4.1 Dynamik eines Systems mit holonomen Zwangsbedingungen

Theo

19.5.09

Vorgehen zur Lösung von Problemen mit Zwangsbed.

(1) Best. Konfigurationsraum des Systems und führe verallg. Koord. ein, welche die Zwangsbed. erfüllen (möglichst einfach darstellen):

$$q^i \qquad i = 1, \dots, f$$

$$\underline{r}_j(q^1, \dots, q^f) \qquad j = 1, \dots, N \quad \text{(Vekt. in Kartkoord.)}$$

↳ die Zwangsbed. sind hier gleich erfüllt

(2) Kinetische Energie in verallg. Koord. ausdrücken:

$$T = \sum_i m_i \frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 \longrightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{f} A_{ij}(q^1 \dots q^f)\, \dot{q}^i \dot{q}^j$$

Transformation

⇔ T hängt von f Koord. $q^1 \dots q^f$ ab

$T(q^1, \dots, q^f)$

(2') Dito das Potential:

$$V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) \longrightarrow V(q^1, \dots, q^f)$$

(3) Wir erhalten den Lagrange in verallg. Koord.:

$$L(q^1, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f, t) = T - V$$

da L von Koord'transformation unabhängig (invariant) ist.

Die Bewegl. folgen aus der Euler-Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i = 1, \dots, f$$

⇒ f Gleichungen.

Bsp.:

(1) ⊙ [(-"-)] Pendel (ebene Polar-Koord.)

19.5.09

- $r = l = \text{const}$ $\varphi = \text{frei}$ $\{\text{Freiheitsgrad } f = 1\}$

$$\left.\begin{aligned} x &= l\cos\varphi = x(\varphi) \\ y &= l\sin\varphi = y(\varphi) \end{aligned}\right\} \varphi\text{: verallg. Koord.}$$

② $T = \frac{1}{2} m \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2} m ([-l\sin\varphi\,\dot\varphi]^2 + [l\cos\varphi\,\dot\varphi]^2)$

$= \frac{1}{2} m [l^2 \sin^2\dot\varphi^2 + l^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2] = \frac{1}{2} m\, l^2\dot\varphi^2$

$V = mgy = mgl\sin\varphi$

③ $L = \frac{1}{2} m l^2\dot\varphi^2 - mgl\sin\varphi$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot\varphi) + mgl\cos\varphi$$

$$= \cancel{m}l^2\ddot\varphi + \cancel{m}gl\cos\varphi = 0$$

$\Rightarrow \ddot\varphi = -\frac{g}{l}\cos\varphi$

26.5.09

$\Leftrightarrow \ddot\varphi' = -\frac{g}{l}\sin\varphi'$ $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$

