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Aby przekształcenie było poprawne, potrzebujemy wektora jednostkowego:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \to \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obliczamy macierz $\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T$:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego

Po podstawieniu do równania na S:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (2-1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

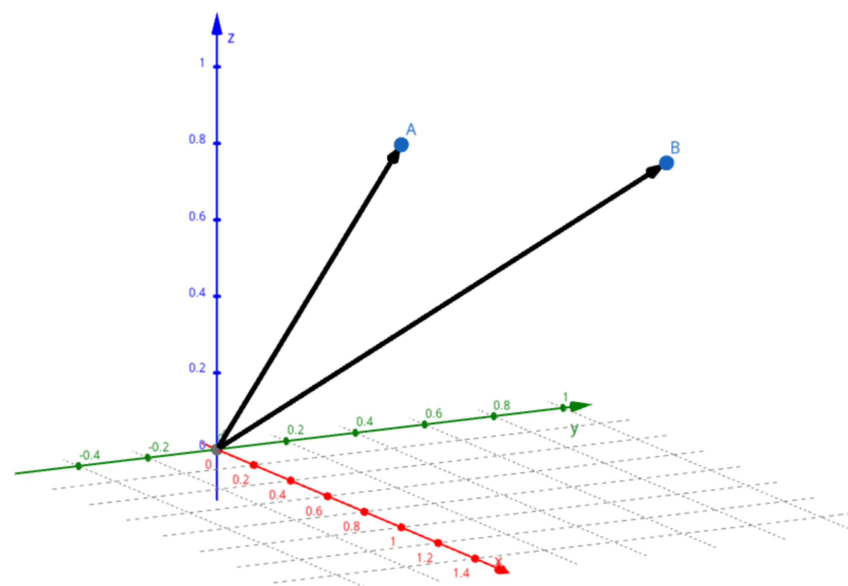
Ostatecznie:

$$S = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Działanie na przykładzie punktu:

Dla $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt został przeskalowany wzdłuż kierunku ukośnego $(1, 1, 0)$ — jego współrzędne zmieniły się proporcjonalnie w obu osiach. Obiekt został rozciągnięty dwukrotnie wzdłuż tego kierunku, natomiast w kierunku prostopadłym pozostał bez zmian.



Odbicie względem płaszczyzny

Odbicie (lub **lustrzane odbicie**) to przekształcenie liniowe, które odwraca położenie punktów obiektu względem danej płaszczyzny. W przestrzeni trójwymiarowej płaszczyzna odbicia przechodzi przez początek układu współrzędnych, a jej orientację określa wektor jednostkowy normalny $\hat{\boldsymbol{n}}$. Odbicie można interpretować jako **skalowanie wzdłuż kierunku $\hat{\boldsymbol{n}}$** ze współczynnikiem $k = -1$.

Macierz odbicia:

$$R(\hat{\boldsymbol{n}}) = S(\hat{\boldsymbol{n}}, -1) = \begin{pmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_y n_x & 1-2n_y^2 & -2n_y n_z \\ -2n_z n_x & -2n_z n_y & 1-2n_z^2 \end{pmatrix}$$

Własności odbicia:

- odwraca orientację obiektu (powstaje obraz lustrzany),
- jest izometrią — zachowuje długości i kąty między wektorami,
- dwukrotne zastosowanie odbicia przywraca pierwotny kształt: $R(\hat{\boldsymbol{n}})^2 = I$,

Przykład — odbicie względem płaszczyzny XY

Rozważmy odbicie względem płaszczyzny XY, której wektor normalny to:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Macierz odbicia: } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dla wierzchołków piramidy mamy:

