Weiche Materie
Uebung 04

Michael Kopp

December 9, 2010

Weich (4)

$\boxed{1}$ $(\nabla^2 + k^2) u = 0 \quad k = 2\pi/\lambda$

(a) $u = A(x y z)\, e^{-ikz}$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_x A \\ \partial_y A \\ \partial_z A \end{pmatrix} e^{-ikz} - ik \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\, e^{-ikz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x A \\ \partial_y A \\ \partial_z A - ikA \end{pmatrix} e^{-ikz}$$

$$\nabla^2 u = \left(\partial_x^2 A + \partial_y^2 A + \partial_z^2 A - 2ik\partial_z A - k^2 A \right) e^{-ikz}$$

$$(\nabla^2 + k^2) u = \left(\partial_x^2 A + \partial_y^2 A - 2ik\partial_z A \right) e^{-ikz} + (\partial_z^2 - \cancel{k^2}) A e^{-ikz} + \cancel{k^2 A e^{-ikz}} \overset{!}{=} 0$$

$$(\nabla_\perp^2 - 2ik\partial_z) A \simeq 0 \quad \text{wenn} \quad \partial_z^2 A\, e^{-ikz} \approx 0$$

(b) $A_P = A_P(\rho, z) = A_0 \frac{1}{z} e^{-ik\rho^2/2z}$

$$\nabla_\perp^2 = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho)$$

$$\nabla_\perp^2 A_P = A_0 \frac{1}{z} \, \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left(\rho \, {-ik\rho} \frac{1}{z} e^{-ik\rho^2/2z} \right)$$

$$= -ik A_0 \frac{1}{z^2} \frac{1}{\rho} \left(2\rho\, e^{-ik\rho^2/2z} - \rho^2 ik\rho \frac{1}{z} e^{-ik\rho^2/2z} \right)$$

$$= -ik \frac{1}{z} \left(2 - ik\rho^3 \frac{1}{z} \right) A_P$$

$$\partial_z A_P = -\frac{1}{z} A_P + \frac{ik\rho^2}{2z^2} A_P$$

$$(\nabla_\perp^2 - 2ik\partial_z) A = \left(-2ik\frac{1}{z} - k^2\rho^3 \frac{1}{z^2} + 2ik\frac{1}{z} + \frac{k^2\rho^2}{z^2} \right) A_P = 0 \quad \checkmark$$

(c) $A_G = A_G(\rho, z) = \dfrac{A_0}{z + iz_0} e^{-ik \frac{\rho^2}{2z + 2iz_0}}$

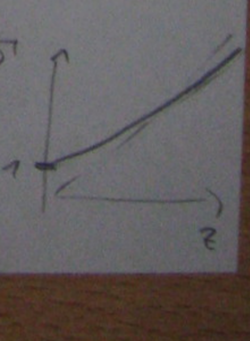
$$\frac{A_0}{z + iz_0} = \frac{A_0}{iz_0} \frac{1}{1 - iz/z_0} = A_1 \frac{\sqrt{2z_0/k}}{\sqrt{2z_0/k}} \frac{1}{\sqrt{1 + (z/z_0)^2}} e^{-i\,\mathrm{atan}\,-z/z_0} \qquad \zeta(z) = \mathrm{atan}\, z/z_0$$

$$\frac{-i\frac{k}{2}\rho^2}{z + iz_0} = \frac{-i\frac{k}{2}\rho^2(z - iz_0)}{(z + iz_0)(z - iz_0)} = \frac{-i\frac{k}{2}\rho^2(z - iz_0)}{z^2 + z_0^2} = \frac{-i\frac{k}{2}\rho^2\left(\frac{z}{z_0}\right) - \frac{k}{2}\rho^2}{z_0\left(1 + (z/z_0)^2\right)}$$

$$= -\frac{\rho^2}{[1 + (z/z_0)^2]\left(2\frac{z_0}{k}\right)} \qquad \omega(z) = \sqrt{[1 + (z/z_0)^2](2z_0/k)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{2z_0/k}$$

