(1)

$$H = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{p_+^2 + p_-^2}{2m} + \frac{1}{2} m \left(\omega_+^2 q_+^2 + \omega_-^2 q_-^2 \right)$$

$$a_\pm := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_\pm + \partial_{x_\pm} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\underbrace{\sqrt{\frac{m\omega_\pm}{\hbar}}\, q_\pm}_{x} + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{m\omega_\pm \hbar}}\, p_\pm}_{\partial_x} \Big)$$

$$a_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_\pm - \partial_{x_\pm} \right)$$

$$\Rightarrow \quad x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_\pm + a_\pm^\dagger) \Rightarrow q_\pm = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_\pm}} (a_\pm + a_\pm^\dagger)$$

$$\partial_{x_\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_\pm - a_\pm^\dagger) \Rightarrow p_\pm = -i \sqrt{m\omega_\pm \hbar}\, \frac{1}{\sqrt{2}} (a_\pm - a_\pm^\dagger)$$

$$\Rightarrow \quad H = -\frac{1}{2m} \Big(+ m\omega_+ \hbar \frac{1}{2} (a_+ - a_+^\dagger)^2 + \cancel{m}\omega_- \hbar \frac{1}{2} (a_- - a_-^\dagger)^2 \Big)$$

$$+ \frac{1}{2} m \Big(\omega_+^2 \frac{\hbar}{2m\omega_+} (a_+ + a_+^\dagger)^2 + \omega_-^2 \frac{\hbar}{2m\omega_-} (a_- + a_-^\dagger)^2 \Big)$$

$$= -\frac{\hbar}{4} \Big\{ \omega_+ (a_+^2 - 2 a_+^\dagger a_+ + a_+^{\dagger 2} - 1) + \omega_- (a_-^2 - 2 a_-^\dagger a_- + a_-^{\dagger 2} - 1) \Big\}$$

$$+ \frac{\hbar}{4} \Big\{ \omega_+ (a_+^2 + 2 a_+^\dagger a_+ + a_+^{\dagger 2} + 1) + \omega_- (a_-^2 + 2 a_-^\dagger a_- + a_-^{\dagger 2} + 1) \Big\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \omega_+ (+2 a_+^\dagger a_+ + 1_+) + \frac{\hbar}{2} \omega_- (+2 a_-^\dagger a_- + 1_-)$$

$$= \hbar \omega_+ \Big(\underbrace{a_+^\dagger a_+}_{N_+} + 1/2 \Big) + \hbar \omega_- \Big(\underbrace{a_-^\dagger a_-}_{N_-} + 1/2 \Big) = H_+ + H_-$$

$(a + a^\dagger)^2 =$
$\pm a^\dagger a$
$a^2 + a^{\dagger 2} + a a^\dagger + a^\dagger a$
$2 a^\dagger a - [a, a^\dagger]$
$2 a^\dagger a - 1$

$(a - a^\dagger)^2 =$
$a^2 + a^{\dagger 2} - a a^\dagger - a^\dagger a$
$\pm a^\dagger a$
$a^2 + a^{\dagger 2} - 2 a^\dagger a - a a^\dagger + a^\dagger a$
$[a^\dagger, a]$
-1

Die „Schwingungsebenen" müssen orthogonal sein, also

$$[a_+, a_-] = [a_+^\dagger, a_-^\dagger] = \ldots = 0, \text{ dito } N_+, N_- \ldots$$

$|n_+\rangle$ ist EB zu N_+, $|n_-\rangle$ ist EB zu N_- $\rightsquigarrow$ $|n_+, n_-\rangle := |n_+\rangle \otimes |n_-\rangle$.

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} : \quad H |n_+, 0\rangle = H_+ |n_+\rangle \otimes \underbrace{H_- |0\rangle}_{0}$$

Betrachtet man $\langle N_+ + N_- \rangle$ als Skalar, ist dies nicht ausreichend: Ein System mit zwei Freiheitsgraden kann nicht mit nur einer Zahl beschr. werden. Ist dieses „+" dagegen als äußere / direkte Summe zu lesen, kann $\langle N_+ + N_- \rangle$ auch als Vektor aus zwei Größen interpretiert werden und somit das System beschreiben.

