Abirelevantes

Script

Marcel Beyl

Extycion – *www.extycion.de*

Allgemeine Grundlagen

- Potenzgesetz
- Wurzelgleichungen
- Tangentengleichung
- Fakultät, Binominalkoeffizient
- Nullstellenberechnung
- Folgen
- Folgen und Induktion

Absolute Grundlagen

- binomische Formeln
- Potenzgesetze :
  - $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
  - $a^p / a^q = a^{p-q}$
  - $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
  - $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
  - $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$

$\Rightarrow$ daraus auch Wurzelgesetze, da $\sqrt{a} = a^{1/2}$

$$\sqrt{a^p} = \sqrt{a}^{\,p} = a^{\frac{p}{2}}$$

- Bruchrechnen

- Wurzelgleichungen :

$$\sqrt{x-4} - \sqrt{x+8} = -2 \quad \Rightarrow x=8$$

$$\sqrt{x-4} = -2 + \sqrt{x+8}$$

$$x-4 = 4 - 4\sqrt{x+8} + x + 8$$

$$4 = \sqrt{x+8}$$

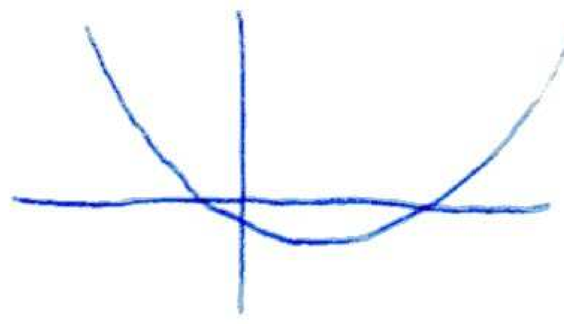
$$16 = x+8$$

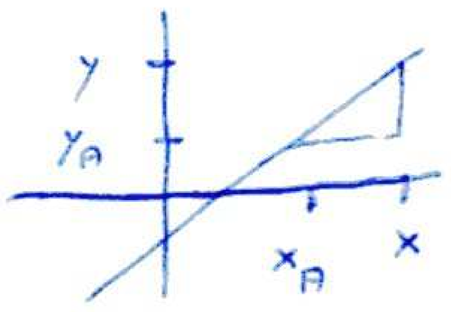
$$x = 8 \qquad \Rightarrow \text{Probe} : \checkmark$$

- log 1 , log 10 , log 100 ?
  0 , 1 , 2

$$10^{\log 83} = ? \quad \Rightarrow 83$$

Tangentengleichung





$\Rightarrow m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$

- Punktsteigungsform:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \quad , \quad m = f'(x)$$

$$y_A = y_0 \quad , \; x_A = x_0 \quad , \quad m = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \quad , \; y_0 = f(x_0)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Tangentengleichung

z. B. Abi '04 Wahlteil, Teilaufgabe c) (letzte)

Beispielaufgabe:

Das Schaubild K der Funktion f mit

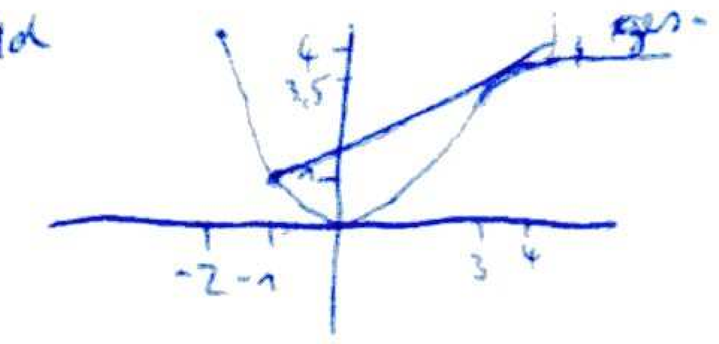
$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \; ; \; x \in \mathbb{R}$

beschreibt zwischen dem Hochpunkt H von K und dem Punkt $P(-2 / f(-2))$ modellhaft das Profil eines Flusstales. Das Profil des angrenzenden Geländes verläuft von H aus horizontal, von P aus in Richtung der Geraden durch P und den Punkt $Q(3 / f(3))$

$\Rightarrow H(4/4)$

Aufgabe: Bei Trockenheit ist der Wasserspiegel bis zum Punkt $R(-1 / f(-1))$ abgesunken. Ab welcher Höhe über H ist dieser Punkt zu sehen?

Schaubild



$\Rightarrow R(-1 / \frac{7}{8})$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$

also $\frac{7}{8} = \left(-\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x\right)(-1 - x) - \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

$x_1 = -1$

$x_2 = 3{,}5 \Rightarrow$ gesuchter Punkt (mit GTR gelöst), Tangente mit GTR

$h(x) = \ldots \Rightarrow 0{,}656x + 1{,}531$

$h(4) = 4{,}155 \Rightarrow$ Höhe: $0{,}155$

- Normale: $y = mx + c$

mit Steigung: negativer Kehrwert der Tangentensteigung

$\Rightarrow$ Aufgabe: Normalengleichung durch $R(-1 / \frac{7}{8})$

Fakultät, Binominalkoeffizient

Was bedeutet $n!$?

z.B. $3!$, $4!$

Umformung: $3! \cdot 4 = 4!$

oder allgemein $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$

=> Abi letztes Jahr (Induktion)

Binominalkoeffizient:

Rechenregeln: $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n} = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Bsp.: $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$

Regeln: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Nullstellenberechnung

- quad. Gleichung: von vorher (Parabelverschiebung)

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$\Rightarrow$ Nullstelle gesucht:

$$0 = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\frac{b^2}{4a} - c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\frac{b^2-4ac}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad |\sqrt{}$$

Wurzel aus positiven Zahlen

$\Rightarrow$ 2 Lösungen!

$$\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x + \frac{b}{2a} \quad |-\frac{b}{2a}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x_{1,2}$$

$\Rightarrow$ allg. Lösungsformel

- Substitution

Bsp. $2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

$x^2 = z$ $\quad z_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

$z_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ $\quad z_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}}$ $\quad x_{3,4} = \nexists$ da $\sqrt{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}}$ komplexe NS nur

- Polynomdiv:

Bsp.: $x^3 - 39x + 70 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2$ $\quad$ Polynomdiv. $\Rightarrow$ $x^2 + 2x - 35$

$x_2 = 5$

$x_3 = -7$

- Ausklammern: $2x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow x(2x-3) = 0$ $\quad x_1 = 0$

$x_2 = \frac{3}{2}$

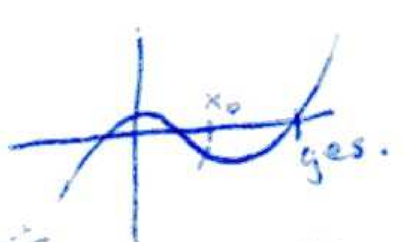
- Newton-Verfahren:

Tangentengleichung von vorher $= 0$

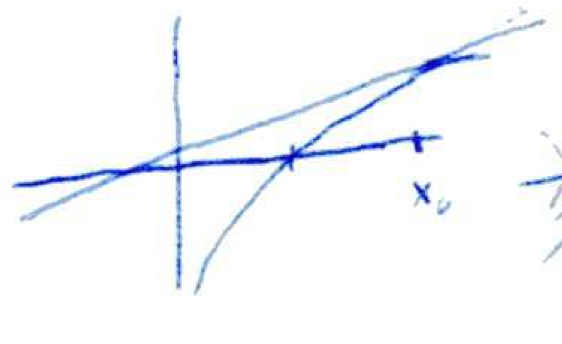
$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

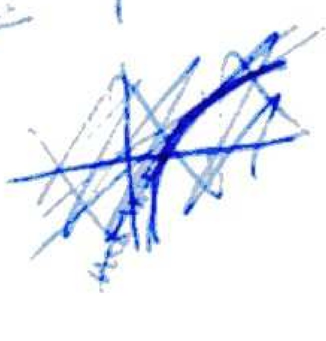
$$\Rightarrow \quad x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x \quad \xRightarrow{x = x_n,\ x_0 = x_{n-1}} \quad \text{TR: } ANS - \frac{Y_1(ANS)}{nDeriv(Y_1, X, ANS)}$$

Vorsicht bei:



Start: links von TP $\Rightarrow$ falsche NS





Start: rechts von NS

Bsp.: $0 = x^3 + 2x - 5$

Folgen

- Aufstellen von Formeln: explizit / rekursiv

Bsp.:

$A_0 = 1$

$A_1 = \frac{3}{4}$

$A_2 = \frac{9}{16}$ rekursiv: $A_{n+1} = A_n \cdot \frac{3}{4}$

$A_3 = \frac{27}{64}$ explizit: $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\Rightarrow$ eher selten im Abi

- Monotonie: monoton steigend: $a_{n+1} - a_n \geq 0$

monoton fallend: $a_{n+1} - a_n \leq 0$

Bsp.: Untersuche die Folge $a_n = \frac{8n}{n^2+1}$ auf Monotonie $\wedge$ Beschränktheit

1. Monotonie:

$$\frac{8n+8}{n^2+2n+2} - \frac{8n}{n^2+1} = \frac{8 - 16n^2 \cancel{a} - 16n}{n^4+2n^3+3n^2+2n+2} < 0 \Rightarrow \text{streng monoton fallend}$$

