477

666

# Représentation des nombres entiers

1

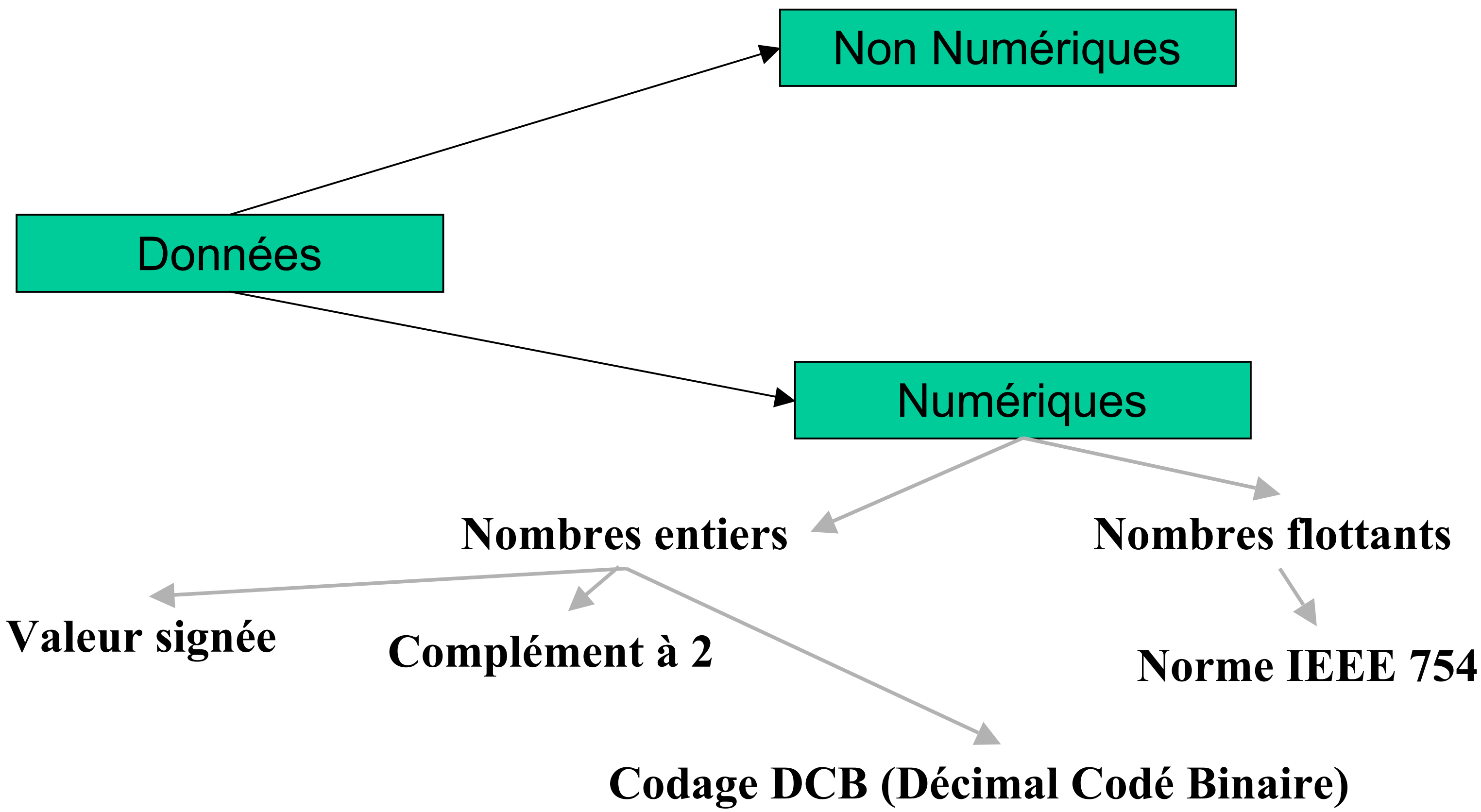
A99ACF

7652993002

110110110110111011

3419

# Représentation des données



# Représentation des données

- Toutes les données sont stockées sous forme binaire de tailles différentes
- Ces données peuvent être interprétées pour représenter des données de différents types et formats via un langage de programmation
  - float, char, bool, int, etc.

# Représentation des nombres

- L'arithmétique utilisée par les ordinateurs
  - Précision finie (et fixe)
    - Limitations
  - Une notation binaire
- Représentation s'effectue selon une chaîne binaire d'une longueur fixée à n bits
  - Sur 8 bits, 16 bits …

# Entier

- Pas de partie fractionnaire

Exemples:

| | |
|---|---|
| Exemples: | -2022 |
| | -213 |
| | 0 |
| | 1 |
| | 666 |
| | 54323434565434 |

# Représentation des nombres entiers signés

- Conventions
  - Valeur signée
  - Codage DCB (Décimal Codé Binaire)
  - Complément à 1
  - Complément à 2

