



# Przekształcenia liniowe w 3D

## Rotacja, Skalowanie, Odbicie

Jan Banaszkiewicz    Jakub Kopaniewski

**Matematyka Grafiki Komputerowej**

- 1 Rodzaje przekształceń geometrycznych.
- 2 Czym jest przestrzeń liniowa.
- 3 Czym jest przekształcenie liniowe - typy przekształceń.
- 4 Rotacja.
- 5 Skalowanie.
- 6 Odbicie.
- 7 Rzut równoległy (Orthographic projection).
- 8 Przekształcenie skośne (Shearing).
- 9 Łączenie transformacji.

## Pojęcie przekształcenia geometrycznego

Przekształcenie  $T$  to funkcja która przekształca punkt  $A$  do innego punktu  $T(A)$ .



| Przekształcenie          | Liniowe | Afiniczne | Odwracalne | Zachowuje kąty |
|--------------------------|---------|-----------|------------|----------------|
| Transformacja liniowa    | ✓       | ✓         |            |                |
| Transformacja afiniczna  |         | ✓         |            |                |
| Transformacja odwracalna |         |           | ✓          |                |
| Zachowujące kąty         |         | ✓         | ✓          | ✓              |
| Ortogonalna              |         | ✓         | ✓          |                |
| Translacja               |         | ✓         | ✓          | ✓              |
| Rotacja                  | ✓       | ✓         | ✓          | ✓              |
| Jednorodne skalowanie    | ✓       | ✓         | ✓          | ✓              |
| Niejednorodne skalowanie | ✓       | ✓         | ✓          |                |
| Rzut ortograficzny       | ✓       | ✓         |            |                |
| Odbicie                  | ✓       | ✓         | ✓          |                |
| Ścinanie (shear)         | ✓       | ✓         | ✓          |                |

Porównanie właściwości różnych przekształceń geometrycznych.  
Brak ptaszka oznacza - “nie zawsze”.

## Przestrzeń wektorowa (liniowa) - definicja

Przestrzenią liniową nazywamy trójkę  $(V, +, \cdot)$ , w której  $V$  jest niepustym zbiorem oraz

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad \cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V,$$

są funkcjami spełniającymi następujące warunki:

- 1  $\forall_{x,y,z \in V} (x + y) + z = x + (y + z),$
- 2  $\exists_{\theta \in V} \forall_{x \in V} x + \theta = x,$
- 3  $\forall_{x \in V} \exists_{-x \in V} x + (-x) = \theta,$
- 4  $\forall_{x,y \in V} x + y = y + x,$
- 5  $\forall_{x \in V} 1 \cdot x = x,$
- 6  $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \forall_{x \in V} (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$
- 7  $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{x,y \in V} \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$
- 8  $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \forall_{x \in V} (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$

- Elementy zbioru  $V$  nazywamy wektorami.
- Wektor  $\theta$  nazywamy wektorem zerowym



## Baza przestrzeni liniowej

Mówimy, że wektory  $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$  tworzą **bazę** przestrzeni liniowej  $(V, +, \cdot)$ , jeżeli są one liniowo niezależne i rozpinają przestrzeń  $(V, +, \cdot)$ .



Przykład wektorów, które są bazą przestrzeni liniowej 3 wymiarowych wektorów:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Przykład wektorów, które **nie** są bazą przestrzeni liniowej 3 wymiarowych wektorów:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## Przekształcenie liniowe

Niech  $(V, +, \cdot)$  i  $(W, +, \cdot)$  będą przestrzeniami liniowymi.

Odwzorowanie (funkcje)  $T : V \rightarrow W$  nazywamy liniowym, jeżeli

- 1  $\forall_{x \in V} \quad T(u + v) = T(u) + T(v)$  (przekształcenie addytywne)
- 2  $\forall_{x \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$  (przekształcenie jednorodne)



Warto zauważyć że ta definicja nie mówi nam nic o punktach, jednak dla rozpatrywanych przez nas transformacji liniowych, po oznaczeniu początku układu  $O$ , można myśleć o punktach  $P$  jako o wektorze  $[\overrightarrow{OP}]$ .

Możemy zapisać vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , jako liniową kombinację wektorów bazy.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stosując przekształcenie liniowe na liniowej kombinacji wektorów opisujących wektor  $\vec{v}$  możemy zapisać:

$$T(\vec{v}) = 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Innymi słowy aby dowiedzieć się gdzie wektor  $\vec{v}$  zostanie przekształcony, musimy dowiedzieć się gdzie wektory  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  zostaną przekształcone.

Niech  $T$  będzie przekształceniem liniowym, które jest opisane następującym wzorem:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

To dla wektora  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ :

$$T(\vec{v}) = 3T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 40 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Powyższe przekształcenie można zapisać w formie macierzy:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zatem powyższe przekształcenie możemy zapisać jako mnożenie wektora przez macierz:

$$T(\vec{v}) = M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 40 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Z powyższego przykładu można wywnioskować ogólną formułę aplikowania odwzorowań  $T$ .

$$T(\vec{v}) = M\vec{v}$$

**Przykład.** Niech  $T$  będzie liniowym odwzorowaniem które przekształca

$$\text{punkt } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{punkt } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{i punkt } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ do postaci } T(C) = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punkty A, B, C przed przekształceniem można zapisać w formie macierzy  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Punkty A, B, C po przekształceniu można zapisać w formie macierzy  $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Aby znaleźć Macierz  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  reprezentującą to przekształcenie musimy obliczyć układ równań

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c &= 5, & d + 2e + 3f &= -2, & g + 2h + 3i &= 6, \\ 3a + 7b + 4c &= -1, & 3d + 7e + 4f &= 4, & 3g + 7h + 4i &= 8, \\ 2a + 9b + 3c &= 9, & 2d + 9e + 3f &= 2, & 2g + 9h + 3i &= 3, \end{aligned}$$

Powyższe równanie można policzyć korzystając z właściwości macierzy:

$$MA = B \Rightarrow M = BA^{-1}$$

$$M = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{213}{22} & \frac{43}{22} & \frac{79}{22} \\ \frac{4}{22} & 0 & -2 \\ -\frac{137}{22} & \frac{7}{22} & \frac{85}{22} \end{pmatrix}$$

W taki sposób znaleźliśmy macierz przekształceń, którą można zastosować, dla każdego innego punktu.

Przykład dla punktu  $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

$$T(E) = ME = \begin{pmatrix} -\frac{213}{22} & \frac{43}{22} & \frac{79}{22} \\ \frac{4}{22} & 0 & -2 \\ -\frac{137}{22} & \frac{7}{22} & \frac{85}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 \\ -2 \\ \frac{219}{22} \end{pmatrix}$$

# Przykład - różnica transformacji liniowej od afincznej

Przykład różnicy transformacji liniowej od afincznej dla sześcianu, rozpiętego na punktach:

$$A = \{0, 0, 0\}, B = \{1, 1, 1\}$$

Przekształcenie liniowe

$$\lambda(x, y, z) = (2x, 3y, z)$$

$$\lambda(B) = \{2 \cdot 1, 3 \cdot 1, 1\} = \{2, 3, 1\}$$

$$\lambda(A) = \{2 \cdot 0, 3 \cdot 0, 0\} = \{0, 0, 0\}$$

$$\underbrace{f(\vec{\theta})}_{f(\vec{\theta}) = \vec{\theta}} = \vec{\theta}$$

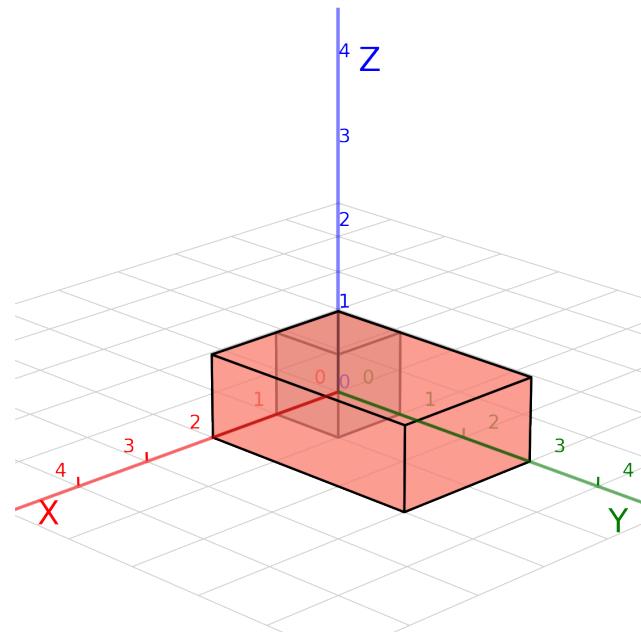


Figure 2: Odwzorowanie liniowe

Przekształcenie afinczne

$$\varphi(x, y, z) = (2x + 1, 3y - 2, z)$$

$$\varphi(B) = \{2 \cdot 1 + 1, 3 \cdot 1 - 2, 1\} = \{3, 1, 1\}$$

$$\varphi(A) = \{2 \cdot 0 + 1, 3 \cdot 0 - 2, 0\} = \{1, -2, 0\}$$

$$\underbrace{f(\vec{\theta})}_{f(\vec{\theta}) = \vec{b}} = \vec{b}$$

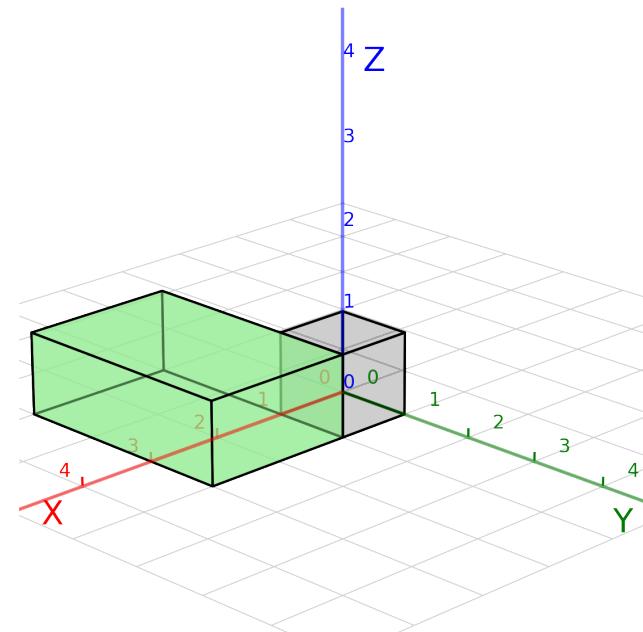


Figure 3: Odwzorowanie afinczne

# Rodzaje przekształceń liniowych

Przekształcenia wchodzące w skład przekształceń liniowych:

- Rotacja
- Skalowanie
- Odbicie
- Rzut równoległy (Orthographic projection).
- Przekształcenie skośne (Shearing).

