IFT 1215 A20 - Introduction aux systèmes informatiques
Démonstration Semaine 5
Solutionnaire

Blanche Mongeon et Alexandre Ruest

2 octobre 2020

1. Convertir les nombre suivants à un format à virgule flottante. Utiliser un format binaire sur 32bit : 1 bit de signe, suivit de 8 bits d'exposant avec un excentrement de 127, suivit d'une mantisse de 23bit implicitement préfixée par "1,".

   (a) 110110.011011_2

   Étape 1 : Normaliser le nombre
   Pour normaliser notre nombre, dont la mantisse est implicitement préfixée par "1," il faut ainsi tasser la virgule de 5 positions vers la droite :

   $$110110.011011_2 \rightarrow 1.10110011011_2 \cdot 2^5$$

   Étape 2 : L'exposant
   L'exposant donné au 2 est 5. Cependant, il faut prendre en compte l'excentrement $\implies \hat{e} = 5+127 = 132_{10}$. On convertit alors l'exposant en binaire, ce qui donne :

   $$= 132_{10} = 10000100_2$$

   Étape 3 : La mantisse
   La mantisse doit rentrer sur 23 bits. On a déjà 11 bits avec « 10110011011 », on complète ensuite avec des 0. On a alors que la mantisse est 10110011011000000000000.
   Étape 4 : Le résultat
   On a

   $$\begin{aligned} s &= 0 \\ \hat{e} &= 10000100 \\ m &= 10110011011000000000000 \end{aligned}$$

   ce qui donne que $110110.011011_2 = 01000010010110011011000000000000$ en format virgule flottante tel que défini dans la question.

   (b) -1.1111001_2

   Étape 1 : Normaliser le nombre
   Notre nombre est déjà normalisé, pas besoin de ne rien faire.

   Étape 2 : L'exposant
   On a que $-1.1111001_2 = -1.1111001_2 * 2^0$. Ainsi l'exposant donné au 2 est 0. En prenant en compte l'excentrement, on a que

   $$\hat{e} = 0 + 127 = 127_{10} = 1111111_2 = 01111111_2 \text{ (Notre exposant est sur 8 bits.)}$$

   Étape 3 : La mantisse
   On doit mettre notre mantisse sur 23 bits, ce qui donne : 11110010000000000000000
   Étape 4 : Le résultat
   On a :

   $$\begin{aligned} s &= 1 \text{ (Notre nombre est négatif.)} \\ \hat{e} &= 01111111 \\ m &= 11110010000000000000000 \end{aligned}$$

ce qui donne que $-1.1111001_2 = 10111111111111001000000000000000$ en format virgule flottante.

(c) $-4F7F_{16}$

Étape 1 : Convertir en binaire
On convertit $4F7F_{16}$ en binaire :

$$\begin{array}{cccc} 4 & F & 7 & F \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0100 & 1111 & 0111 & 1111 \end{array}$$

Ainsi, $-4F7F_{16} = -0100111101111111_2$

Étape 2 : Normaliser le nombre
On trouve que $-0100111101111111_2 = -1.00111101111111_2 \cdot 2^{14}$

Étape 3 : L'exposant
On a que que $\hat{e} = e + 127 = 14 + 127 = 141_{10} = 10001101_2$

Étape 4 : La mantisse
On a que $m = 00111101111111$ tient sur 14 bits. Or, on a besoin d'une mantisse sur 23 bits $\Longrightarrow m = 00111101111111000000000$

Étape 5 : Le résultat
On a :

$$\begin{aligned} s &= 1 \text{ (Notre nombre est négatif.)} \\ \hat{e} &= 10001101 \\ m &= 00111101111111000000000 \end{aligned}$$

ce qui donne que $-4F7F_{16} = 11000110100111101111111000000000$ en format à virgule flottante.

(d) 0.00000000111111_2

Étape 1 : Normaliser le nombre
$0.00000000111111_2 = 1.11111_2 \cdot 2^{-9}$

Étape 2 : L'exposant
On a que $0.00000000111111_2 = 1.11111_2 \cdot 2^{-9}$. Ainsi l'exposant donné au 2 est -9. En prenant en compte l'excentrement, on a que

$$\hat{e} = -9 + 127 = 118_{10} = 1110110_2 = 01110110_2 \text{ (Notre exposant est sur 8 bits.)}$$

Étape 3 : La mantisse
On doit mettre notre mantisse sur 23 bits, ce qui donne : 11111000000000000000000

Étape 4 : Le résultat
On a :

$$\begin{aligned} s &= 0 \text{ (Notre nombre est positif.)} \\ \hat{e} &= 01110110 \\ m &= 11111000000000000000000 \end{aligned}$$

ce qui donne que $0.00000000111111_2 = 00111011011111000000000000000000$ en format à virgule flottante.

