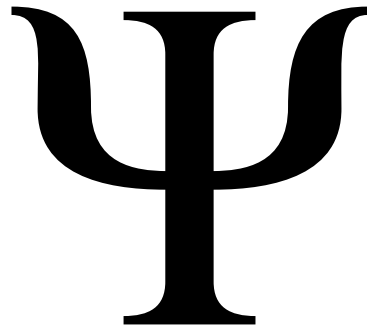


MICHAEL KOPP



Script

zur Vorlesung

Experimentalphysik I

bei Prof. C. Bechinger, Uni Stuttgart, 2009

12. September 2009
(Version β 1.4)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	ii
Vorwort	ix
Einleitung: Erkenntnisprozess	xi
1 Physikalische Größen	1
1.1 Basiseinheiten	1
1.1.1 Vorsilben	1
1.1.2 Zeit	2
1.1.3 Länge	2
1.1.4 Masse	2
1.1.5 MKS-System	2
1.2 Messfehler	3
1.2.1 Systematischer Messfehler	3
1.2.2 Statistische (zufällige) Messfehler	3
2 Kinematik	5
2.1 Eindimensionale Bewegung	5
2.2 Räumliche Bewegung	5
2.3 Superpositionsprinzip	6
2.4 Kreisbewegung I	7
3 Mechanik eines einzelnen Massenpunktes	9
3.1 Schwere Masse und Träge Masse	9
3.2 Kraft	9
3.3 Das NEWTON'sche Grundgesetz	10
3.3.1 Verschiedene Arten von Kräften	11
3.4 Schwerkraft	11
3.4.1 Messung von Schwerkraft – Gravitationswaage	12
3.4.2 Berechnung der Schwerkraft	12
3.5 Scheinkräfte	13
3.6 Energieerhaltungssätze	14
3.7 Impulserhaltungssatz	17
3.8 Stöße	18
3.9 Drehimpuls	19
3.9.1 Kreisbewegung II	21
3.9.2 Im Zentralfeld	22
3.9.3 Mehrere Massenteilchen	23

4	Mechanik des starren Körpers	25
4.1	Statik	25
4.2	Dynamik	27
4.2.1	Drehimpuls eines starren Körpers	28
4.2.2	Trägheitsmoment	28
4.2.3	Kinetische Energie	30
4.2.4	Drehimpuls verschiedener Körper	30
4.2.5	Kreisbewegung III – Der eiernde Kreisel	33
4.2.6	Ausblick: Quantisierung des Drehimpulses	35
4.3	Vergleich Translation – Rotation	36
5	Mechanik deformierbarer Körper	37
5.1	Deformierbare Festkörper	38
5.2	Kräfte auf Festkörper	39
5.2.1	Dehnung	39
5.2.2	Kompression	41
5.2.3	Scherung	42
5.3	Ruhende Flüssigkeiten	43
5.3.1	Oberfläche	43
5.3.2	Stempeldruck	43
5.3.3	Schweredruck	44
5.3.4	Kommunizierende Röhren	44
5.3.5	Auftrieb: ARCHIMEDISches Prinzip	45
5.4	Grenzflächenspannung	45
5.4.1	Kräfte und Wechselwirkungen	45
5.4.2	Minimalflächen	47
5.4.3	Kapillarkräfte	48
5.5	Ruhende Gase	49
5.6	Strömende Flüssigkeiten und Gase	50
5.6.1	Zähe Flüssigkeiten	50
5.6.2	Strömungsmechanik für zähe Flüssigkeiten: Laminare Strömungen	52
5.6.3	Ideale Flüssigkeit	54
5.6.4	Anwendungen bei idealen Flüssigkeiten	55
5.6.5	Reale Flüssigkeiten	56
6	Schwingungen und Wellen	59
6.1	Freie Schwingung	59
6.2	Dämpfung	60
6.2.1	Geratener Ansatz	61
6.2.2	Allgemeiner Ansatz	61
6.3	Störung	65
6.3.1	<i>Then-A-Wonder-Occurs</i> -Ansatz	65
6.3.2	Allgemeiner Ansatz	66
6.3.3	Fälle	67
6.4	Gekoppelte Schwingungen	67
6.4.1	Entkoppeln mit Ansatz	69
6.4.2	Entkoppeln ohne Ansatz	71
6.4.3	Entkoppeln mit Matrix	71
6.5	Überlagerung von Schwingungen – Interferenz	72

6.5.1	Gleiche Frequenz	72
6.5.2	Unterschiedliche Frequenz	72
6.5.3	Beliebige Schwingungen	73
6.6	Fortschreitende Welle	73
6.6.1	Wellengleichung und Definitionen	73
6.6.2	Differenzielle Form der Wellengleichung	74
6.7	Arten von Wellen	75
6.8	Interferenz	75
6.9	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei Überlagerung	76
6.10	Reflexion	78
6.11	Stehende Wellen	78
6.11.1	Entstehung und Aussehen	78
6.11.2	Visualisierung	79
6.11.3	Auf beschränktem Wellenträger	80
6.11.4	Funktionsprinzip von Flöten	81
7	Thermodynamik	83
7.1	Zustandsgrößen und Gasgleichung	83
7.2	BROWN'sche Molekularbewegung und Druck	84
7.3	Thermische Eigenschaften von Materie	87
7.3.1	Verschiedene Spezifische Wärmen für ein (ideales) Gas	87
7.4	Erster Hauptsatz	89
7.5	Thermodynamische Arbeit	89
7.6	Zustandsflächen des idealen Gases	90
7.6.1	Isotherm	90
7.6.2	Isobar	91
7.6.3	Isochore	92
7.6.4	Zusammenhang zwischen den Koeffizienten	92
7.6.5	Adiabate	93
7.6.6	Erwärmung bei adiabatischer Kompression	94
7.7	Zweiter Hauptsatz	94
7.8	Dritter Hauptsatz	95
7.9	Freie Energie und Enthalpie	96
7.9.1	Freie Energie	96
7.9.2	Freie Enthalpie	97
7.10	Kreisprozesse	97
7.10.1	Reversible und Irreversible Prozesse	97
7.10.2	Der CARNOT-Prozess	98
7.10.3	Kreisprozess von Stirling	100
7.11	Zustandsgleichung für ein Reales Gas	100
7.12	GUGGENHEIM-Quadrat	106
8	Mikroskopische Thermodynamik	109
8.1	STOKES-EINSTEIN-Relationen	109
8.1.1	Betrachtung als Kräftegleichgewicht	110
8.1.2	Betrachtung mit Teilchenstrom	111
8.1.3	Mittlere Freie Weglänge	112
8.1.4	Alternative Herleitung und Wirkungsquerschnitt (★)	113
8.1.5	Exkurs: BOLTZMANN-Faktor und Thermische Energie	114
8.2	Entropie des idealen Gases	115

8.2.1	Kristallisation von harten Kugeln	116
8.2.2	Quantitative Beschreibung entropischer Kräfte	118
8.2.3	Eigenschaften Entropischer Kräfte	119
9	Elektrizitätslehre	121
9.1	Ladung und E -Feld	121
9.1.1	Elektrische Ladung und COULOMB-Kraft	121
9.1.2	E -Feld	122
9.1.3	Superposition	123
9.1.4	Elektrisches Potential	123
9.1.5	E -Feld eines Dipols, Dipolmoment	125
9.1.6	Elektrischer Fluss	126
9.1.7	Satz von GAUSS	127
9.1.8	Satz von STOKES	127
9.2	Anwendungen der Elektrostatik	128
9.2.1	E -Felder verschiedener Objekte	128
9.2.2	Vergleich der E -Felder	134
9.2.3	E -Feld im Leiter	134
9.2.4	FARADAYScher Käfig	135
9.2.5	Influenz	135
9.2.6	Prinzip der Bildladungen	136
9.2.7	Energie des E -Felds	137
9.2.8	Isolatoren bzw Dielektrika im E -Feld	139
9.2.9	Die elektrische Polarisierung	140
9.2.10	Arten von Polarisierung	143
9.2.11	Elektrostatik in Dielektrika	143
9.2.12	Brechungsgesetz (★)	146
9.3	Der Elektrische Strom	147
9.3.1	Stromstärke und Stromdichte	147
9.3.2	Exkurs: Kontinuitätsgleichung (★)	148
9.3.3	Elektrischer Widerstand	149
9.3.4	Mechanismen elektrischer Leiter	151
9.3.5	Stromkreis und Schaltungen	153
9.3.6	Die KIRCHHOFF'schen Gesetze	154
9.3.7	Elektrische Arbeit und Leistung	155
9.3.8	Gleichspannungserzeugung	156
9.4	Das Magnetische Feld	159
9.4.1	Unterschied zum E -Feld, Erregung (★)	159
9.4.2	Strom und Magnetfeld	160
9.4.3	Das AMPÈRE'sche Gesetz	161
9.4.4	B -Felder verschiedener Körper	163
9.4.5	Das BIOT-SAVART'sche Gesetz	164
9.4.6	Das Vektorpotential (★)	164
9.4.7	Förmelchen	166
9.5	Bewegung geladener Teilchen im B -Feld	166
9.5.1	Kraft auf ein Teilchen	166
9.5.2	Magnetische Kraft auf einen Stromdurchflossenen Leiter	167
9.5.3	Der HALL-Effekt	167
9.5.4	Bewegte Leiter im B -Feld	168
9.5.5	Kraft auf einen magnetischen Dipol im B -Feld	168

9.5.6	Bahnen freier Ladungen im B-Feld	170
9.6	Induktionserscheinungen	171
9.6.1	FARADAY'sches Induktionsgesetz	171
9.6.2	Die LENZ'sche Regel	173
9.6.3	Selbstinduktion	174
9.6.4	Die Energie des B-Felds	176
9.7	Wechselstromkreis	177
9.7.1	Komplexe Widerstände	178
9.7.2	Schaltungen mit Komplexen Widerständen	180
9.7.3	Transformator	182
9.7.4	Der Elektrische Schwingkreis	183
9.8	Materie im B-Feld	184
9.8.1	Arten der Magnetisierung	185
9.9	Die MAXWELL'schen Gleichungen	188
9.9.1	Neues Potential, DGLs entkoppeln (★)	190
9.10	Offener Schwingkreis und HERTZ'scher Dipol	191
9.10.1	Abstrahlung des schwingenden Dipols	192
9.11	EM-Welle im Vakuum	194
9.11.1	Die Wellengleichung	194
9.11.2	Ebene, periodische Welle	195
9.11.3	Polarisation vom EM-Wellen	195
9.11.4	Magnetfeld einer EM-Welle	196
9.11.5	Stehende EM-Welle	196
9.11.6	Dreidimensionale Stehende Welle	197
9.11.7	Wellenleiter	198
Index		201
Abbildungsverzeichnis		207
Formelzeichen		209

Vorwort

Dieses Script war ein ziemlicher Haufen Arbeit! Und ich habe sie mal mehr und mal weniger gerne gemacht – aber ich *habe* sie gemacht. Es ist der Versuch, aus meinen Vorlesungsmitschriften einen strukturierten, übersichtlichen, mathematisch korrekt(er)en Text zu gestalten, mit dem man anständig Lernen kann...

Ich habe mir dabei Mühe gegeben, aber auch wenn ich in Büchern und der allwissenden WIKIPEDIA verglichen habe, so gab es doch manchmal verschiedene Ansichten über das selbe Problem. Ich habe mir dann meine eigene, für mich logische Erklärung aus verschiedenen Quellen zusammengebastelt. Deshalb habe ich auch manches, was wir in der Vorlesung nicht hatten, was mich aber interessierte, aufgenommen (die Kapitel mit dem (★) kann man problemlos überspringen).

Anyways, ich wünsche allen Benutzern viel Freude damit, dass es auch nützlich ist. Und ich weise ebenso galant die Verantwortung zurück, sollte ich Fehler gemacht haben: Irren ist männlich; auch wenn ich nach bestem Wissen und Gewissen gearbeitet habe.

Ach ja: Die (zahlreichen) Rechtschreib-, Grammatik- und Tippfehler sollen den Text humoristisch aufwerten („Studiert und kann nicht mal Deutsch“) und sind voll beabsichtigter, wichtiger Bestandteil des Werks!

Noch ein paar technische Details: Kurven heißen bei mir in Kurvenintegralen meistens γ (oder selten C). Manchmal findet man auch $\gamma = \partial A$, dabei bedeutet ∂ einfach *Rand* der Fläche A . Vektoren haben einen Pfeil drüber und ein Vektor ohne Pfeil ist der Betrag des Vektors (oder ich habe den Pfeil vergessen) – bei Skalarprodukten wurden die Pfeile teilweise weggelassen: $\vec{v}^2 = v^2$. Beispiele, Definitionen und wichtiges sind in anderer Schriftart bzw. mit grauem Hintergrund hervorgehoben, besonders interessante Formeln extra eingerahmt. Eigennamen wurden (meist) mit KAPITÄLCHEN gesetzt. Vektordifferenzialoperatoren wurden meist einfach mit $\vec{\nabla} \cdot$ (Divergenz / Gradient) oder $\vec{\nabla} \times$ (Rotation) geschrieben.

Und zu guter Letzt möchte ich mich bei all denen Bedanken, die mich auf verschieden dumme Fehler aufmerksam gemacht haben und so geholfen haben, die Qualität ein wenig zu sichern (besonders Michi Bauer, der das Script sogar in die Ferien mitnam, Dominique für die Beseitigung zahlreicher sprechlicher Verwirrungen und Halbsätze und Michi Springer, Johannes und Paul für konsequentes Mitdenken).

Michael Kopp
Besigheim, 12. September 2009

Einleitung: Erkenntnisprozess

In den Naturwissenschaften verläuft der Erkenntnisprozess im Allgemeinen über die folgenden Stufen:

Experiment Von Beobachtungen werden Gesetzmäßigkeiten abgeleitet

Induktion Von den Speziellen Gesetzmäßigkeiten schließt man auf allgemeinere Zusammenhänge

Formulierung Die allgemeinen Zusammenhänge werden in einer Formel oder als Gesetz *formuliert*

Deduktion Von Allgemeinen Fall wird auf einen speziellen geschlossen und dieser Spezielle durch ein weiteres Experiment *verifiziert* oder *falsifiziert*.

Physik ist so *meistens* vorhersagbar – es gibt aber auch Gegenbeispiele, bei denen die *Wahrscheinlichkeit* eine wichtige Rolle spielt (bspw. Quantenphysik).

Kapitel 1

Physikalische Größen

Definition 1.1 (Physikalische Größe) *besteht stets aus*

$$< \text{Zahlenwert} > \cdot < \text{Einheit} >$$

Man versucht sich dabei auf möglichst wenige Einheiten – die sog. **Basiseinheiten** – zu beschränken.

Definition 1.2 (Basiseinheit) *Grundlage für Physikalische Größen und Messwerte; müssen überall bestimmbar bzw. nachprüfbar sein und orientieren sich deshalb oft an Naturkonstanten.*

1.1 Basiseinheiten

1.1.1 Vorsilben

Zehnerpotenzen modulo 3 werden bei Physikalischen Größen durch *Vorsilben* vor den Einheiten ersetzt:

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Abkürzung
-18	atto	a
-15	femto	f
-12	pico	p
-9	nano	n
-6	micro	μ
-3	milli	m
0	–	–
3	Kilo	K
6	Mega	M
9	Giga	G
12	Terra	T

1.1.2 Zeit

Definition 1.3 (Sekunde s) $1s = 9\,192\,631\,770 \cdot T_A$, wobei T_A die Periodendauer des Hyperfeinübergangs von ^{133}Cs ist – ein sehr präzise stattfindender Vorgang in Cäsiumatomen.

Um **sehr kurze** Zeiträume zu messen, verwendet man schwingende Quarze oder andere periodische Vorgänge in Atom(kern)en. Für **sehr lange** Zeiträume dagegen verwendet man bspw. radioaktiv zerfallende Stoffe und deren Halbwertszeit.

1.1.3 Länge

Definition 1.4 (Meter m) $1m = c_0 \cdot \frac{1}{299\,792\,458} \text{ s}$ mit der (Vakuum)Lichtgeschwindigkeit c_0 .

Um **sehr große** Abstände zu messen, benutzt man Triangulationsverfahren. Bei **sehr kleinen** Abständen Laserinterferometer, bei denen man ausnutzt, dass sich Lichtwellen bei bestimmten Bedingungen auslöschen und die Lichtwellenlänge bekannt ist.

1.1.4 Masse

Definition 1.5 (Kilogramm Kg) $1Kg = \text{Masse des Urkilogramms}$. Das Urkilogramm ist ein Gewicht in Paris, welches das Kilogramm definiert.

Das Kilogramm ist also eine *willkürliche* Definition und nicht über Naturkonstanten definiert. Man versucht hier Abhilfe zu schaffen, indem man bspw. eine monokristalline Siliciumkugel erstellt, bei der man genau die Anzahl der Atome bestimmen kann, deren einzelnes Gewicht bekannt ist – so könnte man eine allgemeine, (unter großem Aufwand) reproduzierbare Definition des Kilogramms erstellen.

1.1.5 MKS-System

Definition 1.6 (MKS-System) Ein Maßsystem, welches alle in der Mechanik wichtigen Einheiten auf die drei Grundeinheiten

- Meter
- Kilogramm
- Sekunde

zurückführt.

Das **SI-System** (*System Internationale*) stellt darüber hinaus weitere Einheiten zur Verfügung, die Grundlage sind für weitere Teilgebiete der Physik:

Thermodynamik Absolute Temperatur in Kelvin **K**
Stoffmenge in Mol **mol**

Elektrodynamik Stromstärke in Ampere **A**

Optik Lichtstärke in Candela **Cd**

1.2 Messfehler

1.2.1 Systematischer Messfehler

Definition 1.7 (Systematischer Messfehler) *Stets gleiche Abweichung*

Ursachen können sein:

- Fehler im Messinstrument
- Rundungen / Vereinfachungen in den Formeln

1.2.2 Statistische (zufällige) Messfehler

Definition 1.8 (Statistische Messfehler) *Die Abweichung ist zufällig d.h. liefert verschiedene Werte.*

Ursachen können sein:

- Ablesefehler durch Beobachter
- (statistische) Schwankungen äußerer Einflüsse

Diese Fehler sind i.A. nicht vermeidbar, jedoch verringerbar. Man bedient sich dazu statistischer Auswertungsmethoden. Wiederholt man den Versuch oft, kann man einen **Mittelwert**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i \quad (1.1)$$

der n Messwerte x_i bestimmen.

Weiter gibt die **Standardabweichung** oder **Streuung**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.2)$$

an, wie zuverlässig \bar{x} ist – Messwerte x_i innerhalb der σ -Umgebung von \bar{x} treten mehr als halb so häufig auf, wie \bar{x} selbst.

Um die Wahrscheinlichkeit p zu berechnen, mit der ein bestimmter Messwert x auftreten sollte, verwendet man die GAUSS'sche-Normalverteilung:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(\frac{-(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.3)$$

Kapitel 2

Kinematik

2.1 Eindimensionale Bewegung

Also Bewegung längs einer geraden Linie.

Man unterscheidet zwischen der **Gleichförmigen Bewegung** mit konstanter Geschwindigkeit ($v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \text{const}$) und **nicht-gleichförmiger Bewegung**, bei der die Geschwindigkeit eben *nicht* konstant ist. Hier kann man die mittlere Geschwindigkeit, bzw. **Momentangeschwindigkeit**

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2.1)$$

bestimmen.¹ Bei dieser Bewegung handelt es sich um eine **beschleunigte Bewegung**, wobei man die Beschleunigung bestimmen kann:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (2.2)$$

Um entsprechend aus einer gegebenen Beschleunigung $a(t)$ die Momentangeschwindigkeit und die bisher zurückgelegte Strecke zu berechnen, integriert man die Beschleunigung über die Zeit:

$$v(t) = \int_0^t a(\hat{t}) d\hat{t} \text{ und } s(t) = \int_0^t v(\hat{t}) d\hat{t} \quad (2.3)$$

Wichtig! 1 Wichtig ist dabei, dass man beim Integrieren auch schön brav die Integrationskonstanten mitnimmt – sie stellen Anfangsgeschwindigkeit v_0 bzw. bereits zurückgelegte Strecke s_0 dar!

2.2 Räumliche Bewegung

Definition 2.1 (Trajektorie) Ist die Kurve im Raum, auf der sich ein (Masse)n)Punkt bewegt. Man bezeichnet sie oft mit γ oder $\vec{r}(t)$

¹Man kann sagen, dass die Momentangeschwindigkeit auch eine gemittelte Geschwindigkeit ist, nur dass man das Zeitintervall Δt , über welchem man mittelt, sehr klein macht: $\Delta t \rightarrow 0$.

Dabei ist γ eine Funktion (oder *Parametrisierung*) mit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \vec{r}(t)$ – und so wird $\vec{r} = \vec{r}(t)$ auch Trajektorie genannt.

Bei Bewegungen im Raum kann man im Allgemeinen die Definitionen von Kap. 2.1 verwenden. Hier verwendet man eben statt der einfachen Strecke s die Raumkurve \vec{r} .

Wichtig! 2 (Ableiten von Vektoren) Man leitet einen Vektor ab, indem man die Komponenten ableitet:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Nun ist im noch zu beachten, dass die (räumliche) Geschwindigkeit \vec{v} stets *in Richtung der Bahntangente* zeigt, während die (räumliche) Beschleunigung \vec{a} im allgemeinen *nicht in Richtung der Bahntangente* zeigt. D.h. \vec{a} kann sowohl Komponenten in Richtung der Bahntangente haben (diese nennen wir \vec{a}_T), als auch senkrecht dazu (diese entsprechend \vec{a}_N – das „N“ steht für *normal*).

Mathematisch kann man das herleiten, indem man die Geschwindigkeit \vec{v} beschreibt als Skalar v und Einheitsvektor \vec{u}_T , der zur Bahnkurve des Teilchens jeweils tangential steht:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_T \Rightarrow \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}_T) = \underbrace{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_T}_{\vec{a}_T} + v \cdot \underbrace{\frac{d\vec{u}_T}{dt}}_{\vec{a}_N}$$

Nun muss man untersuchen, wie $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ aussieht. Dazu unterscheidet man zwei Spezialfälle:

Geradlinige Bahn dann ist $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$ da $\vec{u}_T = \text{const.}$ Dann haben \vec{v} und \vec{a} die selbe Richtung – und man ist wieder beim eindimensionalen Fall wie in Kap 2.1 gelandet.

Gekrümmte Bahn Hier nähert man die Krümmung durch einen Kreis an. Hier zeigt die Ableitung der Tangente radial zum Kreismittelpunkt – also senkrecht zur Tangente. So ergibt sich also eine Komponente $\vec{a}_N \neq \vec{0}$.

2.3 Superpositionsprinzip

Definition 2.2 (Superpositionsprinzip) Diese Prinzip besagt, dass man eine Bewegung in unabhängige Teilbewegungen zerlegen kann.

So wird beispielsweise ein **Schiefer Wurf** zerlegt in eine (nach unten) beschleunigte Bewegung und eine gleichförmige Bewegung in der Horizontalen.

Das Superpositionsprinzip ist immer (im Sinne von „genau dann wenn“) bei *Linearen Theorien* anwendbar.

2.4 Kreisbewegung I

Wir betrachten hier eine gleichförmige Kreisbewegung (mit Radius R), d.h. dass die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ (φ ist der im Kreis überstrichene Winkel im Bogenmaß) konstant ist. Dabei wird ω auch als Vektor interpretiert: Er steht senkrecht auf der Kreisbewegung und folgt der **Rechten Faust Regel**: D.h. die Finger der rechten Faust zeigen in die Richtung, in die das Massenteilchen rotiert, dann zeigt der ausgestreckte Daumen in die Richtung des Vektors $\vec{\omega}$.