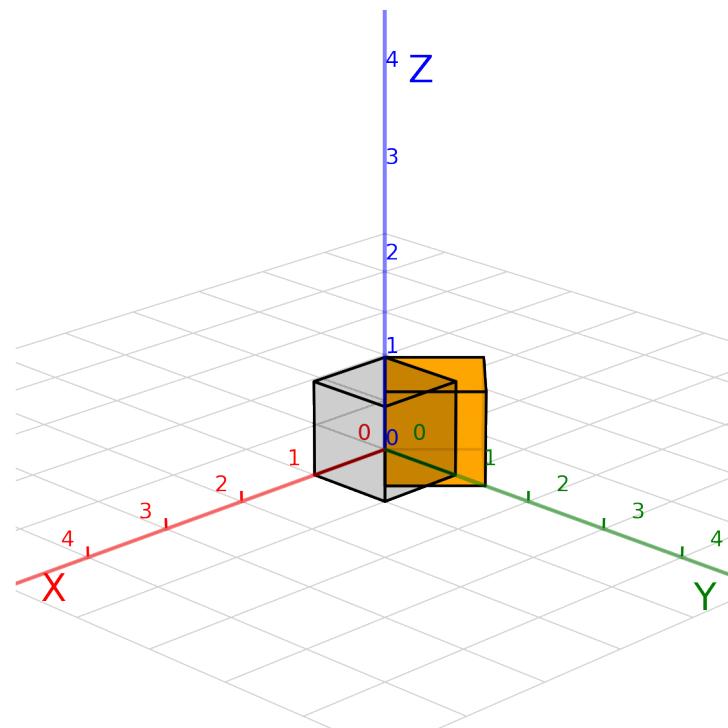


Figure 4: Rotacja

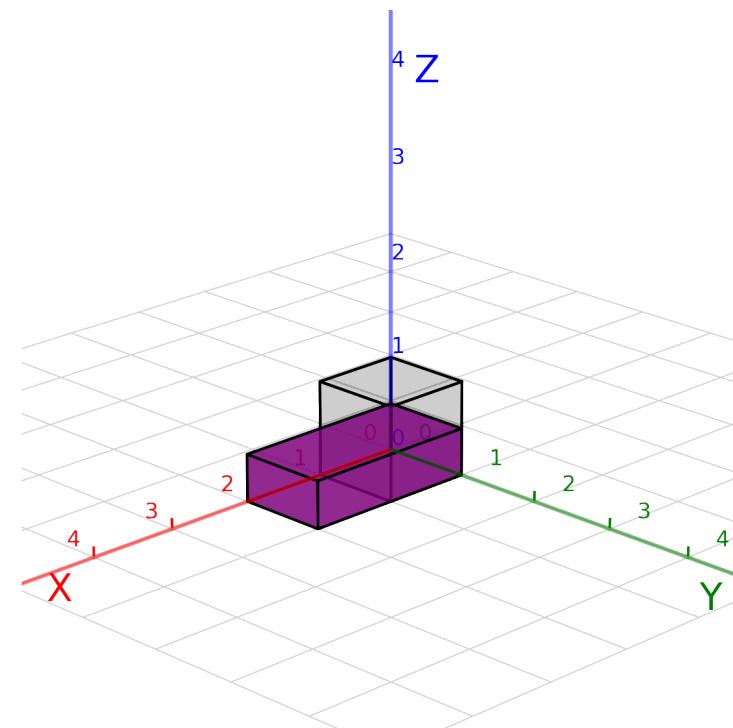


Figure 5: Skalowanie

# Rodzaje przekształceń liniowych

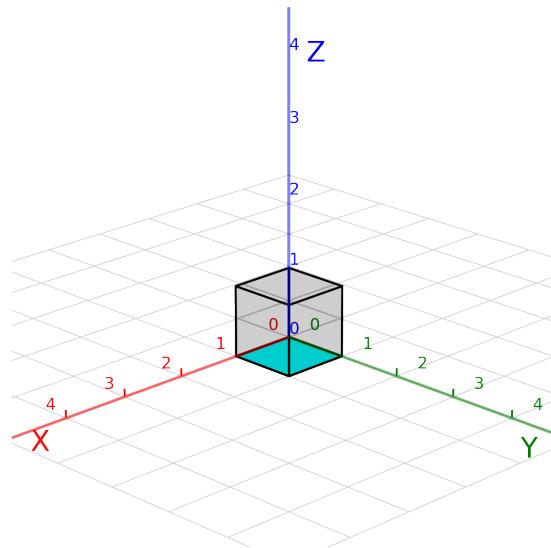


Figure 6: Rzut równoległy

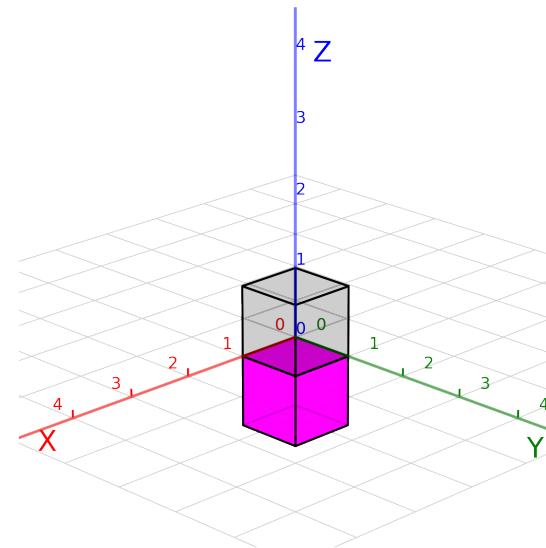


Figure 7: Odbicie

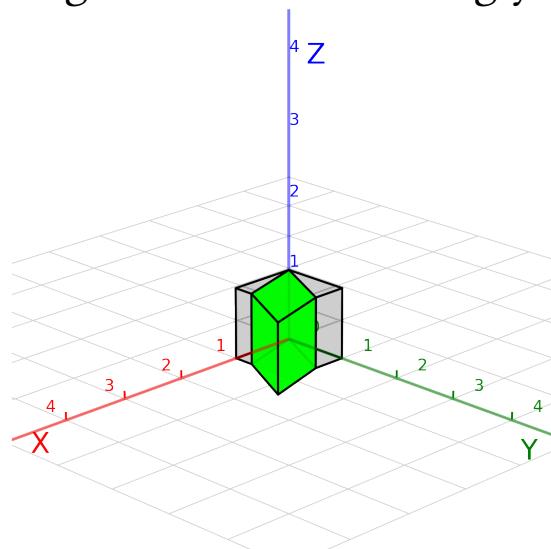


Figure 8: Przekształcenie skośne

# Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

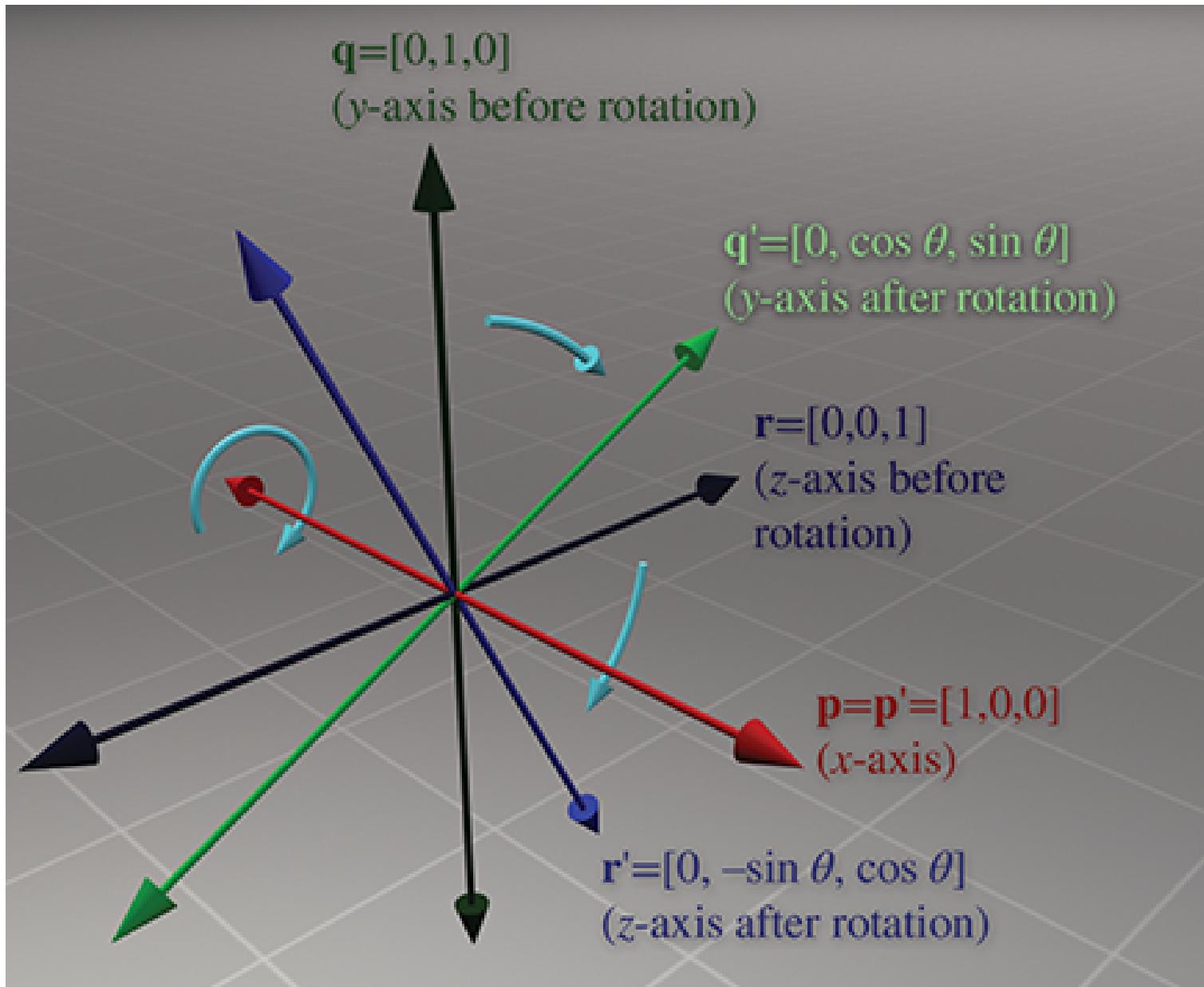


Figure 9: Rotacja wokół osi x w 3d

# Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

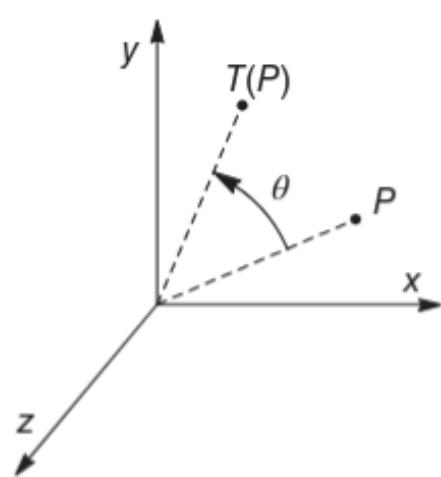


Figure 10: Rotacja wokół osi z  
(ang. yaw)

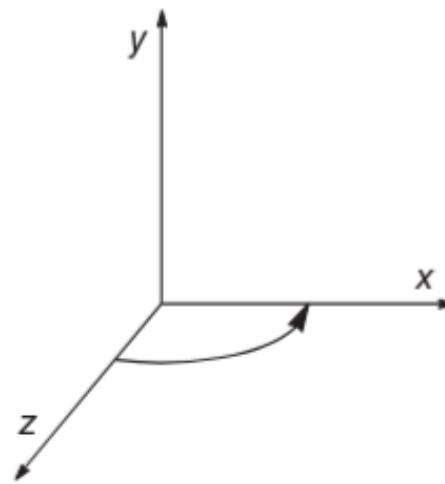


Figure 11: Rotacja wokół osi y  
(ang. pitch)

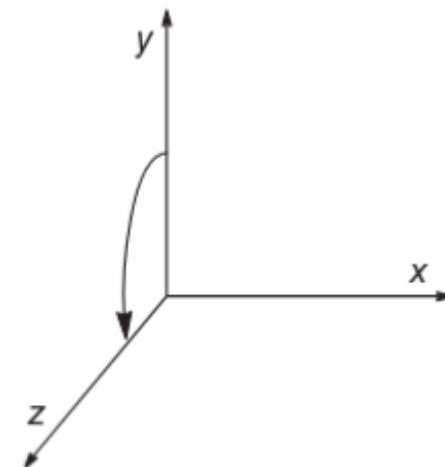


Figure 12: Rotacja wokół osi x  
(ang. roll)

$$M_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



Zwrót uwagi, że wiersz macierzy reprezentujący osь po której obracamy elementy przestrzeni wektorowej, mają postać wektora jednostkowego.

# Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

Stosując macierze rotacji można obrócić elementy przestrzeni wektorowej, wokół dowolnie wybranej osi.

$$\begin{aligned} R &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ω

$$R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) \neq R_y(\beta)R_z(\alpha)R_x(\gamma) \neq$$

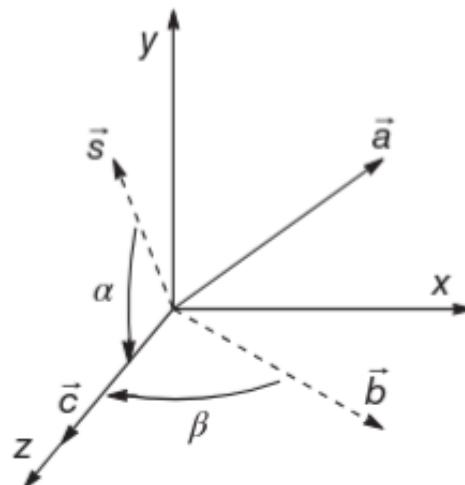
$$R_x(\gamma)R_z(\alpha)R_y(\beta) \neq R_z(\alpha)R_x(\gamma)R_y(\beta) \neq$$

$$R_y(\beta)R_x(\gamma)R_y(\alpha) \neq R_y(\beta)R_y(\beta)R_y(\alpha)$$

Różna kolejność stosowania macierzy rotacji, spowoduje obrót wokół innej osi.

# Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

Obrót wokół dowolnej osi. Przypuśćmy że chcemy wykonać operacje rotacji wokół wektora jednostkowego  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ , czyli takiego którego długość jest równa  $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$ , o postaci macierzy  $M_\varphi$ , o kąt  $\theta$ .



