ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСДУРАСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА
специалиста

Максиминное тестирование качества управления летательным аппаратом

Выполнил студент
421 группы
Коптелов Егор Павлович

____
подпись студента
Научный руководитель:
Лемак Степан Степанович
Чертополохов Виктор Александрович

____
подпись научного руководителя

Москва 2024 год

Содержание

1 Введение

Современная авиационная индустрия постоянно стремится к увеличению безопасности полетов. В этом контексте особенно важно оценить навыки пилота при выполнении критических маневров, таких как посадка самолета.

Актуальность данной темы обусловлена несколькими факторами. Прежде всего, сложность управления самолетом, что требует высокой квалификации и опыта со стороны пилота. Кроме того, посадка самолета может сопровождаться различными неопределенностями и возмущениями, такими как плохая погода или технические неисправности, что подчеркивает важность оценки поведения пилота в нестандартных ситуациях. Безопасность полетов остается приоритетом, и качественное тестирование пилота играет ключевую роль в ее обеспечении.

Методы максиминного тестирования, подробно описанные в работах [1]-[2], примененные к пилотированию самолетом позволяют оценить способность пилота адаптироваться к различным условиям посадки, оценивая результаты его управления в наихудших ситуациях. Такой метод позволяет идентифицировать пилотов, которые могут испытывать трудности при посадке в сложных условиях и разработать программы обучения по повышению квалификации.

В данной курсовой работе будут рассмотрены методы минимаксного тестирования пилота в контексте авиационной динамики с целью формализовать математическую модель движения самолета во время посадки и определить, как эту модель можно использовать для оценки навыков пилота.

Также будут рассмотрены различные аспекты этого процесса, начиная с выведения уравнений движения самолета, их обезразмеривание и линеаризация для анализа поведения системы. Затем будут изучены методы поиска областей достижимости [1] с помощью решения задачи Б.В. Булгакова [3] о накоплении возмущений, синтез оптимального управления и поиск седловой точки построенной дифференциальной игры [1], [2], [4] между пилотом самолета и погодными условиями.

Исследование в данной области не только важно для повышения безопасности авиации, но и способствует развитию теоретических основ управления динамическими системами в условиях неопределенности.

2 Модель движения летательного аппарата

2.1 Уравнения движения

Рассмотрим летательный аппарат (ЛА) как твердую оболочку с вертикальной плоскостью симметрии. Будем считать, что центр масс ЛА расположен на продольной оси и не меняет своего положения в процессе полета. Выгорающее топливо создает реактивную силу, которая направлена вдоль продольной оси ЛА. В данных допущениях можно рассматривать отдельно боковое движение ЛА и движение в вертикальной плоскости. В процессе посадки ЛА в районе аэродрома будем принебрегать сферичностью и вращением Земли.

Движение ЛА в вертикальной плоскости описывается уравнениями движения центра масс и уравнениями вращательного движения вокруг центра масс:

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = M\vec{g} + \vec{A} + \vec{P} \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{M}_z \tag{2}$$

Здесь M - масса ЛА, $\vec{V}$ - вектор абсолютной скорости движения ЛА, $M\vec{g}$ - гравитационная сила, $\vec{A}$ - равнодействующая аэродинамических сил, $\vec{P}$ - реактивная сила тяги, $\vec{G}$ - кинетический момент корпуса ЛА, $\vec{M}_z$ - момент аэродинамических сил, действующих на ЛА.

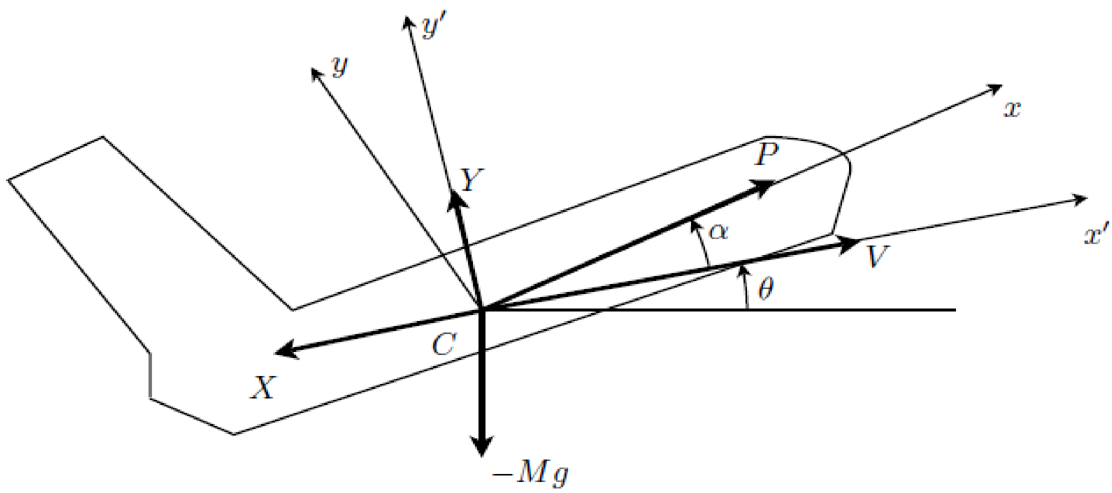

Рис. 1: Полет ЛА в вертикальной плоскости

Введем скоростную систему координат $Cx'y'z'$ такую, что проекции вектора скорости ц.м. имеют вид $\vec{V}_c = (V, 0, 0)^T$, а абсолютная угловая скорость трехгранника $Cx'y'z'$ имеет вид $\vec{\Omega} = (0, 0, \dot{\theta})$. Тогда проекции уравнений движения ЛА на скоростную систему координат примут следующий вид:

$$M\dot{V} = -Mg\sin\theta + P\cos\alpha - X(V^{\text{в}}, \alpha^{\text{в}}) \tag{3}$$

$$MV\dot{\theta} = -Mg\cos\theta + P\sin\alpha + Y(V^{\text{в}}, \alpha^{\text{в}}) \tag{4}$$

$$\dot{\phi} = \Omega \tag{5}$$

$$J_z\dot{\Omega} = M_z(V^{\text{в}}, \alpha^{\text{в}}, \sigma) \tag{6}$$

$$\dot{L} = V\cos\theta, \quad \dot{H} = V\sin\theta \tag{7}$$

где H - высота полета; L - дальность полета; $\alpha = \phi - \theta$ - угол атаки; ϕ - угол тангажа; θ - траекторный угол; Ω - абсолютная угловая скорость поворота корпуса ЛА; J_z - момент инерции корпуса ЛА относительно оси z; M_z - момент аэродинамических сил; действующих на ЛА; σ - отклонение руля высоты; $\delta\alpha, \delta V$ - возмущения; $\alpha^{\text{в}}, V^{\text{в}}$ - воздушные угол атаки и скорость соответственно.