$$E_+^{n_+} = \hbar \omega_+ (N_+ + \tfrac{1}{2}{}_+) \Rightarrow E_+^n |n_+\rangle = \underbrace{\hbar \omega_+ (n_+ + \tfrac{1}{2})}_{\text{Energie}} |n_+\rangle \quad \rightsquigarrow \text{ analog } (*) \text{ für } E_-^{n_-}.$$

(*) Deshalb müssen wir oben zw. 1_+, 1_- unterscheiden, sonst wäre E_+ von ω_- abhängig…

$$Na^+ = Na^+ - a^+N + a^+N = [N,a^+] + a^+N = a^+N + a^+$$

(b) $N\, a^+|n\rangle = (a^+N + a^+)|n\rangle$
$= a^+N|n\rangle + a^+|n\rangle$
$= a^+ n|n\rangle + a^+|n\rangle$
$= (n+1)\, a^+|n\rangle$

$N\,|n+1\rangle = (n+1)\,|n+1\rangle$

$$\boxed{\begin{aligned} N &= N_+\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes N_- \\ &= N_+ \oplus N_- \\ &\text{dito } a, a^+, |n\rangle, A \end{aligned}}$$

⇝ $a^+|n\rangle, |n+1\rangle$ sind beides EV ~~zum EW~~ von N zum EW $(n+1)$.

⇒ $a^+|n\rangle \propto |n+1\rangle$. ⟺ $a^+|n\rangle \cdot \cancel{A} = A|n+1\rangle$ Skalar

$$aa^+ = aa^+ - a^+a + a^+a = [a,a^+] + a^+a = 1 + N$$

⊛ ⇝ $\|a^+|n\rangle\|^2 = \langle a^+n|a^+n\rangle = \langle n|aa^+|n\rangle = \langle n|N+1|n\rangle$
$\quad = \langle n|N|n\rangle + \langle n|n\rangle = (n+1)\cdot\langle n|n\rangle$
$\|$
$\|A\cdot|n+1\rangle\|^2 = |A|^2\,\langle n+1|n+1\rangle$

Sei $|n\rangle$ normiert, dann ist $|n+1\rangle$ normiert gdw. $|A|^2 = (n+1)$ ist.

Es ist $|0\rangle$ normiert, dann folgt:

$a^+|0\rangle = \sqrt{1}\cdot|1\rangle \qquad a^+|1\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle \qquad$ ~~$a^+|2\rangle$~~

⋮ ⇝ induktiv fortsetzen; Ind.-Schritt bei ⊛ $\quad = a^+(a^+|0\rangle)$

♡ $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$
$\quad = a^+\dfrac{a^+|n-1\rangle}{\sqrt{n}} = a^{+3}\dfrac{|n-2\rangle}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} = \dots = \dfrac{a^{+\,n+1}|0\rangle}{\sqrt{n!}}$

⇝ $|n+1\rangle = \dfrac{a^{+\,n+1}|0\rangle}{\sqrt{(n+1)!}}$ ist normiert.

(c) Dies impliziert die Relationen aus (c) direkt (⇝ ♡)

Da ~~da~~ a^+ für a^+_+ steht, ist ♡ anzuwenden:

$(a^+_+\otimes\mathbb{1})|n_+,n_-\rangle = a^+_+|n_+\rangle\otimes\mathbb{1}|n_-\rangle = \sqrt{n_+ +1}\,|n_+ +1\rangle\otimes\mathbb{1}|n_-\rangle$
$\quad = \sqrt{n_+ +1}\,|n_+ +1, n_-\rangle$

↑ Bilinearität von „⊗".

S. Rückseite…

↑ Selbe Argumentationsstruktur wie davor ⇝ genau analog! Oder elegant]

$a^+, a, N, |n\rangle$ sind als zweites Tensorprod. zu verstehen!
⇝ Gl. gelten für $N = N_{\mathrm{I}}$.
$N = N_+\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes N_-$

Es ist $\frac{a^+}{\sqrt{n}} |n-1\rangle \overset{*}{=} |n\rangle$, weiter $a^+ a = N$,

damit $\underbrace{N|n\rangle = a^+ a |n\rangle}$ =

$$a^+ \underbrace{a|n\rangle} = N|n\rangle = n \cdot |n\rangle \overset{*}{=} n \cdot \frac{a^+}{\sqrt{n}} |n-1\rangle$$

$$= a^+ \underbrace{\sqrt{n}\, |n-1\rangle}$$

Koeffvgl. liefert

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle .$$