Physik am Komputer 30. Mai 2010

Übung 03

Michael Kopp

Aufgabe 1 Ich habe – wie in der Übung besprochen – nur den letzten Punkt gemacht, weil die Aufgabenstelltung der ersten Punkte nicht ganz verständlich war und wohl dem Übungseffekt gedient hat, um auf den letzten Punkt hinzuarbeiten...

Die Bemühungen hierzu gipfelten in `fibon-rekt01c.cpp`.

Aufgabe 2 Die ersten beiden Punkte wurden in `numdiff03.cpp` sogar übertroffen: Ich habe noch die Ableitung einer Ordnung höher eingefügt. Die Bemühungen sind in Abb. 1 am besten visualisiert (alle Graphiken finden sich in `abl-*.eps`).

Zum dritten Punkt:

Approximiere die Funktino an den Stützstellen $x_1, \ldots, x_5$ durch ein Polynom der vierten Ordnung; am besten geht das mit Lagrange-Polynomen:

$$p_4(x) = \sum_{i=1}^{5} \prod_{j=1, j\neq i}^{5} f(x_i) \cdot \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \; . \tag{1}$$

Leitet man dies an der Stelle x_3 ab und setzt äquidistante Stützstellen ein (also $x_1 = x_3 - 2h$, $x_2 = x_3 - h$ usw), dann erhält man die Gleichung

$$-\frac{y_5 - 8\,y_4 + 8\,y_2 - y_1}{12\,h} \; ; \tag{2}$$

vergleiche zur Rechnung `numdiff_ord4`.

Nun entwickelt man die Funktion $f(x)$ um x und zwar für y_5 in Richtung $x{+}2{*}h$, für y_2 in Richtung $x{-}h$ etc. und setzt die so erhaltenen Entwicklungen in 2 ein; es ergibt sich (für die Rechnung vergleiche `numdiff_ord4_enwt`)

$$\frac{h^4\,y_5 - 30\,y_1}{30} = f'(x) + O(h^4) \; . \tag{3}$$

□

Aufgabe 3 Die Implementierungen sind in `numint03.cpp`, die Ergebnisse sind in Abb. 2 graphisch dargestellt. Man sieht: am langsamsten konvergiert das Trapezverfahren, das Gaussverfahren der Ordnung 4 am schnellsten.