Man kann die Bahnkurve eines solchen Teilchens parametrisieren durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos \varphi(t) \\ R \cdot \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$$

Das Bogenmaß eines Winkels ist definiert als

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

wobei r der Radius und s die *Kreisbogenlänge* eines Kreisbogens ist, der den Öffnungswinkel φ besitzt. Für eine Rotation um einen konstanten Radius r ist deswegen die **Winkelgeschwindigkeit**:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{r} = \frac{v}{r} \quad (2.4)$$

Wenn wir nun einen *Vektor* \vec{v} untersuchen, so sehen wir, dass dieser seine Richtung ständig ändert – weil $v = \omega \cdot r$ ist, und ω und r konstant sind, ist die *Länge* des Vektors jedoch konstant.

Untersucht man den Geschwindigkeitsvektor eines mit $\omega = \text{const}$ rotierenden Teilchens zu zwei Zeiten, so ist der Winkel $d\varphi$ nicht nur der Öffnungswinkel zwischen den beiden Ansatzpunkten der Vektoren, sondern auch der Winkel zwischen den Vektoren. Überlegt man weiter, dass die Vektorspitze demnach einen Kreisbogen der Länge

$$\|d\vec{v}\| = v \cdot d\varphi$$

zurückgelegt hat, so findet man, in dem man (2.4) nach v auflöst, einsetzt und durch dt teilt:

$$\left\| \frac{d}{dt} \vec{v} \right\| = \dot{\varphi} r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}^2 r = \omega^2 \cdot r = a_Z \quad (2.5)$$

Man erhält also die **Zentripetalbeschleunigung**. Multipliziert man diese nun mit m erhält man wegen $F = ma$ die Zentripetalkraft zu

$$F_z = m \cdot \omega^2 \cdot r \quad (2.6)$$

Bei der Kreisbewegung ergeben sich nun folgende Größen:

Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequenz $f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Bahngeschwindigkeit $\boxed{v = \frac{2\pi R}{T} = \omega \cdot R}$ bzw. $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_Z = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_N \Rightarrow \boxed{\|\vec{a}_Z\| = \omega^2 \cdot R}$
gilt nur für $\omega = \text{const!}$

Wichtig! 3 ($\nu \neq v$) *Der griechische Buchstabe ν („nü“) gibt meistens Frequenzen an, während das lateinische v („vau“) oft für Geschwindigkeiten verwendet wird. Nicht verwechseln!*

Kapitel 3

Mechanik eines einzelnen Massenpunktes

3.1 Schwere Masse und Träge Masse

Grundsätzlich muss man zwischen zwei verschiedenen Arten von Masse unterscheiden:

Schwere Masse m_G Durch bspw. eine Balkenwaage vergleicht man die Masse des zu wiegenden Stücks mit einer Referenzmasse – bspw. dem Urkilogramm (s. Def. 1.5 auf S. 2). Beide Massen befinden sich im gleichen Schwerfeld.

Träge Masse m_T Das Massenteil wird bspw. zwischen zwei Federn eingespannt und zu Schwingungen angeregt. Es gilt $T \sim \sqrt{m_T}$ mit der trägen Masse m_T und der Periodendauer T . Nun vergleicht man die Periodendauer einer Masse in diesem Aufbau mit der Periodendauer bspw. des Urkilogramms.

Die beiden Messmethoden verwenden zum Vergleich verschiedene Eigenschaften des Körpers. Mathematisch nicht zu beweisen, jedoch durch zahlreiche Experimente untermauert ist nun die Formel

$$\boxed{m_T = m_G = m}$$

Dieser Zusammenhang wird auch **Äquivalenzprinzip** genannt.

Man kann sogar sagen, dass die Gravitationskonstante γ (auch G genannt) so gewählt wurde, dass für die Zahlenwerte $m_T = m_G$ gilt.

3.2 Kraft

Kraft ist ein Vektor! Sie wird gemessen, indem man bspw. die Verformung eines Körpers betrachtet, an den diese Kraft angreift. Zwei Kräfte sind gleich, wenn sie die gleiche Richtung haben und wenn sie bei dem Körper die gleiche Verformung erwirken (also gleichen *Betrag* haben).

3.3 Das NEWTON'sche Grundgesetz

Wichtig! 4 (Trägheitsgesetz (I. NEWTON'sches Axiom)) *Ein Körper verharrt in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung wenn keine Kraft an ihn angreift.*

Wichtig! 5 (II. NEWTON'sches Axiom) *Wenn ein Körper beschleunigt werden soll, muss eine Kraft auf ihn einwirken.*

Aus Experimenten ergibt sich, dass $a \sim F$ und $a \sim \frac{1}{m}$. Kombiniert man diese beiden Formeln, so ergibt sich

$$a \sim \frac{F}{m} \Rightarrow F \sim m \cdot a$$

Nun wählt man die Krafteinheiten so, dass die Proportionalitätskonstante der Formel 1 wird und schon hat man die Berühmte Formel von NEWTON:

Wichtig! 6 (NEWTON'sche Grundgleichung)

$$\boxed{F = m \cdot a} \quad (3.1)$$

bzw. mit Vektoren:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

und außerdem hat man die Einheit der Kraft definiert:

Definition 3.1 (Newton N) $1N = 1 \frac{Kg \cdot m}{s^2}$

Ein Newton ist die Kraft, die auf einen Körper mit der Masse 1Kg wirken muss, damit dieser die Beschleunigung von $1 \frac{m}{s^2}$ erfährt.

Damit ist die Einheit N offensichtlich im MKS-System (s. Kap. 1.1.5).

Körper auf der Erde erfahren abhängig von ihrer Masse eine Kraft in Richtung des Erdmittelpunktes. Diese Kraft wird **Schwerkraft** genannt. Nach der oben gefundenen Formel 3.1 entspricht diese Kraft einer Beschleunigung in Richtung des Erdmittelpunktes. Wir bemerken diese, wenn ein Körper fällt.

Definition 3.2 (Erdbeschleunigung g) *Ein Körper in der Nähe der Erdoberfläche wird mit der Beschleunigung g in Richtung des Erdmittelpunktes beschleunigt. Dabei ist g von der Masse der Körper unabhängig!*

*Man kann rechnen $F_g = m \cdot g$ und hat mit F_g die **Gewichtskraft**, die auf einen Körper wirkt.^a*

^aDiese *Linearisierung* der Erdanziehungskraft ist eigentlich nur eine Näherung: Entfernt man sich weiter vom Erdboden oder begibt sich darunter, wird die Formel immer ungenauer. Siehe dazu Kap. 3.4.

Wichtig! 7 (actio = reactio (III. NEWTON'sches Axiom)) *Übt ein Körper A eine Kraft F_A auf den Körper B aus, so übt gleichzeitig B auf A eine Kraft F_B aus. Die beiden Kräfte haben dabei den gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtungen, greifen jedoch an verschiedenen Körpern an!^a*

$$\boxed{actio = reactio} \quad (3.2)$$

^aEs handelt sich also nicht um ein Kräftegleichgewicht!

3.3.1 Verschiedene Arten von Kräften

Wir unterscheiden im Allgemeinen zwischen

Gewichts-/Schwerkraft Siehe Kap. 3.4

Reibungskräfte Sie wirken entgegengesetzt der Bewegungsrichtung \vec{v} .

Mikroskopische Ursache sind kleinste Unebenheiten in Körpern, die sich verzahnen und bei Bewegung muss diese Verzahnung überwunden werden. Ruht der Körper, muss man **Haftreibung** überwinden, gleitet er **Gleitreibung** und rollt er **Rollreibung**.

All diese Reibungen sind innerhalb bestimmter Grenzen von der Geschwindigkeit unabhängig zur Normalkraft F_N , mit der sie *senkrecht* auf die Oberfläche gedrückt werden, proportional:

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (3.3)$$

dabei ist μ der entsprechende Reibungskoeffizient und eine Materialekonstante und unabhängig von der Auflagefläche der Körpers.

Zentripetalkraft Sorgt dafür, dass ein Körper auf seiner Kreisbahn bleibt.

Siehe Kap. 2.4

Federkraft Es gilt das

Definition 3.3 (HOOK'sche Gesetz) Die Länge x , um die eine Feder verformt wird, ist proportional zur benötigten Kraft F_D :

$$F_D = -D \cdot x \quad (3.4)$$

mit der **Federkonstanten** D ($[D] = \frac{N}{m}$)

Scheinkräfte Siehe Kap. 3.5

3.4 Schwerkraft

Definition 3.4 (Schwerkraft) Die Schwerkraft ist eine von vier fundamentalen Kräften in der Physik!

Zwischen zwei Körpern mit Masse besteht eine Anziehung – diese wird **Schwerkraft** genannt.

Fällt ein Körper (oBdA ein Apfel) auf die Erde, so tut er das, weil er von der Erde eine Kraft – eben F_g – erfährt und so in Richtung der Erde beschleunigt wird. Gleichzeitig erfährt die Erde aber auch eine Kraft in Richtung Apfel. Wegen *actio = reactio* gilt nun

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow m_A \cdot a_A = m_E \cdot a_E$$

Nun ist aber $m_E \gg m_A$ und damit $a_A \gg a_E$. D.h. die Erde fällt auch – nur sehr wenig.

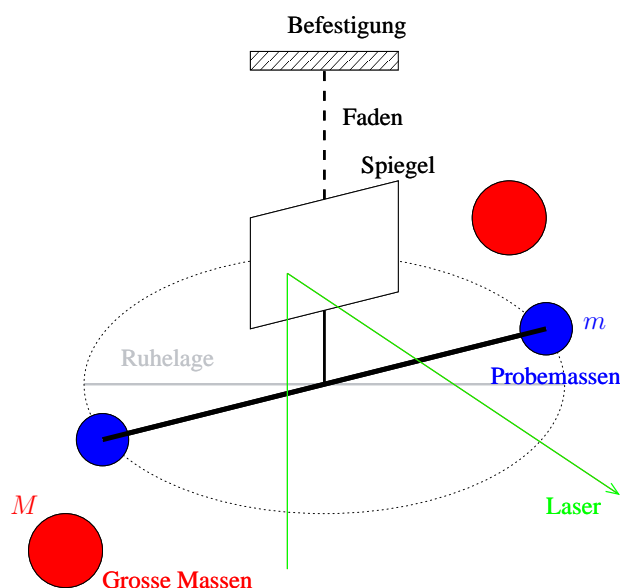


Abbildung 3.1: Die Massen M lenken die Massen m ab, diese Drehen den Spiegel und ein Laserstrahl wird abgelenkt

3.4.1 Messung von Schwerkraft – Gravitationswaage

In Abb. 3.1 ist eine Skizze einer **Gravitationswaage**. Hier lässt man die beiden großen Massen M zuerst weg und schaltet den Laser ein. Wenn man die Massen M dann zugibt, werden die kleinen Kugeln m von ihnen angezogen und die ganze aufgehängte Apparatur dreht sich – eben auch der Spiegel. So wird der Laserstrahl abgelenkt. Über den Winkel kann man das Drehmoment der Bewegung bestimmen – und dadurch die Anziehungskraft zwischen m und M .

3.4.2 Berechnung der Schwerkraft

Die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern kann man berechnen mit

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (3.5)$$

Dabei ist r der Abstand zwischen den Massen m_1 und m_2 und γ die

Definition 3.5 (Gravitationskonstante γ oder G) Die **Gravitationskonstante** ist eine Naturkonstante. Sie beträgt

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Hieraus kann man auch einfach die Erdbeschleunigung berechnen:

$$F_G = m \cdot \underbrace{\frac{m_{\text{Erde}} \cdot \gamma}{r_E^2}}_g$$

Hier kann man sehen, dass dies nur eine Näherung ist, wenn ein Körper sich weiter von der Erdoberfläche entfernt.

3.5 Scheinkräfte

Definition 3.6 (Inertialsystem) *Es treten nur dann Beschleunigungen auf, wenn Kräfte wirken*

Man befindet sich dagegen in *keinem* Inertialsystem, sondern in einem **beschleunigten Bezugssystem**, wenn die *Newton'schen* Axiome scheinbar verletzt werden.

Wird ein Wagen beschleunigt, so sind die Körper darin träge und wollen auf der Stelle verharren – so sieht es ein Außenstehender. Ein Mitbewegter dagegen denkt, die Körper würden sich bewegen – also muss auf sie eine Kraft wirken. Diese Kraft ist eine **Scheinkraft**. Der Mitbewegte kann dabei nicht erkennen, woher diese Kraft kommt. Der Mitbewegte befindet sich also *nicht* in einem Inertialsystem.

Wir untersuchen als Spezialfall ein **Rotierendes System**:

Wichtig! 8 (Rotierender Vektor) *Rotiert ein Vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, so gilt*

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (3.6)$$

Mit der **Rechten-Hand-Regel** gilt also: $\vec{\omega}$: Daumen, \vec{r} : Zeigefinger, $\frac{d\vec{r}}{dt}$: Mittelfinger.

Wir wollen nun einen Vektor \vec{R} betrachten; er kann ruhen oder sich bewegen. Diesen Vektor \vec{R} stellen wir nun mithilfe zweier Koordinatensystemen S und S' dar, wobei S' konstant mit $\vec{\omega}$ rotiert und S in Ruhe ist.

Wir nennen die Basisvektoren in S e_i und die Basisvektoren in S' heißen ε_i (auf Vektorpfeile wollen wir hier ausnahmsweise der Übersichtlichkeit halber verzichten); die Koeffizienten in S entsprechend x^i und die in S' heißen ξ^i . Damit können wir den Vektor \vec{R} in den beiden Systemen schreiben als

$$\vec{R} = \sum_i x^i e_i \text{ und } \vec{R} = \sum_i \xi^i \varepsilon_i$$

Nun wollen wir die Ableitung von \vec{R} betrachten und wenden dabei die *Produktregel* zum Ableiten an.

In S beachtet man dabei, dass die e_i ruhen, also dass $\dot{e}_i = 0$.

$$\frac{d}{dt} \vec{R} = \sum_i \dot{x}^i e_i + x^i \dot{e}_i = \sum_i \dot{x}^i e_i$$

In S' gilt dies dagegen nicht. Dafür können wir mit Gl. (3.6) $\dot{\varepsilon}_i = \omega \times \varepsilon_i$ schreiben:

$$\frac{d}{dt} \vec{R} = \sum_i \dot{\xi}^i \varepsilon_i + \xi^i \dot{\varepsilon}_i = \sum_i \dot{\xi}^i \varepsilon_i + \xi^i \omega \times \varepsilon_i = \sum_i \dot{\xi}^i \varepsilon_i + \omega \times (\xi^i \varepsilon_i)$$

Für die zweite Ableitung gilt entsprechend:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = \sum_i \ddot{x}^i e_i$$

und im System S' (hier verwenden wir, dass $\frac{d}{dt}\omega = 0$ ist):

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = \sum_i \ddot{\xi}^i \varepsilon_i + 2 \cdot \dot{\xi}^i \dot{\varepsilon}_i + \xi^i \ddot{\varepsilon}_i = \sum_i \ddot{\xi}^i \varepsilon_i + 2 \cdot \omega \times (\dot{\xi}^i \varepsilon_i) + \omega \times (\omega \times (\xi^i \varepsilon_i))$$

Verwenden wir nun noch die Schreibweise $\vec{x} = \sum_i x^i e_i$ und $\vec{\xi} = \sum_i \xi^i \varepsilon_i$ erhalten wir für die Beschleunigung von \vec{R} :

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{\xi}} + 2 \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{\xi}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi}) \quad (3.7)$$

D.h. die *Kraft*, die im System S zu spüren ist, ist schlicht $m \cdot \ddot{\vec{x}}$. Im System S' aber:

$$\vec{F}' = m \cdot \ddot{\vec{\xi}} = m \cdot \left(\ddot{\vec{x}} - 2 \cdot \vec{\omega} \times \dot{\vec{\xi}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi}) \right) \quad (3.8)$$

D.h. im beschleunigten System nimmt man mehr Kräfte wahr, als im ruhenden System. Man unterscheidet:

Corioliskraft

$$\boxed{\vec{F}_C = -2m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v})} \quad (3.9)$$

Sie tritt auf, wenn ein Körper sich senkrecht zur Rotationsrichtung eines (mit Drehfrequenz $\vec{\omega}$) rotierenden Systems bewegt, also wenn $\vec{\omega} \times \vec{v} \neq 0$ ist. Dazu muss $\vec{\omega}$ nicht konstant sein!

Bewegt sich bspw. ein Körper (von außen beobachtet) gerade auf einer rotierenden Scheibe nach außen, legt er (für den Mitrotierenden) außen an der Scheibe eine weitere Strecke seitwärts als in der Scheibenmitte zurück. Er muss also durch eine (Schein-)kraft seitlich beschleunigt worden sein; der Corioliskraft.

Zentrifugalkraft oder Fliehkraft

$$\boxed{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} \quad (3.10)$$

Sie tritt in jedem rotierenden System auf und ist die (Schein-)Kraft, die der Mitrotierende dafür verantwortlich macht, dass die Dinge nach außen gezogen werden, obwohl diese ja eigentlich nur tangential nach außen wegfliegen wollen. Sie ist vom Betrag her gleich der *Zentripetalkraft*, also der Kraft, die einen Körper auf einer Kreisbahn hält (s. 2.4). Man kann sagen, dass die Zentrifugalkraft die Reaktio der Zentripetalkraft ist.

3.6 Energieerhaltungssätze

Definition 3.7 (Arbeit) Es wird die *Arbeit* W verrichtet, um einen Körper gegen die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ auf der Bahn $\vec{r}(t)$ (mit der Länge s zwischen Startpunkt a und Endpunkt e) zu bewegen:

$$W = \int_a^e \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} \quad (3.11)$$

Die Einheit der Arbeit ist $[W] = J = N \cdot m = W \cdot s$

Eine Anschauliche Folgerung hieraus: **Das goldene Gesetz der Mechanik**

Man braucht die gleiche Energie, um einen Körper die Strecke s mit der Kraft F zu bewegen, wie wenn man den Körper doppelt so weit mit der halben Kraft bewegt

(um $n \cdot s$ mit der Kraft $\frac{1}{n} \cdot F$ bewegt).

Definition 3.8 (Konservative Kraft) *Die zu verrichtende Arbeit hängt nur vom Anfang und Ende der Bewegung ab – nicht vom Weg.*

*Rein Mathematisch kann man sagen, dass in diesem konservativen Kraftfeld die **Rotation verschwindet**: $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$, bzw. dass jedes geschlossene Integral verschwindet (wenn man eine geschlossene Bahn fährt, braucht man dazu insgesamt keine Arbeit): $\oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = 0$*

Wird nun Arbeit entgegen einer konservativen Kraft verrichtet, so ist die Arbeit in Form von **Potentieller Energie** gespeichert. Man spricht dann auch davon, dass ein Teilchen, welches man mit der Arbeit W im konservativen Kraftfeld F bewegt hat, das **Potential**

$$E_{pot} = -W \quad (3.12)$$

besitzt. *Beispiele* für solche konservativen Kräfte sind

- Schwerkraft
- Elastische Federkraft

und *Gegenbeispiele* sind

- Reibungskraft (Wegabhängig)
- LORENTZkraft (Geschwindigkeitsabhängig)

Hier kann man auch sehen, dass bei einer nicht konservativen Kraft die Arbeit später nicht mehr zur Verfügung steht.

Definition 3.9 (Potenzielle Energie) *Um die Potentielle Energie eines Teilchens in einem Kraftfeld allgemein zu bestimmen, benötigt man einen festen Bezugspunkt P_0 . Nun gilt für das Potential an einem Ort Q :*

$$E_{pot} = - \int_{P_0}^Q \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} \quad (3.13)$$

Ein Teilchen wird sich in der Natur stets so bewegen, dass es potentielle Energie abgibt; es strebt ein (potentielles) *Energieminimum* an. Es wird sich so stets dorthin bewegen, wo die Änderung des Potentials am stärksten negativ ist (wo die Abnahme des Potentials maximal ist). Dies interpretieren wir als *Kraft*.

Mathematisch kann man das auch so ausdrücken:

$$\vec{F} = - \text{grad } E_{pot} = -\nabla E_{pot} \quad (3.14)$$

Und auch die Umkehr gilt: Kann man ein Kraftfeld als Gradientenfeld ausdrücken (kann man also Gl. (3.14) für dieses Kraftfeld aufstellen), so handelt es sich um eine konservative Kraft.

Wichtig! 9 (Äquipotentialflächen) In einem konservativen Kraftfeld findet man Stellen, an denen die Potentielle Energie gleich ist. Diese Stellen kann man mit Linien verbinden und sie bilden so eine Fläche. Innerhalb dieser Fläche kann man Körper ohne Arbeitsaufwand bewegen.

Im Schwerfeld der Erde bspw. sind die Äquipotentialflächen Kugelschalen mit dem Erdmittelpunkt im Zentrum. Anschaulich heißt dies, dass man keine Energie braucht, um die Schwerkraft zu überwinden, wenn man sich auf einer Fläche bewegt, die einen konstanten Abstand zum Erdmittelpunkt wahr.

Wichtig! 10 (Konservative Kraft) Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1. Es existiert ein skalarfeld V sodass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$
2. Die Arbeit hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab: $W = \int_{\gamma} F d\vec{s} = - (V(\gamma^{\text{Anfang}}) - V(\gamma^{\text{Ende}}))$
3. Die Rotation verschwindet: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

Neben der *statischen* – also nur ortsabhängigen – Potentiellen Energie gibt es noch die

Definition 3.10 (Kinetische Energie) Damit bezeichnet man die Arbeit, die benötigt wird, um einen Körper mit Masse m auf eine Geschwindigkeit v zu beschleunigen. Dabei gilt

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{\text{kin}}} \quad (3.15)$$

Dies kann man aus (3.11) herleiten. Verwendet man $F = m\dot{v}$, braucht man dies nur noch mit v zu multiplizieren und erhält

$$F \cdot v = m \cdot \dot{v} \cdot v$$

und weil $v = \frac{ds}{dt}$ ist, können wir die Gleichung mit dt „multiplizieren“ und das Integral über die Zeit ziehen; es ergibt sich

$$\int F \frac{ds}{dt} dt = \int F ds = \int m \dot{v} v dt$$

Im letzten Integral haben wir das Produkt von „Funktion“ v und „innerer Ableitung“ \dot{v} – und damit geht die Aufleitung einfach. Es ergibt sich (3.15). Außerdem folgt für eine konservative Kraft, dass man das Erste Integral als Potentialdifferenz ausdrücken kann¹:

$$\Delta V = \Delta E_{\text{kin}} \quad \text{oder} \quad -(V_2 - V_1) = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1}$$

Nun hängen kinetische und potentielle Energie einfach zusammen:

¹Wir haben in der Herleitung unbestimmte Integrale verwendet – jetzt setzen wir die Grenzen r_1 und r_2 bzw. t_1 und t_2 ein.

Wichtig! 11 (Energieerhaltung)

$$\boxed{E_{kin} + E_{pot} = const} \quad (3.16)$$

Sollte bei dem Vorgang Reibung auftreten, so muss man diese noch einbeziehen; schließlich muss zur Überwindung der Reibung auch Arbeit verrichtet werden:

$$E_{kin} + E_{pot} + E_{reib} = const$$

3.7 Impulserhaltungssatz

Definition 3.11 (Impuls) Der Impuls \vec{p} ist definiert als

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (3.17)$$

Um eine **Impulsänderung** hervorzurufen ist eine Kraft nötig (siehe die NEWTON'schen Axiome ab S. 10):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.18)$$

Mit der Einheit $[p] = \text{N} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.

