



Przekształcenia liniowe w 3D

Rotacja, Skalowanie, Odbicie

Jan Banaszkiewicz Jakub Kopaniewski

Matematyka Grafiki Komputerowej

Agenda

- 1 Rodzaje przekształceń geometrycznych.
- 2 Czym jest przestrzeń liniowa.
- 3 Czym jest przekształcenie liniowe - typy przekształceń.
- 4 Rotacja.
- 5 Skalowanie.
- 6 Odbicie.
- 7 Rzut równoległy (Orthographic projection).
- 8 Przekształcenie skośne (Shearing).
- 9 Łączenie transformacji.

Pojęcie przekształcenia geometrycznego

Przekształcenie T to funkcja która przekształca punkt A do innego punktu $T(A)$.



Przekształcenie	Liniowe	Afiniczne	Odwracalne	Zachowuje kąty
Transformacja liniowa	✓	✓		
Transformacja afiniczna		✓		
Transformacja odwracalna			✓	
Zachowujące kąty		✓	✓	✓
Ortogonalna		✓	✓	
Translacja		✓	✓	✓
Rotacja	✓	✓	✓	✓
Jednorodne skalowanie	✓	✓	✓	✓
Niejednorodne skalowanie	✓	✓	✓	
Rzut ortograficzny	✓	✓		
Odbicie	✓	✓	✓	
Ścinanie (shear)	✓	✓	✓	

Porównanie właściwości różnych przekształceń geometrycznych.

Brak ptaszka oznacza - “nie zawsze”.

Przestrzeń wektorowa (liniowa) - definicja

Przestrzenią liniową nazywamy trójkę $(V, +, \cdot)$, w której V jest niepustym zbiorem oraz

$$+ : V \times V \rightarrow V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V,$$

są funkcjami spełniającymi następujące warunki:

- 1 $\forall_{x,y,z \in V} \quad (x + y) + z = x + (y + z),$
 - 2 $\exists_{\theta \in V} \forall_{x \in V} \quad x + \theta = x,$
 - 3 $\forall_{x \in V} \exists_{-x \in V} \quad x + (-x) = \theta,$
 - 4 $\forall_{x,y \in V} \quad x + y = y + x,$
 - 5 $\forall_{x \in V} \quad 1 \cdot x = x,$
 - 6 $\forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \forall_{x \in V} \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$
 - 7 $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{x,y \in V} \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$
 - 8 $\forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \forall_{x \in V} \quad (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$
- Elementy zbioru V nazywamy wektorami.
 - Wektor θ nazywamy wektorem zerowym



Baza przestrzeni liniowej

Mówimy, że wektory $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ tworzą **bazę** przestrzeni liniowej $(V, +, \cdot)$, jeżeli są one liniowo niezależne i rozpinają przestrzeń $(V, +, \cdot)$.



Przykład wektorów, które są bazą przestrzeni liniowej 3 wymiarowych wektorów:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Przykład wektorów, które **nie** są bazą przestrzeni liniowej 3 wymiarowych wektorów:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Przekształcenie liniowe

Niech $(V, +, \cdot)$ i $(W, +, \cdot)$ będą przestrzeniami liniowymi.

Odwzorowanie (funkcje) $T : V \rightarrow W$ nazywamy liniowym, jeżeli

$$1 \quad \forall_{x \in V} \quad T(u + v) = T(u) + T(v) \quad (\text{przekształcenie addytywne})$$

$$2 \quad \forall_{x \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad (\text{przekształcenie jednorodne})$$



Warto zauważyć że ta definicja nie mówi nam nic o punktach, jednak dla rozpatrywanych przez nas transformacji liniowych, po oznaczeniu początku układu O , można myśleć o punktach P jako o wektorze $[\overrightarrow{OP}]$.

Możemy zapisać vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, jako liniową kombinację wektorów bazy.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stosując przekształcenie liniowe na liniowej kombinacji wektorów opisujących wektor \vec{v} możemy zapisać:

$$T(\vec{v}) = 3T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Innymi słowy aby dowiedzieć się gdzie wektor \vec{v} zostanie przekształcony, musimy dowiedzieć się gdzie wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zostaną przekształcone.

Niech T będzie przekształceniem liniowym, które jest opisane następującym wzorem:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

To dla wektora $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$T(\vec{v}) = 3T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 40 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Powyższe przekształcenie można zapisać w formie macierzy:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zatem powyższe przekształcenie możemy zapisać jako mnożenie wektora przez macierz:

$$T(\vec{v}) = M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 40 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Z powyższego przykładu można wywnioskować ogólną formułę aplikowania odwzorowań T .

$$T(\vec{v}) = M\vec{v}$$

Przykład. Niech T będzie liniowym odwzorowaniem które przekształca

$$\text{punkt } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{punkt } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{i punkt } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(C) = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punkty A, B, C przed przekształceniem można zapisać w formie macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Punkty A, B, C po przekształceniu można zapisać w formie macierzy $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Przekształcenie liniowe

Aby znaleźć Macierz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ reprezentującą to przekształcenie musimy obliczyć układ równań

$$\begin{array}{lll} a + 2b + 3c = 5, & d + 2e + 3f = -2, & g + 2h + 3i = 6, \\ 3a + 7b + 4c = -1, & 3d + 7e + 4f = 4, & 3g + 7h + 4i = 8, \\ 2a + 9b + 3c = 9, & 2d + 9e + 3f = 2, & 2g + 9h + 3i = 3, \end{array}$$

Powyższe równanie można policzyć korzystając z właściwości macierzy:

$$MA = B \Rightarrow M = BA^{-1}$$

$$M = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{213}{22} & \frac{43}{22} & \frac{79}{22} \\ \frac{4}{22} & 0 & -2 \\ -\frac{137}{22} & \frac{7}{22} & \frac{85}{22} \end{pmatrix}$$

W taki sposób znaleźliśmy macierz przekształceń, którą można zastosować, dla każdego innego punktu.

Przykład dla punktu $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$$T(E) = ME = \begin{pmatrix} -\frac{213}{22} & \frac{43}{22} & \frac{79}{22} \\ \frac{4}{22} & 0 & -2 \\ -\frac{137}{22} & \frac{7}{22} & \frac{85}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 \\ -2 \\ \frac{219}{22} \end{pmatrix}$$

Przykład - różnica transformacji liniowej od afinicznej

Przykład różnicy transformacji liniowej od afinicznej dla sześcianu, rozpiętego na punktach:

$$A = \{0, 0, 0\}, B = \{1, 1, 1\}$$

Przekształcenie liniowe

$$\lambda(x, y, z) = (2x, 3y, z)$$

$$\lambda(B) = \{2 \cdot 1, 3 \cdot 1, 1\} = \{2, 3, 1\}$$

$$\lambda(A) = \{2 \cdot 0, 3 \cdot 0, 0\} = \{0, 0, 0\}$$

$$\underbrace{\lambda(A), \lambda(B)}_{f(\vec{\theta}) = \vec{\theta}}$$

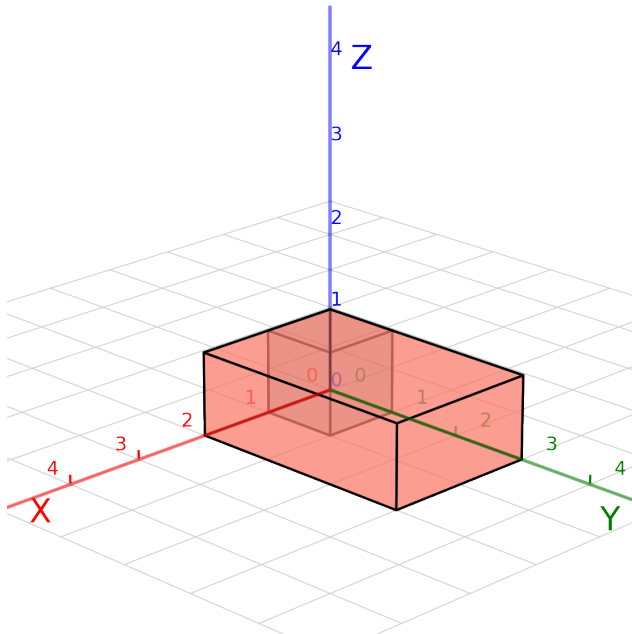


Figure 2: Odwzorowanie liniowe

Przekształcenie afiniczne

$$\varphi(x, y, z) = (2x + 1, 3y - 2, z)$$

$$\varphi(B) = \{2 \cdot 1 + 1, 3 \cdot 1 - 2, 1\} = \{3, 1, 1\}$$

$$\varphi(A) = \{2 \cdot 0 + 1, 3 \cdot 0 - 2, 0\} = \{1, -2, 0\}$$

$$\underbrace{\varphi(A), \varphi(B)}_{f(\vec{\theta}) = \vec{b}}$$

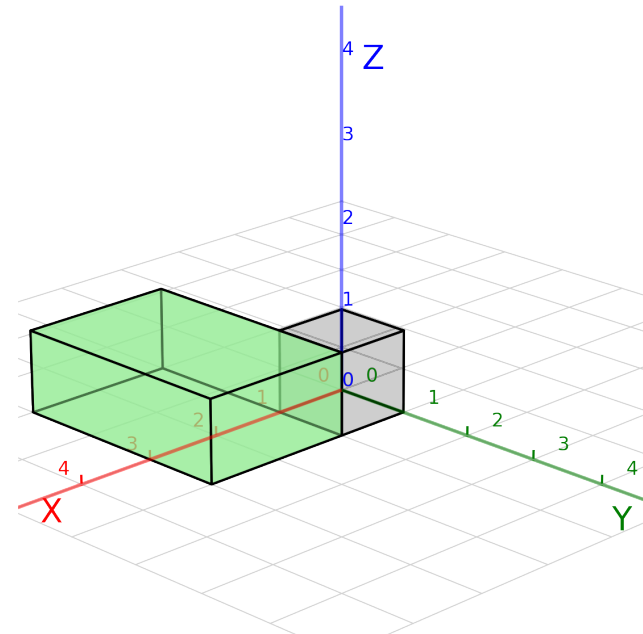


Figure 3: Odwzorowanie afiniczne

Rodzaje przekształceń liniowych

Przekształcenia wchodzące w skład przekształceń liniowych:

- Rotacja
- Skalowanie
- Odbicie
- Rzut równoległy (Orthographic projection).
- Przekształcenie skośne (Shearing).

