26 (a) $I = \dot{q} = \frac{d}{dt}\left(n \cdot \cancel{V} \cdot q_0\right) = n \cdot q_0 A \cdot \dot{z}$ $V = A \cdot z$

$v_0 = \frac{d}{dt} z = \dot{z}$

$I = n q_0 A \; \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{I}{n q_0 A_0} = \frac{I}{n q_0 \Delta x \Delta y} = v_0$

(b) $\cancel{I = q \cdot E = \Delta V}$

$F_L = q\left(\underline{v}_0 \times \underline{B}\right) = q \cdot v_0 \cdot B$ da $\underline{v}_0 \perp \underline{B}$

$F_L = F_{El} = q \cdot E = q \cdot \frac{U_H}{d} = q \cdot \frac{U_H}{\Delta y}$

$U_H = v_0 \cdot B \cdot \Delta y = \frac{I \; B \; \Delta y}{n q_0 \Delta x \Delta y}$ $n \approx 140 \cdot 10^3 \frac{mol}{m^3}$

$1{,}488 \cdot 10^{-5}\,V$

(c) $\cancel{\frac{F}{z} = \frac{q v B}{z} = \frac{q \cdot B \cdot \dot{z}}{z}}$

Durch E-Feld werden die e^- auf eine feste Bahn im Kristall gehalten. Durch das B-Feld wird diese Bahn abgelenkt und damit das Kristall.

$F_V = n \cdot V \cdot q_0 \cdot v_0 \cdot B = n \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \cdot q_0 \cdot \frac{I \cdot B}{n \cdot q_0 \Delta x \Delta y}$

$\frac{F_V}{\Delta z} = \cancel{\Delta y} \cdot I \cdot B$

27

(a) $F_Z = m v^2 \cdot \frac{1}{r}$ $q \cdot E = q \cdot v \cdot B_1 \Rightarrow v = \frac{E}{B_1}$

$F_{L2} = q \cdot v \cdot B_2 = m v^2 \frac{1}{r}$

$\frac{q}{m} = v \, \frac{1}{B_2} \, \frac{1}{r} = \frac{E}{B_1 \cdot B_2} \, \frac{1}{r}$

(b) ~> Filtereigenschaft:

Nicht nur nach Geschw. gefiltert, auch nach spez. Ladung.

(c) $B_1 = \frac{E}{v} = \frac{50\,\text{kV/m}\; V\; s}{5 \cdot 10^{4,3}\; m\; m} = 10^{-3}\,T$ $\frac{q}{m} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C}{20/6 \cdot 10^{26}\,kg}$

$r = \frac{E}{B_1 B_2}\left(\frac{q}{m}\right)^{-1} = \frac{50 \; V \; kg}{10^{-3} \cdot 0{,}1 \; T \; m \; C} \; \frac{20}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^{26}}$

$^{20}Ne^{+}$: $r \approx 1{,}04\ \mathrm{cm}$
$^{21}Ne^{+}$: $r \approx 1{,}09\ \mathrm{cm}$

$\Big\}$ Abst. : $0{,}1\ \mathrm{cm} \;\hat{=}\; 1\ \mathrm{mm}$

$\boxed{23}$ $$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left(d\underline{l} \times \underline{r}\right)$$

(a)

$$\cancel{d\underline{l} = d\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi \\ dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dr + \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi}$$

$$d\underline{l} = d\begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\underline{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{r} = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ +z \end{pmatrix}$$

$$\cancel{d\underline{l} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\, d\varphi\, z \\ -R\sin\varphi\, d\varphi\, z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R z \cos\varphi \\ -R z \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi}$$

$$d\underline{l} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi \\ Rz\sin\varphi \\ R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi \\ Rz\sin\varphi \\ R^2 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\int d\underline{B} = B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\,(R^2+z^2)^{3/2}} \int d\varphi \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi \\ Rz\sin\varphi \\ R^2 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2\,(R^2+z^2)^{3/2}} R^2\, \underline{e}_z$$