В данной модели будем считать, что ЛА имеет два управляющих воздействия - силу тяги P и отклонение руля высоты σ. При этом возмущения порывов ветра $\delta\alpha, \delta V$ воздействуют на ЛА посредством аэродинамических сил X и Y, а воздушные угол атаки и скорость имеют вид $\alpha^{\text{в}} = \alpha + \delta\alpha$, $V^{\text{в}} = V + \delta V$ соответственно.

Исходя из экспериментальных данных [5], полученных в результате обдувки модели самолета Як-55, в данной работе будем вычислять аэродинамические силы по следующим соотношениям:

$$X = \frac{\rho(V^{\text{в}})^2}{2}Sc_x(\alpha^{\text{в}}), \quad Y = \frac{\rho(V^{\text{в}})^2}{2}Sc_y(\alpha^{\text{в}}) \tag{8}$$

$$c_y(\alpha^{\text{в}}) = c_y^0 + c_y^\alpha\alpha^{\text{в}}, \quad c_x(\alpha^{\text{в}}) = c_x^0 + Bc_y^2(\alpha^{\text{в}}), \tag{9}$$

где ρ - плотность воздуха; S - площадь поверхности крыла; $c_x^0, c_y^0, c_y^\alpha, B$ - безразмерные коэффициенты (характеристики ЛА)

При этом соотношения (9) имеют силу в ограниченном интервале изменения угла атаки: $\alpha \in [-19.5, 19.5]$.

Также считаем, что момент аэродинамических сил имеет вид:

$$M_z(V^{\text{в}}, \alpha^{\text{в}}, \sigma) = -\frac{\rho(V^{\text{в}})^2}{2} Sb(m_z^{\alpha}\alpha^{\text{в}} + m_z^{\sigma}\sigma), \tag{10}$$

где b -расстояние от ц.м. до центра давления [5] ЛА, $m_z^{\alpha} > 0, m_z^{\sigma} > 0$ - постоянные аэродинамические коэффициенты.

Таким образом, уравнения движения ЛА принимают вид:

$$\begin{cases} M\dot{V} = -Mg\sin\theta + P\cos\alpha - \frac{\rho(V+\delta V)^2}{2} S(c_x^0 + B(c_y^0 + c_y^{\alpha}(\alpha+\delta\alpha))^2) \\ MV\dot{\theta} = -Mg\cos\theta + P\sin\alpha + \frac{\rho(V+\delta V)^2}{2} S(c_y^0 + c_y^{\alpha}(\alpha+\delta\alpha)) \\ \dot{\phi} = \Omega \\ J_z\dot{\Omega} = -\frac{\rho(V+\delta V)^2}{2} Sb(m_z^{\alpha}(\alpha+\delta\alpha) + m_z^{\sigma}\sigma) \end{cases} \tag{11}$$

Для удобства работы с системой (11) и последующего использования уравнений движения в построении методики максиминного тестирования произведем обезразмеривание и линеаризацию полученной системы уравнений.

2.2 Обезразмеривание и нормализация уравнений движения

На основании аэродинамических и геометрических характеристик самолета Як-55 [5], выберем следующие характерные значения параметров системы:

$$M_* = 1000\text{кг}, \quad V_* = 100\frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \Omega_* = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

И введем безразмерные переменные:

$$m = \frac{M_*}{M}, \quad v = \frac{V_*}{V}, \quad t = \frac{T_*}{T}, \quad \omega = \frac{\Omega_*}{\Omega}$$

При данных характерных скорости спуска V_* и ускорении g - получим характерное время спуска: $T_* = \frac{V_*}{g} \approx 10\text{с}$. Также выражение для безразмерной силы тяги будет иметь вид: $p = P\frac{T_*}{M_*V_*}$

В данной модели будем считать, что скорость порывов ветра ограничена: $|\delta V| < 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Тогда малым возмущением системы будет: $\delta v = \frac{\delta V}{V_*}$

Обозначим еще безразмерные коэффициенты как: $h = \frac{\rho S T_* V_*}{M_*}, \quad q = \frac{\rho S b T_* V_*^2}{J_z \Omega_*}$

Считая, что во время посадки масса ЛА остается неизменной, т.е. $m = 1$, после подстановки безразмерных величин в систему (11) уравнения движения принимают вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\sin\theta + p\cos\alpha - \dfrac{h}{2}(v+\delta v)^2[c_x^0 + B(c_y^0 + c_y^\alpha(\alpha+\delta\alpha))^2] \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{\cos\theta}{v} + \dfrac{p}{v}\sin\alpha + \dfrac{h}{2v}(v+\delta v)^2[c_y^0 + c_y^\alpha(\alpha+\delta\alpha)] \\ \dfrac{d\phi}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{q}{2}(v+\delta v)^2[m_z^\alpha(\alpha+\delta\alpha) + m_z^\sigma\sigma] \end{cases} \tag{12}$$

Далее необходимо провести линеаризацию полученных обезразмеренных уравнений движения.