2. Beschränktheit:

Ja: obere Schranke bei $n = 1$

$\Rightarrow a_1 = \frac{8}{2} = 4 = S$

untere Schranke ist $s = 0$ (da GW $= 0$)

- Konvergenz:

monoton + beschränkt $\Rightarrow$ konvergent

$\not\Leftarrow$! Bsp.: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = a_n$

Konvergenz Es gibt einen Grenzwert, $\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{N(\varepsilon) \in \mathbb{N}}\ \forall_{n \geq N(\varepsilon)}\ |a_n - g| < \varepsilon$

- Bsp.: Zeige mit der Definition der Konvergenz, dass deine Vermutung des Grenzwertes von $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ äquivalent zum wirklichen Grenzwert ist.

$$\Rightarrow \left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2n+2}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-3}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{n+1} < \varepsilon$$

$$3 < \varepsilon(n+1)$$

$$\frac{3}{\varepsilon} - 1 < n \quad ▨$$

- Bsp.: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$$

$$n \log\left(\frac{1}{2}\right) < \log \varepsilon$$

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log \frac{1}{2}} \quad ▨$$

Folgen ∧ Induktion — normalerweise höchstens Induktion, Folgen eher selten

- Explizite und rekursive Formulierungen:
- Konvergenz, Monotonie, Beschränktheit
- Grenzwerte
- INDUKTION : versch. Typen:
  - Summenformel beweisen (a)
  - Teilbarkeit beweisen (b)
  - Ungleichung beweisen (c)
  - Ableitungsregel beweisen (am öftesten) (d)

Aufgabenbeispiele zur Induktion:

(a) Beweise für $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$3+7+11+\dots+(4n-1) = n(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = n(2n+1)$$

IA: $n=1 \Rightarrow 3 = 1\cdot 3 = 3$ ✓

IV: Es sei für $n=k$ wahr, dass

$$\underline{3+7+\dots+(4k-1)} = k(2k+1)$$

IS: ! $n=k+1$ wahr

$$\Rightarrow \underbrace{3+7+\dots+(4k-1)}+(4(k+1)-1) = (k+1)(2(k+1)+1)$$

$$k(2k+1)+(4(k+1)-1) \overset{!}{=} (k+1)(2(k+1)+1)$$

$$(2k^2+k)+(4k+3) = (k+1)(2k+3)$$

$$= 2k^2+3k+2k+3$$

$$2k^2+5k+3 = 2k^2+5k+3 \quad \blacksquare$$

(b) $\forall_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2}$ 6 teilt n^3-n

$$\frac{n^3-n}{6} = z, \quad z\in\mathbb{Z}$$

IA: $n=2$ $\quad 1 = z$ ✓

IV: Es sei $\frac{k^3-k}{6} = z$

IS: $n=k+1 \Rightarrow$ z.z. $\frac{(k+1)^3-(k+1)}{6} = z_1$

$$= \frac{k^3+3k^2+3k+1-k-1}{6} = \frac{k^3+3k^2+2k}{6} = z_1$$

$$= \frac{(k^3-k)}{6} + \frac{3k^2+3k}{6} = z_1$$

$$= z + \frac{3k^2+3k}{6} = z_1$$

$$= \frac{3k^2+3k}{6} = z_0 = \frac{k^2+k}{2} = \frac{k(k+1)}{2} = z_0 \quad \blacksquare$$

(c) $2^n > 4n$, $n \geq 5$

IA ✓

IV $2^k > 4k$

IS $2^{k+1} > 4(k+1)$

$$\Rightarrow 2^k\cdot 2 > 4(k+1)$$

$$4k\cdot 2 > 4k+4$$

$$8k > 4k+4$$

$$4k > 4 \quad \blacksquare$$

zu Induktion

(c) Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion die verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \geq 0 \; \forall i = 1, \dots, n$, dann gilt:

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

(IA) $1+x_1 = 1+x_1$ ✓

(IV)$_{n=k}$ $(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k$

(IS) $n = k+1$

$$\underbrace{(1+x_1)(1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_k)} \cdot (1+x_{k+1}) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad (1+x_1+x_2+\ldots+x_k)(1+x_{k+1}) \overset{?}{\geq} 1+x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1} \quad \Big| : (1+x_1+x_2+\ldots+x_k)$$

$$1+x_{k+1} \geq \frac{1+x_1+x_2+\ldots+x_k}{\text{---}\;\;''\;\;\text{---}} + \frac{x_{k+1}}{1+x_1+x_2+\ldots+x_k}$$

$$1+x_{k+1} \geq 1 + \frac{x_{k+1}}{1+\ldots+x_k}$$

$$x_{k+1} \geq \frac{x_{k+1}}{1+\ldots+x_k} \quad ✓, \text{ da alle } x \geq 0$$

∎

(d) Die Ableitung der Funktion h_1 mit $h_1(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ und die Produktregel werden als bekannt vorausgesetzt.

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Funktion h_n mit

$$h_n(x) = \frac{1}{x^n} \; ; \; x \neq 0$$

die Ableitung $h_n'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ hat.

⇒ Abi '04, I3., 4 P.

(IA) $h_1(x) = \frac{1}{x}$ $\quad h_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ✓

(IV) $h_k(x) = \frac{1}{x^k}$, $x \neq 0$ stimme
$\Rightarrow h_k'(x) = -\frac{k}{x^{k+1}}$

(IS) $h_{k+1}(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \Rightarrow h_{k+1}'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}$

$$h_{k+1}(x) = \frac{1}{x^{k+1}} = \frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{x}$$

Ableitung von $\frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^k}\right)' \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$

$$= -\frac{k}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{x} + -\frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{k}{x^{k+2}} - \frac{1}{x^{k+2}} = -\frac{k+1}{x^{k+2}}$$

∎

zu Induktion

(d) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $x \neq 1$

Man kenne alle wichtigen Ableitungsregeln

Zeige, dass für die n-te Ableitung gilt: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$, $x \neq 1$

$\Rightarrow$ (IA) ✓

(IV) $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(x-1)^{k+1}}$, $x \neq 1$

(IS) $f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)!}{(x-1)^{k+2}}$, $x \neq 1$

$$= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^{k} \cdot (k)!}{(x-1)^{k+1}}\right)'$$

$$= (-1)^{k} \cdot (k)! \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{(x-1)^{k+1}}\right)'}_{\left((x-1)^{-k-1}\right)' = \frac{-(k+1)}{(x-1)^{k+2}}}$$

$$= (-1)^k \cdot (k)! \cdot \frac{-(k+1)}{(x-1)^{k+2}}$$

$$= \frac{(-1)^k \cdot k! \cdot (-1) \cdot (k+1)}{(x-1)^{k+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)!}{(x-1)^{k+2}} \quad \blacksquare$$

Grundlagen Analysis

- Verschiebungen
- Stetigkeit / Differenzierbarkeit
- Ableitungsregeln
- Ableitung zur Funktionsuntersuchung
- Funktionen skizzieren

Verschieben von Parabeln

- Scheitelform: $f(x) = a(x-b)^2 + c$

streken / stauchen	Verschiebung in x-Richtung	Verschiebung in y-Richtung
⇒ $\|a\| > 1$ schmäler sonst: breiter		

Bsp.:

- Skizziere

$$f(x) = 2(x-3)^2 + 4$$

- Verschiebe $f(x) = 3x^2$ um 2 nach links und 1 nach unten

- Was, wenn nicht Scheitelform?

⇒ quadratisches Ergänzen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

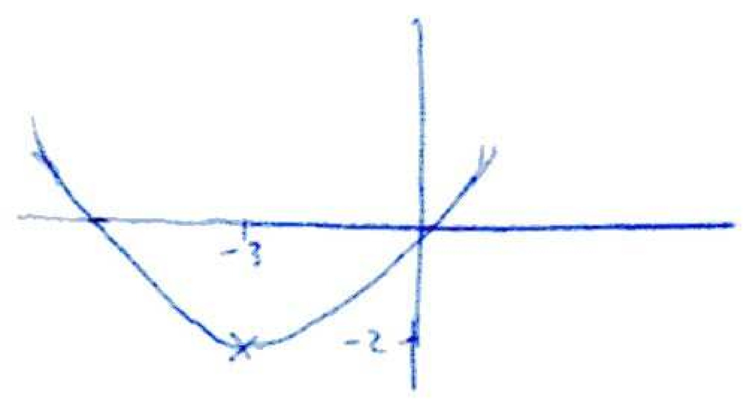
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Bsp.:

- Skizziere $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 2{,}5$

⇒ $f(x) = 0{,}5(x+3)^2 - 2$

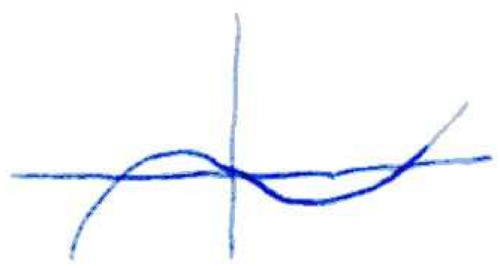


Stetigkeit, Differenzierbarkeit

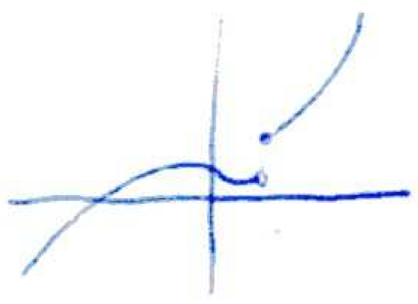
- Stetigkeit: $\forall_{x_0 \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta(\varepsilon, x_0) > 0} \forall_{x \in U_\delta(x_0) \cap X} \; f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

oder: durchzeichnen ohne abzusetzen

Bsp.:



=> stetig



=> nicht stetig

- Differenzierbarkeit:

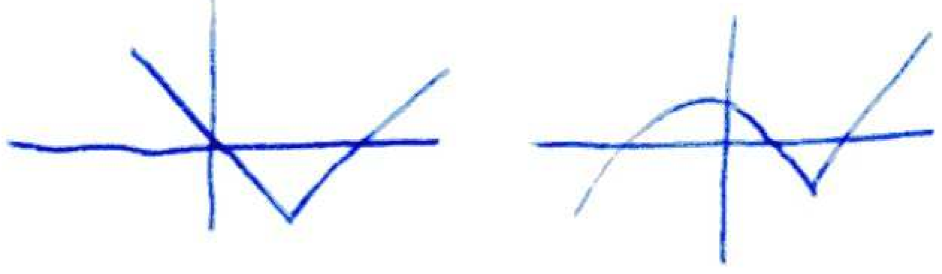
Steigung ist gleich, wenn man linkes kommt und wenn man von rechts kommt (und nicht absetzt)

In einem Punkt $x_0 \in X$ gilt $\quad f'(x_{0-}) = f'(x_{0+}) \quad \Leftrightarrow$ diff.bar

$\wedge \; f(x_{0+}) = f(x_{0-})$

oder auch: diffbar $\Leftrightarrow$ kein Knick $\wedge$ Funktionswert gleich

Bsp.:



nicht diffbar

diffbar

Bsp.: Ist $|x|$ in $x_0 = 0$ diff.bar?

1. Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$f(x_{0+})$ ~~..~~ $\rightarrow 0 \quad , \quad f(0) = 0$

$f(x_{0-}) \quad \rightarrow 0$

=> stetig

2. Diffbarkeit:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

=> in $f'(x_{0+})$ bzw. $f'(x_{0-})$ ungleich

=> nicht diff.bar

Ableitungen

- Kettenregel: innere · äußere Ableitung

Bsp.: $f(x) = (2x+3)^2$

$f'(x) = 2 \cdot 2\,(2x+3) = 4\,(2x+3)$

- Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Bsp.: $f(x) = \sin x \cdot x$

$f'(x) = \cos x \cdot x + \sin x \cdot 1$

- Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$

Bsp.: $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$

$f'(x) = \frac{\cos x \cdot 2x - \sin x \cdot 2}{4x^2}$

⇒ Immer Aufgabe 1 im Abi ⇒ wichtig: da

1. Psychologisch
2. Punkte geschenkt

Beispiele aus Abi's bzw. von mir:

a) $f(x) = \cos(2x)$

b) $f(x) = (\cos(x))^2$

c) $f(x) = (1+\sin x)^2$

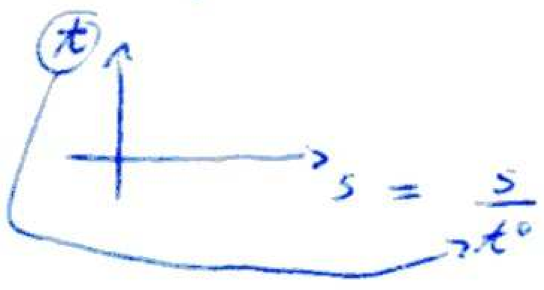
d) $f(x) = \frac{1}{8}\sin(4x^2)$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

Die Ableitung – Funktionsuntersuchung

- Sinn der Ableitung: – momentane Änderungsrate, Steigung
  - Einheiten (wichtig): Hochzahl im Nenner vergrößert sich um 1, Bsp.

$$f(x) = \ldots \quad \underbrace{s}_{\text{Einheit}} = \frac{s^1}{t^0}$$



$$f'(x) = \ldots \quad \text{Einheit } \frac{s}{t}$$

$$f''(x) = \ldots \quad \text{Einheit } \frac{s}{t^2}$$

$$f'''(x) = \ldots \quad \text{Einheit } \frac{s}{t^3}$$

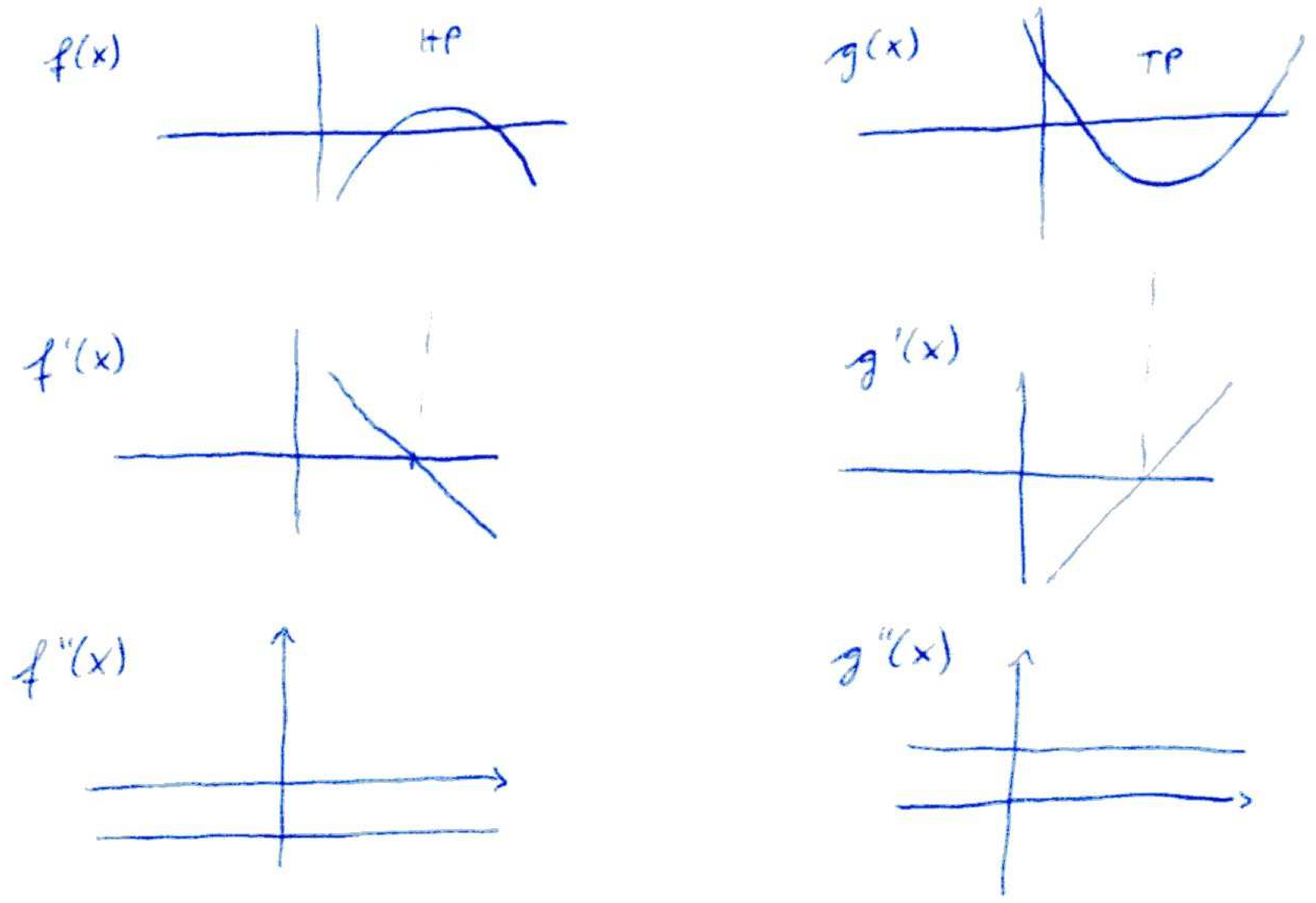
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

=> Ableitung von Strecke => Geschw., davon Ableitung => Beschleunigung, ...

- Differenzenquotient evtl.

