12

(a) (i) $f_k = \begin{cases} 1 & k \leq x \leq k+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- f_k ist nicht monoton
- $\int f_k \, d\underline{x} = 1 \leq 2 =: A$
- $\lim_{k\to\infty} f_k = 0 \quad (\forall \underline{x})$

$$\int \lim_{k\to\infty} f_k \, d\underline{x} = 0 \neq \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\underline{x} = 1$$

(ii) $\tilde{f}_k = \begin{cases} k, & 0 \leq x \leq 1/k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

- $\tilde{f}_k$ nicht monoton (steigt bei $x=0$, fällt sonst)
- $\int \tilde{f}_k \, d\underline{x} = 1 \leq 2 =: A$
- $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k(x) = 0 \quad \forall \underline{x} \neq 0$ (lim ex. f.ü.)

$$\int \lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k \, d\underline{x} = 0 \neq \lim_{k\to\infty} \int \tilde{f}_k \, d\underline{x} = 1$$

(b) Wieder $\tilde{f}$ von (ii);

- $g(x) = 25/x^2$ ist Majorante $(\forall k)$ $g \notin L^1$
- $\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k = \begin{cases} \infty & x=0 \quad \text{(ex. nicht)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (lim ex. f.ü.)

$$\int \lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k \, d\underline{x} = 0 \neq \lim_{k\to\infty} \int \tilde{f}_k \, d\underline{x} = 1$$

(c) $\hat{f}_k := -\tilde{f}_k$

- $\hat{f}_k \in L^1$ (da $\hat{f} = 0 - \tilde{f}$, $\tilde{f} \in L_1$)
- Aber: $\hat{f}_k \leq 0$
- $\liminf_{k\to\infty} \hat{f}_k(x) = \begin{cases} -\infty & x=0 \quad \text{(ex. nicht)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ex f.ü.

$$\int \liminf_{k\to\infty} \hat{f} \, d\underline{x} = 0 \nleq \liminf_{k\to\infty} \int \hat{f} \, d\underline{x} = -1$$

3 ~~Da~~ ξ_i seien ~~die~~ Nullstellen von f.

Da f reelles Polynom, kann man für jedes ξ_i f schreiben:

$$f(x) = (x-\xi_i)\cdot g_i(x). \qquad (g_i: \text{Polynom}, \operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(f)-1)$$

Da f keine doppelte Nullstelle hat, $\exists \delta_i > 0: x \in U_{\delta_i}(\xi_i) \Rightarrow$

$g_i(x) \neq 0$, also $|g_i(x)| \geq C_i$, mit $C_i \in \mathbb{R}^+$. $(*)$

Außerhalb von den $U_{\delta_i}(\xi_i)$ ist $\frac{1}{\sqrt{|f|}}$ ohne Probleme

integrierbar, weil f als Polynom stetig ist, damit auch,

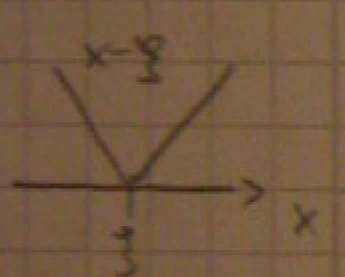
wenn es mit $|\cdot|$, $\sqrt{\cdot}$ und $1/\cdot$ verkettet wird.

Betrachte also $U_{\delta_i}(\xi_i)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{|f(x)|}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{|x-\xi_i|}}\cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{|g_i(x)|}}}^{\leq \frac{1}{\sqrt{C}} \text{ wg } (*)}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{C}} \int \frac{1}{\sqrt{|x-\xi_i|}}\,dx.$$

Damit ist $\frac{1}{\sqrt{C}} \int 1/\sqrt{|x-\xi_i|}\,dx$ eine Majorante.

Sie konvergiert definitiv: $(x \in U_{\delta_i}(\xi_i))$



$$\frac{1}{\sqrt{C}} \int_{\xi_i-\delta_i}^{\xi_i+\delta_i} \frac{1}{\sqrt{|x-\xi_i|}}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wg. Symmetrie von } |x-\xi|}}{=} \frac{1}{\sqrt{C}}\cdot 2 \cdot \int_0^{\xi_i+\delta_i} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_i)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{C}}\cdot 2\cdot 2\sqrt{\xi_i+\delta}.$$

Damit ist $1/\sqrt{|f|}$ i.e. Riemann-int'bar und

damit auch in L^1.

4 Da $f \in L^1$ ist f messbar, g_h ist stetig ~~$\forall$~~ $\forall h \Rightarrow$

g_h ist messbar als Verkettung.

Lemma! ~~Es~~ g_h ist für jedes h in L^1, wenn zusätzlich $\exists\, \ell(x) \in L^1$ mit $|g_h| \leq \ell(x)$.

Da $f \geq 0$, $h > 0 \Rightarrow 1 + f/h > 1 \Rightarrow 0 \leq h \cdot \ln(1+f/h) \leq h\cdot(1+f/h)$

$= h + f$. Da $h, f \in L^1 \Rightarrow h + f \in L^1 \Rightarrow$ für jedes

h ist $g_h \in L^1$.

Untersuche ~~g_k ...~~ g_k auf Monotonie:

$$g_k = k \cdot \ln(1 + f/k) = \ln\left[(1+f/k)^k\right].$$

Dies steigt monoton, weil $(1+f/k)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^f$ monoton steigt (wie aus Ana I bekannt) und weil $\ln(\cdot)$ ~~...~~ mon. steigt; damit auch die Verkettung g_k (Weil: steigt k steigt das Argument von $\ln(\cdot)$ und damit steigt $\ln(\cdot)$.)

Der GW.

$$g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$$

lässt sich auf 3 Arten zeigen:

(1) L'Hôpital: $y := 1/k$, $g_k = \frac{\ln(1+yf)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{f}{1+yf} = f$

(2) Taylor: Für große k ist f/k klein; $f/k =: r$

$$\ln(1+r) = \cancel{\ln(1)} + r - r^2/2 + \mathcal{O}(r^3)$$

$$g_k = f - \underbrace{f^2/2k}_{\to 0} + \underbrace{\mathcal{O}(f^3)}_{\to 0}$$

(3) e-Funktion: $\ln(1+f/k)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \ln e^f = f.$

Da sich g_k von unten an f annähert, gilt (für alle k):

$$\int g_k \, d\underline{x} \leq \int f \, d\underline{x} =: A \qquad (A > 0 \text{ da } f > 0 \Rightarrow \textstyle\int f > 0)$$

Mit dem Satz von monotoner Konvergenz folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k \, d\underline{x} = \int \lim_{k\to\infty} g_k \, d\underline{x} = \int f(x) \, d\underline{x}.$$