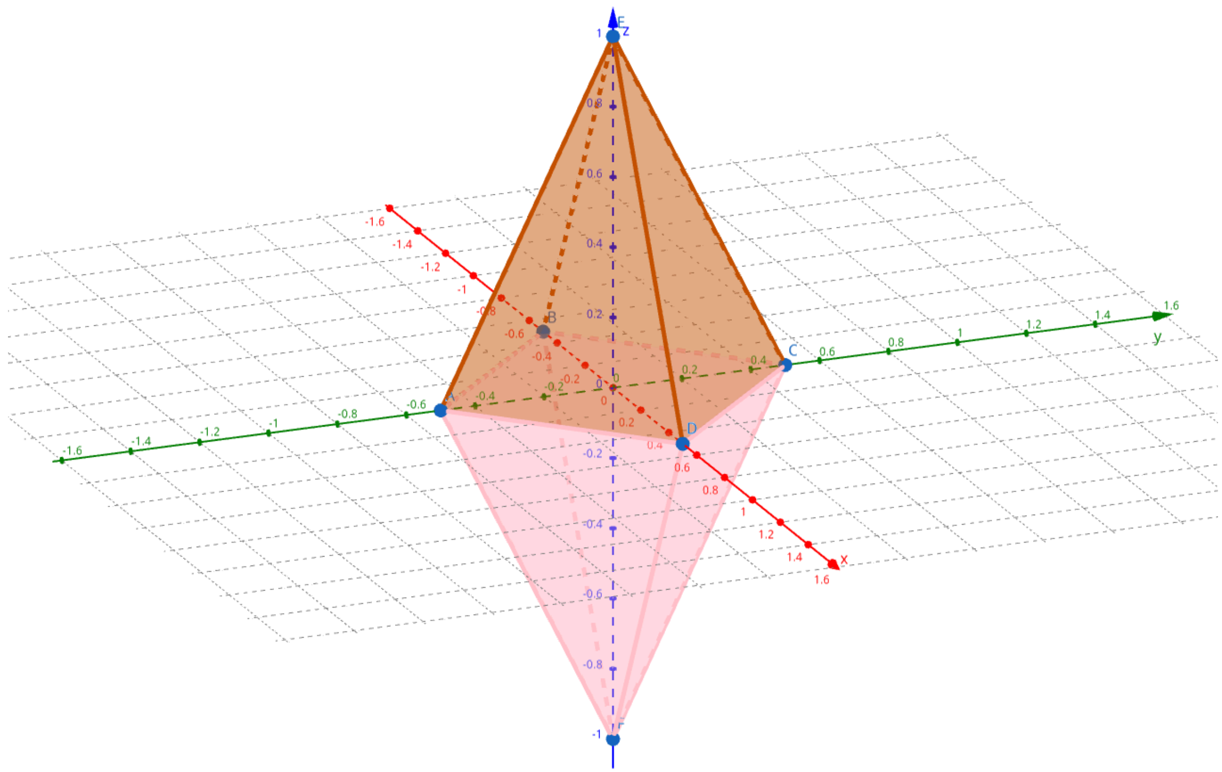
$$[0, -0.5, 0] \to [0, -0.5, 0]$$

$$[-0.5, 0, 0] \to [-0.5, 0, 0]$$

$$[0, 0.5, 0] \to [0, 0.5, 0]$$

$$[0.5, 0, 0] \to [0.5, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \to [0, 0, -1]$$



Wierzchołki leżące w płaszczyźnie XY pozostają niezmienione, natomiast punkt znajdujący się powyżej zostaje odbity symetrycznie poniżej niej.

Rzut równoległy jako przypadek skalowania

Rzut równoległy (ortograficzny) można traktować jako **szczególny przypadek skalowania**, w którym współczynnik skali wzdłuż jednego z kierunków wynosi zero. W takim przypadku wszystkie punkty zostają „spłaszczone” na płaszczyznę — czyli ich współrzędne wzdłuż danego kierunku zanikają.

Interpretacja geometryczna: Punkty oraz ich obrazy są połączone prostymi równoległymi do kierunku rzutu. Dlatego przekształcenie to nazywa się **rzutem równoległym**.

Własności rzutu równoległego:

- nie zachowuje perspektywy (brak zbiegu linii równoległych),
- zachowuje kształt i proporcje obiektów,
- jest liniowym przekształceniem macierzowym,
- w praktyce odpowiada „pominięciu” współrzędnej z (dla rzutu na płaszczyznę XY).

Rzutowanie na oś lub płaszczyznę kardynalną

Rzutowanie na jedną z płaszczyzn głównych (kardynalnych) można przedstawić za pomocą **macierzy skalowania** ze współczynnikiem $k = 0$ w kierunku normalnym do tej płaszczyzny.