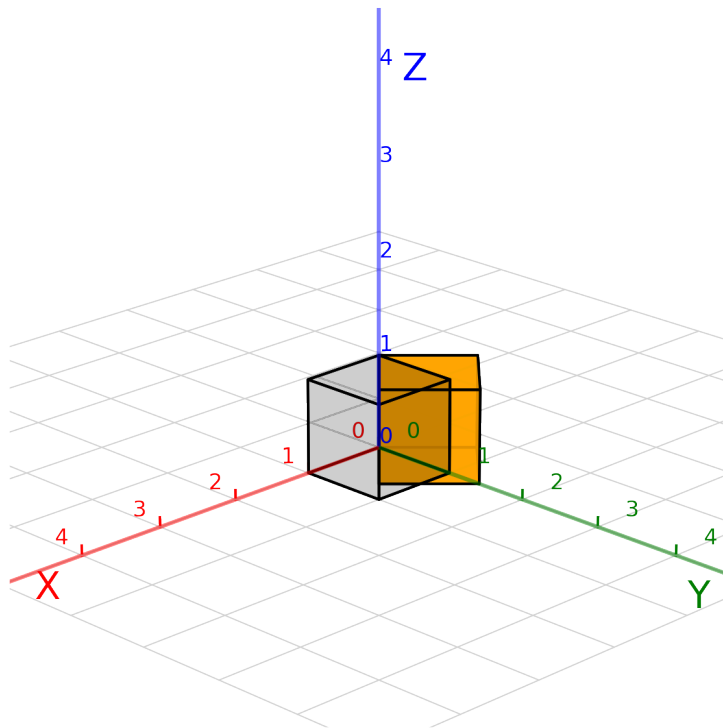


Figure 4: Rotacja

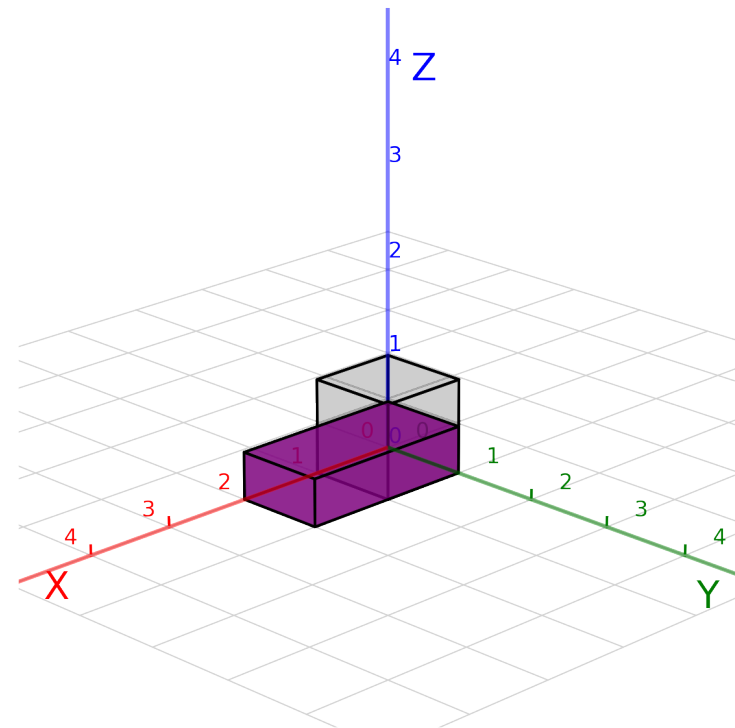


Figure 5: Skalowanie

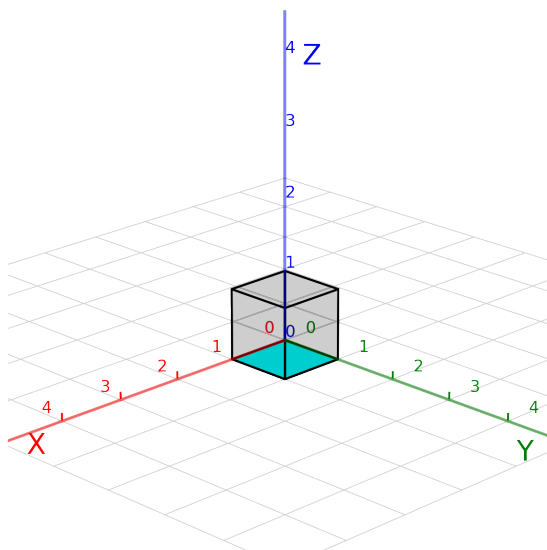


Figure 6: Rzut równoległy

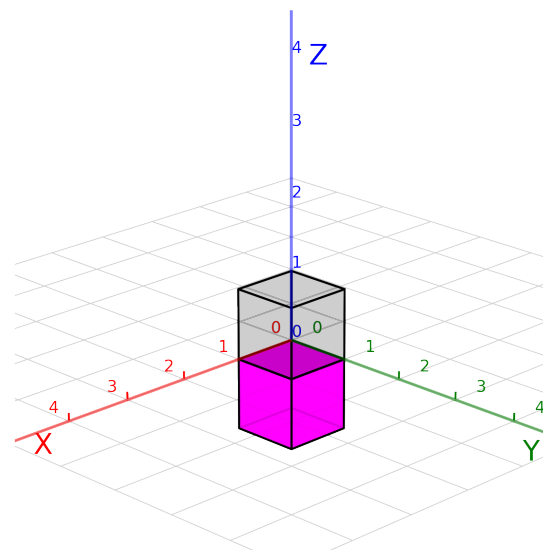


Figure 7: Odbicie

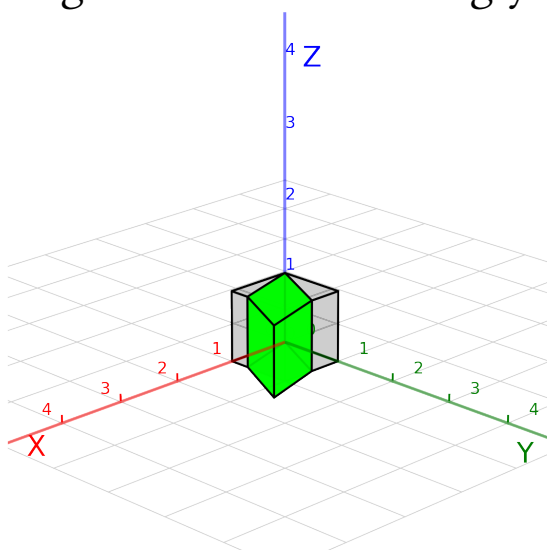


Figure 8: Przekształcenie skośne

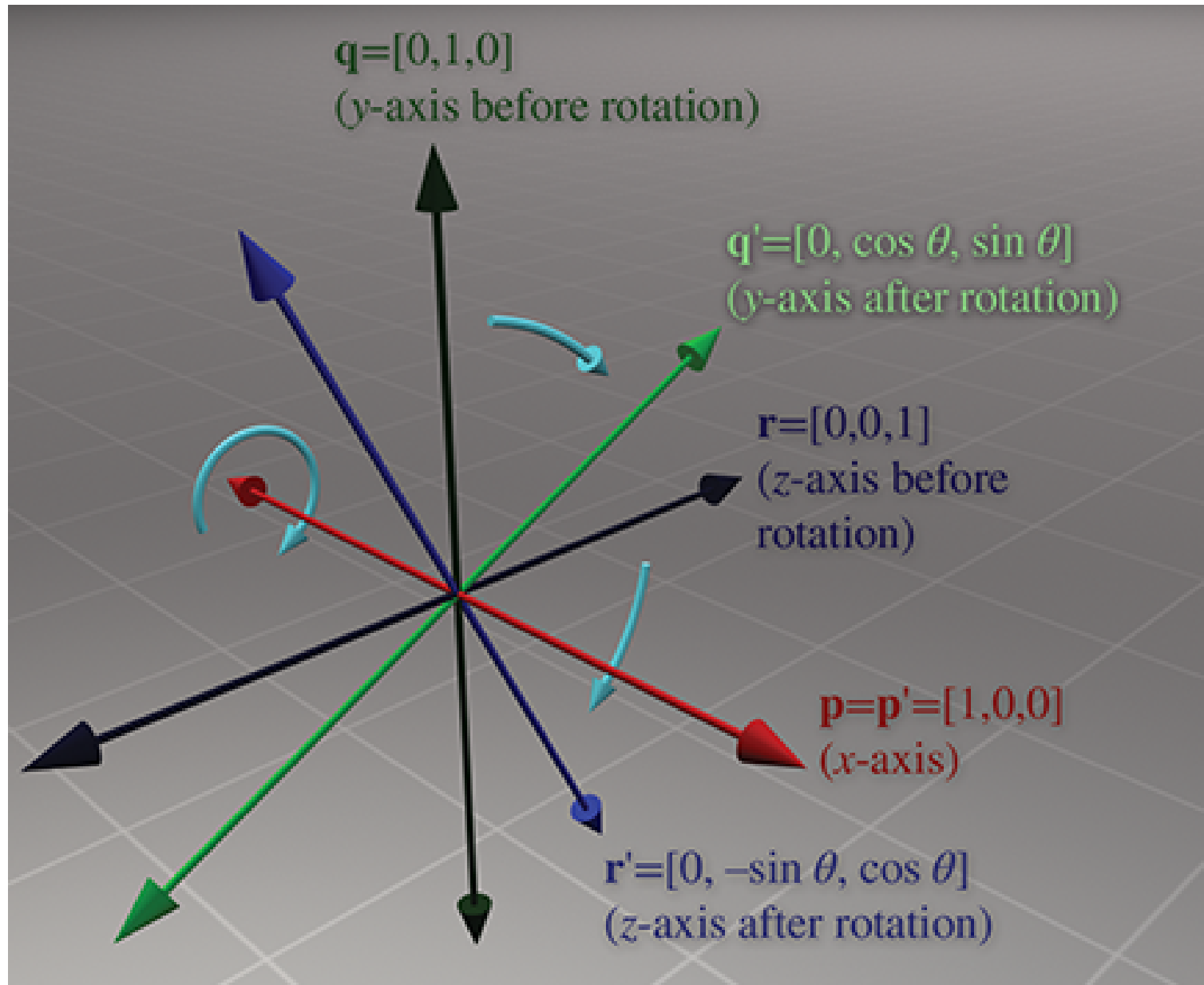


Figure 9: Rotacja wokół osi x w 3d

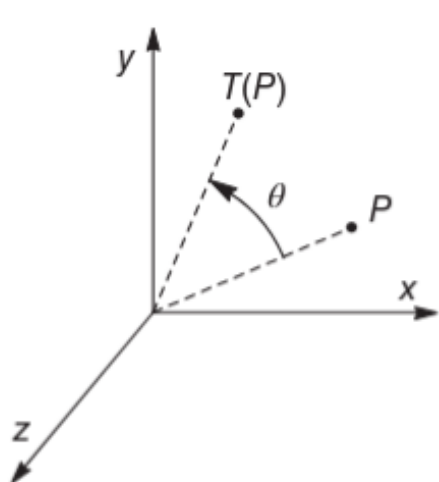


Figure 10: Rotacja wokół osi z
(ang. yaw)

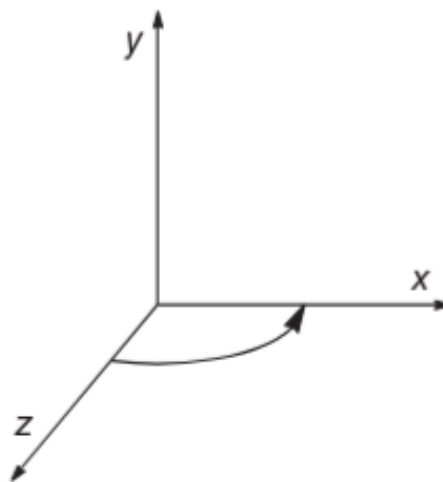


Figure 11: Rotacja wokół osi y
(ang. pitch)

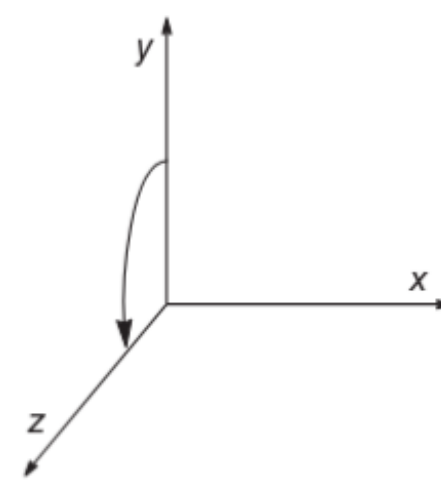


Figure 12: Rotacja wokół osi x
(ang. roll)

$$M_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



Zwróć uwagę, że wiersz macierzy reprezentujący oś po której obracamy elementy przestrzeni wektorowej, mają postać wektora jednostkowego.

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

Stosując macierze rotacji można obrócić elementy przestrzeni wektorowej, wokół dowolnie wybranej osi.

$$R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}$$



$$R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) \neq R_y(\beta)R_z(\alpha)R_x(\gamma) \neq$$

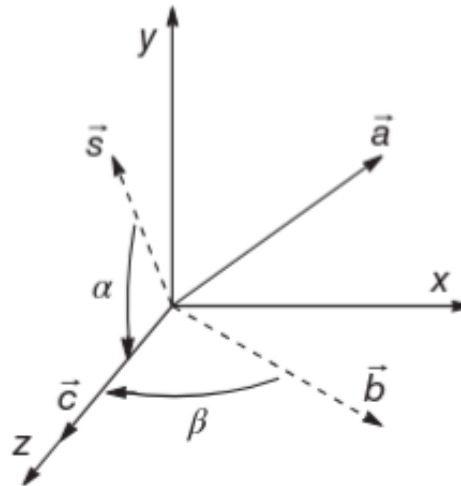
$$R_x(\gamma)R_z(\alpha)R_y(\beta) \neq R_z(\alpha)R_x(\gamma)R_y(\beta) \neq$$

$$R_y(\beta)R_x(\gamma)R_y(\alpha) \neq R_y(\beta)R_y(\beta)R_y(\alpha)$$

Różna kolejność stosowania macierzy rotacji, spowoduje obrót wokół innej osi.

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

Obrót wokół dowolnej osi. Przypuśćmy że chcemy wykonać operacje rotacji wokół wektora jednostkowego $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, czyli takiego którego długość jest równa $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$, o postaci macierzy M_φ , o kąt θ .



Aby tego dokonać, możemy znaleźć takie macierze rotacji, aby dopasować wektor \vec{a} do jednej z osi układu współrzędnych, np. Osi z. Następnie zastosować Macierz rotacji dla osi do której sprowadziliśmy wektor \vec{a} .