# Représentation des nombres entiers signés

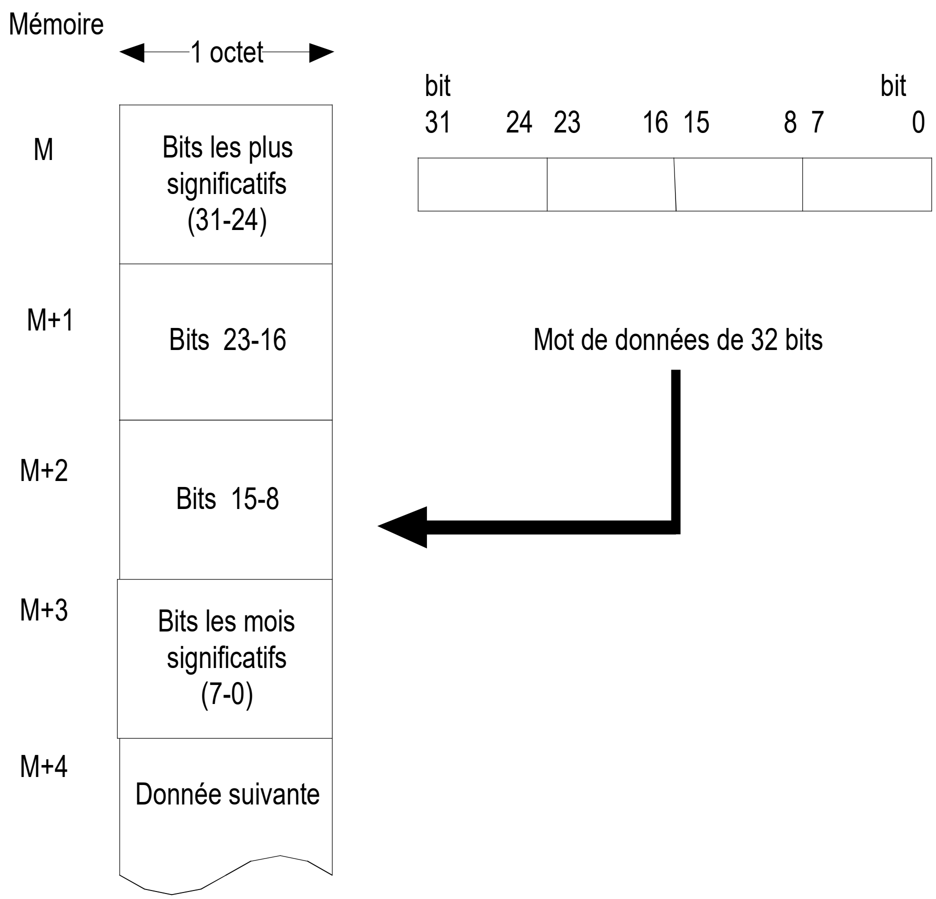
- Le choix entre des conventions
  - Le constructeur de la machine
  - Éventuellement par le programmeur
    - Langage C

      **int** – 2 octets, complément à 2

      unsigned short - 8 bits, non signé

# Entiers positifs

- Représentation des entiers positifs
  - Une approche évidente
    - Codage en binaire
    - 8 bits => 256 valeurs
    - 32 bits => 4294967296 valeurs



# En Général (binaire)

| Nombre de bits | Binaire | |
|---|---|---|
| | Min | Max |
| $n$ | 0 | $2^n - 1$ |

Important !!

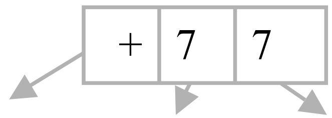
de 0 à $(2^n - 1)$ => $2^n$ valeurs différentes !

# Convention du codage DCB

- Décimal Codé Binaire
  - Chaque chiffre du nombre $N_{10}$ est codé par son équivalent binaire
    - 10 valeurs différentes
    - 4 bits
    - Le codage du signe peut suivre différentes conventions
      - + : $1011_2$
      - - : $1101_2$

# Convention du codage DCB

- Exemple




$+77_{10}$ : $1011\ 0111\ 0111_2$

$-77_{10}$ : $1101\ 0111\ 0111_2$

- Préféré pour certaines applications (affaires) où il est nécessaire d’avoir une représentation exacte du nombre décimal
- Conversion DCB→caractère est facile

# Intervalles de formats de données

| Nb. de bits | Binaire | BCD | ASCII |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 – 1 | | |
| 2 | 0 – 3 | | |
| 3 | 0 – 7 | | |
| 4 | 0 – 15 | 0 – 9 | |
| 5 | 0 – 31 | | |
| 6 | 0 – 63 | | |
| 7 | 0 – 127 | | |
| 8 | 0 – 255 | 0 – 99 | 0 – 9 |
| 9 | 0 – 511 | | |
| 16 | 0 - 65,535 | 0 – 9999 | 0 – 99 |
| 24 | 0 – 16,777,215 | 0 – 999999 | 0 – 999 |
| Etc. | | | |

Le nombre de valeurs codées en DCB est moins important qu'en binaire

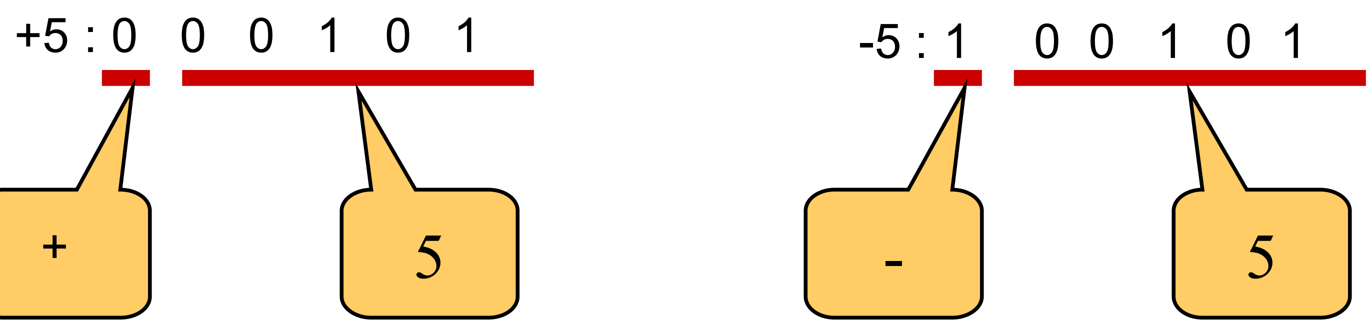
# Convention du codage DCB

- Inconvénients
  - Codage ne se prête pas directement aux opérations arithmétiques
    - Résultat – un code binaire sans signification
  - L'arithmétique en DCB est plus difficile qu'en binaire et plus lente

| | | | |
|---|---|---|---|
| 76 → | $0111\ 0110_{bcd}$ | | convertir les sommes partielles |
| x 7 → | $0111_{bcd}$ | | |
| 42 → | $101010_{bin}$ | → | $0100\ 0010_{bcd}$ |
| 49 → | $110001_{bin}$ | → | $+0100\ 1001_{bcd}$ |
| $4^{1}32$ → | | | 0100 1101 0010 |
| 13 ← ajuster la retenue | | convertir 13 en DCB | +0001 0011 |
| 532 → | | | 0101 0011 0010 = 532 en DCB |