(e) $0.1100_2 \times 2^{36}$

Étape 1 : Normaliser le nombre
$0.1100_2 \times 2^{36} = 1.100_2 \cdot 2^{-1} \times 2^{36} = 1.100_2 \cdot 2^{35}$

Étape 2 : L'exposant
On a que $0.1100_2 \times 2^{36} = 1.100_2 \cdot 2^{35}$. Ainsi l'exposant donné au 2 est 35. En prenant en compte l'excentrement, on a que

$$\hat{e} = 35 + 127 = 162_{10} = 10100010_2$$

Étape 3 : La mantisse
On doit mettre notre mantisse sur 23 bits, ce qui donne : 10000000000000000000000

Étape 4 : Le résultat
On a :

$$\begin{aligned} s &= 0 \text{ (Notre nombre est positif.)} \\ \hat{e} &= 10100010 \\ m &= 10000000000000000000000 \end{aligned}$$

ce qui donne que $0.1100_2 \times 2^{36} = 01010001010000000000000000000000$ en format à virgule flottante.

(f) $0.1100_2 \times 2^{-36}$
Étape 1 : Normaliser le nombre
$0.1100_2 \times 2^{-36} = 1.100_2 \cdot 2^{-1} \times 2^{-36} = 1.100_2 \cdot 2^{-37}$

Étape 2 : L'exposant
On a que $0.1100_2 \times 2^{-36} = 1.100_2 \cdot 2^{-37}$. Ainsi l'exposant donné au 2 est -37. En prenant en compte l'excentrement, on a que

$$\hat{e} = -37 + 127 = 90_{10} = 01011010_2$$

Étape 3 : La mantisse
On doit mettre notre mantisse sur 23 bits, ce qui donne : 10000000000000000000000
Étape 4 : Le résultat
On a :

$$\begin{aligned} s &= 0 \text{ (Notre nombre est positif.)} \\ \hat{e} &= 01011010 \\ m &= 10000000000000000000000 \end{aligned}$$

ce qui donne que $0.1100_2 \times 2^{36} = 00101101010000000000000000000000$ en format à virgule flottante.

2. Déterminer la représentation décimale des nombres suivants encodés en format virgule flottante, tel que décrit au numéro 1.

(a) $C2F00000_{16}$
Étape 1 : Convertir en binaire

C	2	F	0	0	0	0	0
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1100	0010	1111	0000	0000	0000	0000	0000

Étape 2 : Décortiquer le nombre en binaire
On a que le premier bit représente le signe, les 8 bits suivants représentent l'exposant avec un excentrement de 127, et les 23 bits suivants représentent la mantisse avec un "1," préfixé implicitement. Ainsi :

$$\begin{aligned} s &= 1 \\ \hat{e} &= 10000101_2 = 133_{10} \implies e = \hat{e} - 127 = 133 - 127 = 6 \\ m &= 11100000000000000000000 \end{aligned}$$

Étape 3 : Le résultat
Le fait que le bit encodant le signe soit un 1 nous indique que le nombre est négatif. Il ne faut pas oublier que la mantisse était implicitement précédée d'une "1.". L'étape précédente nous montre donc que le nombre cherché était :

$$-\mathbf{1.}111 \cdot 2^6$$

La question nous demandait de donner le nombre en décimal. Ainsi :

$$\begin{aligned} -1.111_2 \cdot 2^6 &= -1111000_2 \\ &= -120_{10} \end{aligned}$$

(b) $3C540000_{16}$
Étape 1 : Convertir en binaire

3	C	5	4	0	0	0	0
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0011	1100	0101	0100	0000	0000	0000	0000

Étape 2 : Décortiquer le nombre en binaire
On a que le premier bit représente le signe, les 8 bits suivants représentent l'exposant avec un excentrement de 127, et les 23 bits suivants représentent la mantisse avec un "1," préfixé implicitement. Ainsi :

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ \hat{e} &= 01111000_2 = 120_{10} \implies e = \hat{e} - 127 = 120 - 127 = -7 \\ m &= 10101000000000000000000 \end{aligned}$$

Étape 3 : Le résultat
Le fait que le bit encodant le signe soit un 0 nous indique que le nombre est positif. Il ne faut pas oublier que la mantisse était implicitement précédée d'une "1.". L'étape précédente nous montre donc que le nombre cherché était :

$$\mathbf{1.}10101 \cdot 2^7$$

La question nous demandait de donner le nombre en décimal. Ainsi :

$$\begin{aligned} 1.10101_2 \cdot 2^{-7} &= 0.000000110101_2 \cdot 2^0 \\ &= 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-10} + 2^{-12} \\ &\approx 0.012939453_{10} \end{aligned}$$

3. Dans l'ordinateur Pink-Lemon-8, les nombres à virgule flottante sont stocké au format :

$$SEEMMMM_8$$

où chaque chiffre, y compris l'exposant, sont en octal. L'exposant est stocké avec un excentrement (ou excédent, ou *excess*) de 40_8. La mantisse est stockée avec un signe et une magnitude, où le signe est 0 pour les nombres positifs et 4 pour les nombres négatifs. La virgule implicite dans la mantisse est à la fin : $MMMM$ se lit comme $MMMM,0$.
Soit le nombre en virgule flottante représenté par :

$$4366621_8$$

(a) Quel nombre est-ce (en octal) ?