Anschaulich kann man sich den Impuls als *Wucht* eines Körpers vorstellen.

Es gilt nun der

Wichtig! 12 (Impulserhaltungssatz) Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems ist für alle Zeiten konstant!

Speziell heißt das, dass die Summe der Impulse vor einem Ereignis gleich der Summe der Impulse nach dem Ereignis ist.

◇ **Raketengleichung:** Wir betrachten eine Rakete der Masse $m = m(t)$, die sich mit der Geschwindigkeit $v = v(t)$ gegen ein Schwerfeld mit $F = mg$ bewegt. Um zu beschleunigen, stößt die Rakete nach hinten Gas mit der (bezüglich der Rakete) konstanten Geschwindigkeit w .

Wir betrachten die Situation aus der Sicht der Rakete – diese Ruhe also. Auch wenn die Rakete beschleunigt, so werden wir doch zu jedem Zeitpunkt ein Inertialsystem finden, welches sich gleich mit der Rakete bewegt; damit können wir die NEWTON'schen Axiome verwenden.

Für die Kräfte auf die Rakete gilt also (die Impulsänderung des Gases treibt die Rakete an, die Schwerkraft und die Träge Kraft bremsen sie):

$$\frac{d}{dt}(m_G w) - \frac{d}{dt}(mv) - mg = 0$$

Weil die Rakete ruht und weil je mehr Gas ausgestoßen wird, die Rakete leichter wird ($m + m_G = const$ und $\dot{m} = -\dot{m}_G$) folgt:

$$-\dot{m} w - m \dot{v} - mg = 0 \text{ oder } -w \frac{\dot{m}}{m} - g = \dot{v}$$

Integration nach der Zeit (von t_0 bis t) liefert:

$$w \ln \frac{m_0}{m(t)} - g(t - t_0) + v_0 = v(t) \quad (3.19)$$

Dabei nehmen wir Näherungsweise an, dass die Kräfte auf die Rakete nur von deren Masse abhängen (nicht von der zurückgelegten Strecke). ◇

3.8 Stöße

Bei Stößen sind die Erhaltungssätze aus den Kapiteln 3.6 und 3.7 entscheidend.

Es gibt dabei zwei wichtige Arten von Stoßvorgängen:

inelastischer Stoß Hier wird ein Teil der Bewegungsenergie der Stoßpartner vor dem Stoß umgewandelt in

- Reibungswärme
- Deformationsenergie
- Anregungszustände von Atomen
- etc.

Diese Größen fasst man zu einer Energiemenge Q zusammen.

$$Q \neq 0$$

elastischer Stoß Hier wird die Bewegungsenergie der Stoßpartner vor dem Stoß vollständig in Bewegungsenergie der Stoßpartner nach dem Stoß umgewandelt.

$$Q = 0$$

Für die Energiebilanz bei den Stoßvorgängen gilt also allgemein (da $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$):

$$\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} = \sum_j \frac{\tilde{p}_j^2}{2m_j} + Q$$

wobei p die Impulse *vor* und \tilde{p} die Impulse *nach* dem Stoß sind.

D.h. wir dürfen nur bei *elastischen Stößen* den Energieerhaltungssatz (Kap. 3.6) anwenden, weil wir wenn $Q = 0$ keine Energien unberücksichtigt lassen, wenn wir lediglich potentielle und kinetische Energie der Teilchen betrachten.

Wichtig! 13 (Schwerpunkt) Der **Schwerpunkt** eines Körpers ist mathematisch

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (3.20)$$

(wobei man die Summen auch durch Integrale ersetzen kann) und anschaulich der Punkt, an dem man den Körper auf einer Nadelspitze balancieren könnte – auch wenn man dann mit der Nadel im Inneren des Stoffes herumfurwerken müsste.

Entsprechend kann man auch **Schwerpunktgeschwindigkeit**

$$\vec{v}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dt} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}_S}{M}$$

und analog **Schwerpunktbeschleunigung** bestimmen. In der Mechanik reduziert man die Bewegung von Körpern oft auf die Bewegung ihrer Schwerpunkte. Die Bewegung eines Schwerpunkts ist davon unbeeinflusst, wie die einzelnen Teilchen des Körpers Kräfte aufeinander auswirken. Um die Bewegung des Schwerpunkts zu ändern, braucht man eine externe Kraft.

Als **Schwerpunktsystem** bezeichnet man ein System, bei der der Schwerpunkt der betrachteten Teilchen stets den Ursprung bildet. Hier verschwindet der Gesamtimpuls \vec{P} aller Massen des Systems: $\vec{P} = 0$. Deshalb sind solche Systeme für die Untersuchung von Stoßprozessen oft hilfreich.²

◇ Wir betrachten zwei Kugeln der Massen m und n , die sich mit v bzw. u bewegen. Diese sollen elastisch stoßen. Wir begeben uns in das Schwerpunktsystem, welches sich mit $V = \frac{mv+nu}{m+n}$ bewegt, damit haben die Teilchen hier die Geschwindigkeit $v_s = v - V$ und $u_s = u - V$. Die Summe der Impulse vor und nach (mit ' gekennzeichnet) dem Stoß verschwindet, und die Energie ist erhalten. Damit ist

$$mv'_s + nu'_s = 0 \text{ oder } v'_s = -\frac{n}{m}u'_s \text{ und analog } v_s = -\frac{n}{m}u_s$$

In die Energierhaltung eingesetzt (Faktor $\frac{1}{2}$ gekürzt)

$$mv_s^2 + nu_s^2 = mv_s'^2 + nu_s'^2 \text{ folgt } \frac{n^2}{m}u_s^2 + nu_s^2 = \frac{n^2}{m}u_s'^2 + nu_s'^2 \text{ und so } u_s^2 = u_s'^2$$

Das bedeutet $u'_s = \pm u_s$. Hier macht nur die „+“-Lösung Sinn, weil die Kugel sonst einfach ungehindert weiterflöge. Analog folgt $v'_s = -v_s$. Im Laborsystem ist also nach dem Stoß:

$$v' = v'_s + V \text{ und } u' = u'_s + V$$

◇

Um einen **Schwerpunkt** praktisch zu **bestimmen**, hängt man den Körper an verschiedenen Stellen auf und hängt an die Aufhängung zudem ein Lot. Wiederholt man dies, schneiden sich die beiden Lotlinien im Schwerpunkt.

3.9 Drehimpuls

Bisher hatten wir den Impuls als geradlinige Bewegungen betrachtet; jetzt untersuchen wir ihn bei *Rotationen*. In Analogie zum Normalen Impuls (s. Def. 3.11) definiert man den Drehimpuls \vec{L} :

Definition 3.12 (Drehimpuls) Der **Drehimpuls** eines Teilchens mit Masse m und Geschwindigkeit \vec{v} am Ort \vec{r}

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (3.21)$$

Der Drehimpuls ist von einer frei wählbaren Achse bzw. dem Koordinatenursprung abhängig. Im Allgemeinen wählt man die Rotationsachse des Körpers.

\vec{L} steht senkrecht zu Bewegung \vec{v} und Ortsvektor \vec{r} . Läuft die Bewegung in einer Ebene ab, so können wir \vec{v} zerlegen $-\vec{v}_\perp \perp \vec{r}$ und $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{r}$. Wenden wir nun (3.21) an, erhalten wir

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times (\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel)) = m(\underbrace{\vec{r} \times \vec{v}_\perp + \vec{r} \times \vec{v}_\parallel}_{\vec{0}}) = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}_\perp \quad (3.22)$$

D.h. für den Drehimpuls ist nur die Komponente *senkrecht* zum Ortsvektor entscheidend.

²Bspw wenn man untersuchen möchte, in welche Richtung eine Kugel eine ruhende anstößt, wenn sie nicht zentral auf diese prallt.

Wichtig! 14 Bewegt sich ein Masseteilchen m in einer Ebene, so zeigt \vec{L} stets in dieselbe Richtung ($\frac{\vec{L}}{\|\vec{L}\|} = \text{const}$ aber $\|\vec{L}\|$ muss nicht const sein).

Die Umkehr des Satzes gilt auch.

Definition 3.13 (Drehmoment) Das **Drehmoment** steht im gleichen Zusammenhang zum Drehimpuls, wie die Kraft beim gewöhnlichen Impuls.

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.23)$$

Man kann dies analog zu $\frac{dp}{dt} = F$ (3.18) schreiben:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \cdot \left(\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{v}}) = r \times (m\dot{\vec{v}}) = r \times \dot{\vec{p}} = r \times \vec{F}$$

Wichtig! 15 Um den Drehimpuls zu ändern, braucht man ein Drehmoment.

Man kann sich den Drehimpuls sehr anschaulich herleiten; siehe dazu Abb. 3.2: Wir möchten eine lineare Kraft F umwandeln in den Drehimpuls L . Diese Kraft F soll senkrecht nach unten zeigen.

Wenn sich nun der Hebel um O bewegt, so tut er das mit einer Geschwindigkeit v . Für uns interessant ist die Geschwindigkeit senkrecht zum Ortsvektor \vec{l} (also bez. O), also parallel der Kraft F – sie heißt v' und ist bestimmbar über

$$v' = v \cdot \sin \phi$$

D.h. der Impuls senkrecht zu \vec{l} ist

$$m \cdot v \cdot \sin \phi = m \cdot v'$$

Der Drehimpuls enthält nun noch die Armlänge l , weil nach dem goldenen Gesetz der Mechanik³ die Kraft F proportional zur Länge l ist⁴:

$$L = m \cdot l \cdot v' = m \cdot l \cdot v \cdot \sin \phi$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\vec{r} \times \vec{v}}$

Auch für den Drehimpuls gilt der **Impulserhaltungssatz** (siehe Wichtig 12):

Wichtig! 16 (Drehimpulserhaltungssatz) Der Gesamtdrehimpuls eines Systems ist konstant.

Er lässt sich nur ändern, wenn ein *externes* Drehmoment angreift! Dann ist das System aber nicht mehr abgeschlossen!

◇ Ein schönes Beispiel (bzw. Experiment) dafür kann man durchführen, wenn man auf einem Drehstuhl sitzt und eine rotierendes Rad mit der Drehachse waagrecht vor sich hält. Durch den Drehstuhl können wir nur den Drehimpuls bzw.

³ Halbe Kraft – Doppelte Strecke

⁴ Ist ϕ im Bogenmaß, so ist die vom m zurückgelegte Strecke $s = l \cdot \phi$. Nach dem goldenen Gesetz ist also $s \div F = \text{const}$ und damit $F = \gamma \cdot s$ (mit einer Konstanten γ).

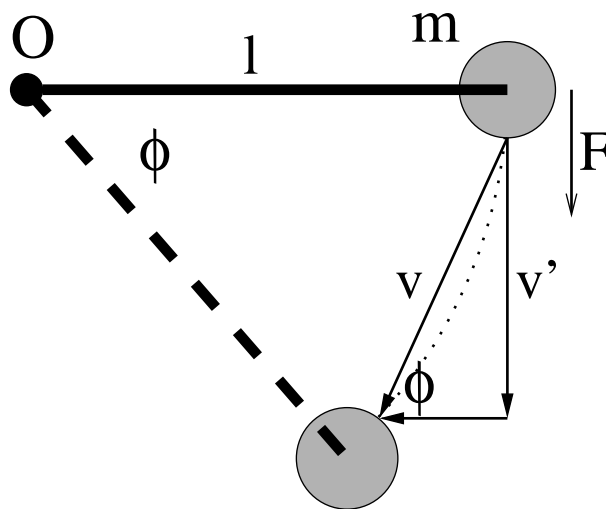


Abbildung 3.2: Skizze zu einem Hebel der Länge l , der um O gedreht wird und an dessen Ende die Masse m sitzt. Zwischen den beiden Zuständen bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v um den Winkel ϕ .

Drehmoment nach oben betrachten – einfach weil in die anderen drei Raumrichtungen nicht rotiert werden kann, weil keine Rotationsachse dafür vorhanden ist.

Kippt man nun das Rad „seitwärts“, so drehen wir seinen Drehimpulsvektor praktisch mit. Je senkrechter die Drehachse also steht, desto größer ist der Anteil parallel zur Drehachse des Stuhles⁵ – also desto mehr Drehimpuls können wir beobachten.

Da der Drehimpuls im System erhalten bleiben muss, dreht sich der Stuhl in die Gegenrichtung: Er bringt einen eigenen Drehimpuls auf, sodass die Summe der Drehimpulse verschwindet. \diamond

3.9.1 Kreisbewegung II

Da

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

⁵Formal bei einem Winkel φ zwischen Stuhldrehachse und Raddrehachse gilt:
 $\vec{L}_{\perp \text{Stuhldrehachse}} = \vec{L}_{\text{Rad}} \cdot \cos \varphi$

mit dem **Drehvektor** $\vec{\omega}$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ gilt für den Drehimpuls bei einem Kreis mit $\omega = \text{const}$ und da $\vec{\omega} \perp \vec{r}$:⁶

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega} \quad (3.24)$$

Wir können hier schön sehen, wie sich eine Änderung von r und $\vec{\omega}$ auf das Drehmoment auswirkt. Dazu leiten wir (3.24) nach der Zeit ab:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = m2r\dot{r}\vec{\omega} + mr^2\dot{\vec{\omega}} \quad (3.25)$$

Wenn wir nun annehmen, dass wir uns in einem abgeschlossenen System befinden, so können wir annehmen, dass $\vec{M} = \vec{0}$, dass von außen also kein Drehimpuls auf den drehenden Körper wirkt. Dann ergibt sich

$$2mr\dot{r}\vec{\omega} = -mr^2\dot{\vec{\omega}} \text{ oder } 2\dot{r}\omega = -r\dot{\omega} \text{ oder } 2\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\dot{\omega}}{\omega} \quad (3.26)$$

Wird r kleiner, so ist \dot{r} negativ. Um Gl. (3.26) zu genügen, muss folglich $\dot{\omega}$ positiv werden. D.h. der Körper macht eine schnellere Kreisbewegung.

Dies ist eine formale Erklärung dafür, warum man, wenn man auf dem Eis eine Piruette dreht und dabei einmal die Arme weit von sich gestreckt hat (r groß) und immer schneller wird, wenn man die Arme an den Körper zieht ($\dot{r} < 0 \Rightarrow \dot{\omega} > 0$).

3.9.2 Im Zentralfeld

Definition 3.14 (Zentralfeld) Die Kraft \vec{F} auf einen Körper hängt nur von der Entfernung vom Zentrum des Feldes ab und zeigt immer parallel zu diesem Abstand:

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \cdot \gamma \cdot f(\|\vec{r}\|) \quad (3.27)$$

wobei γ eine Konstante ist und f eine Funktion.

Beispiele für solche Felder sind *Schwerkraft* oder *Coulomb-Anziehung*.

Wichtig! 17 Für eine Bewegung, die nur aufgrund der Kraft \vec{F} aus diesem Zentralfeld stattfindet, wird stets gelten: $\vec{L} = \text{const}$.

Ganz einfach deshalb, weil

$$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{r} \Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

(weil $\vec{F} \parallel \vec{r}$ gilt) und \vec{M} ist die Änderung von \vec{L} .

◇ Es folgen nun für Bewegung in Zentralfeldern die **Kepler'schen Gesetze**:

⁶Um dies zu verifizieren, bildet man das Allgemeine Vektorprodukt der drei Vektoren: $\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$ (Im Folgenden die erste Zeile exemplarisch mit $\vec{\omega} = (u, v, w)$ und $\vec{r} = (x, y, z)$). In dem Vektor, den man als Ergebnis erhält, findet man in jeder Zeile zwei Quadratische Summanden und zwei ohne Quadrate: $uy^2 + uz^2 - vxy - zwz = u(y^2 + z^2) + x(-vy - zw)$. Die ohne Quadrate sind negativ da nun $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ ergibt sich dafür auch $ux + vy + wz = 0$ und damit $ux = -vy - wz$ und damit für die erste Zeile $u(x^2 + y^2 + z^2) = \omega_1 \cdot r^2$. Die anderen Zeilen analog.

Einfacher geht es aber mit BAC-CAB:

$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}(r^2) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot r^2$$

- Die Bahn eines Teilchens liegt in einer Ebene.⁷

Dies entspricht (etwa) dem **1. Kepler'schen Gesetz**:

Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um ihr Zentralgestirn.
Dieses steht in einem der Brennpunkte.

Wir verwenden hier die Näherung, dass Ellipsen- und Kreisbahnen sich nicht sehr unterscheiden...

- Der **Kepler'sche Flächensatz** also das **2. Kepler'sche Gesetz** gilt:

Der Fahrstrahl⁸ $\vec{r}(t)$ eines Planeten überstreicht in der gleichen Zeit dt stets die gleiche Fläche dA .

Dies gilt, weil⁹

$$\begin{aligned} L &= r \cdot mv \cdot \sin \varphi \\ &= m \cdot \frac{1}{dt} \cdot \underbrace{dr}_g \cdot \underbrace{r \sin \varphi}_h \\ &= m \cdot 2 \cdot \frac{dA}{dt} = \text{const} \end{aligned}$$

- Das **3. Kepler'sche Gesetz** besagt:

$$\frac{b^3}{T^2} = \text{const} \quad (3.28)$$

wobei T die Umlaufzeit und b die Länge der großen Halbachse (also etwa der Radius: $b \approx r$) ist:

Da $F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gelten und außerdem $F = \gamma \frac{Mm}{r^2}$ folgt:

$$m \left(\frac{4\pi^2}{T^2} \right) r = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

und damit

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} = \text{const}$$

◇

3.9.3 Mehrere Massenteilchen

Wir betrachten N Massenpunkte mit der Masse m_i ($i = 1, \dots, N$) die sich mit Kräften nach (3.27) anziehen. In diesem System müssen wir unterscheiden zwischen

Innere Kräfte die die Teilchen aufeinander ausüben:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \cdot f(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|) \quad (3.29)$$

⁷Weil sonst ein $\vec{M} \neq \vec{0}$ nötig wäre

⁸Ortsvektor mit der Sonne als Ursprung

⁹ g und h sind Grundseite und Höhe im Dreieck

Äußere Kräfte die von außen auf die m_i wirken:

$$\vec{F} = \vec{F}_i^{ext} \quad (3.30)$$

Nun wollen wir die einzelnen Drehmomente betrachten:

$$\begin{aligned} \vec{M}_i &= \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{ext} \right) \end{aligned}$$

und damit das totale Drehmoment:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{ges} &= \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{ext} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}}_{\vec{0}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \vec{M}^{ext} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dabei kürzt sich die erste Summe vollständig weg, weil zu jeder Kraft \vec{F}_{ij} eine *Reactio* \vec{F}_{ji} existiert – und diese ist gemäß Gl. (3.2) betragsmäßig gleich aber von der Richtung entgegengesetzt.

Wir haben so also gezeigt:

Wichtig! 18 Die Inneren Kräfte haben keinen Anteil am Gesamtdrehmoment und damit keinen Einfluss auf den Gesamtdrehimpuls.

Der Drehimpuls lässt sich also nur durch ein externes Drehmoment verändern – was dem Drehimpulserhaltungssatz (Kap. 3.9) entspricht!

Kapitel 4

Mechanik des starren Körpers

Wir betrachten nun starre, ausgedehnte Körper. Anders als bei Massenpunkten sind die Abstände zwischen den einzelnen Teilchen nun fest – die betrachteten Körper sind nicht deformierbar (deswegen heißen sie *starr*).

Als „Ersatz“ für einzelne Massenpunkte m_i können wir hier verwenden:

$$dm(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \cdot dV \quad (4.1)$$

wobei $\varrho(\vec{r})$ die *Dichte* des Stoffes am Ort \vec{r} ist.

4.1 Statik

Hier wollen wir die Bedingungen untersuchen, unter denen sich ein Körper *nicht* bewegt:

Anschaulich ist sofort klar:

Wichtig! 19 (1. Bedingung für mechanisches Gleichgewicht) Die Summe der angreifenden Kräfte muss verschwinden.

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}} \quad (4.2)$$

In Abb. 4.1 ist dagegen eine Wippe abgebildet. Auch wenn $F_1 + F_2 + F_c = 0$, so wird die Wippe dennoch kippen – ebenfalls anschaulich klar.

Wie wir im Vorangegangenen Kapitel gesehen haben, wird auf die Wippe so nämlich ein *Drehmoment* ausgeübt, wodurch sich ein *Drehimpuls* ergibt, welcher für das Kippen verantwortlich ist.¹

$$\ell_1 \cdot F_1 + \ell_2 \cdot F_2 \neq 0 \Rightarrow L \neq \text{const} \quad (4.3)$$

Damit wir $M_{ges} = 0$ bekommen, müssen wir ersatzweise die Kräfte F'_2 und F'_e angreifen lassen. Dann gilt nämlich:

¹Das Drehmoment von F_e verschwindet, weil hier $\ell = r = 0$. Außerdem dürfen wir ohne Kreuzprodukt rechnen, weil $r \perp F$ und wir praktisch an den Beträgen interessiert sind, *weil wir die Richtung des Drehmoments wissen*.

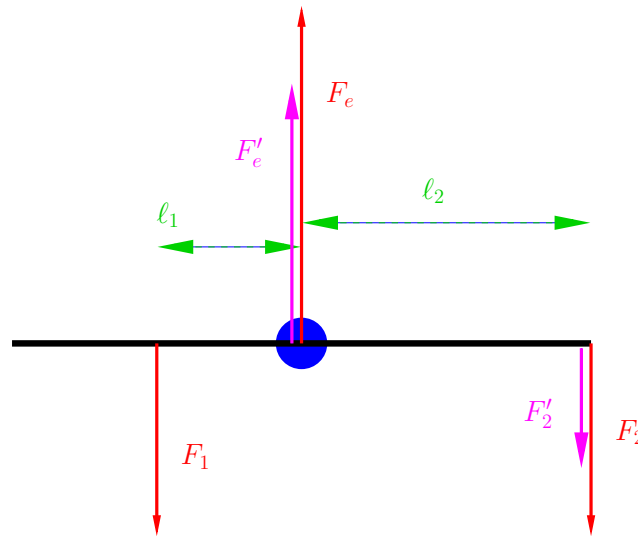


Abbildung 4.1: Wippe auf die Kräfte wirken. Die Kräfte F'_e und F_e sowie F'_2 und F_2 sollen am gleichen Punkt angreifen.

Wichtig! 20 (2. Bedingung für mechanisches Gleichgewicht) Die Summe der angreifenden Drehmomente muss verschwinden.

$$\boxed{\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}} \quad (4.4)$$

Daraus folgen auch direkt die **Hebelgesetze**: Damit der Drehimpulserhaltungssatz gilt, muss

$$\boxed{F_1 \cdot \ell_1 = F'_2 \cdot \ell_2} \quad (4.5)$$

dabei werden die ℓ vom Hebelpunkt aus gemessen und die Kräfte F senkrecht zu ℓ .

4.1.0.1 verschiedene Arten von Gleichgewichten

Stabiles Aufhängung über Schwerpunkt S

Bei der Auslenkung wird S angehoben und E_{pot} steigt. Der Körper wird sich also nicht von selbst auslenken, sondern in der Ruheposition – auch bei kleinen Störungen – verharren.

indifferentes Die Aufhängung liegt direkt auf dem Schwerpunkt S

Bei Bewegung (Drehung) ändert sich weder S noch E_{pot} . Für diese Aufhängung sind (unendlich) viele verschiedene Orientierungen möglich.

labil die Aufhängung liegt unter dem Schwerpunkt S

Schon bei einer minimalen Auslenkung „kippt“ das System und führt² zu

²bei Reibung – hier schwingt es gedämpft und kommt irgendwann zur Ruhe; ohne Reibung wird die Schwingung ewig gehen.