# Convention de la valeur signée

- Réserver un bit pour le signe (le bit le plus à gauche); les autres bits codent la valeur absolue du nombre
  - 0 = « + »   et   1 = « - »
- Représentation de +5 et -5 en valeur signée sur 6 bits



# Convention de la valeur signée

- Difficultés: Deux représentations de la valeur zéro
  - Représentation en valeur signée sur 6 bits

    0 : 0 0 0 0 0 0 => + 0
    0 : 1 0 0 0 0 0 => - 0

  - La réalisation d'une opération de type soustraction nécessite un circuit particulier différent de celui permettant la réalisation des additions
  - Le système doit tester à la fin de chaque calcul pour assurer qu'il n'y a qu'un seul zéro

# Intervalles des nombres

| Longueur de la chaîne de bits | Intervalle en base 10 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Non signé | | Valeur signée | |
| | Min | Max | Min | Max |
| 1 | 0 | 1 | | |
| 2 | 0 | 3 | -1 | 1 |
| 3 | 0 | 7 | -3 | 3 |
| 4 | 0 | 15 | -7 | 7 |
| 5 | 0 | 31 | -15 | 15 |
| 6 | 0 | 63 | -31 | 31 |
| Etc. | | | | |

La moitié des codes est affectée au nombres positifs et l'autre moitié au nombres négatifs

# Convention de la valeur signée

| Nombre de bits | Valeur signée | |
|---|---|---|
| | Min | Max |
| *n* | $-(2^{n-1} - 1)$ | $2^{n-1} - 1$ |

# Convention du complément

- Complément: soustraire une valeur de la valeur base
- Complément à 1(restreint ou logique), base 2
  - Complément à 9 en base 10
- Complément à 2 (vrai), base 2
  - Complément à 10, base 10

# Complément logique

- En base 10
- Supposons
  - 3 digits décimaux
  - Diviser l'intervalle de représentation

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 500 | Base 10 | 999 | 0 | Base 10 | 499 |
| $-499_{10}$ | encodage | $-0_{10}$ | $0_{10}$ | encodage | $499_{10}$ |

  - 5xx, 6xx, 7xx, 8xx, 9xx – nombres négatifs
  - Complément → 999-Nombre

# Complément logique

- Complément à 9
- Représenter $-467_{10}$ en complément à 9 (3 digits)?

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\ 467 \\ \hline 532 \end{array} \qquad -467_{10} \rightarrow 532$$

- Représenter $-467_{10}$ en complément à 9 (4 digits)?

$$\begin{array}{r} 9999 \\ -\ 467 \\ \hline 9532 \end{array} \qquad -467_{10} \rightarrow 9532$$

