

① Durch das AWP läuft genau eine max. Integralkurve. Diese läuft von Rand zu Rand des Gebietes, auf dem sie definiert ist. Wenn wir zeigen können, dass ein best.  $\xi$  existiert, an dem  $y(x)$  (die max. Int'-kurve) einen Pol hat, dann läuft sie an dieser Stelle gegen  $y \rightarrow \infty$ , also gegen den Rand von dem Def'-bereich von  $y$  und somit auch gegen den Rand des Def'-bereichs von  $x$ . Dann ist  $y(x)$  lediglich auf  $[x_0, \xi)$  definiert, was zu zeigen ist.

1.  $y' \geq c \cdot (1 + |y|^{1+\alpha}) \Rightarrow y' \geq c$ . Das AWP.

Integrierbar nach:  $y \geq c \cdot x + A$ . Best.  $A$  mit

AWP  $y_0 = y(x_0)$ :  $y_0 \geq c \cdot x_0 + A \Rightarrow A \leq \frac{y_0}{c \cdot x_0}$ .

$y \geq c \cdot x + \frac{y_0}{c \cdot x_0}$ . Für  $x \geq x_1 = (1 - \frac{y_0}{c \cdot x_0})/c + \varepsilon$

( $\varepsilon > 0$ ) ist  $y(x) > 1 =: y_1$ .

2. Für  $x > x_1$  ist folglich  $y$  positiv und  $y' > 1$ , also

streng monoton wachsend. Aus  $y' \geq c \cdot (1 + |y|^{1+\alpha})$

folgt so wg.  $|y| = y$ :  $y' \geq c y^{1+\alpha}$ . (†)

Def.  $\kappa$  als  $\kappa(x)$  mit  $\kappa'(x) = c \kappa^{1+\alpha}$ . Lsg. durch

Trennung der Variablen:  $\int \frac{d\kappa}{\kappa^{1+\alpha}} = c \cdot x + D = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\kappa^\alpha}$ ,

damit  $\kappa = \frac{\sqrt[\alpha]{-1}}{\sqrt[\alpha]{2cx+D}}$ .  $\kappa$  soll AWP  $\kappa(x_1) = y_1$  er-

füllen:  $\frac{-1}{\sqrt[\alpha]{2cx_1+D}} = \frac{1}{y_1^\alpha} \Rightarrow D = -\frac{1}{y_1^\alpha} - \alpha c x_1$ . (Dies ist

sehr negativ). Damit ist  $\kappa$  eine Minorante für

Lösung  $y$ , also  $y \geq \kappa$  (vgl. (†)).  $\kappa$  hat eine

Polstelle bei  $x_p = (\frac{1}{y_1^\alpha} + \alpha c x_1)/\alpha c$ . Für  $\alpha c =: R$

wäre:  $x_p = 1/R + x_1$ . Dann  $\alpha, c$

3. Da  $\alpha, c > 0$  ist auch  $R > 0$  und damit  $x_p > x_1$ .

$x_p = \xi$  erfüllt damit die oben gen. Bed.

□



3)

(a) Die Vektoren  $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  sind stets senkrecht:

$$\left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = xy - yx = 0, \text{ also l.u.}$$

Die Lin'komb  $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + (1-x^2-y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{0}$  hat nur eine Lösung:  $x=y=0$ , dies ist der einzige kritische Punkt  $x_k = \underline{0}$ .

(b) Ansatz:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \phi \\ B \sin \phi \end{pmatrix}$ , einsetzen:

$$\left. \begin{aligned} -A \sin \phi &= B \sin \phi + 0 \\ B \cos \phi &= -A \cos \phi + 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -B$$

$$\text{Mit MWP: } \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=1, B=-1$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

(c) Da  $\varphi(t)$  einen Kreis mit Rad. 1 beschreibt, sind sich Integralkurven nicht schneiden, müssen weitere Lsg., die immerhalb des Kreises verlaufen, existieren können.

$$\begin{aligned} (d) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' \\ r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r' \cos \theta \\ r' \sin \theta \end{pmatrix} + (1-r^2) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Vekt.  $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$  sind l.u., daher Koeff'vgl.:

$$r' = (1-r^2) \cdot r \quad (1.\text{-Zeile, } \cos \theta\text{-Terme})$$

$$-r \theta' = r \Leftrightarrow \theta' = -1 \quad (2.\text{-Zeile, } \sin \theta\text{-Terme})$$