W ten sposób rzut 3D $\longrightarrow$ 2D realizowany jest przez „wyzerowanie" jednej współrzędnej punktu:

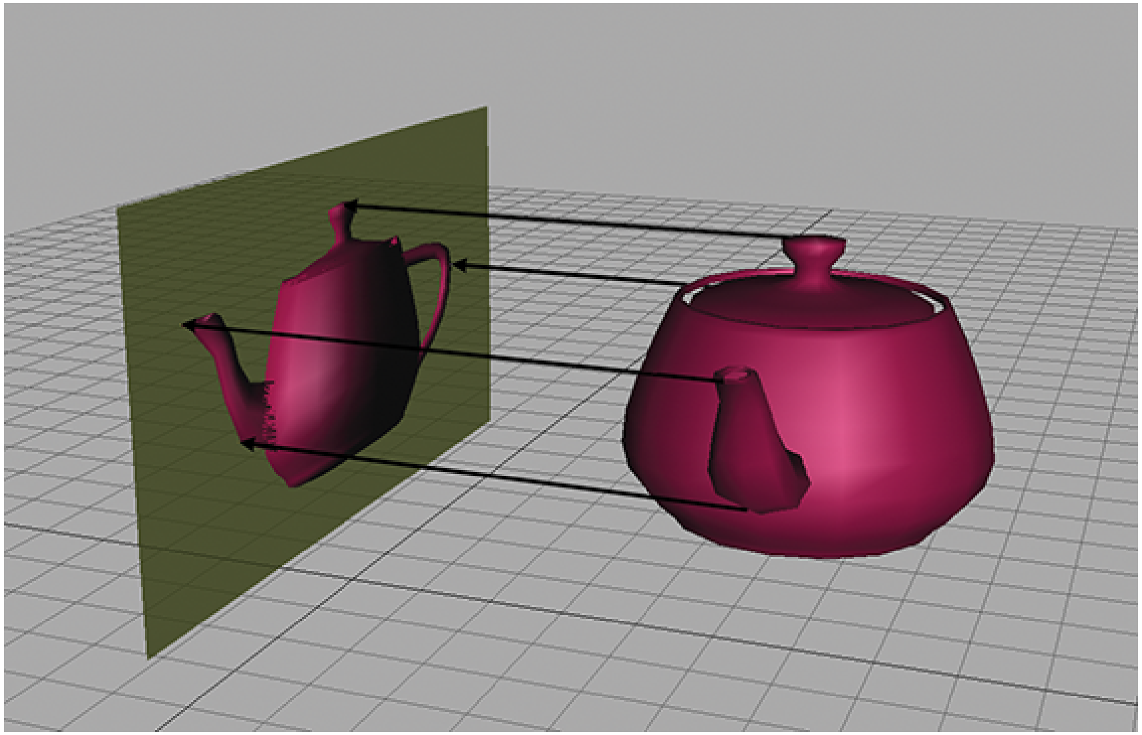
$$\textbf{Rzut na płaszczyznę XY: } P_{\mathrm{xy}} = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Rzut na płaszczyznę XZ: } P_{\mathrm{xz}} = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Rzut na płaszczyznę YZ: } P_{\mathrm{yz}} = S\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W każdym przypadku współrzędna wzdłuż kierunku normalnego do płaszczyzny zostaje usunięta, co odpowiada „rzutowi" wszystkich punktów na daną płaszczyznę przy zachowaniu ich pozostałych współrzędnych.

Rzutowanie na oś lub płaszczyznę kardynalną



Przekształcenie skośne w 3D (Shearing)

Przekształcenie skośne (ang. **shearing**, inaczej **pochylenie** lub **skoszenie**) w przestrzeni trójwymiarowej polega na przesunięciu punktów obiektu wzdłuż jednego kierunku proporcjonalnie do ich położenia w innym kierunku. Przekształcenie to zachowuje objętość, ale **zniekształca kąty i kształty** obiektu.

Dla przykładu, jeśli przesuwamy współrzędne x i y proporcjonalnie do wartości z, to:

$$x' = x + k_{\mathrm{xz}} z, \quad y' = y + k_{\mathrm{yz}} z, \quad z' = z$$

W postaci macierzowej:

$$S_{\{z\}}(k_{\mathrm{xz}}, k_{\mathrm{yz}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k_{\mathrm{xz}} \\ 0 & 1 & k_{\mathrm{yz}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie k_{xz} i k_{yz} określają stopień pochylenia względem osi z. Ogólnie istnieje sześć możliwych macierzy przekształceń skośnych w 3D — w zależności od tego, względem której osi wykonywane jest pochylenie:

$$S_{\{x\}}(k_{\mathrm{xy}}, k_{\mathrm{xz}}) = \begin{pmatrix} 1 & k_{\mathrm{xy}} & k_{\mathrm{xz}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{\{y\}}(k_{\mathrm{yx}}, k_{\mathrm{yz}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{\mathrm{yx}} & 1 & k_{\mathrm{yz}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{\{z\}}(k_{\mathrm{zx}}, k_{\mathrm{zy}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_{\mathrm{zx}} & k_{\mathrm{zy}} & 1 \end{pmatrix}$$