Dla wektora \vec{a} podanego na rysunku możemy to zrobić w następujący sposób:

- Użyć macierzy rotacji wokół osi X aby przekształcić wektor \vec{a} do wektora oznaczonego na rysunku jako \vec{b} . W tym celu musimy znaleźć kąt pomiędzy wektorem \vec{a} a osią X . Jeżeli $g = a_y^2 + a_z^2$.

$$\cos \alpha = \frac{a_z}{g}$$

Mając kąt α , możemy zastosować macierz rotacji dla osi X aby przekształcić wektor do płaszczyzny XZ czyli do postaci wektora \vec{b} .

$$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_z}{g} & -\frac{a_y}{g} \\ 0 & \frac{a_y}{g} & \frac{a_z}{g} \end{pmatrix}$$

Zatem

$$\vec{b} = M_x(\alpha) \cdot \vec{a},$$

Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

- Następnie musimy przenieść wektor \vec{b} do wektora położonego na wybranej osi, na rysunku nazwanego jako \vec{c} . W tym celu musimy znaleźć kąt pomiędzy wektorem \vec{b} a osią Z .

$$\cos \beta = g$$

Mając kąt β , możemy zastosować macierz rotacji dla osi Y aby przekształcić wektor do postaci wektora docelowego \vec{c}

$$M_y(\beta) = \begin{pmatrix} g & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & 0 \\ a_x & 0 & g \end{pmatrix}$$

Zatem

$$\vec{c} = M_y(\beta) \cdot \vec{b},$$

- Ostatnim krokiem naszego algorytmu jest zastosowanie macierz rotacji wokół osi Z , tej którą chcieliśmy zastosować dla naszego wektora początkowego \vec{a} , oznaczoną wcześniej jako M_φ .

$$\vec{a}' = M_\varphi \vec{c}$$

W taki sposób możemy obrócić elementy przestrzeni liniowej wokół dowolnego wektora.

Ogólna postać tego algorytmu to macierz M_{arb} podana wzorem:

$$M_{arb} = M_x^{-1}(\alpha) M_y^{-1}(\beta) M_z(\theta) M_y(\beta) M_x(\alpha)$$

$$M_{arb} = \begin{pmatrix} c + (1-c)a_x^2 & (1-c)a_xa_y - sa_z & (1-c)a_xa_z + sa_y \\ (1-c)a_xa_y + sa_z & c + (1-c)a_y^2 & (1-c)a_ya_z - sa_x \\ (1-c)a_xa_z - sa_y & (1-c)a_ya_z + sa_x & c + (1-c)a_z^2 \end{pmatrix}$$

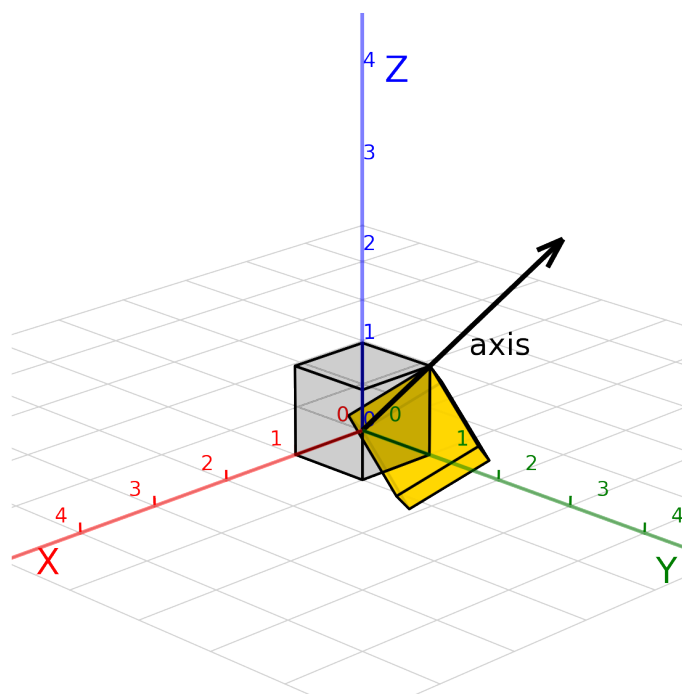


Figure 14: Rotacja wokół wektora $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, o 90 stopni.

Rotacja jako odwzorowanie w przestrzeni liniowej, zachowuje kąty, długości wektorów powierzchni i objętości figur.

Skalowanie w przestrzeni trójwymiarowej

Skalowanie to przekształcenie liniowe zmieniające rozmiar obiektu względem początku układu współrzędnych o zadany współczynnik \mathbf{k} . Dla przestrzeni trójwymiarowej macierz skalowania ma postać:

$$S(k_x, k_y, k_z) = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

gdzie:

- k_x, k_y, k_z – współczynniki skali wzdłuż osi x, y, z

Skalowanie wzdłuż osi polega na zmianie wymiaru obiektu względem płaszczyzn współrzędnych. Jeżeli współczynniki skalowania są jednakowe, skalowanie jest **jednolite**; w przeciwnym razie – **niejednolite**.

Mnożąc wektor przez macierz skalowania, otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x x \\ k_y y \\ k_z z \end{pmatrix}$$

lub równoważnie:

$$S(k_x, k_y, k_z) \cdot (v) = (v'), \text{ gdzie } v' = (k_x x, k_y y, k_z z)$$

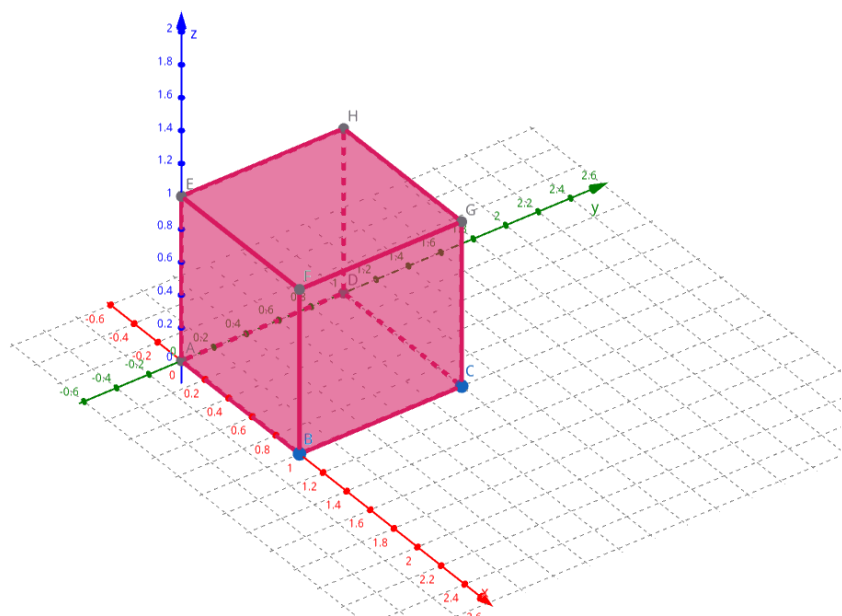
Skalowanie jednolite

Jednolite skalowanie to przekształcenie liniowe, w którym każdy wymiar obiektu jest powiększany lub pomniejszany o ten sam współczynnik k . Skalowanie odbywa się względem początku układu współrzędnych.

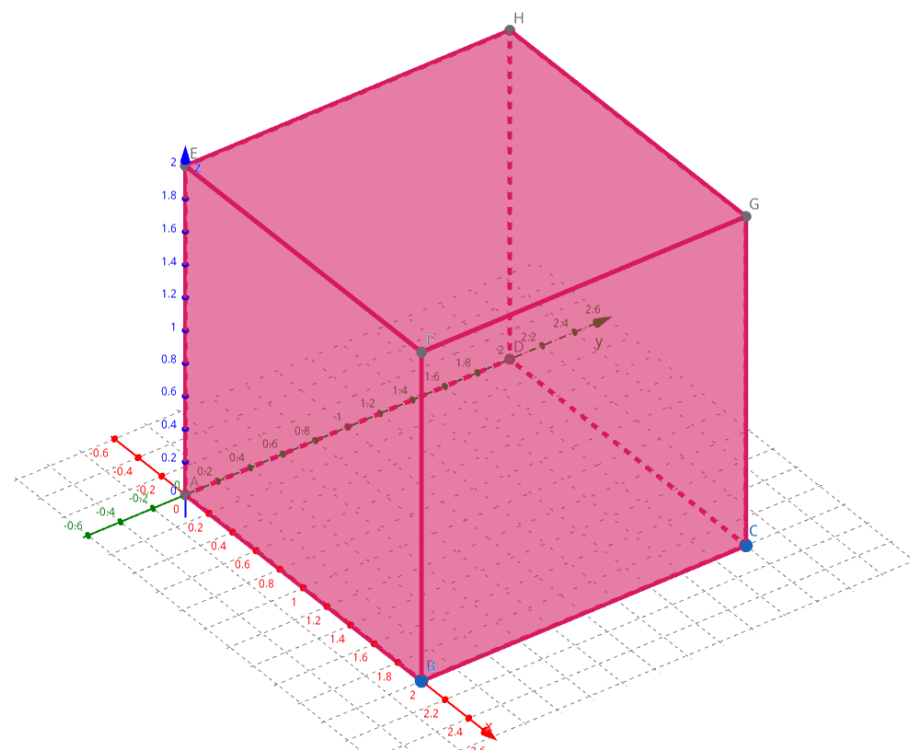
Macierz skalowania w 3D: $S = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

Własności:

- zachowuje kształt i kąty (nie zniekształca obiektu),
- kierunek kształtu jest zawsze zachowany
- wszystkie wymiary rosną proporcjonalnie do k ,
- pole powierzchni rośnie jak k^2 ,
- objętość rośnie jak k^3 .