Aby tego dokonać, możemy znaleźć takie macierze rotacji, aby dopasować wektor  $\vec{a}$  do jednej z osi układu współrzędnych, np. Osi z. Następnie zastosować Macierz rotacji dla osi do której sprowadziliśmy wektor  $\vec{a}$ .

Dla wektora  $\vec{a}$  podanego na rysunku możemy to zrobić w następujący sposób:

- Użyć macierzy rotacji wokół osi  $X$  aby przekształcić wektor  $\vec{a}$  do wektora oznaczonego na rysunku jako  $\vec{b}$ . W tym celu musimy znaleźć kąt pomiędzy wektorem  $\vec{a}$  a osią  $X$ . Jeżeli  $g = a_y^2 + a_z^2$ .

$$\cos \alpha = \frac{a_z}{g}$$

Mając kąt  $\alpha$ , możemy zastosować macierz rotacji dla osi  $X$  aby przekształcić wektor do płaszczyzny  $XZ$  czyli do postaci wektora  $\vec{b}$ .

$$M_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_z}{g} & -\frac{a_y}{g} \\ 0 & \frac{a_y}{g} & \frac{a_z}{g} \end{pmatrix}$$

Zatem

$$\vec{b} = M_x(\alpha) \cdot \vec{a},$$

- Następnie musimy przenieść wektor  $\vec{b}$  do wektora położonego na wybranej osi, na rysunku nazwanego jako  $\vec{c}$ . W tym celu musimy znaleźć kąt pomiędzy wektorem  $\vec{b}$  a osią  $Z$ .

$$\cos \beta = g$$

Mając kąt  $\beta$ , możemy zastosować macierz rotacji dla osi  $Y$  aby przekształcić wektor do postaci wektora docelowego  $\vec{c}$

$$M_y(\beta) = \begin{pmatrix} g & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & 0 \\ a_x & 0 & g \end{pmatrix}$$

Zatem

$$\vec{c} = M_y(\beta) \cdot \vec{b},$$

- Ostatnim krokiem naszego algorytmu jest zastosowanie macierzy rotacji wokół osi  $Z$ , tej którą chcieliśmy zastosować dla naszego wektora początkowego  $\vec{a}$ , oznaczoną wcześniej jako  $M_\varphi$ .

$$\vec{a}' = M_\varphi \vec{c}$$

W taki sposób możemy obrócić elementy przestrzeni liniowej wokół dowolnego wektora. Ogólna postać tego algorytmu to macierz  $M_{arb}$  podana wzorem:

$$M_{arb} = M_x^{-1}(\alpha) M_y^{-1}(\beta) M_z(\theta) M_y(\beta) M_x(\alpha)$$

# Rotacja w przestrzeni trójwymiarowej

$$M_{arb} = \begin{pmatrix} c + (1 - c)a_x^2 & (1 - c)a_xa_y - sa_z & (1 - c)a_xa_z + sa_y \\ (1 - c)a_xa_y + sa_z & c + (1 - c)a_y^2 & (1 - c)a_ya_z - sa_x \\ (1 - c)a_xa_z - sa_y & (1 - c)a_ya_z + sa_x & c + (1 - c)a_z^2 \end{pmatrix}$$

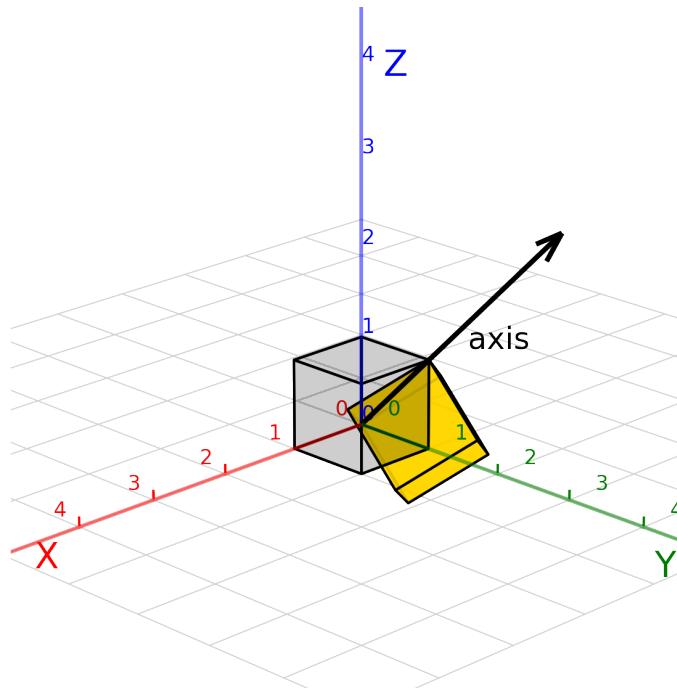


Figure 14: Rotacja wokół wektora  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ , o 90 stopni.

Rotacja jako odwzorowanie w przestrzeni liniowej, zachowuje kąty, długości wektorów powierzchnie i objętości figur.

# Skalowanie w przestrzeni trójwymiarowej

Skalowanie to przekształcenie liniowe zmieniające rozmiar obiektu względem początku układu współrzędnych o zadany współczynnik  $k$ . Dla przestrzeni trójwymiarowej macierz skalowania ma postać:

$$S(k_x, k_y, k_z) = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

gdzie:

- $k_x, k_y, k_z$  – współczynniki skali wzdłuż osi  $x, y, z$

Skalowanie wzdłuż osi polega na zmianie wymiaru obiektu względem płaszczyzn współrzędnych. Jeżeli współczynniki skalowania są jednakowe, skalowanie jest **jednolite**; w przeciwnym razie – **niejednolite**.

Mnożąc wektor przez macierz skalowania, otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x x \\ k_y y \\ k_z z \end{pmatrix}$$

lub równoważnie:

$$S(k_x, k_y, k_z) \cdot (v) = (v'), \text{ gdzie } v' = (k_x x, k_y y, k_z z)$$

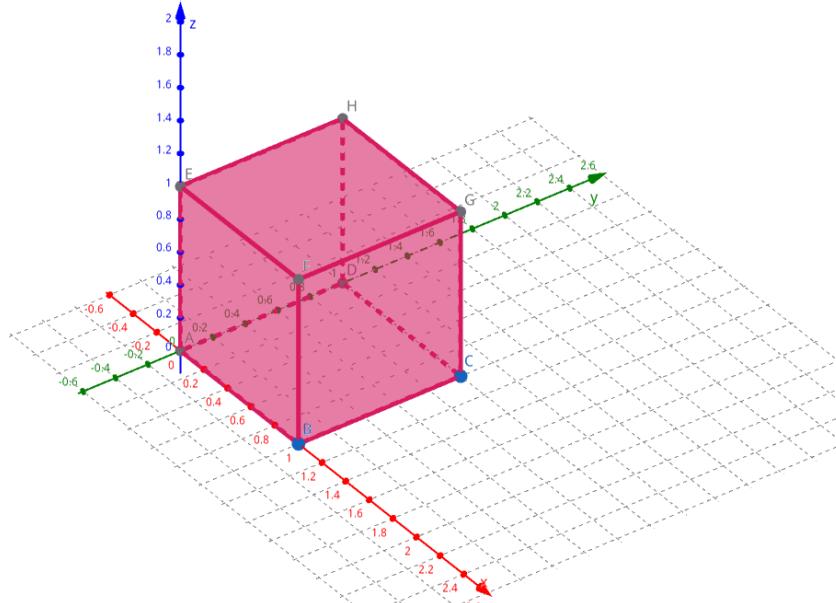
Jednolite skalowanie to przekształcenie liniowe, w którym każdy wymiar obiektu jest powiększany lub pomniejszany o ten sam współczynnik  $k$ . Skalowanie odbywa się względem początku układu współrzędnych.