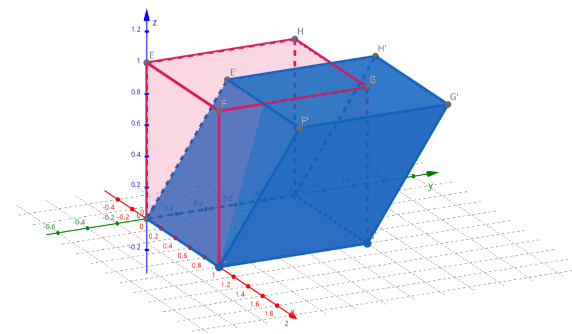
Przekształcenie skośne w 3D (Shearing)

Własności przekształcenia skośnego:

- zachowuje objętość, ale nie zachowuje kątów ani kształtów,
- jest liniowym przekształceniem (determinant macierzy = 1),
- w połączeniu ze skalowaniem może imitować rotację z deformacją.

$$S_{\{z\}}(0.5, 0.3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dla tego przekształcenia punkty przesuwają się proporcjonalnie do swojej współrzędnej z, tworząc efekt „pochylenia" obiektu w kierunku osi x i y.



Łączenie transformacji

W praktyce przekształcenia obiektów w grafice komputerowej rzadko wykonuje się pojedynczo. Najczęściej stosuje się ich **sekwencję** – np. **skalowanie**, potem **rotację**. Aby uprościć obliczenia, można je połączyć w jedną macierz transformacji.

Zasada łączenia: Jeśli mamy dwie macierze transformacji:

$$A - \text{pierwsza transformacja (np. skalowanie)},$$
$$B - \text{druga transformacja (np. rotacja)},$$

to ich złożenie (czyli zastosowanie jednej po drugiej) opisuje macierz:

$$M = B \cdot A$$

Kolejność jest **istotna** – najpierw stosujemy transformację A, potem B. Mnożenie macierzy **nie jest przemienne**, więc $B \cdot A \neq A \cdot B$.

Łączenie transformacji

Przykład:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{z(90°)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

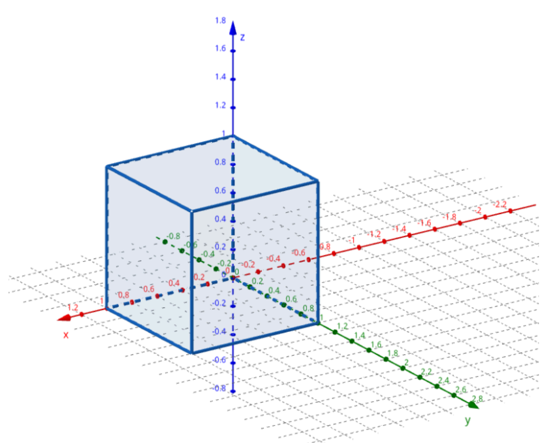
Kolejność zastosowania:

$$M_{\mathrm{RS}} = R_z \cdot S \Rightarrow \text{najpierw skalowanie, potem rotacja}$$

$$M_{\mathrm{SR}} = S \cdot R_z \Rightarrow \text{najpierw rotacja, potem skalowanie}$$

$$M_{\mathrm{RS}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{\mathrm{SR}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyniki tych dwóch operacji różnią się geometrycznie. Przykład dla sześcianu.