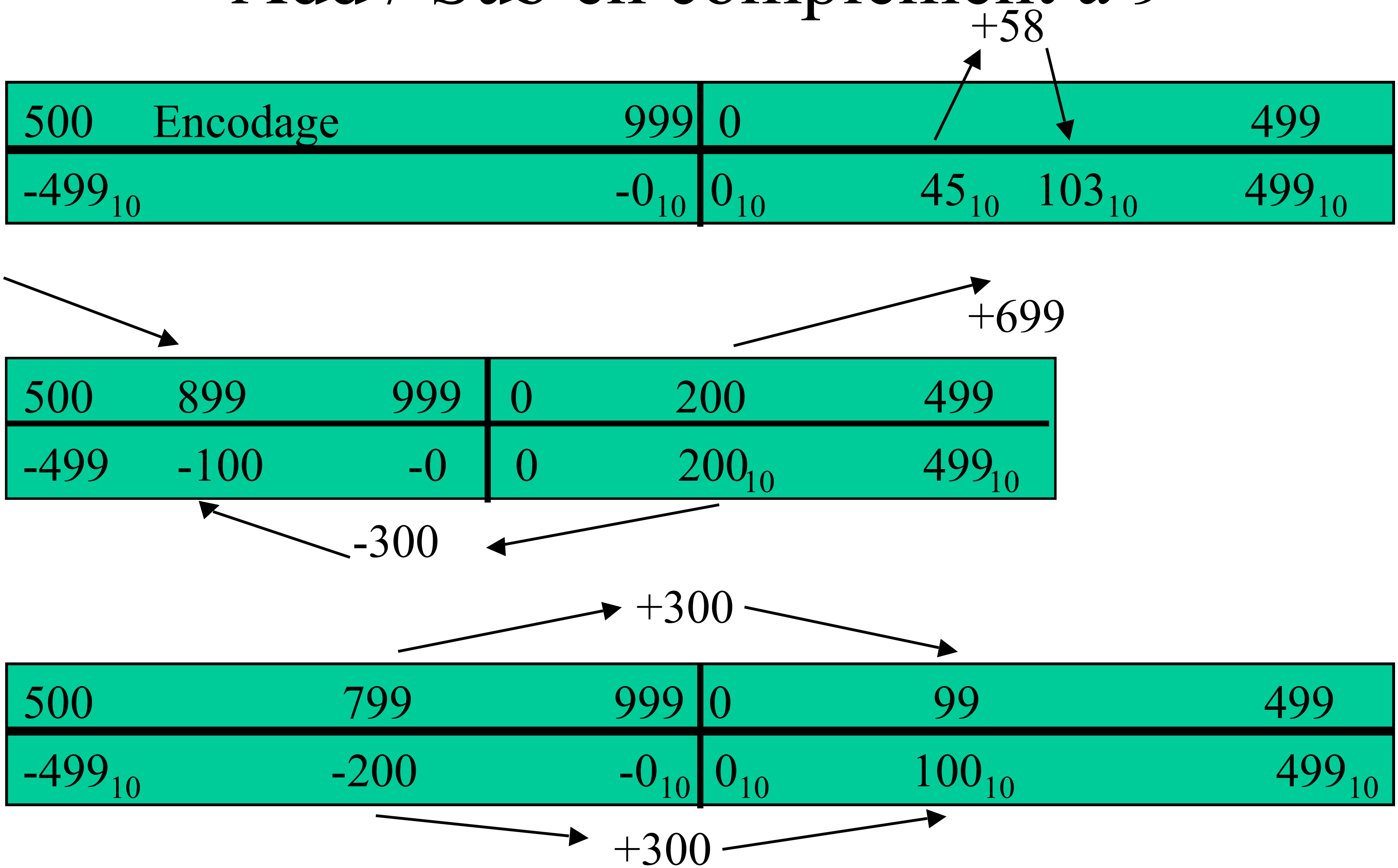
# Complément logique

- Complément à 9
- Quelles sont la valeur du signe et la magnitude de 9990 lorsque celui-ci est une représentation en complément à 9 sur 4 digits?
  - Le premier digit est supérieur à 4, donc → **signe négative**

$$\begin{array}{r} \mathbf{9999} \\ \mathbf{-9990} \\ \hline \mathbf{0009} \end{array}$$

**Donc, 9990 en complément à 9 sur 4 digits représente: -9**

# Add / Sub en complément à 9



# Add / Sub en complément à 9

- En conséquence, une procédure pour additionner 2 chiffres dans le cas où le résultat s'étend au-delà du nombre maximum de digits consiste à ajouter la dernière retenue

$-200_{10} + 100_{10}$ en complément à 9 sur 3 digits

$-200_{10} + 300_{10}$ en complément à 9 sur 3 digits

$$\begin{array}{r} 799 \\ 100 \\ \hline 899 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 799 \\ 300 \\ \hline 1099 \\ 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

# Add / Sub en complément à 9

- Pour soustraire, on prend le complément du chiffre que l'on doit soustraire et on réalise l'addition
  - Possibilité de débordement (*overflow)*
    - Exemple: 300 + 300 = 600 (-399)?
  - Si les deux entrées de l'addition ont le même signe et le signe du résultat est différent alors on a un problème de débordement

# Convention du complément à 1

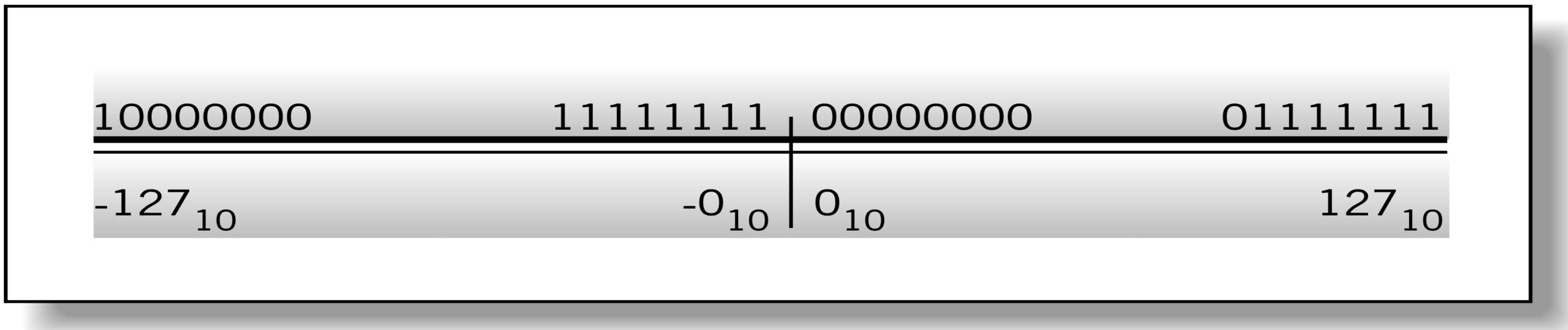
- Convention du complément à 1
    - 0 dans le bit le plus à gauche => « + »
    - 1 => « - »
  - Nombre positif
    - Représentation binaire sur n bits

      6: 0 0 0 1 1 0 (6 bits)
  - Nombre négatif
    - Inverser tous les bits 0 → 1 et 1 → 0

      -6: 1 1 1 0 0 1 (6 bits)

# Convention du complément à 1

- Intervalle des nombres représentables en complément à 1 sur 8 bits




Englander: The Architecture of Computer Hardware and Systems Software, 2nd edition Chapter 4, Figure 04-10