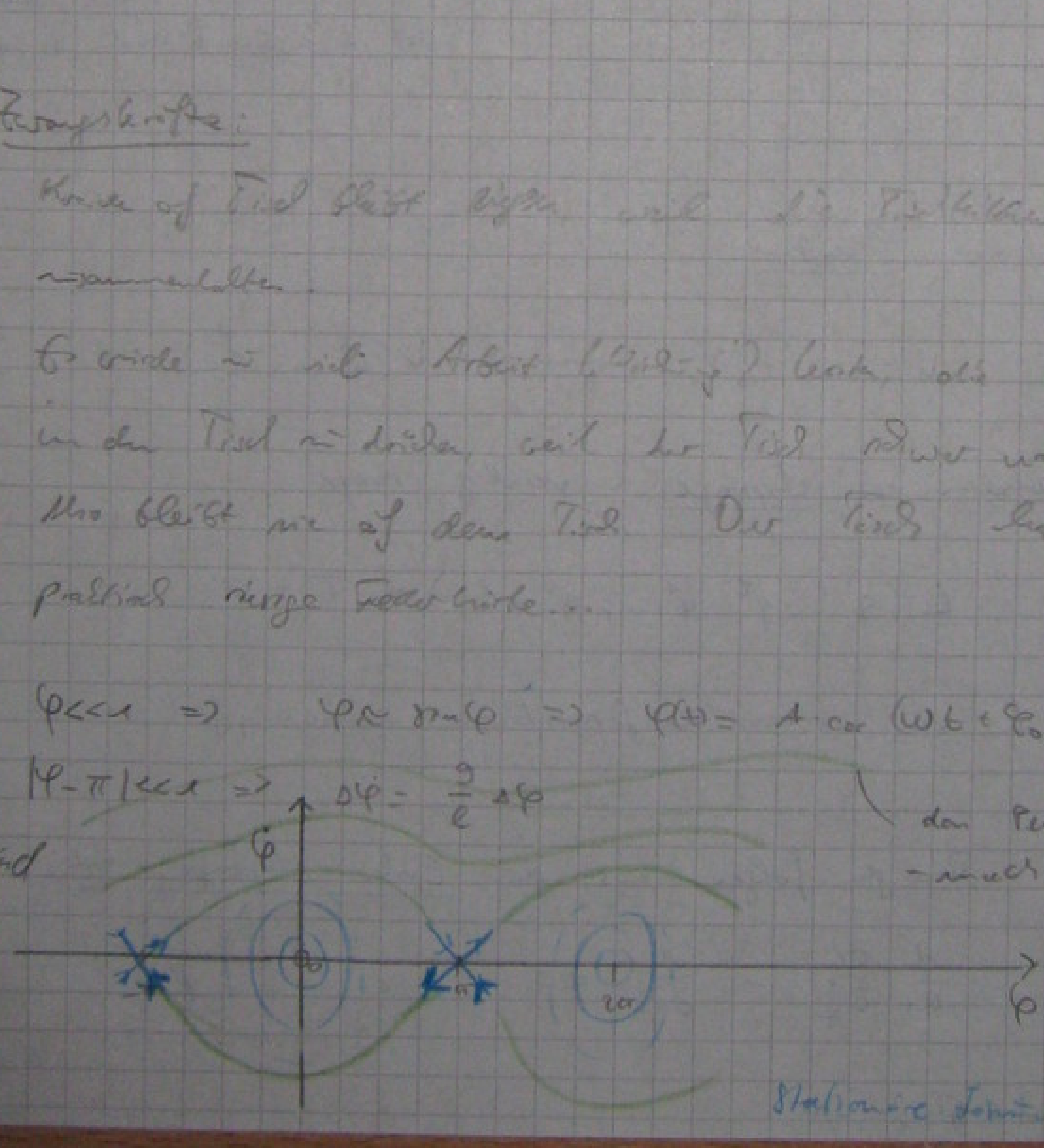
Zwangskräfte:

Kreide auf Tisch bleibt liegen weil die Teilchen zusammenhalten.

Es würde zu viel Arbeit ("Energie") kosten, die Kreide in den Tisch zu drücken, weil der Tisch schwer nachgibt. Also bleibt sie auf dem Tisch. Der Tisch hat eine praktisch riesige Federhärte...

$\varphi \ll 1 \Rightarrow \varphi \approx \sin\varphi \Rightarrow \varphi(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$|\varphi - \pi| \ll 1 \Rightarrow \Delta\ddot\varphi = \frac{g}{l}\Delta\varphi$



Die Linien sind Trajektorien im Konfig'raum mit versch. Energien.

das Pendel überschlägt – macht Überschläge.

Stationäre Lösungen

Bem.: Newtons Gleichungen & Zwangskräfte — 26.5.09

Ein System *mit* Zwangsbedingungen verhält sich (signifikant) anders, als einer ohne Zwangsbedingungen. Um das System dazu zu bringen, müssen ~~und~~ Zwangskräfte wirken, die die Trajektorie im Konf'raum an die Hyperebene bindet (die Hyperebene ist durch die Zwangsbed. definiert).

Die Newton'schen Gleichungen haben die Form

$$m_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i = -\nabla_i V + \underline{Z}$$

Mit der zusätzlichen Zwangskraft $\underline{Z}$. Um die Zwangskräfte zu bestimmen, können wir die Gl. nach $\underline{Z}$ auflösen.

Zwangskräfte (Def)

Die Größen

$$\underline{Z}_i = m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i = m_i \ddot{\underline{r}}_i + \nabla_i V_a \qquad i = 1, \dots, N$$

heißen Zwangskräfte.

Bem.:

Diese Kräfte sind a priori unbekannt, können aber aus der Lösung des Problems berechnet werden.