2.3 Линеаризация уравнений движения

Посадка ЛА является сложным процессом, который состоит из нескольких этапов: заход на глиссаду, спуск по глиссаде и приземление. На первом этапе ЛА выводится на заданный курс траектории и снижается до высоты глиссады. Во время спуска по глиссаде ЛА должен выдерживать заданные параметры полета $v^*, \alpha^*, \theta^*, \phi^*, p^*, \sigma^*$, которые будем называть *программными движениями*. В данной модели спуска будем считать, что программные движения являются *постоянными* значениями. Также необходимо учитывать внешние возмущения порывов ветра, которые вызывают *малые отклонения* от программных движений $\Delta v, \Delta\alpha, \Delta\theta, \Delta\phi, \Delta p, \Delta\sigma$. Тогда параметры системы можно записать следующим образом

$$v = v^* + \Delta v,\ \alpha = \alpha^* + \Delta\alpha,\ \theta = \theta^* + \Delta\theta,$$

$$\phi = \phi^* + \Delta\phi,\ p = p^* + \Delta p,\ \sigma = \sigma^* + \Delta\sigma$$

В предположении, что значения возмущений $\delta v, \delta\alpha$ - ограничены малыми значениями, а значения отклонений $\Delta v,\ \Delta\alpha,\ \Delta\theta,\ \Delta\phi,\ \Delta v,\ \Delta\sigma$ - малы, в процессе линеаризации будут исключены члены второго и более высоких порядков, а также билинейные челны вида $\delta v\Delta v, \delta\alpha\Delta\alpha$, и т.д. После линеаризации уравнения движения принимают следующий вид

$$
\begin{cases}
\Delta\dot{v} = \Delta\alpha[-h(v^*)^2 B c_y^\alpha (c_y^0 + c_y^\alpha \alpha^*) - p^* \sin\alpha^*] + \\
\qquad + \Delta v h v^* [c_x^0 + B((c_y^0)^2 + 2c_y^0 c_y^\alpha \alpha^* + (c_y^\alpha)^2 (\alpha^*)^2)] + \\
\qquad + \delta\alpha h B (v^*)^2 (c_y^0 c_y^\alpha + (c_y^\alpha)^2 \alpha^*) + \delta v h v^* [c_x^0 + B((c_y^0)^2 + 2c_y^0 c_y^\alpha \alpha^* + (c_y^\alpha)^2 (\alpha^*)^2] + \\
\qquad + \Delta p \cos\alpha^* - \Delta\theta \cos\theta^* \\
\Delta\dot{\theta} = \Delta\alpha[\dfrac{h c_y^\alpha v^*}{2} + \dfrac{p^* \cos\alpha^*}{v^*}] + \Delta v[\dfrac{h}{2}(c_y^0 + c_y^\alpha \alpha^*) + \dfrac{\cos\theta^*}{(v^*)^2} - \dfrac{p^* \sin\alpha^*}{(v^*)^2}] + \\
\qquad + \delta\alpha \dfrac{h c_y^\alpha v^*}{2} + \delta v h (c_y^0 + c_y^\alpha \alpha^*) + \Delta p \dfrac{\sin\alpha^*}{v^*} + \Delta\theta \dfrac{\sin\theta^*}{v^*} \\
\Delta\dot{\phi} = \Delta\omega \\
\Delta\dot{\omega} = -\Delta\alpha \dfrac{q m_z^\alpha (v^*)^2}{2} - \Delta v q v^* (m_z^\alpha \alpha^* + m_z^\sigma \sigma^*) - \Delta\sigma \dfrac{q m_z^\sigma (v^*)^2}{2} - \\
\qquad - \delta\alpha \dfrac{q m_z^\alpha (v^*)^2}{2} - \delta v q v^* (m_z^\alpha \alpha^* + m_z^\sigma \sigma^*)
\end{cases} \tag{13}
$$

Линеаризованную систему уравнений движения (13) также можно записать в матричной форме

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cw, \tag{14}$$

где $x = (\Delta v, \Delta\theta, \Delta\phi, \Delta\omega)^T$ - вектор состояния системы в отклонениях, $u = (\Delta p, \Delta\sigma)^T$ - управление, $w = (\delta v, \delta\alpha)^T$ - возмущение, $A_{4\times4},\ B_{4\times2},\ C_{4\times2}$ - матрицы коэффициентов.

Система (14) представляет собой обезразмеренные линеаризованные уравнения движения ЛА и учитывает все воздействия - возмущающие и управляющие. Однако, в ряде случаев, в том числе для построения методики максиминного тестирования, возникает потребность рассмотрения управляемой и возмущаемой подсистемы отдельно. Поэтому проведем *декомпозицию* системы (14), используя разложение $x(t) = y(t) - z(t)$:

$$\dot{y} = Ay + C_1 w_1 + C_2 w_2, \quad y(0) = y_0, \tag{15}$$

$$\dot{z} = Az - B_1 u_1 - B_2 u_2, \quad z(0) = 0, \tag{16}$$

где $y,\ z$ - векторы координат *возмущаемой* и *управляемой* систем соответственно; A - постоянная матрица коэффициентов; $B_1,\ B_2,\ C_1,\ C_2$ - постоянные векторы столбцы, которые составляют матрицы $B = (B_1, B_2),\ C = (C_1, C_2)$;

$u = (u_1, u_2)^T \in U = \{u_1^- \leq u_1(t) \leq u_1^+, \quad u_2^- \leq u_2(t) \leq u_2^+\}$ - управление;
$w = (w_1, w_2)^T \in W = \{w_1^- \leq w_1(t) \leq w_1^+, \quad w_2^- \leq w_2(t) \leq w_2^+\}$ - возмущение;
$y(0) = y_0$ - начальные отклонения.

Перейдем теперь к непосредственному построению методики максиминного тестирования качества управления ЛА.

3 Методика максиминного тестирования качества управления ЛА

Для построения методики *максиминного тестирования* стоит задача оценки качества некоторого управления $\tilde{u}(t)$ в смысле следующего *функционала качеста*:

$$J(u, v) = ||x(t_k)|| = x(t_k)^T x(t_k) \tag{17}$$

Тогда следующие задачи составляют *дифференциальную антогонистическую игру*:

1. управление стремится минимизировать функционал $J(u, v) \to \min_{u \in U}$,

2. возмущение стремится его максимизировать $J(u, v) \to \max_{v \in V}$

Для системы тестирования необходимо сформировать *наихудшие возмущения*, при которых будет происходить оценка алгоритма управления.