Sześcián przed skalowaniem (długość boku = 1)



Sześcián po skalowaniu o współczynnik $k = 2$
(długość boku = 2)

Obliczenia:

Dla punktu $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz

macierzy: $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

mamy: $P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dla kolejnych wierzchołków sześcianu:

$$[0, 0, 0] \rightarrow [0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \rightarrow [0, 0, 2]$$

$$[0, 1, 0] \rightarrow [0, 2, 0]$$

$$[0, 1, 1] \rightarrow [0, 2, 2]$$

$$[1, 0, 1] \rightarrow [2, 0, 2]$$

$$[1, 1, 0] \rightarrow [2, 2, 0]$$

$$[1, 1, 1] \rightarrow [2, 2, 2]$$

Każda współrzędna została pomnożona przez 2. Zatem sześcian o boku 1 został powiększony do boku 2, a objętość zwiększyła się 8-krotnie ($2^3 = 8$).

Skalowanie niejednolite

Jeśli chcemy „rozciągnąć” lub „ściśnąć” obiekt, możemy zastosować różne współczynniki skalowania w różnych kierunkach. Takie przekształcenie nazywamy **skalowaniem niejednolitym**. Nierównomierna skala nie zachowuje kątów ani proporcji między wymiarami.

Macierz skalowania:
$$S = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

Własności:

- nie zachowuje kształtów ani kątów między osiami,
- kierunki osi pozostają zachowane (osie nie zmieniają orientacji),
- zmiana długości wzdłuż osi X, Y, Z następuje odpowiednio o współczynniki k_x , k_y , k_z ,
- pole powierzchni zmienia się proporcjonalnie do $k_x k_y$,
- objętość zmienia się proporcjonalnie do $k_x k_y k_z$,

Skalowanie niejednolite

Obliczenia: Dla punktu $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
oraz macierzy: $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$ mamy:

$$P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dla kolejnych wierzchołków sześcianu:

$$[0, 0, 0] \rightarrow [0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \rightarrow [0.0, 0.0, 1.5]$$

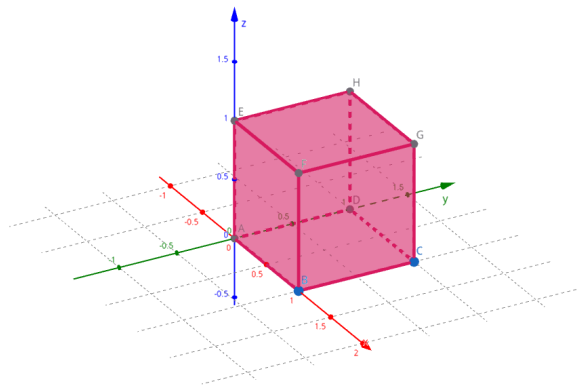
$$[0, 1, 0] \rightarrow [0.0, 0.5, 0.0]$$

$$[0, 1, 1] \rightarrow [0.0, 0.5, 1.5]$$

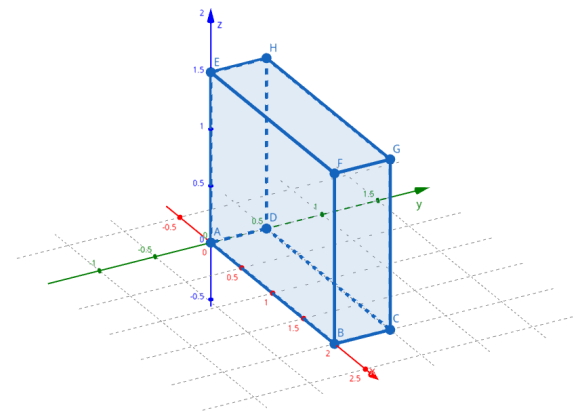
$$[1, 0, 1] \rightarrow [2.0, 0.0, 1.5]$$

$$[1, 1, 0] \rightarrow [2.0, 0.5, 0.0]$$

$$[1, 1, 1] \rightarrow [2.0, 0.5, 1.5]$$



Sześcian przed skalowaniem (długość boku = 1)



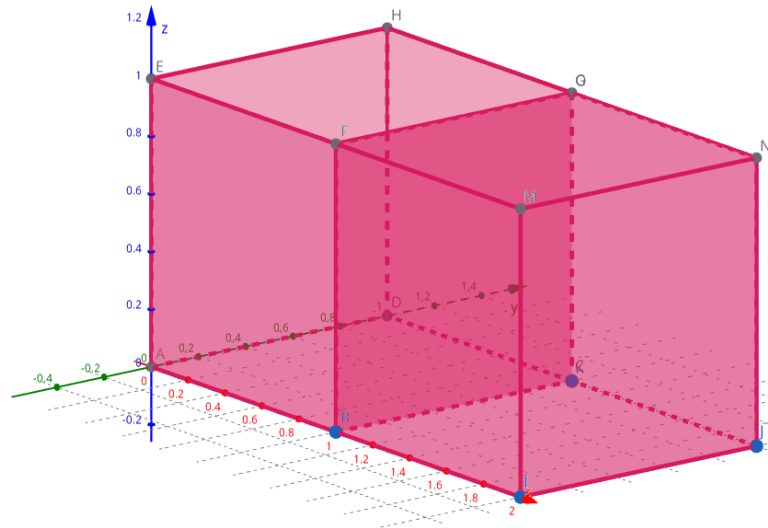
Sześcian po skalowaniu o różne współczynniki k

Aby “rozciągnąć” lub “ściśnąć” tylko względem jednej osi możemy użyć następujących macierzy.

$$S_x = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

W naszym przykładzie “rozciągniemy” nasz sześcian względem osi x. Więc nasza macierz będzie wyglądać następująco:

$$S_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Skalowanie sześcianu o długości boku = 1 tylko względem osi x o wartość 2

Skalowanie w dowolnym kierunku

Skalowanie nie musi odbywać się wyłącznie wzdłuż osi układu współrzędnych. Możemy skalować obiekt wzdłuż dowolnego kierunku określonego przez wektor jednostkowy \hat{n} .

Macierz skalowania wzdłuż kierunku \hat{n} :

$$S = I + (k - 1)\hat{n}\hat{n}^T$$

gdzie:

- I – macierz jednostkowa,
- \hat{n} – wektor jednostkowy kierunku skalowania,
- k – współczynnik skali wzdłuż tego kierunku.

Rozpisując równanie $\hat{n}\hat{n}^T$, otrzymujemy:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n}\hat{n}^T = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{pmatrix}$$

Skalowanie w dowolnym kierunku

Po podstawieniu do

$$S = I + (k - 1)\hat{n}\hat{n}^T,$$

otrzymujemy:

$$S(\hat{n}, k) = \begin{pmatrix} 1+(k-1)n_x^2 & (k-1)n_x n_y & (k-1)n_x n_z \\ (k-1)n_y n_x & 1+(k-1)n_y^2 & (k-1)n_y n_z \\ (k-1)n_z n_x & (k-1)n_z n_y & 1+(k-1)n_z^2 \end{pmatrix}$$

Skalowanie w dowolnym kierunku jest uogólnieniem skalowania wzdłuż osi:

- dla $\hat{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mamy skalowanie wzdłuż osi X,
- dla $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – wzdłuż osi Y,
- dla $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – wzdłuż osi Z.

Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego

Założmy, że chcemy skalować wzdłuż kierunku ukośnego, który leży w płaszczyźnie XY i biegnie pod kątem 45° do osi X oraz dla współczynnika skali $k = 2$.