- Funktionen + ihre charakteristischen Stellen:

Extremwerte:



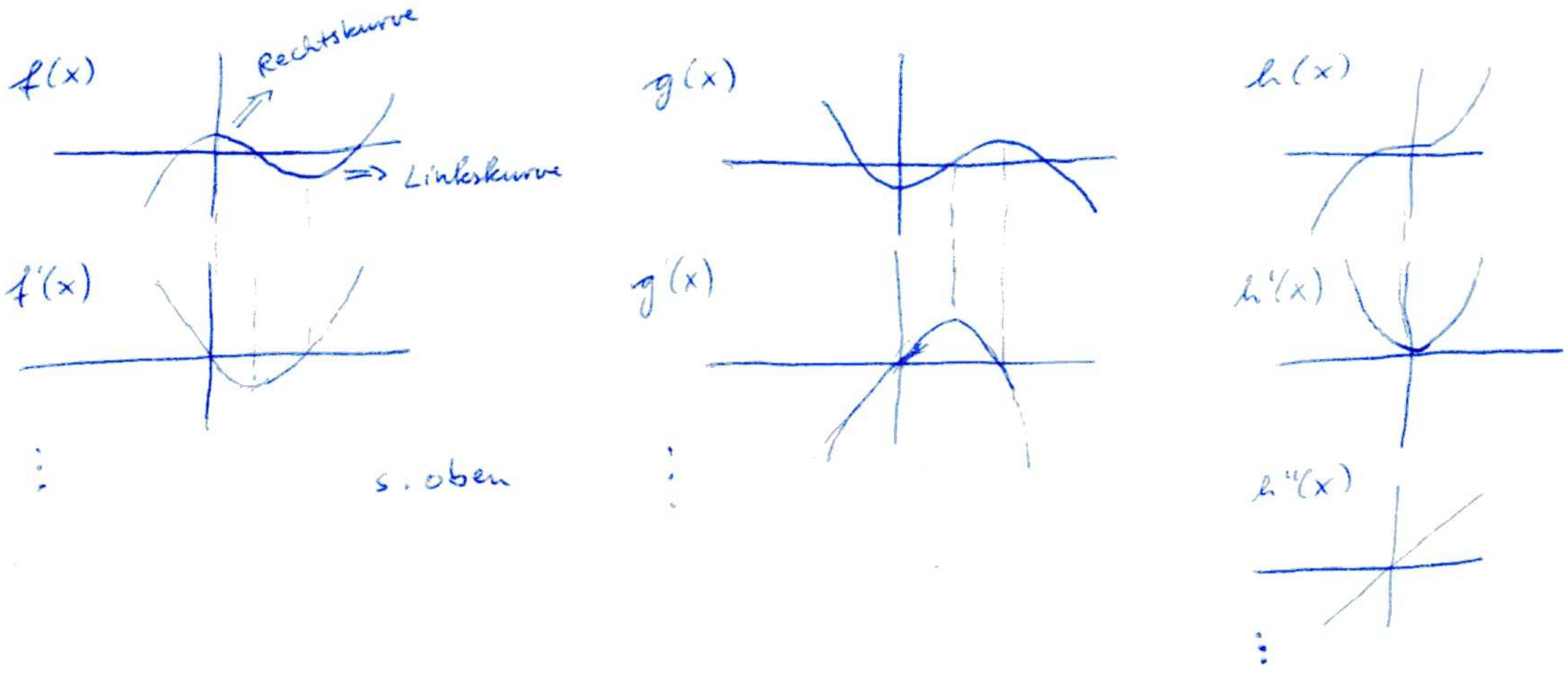
=> Bestimmen von Extremwerten:

I notwendig: $f'(x) = 0$

II hinreichend: · mit VZW in $f'(x)$ von + zu – => HP in $f(x)$
· mit —— " —— – zu + => TP

II b) hinreichend: · Zweite Ableitung $\neq 0$
=> a) $f''(x) > 0$ => TP in $f(x)$
b) $f''(x) < 0$ => HP

Wendepunkte:



⋮ s. oben ⋮

Skizzieren von Funktionen 1. - 4. Grades

- 1. Grades: $y = mx + c$
- 2. - 4. Grades:
  1. NS - Untersuchung $\Rightarrow$ Anzahl der NS $\leq$ Höchste Hochzahl (im Reellen, sonst =)
  2. Verhalten für $x \to \pm\infty$

  $\Rightarrow$ reicht für Skizze

1. ✓

2. Bsp.: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x - 2$ oder $f(x) = x^3 - 8001x^2 - 779x - 1003$

$f(x) = x^3\left(2 + \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$

$x \to \pm\infty$

$\Rightarrow$ 0 $\Rightarrow$ nur $2x^3$ wichtig

$f(x) = x^3\left(-\frac{8001}{x} - \frac{779}{x^2} - \frac{1003}{x^3}\right)$

$x \to \pm\infty$

0

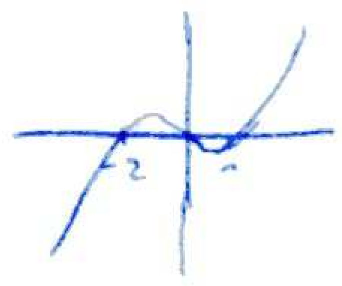
$\Rightarrow$ nur x^3 wichtig

$\Rightarrow$ skizziere

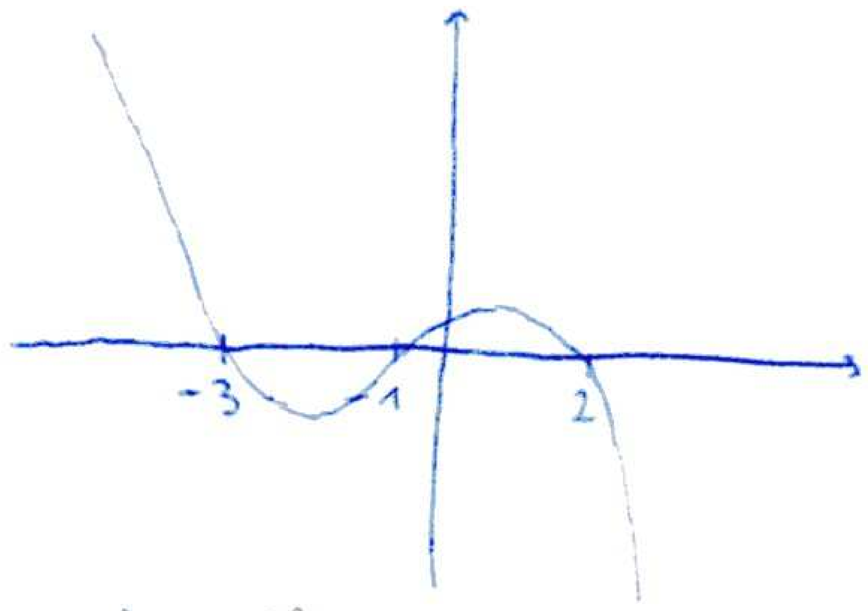
$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ (NS: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$)

$x \to \infty$ $f(x) \to \infty$

$x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$



- Aufstellen von Funktionsgleichung bei Funktionen 1. - 4. Grades (grob)



$\Rightarrow -\left[(x+3)(x+1)(x-2)\right]$

$\Rightarrow -\left[(x^2 + 4x + 3)(x-2)\right] = -\left(x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6\right)$

$= -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

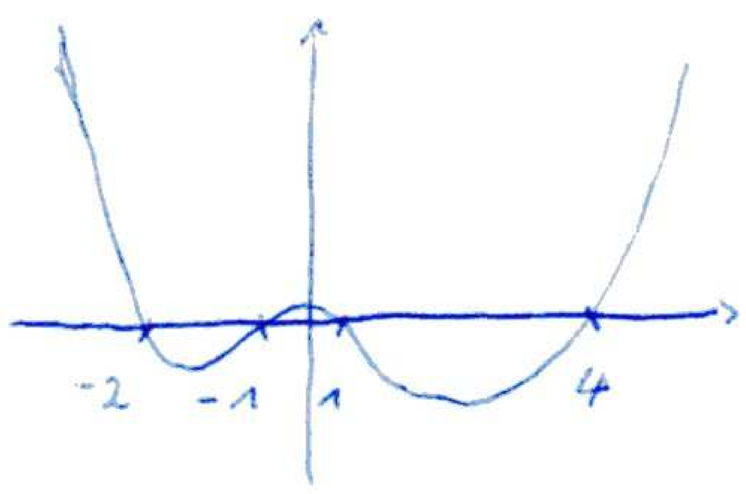
Bsp.: soll durch P(1 / 4) gehen

$\Rightarrow -\frac{1}{2}[\ldots]$

durch Punktprobe

evtl. Faktor davor, wenn noch HP o.ä. genau geg., oder genauen Punkt auf Funktion

$\Rightarrow$ im Pflichtteil genügt erkennen!



$\Rightarrow (x+2)(x+1)(x-1)(x-4)$

$= (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 5x + 4)$

$= (x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x^3 - 15x^2 + 12x + 2x^2 - 10x + 8)$

$= x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$

durch P(2 / -6) $\Rightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

Analysis

- Integrale
- e-Funktion
- Wachstum

Integrale

(1) ⇒ Umkehr der Ableitung
⇒ Wichtig für Pflicht- und Wahlteil

⇒ eig. in jedem Wahlteil (I 1.-3.), daher absolut erforderlich!

(2) - **Aufleitungsregeln**

(4) - Flächenberechnung (zw. Kurven, von einer Kurve, Rotationskörper, Näherungsverfahren)

(1) - Bedeutung

(3) - Skizzieren

(1) Wdh. Ableitung $\left(\frac{s}{t} \Rightarrow \frac{s}{t^2}, \ldots\right)$

Aufleitung genau andersrum $\left(\frac{s}{t^2} \Rightarrow \frac{s}{t} \Rightarrow s\right)$, Bsp.: Eine Pflanze wächst ... $\frac{m}{Tag}$.
Wie viel wächst sie in 5 Tagen? ⇒ Angabe in m, also $\frac{m}{Tag}$ aufleiten ⇒ m

⇒ Allgemein: Es werden Flächen unter Kurven berechnet

(2)
- $f(x) = m \cdot x^n$

$\Rightarrow F(x) = \frac{m}{n+1} x^{n+1} + c$

- $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow F(x) = U(x) + V(x) + c$
- $f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow F(x) = c \cdot U(x) + c$
- $f(x) = u(rx+s) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{r} U(rx+s) + c$

Beispiele:

$f(x) = 3x^2$
$f(x) = 2x^3 + 7x^{13} - 5x^2$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3$ (Abi '06)

$f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$ (Abi '05)

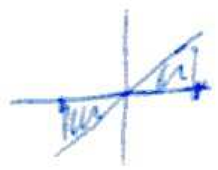
$f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin(2x)$ (Abi '04)

Bestimme eine Stammfunktion von g mit $g(x) = (2x+1)^3$, die an der Stelle 1 den Funktionswert 4 annimmt.