3.1 Редукция к геометрической игре

Рассматривая систему (14) и ее возмущаемую (15) и управляемую (16) подсистемы, функционал качества обретает геометрический смысл *расстояния* между фазовыми векторами этих подсистем в конечный момент времени:

$$J(u, v) = ||x(t_k)|| = ||y(t_k) - z(t_k)|| = \rho^2(y, z) \tag{18}$$

В силу того, что значения $y(t_k)$, $z(t_k)$ изменяются в пределах множеств $D_w = \{y(t_k) | \forall w \in W\}$, $D_u = \{z(t_k) | \forall u \in U\}$, называемых *областями достижимости* по возмущениям и управлениям соответственно, дифференциальная игра сводится к *геометрической игре* на областях достижимости:

1. для управления - поиск *минимакса*:

$$\min_{z \in D_u} \max_{y \in D_v} J(y, z) = \rho^0 \tag{19}$$

2. для возмущения - поиск *максимина*:

$$\max_{y \in D_v} \min_{z \in D_u} J(y, z) = \rho_0 \tag{20}$$

Говорят, что *седловая точка* игры существует, если $\rho^0 = \rho_0 = \rho(y^0, z^0)$. Тогда значение ρ_0 называется *ценой* игры.

Наличие седловой точки игры обеспечивает существование *оптимальной сратегии тестирования.* В таком случае может быть предложена *методика максиминного тестирования* качества управления ЛА, состоящая из следующих этапов:

1. Поиск максимина $\rho_0 = \rho(y^0, z^0)$, проверка наличия седловой точки и вычисление наихудшей стратегии возмущений v^0
2. Моделирование системы (14) с тестируемым алгоритмом управления $\tilde{u}(t)$ при воздействии найденых возмущениях v^0 на систему, вычисление точки $z(\tilde{t_k})$ и значения $\tilde{\rho} = \rho(y^0, \tilde{z})$
3. Вычисление оценки результата тестирования алгоритма управления по стобальной шкале $100 \cdot \dfrac{\rho_0}{\tilde{\rho}}$

При построении данной методики тестирования, используется метод сведения к геометрической игре на областях достижимости по возмущениям и управлениям. Но для таких сложных систем как ЛА задача поиска областей достижимости составляет трудоемкий процесс, поэтому в данной работе будем использовать решение задачи Б. В. Булгакова [3] для построения аппроксимации областей достижимости.

4 Определние областей достижимости с помощью решения задачи Б. В. Булгакова

Задача Будгакова о накоплении возмущений представляет собой поиск такого оптимального воздействия на систему, которое приведет к максимальным отклонениям системы в конечный момент времени.

Рассмотрим линейную возмущаемую систему (15):

$$\dot{y} = Ay + C_1 w_1 + C_2 w_2, \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, t_k]$$

Ставится задача: среди всех возможных возмущений $w \in W$, при фиксированных начальных отклонениях $y(0) = y_0$, найти такое, при котором достигается максимум функционала в конечный момент времени:

$$V(w) = \phi_0(y(t_k)) = c^T y(t_k) \to \max_{w \in W}, \tag{21}$$

где c - заданный вектор.

Поставленную задачу легко решить, используя принцип максимума Понтрягина [1]. Для рассматриваемой системы (15) функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi^T Ay + \psi^T C_1 w_1 + \psi^T C_2 w_2.$$

Выпишем сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T \psi \\ \psi(t_k) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = c \end{cases} \tag{22}$$

которая имеет решение $\psi(t) = e^{A^T(t_k - t)} \psi(t_k)$

Тогда оптимальное возмущение, доставляющее максимум функционалу $V(w)$, следующее:

$$w_1^o(t) = \begin{cases} w_1^+, & \psi^T(t) C_1 \geq 0 \\ w_1^-, & \psi^T(t) C_1 < 0 \end{cases}, \; w_2^o(t) = \begin{cases} w_2^+, & \psi^T(t) C_2 \geq 0 \\ w_2^-, & \psi^T(t) C_2 < 0 \end{cases} \tag{23}$$

Данное решение имеет простой геометрический смысл - достигается максимальная проекция множества достижимости $\Omega(t_k)$ на направление, заданное вектором c.

Таким образом, изменяя вектор c, получим аппроксимирующую оболочку области достижимости по возмущениям D_w. Аналогично, решая задчу Булгакова для управляемой подсистемы, можно получить аппроксимацию области достижимости по управлениюD_u.

Описанный метод представляет быстрый алгоритм построения аппроксимирующих оболочек областей достижимости, который имеет простую программную реализацию на вычислительных машинах. Для более ясного представления областей достижимости и дальнейшего поиска седловой точки геометрической игры - проведем численное моделирование.

5 Численное моделирование

Рассмотрим модель самолета Як-55 с его характеристиками [5]:

$$c_y^0 = 0; \quad c_y^\alpha = 4.3; \quad B = 0.07; \quad c_x^0 = 0.035;$$

$$S = 14.805\text{м}^2; \quad b = 1.746\text{м}; \quad M = 1000\text{кг}; \quad J_z = 1600\text{кг} \cdot \text{м}^2;$$

Параметры m_z^α и m_z^σ, необходимые для вычисления аэродинамического момента, можно оценить следующим образом. Поскольку момент M_z отностиельно центра тяжести создается лишь подъемной силой Y, приложенной в центре давления самолета (ц. д.) отстоящем от ц. т. на расстоянии a (Рис. 2), то он имеет вид $M_z = Y \cdot a$. Но с другой стороны остается верным его выражение (10), основанное на экспериментальных данных обдувки самолета. Тогда получим соотношение:

$$M_z = Y \cdot a = \frac{\rho(V^\text{в})^2}{2} Sb(m_z^\alpha \alpha^\text{в} + m_z^\sigma \sigma), \tag{24}$$