- Cette méthode est aujourd'hui obsolète

# Convention du complément à 1

- Inconvénient important
  - Deux représentation distinctes de la valeur 0

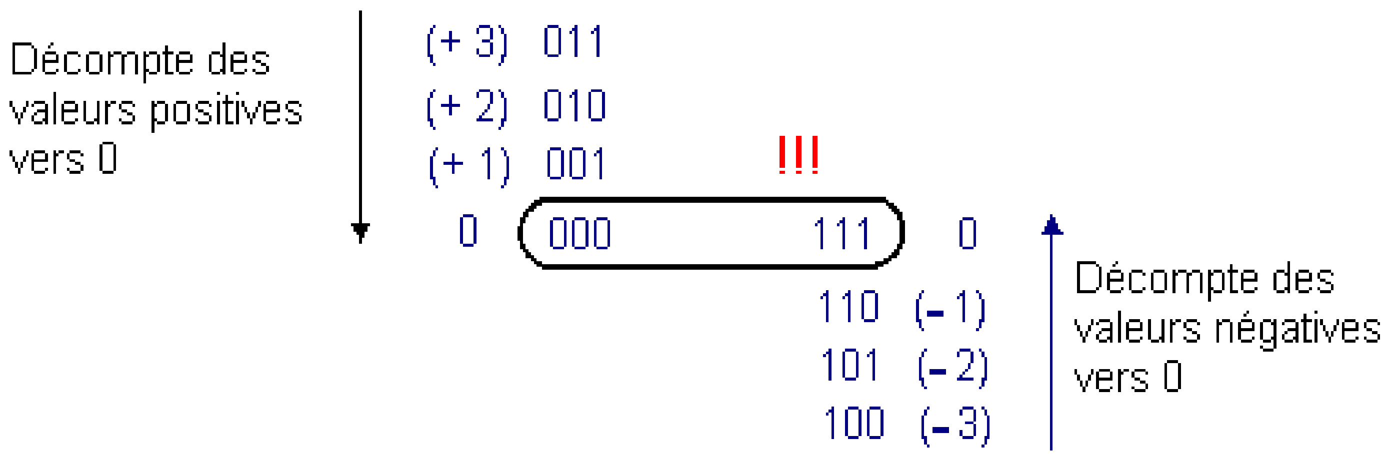



Fig. 28. - Double représentation possible du zéro.

# Add / Sub en complément à 1

+58

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10000000 | 11111111 | 00000000 | | | 01111111 |
| $-127_{10}$ | $-0_{10}$ | $0_{10}$ | $45_{10}$ | $103_{10}$ | $127_{10}$ |

$$
\begin{array}{l}
00101101 = 45_{10} \\
00111010 = 58_{10} \\
\hline
01100111 = 103_{10}
\end{array}
$$

# Add / Sub en complément à 1

+106

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10000000 | | 11111111 | 00000000 | | 01111111 |
| $-127_{10}$ | $-2_{10}$ | $-0_{10}$ | $0_{10}$ | $103_{10}$ | $127_{10}$ |

$$
\begin{array}{rl}
01101010 & = 106_{10} \\
11111101 & = -2_{10} \\
\hline
1\ 01100111 & = 103_{10} \\
+1 & \\
\hline
01101000 & = 104_{10}
\end{array}
$$

# Complément arithmétique (vrai)

- En base 10
  - Supposons
    - 3 digits décimaux
    - Diviser l'intervalle de représentation

| | | | |
|---|---|---|---|
| 500 | 999 | 0 | 499 |
| $-500_{10}$ | $-001_{10}$ | $0_{10}$ | $499_{10}$ |

  - 5xx, 6xx, 7xx, 8xx, 9xx – nombres négatifs
  - Trouver un complément sur 3 digits, 2 méthodes:
    - 1) 1000-Nombre
    - 2) Complément à 9 sur 3 digits + 1

# Complément vrai

- Complément à 10
- Représenter $-467_{10}$ en complément à 10 (3 digits)?

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -\ 467 \\ \hline 533 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 532 \\ +\ \ 1 \\ \hline 533 \end{array} \qquad -467_{10} \rightarrow 533$$

- Représenter $-467_{10}$ en complément à 10 (4 digits)?

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -\ \ 467 \\ \hline 9533 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9532 \\ +\ \ 1 \\ \hline 9533 \end{array} \qquad -467_{10} \rightarrow 9533$$

# Complément vrai

- Complément à 10
- Quelles sont la valeur du signe et la magnitude de 9990 lorsque celui-ci est une représentation en complément à 10 sur 4 digits?
  - Le premier digit est supérieur à 4, donc → **signe négative**

$$\begin{array}{r} \mathbf{10000} \\ \mathbf{-9990} \\ \hline \mathbf{0010} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{0009} \\ \mathbf{+\quad 1} \\ \hline \mathbf{0010} \end{array}$$

**Donc, 9990 en complément à 10 sur 4 digits représente: -10**

# Complément vrai

- Complément à 10
- Additions simples!

$-200_{10} + 100_{10}$ en complément à 10 sur 3 digits

$-200_{10} + 300_{10}$ en complément à 10 sur 3 digits

$$\begin{array}{r} 800 \\ +\ 100 \\ \hline 900 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 800 \\ +\ 300 \\ \hline 1100 \end{array}$$

On laisse tomber la retenue

- Toute retenue au-delà du nombre de digit n'est pas prise en compte

# Convention du complément à 2

- **Convention la plus utilisée**
  - 0 dans le bit le plus à gauche signifie le nombre positif => « + »
  - 1 => « - »

- Nombre positif
  - Représentation binaire sur ***n*** bits

    +6 :   0  0  0  1  1  0  (6 bits)

- Nombre négatif –***N***
  1. Soustraire la valeur au modulus
  2. Complément à 1 de son équivalent positif ,+*N*, et ajouter 1
     - Inverser tous les bits 0 → 1 et 1 → 0 dans la représentation binaire de +*N* sur ***n*** bits et ajouter la valeur 1

# Convention du complément à 2

- Exemple

6 (6 bits) : +6 => 0 0 0 1 1 0

-6 (6 bits)