**Macierz skalowania w 3D:**  $S = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

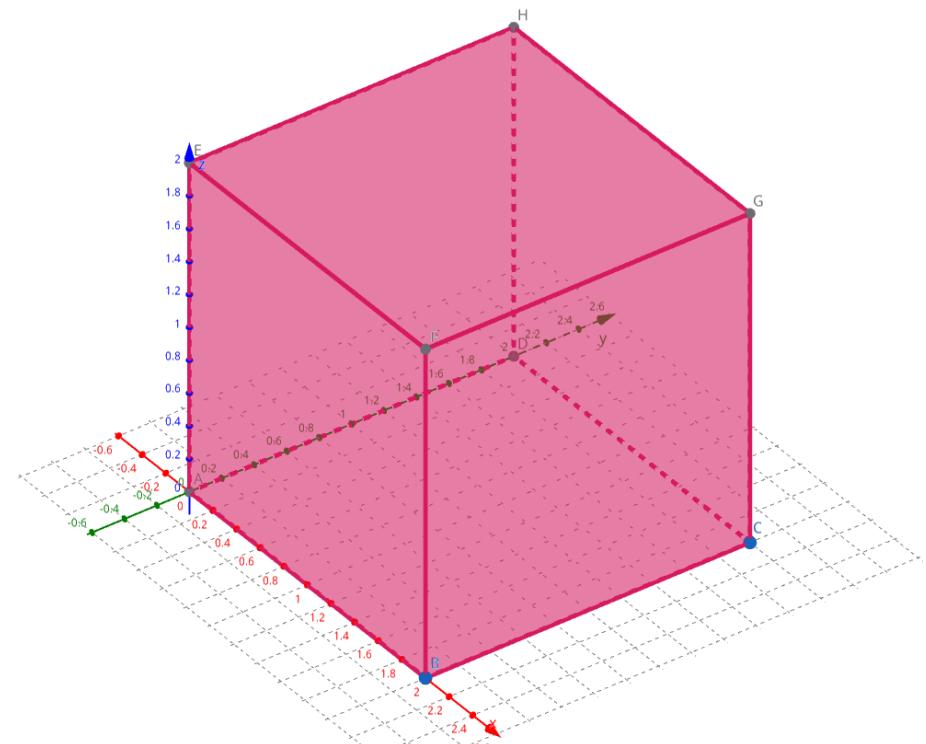
## Własności:

- zachowuje kształt i kąty (nie zwiększa obiektu),
- kierunek kształtu jest zawsze zachowany
- wszystkie wymiary rosną proporcjonalnie do  $k$ ,
- pole powierzchni rośnie jak  $k^2$ ,
- objętość rośnie jak  $k^3$ .

# Wizualizacja skalowania jednolitego (sześcian)



Sześcian przed skalowaniem (długość boku = 1)



Sześcian po skalowaniu o współczynnik  $k = 2$   
(długość boku = 2)

# Wizualizacja skalowania jednolitego (sześciian)

Obliczenia:

Dla punktu  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  oraz

macierzy:  $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

mamy:  $P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dla kolejnych wierzchołków sześciianu:

$$[0, 0, 0] \rightarrow [0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \rightarrow [0, 0, 2]$$

$$[0, 1, 0] \rightarrow [0, 2, 0]$$

$$[0, 1, 1] \rightarrow [0, 2, 2]$$

$$[1, 0, 1] \rightarrow [2, 0, 2]$$

$$[1, 1, 0] \rightarrow [2, 2, 0]$$

$$[1, 1, 1] \rightarrow [2, 2, 2]$$

Każda współrzędna została pomnożona przez 2. Zatem sześciian o boku 1 został powiększony do boku 2, a objętość zwiększyła się 8-krotnie ( $2^3 = 8$ ).

Jeśli chcemy „rozciągnąć” lub „ściśnąć” obiekt, możemy zastosować różne współczynniki skalowania w różnych kierunkach. Takie przekształcenie nazywamy **skalowaniem niejednolitym**. Nierównomierna skala nie zachowuje kątów ani proporcji między wymiarami.

**Macierz skalowania:**  $S = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$

## Własności:

- nie zachowuje kształtów ani kątów między osiami,
- kierunki osi pozostają zachowane (osie nie zmieniają orientacji),
- zmiana długości wzdłuż osi X, Y, Z następuje odpowiednio o współczynniki  $k_x, k_y, k_z$ ,
- pole powierzchni zmienia się proporcjonalnie do  $k_x k_y$ ,
- objętość zmienia się proporcjonalnie do  $k_x k_y k_z$ ,

# Skalowanie niejednolite

**Obliczenia:** Dla punktu  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

oraz macierzy:  $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$  mamy:

$$P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dla kolejnych wierzchołków sześcianu:

$$[0, 0, 0] \rightarrow [0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \rightarrow [0.0, 0.0, 1.5]$$

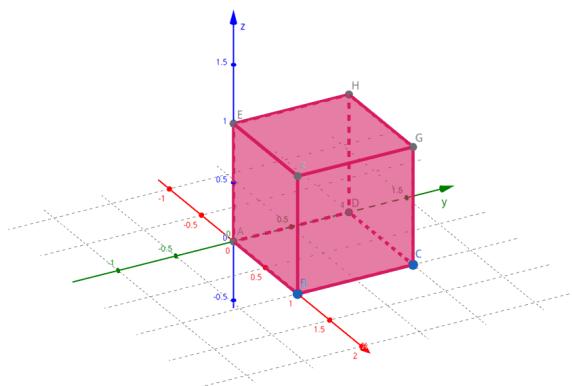
$$[0, 1, 0] \rightarrow [0.0, 0.5, 0.0]$$

$$[0, 1, 1] \rightarrow [0.0, 0.5, 1.5]$$

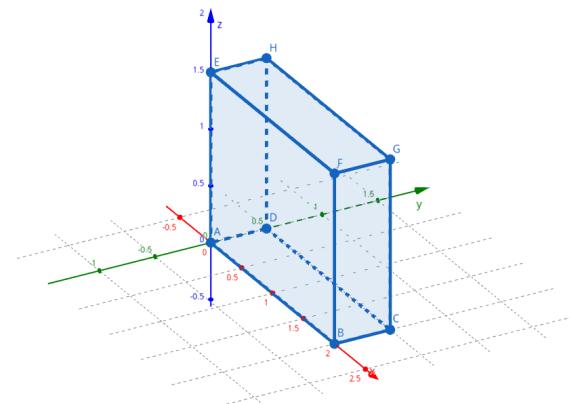
$$[1, 0, 1] \rightarrow [2.0, 0.0, 1.5]$$

$$[1, 1, 0] \rightarrow [2.0, 0.5, 0.0]$$

$$[1, 1, 1] \rightarrow [2.0, 0.5, 1.5]$$



Sześcian przed skalowaniem (długość boku = 1)



Sześcian po skalowaniu o różne współczynniki k

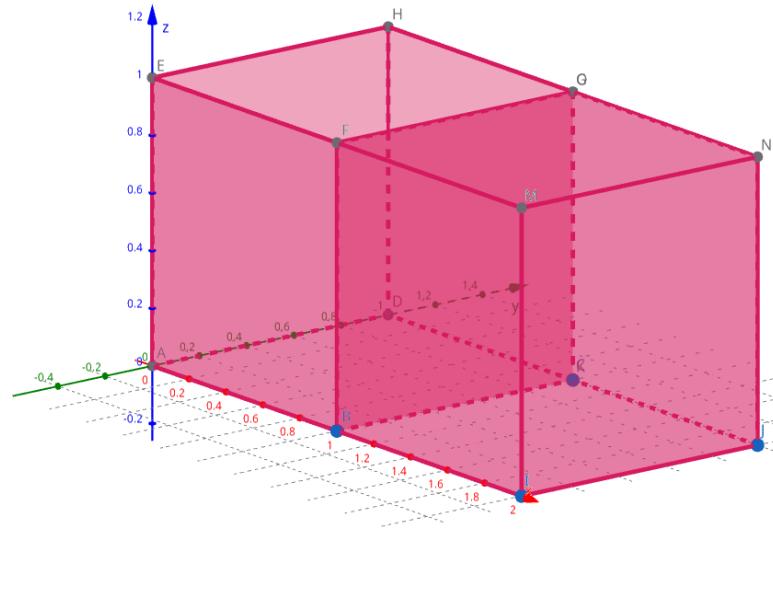
# Skalowanie wzdłuż jednej osi

Aby “rozciągnąć” lub “ściśnąć” tylko względem jednej osi możemy użyć następujących macierzy.

$$S_x = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

W naszym przykładzie “rozciągniemy” nasz sześcian względem osi x. Więc nasza macierz będzie wyglądać następująco:

$$S_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Skalowanie sześcianu o długości boku = 1 tylko względem osi x o wartość 2

Skalowanie nie musi odbywać się wyłącznie wzdłuż osi układu współrzędnych. Możemy skalować obiekt wzdłuż dowolnego kierunku określonego przez wektor jednostkowy  $\hat{n}$ .

**Macierz skalowania wzdłuż kierunku  $\hat{n}$ :**

$$S = I + (k - 1)\hat{n}\hat{n}^T$$

gdzie:

- $I$  – macierz jednostkowa,
- $\hat{n}$  – wektor jednostkowy kierunku skalowania,
- $k$  – współczynnik skali wzdłuż tego kierunku.