$$A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0)$$

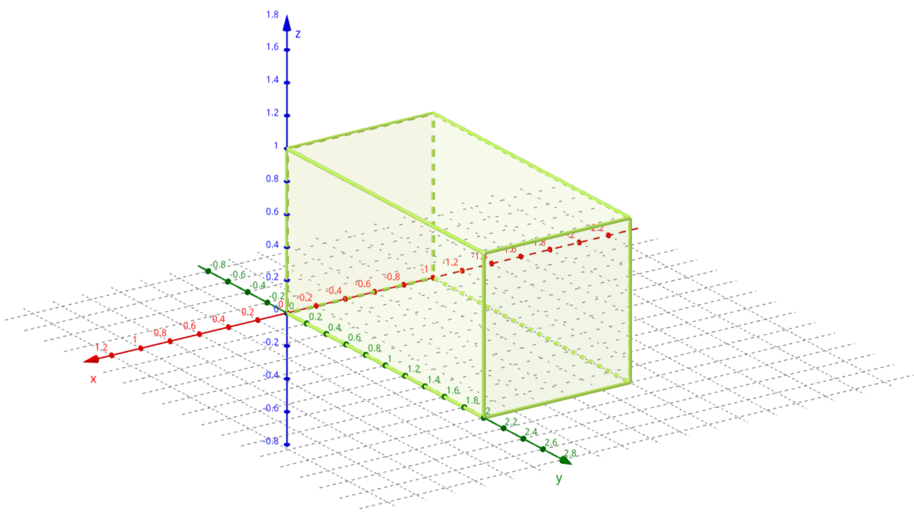
$$C = (1, 1, 0), D = (0, 1, 0)$$

$$E = (0, 0, 1), F = (1, 0, 1)$$

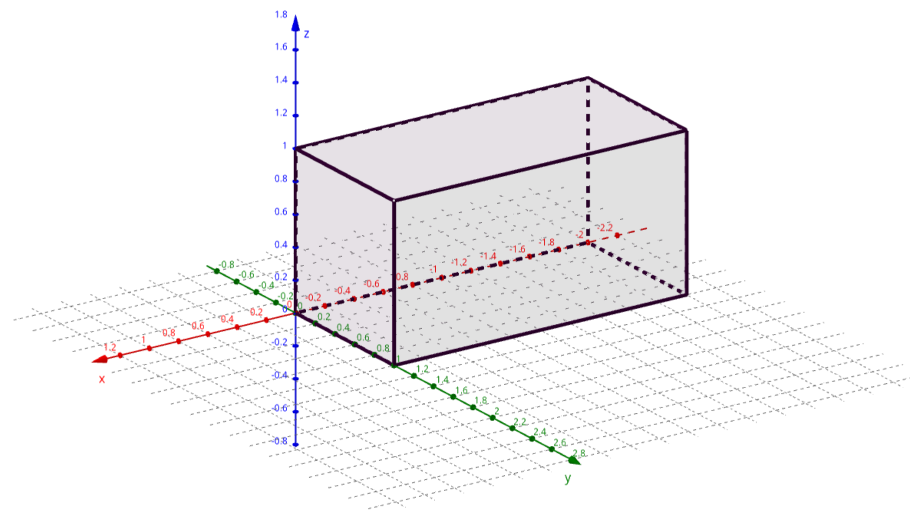
$$G = (1, 1, 1), H = (0, 1, 1)$$

Łączenie transformacji

,



Najpierw skalowanie, potem rotacja



Najpierw rotacja, potem skalowanie

Podsumowanie:

- Kolejność mnożenia macierzy decyduje o wyniku.
- Mnożenie macierzy jest sposobem **komponowania** transformacji.
- Można więc złożyć złożone przekształcenia w jedną macierz i stosować ją jednokrotnie.

Zastosowania przekształceń liniowych w 3D

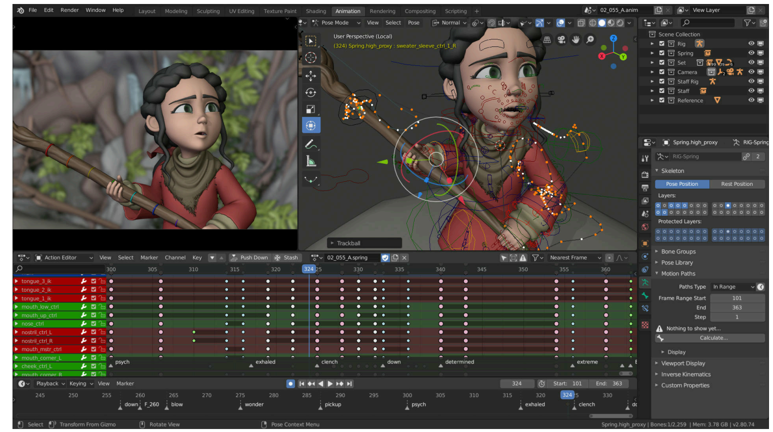
Przekształcenia liniowe stanowią podstawowy element grafiki komputerowej 3D, umożliwiając opis i kontrolę położenia, orientacji oraz kształtu obiektów w przestrzeni. W praktyce wykorzystywane są w wielu dziedzinach technologii i nauki.