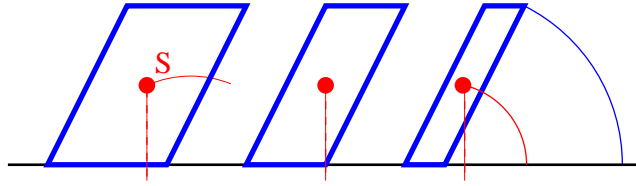


Abbildung 4.2: Drei Körper (vlnr): stabil, labil, wird gleich kippen

einer neuen Gleichgewichtslage.

4.1.0.2 Standfestigkeit eines Körpers

Falls die Projektion des Schwerpunkts S auf die Grundfläche außerhalb der Standfläche selbst liegt, so wird der Körper kippen. Er dreht sich dann über seinen **Drehpunkt**. (Vgl. Abb. 4.2) Wenn der Schwerpunkt wirklich über der Grundfläche ist, so müsste der Körper, um zu kippen, seinen Schwerpunkt zuerst anheben und dafür bräuchte er Energie. In Abb. 4.2 wird also nur der rechte Körper von selbst kippen – hier kann der Körperschwerpunkt bequem (nur) nach unten fallen.

4.2 Dynamik

Wir unterscheiden zwischen **zwei Arten von Bewegung**:

Translation Die Masse wird einfach verschoben. Für jeden einzelnen Massenpunkt gilt die gleiche Verschiebung: $\forall_i : \vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{c}(t)$. Dabei kann \vec{c} natürlich von der Zeit abhängen.

Wir können uns dabei die gesamte Masse M im Schwerpunkt des Körpers konzentriert vorstellen.

Rotation Die einzelnen Massenpunkte werden abhängig davon, wie weit sie vom Rotationszentrum entfernt sind, verschoben: $\forall_i : \vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i' = \mathbf{R} \cdot \vec{r}_i$. Dabei kann die Rotationsmatrix $\mathbf{R} \in SO(3)$ von Zeit und Ort abhängen.

Alternativ kann man eine Rotation auch mit $\vec{\omega}$ darstellen: Der Drehvektor $\vec{\omega}$ laufe durch den Schwerpunkt S des Körpers. Wir verwenden als Relativkoordinaten ein System mit S als Ursprung: \vec{r}_{Si} beschreibt den Vektor zwischen S und dem i -ten Massenelement ($\vec{r}_{Si} = \vec{r}_i - \vec{r}_S$). Dann ist die Rotationsgeschwindigkeit für dieses Element gegeben durch

$$\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}_{Si} \quad (4.6)$$

Dabei kann $\vec{\omega}$ natürlich wieder abhängig von Ort und Zeit sein.³

Wichtig! 21 Sobald eine Kraft an einem Punkt verschieden vom Schwerpunkt angreift, sorgt sie dafür, dass der Körper rotiert.

³Hier kann man schön die *Rechte-Hand-Regel* anwenden: Rotiert ein Körper, bildet der Daumen die Rotationsachse nach und die Finger der Faust zeigen in die Richtung der Drehung. Wählt man nun einen Vektor \vec{r} so stellt man diesen mit dem Zeigefinger dar und erhält aus dem Mittelfinger die Richtung der Geschwindigkeit.

4.2.1 Drehimpuls eines starren Körpers

Um den Drehimpuls eines Körpers zu berechnen, müssen wir seine Form und seine Massenverteilung einbeziehen. Wir zerlegen ihn im Allgemeinen in unendlich viele kleine Massenelemente, deren Drehmomente wir einzeln berechnen und schließlich aufaddieren:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i \vec{L}_i \quad (4.7)$$

Dabei gehen wir zum Grenzwert über und erhalten statt der Summe \sum_i ein Integral \int_V .

Verwenden wir nun $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, kommen wir nach Gl. (3.24) auf $\vec{L}_i = m_i \cdot r_{\perp,i}^2 \cdot \vec{\omega}$. (Da der *ganze* Körper mit $\vec{\omega}$ rotiert, ist das $\vec{\omega}$ an allen Stellen des Körpers gleich.) Das $r_{\perp,i}$ bezeichnet den (senkrechten) Abstand von m_i zur Drehachse. Verwenden wir nun anstelle der diskreten Massen m_i die Massenverteilung $\varrho(\vec{r})$ (also $dm = \varrho(\vec{r}) dV$), so erhalten wir aus Gl. (4.7):

$$\vec{L} = \left(\underbrace{\int_V \varrho(\vec{r}) \cdot r_{\perp}^2 dV}_I \right) \cdot \vec{\omega} \quad (4.8)$$

4.2.2 Trägheitsmoment

Definition 4.1 (Trägheitsmoment) *Das Trägheitsmoment*

$$I = \int_V \varrho(\vec{r}) \cdot r_{\perp}^2 dV \quad (4.9)$$

übernimmt bei einer Drehbewegung die Rolle der Masse bei einer geradlinigen Bewegung^a. Hier ist \vec{r}_{\perp} senkrecht zu $\vec{\omega}$. Es gilt

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (4.10)$$

^aVgl. $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Dabei muss I jedoch kein Skalar sein – I ist vielmehr ein **Tensor** \mathcal{I} (der zweiten Stufe⁴). Das liegt daran, dass der Körper in verschiedene Richtungen unterschiedlich einfach rotierbar ist. Bspw. kann man einen Zylinder in einer Raumrichtung ohne Energieaufwand rotieren (um ihre *Rotationsachse*) und in die anderen nur schwer.

Der Tensor \mathcal{I} ist gegeben durch

$$\mathcal{I} = I_{ij} = I_{ji} = \int_V \varrho(\vec{r}) \cdot (\delta_{ij} r^2 - r^i \cdot r^j) dV \quad (4.11)$$

d.h. der Tensor ist *symmetrisch*. Dabei stehen die Indizes i und j für die i -te bzw. j -te Komponente des \vec{r} im Kartesischen Koordinaten (also ist bspw. $r^1 = x$). Entsprechend heißen die einzelnen Elemente von \mathcal{I} auch I_{xx} , I_{xz} , usw.

⁴Gehört zu einer Linearen Abb. $R^n \rightarrow R^n$ – hier $n = 3$.

Um mit dem Tensor sinnvoll zu rechnen, kann man aus ihm das *Trägheitsmoment* I_A bezüglich einer Achse A errechnen. Dazu bildet man den Normalenvektor \vec{e}_A parallel der Geraden mit $\|\vec{e}_A\| = 1$ und multipliziert \mathcal{I} damit:

$$I_A = \vec{e}_A^T \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{e}_A \quad (4.12)$$

Betrachten wir den Tensor als *Matrix*, so wissen wir, dass man jede symmetrische Matrix *diagonalisieren* kann. D.h. wir können eine **Hauptachsentransformation** durchführen, bei der wir unser Koordinatensystem so wählen, dass unser „neuer“ Trägheitstensor nur noch auf der Diagonalen Einträge hat.

Unsere neu gewählten Koordinaten haben ihren Ursprung im Schwerpunkt und stehen senkrecht aufeinander. Wir bezeichnen sie als

Definition 4.2 (Haupt(trägheits)achsen) Für Rotationen um die Hauptachsen $(\vec{\omega}_a, \vec{\omega}_b, \vec{\omega}_c)$ ist das Trägheitsmoment ein Skalar – es ist also

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Aus der Symmetrie⁵ von \mathcal{I} folgt, dass jeder Körper *drei* solcher *Hauptachsen* besitzt. Wie oben gezeigt, kann man jeder davon ein Trägheitsmoment zuordnen. Für diese gilt logischerweise:

$$I_a \leq I_b \leq I_c$$

Diese bezeichnen wir auch als **ausgezeichnete** oder **Haupt-Trägheitsmomente**. Für verschiedene Konstellationen heißen die zugehörigen Körper⁶:

$$\begin{aligned} I_a = I_b = I_c & \quad \text{sphärischer Kreisel} \\ I_a \neq I_b = I_c & \quad \text{symmetrischer Kreisel} \\ I_a \neq I_b \neq I_c & \quad \text{asymmetrischer Kreisel} \end{aligned}$$

4.2.2.1 Freie Achsen (★)

Versetzt man einen Körper in freie Rotation – also hält keine Rotationsachse künstlich fest – so rotiert er nicht unbedingt einfach weiter, sondern beginnt zu *eiern*:

$$\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$$

Bei folgenden (Sonder)Fällen eiern die Körper *nicht*, sondern rotiert so, als wäre es eine feste Achse:

- Der Körper rotiert nur um eine **Hauptträgheitsachse**
- Beim **sphärischen** Kreisel

⁵Die Symmetrie selbst folgt (auch) aus der Anzahl zur Verfügung stehender Freiheitsgrade: Eine Rotation im Raum ist durch 6 Freiheitsgrade festgelegt (Drei Winkel und drei Raumkoordinaten für den Ursprung der Rotation). In unserer (3×3) -Matrix \mathcal{I} sind also nicht alle Einträge frei bestimmbar.

⁶die „ \neq “ und „ $=$ “ gelten oBdA

- Beim **symmetrischen** Kreisel, der um eine Achse durch den Schwerpunkt und senkrecht zur Symmetrieachse rotiert.

Definition 4.3 (Freie Achsen) sind die Achsen, um die ein Körper ohne zu eiern rotieren kann, ohne dass man die Achsen festhalten muss.

Wichtig! 22 Experimentell ergibt sich, dass ein Körper nur um die Achse seines minimalen \vec{I}_a oder maximalen \vec{I}_c Hauptträgheitsmoments stabil rotieren kann.

Wenn er um die Achse $\vec{\omega}_b$ rotiert, so reicht schon die kleinste Störung aus, dass er zu torkeln beginnt.⁷

4.2.3 Kinetische Energie

Möchten wir die **kinetische Energie** berechnen, die ein Körper bei seiner Rotation um eine Achse A mit Rotationsvektor $\vec{\omega}$ hat, so integrieren wir über die Kinetischen Energien seiner Massenteilchen:

$$E_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \rightarrow \int_V \frac{1}{2} \omega^2 m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int_V r^2 \rho dV}_I \quad (4.13)$$

Wichtig! 23 (Kinetische Energie einer Rotation) Es gilt

$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \vec{\omega}^2} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\omega}^T \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{\omega} \quad (4.14)$$

Die zweite Form wird verwendet, wenn das Trägheitsmoment als Tensor \mathcal{I} vorliegt.

Vergleiche dazu auch

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}^2$$

d.h. wie in Def. 4.1 angesprochen übernimmt I hier wieder die Rolle einer Masse.

4.2.4 Drehimpuls verschiedener Körper

4.2.4.1 Rotationssymmetrischer Körper

Zu jedem Massenelement m_i gehört ein Element m'_i . Diese haben zu \vec{L}_{ges} die Beiträge

$$\begin{aligned} \vec{L}_i &= m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\ \vec{L}'_i &= m'_i \cdot (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Da der Körper rotationssymmetrisch ist (Siehe dazu Abb. 4.3), ist $m_i = m'_i$ und $\vec{v}_i = -\vec{v}'_i$. Die Verbindung $\vec{r}_i - \vec{r}'_i$ verläuft *senkrecht* zur zur Rotation $\vec{\omega}$. Wir verwenden $\vec{r}_{i\perp} = \frac{\vec{v}_i - \vec{v}'_i}{2}$ (der senkrecht auf der Drehachse steht und zu m_i

⁷Schönes Experiment: Ein Quader mit drei verschieden langen Seiten wird hochgeworfen und dabei um seine drei Symmetrieachsen rotiert. Bei einer der Achsen wirft man ihn hoch und fängt ihn „gespiegelt“ wieder – er hat sich im Flug nicht nur um eine Achse gedreht.

bzuw. m'_i zeigt), weil uns schließlich nur der Abstand von dem Massenteilchen zur Rotationsachse interessiert.

Ein kleiner Beweis dafür⁸: Wir zerlegen den Vektor \vec{r} : $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$, wobei \vec{r}_\parallel parallel und \vec{r}_\perp senkrecht zur Drehachse ist. Wegen $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ist

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m(\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel))$$

Mit der Distributivität des Kreuzproduktes verschwinden „hinten“ Terme mit \vec{r}_\parallel , weil das Kreuzprodukt paralleler Vektoren verschwindet:

$$\vec{L} = m(\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp) = m\vec{r}_\perp \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp) + m\vec{r}_\parallel \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp)$$

Hierauf wendet man BAC-CAP an, und erhält:

$$\vec{L} = m\vec{\omega}(r_\perp^2) + m\vec{r}_\perp(\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega}) + m\vec{\omega}(\vec{r}_\parallel \vec{r}_\perp) - m\vec{r}_\perp(\vec{r}_\parallel \vec{\omega}) \quad (4.16)$$

wobei die beiden mittleren Terme trivialerweise verschwinden, weil es sich um Skalarprodukte orthogonaler Vektoren handelt. Man sieht:

Wichtig! 24 *Der Drehimpuls eines einzelnen rotierenden Massenpunktes ist nicht parallel zu $\vec{\omega}$ und ist zeitlich nicht konstant! Nur seine Komponente parallel zu $\vec{\omega}$ bleibt erhalten.*

Weil wir aber für jede Masse m_i noch eine Masse m'_i haben, die gegenüber rotiert, gilt für diese $\vec{r}'_\perp = -\vec{r}_\perp$. Addiert man die beiden Drehimpulse \vec{L}_i und \vec{L}'_i so fällt auch der letzte Term aus (4.16) weg und \vec{L} ist nur noch abhängig von der Senkrechtkomponente \vec{r}_\perp von \vec{r} und damit auch das Drehmoment.

So fassen wir die Beiträge aus Gl. (4.15) zusammen zu:

$$\vec{L}_i^\sim = \vec{L}_i + \vec{L}'_i = m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) - m'_i \cdot (\vec{r}'_i \times \vec{v}_i) = m_i \cdot \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}'_i)}_{2\vec{r}_{i\perp}} \times \vec{v}_i \quad (4.17)$$

⁹ Da nun $\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{v}_i$ ist, gilt mit (3.24) weiter

$$\vec{L}_i^\sim = 2 \cdot m_i \cdot r_{i\perp}^2 \cdot \vec{\omega} \quad (4.18)$$

Wenn wir nun die einzelnen Drehimpulse für alle Massenteilchen aufaddieren, so dürfen wir, wenn wir \vec{L}_i^\sim verwenden wollen, nur über die Hälfte der i 's summieren, weil in \vec{L}_i^\sim ja eigentlich *zwei* Drehimpulse stecken. Alternativ können wir auch:

$$\vec{L}_{ges} = \frac{1}{2} \sum_i \vec{L}_i^\sim = \sum_i m_i \cdot r_{i\perp}^2 \cdot \vec{\omega} = I \cdot \vec{\omega} \quad (4.19)$$

Beim Übergang zum Grenzwert (viele i -s und kleine m -s) erhalten wir:

$$\boxed{I_{\text{rotsym}} = \int_V r_\perp^2 dm = \int_V r_\perp^2 \varrho(\vec{r}) dV} \quad (4.20)$$

Diese Integral über V entspricht übrigens

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \varrho(x, y, z) (r_\perp(x, y, z)) dx dy dz$$

⁸Aus Übersichtlichkeit wurden die Indizes gespart.

⁹Das „-“ bei $*$ kommt daher, dass $v_i = -v'_i$

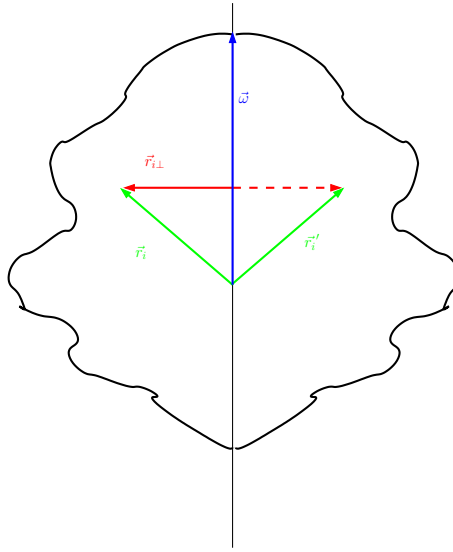


Abbildung 4.3: Ein rotationssymmetrischer Körper wird mit $\vec{\omega}$ gedreht.

▷ **(a) Beispiel: Homogene Kreisscheibe** Kreisscheibe der Dicke D und mit dem Radius R . Wir arbeiten in Zylinderkoordinaten: $dV = dz \cdot r d\varphi \cdot dr$. Die (Massen)Dichte ist gleichverteilt: $\varrho = \varrho_0 = \text{const.}$

$$I = \varrho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^D r^2 dz \cdot z d\varphi \cdot dr = \underbrace{\frac{1}{2} \varrho \cdot \underbrace{\pi R^2}_G \cdot D}_{V} \cdot R^2 = \boxed{I_{Zy1} = \frac{1}{2} M R^2}$$

▷ **(b) Beispiel: Hohlzylinder** **Hohlzylinder:** Die Wandstärke sei $d \ll R$. Wir ersetzen also das Integral $\int_0^R dr$ gegen $\int_{R-d}^R dr$. Es ergibt sich dann

$$I = 2\pi D \varrho \frac{1}{4} [R^4 - (R-d)^4] = \frac{1}{2} \pi D \varrho [\underline{4dR^3} - 6d^2R^2 + 4d^3R - d^4] \approx 2\pi D \varrho R^3 d$$

Und für die Masse ergibt sich

$$M = \varrho \cdot [\pi R^2 - \pi(R-d)^2] \cdot D = \varrho [\underline{2\pi R d} - \pi d^2] \cdot D \approx 2\varrho \pi R d D$$

Und damit

$$\boxed{I_{\text{Hohlzyl}} \approx M \cdot R^2} \quad (4.21)$$

Dabei haben wir beide Male eine häufig verwendete Näherung gemacht (bei den unterstrichenen Stellen): Da $d \ll R$, haben wir zuerst brav mit d und R gerechnet, im Anschluss aber alle Terme, die d in einer höheren Potenz (d^n mit $n \geq 2$) enthielten, einfach weggelassen.

Wichtig! 25 (Technik: Nähren) Möchte man einen sehr kleinen Wert d annähern, so lässt man für die n -te Näherung alle Summanden weg, die d^m mit $m > n$ enthalten.

Bei Polynomen ist dies einfach, bei einer Funktion muss man diese zuerst TAYLOR-entwickeln.

Alternativ hätten wir die Rechnung auch mithilfe der *Delta-Distribution* machen können. \diamond Dazu bestimmen wir die (homogene) „Oberflächendichte“ σ mit $\sigma = \frac{M_0}{2\pi RL}$. Unser Integral vereinfacht sich dann zu (r^2 ist aus (4.20) und das weitere r der Jacobian)

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^R \sigma r^3 \cdot \delta(R-r) \, dr \, dz \, d\varphi$$

Das Argument der Delta-Distribution verschwindet bei $r = R$, damit folgt für das Integral

$$I = 2\pi \cdot L \cdot \sigma R^3 = 2\pi \cdot L \cdot \frac{M_0}{2\pi RL} R^3 = M_0 R^2$$

\diamond

4.2.4.2 Rotationssymmetrische Körper, die nicht um Körperachse Rotieren: Satz von STEINER

Wenn die Rotationsachse *parallel* zur Körperachse verläuft, berechnen wir I_S für die Körperachse (also die Achse, bezüglich der der Körper symmetrisch ist). Dann gilt

Wichtig! 26 (Satz von STEINER)

$$I = M \cdot a^2 + I_S \quad (4.22)$$

mit Drehmoment I_S auf der Körperachse und Abstand a zwischen Rotations- und Körperachse.

4.2.5 Kreisbewegung III – Der eiernde Kreisel

Wir betrachten einen starren, rotationssymmetrischen Körper mit $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ wobei keine äußeren Drehmomente angreifen – also ist $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$ Der Kreisel kreiselt also brav um seine Figurenachse...

Nun lassen wir eine Kraft \vec{F} an der Kreiselachse angreifen – und damit auch ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ und wollen damit den neuen Drehimpuls des Systems bestimmen.

Wegen $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ können wir über die Zeit aufintegrieren¹⁰ und erhalten:

$$\int_a^e \vec{M} \, dt = \int_a^e \dot{\vec{L}} \, dt = \vec{L}_e - \vec{L}_a = \Delta \vec{L} \quad (4.23)$$

D.h. für den resultierenden Drehimpuls \vec{L}_e erhalten wir

$$\vec{L}_e = \vec{L}_a + \int_a^e \vec{M} \, dt \quad (4.24)$$

¹⁰Interessanterweise können wir an $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ auch sehen, dass $\vec{M} \parallel d\vec{L}$ sein muss.

Über den Zusammenhang $\vec{L}_i = I_i \cdot \vec{\omega}_i$ aus (4.12) wobei für verschiedene Rotationsachsen in diesem Falle $I_i \neq I_j$ – also $I_{\parallel} \neq I_{\perp}$ – gilt, ergibt sich so:

Im Kap. 4.2.2.1 haben wir gesehen, dass ein Körper so *ieert*. Im speziellen, vorliegenden Fall, wird die Figurenachse dabei auf einer Kegelfläche rotieren.

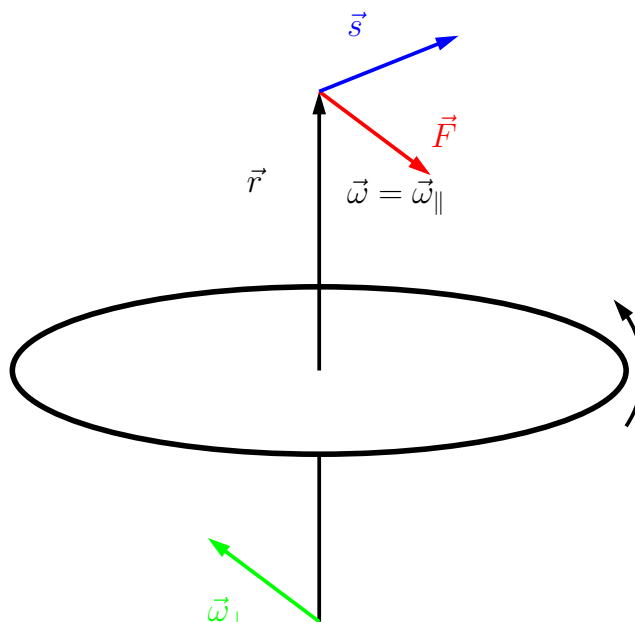
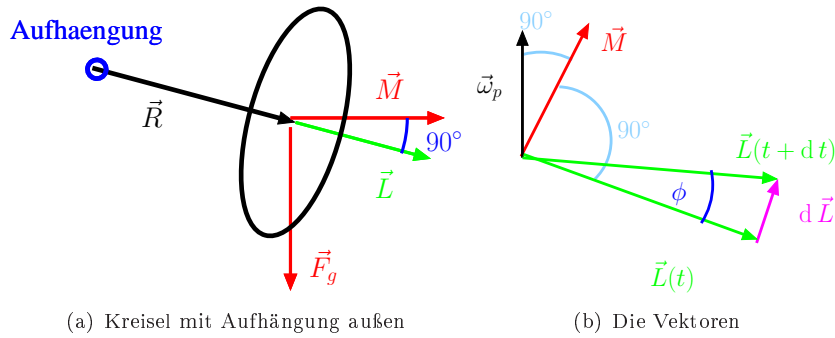


Abbildung 4.4: Der Kreisel wird mit der Kraft \vec{F} gestört.