Rozpisując równanie  $\hat{n}\hat{n}^T$ , otrzymujemy:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n}\hat{n}^T = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{pmatrix}$$

# Skalowanie w dowolnym kierunku

Po podstawieniu do

$$S = I + (k - 1)\hat{n}\hat{n}^T,$$

otrzymujemy:

$$S(\hat{n}, k) = \begin{pmatrix} 1+(k-1)n_x^2 & (k-1)n_x n_y & (k-1)n_x n_z \\ (k-1)n_y n_x & 1+(k-1)n_y^2 & (k-1)n_y n_z \\ (k-1)n_z n_x & (k-1)n_z n_y & 1+(k-1)n_z^2 \end{pmatrix}$$

Skalowanie w dowolnym kierunku jest uogólnieniem skalowania wzdłuż osi:

- dla  $\hat{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mamy skalowanie wzdłuż osi X,
- dla  $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  – wzdłuż osi Y,
- dla  $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  – wzdłuż osi Z.

## Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego

Załóżmy, że chcemy skalować wzdłuż kierunku ukośnego, który leży w płaszczyźnie XY i biegnie pod kątem  $45^\circ$  do osi X oraz dla współczynnika skali  $k = 2$ .

Ten kierunek opisuje wektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

który nie jest wektorem jednostkowym więc musimy go znormalizować. Jego długość teraz wynosi:

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Aby przekształcenie było poprawne, potrzebujemy wektora jednostkowego:

$$\hat{\vec{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \rightarrow \hat{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obliczamy macierz  $\hat{\vec{n}}\hat{\vec{n}}^T$ :

$$\hat{\vec{n}}\hat{\vec{n}}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Przykład: skalowanie wzdłuż kierunku ukośnego

Po podstawieniu do równania na  $S$ :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (2 - 1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

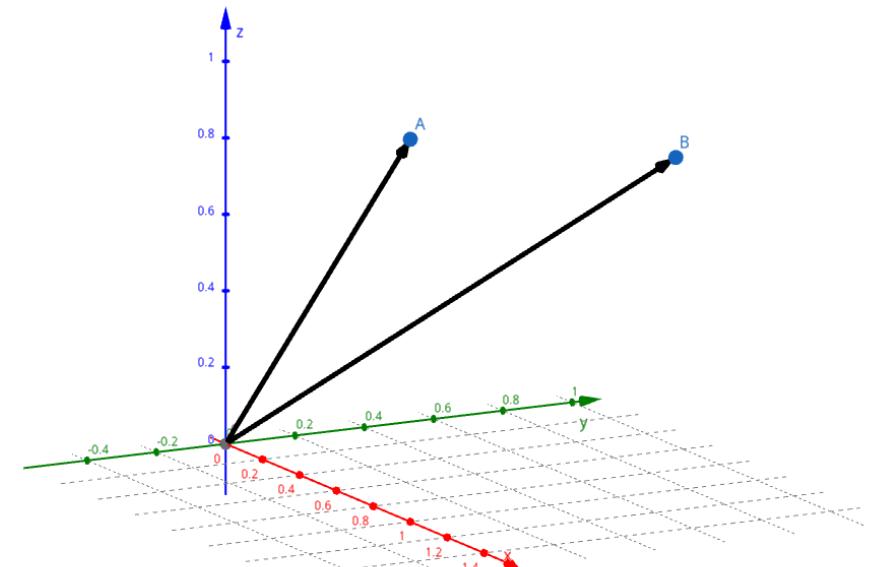
Ostatecznie:

$$S = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Działanie na przykładzie punktu:**

Dla  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :  $P' = S \cdot P = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt został przeskalowany wzdłuż kierunku ukośnego  $(1, 1, 0)$  – jego współrzędne zmieniły się proporcjonalnie w obu osiach. Obiekt został rozciągnięty dwukrotnie wzdłuż tego kierunku, natomiast w kierunku prostopadłym pozostał bez zmian.



Odbicie (lub **lustrzane odbicie**) to przekształcenie liniowe, które odwraca położenie punktów obiektu względem danej płaszczyzny. W przestrzeni trójwymiarowej płaszczyzna odbicia przechodzi przez początek układu współrzędnych, a jej orientację określa wektor jednostkowy normalny  $\hat{n}$ . Odbicie można interpretować jako **skalowanie wzdłuż kierunku  $\hat{n}$**  ze współczynnikiem  $k = -1$ .

**Macierz odbicia:**

$$R(\hat{n}) = S(\hat{n}, -1) = \begin{pmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_y n_x & 1-2n_y^2 & -2n_y n_z \\ -2n_z n_x & -2n_z n_y & 1-2n_z^2 \end{pmatrix}$$

**Własności odbicia:**

- odwraca orientację obiektu (powstaje obraz lustrzany),
- jest izometrią – zachowuje długości i kąty między wektorami,
- dwukrotne zastosowanie odbicia przywraca pierwotny kształt:  $R(\hat{n})^2 = I$ ,

# Przykład – odbicie względem płaszczyzny XY

Rozważmy odbicie względem płaszczyzny XY, której wektor normalny to:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ Macierz odbicia: } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dla wierzchołków piramidy mamy:

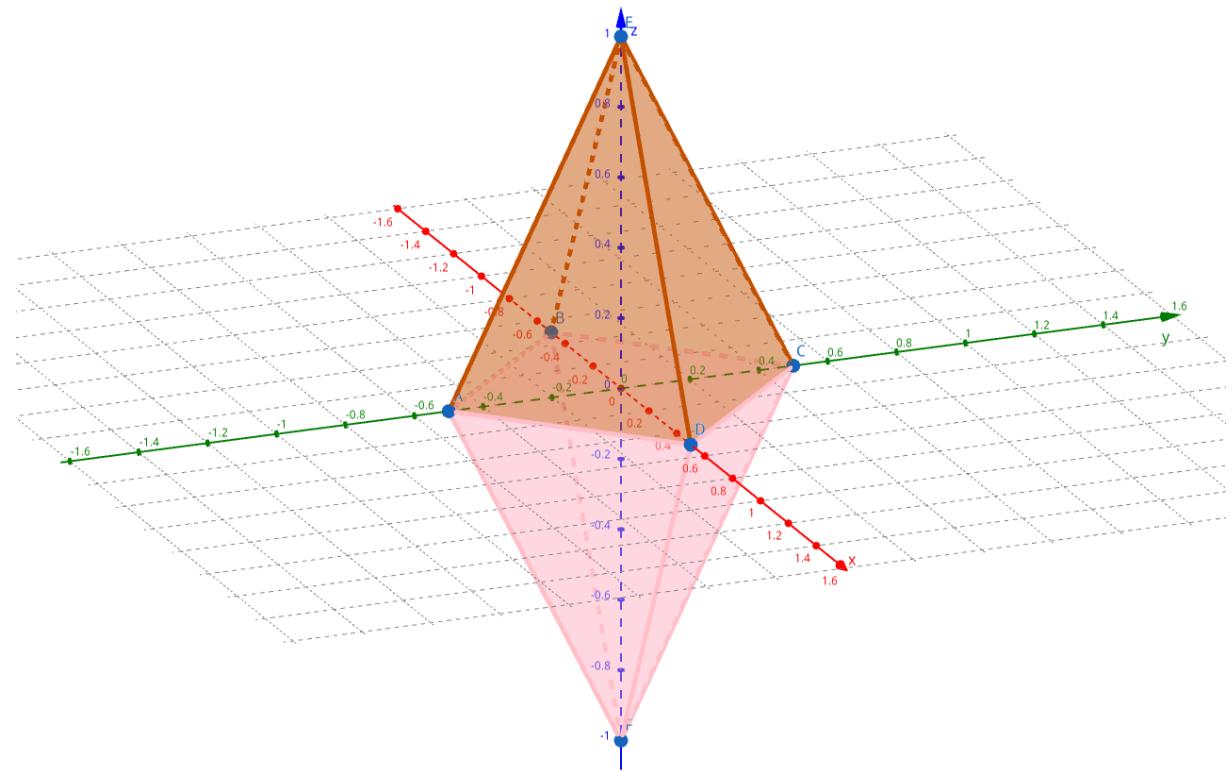
$$[0, -0.5, 0] \rightarrow [0, -0.5, 0]$$

$$[-0.5, 0, 0] \rightarrow [-0.5, 0, 0]$$

$$[0, 0.5, 0] \rightarrow [0, 0.5, 0]$$

$$[0.5, 0, 0] \rightarrow [0.5, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1] \rightarrow [0, 0, -1]$$



Wierzchołki leżące w płaszczyźnie XY pozostają niezmienione, natomiast punkt znajdujący się powyżej zostaje odbity symetrycznie poniżej niej.