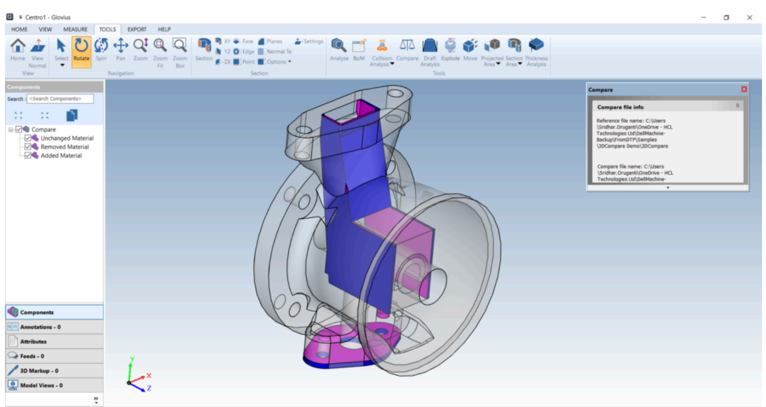
Najważniejsze zastosowania:

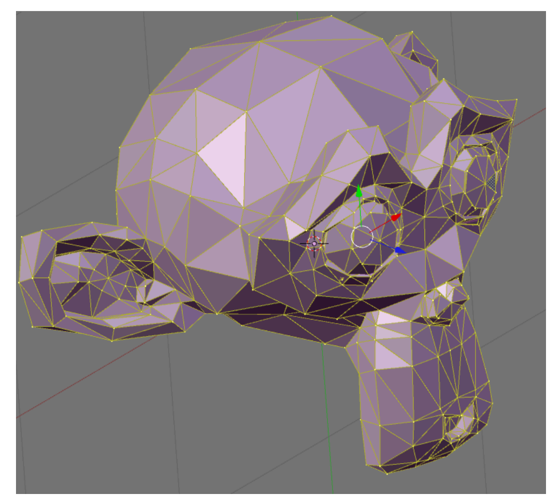
- **Modelowanie 3D** — skalowanie, obrót i odbicie pozwalają na tworzenie złożonych obiektów poprzez transformacje prostych brył.
- **Animacja komputerowa** — płynne ruchy i deformacje obiektów wynikają z sekwencji transformacji liniowych (np. macierze kości w animacjach szkieletowych).
- **Grafika w grach** — przekształcenia obiektów względem kamery i sceny w czasie rzeczywistym (tzw. **world**, **view** i **projection matrices**).
- **Symulacje fizyczne** — opis ruchu brył sztywnych, zderzeń i przemieszczeń w przestrzeni.
- **Przetwarzanie obrazu i wizualizacja danych** — rotacje, skalowania i rzuty w systemach CAD, GIS oraz oprogramowaniu inżynierskim.

Podsumowanie: Przekształcenia liniowe umożliwiają precyzyjne opisywanie i modyfikowanie przestrzeni trójwymiarowej. Dzięki nim grafika komputerowa łączy matematykę i geometrię z praktyczną wizualizacją rzeczywistości.

Zastosowania przekształceń w praktyce







Dziękujemy za uwagę.

Bibliografia

[1] F. Dunn and I. Parberry, “3D Math Primer for Graphics and Game Development.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://gamemath.com/book/matrixtransforms.html

[2] S. J. Janke, “Mathematical Structures For Computer Graphics.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://resource.laikipia.ac.ke/sites/default/files/Mathematical%20Structures%20for%20Computer%20Graphics.pdf

[3] G. Sanderson, “Three-dimensional linear transformations.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://www.3blue1brown.com/lessons/3d-transformations

[4] G. Szwoch, “Transformacje obiektów 3D.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://sound.eti.pg.gda.pl/student/so/02-Transformacje.pdf

[5] J. Rogowski, “Matematyka Grafiki Komputerowej - Przestrzenie liniowe.”

[6] J. Kijowski, “Przestrzeń afiniczna.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=BS38_8MlTjo