(b) $$z \longmapsto \left(z_0 - \frac{d}{2}\right)$$
$$z \longmapsto \left(z_0 + \frac{d}{2}\right)$$

$$B(z_0) = B\left(z_0 - \frac{d}{2}\right) + B\left(z_0 + \frac{d}{2}\right)$$

(c) $$B = \frac{\mu_0 I}{2}\left(\frac{R^2}{\left((z-\frac{d}{2})^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{R^2}{\left((z+\frac{d}{2})^2 + R^2\right)^{3/2}}\right)$$

```
Maxima 5.13.0 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.8 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
```

Wir untersuchen das B-Feld; durch Superposition ergibt sichh für $B(z)$:

```
(%i1) B(z) := 1/2 * mu * I * R**2 *( ( (z - d/2)**2 + R**2 )**(-3/2) + (
      (z+d/2)**2 + R**2 )**(-3/2) );
```

(%o1) $$B(z):=\frac{1}{2}\,\mu\,I\,R^2\left(\left(\left(z-\frac{d}{2}\right)^2+R^2\right)^{\frac{-3}{2}}+\left(\left(z+\frac{d}{2}\right)^2+R^2\right)^{\frac{-3}{2}}\right)$$

```
(%i2) diff(B(z), z, 1)
```

(%o2) $$\frac{\mu\,I\,R^2\left(-\frac{3\left(z+\frac{d}{2}\right)}{\left(R^2+\left(z+\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\left(z-\frac{d}{2}\right)}{\left(R^2+\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right)}{2}$$

```
(%i3) diff(B(z), z, 2)
```

(%o3) $$\frac{\mu\,I\,R^2\left(-\frac{3}{\left(R^2+\left(z+\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{15\left(z+\frac{d}{2}\right)^2}{\left(R^2+\left(z+\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}}-\frac{3}{\left(R^2+\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{15\left(z-\frac{d}{2}\right)^2}{\left(R^2+\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}}\right)}{2}$$

```
(%i4) diff(B(z), z, 3)
```

(%o4) $$\frac{\mu\,I\,R^2\left(\frac{45\left(z+\frac{d}{2}\right)}{\left(R^2+\left(z+\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}}-\frac{105\left(z+\frac{d}{2}\right)^3}{\left(R^2+\left(z+\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{9}{2}}}+\frac{45\left(z-\frac{d}{2}\right)}{\left(R^2+\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}}-\frac{105\left(z-\frac{d}{2}\right)^3}{\left(R^2+\left(z-\frac{d}{2}\right)^2\right)^{\frac{9}{2}}}\right)}{2}$$

```
(%i5) taylor(B(z), z, 0, 3)
```

(%o5) $$\frac{8\sqrt{4\,R^2+d^2}\,\mu\,I\,R^2}{16\,R^4+8\,d^2\,R^2+d^4}-\frac{\left(192\sqrt{4\,R^2+d^2}\,\mu\,I\,R^4-192\sqrt{4\,R^2+d^2}\,d^2\,\mu\,I\,R^2\right)z^2}{256\,R^8+256\,d^2\,R^6+96\,d^4\,R^4+16\,d^6\,R^2+d^8}+\cdots$$

Nun untersuchen wir die Funktion mit Helmholtz-Bedingungen:

```
(%i11) B(z), d : R;
```

(%o11) $$\frac{\mu\,I\,R^2\left(\frac{1}{\left(R^2+\left(\frac{R}{2}+z\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left(R^2+\left(z-\frac{R}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)}{2}$$

```
(%i13) d : R
```

(%o13) R

```
(%i14) B(z)
```

(%o14) $$\frac{\mu\, I\, R^2 \left(\frac{1}{\left(R^2+\left(\frac{R}{2}+z\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(R^2+\left(z-\frac{R}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right)}{2}$$

(%i15) `taylor(B(z), z, 0, 4)`

(%o18) $$\frac{8\sqrt{5}\,\mu\, I}{25\, R} - \frac{1152\sqrt{5}\,\mu\, I\, z^4}{3125\, R^5} + \cdots$$

Es ergibt sich noch in dritter Näherung eine Konstante!

(%i19)

[29] Experimentalphysik

(b) (Fortsetzung)

In den beiden oberen Vektoreinträgen steckt $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$. Da φ von 0 bis 2π integriert wird, fallen diese Terme weg.