(3) siehe computergeschriebenes Skript

Notation: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

integrale
(2)

 $\Rightarrow$ Integral $= 0$
Fläche $\neq 0$

(4) Flächenberechnung $\Rightarrow$ Fläche $\neq$ Integral

1. Fläche unter einer Kurve:

Bsp.: $f(x) = x^2 - 2x$

(von Hand $\wedge$ mit GTR)

Bsp.: $f(x) = x + \frac{1}{4\sqrt{x}}$, $x > 0$

Fläche zw. 0 und 1 (Vorsicht!) $\Rightarrow \int_a^1 \dots dx$, $a \to 0$

Bsp.: $\int_2^b \frac{2}{x^2}\,dx$, für $b \to \infty$

2. Fläche zwischen zwei Graphen:

- allgemein $A = \left| \int_a^z (f(x) - g(x))\,dx \right| + \left| \int_z^b (g(x) - f(x))\,dx \right|$

wobei z der x-Wert des Schnittpunktes von f und g ist

- ohne Schnittpunkt: $A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \right|$

- GTR: fnInt(abs($Y_1 - Y_2$), X, ..., ...)

$\downarrow$ untere Grenze ; $\searrow$ obere Grenze

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$

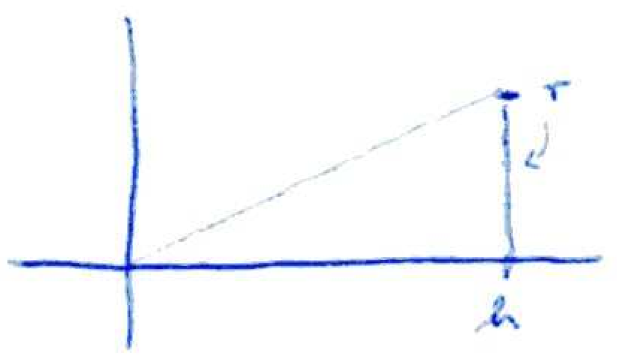
in $[1;3]$

Bsp.: $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \\ g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \end{array}\right\}$ Berechne Fläche, die eingeschlossen wird

3. Rotationskörper:

$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

- Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 4$



$f(x) = \underbrace{m}_{= \frac{r}{h}} x$

$a = 0$, $b = h$

$f(x) = \left(\frac{r}{h}\right) \cdot x \quad \Rightarrow m$

$\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2\,dx \Rightarrow \pi \left(\frac{1}{3}\left(\frac{r}{h}\right)^2 h^3\right) = \left(\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot h\right)\pi$

$= \frac{1}{3} \cdot \underbrace{r^2 \pi}_{G} \cdot h$

4. Fassregel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Bsp.: $\int_1^4 \frac{2}{x}\,dx$ + Frage: Prozentuale Abweichung zum richtigen Wert? $\frac{\text{Wert Fassregel}}{\text{Wert GTR}}$

e-Funktionen

(2) - ln, rechnen, Regeln

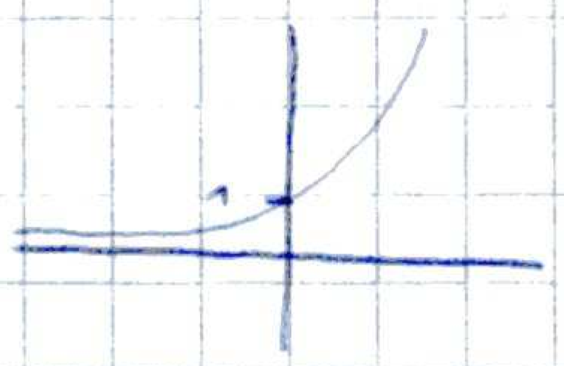
(3) - e-Funktionen: Aufl., Abl., z.B. 3^x ableiten, Ortslinie!

(4) - Wachstum

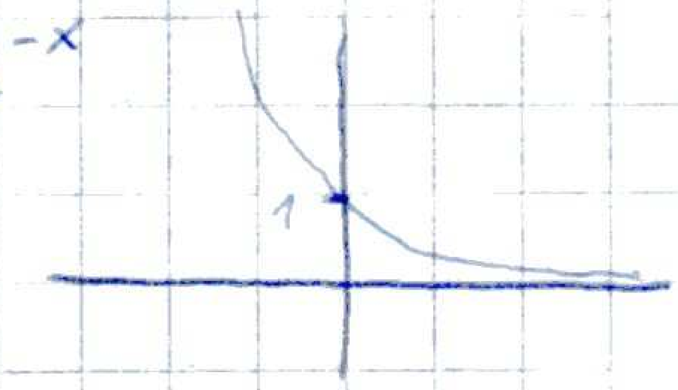
(1) - Skizzieren, erkennen, zuordnen (e-Funktionen)

Allgemein:

(1) e^x



$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

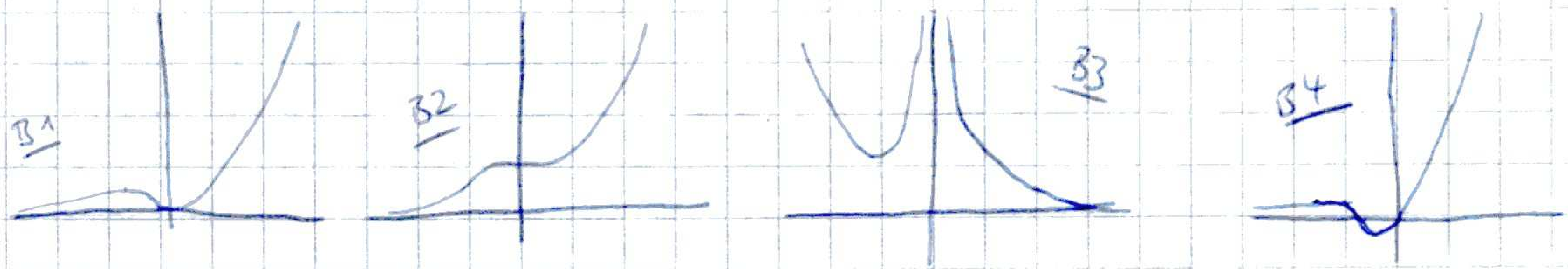


Abi '05 Pflichtteil 5.

Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2 e^x$, f', F und $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) Warum kann nur Bild 1 zu f gehören?

b) Ordne zu



$\Rightarrow$ f F g f'

(2) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x + c$

Regeln:
- $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$
- $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$
- $\ln(u^r) = r \cdot \ln(u)$!

$\ln e = 1$
$\ln 1 = 0$

Berechne Stammfunktion a) $f(x) = \frac{1}{3x-4} = (3x-4)^{-1}$

$F(x) = \ln(3x-4) \cdot \frac{1}{3}$

b) $f(x) = 1 - \frac{5}{2x+3}$

c) $f(x) = \frac{4}{x}$

$= 2e + 5 - 2$
$= 2e + 3$

d) $\int_1^e \frac{2x+5}{x}\,dx = \int_1^e 2 + \frac{5}{x}\,dx \Rightarrow [2x + 5\ln x]_1^e = 2e + 5\ln e - 2 - 5\ln 1$

e-Funktionen
(3)

- Ableitung: $f(x) = e^x$

$f(x) = e^{3x}$

$f(x) = 5^x \Rightarrow e^{x \ln 5}$

$f'(x) = \ln 5 \, e^{x \ln 5} = \ln 5 \cdot 5^x$

- Aufleitung:

$f(x) = e^x$

$f(x) = e^{3x}$

$f(x) = 5^x$

- $e^{\ln 5} = ? \Rightarrow 5$

$e^{\ln a} = a$

- Vereinfachen: $e^{2\ln(4x)} = e^{\ln(4x)^2} = (4x)^2 = 16x^2$

- Abi's

'07 · $\int_0^{\ln 2} e^{2x} \, dx$

· $e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$

'04 · $e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$ $u_1 = 2$, $u_2 = 9$

$2 = e^{2x}$ | $9 = e^{2x}$

$\ln 2 = 2x$ | $\ln 9 = 2x$

$\frac{1}{2} \ln 2 = x$ | $\frac{1}{2} \ln 9 = x$

$\frac{1}{2} \cdot \ln 3^2 = x = \ln 3$

(4) Wachstum

exp.: $f(x) = c \cdot e^{kx}$, $k = \ln a$, a := Wachstumsfaktor

$a > 1 \Rightarrow$ Wachstum $\Rightarrow k > 0$

Hz : $T_H = -\frac{\ln(2)}{k}$

Vz : $T_V = \frac{\ln(2)}{k}$

Diff. gl.:

$$f'(x) = k \cdot f(x) = k \cdot c \cdot e^{kx}$$

beschr.:

$$f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$$

$$f'(x) = k \cdot (S - f(x))$$

$\Rightarrow$ dazu Abiaufgaben

<u>Ortslinie</u>

Abi '04

$$f_k(x) = \frac{3ke^x}{e^{2x}+k} \quad , x \in \mathbb{R}$$

HP: $H_k\left(\frac{1}{2}\ln k \,/\, \frac{3}{2}\sqrt{k}\right)$

$\Rightarrow$ Ortslinie:

$x = \frac{1}{2}\ln k \Rightarrow 2x = \ln k \Rightarrow e^{2x} = k$

$y = \frac{3}{2}\sqrt{k} \Rightarrow y = \frac{3}{2}\sqrt{e^{2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{e^x \cdot e^x} = \frac{3}{2}e^x$

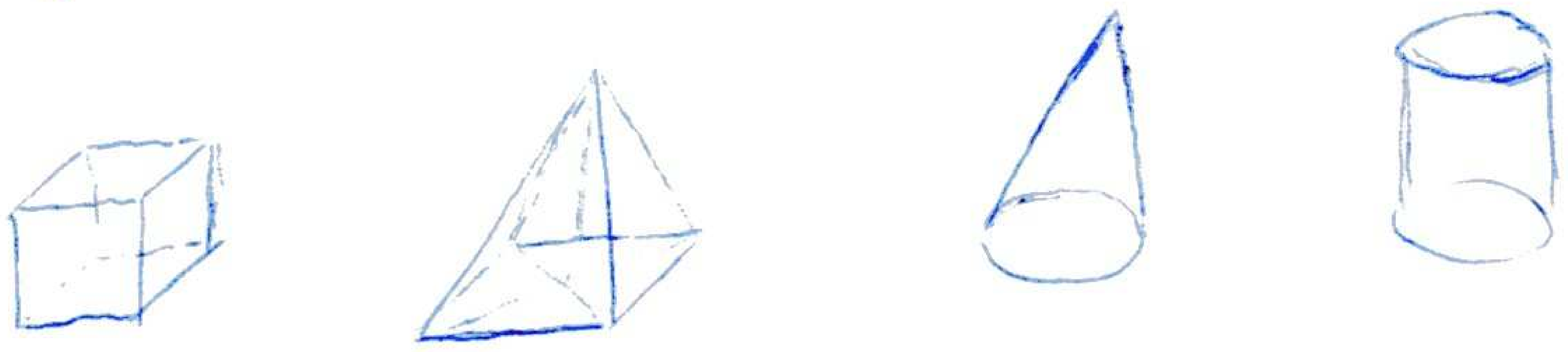
Grundlagen Geometrie

- Körperberechnungen
- Strahlensätze

Geometrie - Körperberechnungen

=> prinzipiell: Formelsammlung (geht, da Wahlteil)

wichtige Körper:



Basics:

Flächeninhalt Kreis: $A = \pi r^2$

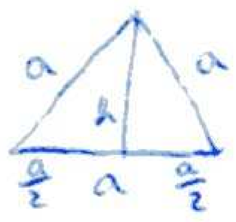
Umfang -"- $U = 2\pi r = \pi d$

↳ alles herleitbar daraus

=> s. Thema „Integrale, Rotationskörper" => Beweis Volumenberechnung von Kegel

Flächeninhalte:

gleichseitiges Dreieck



$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$h = ?$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$

$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

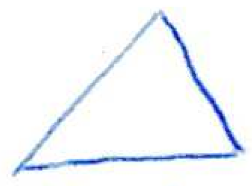
$h^2 = \frac{3a^2}{4}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

allgemein Dreieck:

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

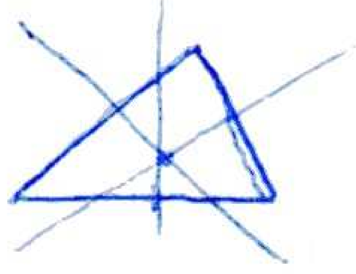
andere Dinge zum Dreieck:



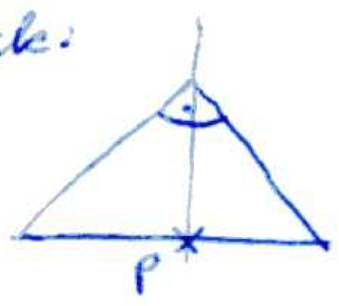
ges.: Punkt, der von allen 3 Seiten gleich weit entfernt ist

=> Umkreismittelpunkt

=> Schnittpunkt der 3 Mittelsenkrechten



- im gleichseitigem Dreieck: Umkreismittelpunkt = Schwerpunkt
- im rechtwinkligem Dreieck:

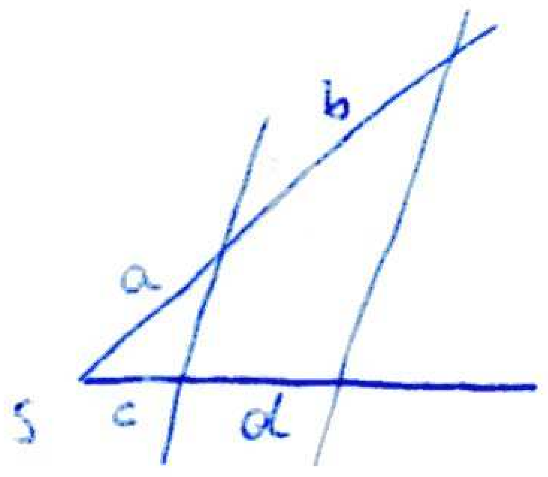


P => Mitte von $\overline{AB}$

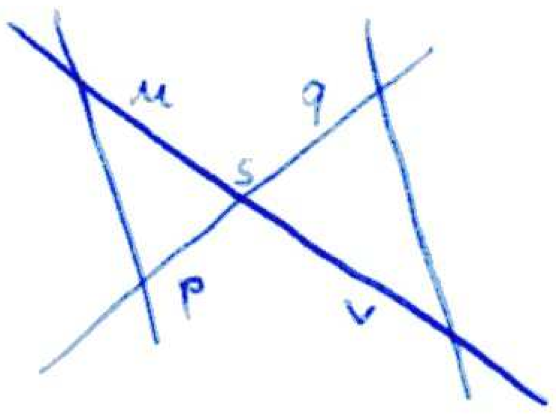
sonst => Formelsammlung

Strahlensätze

1. Strahlensatz

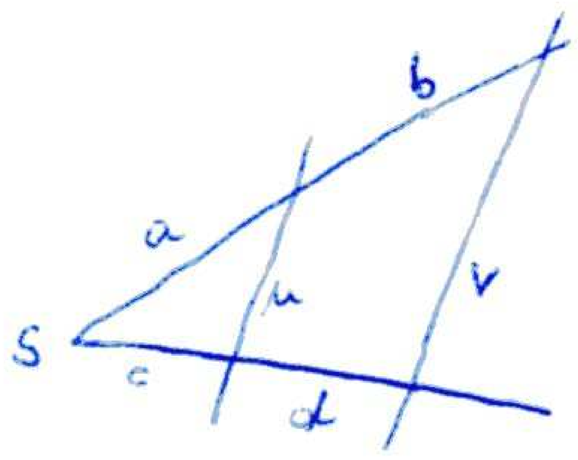


$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \; ; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

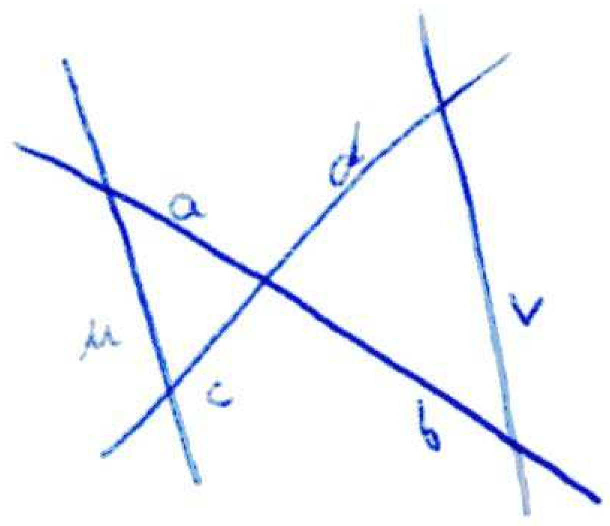


$$\frac{u}{v} = \frac{p}{q} \; ; \quad \frac{u}{u+v} = \frac{p}{p+q}$$

2. Strahlensatz



$$\frac{u}{v} = \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$



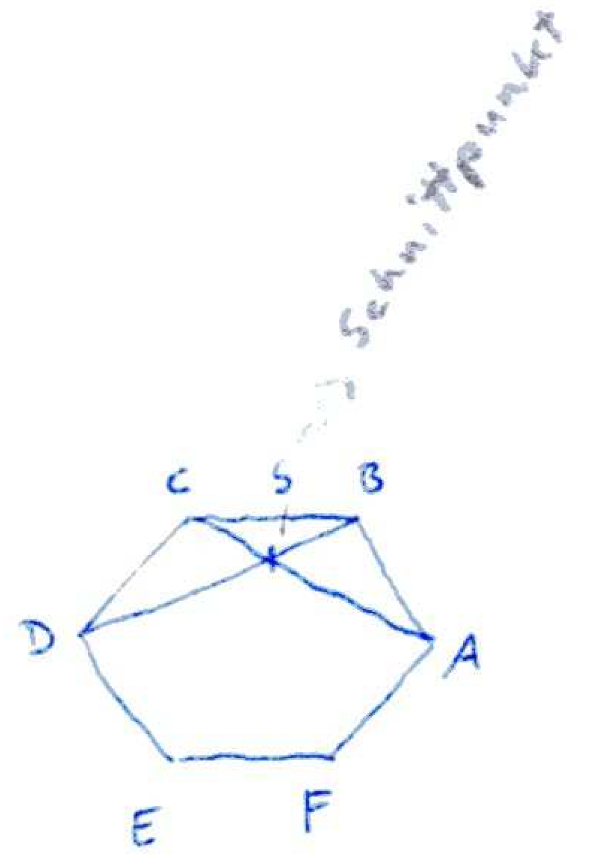
$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