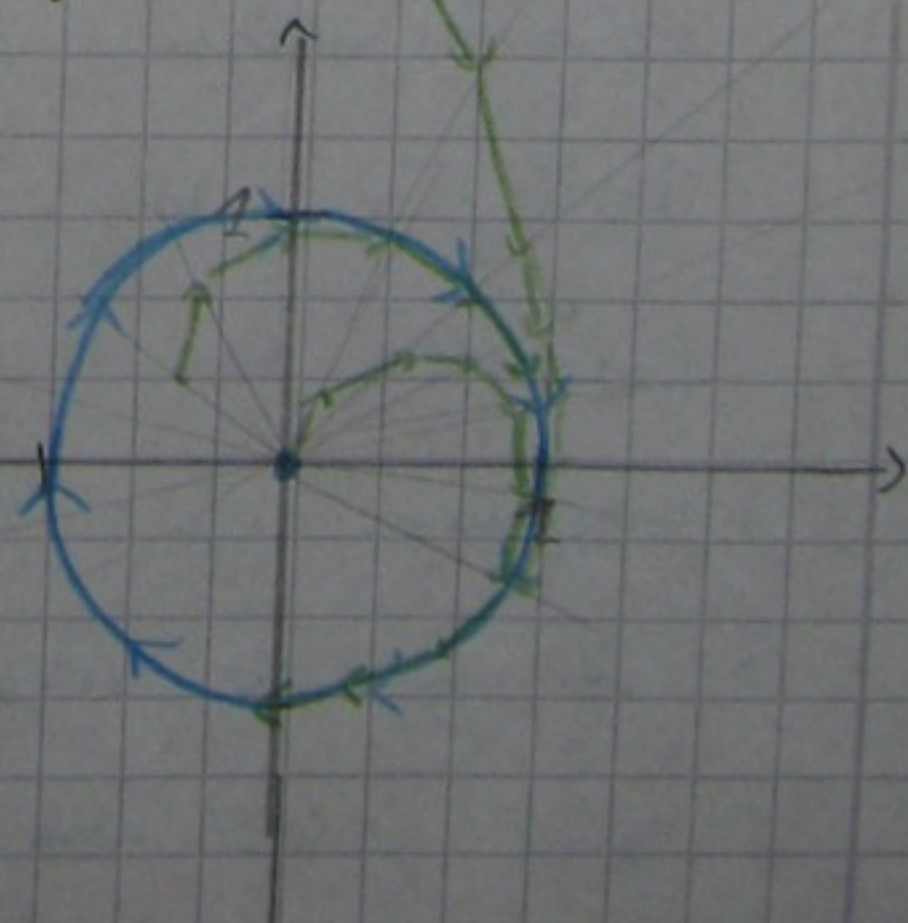
(e) Es ist  $\theta = -t$ ,  $r' = r - r^3$ , also

$r' \geq 0$  für  $r \leq 1$ , mon. wachsend,

strebt gegen  $r=1$ . Für  $r > 1$ :

$r' < 0$ , also mon. fallend, strebt

gegen  $r=1$ .





[7] Sei  $\phi(t)$  Lösung von  $x' = v(x)$  Damit die Abl.  
 $x' = \alpha(x) \cdot v(x)$  ( $\cdot$  als  $\frac{d}{dt}$ ) (†)

die selbe Sprünge hat wie  $\phi(t)$ , muss es eine Transformation  $u$  geben, sodass  $\phi(u(t))$  Lösung von (†) ist. Wir können dann Bedingungen an  $u(t)$  finden:

$$\phi'(t) = v(\phi(t))$$

$$[\phi(u(t))]' = \phi'(u(t)) \cdot u'(t) = \alpha(\phi(u(t))) \cdot v(\phi(u(t)))$$

Setzen wir  $u(t) =: \tau$  können wir die beiden Gl. gegeneinander vergleichen:

$$\phi'(t) = v(\phi(t))$$

$$\phi'(\tau) \cdot u'(t) = \alpha(\phi(\tau)) \cdot v(\phi(\tau)) ;$$

das liefert die Abl.

$$u'(t) = \alpha(\phi(\tau)) = \alpha(\phi(u(t))).$$

Nach dem Existenzsatz von Peano existieren Lösungen  $\phi(t)$  für  $x' = v(x)$  und sind diff'bar. Da  $v$  stetig ist, existiert mit besagtem Existenzsatz auch eine diff'bare Lösung für  $u(t)$  (weil  $\alpha \circ \phi$  stetig ist, wenn  $\alpha, \phi$  stetig sind).