(d) $\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} = \frac{z}{z_0}\sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2} \qquad \omega(z) \approx \sqrt{\frac{2z_0}{k}}\, \frac{z}{z_0} \sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2} \Rightarrow \theta_0 \approx \sqrt{\frac{2}{kz_0}}$



$$\frac{-i\frac{k}{2}\rho^2 z}{z^2+z_0^2} = \frac{-ik\rho^2}{2z\left(1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right)} =: \frac{-ik\rho^2}{2R(z)}$$

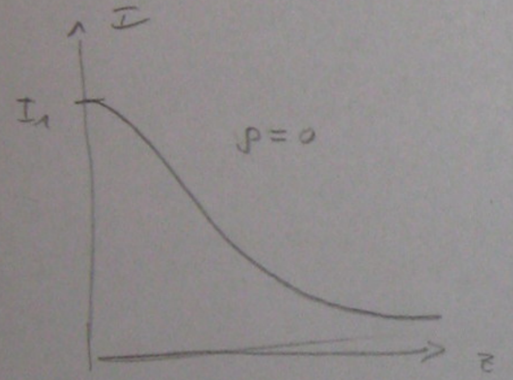
- Flächen konstanter Phase

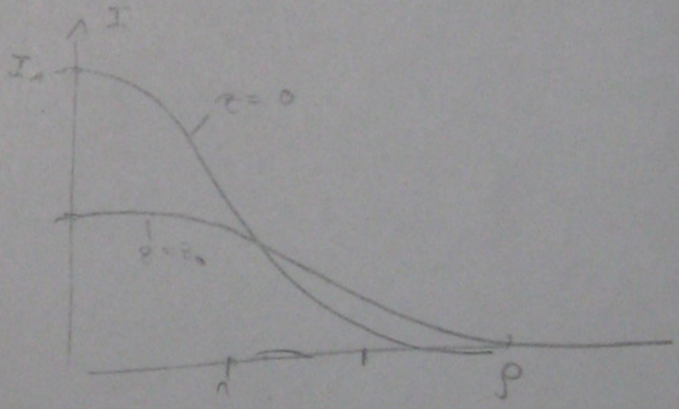
$$kz + \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \zeta(z) = C \Leftrightarrow kz + k\rho^2 \frac{1}{2z\left(1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right)} - \arctan\frac{z}{z_0} = C$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = \left(D + \frac{1}{k}\arctan\frac{z}{z_0} - z\right) 2z\left(1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right)$$

(d) $$I_6 = \underbrace{\left(\frac{A}{z_0}\right)^2}_{I_1} \frac{(2z_0/k)}{(2z_0/k)[1+(z/z_0)^2]} e^{-\frac{2\rho^2}{[1+(z/z_0)^2]}\cdot\frac{k}{2z_0}}$$

$\rho^2 \frac{k}{z_0} = \frac{1}{2}x^2$





(e) für ein z muss $P = \int I\,dA = 1$ sein

- $$1 \stackrel{!}{=} \frac{I_1}{N} \frac{1}{1+(z/z_0)^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{1+(z/z_0)^2}\frac{k}{z_0}} \underbrace{\rho\,d\rho}_{\frac{1}{2}d(\rho^2)} = \frac{1}{2}\frac{I_1}{N}\frac{z_0}{k}2\pi \Rightarrow \underline{N = \frac{1}{2} I_1 \frac{z_0}{k}\frac{1}{2\pi}}$$

- Anteil Strahl mit $\rho = w(z)$:

$$\frac{2}{w^2}\int_0^w e^{-2\frac{\rho^2}{w^2}} \overbrace{\rho\,d\rho}^{\frac{1}{2}d(\rho^2)} = -\left[e^{-2\frac{\rho^2}{w^2}}\right]_0^w$$

$$= 1 - e^{-2} \approx 86{,}5\%$$

Bild zu Aufgabe 1c: Aus der Gleichung aus (c) wurde die Phase (alles im Argument der Exponentialfunktion mit i davor) Konstant gesetzt (auf y-Achse aufgetragen) und nach ρ aufgel"ost (auf z-Achse aufgetragen).

Man sieht, dass ρ sich ann"ahrend parabolisch verh"alt ($\rho^2 \approx\propto z$) – bei von 0 verschiedenen Phasen hat man einen unphysikalischen Sprung bei $z = 0$.