⇒ Sehr wichtig für Wahlteil, Analytische Geometrie

Bsp. aus Abi: Abi '06 II 1 (Wahlteil)

Aufgabe II 1.2

Gegeben ist das Sechseck ABCDEF.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die
Strecken AC und BD teilen



⇒ relativ humaner Lösungsweg durch Strahlensätze:

1. BC ∥ AD, $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{BC}$

⇒ Strahlensatz: AD verbinden, es ergibt sich:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$$

⇒ AC und BD im Verhältnis 1:2 geteilt

Geometrie

- Lineare Gleichungssysteme
- Länge von Vektoren
- Lineare Abhängigkeit
- Teilverhältnisse
- Geradendarstellungen
- Untersuchung der Lage von Geraden
- Skalarprodukt
- Winkel
- Ebenengleichungen
- Umrechnungen für Ebenengleichungen
- Aufstellen von Ebenengleichungen
- Ebenen zeichnen
- Lage von Ebenen
- Abstände zwischen diversen Objekten
- Schnittwinkel

Analytische Geometrie (1)

(1) – LGS (GTR ∧ von Hand) (geometrisch deuten)

(2) – allgemein (Länge eines Vektors, etc.)

(1) Abi '05 Pflichtteil:

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

+ geo. Deutung

(2) – Länge von Vektoren: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

– Einheitsvektor: Vektor mit Betrag 1 / Länge 1 $\quad \vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a_0}|}$

– Lineare Abhängigkeit: $\lambda_i a_i = 0$, $\exists \lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ l.a.
$\forall \lambda_i = 0 \Rightarrow$ l.u.

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ l.a. / l.u.?

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r + 3s + 2t &= 0 \\ -r \quad\quad + 2t &= 0 \\ 2r + s - t &= 0 \end{aligned}$$

– in 3D höchstens 3 l.u.!

- Warum findet man für „?" keine Zahlen, so dass die Vektoren l.u. werden?

a) $\begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ ? \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ ? \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ ? \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ? \\ 7 \\ ? \end{pmatrix}$ $\quad$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ ? \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$

- Überprüfe, ob die Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen:

A(2|-5|0), B(3|4|7), C(4|-4|3), D(-2|10|5)

$\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ müssen l.a. sein, damit A, B, C, D in einer Ebene liegen

– Teilverhältnis:

Bsp. (1): T(17|32|36) liegt auf $\overline{AB}$, A(2|8|3), B(27|48|58),

in welchem Verhältnis teilt T $\overline{AB}$?

Bsp. (2): A(2|3|9), B(12|8|6) T teilt $\overline{AB}$ in 3:2

$\Rightarrow$ Bestimme Koord. von T

Analytische Geometrie (2)

- Darstellen von Geraden: $\vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + t \cdot \underbrace{\vec{u}}_{\text{Richtungsvektor}}$, $t \in \mathbb{R}$

- Gegenseitige Lage von Geraden:

  - schneiden
  - identisch
  - kein gem. Punkt – windschief / – parallel

⇒ gleichsetzen

Bsp.: · $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

· $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Aufstellen von Geraden durch

  z.B. $A(2|2|0)$, $B(0|4|2)$

- Skalarprodukt:

$$\vec{a} \, \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

da $\cos 90° = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

⇒ Bestimme Vektor, der zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal ist

⇒ Kreuzprodukt:

$$\begin{array}{cc} \cancel{3} & \cancel{6} \\ 2 & 5 \\ 4 & 4 \\ 3 & 6 \\ 2 & 5 \\ \cancel{4} & \cancel{4} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} 8 - 20 & = & -12 \\ 24 - 12 & = & 12 \\ 15 - 12 & = & 3 \end{array} \qquad \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

⇒ Zuhältermethode: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} 8 - 20 \\ 24 - 12 \\ 15 - 12 \end{array}$

Ebenen

Parameterform: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Normalenform: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

Koordinatenform: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

Wichtig: Umformung von Form zu Form!

Analytische Geometrie (3)

- Punkt A auf Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, soll von $P(5|1|0)$ und $Q(6|3|7)$ gleichen Abstand haben

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{QA}| \quad , \quad A(2+2t \,/\, 1+t \,/\, 3+2t)$$

$$|\overrightarrow{PA}| = |\vec{a} - \vec{p}| = \sqrt{(-3+2t)^2 + t^2 + (3+2t)^2} = \overline{QA} = |\vec{a} - \vec{q}| = \sqrt{(-4+2t)^2 + (-2+t)^2 + (-4+2t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 18 = 36t$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow A(3 \,/\, 1{,}5 \,/\, 4)$$

- Umformungen von Ebenendarstellungen:

Koord. $\Rightarrow$ Para: K. nach x_3 umstellen, $x_2 = x_2$, $x_1 = x_1$

Bsp.:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$$
$$\Rightarrow x_3 = -2x_1 + 3x_2 + 6$$
$$x_2 = x_2$$
$$x_1 = x_1$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para $\Rightarrow$ Koord.: (1) Kreuzprod. $\Rightarrow$ Normalenv.

z.B. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3x_1 - x_2 + 4x_3 = b$

$\vec{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ einsetzen $\Rightarrow b = 6$

Norm $\Rightarrow$ Koord.:

$$[\vec{x} - \vec{p}]\, \vec{n} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{x}\vec{n} = \vec{p}\vec{n}$$
$$x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$$

Koord. $\Rightarrow$ Norm.: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ + Punkt ermitteln $\Rightarrow$ für $\vec{p}$ einsetzen

Para $\Rightarrow$ Norm: (1) Kreuzprod.
(2) Punkt übernehmen

Norm $\Rightarrow$ Para: Bsp.: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot u_1 - u_2 + 5 \cdot u_3 &= 0 \\ 2 \cdot v_1 - v_2 + 5 \cdot v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ beliebige } u \wedge v \text{, aber nicht } u = v!$$

z.B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

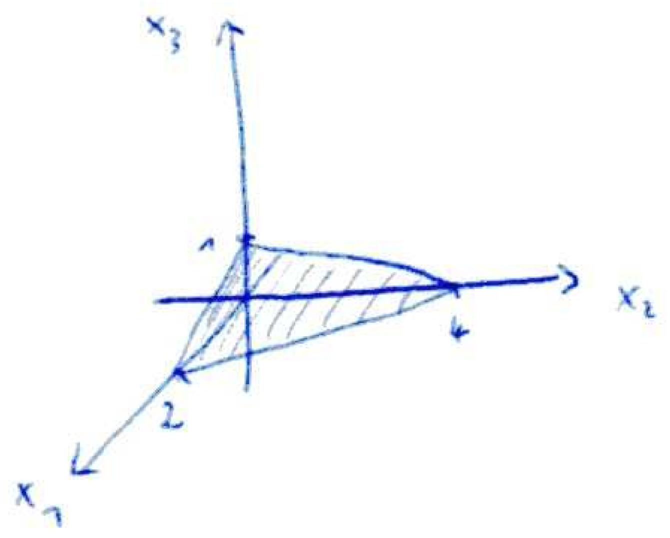
- Aufstellen von Koord. durch 3 Punkte $\Rightarrow$ $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|5|0)$, $S_3(0|0|3)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2a_1 &= b \\ 5a_2 &= b \\ 3a_3 &= b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{2} b \\ a_2 &= \tfrac{1}{5} b \\ a_3 &= \tfrac{1}{3} b \end{aligned} \qquad b = 30 \quad \Rightarrow \quad 15x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 30$$

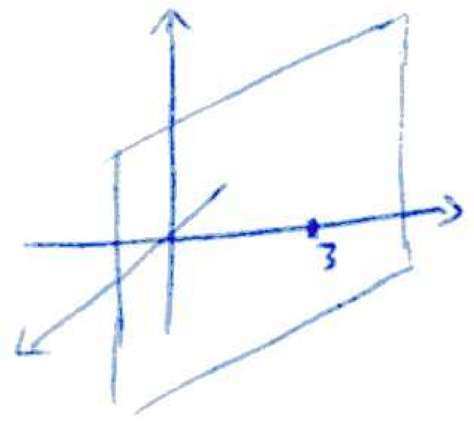
Analytische Geometrie (5)

- Zeichnerische Darstellung: z.B. $4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 8$

$S_1(2|0|0)$
$S_2(0|4|0)$
$S_3(0|0|1)$



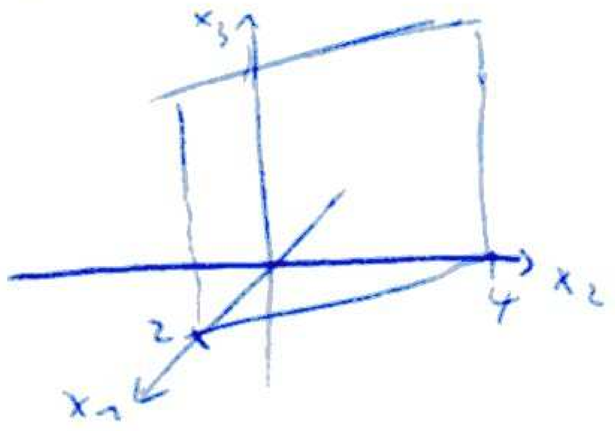
z.B. $x_2 = 3$



z.B. $4x_1 + 2x_2 = 8$

$S_1(2|0|0)$
$S_2(0|4|0)$

$\Rightarrow$ parallel zu x_3



- Lage von Ebenen – Ebenen: - Schnittgerade (evtl. orth.)
  - id.
  - para.