Ten kierunek opisuje wektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

który nie jest wektorem jednostkowym więc musimy go znormalizować. Jego długość teraz wynosi:

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Aby przekształcenie było poprawne, potrzebujemy wektora jednostkowego:

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \rightarrow \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obliczamy macierz $\hat{n}\hat{n}^T$:

$$\hat{n}\hat{n}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego

Po podstawieniu do równania na S :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (2 - 1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

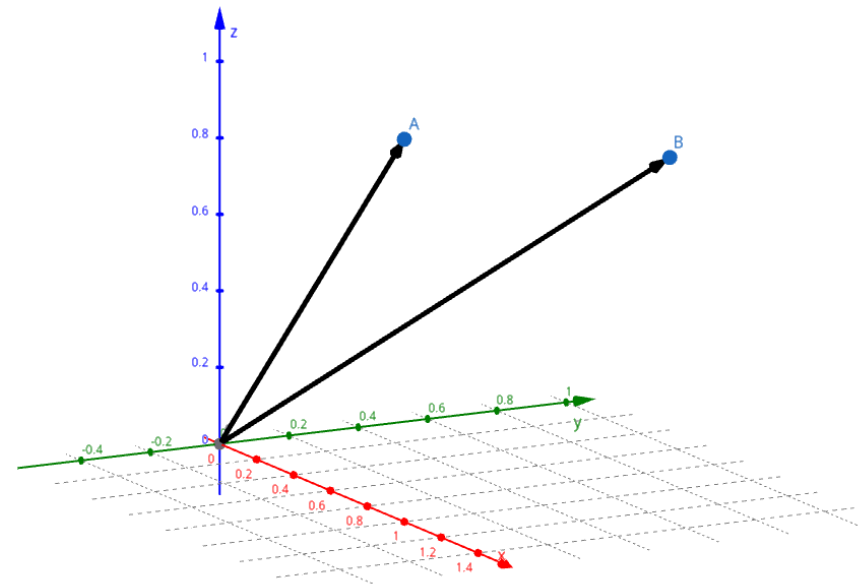
Ostatecznie:

$$S = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Działanie na przykładzie punktu:

$$\text{Dla } P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}: P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt został przeskalowany wzdłuż kierunku ukośnego $(1, 1, 0)$ — jego współrzędne zmieniły się proporcjonalnie w obu osiach. Obiekt został rozciągnięty dwukrotnie wzdłuż tego kierunku, natomiast w kierunku prostopadłym pozostał bez zmian.



Odbicie względem płaszczyzny

Odbicie (lub **lustrzane odbicie**) to przekształcenie liniowe, które odwraca położenie punktów obiektu względem danej płaszczyzny. W przestrzeni trójwymiarowej płaszczyzna odbicia przechodzi przez początek układu współrzędnych, a jej orientację określa wektor jednostkowy normalny \hat{n} . Odbicie można interpretować jako **skalowanie wzdłuż kierunku \hat{n}** ze współczynnikiem $k = -1$.

Macierz odbicia:

$$R(\hat{n}) = S(\hat{n}, -1) = \begin{pmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_xn_y & -2n_xn_z \\ -2n_y n_x & 1-2n_y^2 & -2n_y n_z \\ -2n_z n_x & -2n_z n_y & 1-2n_z^2 \end{pmatrix}$$

Własności odbicia:

- odwraca orientację obiektu (powstaje obraz lustrzany),
- jest izometrią — zachowuje długości i kąty między wektorami,
- dwukrotne zastosowanie odbicia przywraca pierwotny kształt: $R(\hat{n})^2 = I$,

Przykład – odbicie względem płaszczyzny XY

Rozważmy odbicie względem płaszczyzny XY, której wektor normalny to:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ Macierz odbicia: } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dla wierzchołków piramidy mamy:

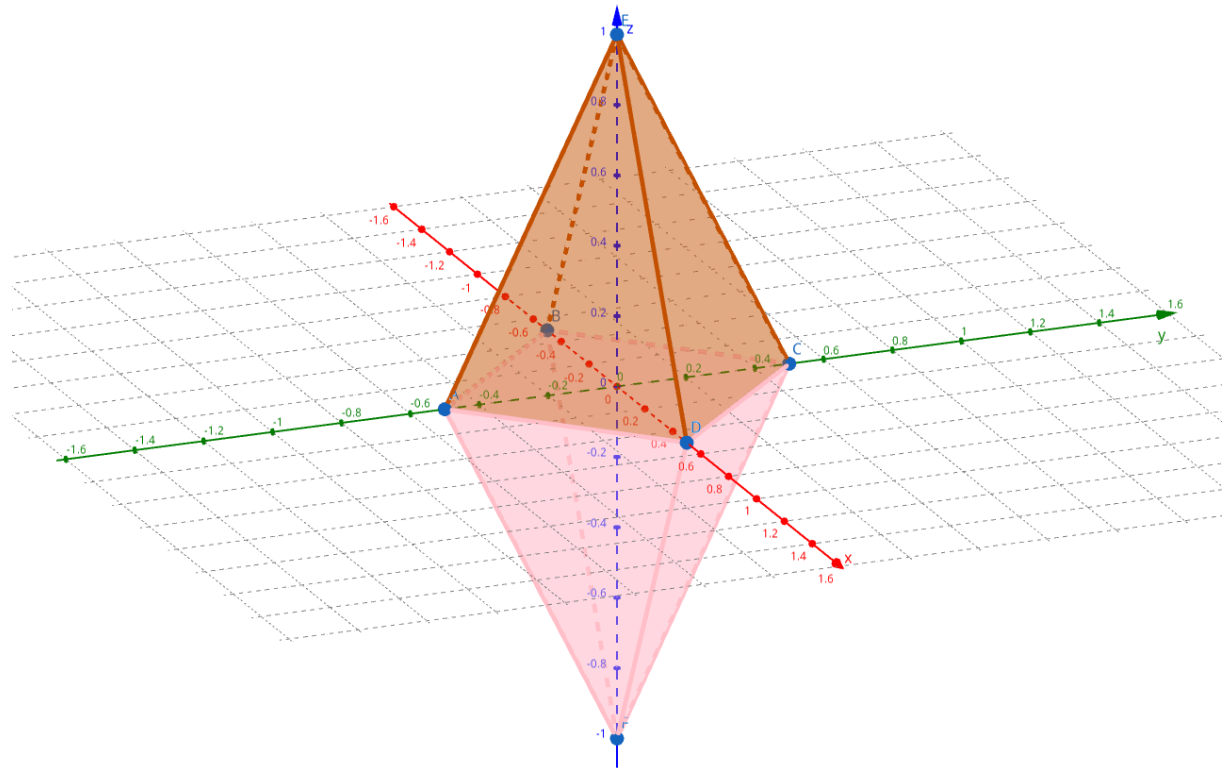
$$[0, -0.5, 0] \rightarrow [0, -0.5, 0]$$

$$[-0.5, 0, 0] \rightarrow [-0.5, 0, 0]$$

$$[0, 0.5, 0] \rightarrow [0, 0.5, 0]$$

$$[0.5, 0, 0] \rightarrow [0.5, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \rightarrow [0, 0, -1]$$



Wierzchołki leżące w płaszczyźnie XY pozostają niezmienione, natomiast punkt znajdujący się powyżej zostaje odbity symetrycznie poniżej niej.

Rzut równoległy jako przypadek skalowania

Rzut równoległy (ortograficzny) można traktować jako **szczególny przypadek skalowania**, w którym współczynnik skali wzdłuż jednego z kierunków wynosi zero. W takim przypadku wszystkie punkty zostają „spłaszczone” na płaszczyznę — czyli ich współrzędne wzdłuż danego kierunku zanikają.

Interpretacja geometryczna: Punkty oraz ich obrazy są połączone prostymi równoległymi do kierunku rzutu. Dlatego przekształcenie to nazywa się **rzutem równoległym**.

Własności rzutu równoległego:

- nie zachowuje perspektywy (brak zbiegu linii równoległych),
- zachowuje kształt i proporcje obiektów,
- jest liniowym przekształceniem macierzowym,
- w praktyce odpowiada „pominięciu” współrzędnej z (dla rzutu na płaszczyznę XY).

Rzutowanie na jedną z płaszczyzn głównych (kardynalnych) można przedstawić za pomocą **macierzy skalowania** ze współczynnikiem $k = 0$ w kierunku normalnym do tej płaszczyzny.