где $Y = \frac{\rho(V^\text{в})^2}{2} S(c_y^0 + c_y^\alpha \alpha^\text{в})$

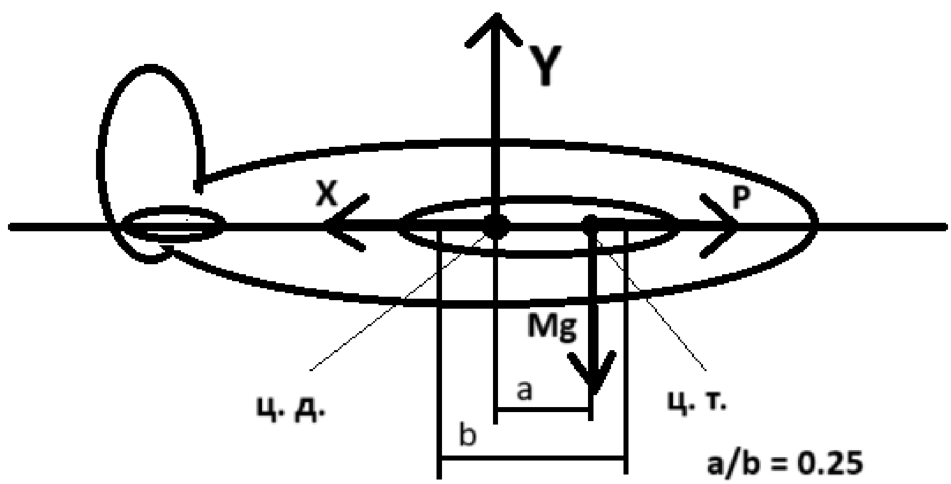

Рис. 2: Аэродинамический момент

Рассматривая случаи при $\sigma = 0$ и $\alpha^\text{в} = 0$, с учетом ограничений $|\alpha^\text{в}| < 19.5^o$ и $|\sigma| < 25^o$ можно получить оценки значений соответствующих коэффициенов, выражения для которых полученные из (24) будут имеют вид

$$m_z^\alpha = \frac{a}{b}\left(\frac{c_y^0}{\alpha^{\text{в}}} + c_y^\alpha\right), \quad m_z^\sigma = \frac{a}{b} \cdot \frac{c_y^0}{\sigma}$$

Так, для самолетов Як-52 и Як-55, с учетом их характеристик [5] получим соответствующие значения $m_z^\alpha = 1.26, \quad m_z^\sigma = 0.0481.$

Теперь, имея все необходимые характеристики, проведем численное моделирование уравнений движения самолета Як-55. Результаты моделирования уравнений движения (11) на временном отрезке $t \in [0, 30\text{с}]$ при начальных условиях $V_0 = 100\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\theta_0 = -0.3^o$, $\phi_0 = -0.1^o$, $\Omega_0 = -0.1c^{-1}$ показаны на Рис. 3. В данном случае были использованы следующие модельные воздействия на ЛА:

$$\delta V = 10 \cdot |\sin(2 \cdot t)|; \quad \delta\alpha = 3 \cdot \sin(0.5 \cdot t); \quad P = 15 \cdot |\sin(t)|; \quad \sigma = 5 \cdot \sin(0.3 \cdot t)$$

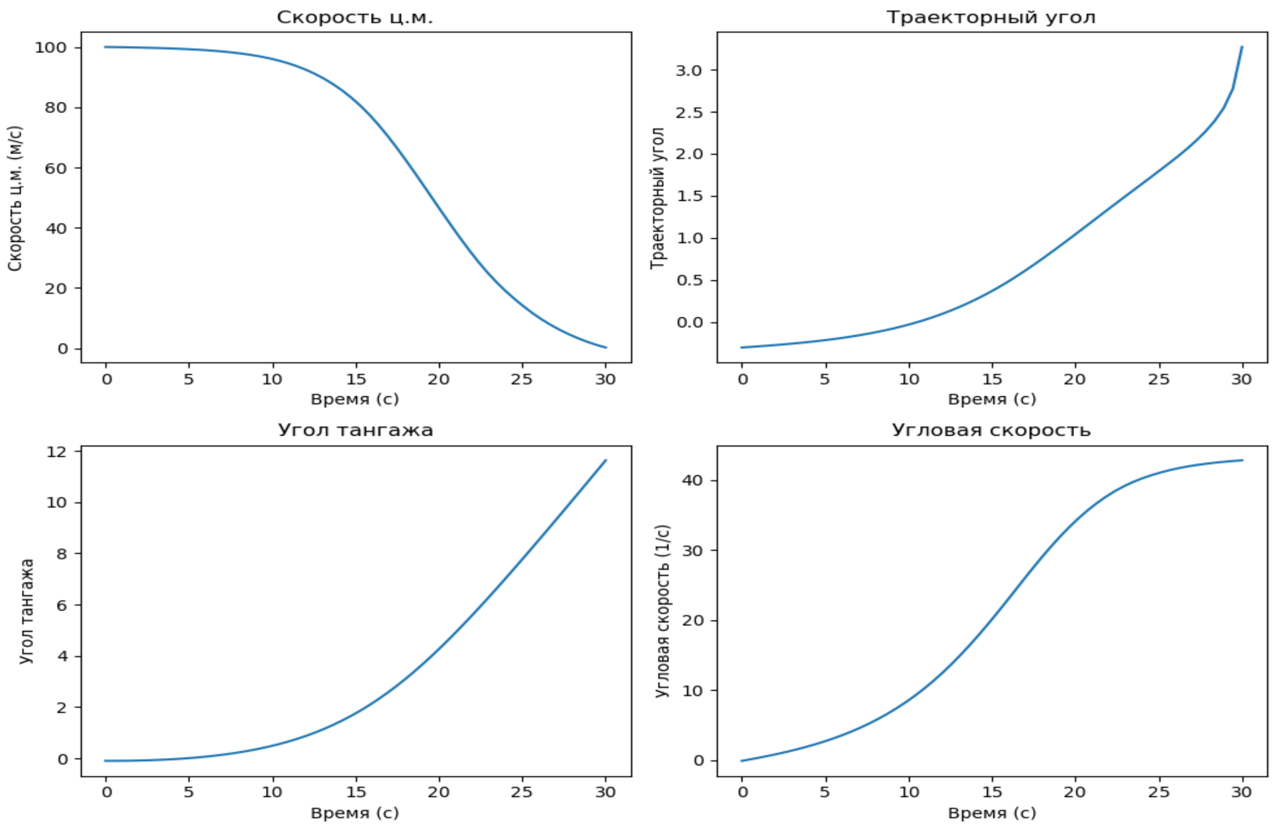

Рис. 3: Моделирование поведения уравнений движения

Моделирование обезразмеренных линеаризованных уравнений движения (13) на одном характерном отрезке времени $T_* = 10\text{с}$, результаты которого приведены на Рис. 4, происходило при следующих значениях программных движений

$$v^* = 1, \quad \alpha^* = 0, \quad \theta^* = -2, \quad p^* = 1.3, \quad \sigma^* = 3$$