Bem.: Dass  $u(t)$  nicht eindeutig sein, wenn  $\alpha$  nicht Lipschitz-stetig ist, was für uns aber kein Problem ist, weil ja nur die Sprünge interessant sind.



# Räuber-Beute-Modell

---

Michael Kopp

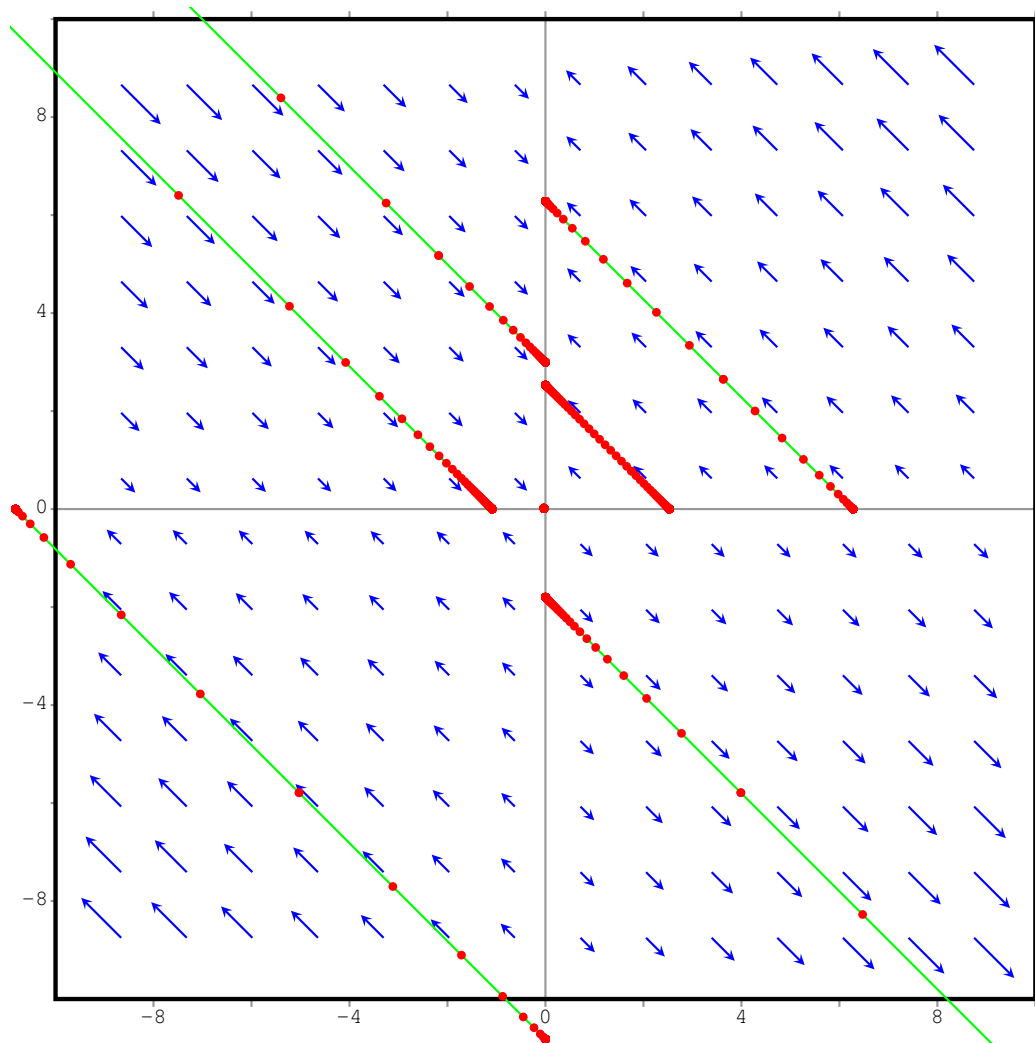
---

Mit `maxima` sollen hier Diagramme des *Räuber-Beute-Modells* erstellt werden; dafür notwendig: Paket `plotdf` und `xmaxima`.