Es wirkt also die Schwerkraft \vec{F}_g nach *unten* und dadurch wirkt auf den Kreis ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}_g$ wodurch $\vec{L} = \vec{L}(t) \neq \text{const}$ gilt. In Abb. 4.5(a) würde sich die Spitze von \vec{R} deswegen *senkrecht* zur Papierebene bewegen – wie in Abb. 4.5(b) versuchsweise angedeutet ist.

Wegen $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ gilt $d\vec{L} \parallel \vec{M}$ und aus dem geometrischen Zusammenhang gilt $\|d\vec{L}\| = \|\vec{L}\| \cdot d\phi$ so gilt auch

$$\|\mathrm{d}\vec{L}\| = \|\vec{L}\| \cdot \mathrm{d}\phi = \|\vec{M}\| \cdot \mathrm{d}t \text{ bzw. } \mathrm{d}L = L \mathrm{d}\phi = M \mathrm{d}t \quad (4.26)$$



(a) Kreisell mit Aufhängung außen

(b) Die Vektoren

Abbildung 4.5: Abbildungen zur Präzession

Und der Vektor \vec{R} würde sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{I \cdot \omega} \Rightarrow \omega_p \sim \frac{1}{L} \sim \frac{1}{\omega} \quad (4.27)$$

bewegen. Diese Bewegung nennt man **Präzession**. Dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der der Kreisell selbst um seine Körperachse rotiert und ω_p die *Präzessionsfrequenz*.

Wenn der Kreisell nun anfangs nicht waagrecht aufgehängt war, sondern der Winkel α zwischen \vec{L} und \vec{F}_g lag, so gilt statt Gl. (4.27):

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{M}{L \sin \alpha} \quad (4.28)$$

4.2.6 Ausblick: Quantisierung des Drehimpulses

In der Quantenmechanik wird der Drehimpuls eine *gequantelte* Größe sein – also nur als (halb oder) ganzzahliges Vielfaches einer fundamentalen Grundeinheit auftreten. Diese Grundeinheit heißt *PLANCK'sches Wirkungsquantum* \hbar , also

$$L = 2 \cdot n \cdot \hbar \quad n \in \mathbb{N}$$

wobei

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,057 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Dabei gilt für die Energie

$$E = \nu \cdot h = \hbar \cdot \omega$$

So tritt bspw. im hantelförmigen N_2 -Molekül der Imupls auf als

$$L = I \cdot \omega = 2mr^2 \cdot \omega = \hbar \Rightarrow \omega = \frac{\hbar}{2mr^2}$$

und mit eingesetzten Werten ($2r = 1,11 \text{ nm}$, $m = 2,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$) bekommt man

$$\omega \approx 7,5 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{s}}$$

und dies entspricht einer Frequenz im *Infrarot*-Bereich.

4.3 Vergleich Translation – Rotation

Translation	Formel	Rotation	Formel
Länge	l, s	Winkel	φ
Masse	m	Trägheitsmoment	\mathcal{I}
Geschwindigkeit	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	Winkelgeschwindigkeit	$\dot{\vec{\varphi}} = \vec{\omega}$
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}$
Kraft	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Drehmoment	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2}I\vec{\omega}^2 = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \mathcal{I} \vec{\omega}$
Rückstellkraft	$\vec{F} = -D \cdot \vec{r}$	Rückstelldrehmoment	$\vec{M} = -D \cdot \vec{\varphi}$

Kapitel 5

Mechanik deformierbarer Körper

Bisher hatten wir zwischen zwei Teilchen eines Körpers starre Verbindungen angenommen. Unsere Neuen Grundannahmen sind:

▷ (a) Bindungstypen zwischen Atomen

Ionische Bindungen: Durch die COULOMB-Kraft werden geladene Teilchen angezogen und abgestoßen. So hält bspw. NaCl zusammen.

kovalente Bindungen: Durch elektrostatische Wechselwirkungen werden nicht-ionische (Nichtmetall-)Atome und andere Teilchen zusammengehalten – so bspw. auch H_2 .

VAN-DER-WAALS -Kräfte: Durch Quantenmechanische Effekte halten neutrale Teilchen aneinander – bspw. Ar-Atome

Wir denken uns Festkörper als Stoffe, die aus Atomen bestehen, die *feste* Plätze einnehmen. Die Atome sind entweder geordnet und bilden **Kristalle** oder ungeordnet – dann heißt der Körper **amorph** und wir bezeichnen ihn als „**Glas**“.

▷ (b) **Erwärmung** Die Atome haben zwar eine feste Position im Festkörper, jedoch ist dieser eigentlich nur eine *Gleichgewichtslage*; sie können um diesen herum *Schwingungen* ausführen.

Beim Erwärmen werden diese Schwingungen stärker. Überhalb einer kritischen Temperatur werden die Schwingungen so stark, dass sie die Bindungskräfte überwinden können und der Festkörper so zerstört wird. Das kennen wir als **Schmelzen**.

▷ (c) **Festkörper vs Flüssigkeiten** In Flüssigkeiten sind Atome gegeneinander verschiebbar d.h. sie haben keinen festen (Gleichgewichts-)Punkt und somit auch *keine Formstabilität*. Dennoch ist die Dichte einer Flüssigkeit mit der von Festkörpern vergleichbar.

Beim Erwärmen schwingen auch hier die Atome schneller und wenn hier die Kräfte überwunden werden, die die Flüssigkeitsteilchen zusammenhalten, so **verdampft** der Stoff.

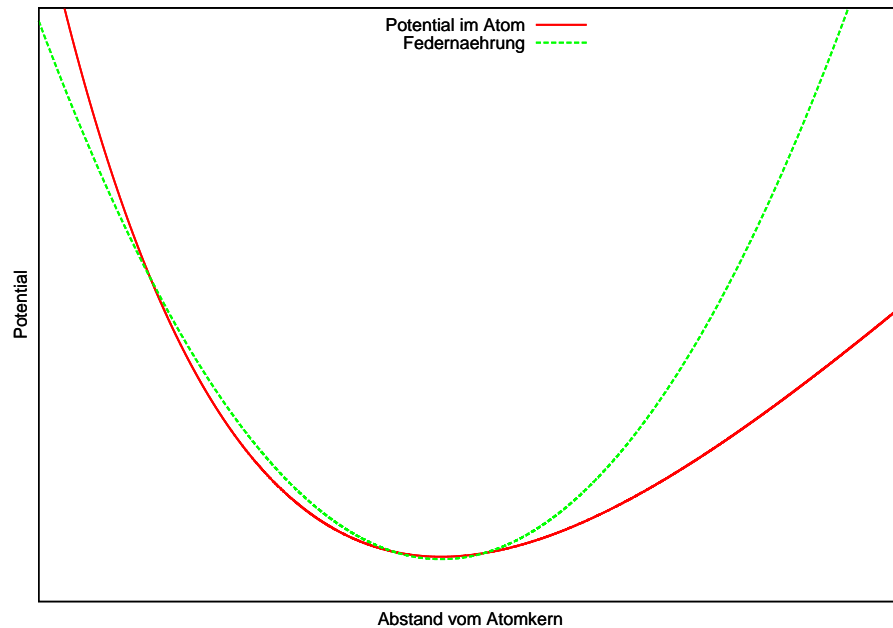


Abbildung 5.1: Potential im Atom im Vergleich mit dem quadratischen Potential einer Feder

5.1 Deformierbare Festkörper

Wir nähern das Potential der Bindung zweier Atome mit dem Potential einer Feder an. Dies ist eine Näherung, die nur in einem recht kleinen Bereich funktioniert. Das liegt daran, dass das Potential bei Atomen in Kernnähe mit $V \sim -\frac{1}{x^2}$ beschrieben wird und weiter entfernt mit $V \sim -\frac{1}{x}$. Bei der Feder hingegen wird das Potential nach $E_{\text{spann}} = \frac{1}{2}D \Delta x^2$ beschrieben mit $V \sim (x - x_0)^2$. In Abb. 5.1 ist Realität und Näherung¹ verglichen.²

Steigt die Temperatur im Feststoff an, so schwingen die Atome stärker um ihre Ruhelage. Im Diagramm heißt das, dass sie eine höhere Energie haben (also auf einem höheren Potential liegen, also im Schaubild *höher* sind) und damit weiter nach rechts (also weg vom Kern) ausschlagen können, weil hier die Kurve für das Potential im Atom ja flacher wird. Für diesen Fall müssen wir eigentlich eine neue Parabel anpassen, deren Mittelpunkt weiter nach rechts verschoben ist, um die neue Situation besser zu modellieren.

Wir verwenden diese Feder-Näherung also im zulässigen Bereich – dort wo sich in Abb. 5.1 die Kurven weitestgehend überlappen – und führen das **Federmodell** ein.

Definition 5.1 (Federmodell) *Im Federmodell betrachten wir einen Festkörper als punktförmige Massen, die durch Federn verbunden sind.*

¹ Also ein Potential $V = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}$ mit weitgehend beliebigen (positiven) A und B und eine Kurve mit $V_D = C \cdot (x - x_0)^2$ bei dem C und x_0 (möglichst) genau angepasst wurden. Dies gibt den Verlauf

² Übrigens ist dieses Atompotential ein Ausschnitt des Potentials in Abb. 8.1.

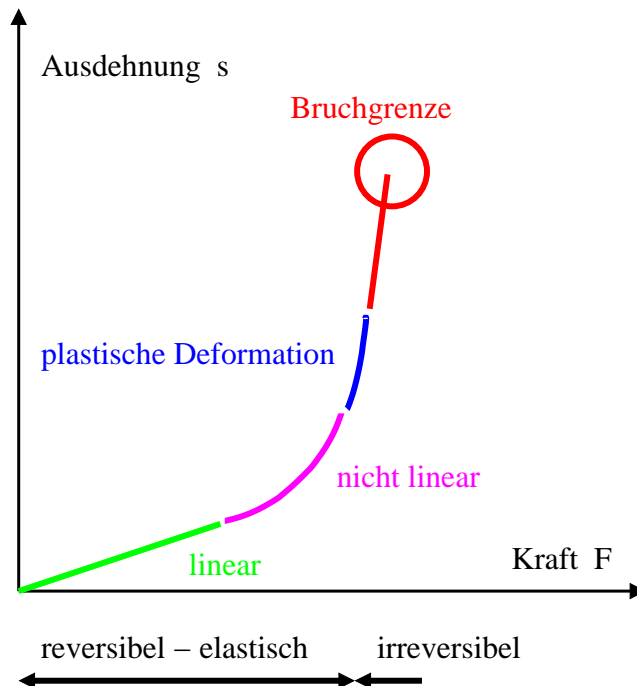


Abbildung 5.2: Dehnung eines Feststoffs im s - F -Diagramm

Mit diesem Modell können wir folgern, dass Festkörper innerhalb gewisser Grenzen **elastisch verformbar** sind:

Definition 5.2 (Elastisch verformbar) *Der Körper verändert seine Form, wenn eine Kraft auf ihn ausgeübt wird, nimmt seine alte Form aber wieder an, wenn die angreifenden Kräfte verschwinden.*

Weil wir außerdem die Parabel bei höheren Temperaturen nach rechts verschieben müssen, bekommen die Ruhelagen der Atome einen größeren Abstand zueinander und somit *expandiert* der Körper dann. Wir sprechen hier von einer **thermische Expansion**.

5.2 Kräfte auf Festkörper

5.2.1 Dehnung

Wir ziehen an dem Werkstoff der Länge L mit der Kraft F (parallel zu L) und dehnen ihn dadurch **absolut** um die Strecke s bzw. Dehnung ΔL aus oder relativ um die **relative Dehnung** $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$.

In Abb. 5.2 ist eine Kurve einer typischen Dehnung aufgetragen. Hier sieht man die verschiedenen Stadien reversibler und irreversibler Verformung.

Wir unterscheiden die angreifenden Kräfte danach, wie sie angreifen; entweder senkrecht zur Körperoberfläche oder waagrecht dazu. Wir wollen uns hier mit den Kräften *senkrecht* zur Oberfläche befassen:

Definition 5.3 ((Zug-/Druck)Spannung „Stress“ σ) Die Kraft (\vec{F}_N) zeigt senkrecht („normal“) zur Oberfläche A des Körpers

$$\sigma = \frac{\|\vec{F}_N\|}{A} \quad (5.1)$$

mit $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$

Für **kleine Amplituden** gilt für die Verformung ΔL eines Körpers der Länge L :

$$\Delta L \sim F, \quad \Delta L \sim L \text{ und } \Delta L \sim \frac{1}{A}$$

und so definieren wir:

Definition 5.4 (Elastizitätsmodul E) Eine Materialkonstante für die gilt

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F \cdot L}{A \cdot \Delta L} \Leftrightarrow \boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon} \quad (5.2)$$

Dieser Zusammenhang wird auch als **HOOKE'sches Gesetz** bezeichnet. Vergleiche Dazu die *Federhärte* $D = \frac{F}{\Delta L}$;

Je größer E ist, desto schwerer ist es – also desto mehr Kraft F muss man aufbringen – um den Körper um ΔL zu verformen.

Eigentlich müssten wir aber E definieren als

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (5.3)$$

Nur weil wir im Bereich der linearen Expansion arbeiten (s. Abb. 5.2) dürfen wir die Definition oben verwenden.

Wenn wir einen Körper strecken, so werden wir beobachten, dass er seinen Querschnitt verkleinert – dies bezeichnet man als **Querkontraktion**. Man kann sie dadurch erklären, dass der Körper bestrebt ist, sein Volumen gleich zu halten.

Es gilt dabei – wieder für kleine Verformungen – wenn wir eine Querschnittsfläche mit $A = d^2$ annehmen (also $V = L \cdot d^2$): Auch wenn der Körper *versuchen* mag, sein Volumen konstant zu halten, so ändert es sich doch. Zieht man in Längsrichtung an dem Körper, so verlängert er diese Seite um ΔL ($\Delta L > 0$), gleichzeitig werden sich die anderen Seiten d verkürzen ($\Delta d < 0$). Wir können für die neuen Längen also $L' = L + \Delta L$ und $d' = d + \Delta d$ schreiben, und bekommen, wenn wir in gewohnter Manier alle Terme streichen, die ein quadratisches oder zwei verschiedene Δ enthalten:

$$V' \approx V + 2d\Delta dL + d^2 \cdot \Delta L$$

und weiter

$$\Delta V \approx d^2 \cdot \Delta L + 2d\Delta dL$$

teilt man dies durch $V = d^2 \cdot L$ ergibt sich:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d} = \varepsilon + 2\varepsilon_q \quad (5.4)$$

Dabei haben wir die **relative Querkontraktion** $\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$ eingeführt. Das Verhältnis zwischen (relativer) Querkontraktion ε_q und (relativer) Dehnung ε bezeichnet man mit der **Poissonzahl** oder **Querkontraktionszahl**³

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}} = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} = -\frac{\Delta d \cdot L}{d \cdot \Delta L} \quad (5.5)$$

und man erhält in Gl. (5.4) durch Einsetzen:

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\sigma}{E}(1 - 2 \cdot \mu)} = (1 - 2\mu) \cdot \varepsilon \quad (5.6)$$

Im Allgemeinen ist

$$\Delta V < 0 \Leftrightarrow \mu > 0$$

Es gibt aber auch bestimmte Stoffe, bei denen $\mu < 0$ ist – der Stoff wird also beim Ziehen länger *und* breiter.

5.2.2 Kompression

Wirkt eine **Kraft von allen Seiten** auf den Körper, so hat er keine andere Möglichkeit, sich zu verformen und sein Volumen zu verringern.

Bei einem Druck p – für den nach Definition $p = -\sigma$ gilt⁴ – verkürzt sich eine Seite nach (5.2) und mit $p = \frac{F}{A}$ um $\Delta L = L \frac{\sigma}{E} = -L \frac{p}{E}$. Die Seitenflächen mit Länge d würden sich eigentlich um $\Delta d = -d \frac{p}{E}$ verkürzen – durch die Verkürzung von L muss d sich aber noch zusätzlich um $\Delta d = -\mu \frac{\Delta L}{L} d = -\mu \cdot \frac{p}{E} \cdot d$ ändern. Diese zweite Änderung müssen wir auch noch doppelt gewichten, weil die Änderung einer der Kantenlängen sich auf die Änderung von *zwei* Kanten auswirkt – und umgekehrt wirken auf die Änderung einer Kantenlänge *zwei* andere Kantenlängen ein.

Diese Argumentation können wir für jede der drei Seitenlängen ℓ_i getrennt durchführen und kommen stets auf das selbe Ergebnis:⁵

$$\Delta \ell_i = -\ell_i \cdot \frac{p}{E}(1 - 2\mu) \quad (5.7)$$

Wenn wir nun das Volumen mit Gl. (5.4) berechnen wollen, so vernachlässigen wir wieder wie oben alle Terme mit mehreren Δ s und erhalten⁶

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta d}{d} = -3 \frac{p}{E}(1 - 2\mu) = -\frac{1}{K} \Delta p = -\kappa \cdot \Delta p \quad (5.8)$$

Wobei wir definiert haben:

³Das „–“ ist da, weil eine der beiden Kontraktionen ε oder ε_q (praktisch) immer negativ ist, wenn die andere positiv ist – dadurch erhält man ein positives μ .

⁴Bei der Spannung σ wirkt die Kraft nach außen, der Druck p wirkt von außen auf den Körper.

⁵Alternativ: Eine Seite verkürzt sich um $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ und so folgt für eine beliebige andere $\varepsilon' = \varepsilon_q = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}$. Eine Seite verändert sich also um $\varepsilon + 2\varepsilon'$ (die beiden gestrichenen Terme kommen von der Kontraktion der jeweils anderen Seiten) und so folgt $\varepsilon_{\text{ges}} = \frac{\sigma}{E} - 2\mu \frac{\sigma}{E}$.

⁶Hier ist wichtig, dass die Poissonzahl μ diesmal ein negatives Vorzeichen hat, weil sowohl ε als auch ε_q negativ sind!

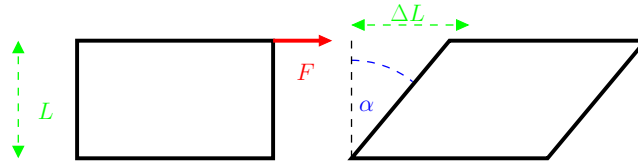


Abbildung 5.3: Scherung eines Körpers

Definition 5.5 (Kompressionsmodul K , Kompressibilität κ)

$$\kappa = \frac{1}{K} = -\frac{1}{\Delta p} \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{E}(1 - 2\mu) \text{ bzw. } \boxed{\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}} \quad (5.9)$$

Das Kompressionsmodul beschreibt also, welcher Druck nötig ist, um eine bestimmte relative Volumenänderung hervorzurufen. Die Kompressibilität zeigt den proportionalen Zusammenhang zwischen Druckänderung und relativer Volumenänderung.

5.2.3 Scherung

Analog zur Druckspannung senkrecht auf die Oberfläche eines Körpers, kann auch die Schubspannung \vec{F}_T *tangential* zur Oberfläche wirken:

Definition 5.6 (Schub-/Scherspannung τ) Die Kraft (\vec{F}_T) wirkt parallel der Oberfläche A eines Körpers

$$\tau = \frac{\|\vec{F}_T\|}{A} \quad (5.10)$$

mit der Einheit $[\tau] = [\sigma] = \text{Pa}$.

Nun untersuchen wir auch nicht mehr die Änderung der Seitenlänge, sondern den sog. **Scherungswinkel**

$$\alpha = \arctan \frac{\Delta L}{L}$$

Da für kleine x gilt⁷ $\arctan x \approx x$, setzen wir entsprechend für kleine Scherungen

$$\alpha \approx \frac{\Delta L}{L} \quad (5.11)$$

und definieren analog zum Elastizitätsmodul:

Definition 5.7 (Schubmodul G)

$$G = \frac{\tau}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\tau = G \cdot \alpha} \quad (5.12)$$

⁷ Der Taylor von Arctan um 0:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + O(x^9) \text{ vgl. Arcsinus: } x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + O(x^9)$$

Zwischen den Moduln E , K und G gilt im Allgemeinen:

$$\boxed{\frac{E}{2G} = 1 + \mu} \text{ und } \boxed{\frac{E}{3K} = 1 - 2\mu} \quad (5.13)$$

Da bei einer Stauchung die Bindungswinkel gleich bleiben, bei einer Scherung dagegen die Bindungslängen, und die jeweils anderen Größen sich verändern, brauchen wir die beiden Moduln:

Wichtig! 27 *Ein Körper reagiert im Allgemeinen verschieden darauf, ob er gedehnt oder geschert wird...*

5.3 Ruhende Flüssigkeiten

5.3.1 Oberfläche

Die Teilchen einer Flüssigkeit können sich frei bewegen – somit ist ihre *Position* logischerweise nicht fest bestimmt. Bei der *Oberfläche* ist es jedoch anders:

Wichtig! 28 *Eine Flüssigkeitsoberfläche ist (nach einiger Zeit) immer senkrecht zur Summe aller einwirkenden Kräfte.*

Wäre dies *nicht* so, so würden die Teilchen an der Oberfläche der Kraft folgen – also in Richtung Kraft fließen. Dieses Verhalten würde sich erst einstellen, wenn alle Flüssigkeitsteilchen auf einer *Äquipotentialfläche* der angreifenden Kräfte liegen, weil dann keines mehr dazu neigt, seine Energie durch Bewegung im Potential zu minimieren.

Wichtig! 29 *In Flüssigkeiten verschwindet das Schermodul G .*

5.3.2 Stempeldruck

Bei den *Kräften auf eine Flüssigkeit* spricht man i.A. von **Druck**.

Definition 5.8 (Stempeldruck) *Die Kraft F wirkt senkrecht auf eine Flüssigkeitsoberfläche A , dann gilt:*

$$p = \frac{F}{A} \quad (5.14)$$

mit der Einheit $[p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$.

Den Druck kennen wir schon aus dem Zusammenhang mit der Kompression eines Festkörpers (5.9):

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$$

Tabelle 5.1 zeigt, dass man in guter Näherung behaupten kann, dass:

Wichtig! 30 *Flüssigkeiten sind inkompressibel*

Stoff	Kompressibilität κ in $\frac{1}{\text{Pa}}$
Wasser (bei 20° C)	$46 \cdot 10^{-11}$
Eisen	$6.6 \cdot 10^{-11}$
Stickstoff	$1 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 5.1: Kompressibilitäten von Flüssigkeiten

5.3.3 Schweredruck

Während der Stempeldruck an jeder Stelle gleich wirkt, ist der Schweredruck an verschiedenen Stellen verschieden. Er resultiert aus der Gewichtskraft, die Teilchen weiter oben in der Flüssigkeit nach unten ausüben.

Definition 5.9 (Schweredruck) Die Flüssigkeitssäule über einem Teilchen im Wasser erzeugt den Druck

$$p = \int_0^h \frac{dF}{A} = \int_0^h \frac{g \cdot dm}{A} = \int_0^h \frac{g \cdot \varrho \cdot A \cdot dz}{A} = \boxed{\varrho \cdot g \cdot h = p} \quad (5.15)$$

Und dabei gilt:

Wichtig! 31 Der Schweredruck ist unabhängig von der Fläche A .

Es kann auch vorkommen, dass die Dichte einer Flüssigkeit nicht konstant ist. Bspw. wenn die Temperatur in verschiedenen Bereichen verschieden ist, ist die Dichte im warmen Bereich *kleiner*.

Wichtig! 32

$$\varrho = \varrho(\vec{r})$$

Siehe dazu Kap. 5.5.