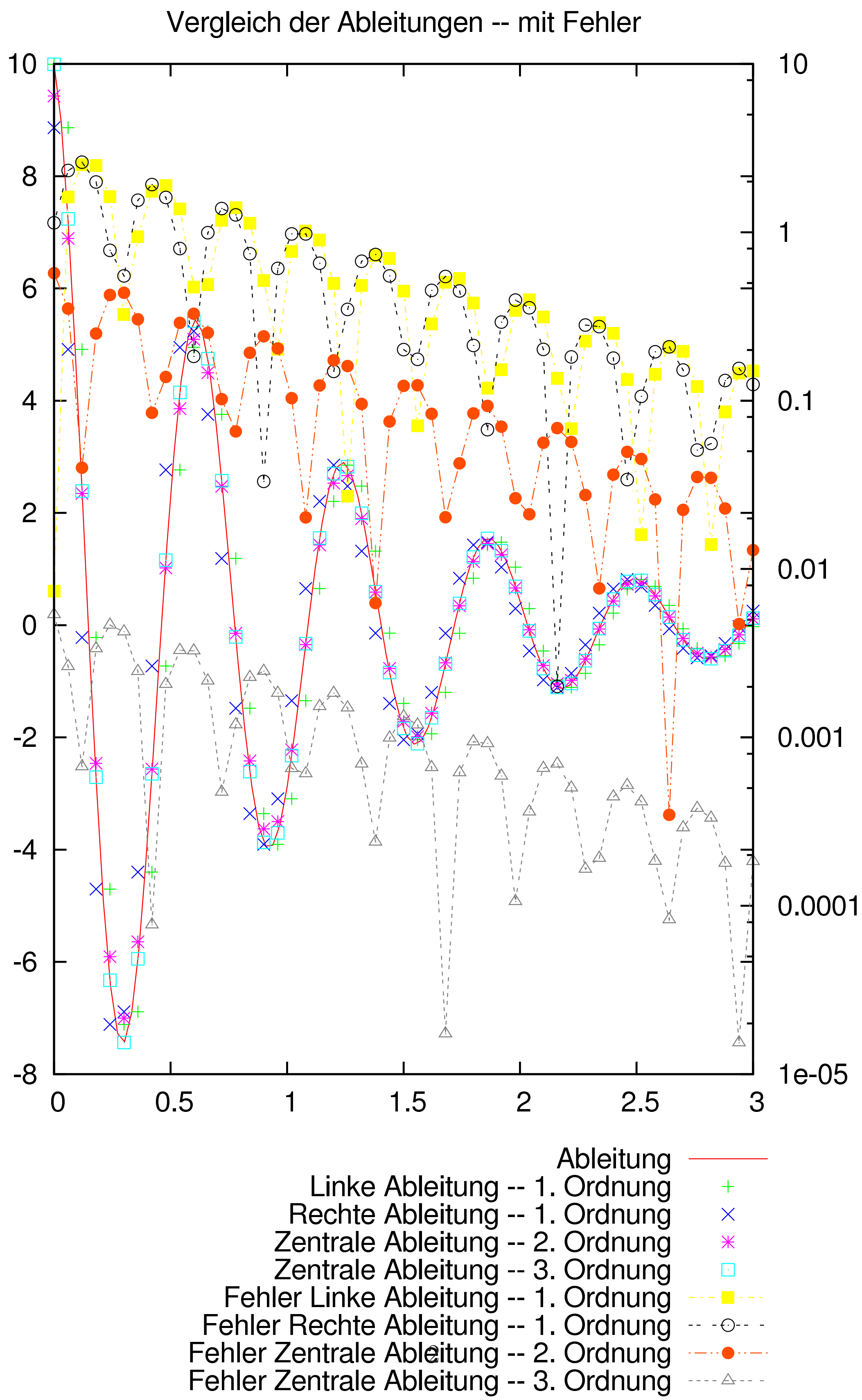

Abbildung 1: Vergleich der Ableitungen verschiedener Ordnungen

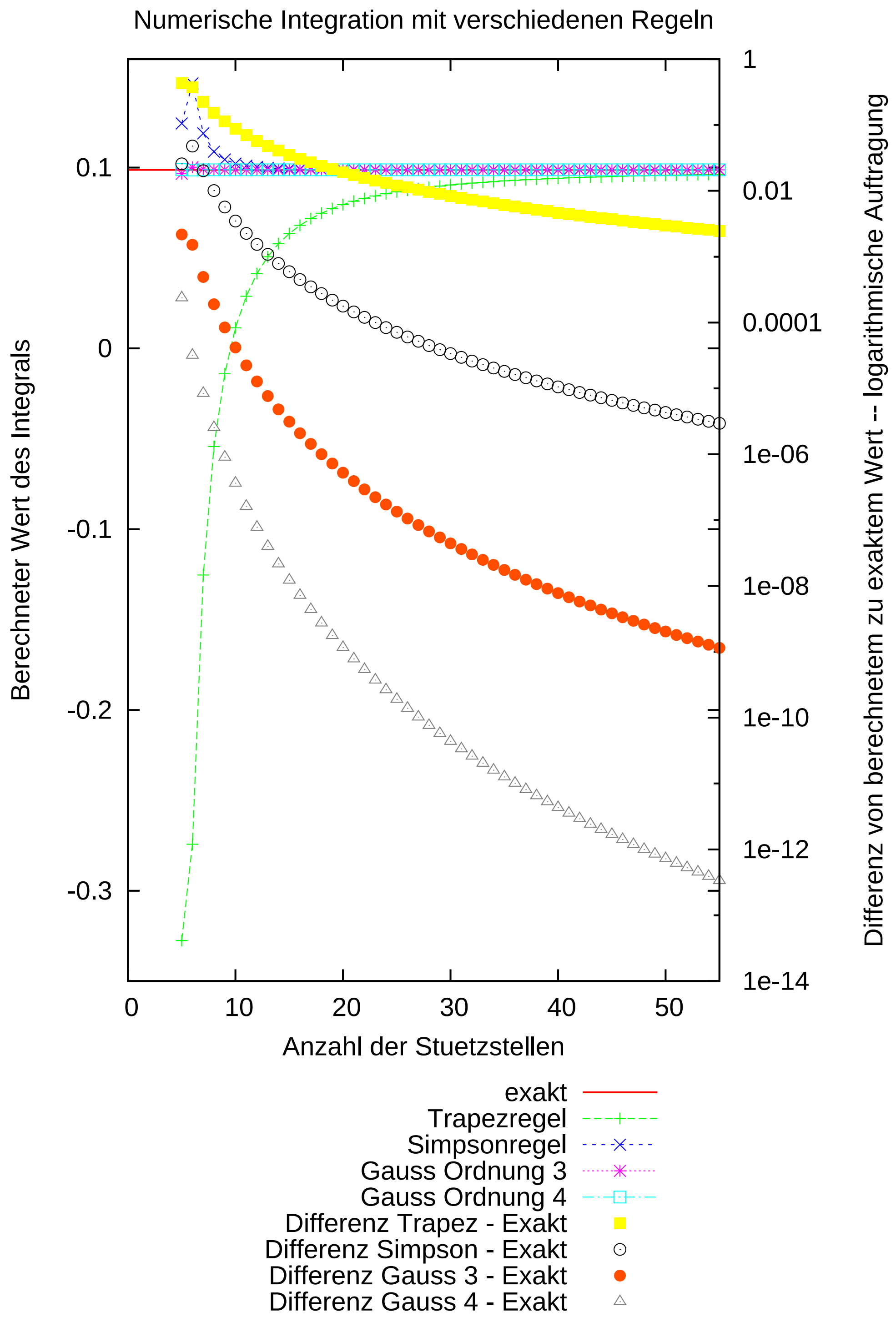

Abbildung 2: Entwicklung der numerischen Integrationen $\int_0^3 \sin(10x)\exp(-x)$ mit verschiedenen Verfahren