- 1. Nombre positif 6 sur 6 bits => 0 0 0 1 1 0

2. Complément à 1

**1.**

0 0 0 1 1 0
1 1 1 0 0 1
\+ 1 Ajouter 1
1 1 1 0 1 0 Complément à 2

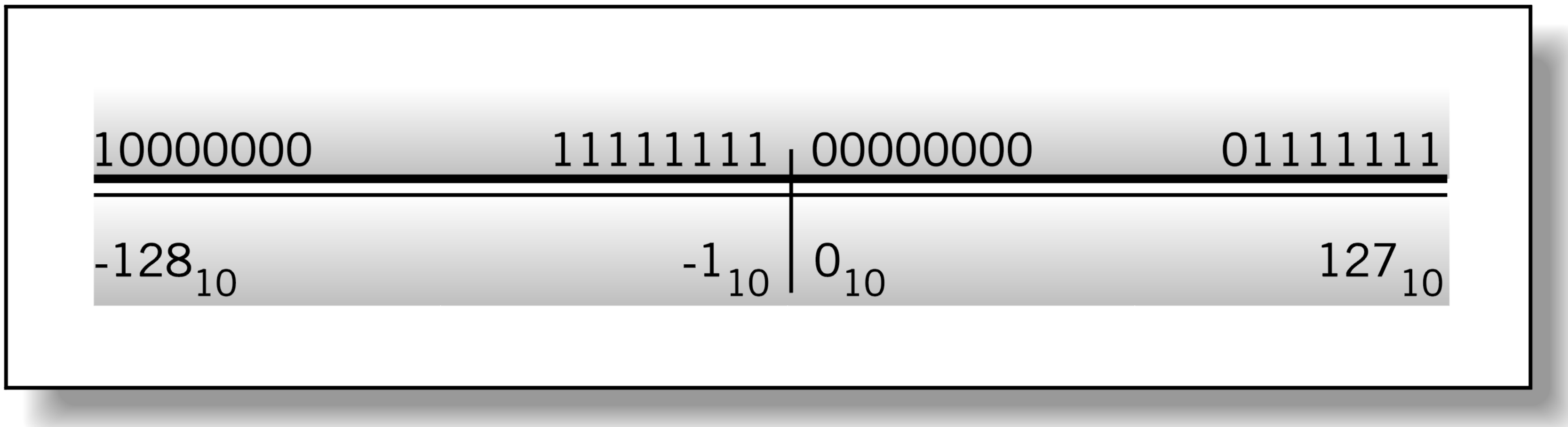
**2.**

1000000
-000110
111010

-6 c-à-2 sur 6 bits => 111010

# Convention du complément à 2

- Intervalle des nombres représentables en complément à 2 sur 8 bits




Englander: The Architecture of Computer Hardware and Systems Software, 2nd edition
Chapter 4, Figure 04-12

# Signe

- Convention du complément à 2, le bit de poids fort (MSB) :
  - 0 = nombre positif
  - 1 = nombre négatif