Для выявления границ применения и зависимости ошибки линейной системы в отклонениях от амплитуды воздействий на ЛА и начальных отклонений были выбраны следующие модельные выражения

$$\Delta v = ar \cdot |\sin(2 \cdot t)|, \quad \Delta\alpha = ar \cdot 2\sin(0.5 \cdot t),$$

$$\Delta p = ar \cdot 3\sin(0.3 \cdot t), \quad \Delta\sigma = ar \cdot 1.5|\sin(t)|,$$

где ar - амплитудный коэффициент принимающий значения 1 и 10 в разнличных экспериментах и отражающий степень воздействия на самолет.

За начальные отклонения вектора состояния был принят вектор

$$(\Delta v, \Delta\theta, \Delta\phi, \Delta\omega) = ir \cdot (0.3745, 0.9507, 0.7319, 0.5986),$$

где ir - коэффициент принимающий значения 2, 10 и 0.1 в различных экспериментах и отражающий степень отклонения начальных возмущений от программных движений.

На основании результатов моделирования можно сделать вывод, что большие начальные отклонения приводят к наибольшему росту ошибки системы. Большой вклад в накопление ошибки также вносят более амплитудные воздействия на систему. Таким образом при амплитудных коэффициентах $ar \sim 1, \quad ir \sim 2$ обезразмеренные линеаризованные уравнения движения отражают поведение самолета Як-55 с приемлемой точностью и могут быть применимы для построения методики максиминного тестирования качества управления ЛА.

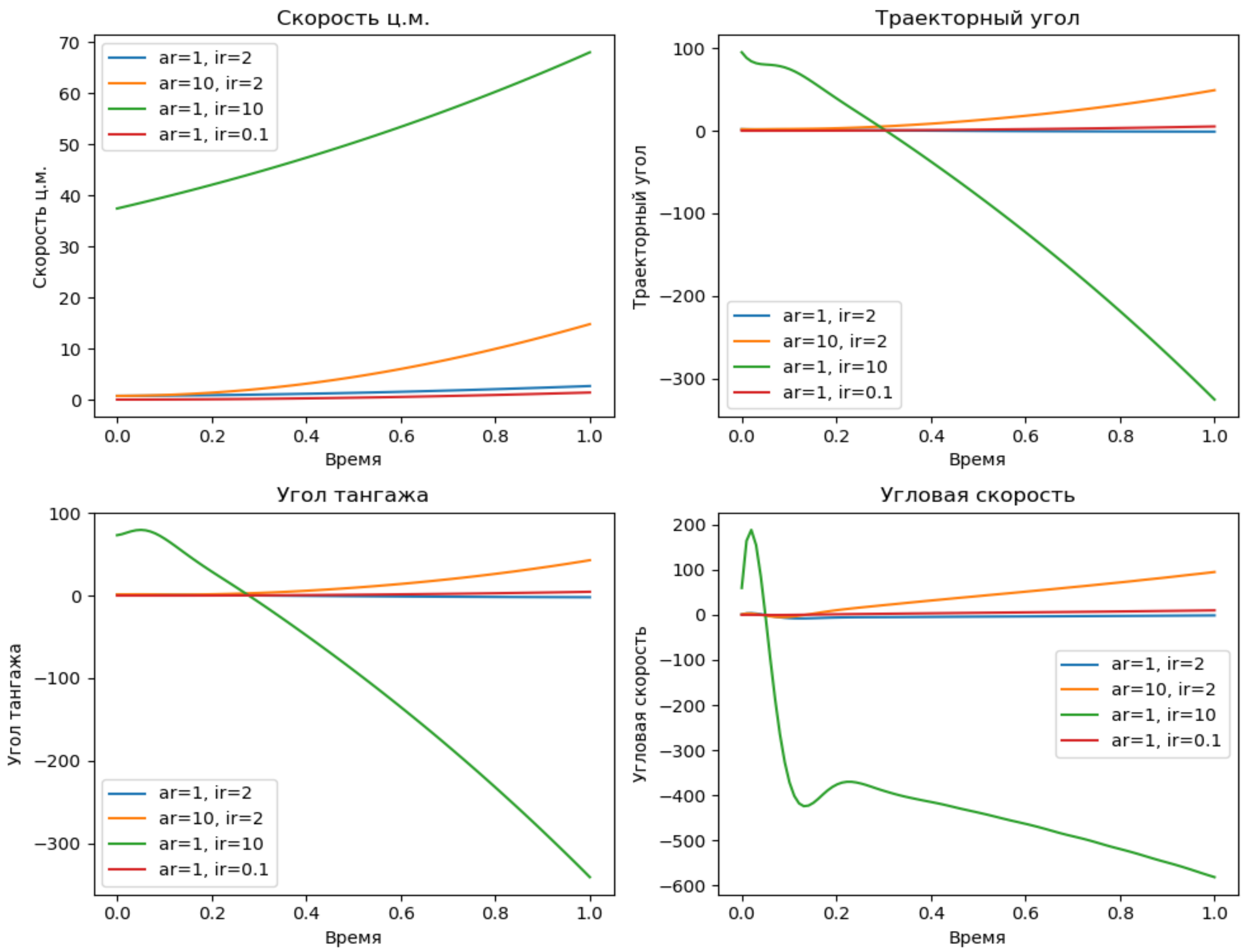

Рис. 4: Моделирование поведения обезразмеренных линеаризованных уравнений движения

В полученных границах применения системы (13) для характеристик самолета Як-55 были построены области достижимости по управлениям и возмущениям с помощью алгоритма решения задачи Булгакова, описанного в предыдущем разделе 4. Выпуклые оболочки проекций областей достижимости на плоскости, составленные координатными осями фазового пространства, представлены на Рис. 5. Это позволяет свести дифференциальную игру между управляющими воздействиями и возмущениями к геометрической игре на областях достижимости в том виде, в котором этот процесс был описан в разделе 3.1.