Beispiel:

(1) Pendel: Im Umkehrpunkt Mittelpunkt: $\dot{\underline{r}} = \underline{0}$

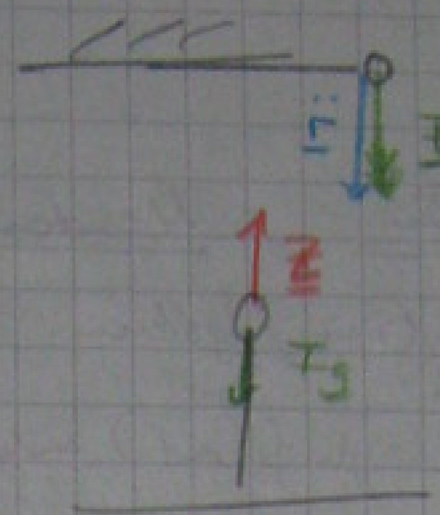
$\Rightarrow \underline{Z}_i = -\underline{F}_i \Rightarrow \underline{Z} = -m\underline{g}$

26.5.'08

Im oberen Umkehrpunkt:

$\ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i \Rightarrow \underline{Z} = \underline{0}$

Im oberen Mittelpunkt:



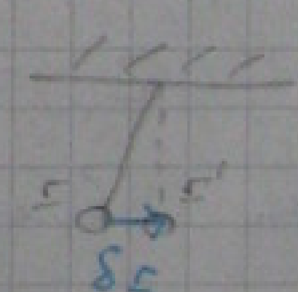
Bem.:

Die Zwangskräfte resultieren aus anderen Kräften – bspw. die Anziehung unter den Metallteilchen des Stabes –. Wir haben sie bei der Beschreibung eigentlich vernachlässigt, finden so aber eine Gl. für sie.

Virtuelle Verrückung (Def.) (Physikerdef.)

Eine Virtuelle Verrückung $\delta \underline{r}_i$ bzw. δq^i ist eine infinitesimale Änderung der Lagekoordinaten, welche mit den Zwangsbedingungen verträglich ist

Wir verschieben also ein kleines Stück in eine erlaubte Richtung. Die Verrückung ist ~~ein~~ ein Tangentenvektor an die erlaubte Bahn.



Da die Zwangskräfte die Teilchen auf ihrer Bahn halten, sind sie ~~stets~~ stets senkrecht zu der Bahn und damit senkrecht zu $\delta \underline{r}$. Die Arbeit ~~Z~~ zur $\underline{Z}\,\delta \underline{r}$ verschwindet also.

Das führt auf das Prinzip von d'Alembert:

Theo

26.5.'09

Prinzip von d'Alembert

In einem System mit Zwangsbedingungen $\underline{Z}_i$ erfüllt eine Bewegungsgleichung / -trajektorie

$$\sum_i \cancel{m_i \underline{\ddot{r}}_i}$$

$$\sum_i \left(m_i \underline{\ddot{r}}_i - \underline{F}_i \right) \cdot \delta \underline{r} = 0$$

für alle virt. Verrückungen ~~δr~~ $\delta \underline{r}_i$.

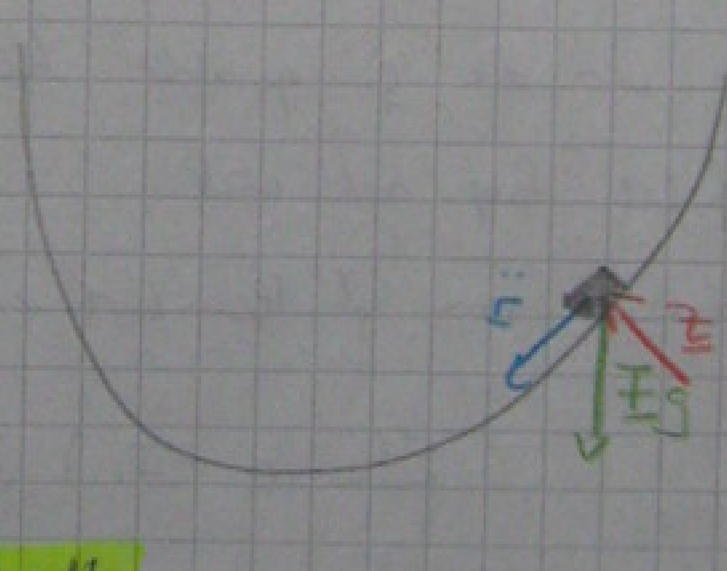
Diese Bedingung ist äquivalent dem, dass die Zwangskräfte keine Arbeit ~~verrichten~~ unter einer virt. Verrückung leisten:

$$\delta A = \sum_i \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i$$

Das Prinzip gilt für praktisch alle Probleme in der klass. Mechanik; es gilt nicht, wenn wir bspw. Temperatur mit einbeziehen (vgl. Reibung). Wenn Arbeit in Wärme umgewandelt wird usw.

Beispiel

(2) Teilchen auf Oberfläche



Die Kraft $\underline{Z}$ drückt senkrecht auf den Körper.

$\Rightarrow$ Normalkraft = Zwangskraft.

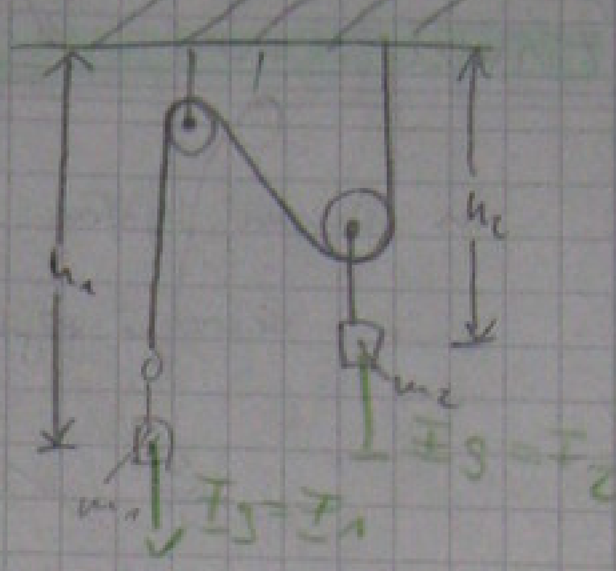
(3)

Bem: Im statischen Fall reduziert sich das Prinzip von Alemb. auf eine Bedingung für die Gleichgewichtslage:

$$\sum_i \underline{F}_i \, \delta \underline{r}_i = 0$$

Bsp.

(3) Flaschenzug



26.5.09

$$\delta h_1 = -2\cdot\delta h_2$$

$$F_1\cdot\delta h_1 + F_2\cdot\delta h_2 := 0$$

$$m_1 g\,\delta h_1 + m_2 g\,\delta h_2 =$$

$$-m_1 g\, 2\delta h_2 + m_2 g\,\delta h_2 \Rightarrow$$

$$m_1 \cancel{g}\, 2\delta h_2 = m_2 \cancel{g}\,\delta h_2 \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$$

Harmonie zw. d'Alembert und Euler-Lagrange

Wir führen geeignete Koordinaten ein, die die holonomen Zwangsbedingungen erfüllen:

$$r_i = r_i(q^1, \dots, q^f, t)$$

Eine virt. Verrückung bekommen wir, wenn wir die q^j bel. variieren:

$$\delta r_i = \sum_j^f \frac{\partial r_i}{\partial q^j}\,\delta q^j$$

Da wir die q^j gewählt haben, dass sie die Zwangsbed. erfüllen, erfüllt δq^j sie auch. Wir setzen unser δr_i ins Prinzip von d'Alembert ein:

$$\sum_i (m_i \ddot{r}_i - F_i)\cdot\delta r_i =$$

$$\sum_i F_i\,\delta r_i = \sum_i\sum_j F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^j}\,\delta q^j = \sum_j\Big(\underbrace{\sum_i F_i\,\frac{\partial r_i}{\partial q^j}}_{Q_j}\Big)\cdot\delta q^j$$

Q_j Verallgemeinerte Kraft

Nach Kettenregel: $Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q^j} =$

"innere Abl."

$$= \sum_i \nabla_i V\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q^j} = -\frac{\partial}{\partial q^j}V(q^1, \dots, q^f)$$

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i\,\delta r_i = \sum_i\sum_j m_i \ddot{r}_i\,\frac{\partial r_i}{\partial q^j}\cdot\delta q^j$$