5

+ 5 (6 bits): 0 0 0 1 0 1

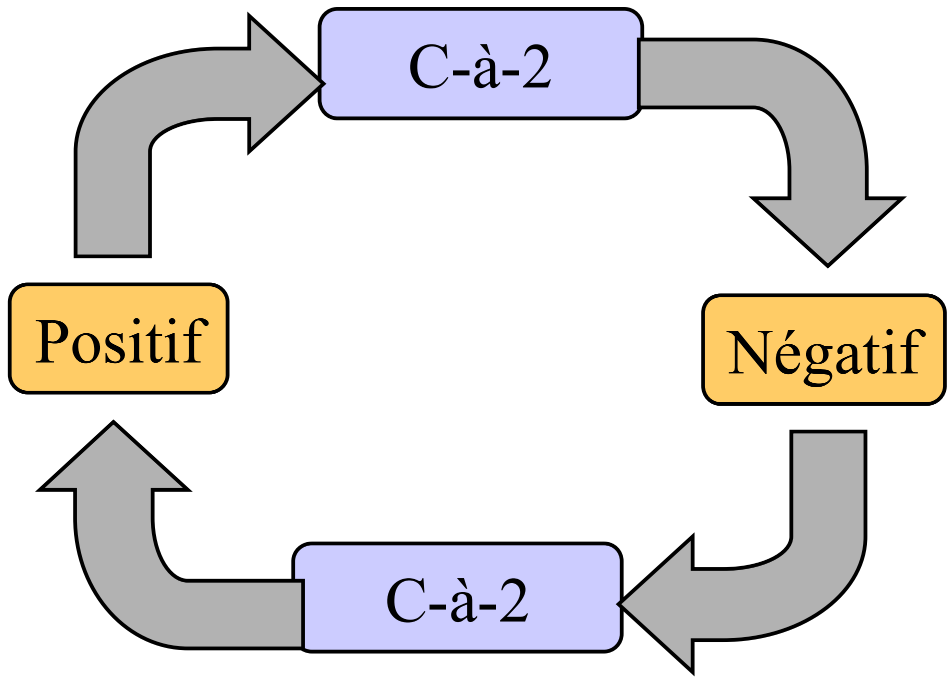
positif

Complément à 2 de -5

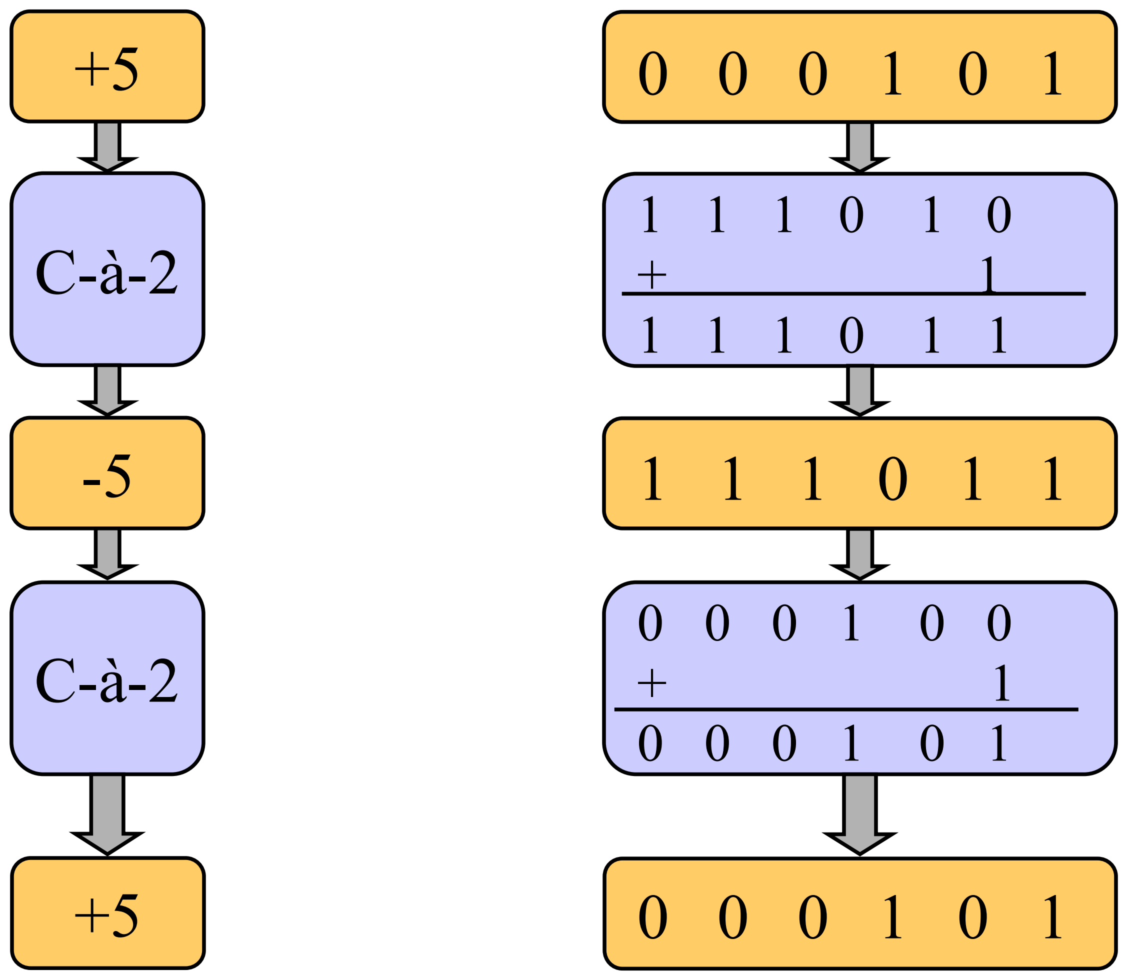
- 5 (6 bits): 1 1 1 0 1 1

négatif

# Notion de “Complément”



# Exemple


+5
C-à-2
-5
C-à-2
+5
0 0 0 1 0 1
1 1 1 0 1 0
+ 1
1 1 1 0 1 1
1 1 1 0 1 1
0 0 0 1 0 0
+ 1
0 0 0 1 0 1
0 0 0 1 0 1

# Exercice – Conversion en C-à-2

- Représenter $-20_{10}$ en c-à-2 sur 8-bits
  Réponse:

- 1100011 est une représentation en c-à-2 sur 7-bits. Donnez la valeur?

  Réponse :

# Détails pour -20 $\longrightarrow$ 11101100

**-20$_{10}$:** Valeur positive sur 8 bits = **00010100**

"Inverser": Complément à 1 **11101011**

Ajoute 1: + 1

**11101100**

# Détails pour 1100011 → -29

| | |
|---|---|
| C-à-2: Nombre négatif | **1100011** |
| “Inverser”: | **0011100** (Complément à 1) |
| Ajouter 1: | + 1 |
| Valeur absolue | **0011101 = 29** |
| Nombre: = | **- 29** |