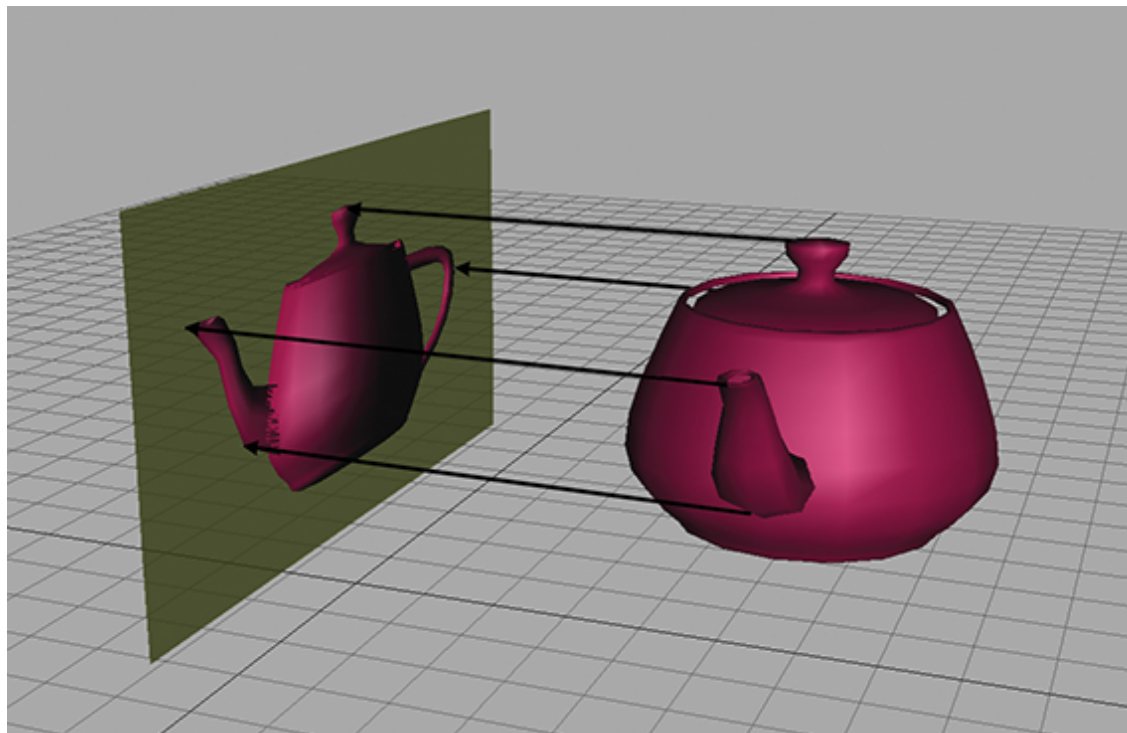
W ten sposób rzut $3D \rightarrow 2D$ realizowany jest przez „wyzerowanie” jednej współrzędnej punktu:

$$\text{Rzut na płaszczyznę XY: } P_{xy} = S \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rzut na płaszczyznę XZ: } P_{xz} = S \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rzut na płaszczyznę YZ: } P_{yz} = S \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W każdym przypadku współrzędna wzdłuż kierunku normalnego do płaszczyzny zostaje usunięta, co odpowiada „rzutowi” wszystkich punktów na daną płaszczyznę przy zachowaniu ich pozostałych współrzędnych.



Przekształcenie skośne w 3D (Shearing)

Przekształcenie skośne (ang. **shearing**, inaczej **pochylenie** lub **skoszenie**) w przestrzeni trójwymiarowej polega na przesunięciu punktów obiektu wzdłuż jednego kierunku proporcjonalnie do ich położenia w innym kierunku. Przekształcenie to zachowuje objętość, ale **zniekształca kąty i kształty** obiektu.

Dla przykładu, jeśli przesuwamy współrzędne x i y proporcjonalnie do wartości z , to:

$$x' = x + k_{xz}z, \quad y' = y + k_{yz}z, \quad z' = z$$

W postaci macierzowej:

$$S_{\{z\}}(k_{xz}, k_{yz}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k_{xz} \\ 0 & 1 & k_{yz} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie k_{xz} i k_{yz} określają stopień pochylenia względem osi z . Ogólnie istnieje sześć możliwych macierzy przekształceń skośnych w 3D — w zależności od tego, względem której osi wykonywane jest pochylenie:

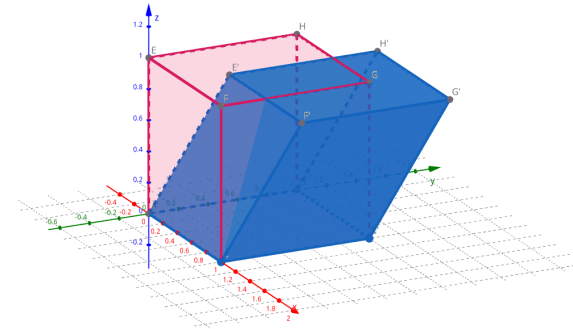
$$S_{\{x\}}(k_{xy}, k_{xz}) = \begin{pmatrix} 1 & k_{xy} & k_{xz} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{\{y\}}(k_{yx}, k_{yz}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{yx} & 1 & k_{yz} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{\{z\}}(k_{zx}, k_{zy}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_{zx} & k_{zy} & 1 \end{pmatrix}$$

Własności przekształcenia skośnego:

- zachowuje objętość, ale nie zachowuje kątów ani kształtów,
- jest liniowym przekształceniem (determinant macierzy = 1),
- w połączeniu ze skalowaniem może imitować rotację z deformacją.

$$S_{\{z\}}(0.5, 0.3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dla tego przekształcenia punkty przesuwają się proporcjonalnie do swojej współrzędnej z , tworząc efekt „pochylenia” obiektu w kierunku osi x i y .



Łączenie transformacji

W praktyce przekształcenia obiektów w grafice komputerowej rzadko wykonuje się pojedynczo. Najczęściej stosuje się ich **sekwencję** — np. **skalowanie**, potem **rotację**. Aby uprościć obliczenia, można je połączyć w jedną macierz transformacji.

Zasada łączenia: Jeśli mamy dwie macierze transformacji:

A — pierwsza transformacja (np. skalowanie),

B — druga transformacja (np. rotacja),

to ich złożenie (czyli zastosowanie jednej po drugiej) opisuje macierz:

$$M = B \cdot A$$

Kolejność jest **istotna** — najpierw stosujemy transformację A , potem B . Mnożenie macierzy **nie jest przemienne**, więc $B \cdot A \neq A \cdot B$.

Przykład:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{z(90^\circ)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

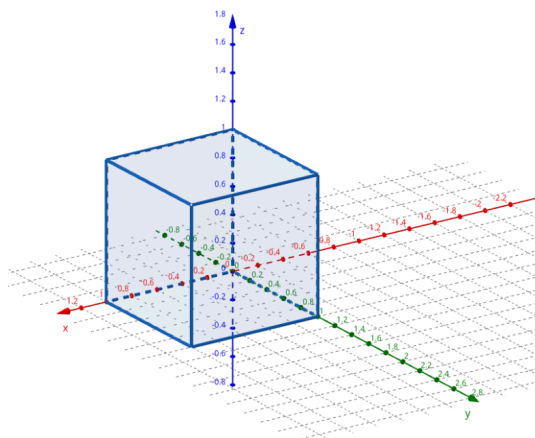
Kolejność zastosowania:

$M_{RS} = R_z \cdot S \Rightarrow$ najpierw skalowanie, potem rotacja

$M_{SR} = S \cdot R_z \Rightarrow$ najpierw rotacja, potem skalowanie

$$M_{RS} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{SR} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyniki tych dwóch operacji różnią się geometrycznie. Przykład dla sześcianu.