5.3.4 Kommunizierende Röhren

In ein beliebiges Rohrsystem wird Wasser gegeben. Wenn zwei Röhren miteinander verbunden sind, und das Wasser erreicht diese Verbindung, so wird es durch diese Verbindung hindurchgedrückt: über dem einen Rohr steht eine Wassersäule, und mit diesem Druck werden die Wasserteilchen in die nächst Rohre gedrückt. Sie steigen aber dort nur so hoch dass die Kräfte auf die Teilchen in den Säulen gerade ausgeglichen sind. Nach Gl. (5.15) ist dies nur möglich, wenn die Wasserpegel gleich hoch sind (eine konstante Dichte angenommen).

Dabei ist nur die *Höhe* entscheidend, weil in unserem Beispiel nur die Gewichtskraft eine *Kraft* nach unten ausübt, die nach $F = m \cdot a$ für eine Bewegung benötigt wird.

Wichtig! 33 (Prinzip der Kommunizierenden Röhren) In miteinander verbundenen Röhren ist der Wasserpegel unabhängig von der Form gleich hoch.

Wir nehmen dabei stets die Gewichtskraft als einzige Kraft an. Es kann aber auch sein, dass noch andere Kräfte auf die Flüssigkeit wirken.

Wichtig! 34 Die Formel für den Staudruck ist abhängig von der Art der Kräfte, die auf die Flüssigkeit einwirken.

5.3.5 Auftrieb: ARCHIMEDISCHES PRINZIP

Taucht man einen Körper in eine Flüssigkeit und ist er leichter⁸ als diese, so erfährt er hier einen *Auftrieb*, der darauf beruht, dass an seiner tiefer gelegenen Unterseite ein höherer Druck p_u als an seiner Oberseite p_o herrscht. Daraus resultieren die Kräfte F_u und F_o , die in ihrer Summe eine Kraft nach oben bilden.

Die Seitlichen Kräfte auf den Körper dagegen heben sich stets gegenseitig weg, weil immer links und rechts die gleichen Kräfte wirken, weil die Punkte links und rechts per Definition auf der gleichen Höhe liegen.

Es gilt für den Auftrieb $F_A = \|\vec{F}_A\|$ also:

$$F_A = F_u - F_o = \varrho \cdot g \cdot A \cdot \Delta h = \varrho \cdot g \cdot \Delta V = m \cdot g = F_{g, \text{Wasser}} \quad (5.16)$$

Wichtig! 35 (Archimedisches Prinzip) Der Auftrieb eines Körpers entspricht der Schwerkraft der Verdrängten Menge Wassers.

$$F_{ges} = (\varrho_{\text{Wasser}} - \varrho_{\text{Körper}}) \cdot g \cdot V$$

Es sei wieder darauf hingewiesen, dass die Dichte konstant sein muss – wenn sie das nicht ist, gilt dieses Prinzip nicht mehr exakt.

Wenn nun $F_{ges} > 0$, so schwimmt der Körper, bei $F_{ges} = 0$ *schwebt* er in der Flüssigkeit und bei $F_{ges} < 0$ geht er unter.

◇ Eine **Anwendung** dieses Prinzips ist die **Dichtemessung** von Stoffen: Der Körper wird an einen Feder-Newton-Meter gehängt und die auf ihn wirkenden Kräfte in Wasser (oder einer anderen Flüssigkeit mit definierter Dichte) und ohne Wasser verglichen. Die Differenz ist der Auftrieb und damit ist die Dichte des Stoffes bestimmbar. ◇

5.4 Grenzflächenspannung

Die hier behandelten Phänomene gehören eigentlich noch zu den ruhenden Flüssigkeiten (Kap. 5.3).

5.4.1 Kräfte und Wechselwirkungen

Wir betrachten verschiedene Wechselwirkungen:

Definition 5.10 (Kohäsion) Kraft zwischen Flüssigkeitsteilchen des selben Stoffs

und

Definition 5.11 (Adhäsion) Kraft zwischen Flüssigkeitsteilchen und anderem Stoff (Gefäßwand)

⁸also weniger dicht

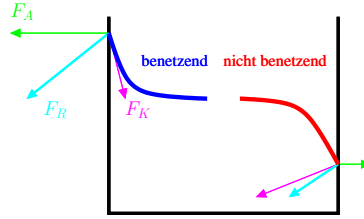


Abbildung 5.4: Wechselwirkungen bei Flüssigkeiten

Gefäßwand–Flüssigkeit Wenn das Wasser an der Wand „hochklettert“, so spricht man von **Benetzung** (s. Abb. 5.4). Für diesen Effekt ist die *Adhäsion* verantwortlich.

Flüssigkeit–Gas Im Inneren der Flüssigkeit hat das Teilchen noch in alle Richtung benachbarte Teilchen und erfährt so aus allen Richtungen die gleiche Kraft. In der Summe heben sich die Kräfte weg und es herrscht insgesamt ein *Kräftegleichgewicht*.

An der Grenzfläche dagegen haben die Teilchen in Richtung der Grenzfläche keine Nachbarteilchen mehr. Hier wirken also Wechselwirkungen zwischen Teilchen und Nachbar in Richtung Inneres, die nicht durch entsprechende Gegenkräfte *weggehoben* werden. Es resultiert eine *Kraft senkrecht zur Oberfläche nach innen*.

Für diese Kräfte ist die *Kohäsion* verantwortlich.

Bewegt man ein Teilchen vom Inneren an den Rand, so ist eine Arbeit zu verrichten: Im Inneren kann man das Teilchen noch ohne Kraft / Arbeit bewegen; geht es jedoch auf den Rand zu, muss man es gegen eine Kraft bewegen – also Arbeit aufwenden. Um die Oberfläche ΔA zu erzeugen, benötigen wir die Energie (die *Arbeit*) ΔW , um die Teilchen gegen die nach innen wirkende Kraft nach Außen zu bewegen, und es gilt $\Delta W \sim \Delta A$. Wir definieren als Maß dafür:

Definition 5.12 (Oberflächenspannung σ)

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F}{\ell} \quad (5.17)$$

mit ℓ als Randlänge einer Flüssigkeitslamelle.

σ heißt auch „**Spezielle Grenzflächenenergie**“.

mit der Einheit $[\sigma] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Mit „Lamelle“ ist hier einfach ein (zweidimensional) gebogener Bügel gemeint, der einen zweidimensionalen Flüssigkeitsfilm ausspannt. Dieser Film übt auf seinen Rahmen die Kraft F aus Gl. (5.17) aus, wenn der Bügel die Länge ℓ hat. Dabei ist wichtig, dass als Fläche A nicht nur eine Seite der Ebene, sondern beide gezählt werden.

Anschaulich ist die Oberflächenspannung ein Maß dafür, wie *tragfähig* eine Flüssigkeit ist.

Wichtig! 36 Die Oberflächenspannung ist gleich der Oberflächenenergie.

Eine Flüssigkeitsoberfläche ist also so ähnlich wie eine **elastische Membran**. Der Unterschied ist aber, dass bei der elastischen Membran $F \sim d$ ist (mit Auslenkung d), wobei bei Flüssigkeiten $F = \text{const}$ gilt.

Die Oberflächenspannung ist sehr stark *temperaturabhängig*: Je wärmer die Flüssigkeit ist, desto kleiner ist σ .

5.4.2 Minimalflächen

Wichtig! 37 *In der Natur bilden sich diejenigen Oberflächen mit der geringsten Oberflächenenergie.*

Definition 5.13 (Minimalfläche) *Diese Flächen minimaler Oberflächenenergie nennen wir Minimalflächen.*

5.4.2.1 Gekrümmte Oberflächen

In einer **Seifenblase** herrsche der Druck p_1 , außerhalb der Druck p_0 . Hier konkurrieren nun zwei Kräfte. Einerseits die Kraft F_1 , die aus den Druckverhältnissen resultiert und nach außen wirkt (weil $p_1 > p_0$):⁹

$$F_1 = (p_1 - p_0) \cdot A = \Delta p \cdot \pi r^2 \quad (5.18)$$

und die Kraft F_2 , die aus der Oberflächenspannung resultiert und die Blase zusammenhält. Dabei haben wir eine Flüssigkeitslamelle mit Rand $\ell = 2\pi r$, die wir *doppelt* werten, weil wir auch einen *doppelten* Phasenübergang haben: Diese Lamelle hat die *doppelte* Oberfläche, als eine gefüllte Kugel hätte.

$$F_2 = \sigma \cdot 2\pi r \cdot 2 \quad (5.19)$$

Nun herrscht ein *Kräftegleichgewicht* zwischen diesen Kräften, also $F_1 = F_2$ und damit

$$\Delta p \cdot \pi r^2 = \sigma \cdot 4\pi r \Rightarrow \Delta p = \frac{4 \cdot \sigma}{r} \quad (5.20)$$

Wie bereits oben angedeutet ist bei einem **Wassertropfen** durch analoge Überlegungen die Formel

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad (5.21)$$

korrekt, bei der wir nur eine Phasengrenze (außen) haben.

Im Allgemeinen gilt:

Wichtig! 38 (YOUNG-LAPLACE-Gleichung) *für beliebig geformte Tropfen:*

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.22)$$

r_1 und r_2 sind die Hauptkrümmungsradien der beiden Schmiegekreise an dem Punkt der Oberfläche, an dem die Druckdifferenz gesucht ist. Haupt- bedeutet hier den kleinst- und größtmöglichen aller möglichen Krümmungsradien.

⁹Wir tun so, als bestünde die Seifenblase aus zwei Halbschalen; Die Kraft senkrecht zu einer gedachten Lamelle (einem Umfang) berechnet man mit der Effektiven Fläche $A = \pi r^2$. Würde man die komplette Oberfläche der Halbschale verwenden, so würde man auch Kräfte mit Anteil parallel zu A mitnehmen.

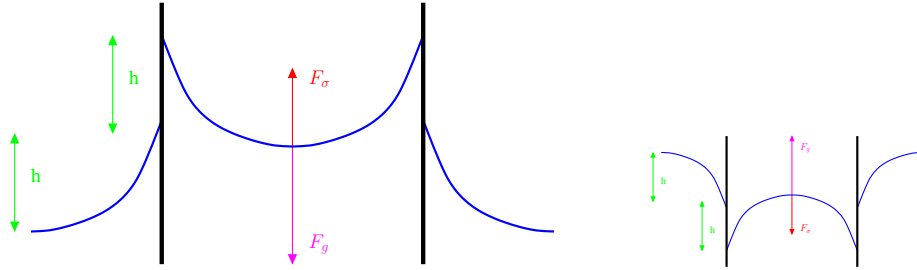


Abbildung 5.5: Kapillarkräfte: Das rechte Bild ist einfach das Spiegelbild des linken, weil die Kapillarkräfte für benetzende und nicht benetzende Flüssigkeiten völlig analog sind.

5.4.2.2 Einfluss der Wand auf Minimalfläche

Je nachdem, ob eine Flüssigkeit-Gefäß-Kombination benetzend ist oder nicht, ändert sich entsprechend die Oberfläche. Wenn wir den Winkel zwischen Flüssigkeitsoberfläche und Wand mit ϕ bezeichnen, so erhalten wir für **benetzende** Flüssigkeiten $\phi < 90^\circ$, für **vollständig benetzende** Flüssigkeiten $\phi \approx 0^\circ$ und für **nicht benetzende** Flüssigkeiten $\phi > 90^\circ$.

Zu erklären sind diese Formen durch die resultierenden Vektoren aus Adhäsion und Kohäsion. In Abb. 5.4 sind die entsprechenden Vektoren eingetragen.

Analog zu unseren Überlegungen aus 5.4.2.1 müssen wir dann nämlich noch die Kraft F_R mit einbeziehen.

5.4.3 Kapillarkräfte

Taucht man dünne Rohre in eine Flüssigkeit so ist die Flüssigkeit in dem Rohr nicht einfach nur senkrecht zur Schwerkraft sondern weist eine Krümmung auf. Zusätzlich kann die Flüssigkeit sogar noch ein Stück in das Rohr (in die Kapillare) hineingezogen werden oder kann innerhalb der Kapillare eine andere Wasserhöhe als außerhalb erreichen.

Eine **benetzende** Flüssigkeit ist bestrebt, ihren Kontakt zur Kapillare zu maximieren. Gegen die Kapillarkraft (aus (5.17) mit $\ell = 2\pi r$ als Rand der runden Kapillare)

$$F_\sigma = \sigma \cdot 2\pi r \quad (5.23)$$

wirkt die Schwerkraft

$$F_g = m \cdot g = \varrho V \cdot g = \varrho \cdot \pi r^2 h \cdot g \quad (5.24)$$

Im Gleichgewicht gilt $F_g = F_\sigma$ und damit ergibt sich für die **Steighöhe**:

$$\boxed{h = \frac{2 \cdot \sigma}{\varrho \cdot r \cdot g}} \quad (5.25)$$

Betrachte man eine **nicht benetzende** Flüssigkeit, so gilt Gl. (5.25) ebenso – nur dass h jetzt nach *unten* geht; die Herleitung ist völlig analog.

5.5 Ruhende Gase

Wie Flüssigkeiten haben in Gasen die kleinen Teilchen keine feste Position, dafür sind Gase aber komprimierbar.

Analog zur Flüssigkeit können wir hier den **Stempeldruck** definieren als

$$p = \frac{\|\vec{F}^{(ext)}\|}{A} \quad (5.26)$$

Wobei wir nicht mehr sagen können, dass eine Kraft senkrecht auf der Gasoberfläche steht. Wir verwenden als Fläche A also einfach die Fläche des Stempels, die mit Gas in Kontakt kommt.

Wie wir in der Thermodynamik (Kap. 7) noch ausführlich sehen werden, gilt für das Verhalten von *idealen* Gasen

$$p \cdot V \sim T$$

Wobei *ideale Gase* ein Modell für Gase ist, welches die Gasteilchen als kleine harte stoßende Kugeln auffasst und bei kleinen Dichten eine gute Näherung darstellt.

Der **Schweredruck** bei Gasen ist ein wenig schwerer zu fassen: Weil Gase kompressibel sind, ist

Wichtig! 39 $\varrho = \varrho(\vec{r}) = \varrho(h) \neq \text{const.}$

Wir verwenden statt der eigentlichen Dichte ϱ die *Teilchendichte* $n = n(h) = \frac{N}{V}$. Es gilt dann mit der idealen Gasgleichung (s. Kap. 7.1):

$$\begin{aligned} pV &= NK_B T \\ p &= nK_B T \end{aligned}$$

und für $T = \text{const}$ gilt:

$$dp = K_B T \cdot dn \quad (5.27)$$

Außerdem gilt für eine kleine Bewegung immernoch¹⁰

$$dp = -\varrho(h) \cdot g \cdot dh = -nm \cdot g \cdot dh \quad (5.28)$$

wobei wir $\varrho = n \cdot m$ mit der Teilchenmasse m gesetzt haben: $n \cdot m = \frac{N \cdot m}{V} = \frac{M}{V} = \varrho$.

Aus Gl. (5.27) und Gl. (5.28) erhalten wir eine Differentialgleichung:

$$K_B T \cdot dn = -nm \cdot g \cdot dh \quad (5.29)$$

Wir lösen sie durch Trennung der Variablen

$$\frac{1}{n} dn = \frac{-m \cdot g}{K_B \cdot T} dh$$

¹⁰Für inkompressible Stoffe gilt $p(h) = \varrho g \cdot h$ (5.15). Für einen kleinen Bereich dh wollen wir nun annehmen, dass Luft auch eine konstante Dichte hat. Das „-“ kommt daher, weil der Druck abnimmt ($dp < 0$), wenn man weiter hoch ($dh > 0$) geht.

und anschließendem Aufintegrieren¹¹:

$$\ln \frac{n}{n(h=0)} = \int \frac{1}{n} dn = \int \frac{-m \cdot g}{K_B \cdot T} dh = -\frac{m \cdot g}{K_B \cdot T} \cdot h$$

Und um den ln aufzulösen verwenden wir die exp-Funktion

$$n(h) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot g}{K_B \cdot T} \cdot h\right) \quad (5.30)$$

Und über den Zusammenhang $p = nK_B T$ folgt weiter

$$p(h) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot g \cdot h}{K_B \cdot T}\right) \quad (5.31)$$

wobei $p_0 = n_0 \cdot K_B T$. Dies ist die **Barometrische Höhenformel**.

5.6 Strömende Flüssigkeiten und Gase

Wichtig! 40 Wir betrachten langsam strömende Flüssigkeiten und Gase mit Strömungsgeschwindigkeit $<$ Schallgeschwindigkeit

Dann können wir bei Gasen eine konstante Dichte annehmen.

Bei diesen Bedingungen verhalten sich Flüssigkeiten und Gase wie *Fluide* (s. Def. 7.16 auf S. 102).

Wir unterscheiden bei Flüssigkeiten je nach Reibung drei Typen:

Zähe Flüssigkeiten

Die Reibung *innerhalb* der Flüssigkeit dominiert. (Die Strömungen in diesen Flüssigkeiten heißt **laminar**.)

Ideale Flüssigkeiten

Die Reibung ist im Vergleich zur kinetischen Energie unbedeutend

Reale Flüssigkeiten

Die Strömung ist so schnell, dass *Wirbel* entstehen; wir sprechen von einer **turbulenten Strömung**. Trägheitseffekte der Teilchen sind wichtig.

5.6.1 Zähe Flüssigkeiten

Taucht man zwei Platten mit Abstand d in eine Zähe Flüssigkeit und will eine davon längs mit v_0 bewegen¹², so braucht man dafür eine Kraft F_{\parallel} . Diese resultiert daraus, dass die Teilchen in der unmittelbaren Umgebung der bewegten Platte mitbewegt werden und ihrerseits ihre „Nachbarn“ mitbewegen usw.

Die Geschwindigkeit, mit der die einzelnen Wasserteilchen zwischen den Platten bewegt werden müssen, nimmt linear mit dem Abstand zur Platte ab – bei

¹¹Dabei sind die Grenzen 0 und h . Links wurde verwendet, dass $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ ist. Es ist $n(h=0) = n_0$.

¹²also stehen die Plattenflächen *parallel* zur Bewegung

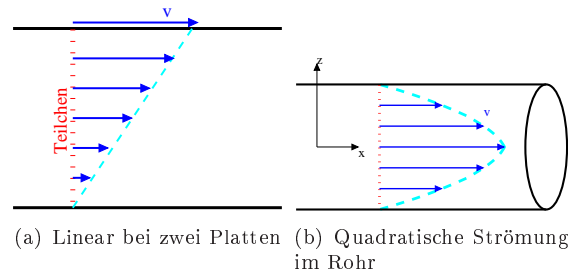


Abbildung 5.6: Geschwindigkeitsprofile

der ruhenden Platte sollte er verschwunden sein; wir sprechen von einem **linearen Geschwindigkeitsprofil** (s. Abb. 5.6(a))

Experimentell lassen sich die Zusammenhänge

$$F_{\parallel} \sim v_0, F_{\parallel} \sim A \text{ und } F_{\parallel} \sim \frac{1}{d}$$

ermitteln. Wir definieren nun:

Definition 5.14 (Viskosität η) Das Maß für die Zähigkeit eines Stoffes:

$$\eta = \frac{F_{\parallel} \cdot d}{A \cdot v_0} \quad (5.32)$$

mit der Einheit $[\eta] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \cdot \text{s}$

Da sich die Strömungsgeschwindigkeit v nicht unbedingt linear bezüglich des Abstands d verhalten muss, ist im Allgemeinen diese Formel richtig:

$$\vec{F} = \eta \cdot A \cdot \frac{d\vec{v}}{dd} \quad (5.33)$$

Dabei kann man $\frac{d\vec{v}}{dd}$ interpretieren als das **Geschwindigkeitsgefälle**. Also je größer dieses Gefälle ist, desto größer die Kraft...

In einem **Rohr** wirkt sich das so aus, dass die Flüssigkeitsteilchen in der Rohrmitte am schnellsten Strömen und die Geschwindigkeit nach außen abnimmt. Dabei nimmt die Geschwindigkeit quadratisch-proportional nach außen hin ab (s. Abb. 5.6(b)).

Dabei besteht Reibung nicht nur zwischen Teilchen und Wand, sondern auch zwischen den Teilchen selbst - sonst würden die Teilchen sich ab einer gewissen Entfernung zur Rohrwand mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen.

Nach Carl von LINNÉs „Die Natur macht keine Sprünge“ gilt für uns

Wichtig! 41 Geschwindigkeitsprofile sind kontinuierlich.

5.6.2 Strömungsmechanik für zähe Flüssigkeiten: Laminare Strömungen

5.6.2.1 Strom und Widerstand

Definition 5.15 (Stromstärke I) ist die Änderung des (Flüssigkeits)Volumens am Ort; also die Differenz aus an- und abfließender Flüssigkeit pro Zeiteinheit.

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \frac{dV}{dt} = \dot{V} \quad (5.34)$$

mit der Einheit $[I] = \frac{m^3}{s}$.

Damit ein Strom fließt¹³, braucht es im betreffenden Leiter einen *Druckunterschied*: Die Flüssigkeit wird dann von Stellen höheren Drucks an Stellen niedrigeren Drucks bewegt: Wenn auf der linken Seite eines Rohres ein höherer Druck herrscht, so kann man sich die Kräfte auf ein Wasserteilchen anschauen. Diese müssen insgesamt nach rechts zeigen, weil die Kraft von links (da $F \sim p$ dürfen wir hier nicht nur von niedrigerem Druck sondern auch von kleinerer Kraft sprechen) schwächer ist.

Es gilt der Zusammenhang:

Wichtig! 42 (Stromstärke – Druckdifferenz) Nach HAAGEN-POISEUILLE gilt: Der Stromfluss I ist proportional zur Druckdifferenz.

$$I = \frac{p_1 - p_2}{R} = \frac{\Delta p}{R} \quad (5.35)$$

Dabei hat der Proportionalitätsfaktor R eine physikalische Bedeutung:

Definition 5.16 (Strömungswiderstand R)

$$R = \frac{\Delta p}{I} \quad (5.36)$$

Mit der Einheit $[R] = \frac{\text{Pa} \cdot \text{t}}{\text{m}^3}$. Er ist abhängig von

- Flüssigkeit (also *welche* Flüssigkeit strömt überhaupt)
- Rohrdurchmesser
- von Geometrie des Rohres (ob es rund, eckig ... ist)

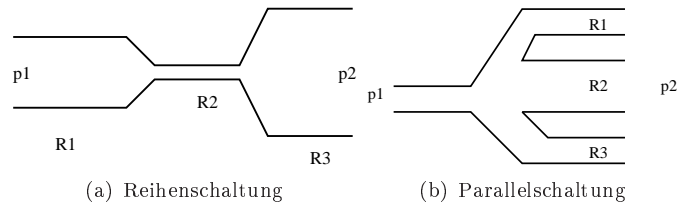
Es gilt für ein **rundes langs Rohr**:

Wichtig! 43 (Gesetz von HAGEN-POISEUILLE) Die Stromstärke ist zur Druckdifferenz proportional (nach Gl. (5.36)) mit

$$\frac{1}{R} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4}{\eta \cdot L} \quad (5.37)$$

Wobei r der Radius des Rohres, L die durchströmte Länge und η die Viskosität. Man erhält es, indem man die Reibungskraft aus (5.32) mit der Kraft gleichsetzt, welche die Strömung erzeugt: $F = A \cdot \Delta p = \pi r^2 \Delta p$.

¹³die Terminologie ist hier bewusst an die der Elektrodynamik angelehnt – schließlich kann man viele Zusammenhänge zwischen diesen beiden Disziplinen feststellen...