- Lage von Geraden – Ebenen: - Durchstoßpunkt
  - parallel
  - g in E ($g \subset E$)

Bsp.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad E: 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 49$

$\Rightarrow x_1 = 3 + 2t$
$x_2 = 4 + t$
$x_3 = 7 - t$

$\Rightarrow 2(3+2t) + 5(4+t) - (7-t) = 49$

$\Rightarrow t = 3 \Rightarrow D(9|7|4)$

Sind $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7$

und $3x_1 - x_2 + x_3 = 4$ orth.?

Analytische Geometrie (4)

Abstände

① **Punkt - Ebene:** Punkt $R(r_1/r_2/r_3)$ Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$, Ebene E, Normalenvektor $\vec{n}$

a) Ebenengleichung in Normalenform ($E: (\vec{x}-\vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$)

$$d = |(\vec{r}-\vec{p}) \cdot \vec{n_0}| \quad , \quad \vec{n_0} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \qquad \underbrace{(\vec{x}-\vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0}_{\text{Hesse'sche Normalenform}}$$

b) Koord.form ($E: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$)

$$d = \left| \frac{a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 - b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \right| \quad , \quad \underbrace{\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = 0}_{\text{Koord.darst. der Hesseschen Normalenform}}$$

c) Ebenengl. in Para. $\Rightarrow$ umwandeln

d) 3 Punkte der Ebene geg. $\Rightarrow$ Aufstellen von Ebene

② **Gerade - Ebene:** Falls $g \parallel E$: wähle R auf g, andernfalls: $d = 0$ ($\Rightarrow$ siehe ①)

③ **Ebene - Ebene:** Falls $E \parallel F$: Wähle R auf E (oder F), sonst $d = 0$ ($\Rightarrow$ siehe ①)

④ **Punkt - Gerade:** Punkt $R(r_1/r_2/r_3)$, Gerade g

- In $\mathbb{R}^2$: Es existiert eine Geradengleichung in Normalenform oder Koord.form (also auch $\vec{n}$)

$$d = |(\vec{r}-\vec{p}) \cdot \vec{n_0}| \qquad d = \left| \frac{a_1r_1 + a_2r_2 - b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \right|$$

Bsp.: $P(\underbrace{-1}_{x_1}/\underbrace{-1}_{x_2})$, $g: x_2 = 3x_1 - 5$ $\Rightarrow$ $\frac{|3x_1 - x_2 - 5|}{\sqrt{10}} = d = \frac{7}{\sqrt{10}}$

$3x_1 - x_2 = 5$

- In $\mathbb{R}^3$: Geradengleichung in Parameterform ($g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$)

$\Rightarrow$ Bestimme die zu g orthogonale Ebene E durch R in Koord. / Norm.

$\Rightarrow$ Bestimme Schnittpunkt S von g und E (S ist Fußpunkt des Lots von R auf g)

$\Rightarrow$ Berechne $|\overrightarrow{RS}|$

⑤ **Gerade - Gerade:** a) $g \parallel h$ $\Rightarrow$ wähle R $\Rightarrow$ ④

b) g und h windschief: $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ $\quad h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow$ Bestimme Vektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} \perp \vec{u} \wedge \vec{n} \perp \vec{v}$ (Kreuzprod.)

$\Rightarrow$ Bestimme $\vec{n_0} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d = |(\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{n_0}|$

⑥ **Punkt - Punkt** $A(a_1/a_2/a_3)$, $B(b_1/b_2/b_3)$, also $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$$

Bsp. zu ④ Punkt $R(2/-3/5)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. zu g orth. Ebene E durch R: $E: 2x_1 + x_1 - x_3 = b$ mit $R(2/-3/5)$ $\Rightarrow$ $2 \cdot 2 - 3 - 5 = -4 = 2x_1 + x_2 - x_3$

2. Fußpunkt, aus Gerade: $x_1 = 4 + 2t$, $x_2 = 3 + t$, $x_3 = 3 - t$ $\Rightarrow$ in Ebenengl.: $2(4+2t) + (3+t) - (3-t) = -4$ $\Rightarrow t = -2$

$\Rightarrow$ in Geradengl. $\Rightarrow$ $F(0/1/5)$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{RF}| = 4{,}47$

Analytische Geometrie (6)

Schnittwinkel

Gerade – Gerade:

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Gerade – Ebene

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$$E: (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

Ebene – Ebene

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

Abi's: '07: Zeige, dass $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ parallel sind.

'06: $E_1: 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

$E_2: 3x_1 + 2x_2 = 6$

⇒ zeichnen

⇒ Schnittgerade einzeichnen

'05: Ermittle Koord. der Ebene, die $A(2|-1|-2)$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält

'04: Geg.: $\mathbb{R}^3$, Gerade g, Punkt A, liegt nicht auf g

⇒ Beschreibe Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von A zu g.

Aufgaben

- Zu Tag 1
- Folgen, Grenzwerte, Konvergenz
- Induktion, Folgen: explizit - rekursiv umrechnen

Aufgaben zu Tag 1

1. Geg.: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

a) Bestimme Punkte des Schaubilds von f mit waagerechter Tangente

b) Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1 / \frac{1}{2})$ die Normale n.
Ermittle die Gleichung von n.

2. Die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ hat die Nullstelle $x_1 = 1$.
Bestimme die weiteren Nullstellen.

3. Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1/1)$ ist der Hochpunkt des Schaubildes.
Bestimme die Funktionsgleichung

4. Löse die Gleichung $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

5. Geg.: $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$

Ermittle eine Gleichung der Normalen im Punkt $P(2 / f(2))$

6. Geg.: $f(x) = \frac{2}{x} + 2$, $x \neq 0$

Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1 / v)$ die Tangente t.
Ermittle eine Gleichung von t.
Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S. Bestimme die Koordinaten von S.

Folgen

- Grenzwerte bestimmen

a) $a_n = \frac{8+n}{4n} \Rightarrow \frac{1}{4}$

b) $a_n = \frac{6+n^4}{\frac{1}{4}n^4} \Rightarrow 4$

c) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} \Rightarrow 1$

d) $a_n = \frac{(5-n)^4}{(5+n)^4} \Rightarrow 1$

e) $a_n = \left(\frac{(1+2n)^k}{(1+3n)^k}\right) \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^k$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+4^n} \Rightarrow 0$

g) GW auf jeden Fall vorhanden: $a_1 = 0$, $a_n = \frac{2}{5}a_{n-1} - 2$

h) — " — : $a_1 = -2$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}+2}$ $\Rightarrow$ nur $g_1 = 2$, nicht $g_2 = -1$!

- schwere Aufgabe:

a) Weise nach, dass $a_n = \frac{5^n + 3n}{5^n}$ konvergiert

b) (a_n) ist rekursiv gegeben durch $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\Rightarrow$ gib explizit an

$\Rightarrow$ Beweise, dass es stimmt

Lösung a) Zeigen, dass monoton $\wedge$ beschränkt:

Monotonie: $\frac{5^{n+1} + 3(n+1)}{5^{n+1}} - \frac{5^n + 3n}{5^n} = \frac{5^{n+1} + 3(n+1) - 5^{n+1} - 15n}{5^{n+1}}$

$= \frac{-12n + 3}{5^{n+1}} < 0$ $\Rightarrow$ mon. fallend

Beschränktheit:

nach oben natürlich beschränkt, nach unten durch z.B. $s = 0$

$\Rightarrow$ konvergent

b) Erste paar Folgeglieder berechnen:

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, $a_5 = \frac{5}{6}$, ..., $a_n = \frac{n}{n+1}$

Beweis: (IA) ✓

(IV) $a_k = \frac{k}{k+1}$

(IS) $a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2} = a_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$ ∎

Übungsaufgaben zu Dienstag, Tag 2

1. Die Folge (b_n) ist rekursiv gegeben durch $b_0 = 1$; $b_n = b_{n-1} + 0{,}2(5 - b_{n-1})$, $n \geq 1$

=> Zeige durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 0$ gilt :

$$b_n = 5 - 4 \cdot 0{,}8^n$$

=> Die Folge (c_n) ist gegeben durch

$$c_0 = 1 \; ; \; c_n = c_{n-1} + 0{,}2\,(5{,}2 - c_{n-1}) \text{ für } n \geq 1$$

Gib eine explizite Darstellung für c_n an.

(Abi '06, Nachtermin)