# Exercice – Conversion en C-à-2

Réponse

- Représenter $-20_{10}$ en c-à-2 sur 8-bits

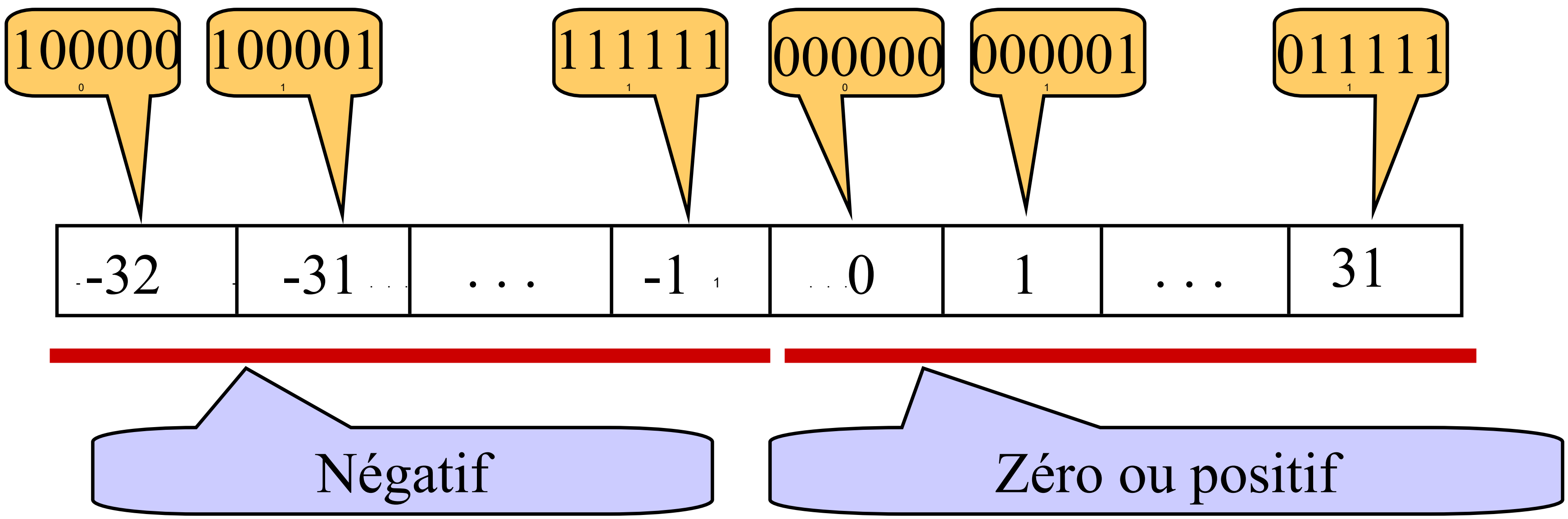
  Réponse: 11101100

- 1100011 est une représentation en c-à-2 sur 7-bits. Donnez la valeur?

  Réponse : -29

# Intervalle des nombres représentables en complément à 2

- 6 bits



# Intervalles des nombres

| Nb. de bits | Binaire | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Non signés | | Valeur signée | | C-à-2 | |
| | Min | Max | Min | Max | Min | Max |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | 3 | -1 | 1 | -2 | 1 |
| 3 | 0 | 7 | -3 | 3 | -4 | 3 |
| 4 | 0 | 15 | -7 | 7 | -8 | 7 |
| 5 | 0 | 31 | -15 | 15 | -16 | 15 |
| 6 | 0 | 63 | -31 | 31 | -32 | 31 |
| Etc. | | | | | | |

# En Général (intervalles)

| Nb. de bits | Binaire | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Non signés | | Valeur signée | | Complément à 2 | |
| | Min | Max | Min | Max | Min | Max |
| $n$ | 0 | $2^n - 1$ | $-(2^{n-1} - 1)$ | $2^{n-1}-1$ | $-2^{n-1}$ | $2^{n-1} - 1$ |

# Addition en complément à 2

- Facile
- Pas des règles spéciales
- Simplement additionner

# +5 plus -5?

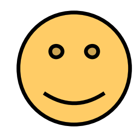
- Zéro, bien sûr, mais on va voir?

**Valeur signée**

| | |
|---|---|
| +5 | 0 0 0 1 0 1 |
| -5 | 1 0 0 1 0 1 |
| -10 | 1 0 1 0 1 0 |

**C-à-2**

| | |
|---|---|
| +5 | 0 0 0 1 0 1 |
| -5 | 1 1 1 0 1 1 |
| 0 | ~~(1)~~0 0 0 0 0 0 |



# Soustraction en complément à 2

- Facile
- Pas de règles spéciales
- Simplement additionner

$$A - B = A + (-B)$$

additionner

Complément à 2 de B

# 10 - 3?

- 7, bien sûr,
- On utilise une représentation sur 6-bits

$$10 - 3 = 10 + (-3) = 7$$

| | | |
|---|---|---|
| -3 | | 000011 |
| | | 111100 |
| + | | 1 |
| | | 111101 |

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
(1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

# 10 – ( -3)?

- 13, bien sûr, mais…
- Représentation sur 6 bits

- ( - 3 ) = + 3

10 – (-3 ) = 13

| | |
|---|---|
| -3 | 000011 |
| | 111100 |
| + | 1 |
| | 111101 |
| | 000010 |
| + | 1 |
| | 000011 |

```
  0 0 1 0 1 0
  0 0 0 0 1 1
  -----------
  0 0 1 1 0 1
```

# Notion de carry et d'overflow

- Notion de carry = retenue
  - Lors d'une opération arithmétique effectuée sur des nombres de p bits, un p+1er bit peut être généré (bit de carry)

**Convention du c-à-2 sur 8 bits**

$$
\begin{array}{r}
0111\ 1111_2 \\
1111\ 1110_2 \\
\hline
1\ 0111\ 1101_2
\end{array}
$$

# Notion de carry et d’overflow

- Notion d’overflow ou de dépassement de capacité
  - Lors d’une opération arithmétique mettant en jeu des nombres de p bits et de même signe, le résultat peut se révéler être trop grand ou trop petit pour être représentable par la machine
    - Résultat est en dehors de l’intervalle des nombres représentables sur p bits par la convention choisie
    - Résultat => erroné
    - Dépassement de capacité

# Notion de carry et d'overflow

- Notion d'overflow ou de dépassement de capacité
  - Exemple

**Convention du c-à-2 sur 8 bits**

| | |
|---|---|
| $+127_{10}$ | $0111\ 1111_2$ |
| $+2_{10}$ | $0000\ 0010_2$ |
| $+129 \neq -127_{10}$ | $1000\ 0001_2$ |

Dépassement de capacité!!!

**Convention du c-à-2 sur 8 bits => [$-128_{10}$, $+127_{10}$]**

# "Overflows" et "Carries"

Convention c-à-2 sur 4 bits

(+4) + (+2)

| | |
|---|---|
| 0100 | no overflow, |
| 0010 | no carry |
| $0110 = (+6)$ | |

(+4) + (+6)

| | |
|---|---|
| 0100 | overflow, |
| 0110 | no carry |
| $1010 = (-6)$ | the result is incorrect |

(- 4) + (- 2)

| | |
|---|---|
| 1100 | no overflow, |
| 1110 | carry |
| $11010 = (-6)$ | ignoring the carry, |
| | the result is correct |

(- 4) + (- 6)

| | |
|---|---|
| 1100 | overflow |
| 1010 | carry |
| $10110 = (+6)$ | ignoring the carry, |
| | the result is incorrect |