**Abbildung 5.7:** Schaltungen von Rohren**5.6.2.2 Verschaltung von Rohren**

Wir können verschiedene Leitungen auf zwei verschiedene Arten zusammenschalten:

Reihenschaltung Die Widerstände summieren sich, die Stromstärke muss konstant bleiben:

$$R_{ges} = \sum_i R_i$$

Parallelschaltung Die reziproken der Widerstände addieren sich, die Stromstärke addiert sich direkt:

$$I_{ges} = \sum_i I_i$$

$$R_{ges} = \left(\sum_i \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

Für (analoge) Herleitungen siehe Kap. 9.3.5 auf S. 153.

5.6.2.3 Festkörper in Flüssigkeit

Wichtig! 44 (STOKES-Reibung) Eine Kugel mit Radius r erfährt die geschwindigkeits(v)abhängige Reibung

$$F_R = 6 \pi \eta r \cdot v \quad (5.38)$$

Trotzdem sinken Kugeln mit großem Radius schneller. Das liegt daran, dass sie einen kleineren Auftrieb haben. Wir betrachten dazu eine unbeschleunigte Kugel, die mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 fällt:

$$F_G - F_A - F_R = 0 \Rightarrow F_G - F_A = F_R$$

wobei wir die nach unten weisenden Kräfte als positiv ansehen. Setzen wir (5.16) und (5.38) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{Kugel}} \cdot g \cdot V - \varrho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V &= 6 \pi \eta r \cdot v_0 \\ (\varrho_{\text{Kugel}} - \varrho_{\text{Fl}}) \cdot g \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 &= 6 \pi \eta r \cdot v_0 \\ v_0 = (\varrho_{\text{Kugel}} - \varrho_{\text{Fl}}) \cdot g \cdot \frac{4 \pi r^3}{3 \pi \eta r} &= (\varrho_{\text{Kugel}} - \varrho_{\text{Fl}}) \cdot g \cdot \frac{4 r^2}{3 \eta} \end{aligned} \quad (5.39)$$

also der Zusammenhang

$$v_o \sim \frac{r^2}{\eta} \quad (5.40)$$

Diesen Sachverhalt können wir für die *Viskositätsbestimmung* mit *Kugelfallviskosimetern* verwenden; hier kann man aus v η errechnen.

Definition 5.17 (NEWTON'sche Flüssigkeit) Wir nennen eine Flüssigkeit NEWTON'sch, wenn gilt

$$v \sim \frac{1}{\eta} \quad (5.41)$$

5.6.3 Ideale Flüssigkeit

Wo bei den zähen Flüssigkeiten die Reibungskräfte noch ausschlaggebend waren, können wir diese jetzt vernachlässigen.

Wir betrachten bspw. ein gefülltes Rohr mit Druckunterschied an den beiden Enden. Die Flüssigkeit wird vom Bereich hohen Drucks zum Bereich niedrigen Drucks fließen. Wenn jetzt aber zwischen den beiden Enden noch eine *Verjüngung* im Rohr ist, so wird hier der Druck *kleiner* sein, als an den beiden Rohrenden (vgl. Abb. 5.8). Trotzdem wird die Flüssigkeit weiterfließen.

Wir betrachten dazu ein bestimmtes Volumen ΔV in den drei verschiedenen Rohrabschnitten. Die *Stromstärke* muss dabei konstant bleiben:

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV_i}{dt} = \frac{A_i \cdot ds_i}{dt} = A_i \cdot v_i = \text{const} \quad (5.42)$$

Daraus können wir folgern:

- je kleiner das Rohrdurchmesser A_i ist, desto größer ist die entsprechenden Geschwindigkeit v_i .
- Die Kinetische Energie ändert sich beim Fluss:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \underbrace{\rho \cdot \Delta V}_{\Delta M} (v_2^2 - v_1^2) \quad (5.43)$$

Andererseits müssen wir beachten, dass beim Strömen die Arbeit („Volumenarbeit“) verrichtet wird:

$$W = \int F ds \stackrel{\text{const}}{=} F \cdot s = \underbrace{p \cdot A \cdot s}_F = p \cdot V \quad (5.44)$$

und damit

$$\Delta W = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V \quad (5.45)$$

dies entspricht einer **potentiellen** Energie: Die Energie, die aufgebracht werden muss, um den Druck von p_1 auf p_2 zu ändern. Nach dem Energieerhaltungssatz muss nun gelten $\Delta W = \Delta E_{kin}$ und mit Gl. (5.43) und (5.45):

$$\frac{1}{2} \underbrace{\rho \cdot \Delta V}_{\Delta M} (v_2^2 - v_1^2) = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V \quad (5.46)$$

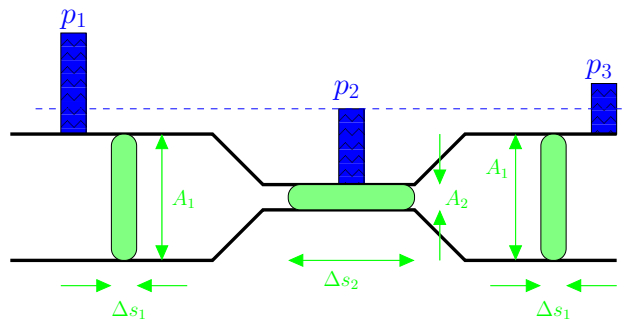


Abbildung 5.8: Ein Rohr mit Verjüngung, gefüllt mit einer idealen Flüssigkeit. Grün ist ein einheitliches Volumen in den drei Rohrabschnitten, blau ist der Druck – also eine Wassersäule, die man im Experiment sehen könnte.

und man erhält durch Umformung:

$$\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_1^2 + p_1 \quad (5.47)$$

und diese Formel ist an beliebigen Stellen gültig! Wir bezeichnen sie als:

Wichtig! 45 (BERNOLI-Gleichung) für horizontal strömende, ideale Flüssigkeiten:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2}_{\text{Staudruck}} + \underbrace{p}_{\text{hydrostatischer Druck}} = p_{\text{ges}} = \text{const} \quad (5.48)$$

Dabei ist der hydrostatische Druck der von einem Barometer messbare Druck.

5.6.4 Anwendungen bei idealen Flüssigkeiten

Ein paar Anwendungen: ◇

(i): **Zerstäuber / Wasserstrahlpumpe:** Durch ein Rohr wird ein Fluid geschickt. An einer Verjüngung ist ein zweites Rohr angeschlossen. An dessen Ende setzt man die zu zerstäubende bzw. anzupumpende Substanz. Dadurch, dass das Fluid an der engeren Stelle schneller fließen muss, ist der Druck hier sehr klein und die Stoffe werden angesaugt und in den allgemeinen Strom des Rohres beigemischt.

(ii): **Pradoxon:** Setzt man einen Ball in einen umgestülpten Trichter und pustet von oben in diesen Trichter, so fällt der Ball nicht herunter (wenn er leicht genug ist).

Die Luft umströmt den Ball und braucht dabei eine längere Strecke (weil der Ball rund ist). Folglich ist sie schneller und damit ist hier der Luftdruck klein. Zwischen Trichter und Ball ist der Luftdruck so klein, dass der Ball an die Trichterwand gezogen wird.

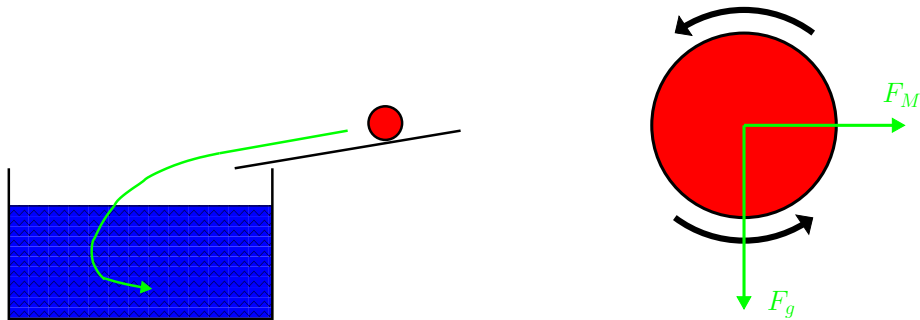


Abbildung 5.9: Bananenflanke: Trajektorie und Vergrößerung der Kugel

- (iii): **Bananenflanke:** Wenn ein Ball von einer schiefen Ebene in ein Wasserbecken fällt, so wird er hier nicht seinen Weg geradlinig fortsetzen, sondern eine krumme Bahn „schwimmen“ (vgl. Abb. 5.9).

Die Flüssigkeitsteilchen nahe der Kugel bewegen sich im Wasser mit der Kugel – sie hat noch eine Rotation von ihrem Weg auf der Schiefen Ebene. Auf der *rechten* Seite bewegen sich die Moleküle bezüglich der Kugel besonders schnell, weil sich hier die Rotation der Kugel und ihr Herabsinken addieren¹⁴. Auf dieser Seite ist also v groß und damit p klein: Die Kugel wird also nach rechts „gesaugt“. (s. Def. 5.18)

- (iv): **Golfbälle:** Die kleinen Vertiefungen in den Golfbällen sorgen dafür, dass der Magnus-Effekt hier besonders stark auftritt. Da der Golfschläger den Ball schräg abschießt und in Rotation versetzt, sorgt so der Magnus-Effekt beim Golfball dafür, dass dieser nach oben gezogen wird und damit weiter fliegt.



Definition 5.18 (MAGNUSkraft) Die Querkraft, die ein rotierender runder Körper in einem Fluid bzw. einer Strömung erfährt.

5.6.5 Reale Flüssigkeiten

Wir behandeln schnelle Strömungen; hier sind die ausschlaggebenden Größen die *Trägheitseffekte*. (Die Trägheitskräfte sind weit größer als die Reibungskräfte.)

Bei kleinen Geschwindigkeiten haben wir geordnete, *laminare* Strömungen (vgl. Abb. 5.6) – bei großen Geschwindigkeiten kann es bei realen Flüssigkeiten zu *turbulenten Strömungen* kommen, bei denen sich *Wirbel* bilden.

Diese **Wirbelbildung** hinter einem Hindernis kann man einfach dadurch erklären, dass wenn ein Flüssigkeitsvolumen an dem Hindernis vorbeiwandert, seine äußeren Teilchen direkt am Hindernis anliegen. Hier wirkt also eine große Reibungskraft auf die Teilchen. Je weiter weg vom Hindernis – also „im Inneren“ des Flüssigkeitsvolumens – ist die Reibung kleiner, und damit die Geschwindigkeit größer. Da also nahe am Hindernis die Teilchengeschwindigkeit klein und

¹⁴Wenn die Kugel herabsinkt, so fallen die Fluidteilchen um sie herum *relativ nach oben*.

weit davon entfernt groß ist, wird das Flüssigkeitsvolumen eine Rotation bekommen. Durch den *MAGNUS-Effekt* (s. Def. 5.18) wird es dann schließlich hinter das Hindernis gezogen: Ein erster kleiner Wirbel ist entstanden.

Bei großen Geschwindigkeiten kann es nun auch dann zu Wirbeln kommen, wenn gar keine Hindernisse im Weg waren: Das kommt dann von der Geschwindigkeits*fluktuation* der Teilchen des Flüssigkeitsvolumens.

Um zu entscheiden, ob eine Strömung turbulent oder laminar ist, müssen wir unterscheiden ob Trägheits- (turbulent) oder Reibungskräfte (laminar) die Oberhand haben; dafür untersuchen wir den Quotienten

$$\frac{F_{\text{Trägheit}}}{F_{\text{Reibung}}}$$

und untersuchen die beiden Kräfte separat:

Trägheit Ein bewegter Körper überträgt Impuls auf Flüssigkeit:

Eine Kugel mit Radius a überstreicht in dt das Volumen $A \cdot ds$. Dabei gilt für die Bewegte Menge (Masse) Flüssigkeit:

$$\frac{dm}{dt} = \varrho \cdot \frac{dV}{dt} = \varrho \cdot A \cdot \frac{ds}{dt} = \varrho \cdot A \cdot v \quad (5.49)$$

Nun muss jedes Teilchen dieser Masse wegbewegt werden. Da wir hier die Reibung noch außen vor lassen, ist dazu lediglich die (Trägheits)Kraft

$$F = \frac{dp}{dt} = \dot{p} \quad (5.50)$$

nötig mit $p = m \cdot v$. Es gilt:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dm \cdot v}{dt} + \frac{m \cdot dv}{dt} \quad (5.51)$$

Da wir die Geschwindigkeit hier als konstant ansehen, verschwindet der zweite Summand. Setzen wir nun also Gl. (5.49) in (5.51) und dies in (5.50) ein, so erhalten wir:

$$F = F_{\text{Trägheit}} = \varrho \cdot A \cdot v^2 = \varrho \cdot \pi a^2 \cdot v^2 \quad (5.52)$$

Reibung Die Reibung innerhalb der Flüssigkeit ist nach Gl. (5.38):

$$F_{\text{Reibung}} = 6\pi\eta a \cdot v$$

Dabei gilt diese Formel *eigentlich* für ein Kügelchen des Radius a . *Eigentlich* müssten wir hier für die Herleitung die unhandliche NAVIER-STOKES-Gleichung verwenden;

$$\varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \varrho \cdot \vec{g} + \eta \cdot \Delta \vec{v} \quad (5.53)$$

wobei \vec{v} die Bewegung der Teilchen und \vec{g} die Schwerebeschleunigung darstellt. (Die rechte Seite der Gleichung beschreibt Kräfte (das Δ ist der *Laplace-Operator*) und die linke Seite die dadurch hervorgerufene Bewegung.) Für unsere Zwecke ist die empirisch gefundene STOKES-Reibung aber gut genug. (Deshalb haben wir aber in (5.54) rechts auch keine *Gleichheit*, sondern nur eine *Proportionalität*.)

Nun können wir also den Quotienten bilden:

Definition 5.19 (REYNOLDSzahl) *Ein Maß, ob eine Strömung laminar ($R_e < 1$) oder turbulent ($R_e \gg 1$) ist:*

$$R_e = \frac{F_{Trägheit}}{F_{Reibung}} = \frac{\varrho \cdot d \cdot v}{\eta} \sim \frac{\varrho \cdot \pi a^2 \cdot v^2}{6\pi\eta av} \quad (5.54)$$

hier ist d der Strömungsdurchmesser des Gegenstandes.

Hier fließt ein: Wenn die Reibung wichtiger ist, ist der Nenner größer, damit die Zahl R_e klein ($R_e < 1$) und damit können wir die Betrachtungen aus Kap. 5.6.1 verwenden. Wenn dagegen die Trägheitskräfte einen entscheidenden Einfluss bekommen, so wird der Bruch sehr groß und wir erhalten Wirbel.

Da aber auch der Radius a in der Formel auftaucht, können wir sagen, dass für kleine a im Normalfall $R_e < 1$.

◇ **Ruder vs Propeller:** Wenn sich ein kleines Objekt (a klein $\Rightarrow R_e$ klein \Rightarrow zähe Flüssigkeit) in einer Flüssigkeit fortbewegen will, so kann es nicht „rudern“, weil es beim Vorziehen der Ruder wieder die Strecke zurückbewegt würde, die es beim Zurückziehen der Ruder vorwärts gekommen ist. Das kleine Objekt braucht einen *Propeller*.

Im Windkanal: Damit man ein Modell unter realistischen Bedingungen testen kann, muss man in Windkanälen den Druck (und damit die Dichte ϱ) so anpassen, dass die REYNOLDSzahl in Experiment und Realität übereinstimmt. ◇

Kapitel 6

Schwingungen und Wellen

6.1 Freie Schwingung

Definition 6.1 (Freie Schwingung) Bei einer *freien Schwingung* treten keine externen Kräfte auf.

Die hier auftretenden Kräfte sind stets

- Die träge Kraft $F_T = m\ddot{x}$
- eine *lineare* Rückstellkraft.

Je nach *Art* des Pendels (vgl. Abb. 6.1) unterscheiden sich die Rückstellkräfte:

Federpendel Federkraft¹: $F_R = -D \cdot x$

Torsionspendel Federkraft² $F_R = -D^* \cdot \varphi$ (hier ist $F_T = I\ddot{\varphi}$)

Fadenpendel $F_R = -F_G \cdot \sin \varphi = -mg \cdot \sin \varphi \approx -mg \cdot \varphi$

Da hier keine externen Kräfte angreifen, muss sich die Träge Kraft F_T komplett aus der Rückstellkraft ergeben³ – schließlich ist keine andere Kraft da:

$$F_T = F_R \quad (6.1)$$

Am Beispiel des Federpendels gilt dann:

$$m\ddot{x} = -Dx \Leftrightarrow \boxed{m\ddot{x} + Dx = 0} \quad (6.2)$$

Dies ist die verallgemeinerte **Bewegungsgleichung** einer freien Schwingung!

Hier haben wir stets eine *Differentialgleichung* zu lösen – wir haben $x(t)$ zu bestimmen. Hier hilft der Ansatz

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6.3)$$

¹Das „-“ kommt daher, dass wenn die Auslenkung x (oBdA) in die positive Richtung geht, die Federkraft in die *Gegenrichtung* – also in die negative Richtung – zeigt.

²mit der *Federrichtgröße* D^* , mit $D^* := \frac{E}{\varphi}$

³Dass die Träge kraft vorhanden sein muss, ergibt sich daraus, dass ein Pendel ständig seine Geschwindigkeit ändert. So muss ständig eine Beschleunigung wirken und mit $F = ma$ muss damit ständig eine Kraft wirken.

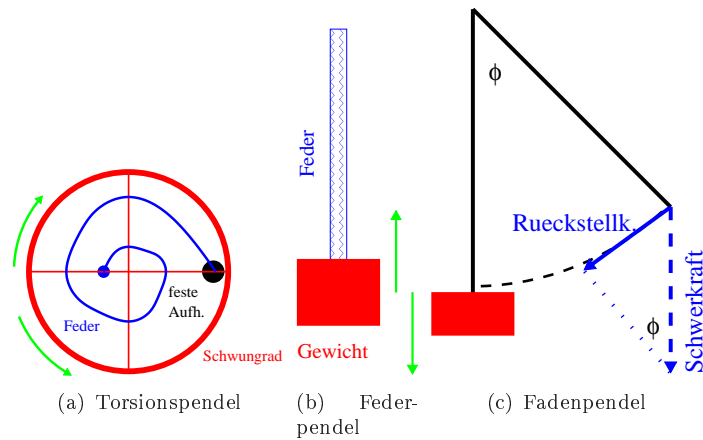


Abbildung 6.1: Verschiedene Sorten von Pendeln

Definition 6.2 () Wir bezeichnen eine Schwingung als **harmonische Schwingung**, wenn der Systemparameter (die Koordinate) einer Sinusfunktion in der Zeit folgen kann.

Durch Ableiten und Einsetzen erhält man hierbei mit (6.2):

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (6.4)$$

und damit eine Schwingfrequenz von

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{D}}{2\pi\sqrt{m}} \quad (6.5)$$

Die Gleichungen für die anderen Schwingungen lassen sich analog lösen.

6.2 Dämpfung

Nun können neben der Rückstellkraft und der Trägen Kraft noch weitere Kräfte angreifen, die wir meistens vernachlässigen; bspw. **Reibungskräfte**. Die Reibung („Dämpfung“) ist meistens von der Geschwindigkeit abhängig:

$$F_D = -\gamma\dot{x} \quad (6.6)$$

Wir erhalten dann die **Bewegungsgleichung** wieder, weil sich die Trägen Kraft als Summe der andere Kräfte darstellen lässt:

$$F_T = F_R + F_D \Leftrightarrow \boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = 0} \quad (6.7)$$

Wir sprechen dann von einer **freien gedämpften Schwingung**.

Diese freie Schwingung ist keine *harmonische Schwingung* mehr!

6.2.1 Geratener Ansatz

Als Ansatz zum Lösen der DGL⁴ verwenden (raten)⁵ wir

$$\boxed{x(t) = \hat{x} \cdot \exp(-\delta t) \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)} \quad (6.8)$$

Durch zweimaliges Ableiten erhalten wir

$$\dot{x} = -\delta \cdot x + \hat{x} \cdot \omega \cdot \exp(-\delta t) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.9)$$

und

$$\ddot{x} = (\delta^2 - \omega^2) \cdot x - 2 \cdot \hat{x} \cdot \delta \omega \cdot \exp(-\delta t) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.10)$$

und durch Einsetzen in (6.7) (mit der Vereinfachung $\theta := \omega t + \varphi_0$):

$$\hat{x} \exp(-\delta t) [\delta^2 m \sin \theta - \omega^2 m \sin \theta - 2\delta\omega m \cos \theta - \delta\gamma \sin \theta + \omega\gamma \cos \theta + D \sin \theta] = 0 \quad (6.11)$$

Da $\hat{x} \exp(-\delta t) \neq 0$ ist, können wir den Teil in eckigen Klammern umformen:

$$[\delta^2 m - \omega^2 m - \delta\gamma + D] \sin \theta + [-2\delta\omega m + \omega\gamma] \cos \theta = 0 \quad (6.12)$$

Da Sinus und Cosinus beide Null werden können, aber nicht *gleichzeitig* – die Gleichungen aber für jede Zeit t und damit jede Phase θ –, muss jeder der Terme in eckigen Klammern verschwinden, weil wenn $\cos \theta = 0$ gilt, verschwindet der rechte Term und dann muss der linke ebenfalls verschwinden. Weil an dieser Stelle $\sin \theta \neq 0$ ist, muss nach dem *Satz vom Nullprodukt* die Klammer verschwinden; wir erhalten also

$$\delta^2 m - \omega^2 m - \delta\gamma + D = 0 \quad (6.13)$$

$$-2\delta\omega m + \omega\gamma = 0 \quad (6.14)$$

Aus (6.14) gilt

$$\delta = \frac{\gamma}{2m} \quad (6.15)$$

und damit und mit (6.13) gilt

$$\omega^2 = \frac{D}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2} \quad (6.16)$$

Aus Kap. 6.1 wissen wir, die Frequenz der zugehörigen *freien Schwingung*: (6.4). Diese nennen wir hier ω_0 . Mit (6.15) gilt also:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (6.17)$$

6.2.2 Allgemeiner Ansatz

Der Allgemeine Ansatz zur Lösung einer DGL wie (6.7) ist

$$x = x(t) = c \exp(\lambda t) \quad (6.18)$$

⁴Differenzialgleichung

⁵Diese Technik wird auch als „*clever guess*“ bezeichnet.

Durch Ableiten

$$\dot{x} = \lambda \cdot x \quad (6.19)$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 \cdot x \quad (6.20)$$

und Einsetzen

$$m\lambda^2 x + \gamma\lambda x + Dx = 0 \quad (6.21)$$

kommt man (durch Kürzen mit x da $x \neq 0$ für $c \neq 0$) auf das *characteristische Polynom*

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + D = 0 \quad (6.22)$$

welches wir mit der Mitternachtsformel lösen können:

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4Dm}}{2m} = \frac{-\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega_0^2} =: -\delta \pm \underbrace{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}_{i\omega} \quad (6.23)$$

Die Allgemeine Lösung für die DGL (6.2) ergibt sich dann als

$$x(t) = c \exp\left(\frac{-\gamma}{2m} \cdot t + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega_0^2} \cdot t\right) + \bar{c} \exp\left(\frac{-\gamma}{2m} \cdot t - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega_0^2} \cdot t\right) \quad (6.24)$$

oder als

$$x(t) = \left(c \cdot \exp(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t) + \bar{c} \cdot \exp(-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t)\right) \cdot \exp(-\delta \cdot t)$$

Wichtig! 46 \bar{c} ist komplex konjugiert zu c

Eigentlich müssten wir die beiden Konstanten c und die, wo jetzt \bar{c} steht, frei wählen können. Dadurch, dass wir die komplex konjugierte wählen, investieren wir Information: Die Schwingung findet im *reellen* statt: Es würde keinen Sinn machen, eine komplexe Größe für x zu erhalten. Die einzige Möglichkeit, zu vermeiden dass $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ liegt, ist die zweite, eigentlich freie Konstante als komplex konjugierte zu wählen.