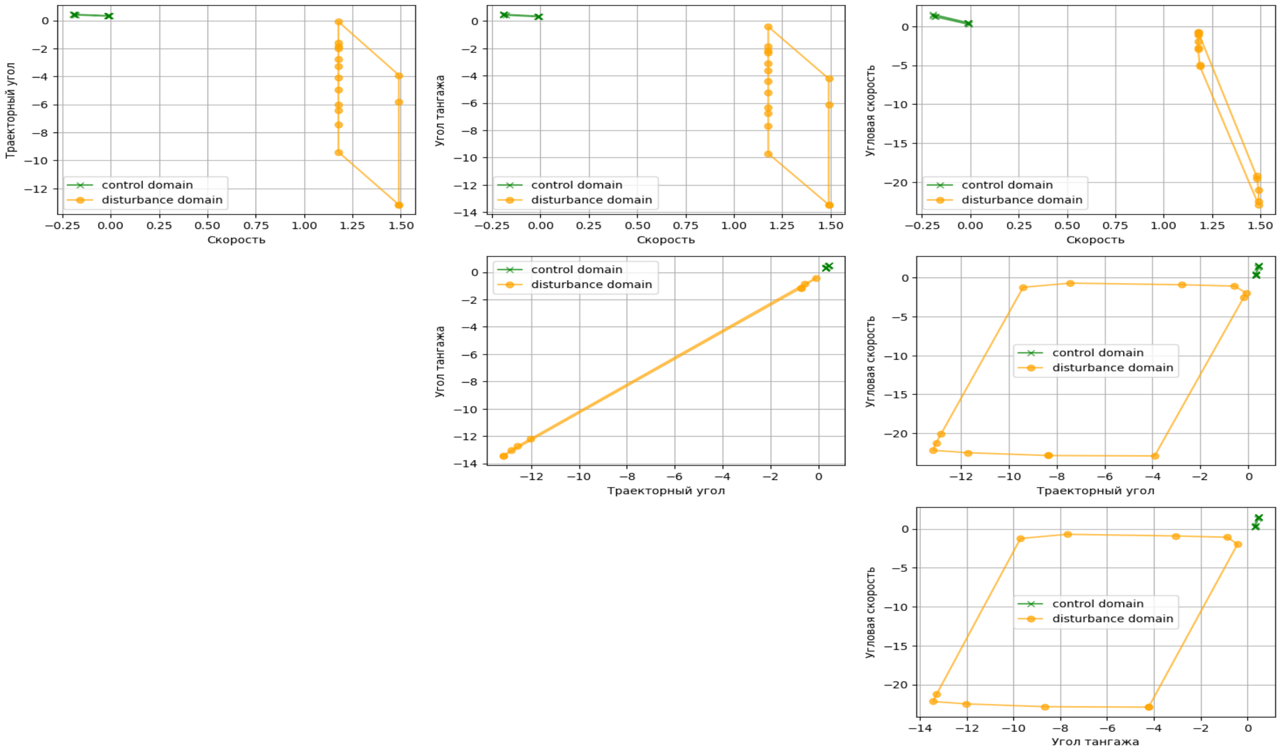

Рис. 5: проекции областей достижимости

Применение алгоритма поиска седловой точки к полученной геометрической игре показывает, что в данной игре *существует положение равновесия* (Рис. 7). Цена игры в имеет значение $\rho_0 = 29.6$. Наихудшие возмущения v^0, соответствующие значению максимина, представлены на Рис. 6. Точка области достижимости, в которую приходит вектор состояния системы под воздействием наихудших возмущений, имеет координаты $y^0 =$ (1.49, -13.16, -13.45, -22.1) на фазовом пространстве.