1.

$$a(y) = -y \text{ und } b(x) = -x$$

```
(%i2) a(y) := -y; b(x) := -x;
(%o2)
(%o3) a(y) := - y
      b(x) := - x
(%i4) plotdf([x*a(y), -y*b(x)]);
```

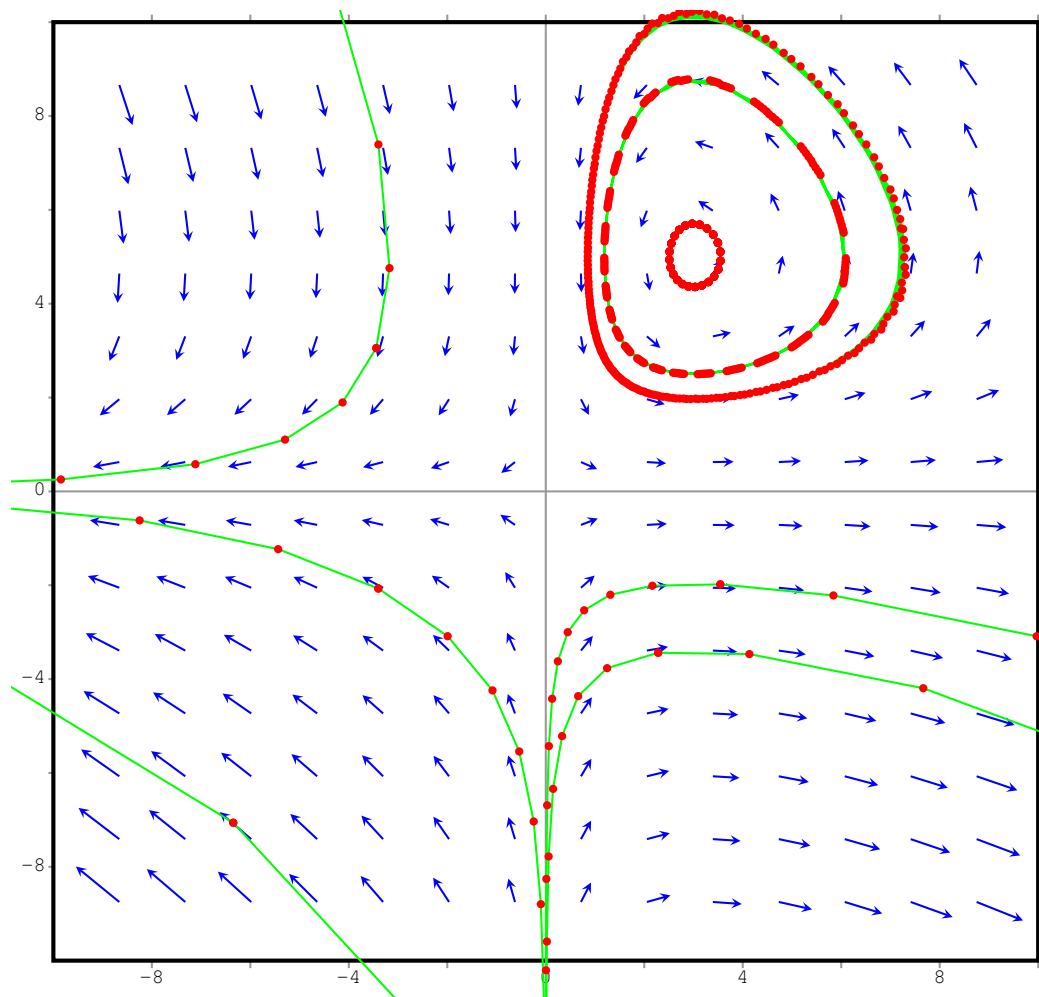


Die hier gewählten  $a$  und  $b$  gelten eigentlich nicht, weil die Nullstellen  $\xi$  und  $\eta$  beide 0 sind...