Rzut równoległy (ortograficzny) można traktować jako **szczególny przypadek skalowania**, w którym współczynnik skali wzdłuż jednego z kierunków wynosi zero. W takim przypadku wszystkie punkty zostają „spłaszczone” na płaszczyznę – czyli ich współrzędne wzdłuż danego kierunku zanikają.

**Interpretacja geometryczna:** Punkty oraz ich obrazy są połączone prostymi równoległymi do kierunku rzutu. Dlatego przekształcenie to nazywa się **rzutem równoległy**.

## Własności rzutu równoległego:

- nie zachowuje perspektywy (brak zbiegu linii równoległych),
- zachowuje kształt i proporcje obiektów,
- jest liniowym przekształceniem macierzowym,
- w praktyce odpowiada „pominięciu” współrzędnej  $z$  (dla rzutu na płaszczyznę XY).

# Rzutowanie na oś lub płaszczyznę kardynalną

Rzutowanie na jedną z płaszczyzn głównych (kardynalnych) można przedstawić za pomocą **macierzy skalowania** ze współczynnikiem  $k = 0$  w kierunku normalnym do tej płaszczyzny.

W ten sposób rzut  $3D \rightarrow 2D$  realizowany jest przez „wyzerowanie” jednej współrzędnej punktu:

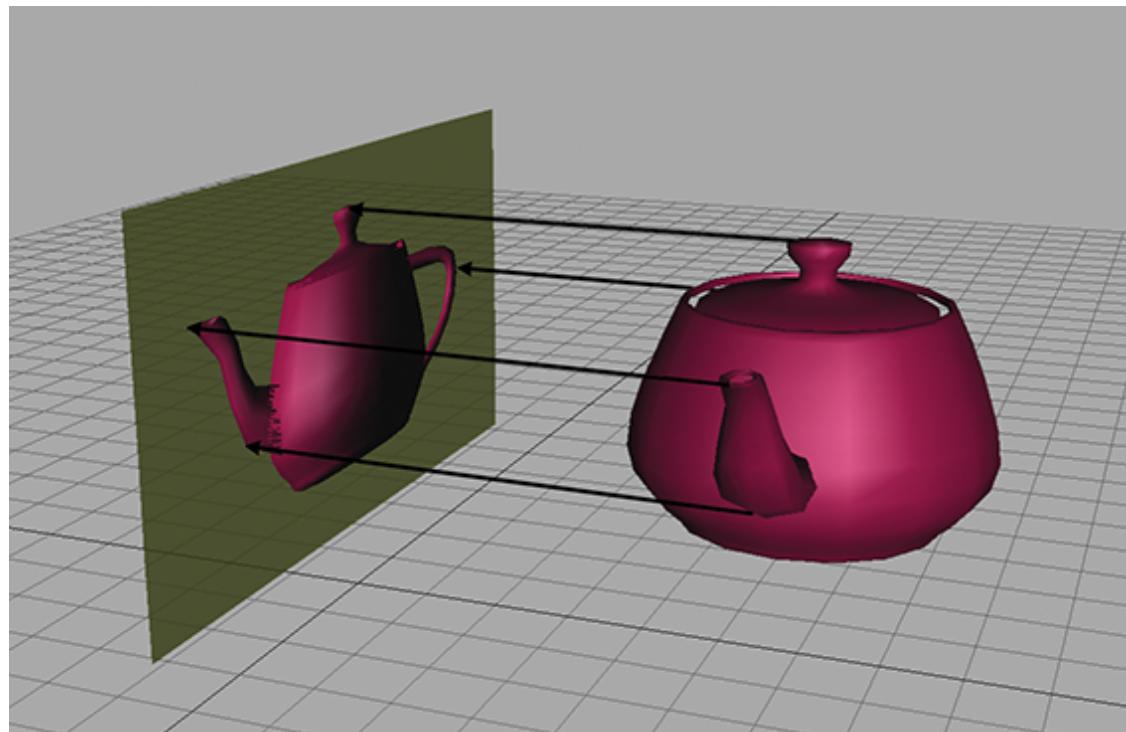
$$\text{Rzut na płaszczyznę XY: } P_{xy} = S \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rzut na płaszczyznę XZ: } P_{xz} = S \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rzut na płaszczyznę YZ: } P_{yz} = S \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W każdym przypadku współrzędna wzduż kierunku normalnego do płaszczyzny zostaje usunięta, co odpowiada „rzutowi” wszystkich punktów na daną płaszczyznę przy zachowaniu ich pozostałych współrzędnych.

# Rzutowanie na oś lub płaszczyznę kardynalną



**Przekształcenie skośne** (ang. **shearing**, inaczej **pochylenie** lub **skoszenie**) w przestrzeni trójwymiarowej polega na przesunięciu punktów obiektu wzdłuż jednego kierunku proporcjonalnie do ich położenia w innym kierunku. Przekształcenie to zachowuje objętość, ale **zniekształca kąty i kształty** obiektu.

Dla przykładu, jeśli przesuwamy współrzędne  $x$  i  $y$  proporcjonalnie do wartości  $z$ , to:

$$x' = x + k_{xz}z, \quad y' = y + k_{yz}z, \quad z' = z$$

W postaci macierzowej:

$$S_{\{z\}}(k_{xz}, k_{yz}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k_{xz} \\ 0 & 1 & k_{yz} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie  $k_{xz}$  i  $k_{yz}$  określają stopień pochylenia względem osi  $z$ . Ogólnie istnieje sześć możliwych macierzy przekształceń skośnych w 3D – w zależności od tego, względem której osi wykonywane jest pochylenie:

$$S_{\{x\}}(k_{xy}, k_{xz}) = \begin{pmatrix} 1 & k_{xy} & k_{xz} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{\{y\}}(k_{yx}, k_{yz}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{yx} & 1 & k_{yz} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{\{z\}}(k_{zx}, k_{zy}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_{zx} & k_{zy} & 1 \end{pmatrix}$$

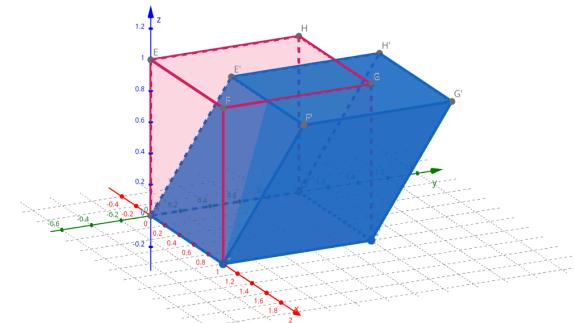
# Przekształcenie skośne w 3D (Shearing)

## Własności przekształcenia skośnego:

- zachowuje objętość, ale nie zachowuje kątów ani kształtów,
- jest liniowym przekształceniem (determinant macierzy = 1),
- w połączeniu ze skalowaniem może imitować rotację z deformacją.

$$S_{\{z\}}(0.5, 0.3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dla tego przekształcenia punkty przesuwają się proporcjonalnie do swojej współrzędnej  $z$ , tworząc efekt „pochylenia” obiektu w kierunku osi  $x$  i  $y$ .



W praktyce przekształcenia obiektów w grafice komputerowej rzadko wykonuje się pojedynczo. Najczęściej stosuje się ich **sekwencję** – np. **skalowanie**, potem **rotację**. Aby uprościć obliczenia, można je połączyć w jedną macierz transformacji.

**Zasada łączenia:** Jeśli mamy dwie macierze transformacji:

$A$  – pierwsza transformacja (np. skalowanie),

$B$  – druga transformacja (np. rotacja),

to ich złożenie (czyli zastosowanie jednej po drugiej) opisuje macierz:

$$M = B \cdot A$$

Kolejność jest **istotna** – najpierw stosujemy transformację  $A$ , potem  $B$ . Mnożenie macierzy **nie jest przemienne**, więc  $B \cdot A \neq A \cdot B$ .