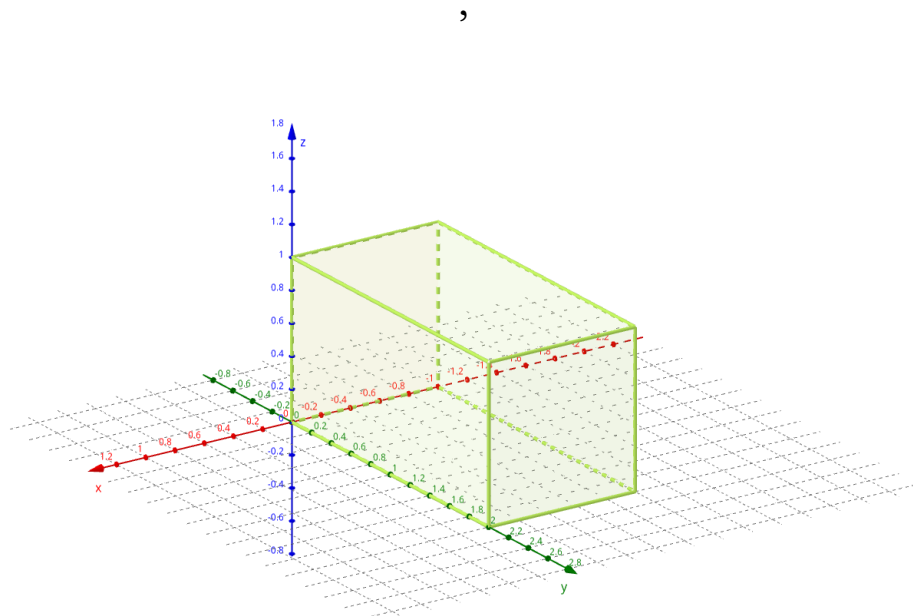


$$A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0)$$

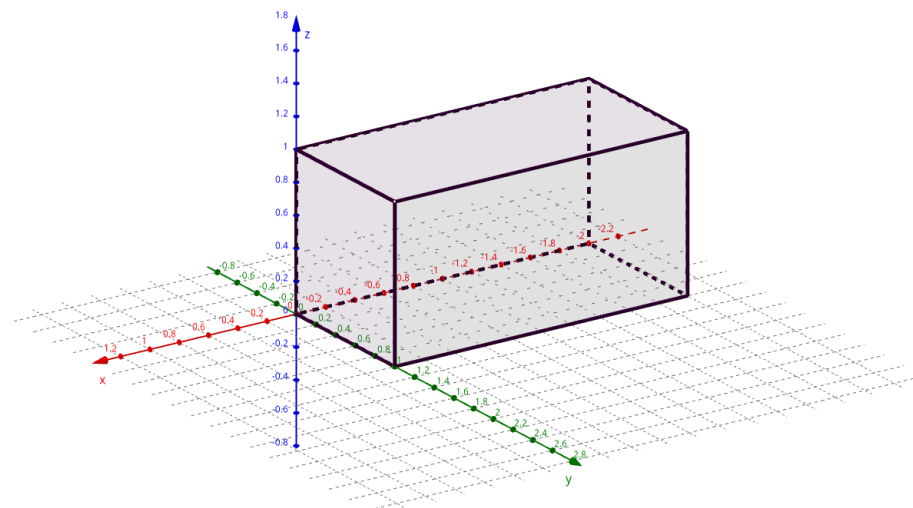
$$C = (1, 1, 0), D = (0, 1, 0)$$

$$E = (0, 0, 1), F = (1, 0, 1)$$

$$G = (1, 1, 1), H = (0, 1, 1)$$



Najpierw skalowanie, potem rotacja



Najpierw rotacja, potem skalowanie

Podsumowanie:

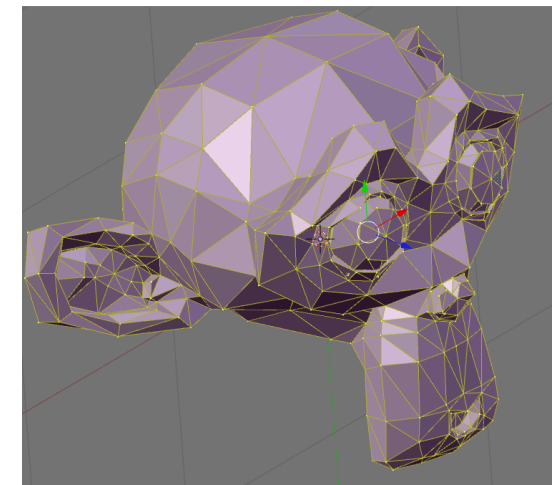
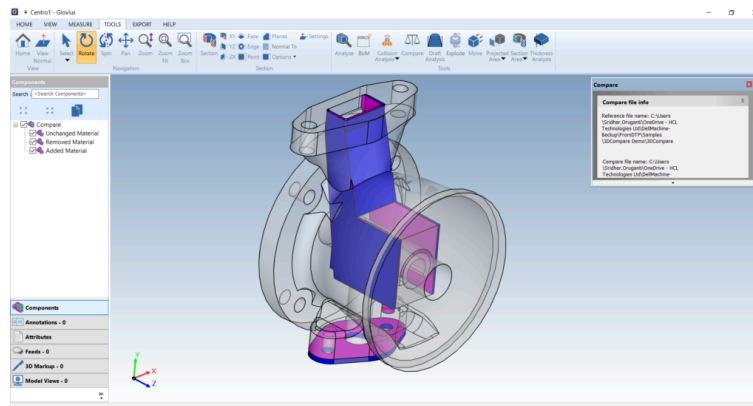
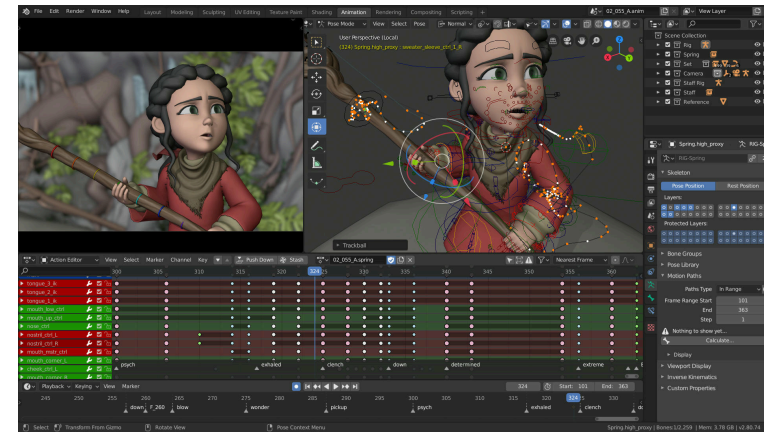
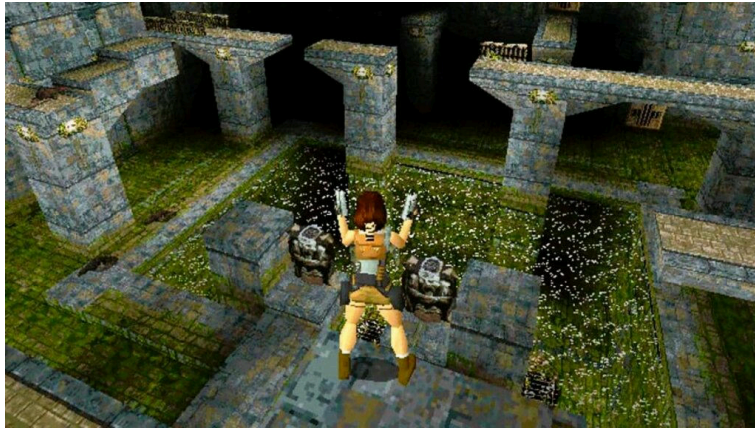
- Kolejność mnożenia macierzy decyduje o wyniku.
- Mnożenie macierzy jest sposobem **komponowania** transformacji.
- Można więc złożyć złożone przekształcenia w jedną macierz i stosować ją jednokrotnie.

Przekształcenia liniowe stanowią podstawowy element grafiki komputerowej 3D, umożliwiając opis i kontrolę położenia, orientacji oraz kształtu obiektów w przestrzeni. W praktyce wykorzystywane są w wielu dziedzinach technologii i nauki.

Najważniejsze zastosowania:

- **Modelowanie 3D** — skalowanie, obrót i odbicie pozwalają na tworzenie złożonych obiektów poprzez transformacje prostych brył.
- **Animacja komputerowa** — płynne ruchy i deformacje obiektów wynikają z sekwencji transformacji liniowych (np. macierze kości w animacjach szkieletowych).
- **Grafika w grach** — przekształcenia obiektów względem kamery i sceny w czasie rzeczywistym (tzw. **world**, **view** i **projection matrices**).
- **Symulacje fizyczne** — opis ruchu brył sztywnych, zderzeń i przemieszczeń w przestrzeni.
- **Przetwarzanie obrazu i wizualizacja danych** — rotacje, skalowania i rzuty w systemach CAD, GIS oraz oprogramowaniu inżynierskim.

Podsumowanie: Przekształcenia liniowe umożliwiają precyzyjne opisywanie i modyfikowanie przestrzeni trójwymiarowej. Dzięki nim grafika komputerowa łączy matematykę i geometrię z praktyczną wizualizacją rzeczywistości.





**Dziękujemy
za uwagę.**

- [1] F. Dunn and I. Parberry, “3D Math Primer for Graphics and Game Development.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: <https://gamemath.com/book/matrixtransforms.html>
- [2] S. J. Janke, “Mathematical Structures For Computer Graphics.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: <https://resource.laikipia.ac.ke/sites/default/files/Mathematical%20Structures%20for%20Computer%20Graphics.pdf>
- [3] G. Sanderson, “Three-dimensional linear transformations.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: <https://www.3blue1brown.com/lessons/3d-transformations>
- [4] G. Szwoch, “Transformacje obiektów 3D.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: <https://sound.eti.pg.gda.pl/student/so/02-Transformacje.pdf>
- [5] J. Rogowski, “Matematyka Grafiki Komputerowej - Przestrzenie liniowe.”
- [6] J. Kijowski, “Przestrzeń afiniczna.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=BS38_8MlTjo