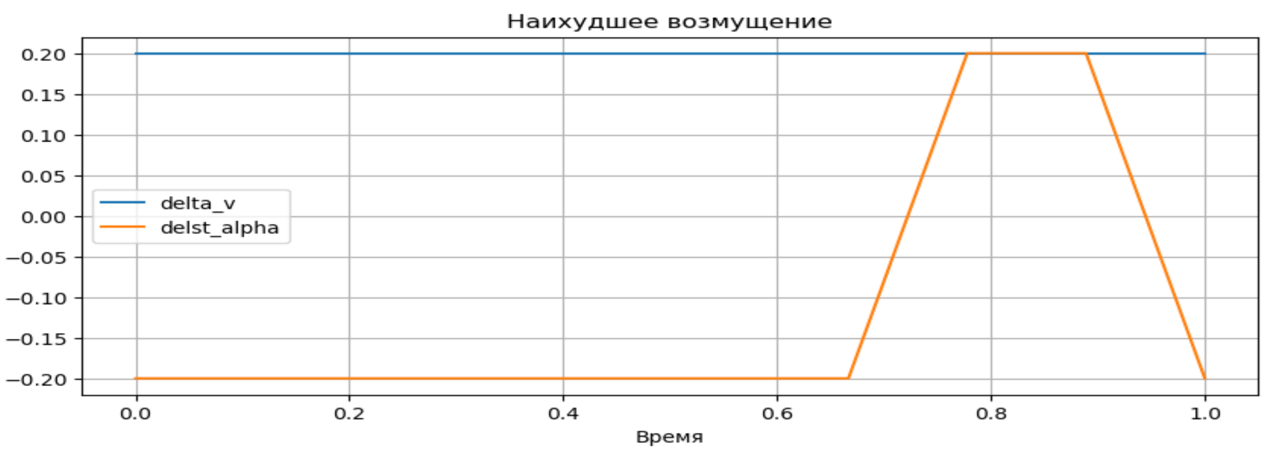

Рис. 6: Наихудшие возмущения

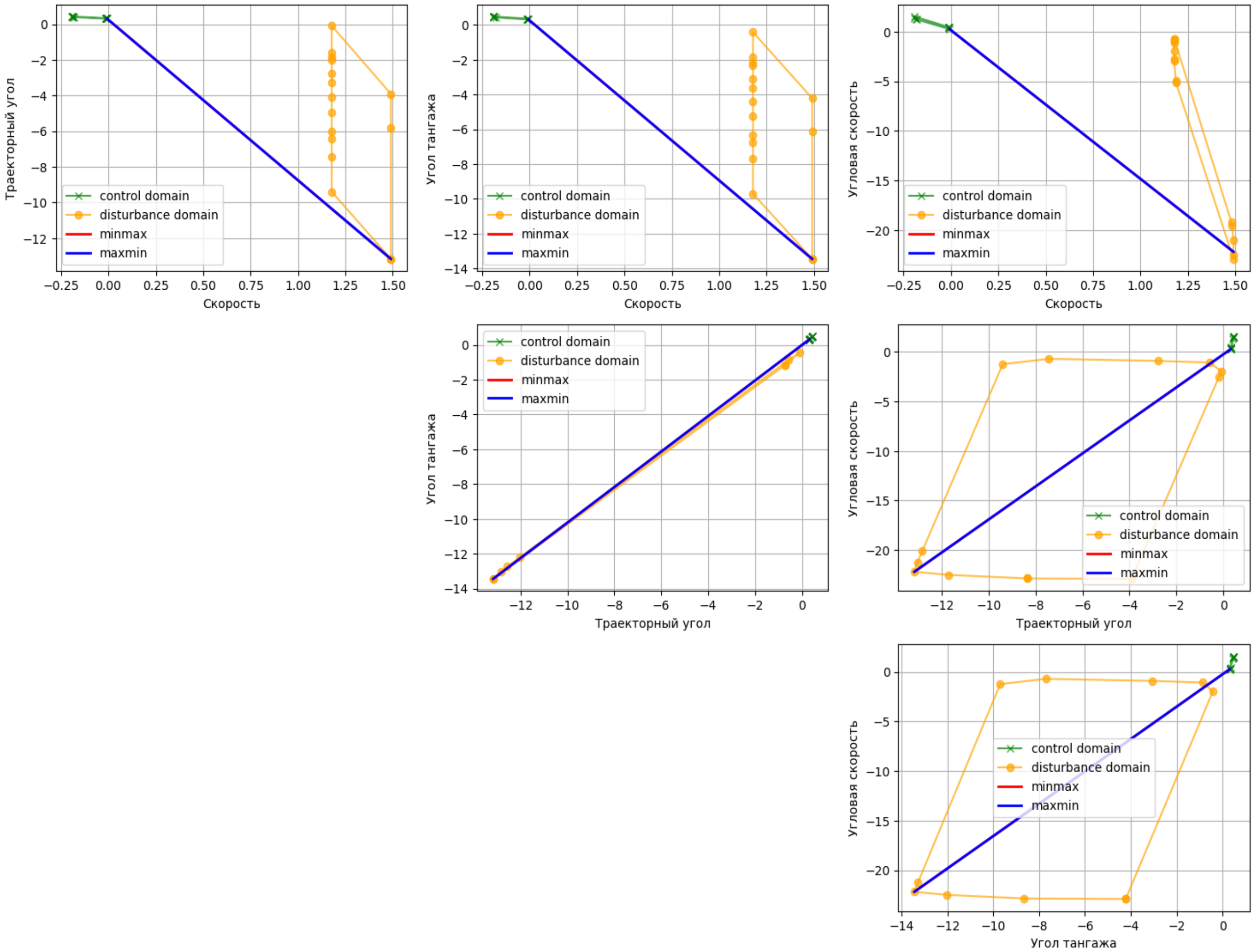

Рис. 7: Наличие седловой точки по каждой из проекции

Полученные результаты дают нам возможность построения методики максиминного тестирования качества управления ЛА:

- При воздействии наихудших возмещений моделируется система (14) с применением тестируемого алгоритма управления $\tilde{u}(t)$. Определяется точка $\tilde{z}(t_k)$ и вычисляется значение $\tilde{\rho}(y^0, \tilde{z})$.
- Вычисляется оценка результата тестирования алгоритма управления в стобальной шкале $100 \cdot \dfrac{\rho_0}{\tilde{\rho}}$

6 Заключение

В данной работе был рассмотрен и проанализирован процесс спуска самолета по глиссаде. Были выведены и линеаризованы уравнения движения самолета. Также в учебных целях были рассмотрены методы построения областей достижимости с помощью решения задачи Булгакова и методика максиминного тестирования. Было промоделировано поведение траектории самолета Як-55 и установлены границы применения линеаризованных урвнений движения. Также выявлено наличие положения равновесия в геометрической игре на областях достижиности и, следовательно, предложена методика максиминного тестирования качества управления самолетом Як-55.

В ходе работы накладывалось множество ограничений и допущений, что приводит к сужению области реального применения полученных результатов. Отсюда возникает необходимость в развитии теории максиминного тестирования и сопутствующих методов, которые будут работоспособны даже в применении к таким сложным системам, как самолет.

Список литературы

[1] Александров Владимир Васильевич, Лемак Степан Степанович, and Парусников Николай Алексеевич. Лекции по механике управляемых систем // М.: Макс Пресс. — 2012.

[2] Александров Владимир Васильевич и Блаженнова-Микулич Л Ю и Гутпиерес-Ариас И М и Лемак Степан Степанович. Максиминное тестирование точности стабилизации и седловые точки в геометрических играх // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2005. — no. 1. — P. 43–50.

[3] Булгаков Б.В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах // Докл. АН СССР. — 1946. — Vol. 51. — P. 312.

[4] Зенкевич НА, Петросян ЛА, and Семина ЕА. Теория игр // Высшая школа. — 1998.

[5] Коровин А.Е и Новиков Ю.Ф. Практическая аэродинамика и динамика полета самолетов Як-52 и Як-55 // М.: ДОСААФ. — 1989.