On a :

$$\begin{aligned} s &= 4 && \implies \text{ négatif} \\ \hat{e} &= 36_8 && \implies e = \hat{e} - 40_8 = 36_8 - 40_8 = 2_8 = 2_{10} \\ m &= 6621_8 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que le nombre représenté était (en octal) :

$$(-1) \cdot 6621.0_8 \cdot 8^{-2} = -66.21_8$$

(b) Convertir ce nombre en décimal ?

$$\begin{aligned} -66.21_8 &= -(6 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} + 1 \cdot 8^{-2}) \\ &= -\frac{3473}{64} \end{aligned}$$

(c) Comment change la magnitude du nombre si on change l'exposant de 36 à 37 ? Que serait cette nouvelle magnitude en décimal ?
Si l'exposant encodé augmente de 1, alors l'exposant représenté augmente également de 1. Le nombre est alors $-6621.0_8 \cdot 8^1 = -6.621_8$, ce qui est **8 fois plus grand** que ce que nous avions trouvé initialement.

4. Soit le nombre 19557,

(a) Convertir ce nombre en représentation à virgule flottante $SEEMMMM_{10}$ avec excentrement de 40, où la virgule implicite de la mantisse est au tout début (i.e. $0, MMMM$), et où le signe est 1 pour positif et 7 pour négatif.

Étape 1 : Normaliser le nombre

La virgule implicite est au tout début $\implies 19557_{10} = 0.19557 \cdot 10^5$

Étape 2 : L'exposant

On a que $19557_{10} = 0.19557 \cdot 10^5$. Ainsi l'exposant donné à 10 est 5. En prenant en compte l'excentrement, on a que

$$\hat{e} = 5 + 40 = 45_{10}$$

Étape 3 : La mantisse

On doit mettre notre mantisse sur 4 chiffre, ainsi il faut l'arrondir. On a donc : $m = 1956$

Étape 4 : Le résultat

On a :

$$\begin{aligned} s &= 1 \text{ (Notre nombre est positif.)} \\ \hat{e} &= 45 \\ m &= 1956 \end{aligned}$$

ce qui donne que $19557_{10} = 1451956$ en format virgule flottante.

(b) Quel est l'intervalle de nombre qu'on peut représenter avec ce format ?

Le plus grand entier représentable dans ce format est encodé par 1999999, alors que le plus petit entier est simplement son équivalent négatif(7999999). Ainsi, l'intervalle de nombre représentable est donné par :

$$[-0.9999 \cdot 10^{99-40} = -0.9999 \cdot 10^{59}; 0.9999 \cdot 10^{99-40} = 0.9999 \cdot 10^{59}]$$

(c) Quelle est la représentation de -19557 ?

(d) -19557_{10} sera encodé de manière quasi identique que 19557_{10} : on ne change que le signe. Ainsi, la représentation en virgule flottante de -19557 est 7451956.

(e) Quelle est la représentation de 0.0000019557 ?

Il suffit de remarquer que 0.0000019557 est identique à 19557 à l'exposant près ; c'est donc tout ce qui va changer.

$$0.0000019557_{10} = 0.19557_{10} \cdot 10^{-5} \implies \hat{e} = -5 + 40 = 35$$

Ainsi, 0.0000019557 est représenté par 1351956.

5. Convertir 41.65_{10} en binaire.

Conversion d'un nombre fractionnaire

(a) On convertit la partie fractionnaire du nombre comme on convertit normalement un entier.

(b) Supposons qu'on veut convertir le nombre de la base a à la base b. On multiplie alors la partie décimale du nombre par b. À chaque itération de multiplication, on note la partie entière du résultat et on ne garde que la partie décimale pour la prochaine itération. On s'arrête dans deux circonstances :

i. On atteint la précision souhaitée (le nombre de chiffres notés) ;

ii. On décèle une périodicité, c'est-à-dire un motif numérique qui se répète. On met alors une barre sur le motif dans le résultat.

Étape 1 : Partie entière

$41_{10} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 \implies 41_{10} = 101001_2$

Étape 2 : la partie décimale

0.65	$\cdot 2$	$=$	**1**.30	$10\overline{1001}$
0.30	$\cdot 2$	$=$	**0**.60	
0.60	$\cdot 2$	$=$	**1**.20	
0.20	$\cdot 2$	$=$	**0**.40	
0.40	$\cdot 2$	$=$	**0**.80	
0.80	$\cdot 2$	$=$	**1**.60	On recommence à la troisième ligne.

Étape 3 : Le résultat

En prenant les deux parties, on trouve que $41.65_{10} = 101001.10\overline{1001}_2$.