2.

$$a(y) = 5 - y \text{ und } b(x) = 3 - x$$

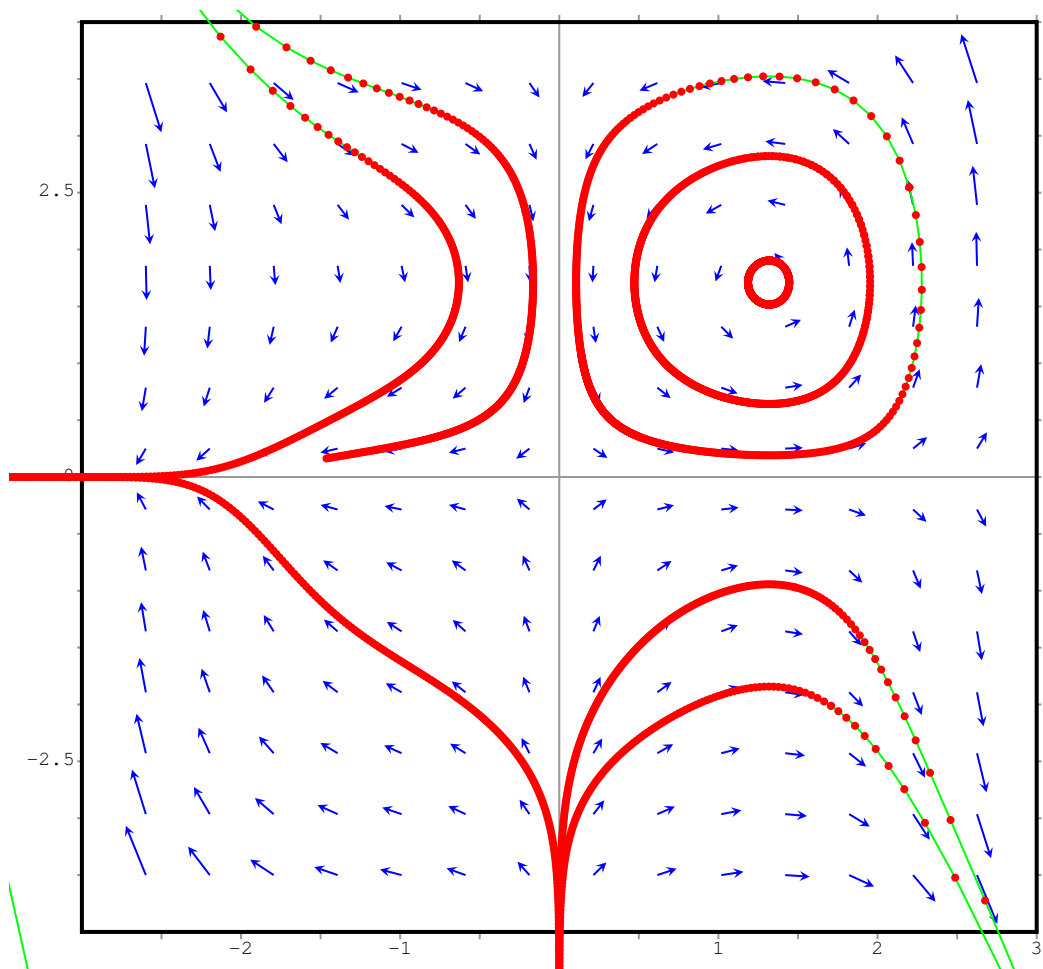
```
(%i5) /* wähle Funktionen a und b: */ a(y) := 5-y; b(x) := 3-x;
(%o5) a(y) := 5 - y
(%o6) b(x) := 3 - x
(%i7) plotdf([x*a(y), -y*b(x)]);
```



3.

$$a(y) = 5 - y^3 \text{ und } b(x) = 4 - x^5$$

```
(%i8) /* waehle Funktionen a und b: */ a(y) := 5-y**3; b(x) := 4-x**5;
(%o8) a(y) := 5 - y
      5
(%o9) b(x) := 4 - x
(%i10) plotdf([x*a(y),-y*b(x)], [x,-3,3], [y,-4,4], [tstep,0.002], [nsteps,300])
```



Die Blauen Pfeile geben stets das eigentliche Lösungsvektorfeld an und die grünen Linien und roten Punkte sind ausgewählte beispielelösungen. Dabei sind die Punkte äquidistant in der Zeit (also wo die Punkte weit auseinander liegen war die „Bewegung“ der Lösungskurve schnell, wo sie nahe beieinander sind entsprechend langsam).