**Przykład:**

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{z(90^\circ)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

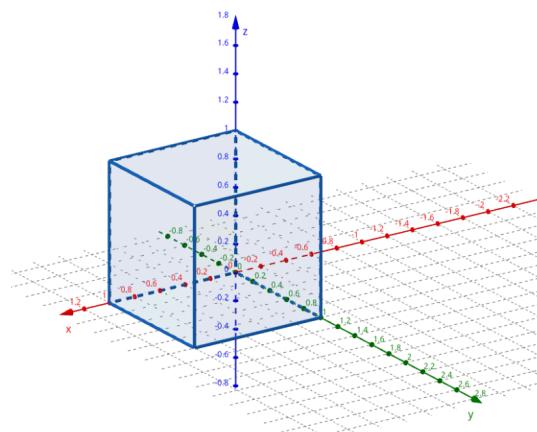
Kolejność zastosowania:

$M_{RS} = R_z \cdot S \Rightarrow$  najpierw skalowanie, potem rotacja

$M_{SR} = S \cdot R_z \Rightarrow$  najpierw rotacja, potem skalowanie

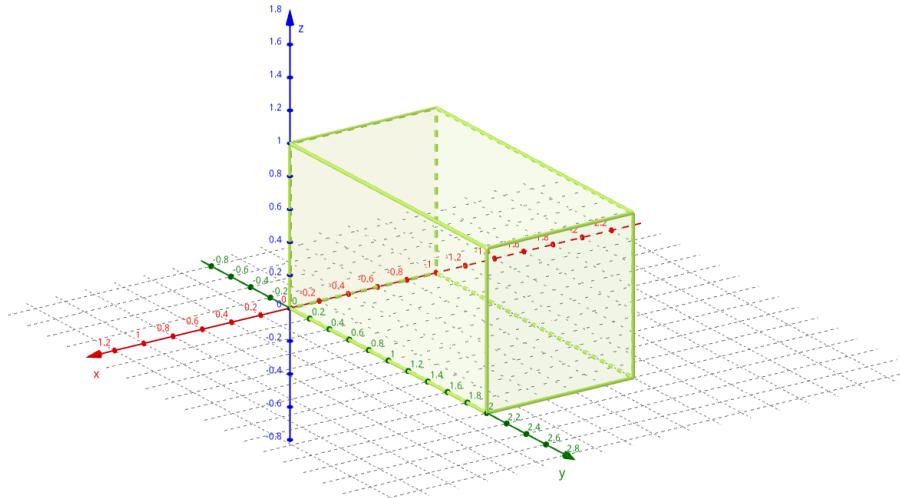
$$M_{RS} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{SR} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyniki tych dwóch operacji różnią się geometrycznie. Przykład dla sześcianu.

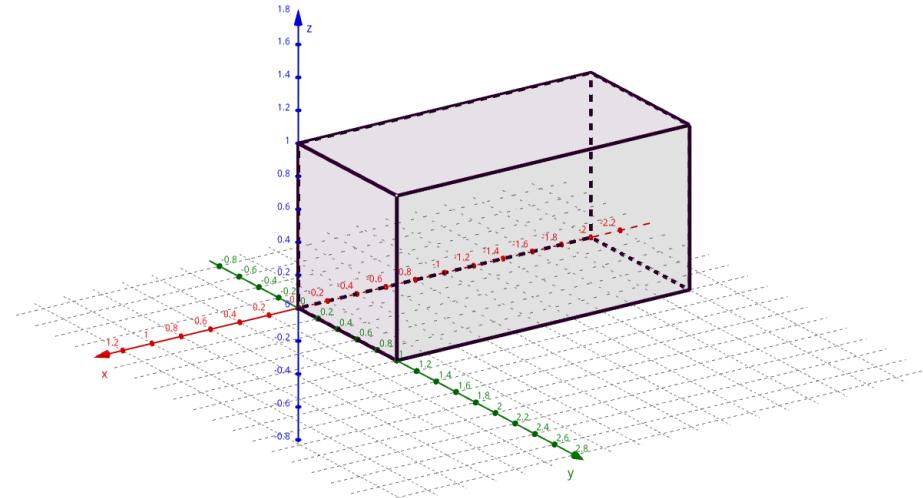


$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0), B = (1, 0, 0) \\ C &= (1, 1, 0), D = (0, 1, 0) \\ E &= (0, 0, 1), F = (1, 0, 1) \\ G &= (1, 1, 1), H = (0, 1, 1) \end{aligned}$$

,



Najpierw skalowanie, potem rotacja



Najpierw rotacja, potem skalowanie

## Podsumowanie:

- Kolejność mnożenia macierzy decyduje o wyniku.
- Mnożenie macierzy jest sposobem **komponowania** transformacji.
- Można więc złożyć złożone przekształcenia w jedną macierz i stosować ją jednokrotnie.

Przekształcenia liniowe stanowią podstawowy element grafiki komputerowej 3D, umożliwiając opis i kontrolę położenia, orientacji oraz kształtu obiektów w przestrzeni. W praktyce wykorzystywane są w wielu dziedzinach technologii i nauki.

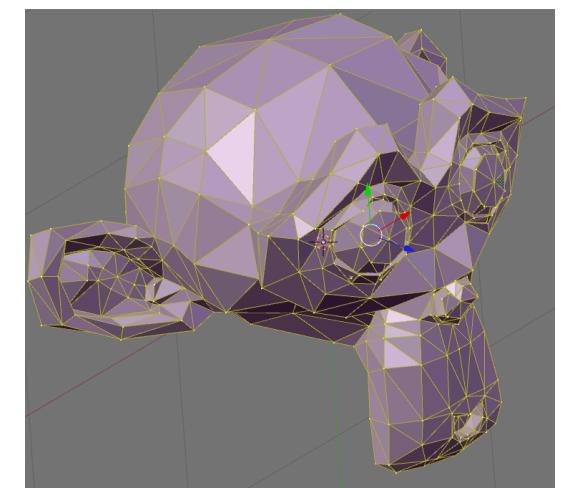
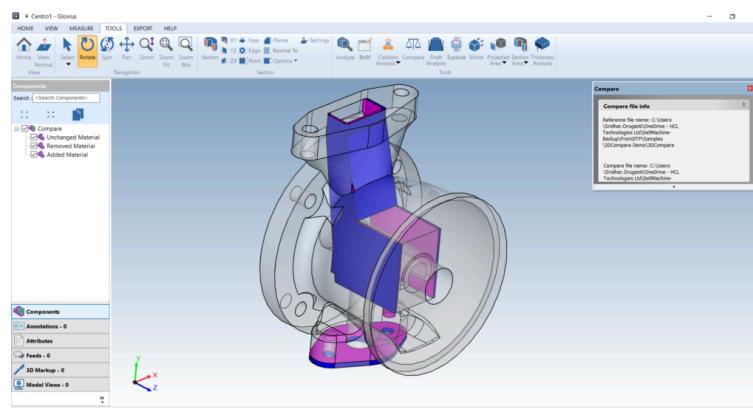
## Najważniejsze zastosowania:

- **Modelowanie 3D** – skalowanie, obrót i odbicie pozwalają na tworzenie złożonych obiektów poprzez transformacje prostych brył.
- **Animacja komputerowa** – płynne ruchy i deformacje obiektów wynikają z sekwencji transformacji liniowych (np. macierze kości w animacjach szkieletowych).
- **Grafika w grach** – przekształcenia obiektów względem kamery i sceny w czasie rzeczywistym (tzw. **world, view i projection matrices**).
- **Symulacje fizyczne** – opis ruchu brył sztywnych, zderzeń i przemieszczeń w przestrzeni.
- **Przetwarzanie obrazu i wizualizacja danych** – rotacje, skalowania i rzuty w systemach CAD, GIS oraz oprogramowaniu inżynierskim.

**Podsumowanie:** Przekształcenia liniowe umożliwiają precyzyjne opisywanie i modyfikowanie przestrzeni trójwymiarowej. Dzięki nim grafika komputerowa łączy matematykę i geometrię z praktyczną wizualizacją rzeczywistości.

# Zastosowania przekształceń w praktyce

Politechnika Łódzka ■





Dziękujemy  
za uwagę.

- [1] F. Dunn and I. Parberry, “3D Math Primer for Graphics and Game Development.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: <https://gamedevelopment.tutsplus.com/tutorials/3d-math-primer-for-game-development>
- [2] S. J. Janke, “Mathematical Structures For Computer Graphics.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: <https://resource.laikipia.ac.ke/sites/default/files/Mathematical%20Structures%20for%20Computer%20Graphics.pdf>
- [3] G. Sanderson, “Three-dimensional linear transformations.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: <https://www.3blue1brown.com/lessons/3d-transformations>
- [4] G. Szwoch, “Transformacje obiektów 3D.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: <https://sound.eti.pg.gda.pl/student/so/02-Transformacje.pdf>
- [5] J. Rogowski, “Matematyka Grafiki Komputerowej - Przestrzenie liniowe.”
- [6] J. Kijowski, “Przestrzeń afiniczna.” Accessed: Nov. 04, 2025. [Online]. Available: [https://www.youtube.com/watch?v=BS38\\_8MlTjo](https://www.youtube.com/watch?v=BS38_8MlTjo)