Wir betrachten also den dritten Eintrag des Vektors. Das komplette Integral ist:

```
(%i1) f(r,theta) := 0.5*r**2*sin(theta)*rho*(r**2 - r**2*(cos(theta))**2) * omega
```

(%o1) $f(r,\vartheta) := 0.5\, r^2 \sin(\vartheta)\, \rho \left(r^2 - r^2 \cos(\vartheta)^2\right) \omega$

Dabei gehört der Teil vor ρ zum Jackobian.

```
(%i3) integrate(integrate(integrate(f(r,theta),theta,0,%pi),r,0,R),phi,0,2*%pi);
```

(%o3) $0.26666666666667\, \pi\, \omega\, \rho\, R^5$

das sind $\frac{4}{15}\pi\omega\rho R^5$.

Setzt man nun ρ ein, erhält man:

```
(%i4) rho : e / (4.0/3.0*%pi*R**3)
```

(%o4) $\frac{0.75\, e}{\pi\, R^3}$

```
(%i5) %o3, rho : e/(4.0/3.0*%pi*R**3)
```

(%o6) $0.2\, e\, \omega\, R^2$

(%i7)

D.h. wir haben ein Magnetisches Moment, welches nur in der z-Komponenten einen Wert verschieden von 0 aufweist; der in (%o6).

(c)

Das Borsche Magnetron wäre demnach $\mu_B = \pm\, 0.4 e\omega R^2 = \pm\, \frac{e}{m_e} S_z$.

$\boxed{29}$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \sin\vartheta \\ r\sin\varphi \sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} r \in [0,R] \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ \vartheta \in [0,\pi] \end{matrix}$$

(a) $$\underline{j} = \rho(\underline{\omega} \times \underline{r}) = \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} -\omega_z r_2 \\ \omega_z r_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $$\underline{m} = \frac{1}{2} \cdot \int (\underline{r} \times \underline{j})\, dV = \frac{1}{2} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \cdot \cancel{r\cos\vartheta}\, r^2 \sin\vartheta \cdot (\underline{r} \times \underline{j})$$

$$\underline{r} \times \underline{j} = \underline{r} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})\rho \overset{\text{bac cab}}{=} \rho\left(\underline{\omega} \langle \underline{r} | \underline{r} \rangle - \underline{r} \langle \underline{r} | \underline{\omega} \rangle\right)$$

$$= \rho \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \cdot r^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 r_3 \omega_z \\ r_2 r_3 \omega_z \\ r_3 r_3 \omega_z \end{pmatrix} \right)$$

$$= \rho \cdot \begin{pmatrix} -r_1 r_3 \omega_z \\ -r_2 r_3 \omega_z \\ (r^2 - r_3^2)\omega_z \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} -r^2 \cos\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \\ -r^2 \sin\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \\ r^2 - r^2\cos^2\vartheta \end{pmatrix} \omega_z$$

Beim $\int_0^{2\pi} d\varphi$ verschwinden die ersten beiden Zeilen, weil $\int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{matrix}\, d\varphi = 0$.

→ Siehe Ausdruck

~~$\omega_z = \frac{1}{2} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\, r^2 \sin\vartheta \cdot \rho \cdot (r^2 - r^2\cos^2\vartheta)\, \omega_z$~~

$$= \underbrace{\quad}_{2\pi}\; \omega_z \rho \left(r^4 \sin\vartheta - r \sin\vartheta \cos\vartheta \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^R dr\; 2\pi\; \omega_z \rho \cdot \underbrace{r^2 \left(\frac{r^3 + 2r^2 + r}{2} - \frac{r^3 - 2r^2 - r}{2} \right)}_{2r^4}$$

$$= \int_0^R dr\; r^4 (2\omega_z \rho)\pi$$

$$= \frac{1}{5} R^5 \pi 2 \omega_z \rho = \frac{2}{5} \frac{R^5 \pi \omega_z\, 3e^-}{4\pi R^3} = \frac{6}{20} R^2 e^- \omega_z$$

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}3\, R^2 \omega_z \end{pmatrix} e^-$$