Alternativ kann man auch argumentieren, dass man eine Lösung findet, die auch komplex sein darf, so lange sie nur die Differenzialgleichung löst. Nun sind sowohl Real- als auch Imaginärteil dieser komplexen Lösung *für sich* Lösungen der DGL. Dieser komplexe Ansatz ist manchmal einfacher zu rechnen. Man büßt auch keine Freiheitsgrade ein, weil von c sowohl Real- als auch Imaginärteil frei wählbar sind!

Jetzt müssen wir drei Sonderfälle unterscheiden:

Fall I: $\delta^2 < \omega_0^2$: **schwache Dämpfung**: Der „Inhalt“ der Wurzel von λ ist negativ, also ist λ imaginär, was uns auf eine *Schwingung* führt. Man kann $\exp(-\delta t)$ ausklammern und erhält⁶

$$x(t) = (2\Re c \cos \omega t - 2\Im c \sin \omega t) \cdot e^{-\delta t}$$

⁶Setzt man stur ein und beachtet, dass \bar{c} das komplex konjugierte von c ist, folgt dies direkt.

Diese Darstellung ist aber noch etwas sperrig (mit Sinus *und* Cosinus darin). Dazu schreiben wir c und \bar{c} in der Komplexen Exponentenschreibweise um:

$$c = |c| e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \bar{c} = |c| e^{-i\varphi} \quad (6.25)$$

mit dem φ von Gl. (6.28). Wir können so Gl. (6.24) umschreiben⁷ zu

$$x(t) = |c| \cdot \left(e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)} \right) \cdot e^{-\delta t} \quad (6.26)$$

und das wiederum⁸ zu

$$x(t) = 2|c| \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\delta t}$$

und mit eingesetzten Werten:

$$x(t) = \underbrace{2|c|}_{\hat{x}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2m} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{D}{m}} \cdot t + \varphi\right) \quad (6.27)$$

Wobei die Phasenverschiebung φ daraus resultiert, dass $c \neq \bar{c}$; dann gilt

$$\varphi = \arctan -\frac{i(c - \bar{c})}{c + \bar{c}} = \arctan \frac{\Im c}{\Re c} \quad (6.28)$$

Dieses φ hat also nicht nur eine mathematische, sondern auch eine physikalische Bedeutung.

Wir haben also eine Schwingung, die mit $\exp(-\delta \cdot t)$ abnimmt; man bezeichnet δ deshalb auch als **Dekrement**.

Fall II: $\delta^2 > \omega_0^2$: **starke Dämpfung**: Die Wurzeln aus (6.23) sind jetzt reell.⁹ Wir bezeichnen sie mit μ und $-\mu$ und erhalten so als Lösung (nach Ausklammern und Einsetzen von $\exp(-\delta t)$):

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (c_1 \exp(\mu t) + c_2 \exp(-\mu t)) \quad (6.29)$$

Wenn wir nun als Anfangsbedingung $x(t=0) = 0$ annehmen, so gilt $c_1 + c_2 = 0$ und wenn wir weiter $\dot{x}(t=0) = v_0$ setzen, so gilt¹⁰ $c_1 - c_2 = \frac{v_0}{\mu}$. Verbindet man nun die Bedingungen für c_1 und c_2 so erhält man $2c_1 = \frac{v_0}{\mu}$ und $2c_2 = -\frac{v_0}{\mu}$ und so folgt:

$$x(t) = \frac{v_0}{2\mu} e^{-\delta t} \cdot (\exp(\mu t) - \exp(-\mu t)) \quad (6.30)$$

⁷Da i kommt daher, dass die Wurzel negativ ist – das ω soll aber reell sein, deswegen zieht man die -1 unter der Wurzel hervor.

⁸Dazu stellt man auf $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ und das komplex konjugierte ist $e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi$. Dann summiert man diese beiden Terme.

⁹Deswegen sind die beiden Konstanten c_1 und c_2 jetzt auch beide reell (und voneinander unabhängig)!

¹⁰mit dem Ergebnis aus der ersten Anfangsbedingung (Nur mit der zweiten Bedingung erhält man $\mu(c_1 - c_2) - \delta(c_1 + c_2) = v_0$. Mit der ersten Bedingung verschwindet der δ -Term links.

Dies ist genau die Definition für den Sinushyperbolicus:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\mu} \exp(-\delta t) \cdot \sinh \mu t} \quad (6.31)$$

Und mit eingesetzten „Werten“:

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2m} \cdot t\right) \cdot \sinh\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

Wir vergleichen nun die Argumente von \exp und \sinh . Wegen $\delta^2 > \omega_0^2$ können wir auch sagen, dass $\delta > \omega_0$ – rein vom Sinn her sind sowohl Dämpfung als auch Frequenz positive Größen. Wir können so abschätzen (für $\omega_0 > 0$):

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < \sqrt{\delta^2} = \delta$$

Damit ist das Argument des \exp immer (betragsmäßig) größer. Wenn wir dies beachten, dann ist der Bewegungsverlauf allgemein: Der Schwinger wird einmal ausgelenkt, erreicht die maximale Auslenkung *nicht* und schwingt dann wesentlich langsamer (asymptotisch) in die Ruhelage zurück.

Fall III: $\delta^2 = \omega_0^2$: **aperiodischer Grenzfall**: Die Wurzeln in (6.23) verschwinden. Man hätte als einzige Lösung für das Characteristische Polynom $\lambda = \frac{-\gamma}{2m} = -\delta$.

Als Lösung der DGL (6.7) erhalten wir so¹¹

$$x(t) = c_1 t \cdot \exp(-\delta t) + c_2 \exp(-\delta t) \quad (6.32)$$

Wollen wir wieder die Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$ verwenden, erhalten wir $c_2 = 0$ und $c_1 = v_0$ und damit

$$x(t) = v_0 t \cdot \exp(-\delta t) \quad (6.33)$$

Die Schwingung geht hier einmal nach außen und schwingt sich langsam in die Ruhelage zurück.

Lassen wir das Pendel stattdessen ausgelenkt starten ($x(t=0) = \hat{x}$ und $\dot{x}(t=0) = 0$) erhalten wir $c_2 = \hat{x}$ und $c_1 = \delta c_2 = \delta \hat{x}$. Die Lösung sieht dann so aus:

$$\boxed{x(t) = \hat{x}(\delta t + 1) \exp(-\delta t)} \quad (6.34)$$

In Abb. 6.2 sind die verschiedenen Dämpfungsarten aufgezeichnet.

¹¹Wir brauchen noch eine zweite Unbekannte in unserem System und dafür einen zweiten Term. Diesen erhalten wir, indem wir mit t multiplizieren.

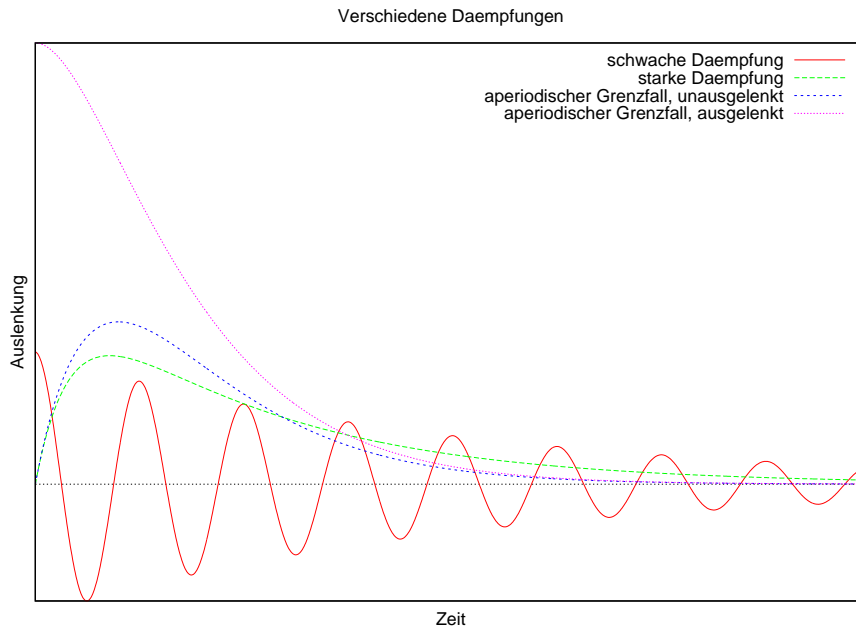


Abbildung 6.2: Verschiedene Dämpfungen einer Schwingung; die Amplituden und Frequenzen wurden willkürlich gewählt.

6.3 Störung

Nun wollen wir noch eine **externe Kraft** angreifen lassen:

$$F_{ext} = \hat{F}_{ext} \cos(\omega_{ext}t) \quad (6.35)$$

D.h. unser Pendel wird die ganze Zeit über von außen periodisch angeregt. Dem Pendel bleibt nach einer „Einschwingphase“ nichts anderes übrig, als mit der Frequenz ω_{ext} zu schwingen.

Weil periodisch Energie zugeführt wird, wird die Dämpfung praktisch mit ausgeglichen.

In der **Bewegungsgleichung** steuert F_{ext} jetzt auch einen Teil zu F_T bei und wir erhalten analog:

$$\boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = F_{ext}} \quad (6.36)$$

6.3.1 Then-A-Wonder-Occurs-Ansatz

Unser neuer **Ansatz** lautet:

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega_{ext}t + \varphi_{ext}) \quad (6.37)$$

Dabei ist φ_{ext} die *Phasendifferenz* zwischen Erreger und Oszillator (Pendel).

Durch Ableiten und Einsetzen¹² erhält man

$$\varphi_{ext} = \arctan \frac{-\omega_{ext}}{\frac{m}{\gamma}(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)} \quad (6.38)$$

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 m^2 + \omega_{ext}^2 \gamma^2}} \quad (6.39)$$

Siehe dazu Abb. 6.3.

6.3.2 Allgemeiner Ansatz

Wir führen $K = \frac{\hat{F}_{ext}}{m}$ ein, um die DGL (6.36) umzuformulieren (Achtung: Hier ist δ nicht mehr wie oben gewählt!):

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = K \cos \omega t \quad (6.40)$$

Dann erhalten wir auf der linken Seite die linke Seite von Gl. (6.7). D.h. wir haben hier mit (6.40) eine inhomogene DGL, die wir lösen, indem wir zu einer homogenen Lösung (wie (6.24) – oder besser gleich (6.27)) eine *Partikulärlösung* addieren. Diese Partikulärlösung ist nach dem *Ansatz vom Typ der Rechten Seite* einfach

$$x_p(t) = \hat{x}_p \cos(\omega_p t + \varphi_p) \quad (6.41)$$

wobei $\omega_p = \omega_{ext} = \omega$ die Erregerfrequenz ist.

D.h. wir erhalten insgesamt als Lösung

$$\boxed{x(t) = \hat{x}_h \exp(-\delta t) \cdot \cos(\omega_h t + \varphi_h) + \hat{x}_p \cdot \cos(\omega_p t + \varphi_p)} \quad (6.42)$$

Wobei ω_h die Frequenz der entsprechenden gedämpften, *nicht angeregten* Schwingung – s. Kap. 6.2.2 – ist.

Wir wollen nun einige **qualitative Untersuchungen** durchführen: Da im ersten Term eine exponentiell abnehmende Funktion steckt, können wir den ersten Term für große t ignorieren, da $\exp(-t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und die Cosinus-Terme beschränkt sind.

Nehmen wir an, diese „Einschwingphase“ ist vorbei, dann haben wir als Lösung nur noch den zweiten Term aus (6.42) – also im Prinzip (6.41).

Setzen wir diese Lösung in (6.40) ein, erhalten wir für $t = \frac{\pi}{2\omega_p}$

$$(\omega_p^2 - \omega_0^2) \sin \varphi_p - 2\delta\omega_p \cos \varphi_p = 0 \quad (6.43)$$

und damit

$$\tan \varphi_p = \frac{2\delta\omega_p}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \quad (6.44)$$

Und für $t = 0$ gilt:

$$\hat{x}_p \cdot (\omega_p^2 - \omega_0^2) \cos \varphi_p + 2\delta\hat{x}_p\omega_p \sin \varphi_p = -K \quad (6.45)$$

Und damit

$$\hat{x}_p \cos \varphi_p = \frac{-K - 2\delta\hat{x}_p\omega_p \sin \varphi_p}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \quad (6.46)$$

$$\hat{x}_p \sin \varphi_p = \frac{-K - \hat{x}_p \cdot (\omega_p^2 - \omega_0^2) \cos \varphi_p}{2\delta\omega_p} \quad (6.47)$$

¹²Then a wonder occurs

Da $(\hat{x} \cos \phi)^2 + (\hat{x} \sin \phi)^2 = \hat{x}^2$ ist, können wir Gl. (6.46) und (6.47) quadrieren und addieren und erhalten unter Verwendung von (6.43):

$$\hat{x}_p = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + (2\delta\omega_p)^2}} \quad (6.48)$$

6.3.3 Fälle

Wir unterscheiden drei verschiedene Fälle für die anregende Frequenz:

Kleine Frequenzen $\omega_{ext} \ll \omega_0$ Der Oszillator folgt dem Erreger unmittelbar.

Oszillator und Erreger schwingen in Phase: $\varphi_{ext} = 0$ Die Amplitude für kleine ω_{ext} ist

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m\omega_0^2} \Leftrightarrow \hat{F} = D \cdot \hat{x}$$

Ähnliche Frequenzen $\omega_{ext} \approx \omega_0$ Die Amplitude erreicht ihren Höchstwert für $\omega_{ext} \equiv \omega_0$; die Phasenverschiebung geht dann unabhängig von der Dämpfung gegen $\varphi_{ext} \rightarrow 90^\circ$.

Hier tritt auch die **Resonanzkatastrophe** ein: Wenn die Dämpfung γ klein genug ist, geht $\hat{x} \rightarrow \infty$.

Hohe Frequenzen $\omega_{ext} \gg \omega_0$ Die Amplitude verschwindet.

Der Oszillator kann der Erregung nicht mehr folgen; $\varphi \rightarrow 180^\circ$.

6.4 Gekoppelte Schwingungen

Wir lassen zwei Pendel nebeneinander pendeln und verbinden ihre Gewichte durch eine Feder. Dadurch haben wir zwei (harmonische oder gedämpfte) Schwingungen, die von der jeweils anderen Schwingung angeregt werden.

Wir führen zwei getrennte Koordinatensysteme ein; das eine Pendel beschreiben wir mit x , das andere mit y . Nun üben die Pendel keine Kräfte aufeinander aus, wenn sie gleichphasig (synchron) schwingen; dann ist der Abstand zwischen ihnen konstant und die Feder wird weder gedehnt noch gestaucht. Nur wenn die Feder ihre Länge verändert, übt sie eine Kraft auf die beiden Schwinger aus. Die Kraft, die der *linke* Schwinger erfährt ist¹³

$$F_{ext,links} = D \cdot (y - x) \quad (6.49)$$

D.h. wir können die Differenzialgleichung der nicht gedämpften, angeregten Schwingung aufstellen:

$$m\ddot{x} + Kx = F_{ext} = D(y - x) \Leftrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_0^2} x + \frac{D}{m}(x - y) = 0 \quad (6.50)$$

¹³Lassen wir x konstant und vergrößern y so wirkt wirklich eine Federkraft längs der x -Achse auf den linken Schwinger.

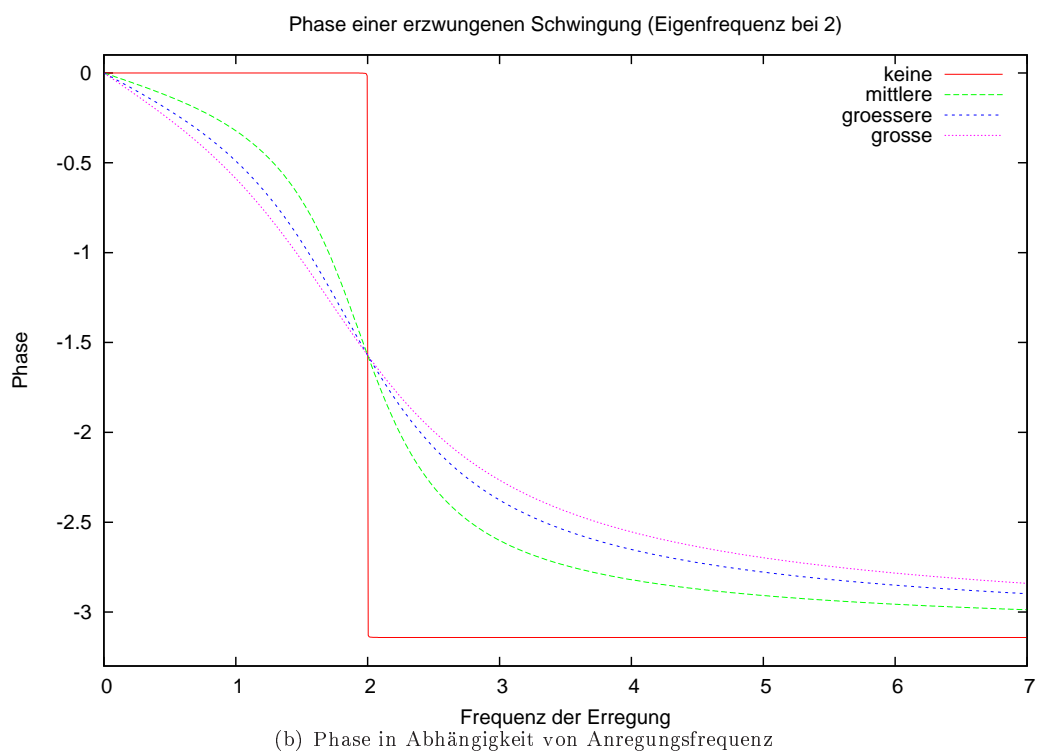
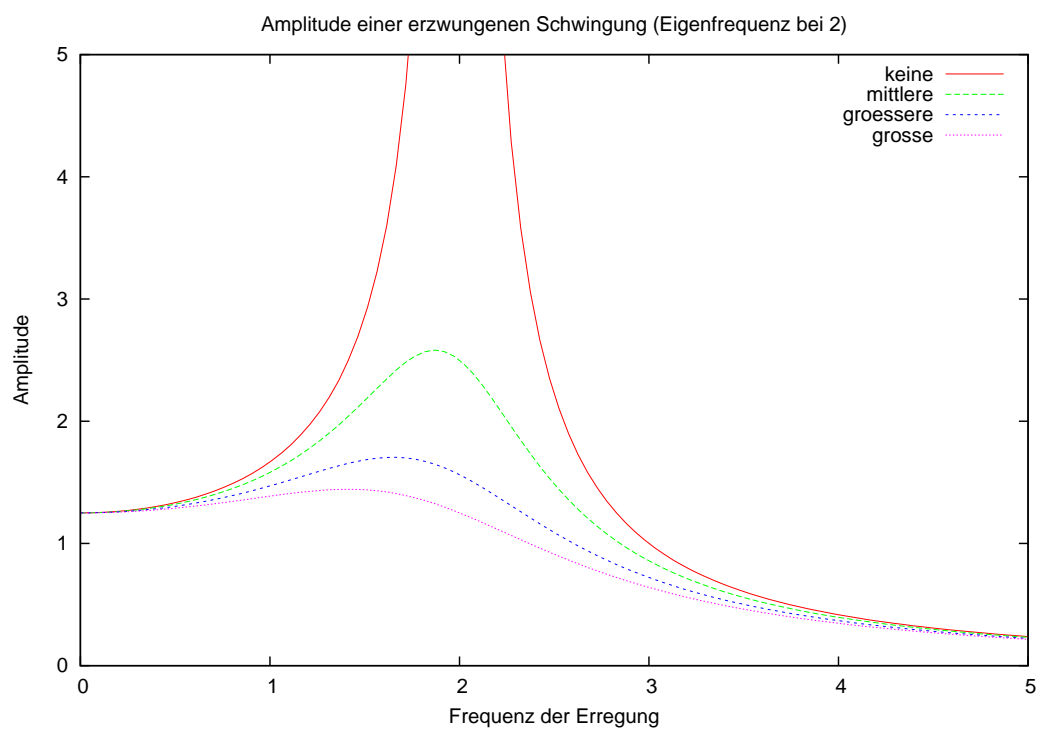


Abbildung 6.3: Amplitude und Phase einer Erzwungenen Schwingung bei verschiedenen Dämpfungen – siehe Gl. (6.37) (6.38)

Dabei verwenden wir K als Konstante für die *Rückstellkraft* und ω_0 die Eigenfrequenz des linken Pendels ohne Koppelung.

Für den rechten Schwinger gilt entsprechend:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \frac{D}{m}(y - x) = 0 \quad (6.51)$$

6.4.1 Entkoppeln mit Ansatz

Als Ansätze wählen wir hier zwei harmonische Schwingungen:

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{und} \quad y = \hat{y} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.52)$$

Einsetzen ergibt wieder:

$$-\omega^2 x + \omega_0^2 x + \frac{D}{m}x = \frac{D}{m}y \quad (6.53)$$

$$-\omega^2 y + \omega_0^2 y + \frac{D}{m}y = \frac{D}{m}x \quad (6.54)$$

Multipliziert man die Gleichungen erhält man

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{D}{m}\right)^2 = \left(\frac{D}{m}\right)^2 \quad (6.55)$$

Dabei muss man beachten, dass wenn man die Gl. (6.53) miteinander multipliziert, in jedem Summanden $x \cdot y$ steckt und so darf man durch dieses teilen. Wir teilen also praktisch bevor wir die Gleichungen multiplizieren schon durch $x \cdot y$ – weil wir wissen, dass diese Terme sowieso herausfallen. Deshalb kann man diese Rechnung sehr einfach machen.

Es gilt weiter:

$$-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{D}{m} = \pm \frac{D}{m} \quad (6.56)$$

Und wir haben also zwei Ergebnisse:

Fall I $\omega = \omega_0$ wenn wir das „+“ von „ \pm “ wählen:

$$x = y$$

(erhalten wir, wenn wir $\omega = \omega_0$ in (6.52) links einsetzen).

Die Pendel schwingen in Phase („*gleichphasig*“) und so wird die Feder weder gedehnt noch gestaucht.

Fall II $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{D}{m}}$ wenn wir das „–“ von „ \pm “ wählen:

$$x = -y$$

Die Pendel schwingen *gegenphasig* d.h. sie erreichen gleichzeitig ihre maximale Auslenkung und gleichzeitig ihre minimale Auslenkung.

Wichtig! 47 Aus diesen beiden Schwingungszuständen kann man jede Bewegung gekoppelter Pendel durch Überlagerung erzeugen.

Bspw. ist in Abb. 6.5 die Schwingung der beiden Pendel dargestellt, wenn nur eines der beiden zu Anfang der Schwingung ausgelenkt war. Man nennt dieses Verhalten **Schwebung**. Hier wechselt die kinetische Energie ständig zwischen den beiden Pendeln hin und her.

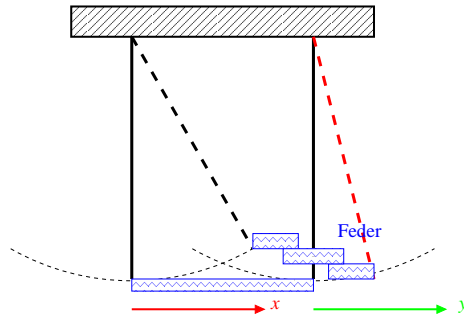


Abbildung 6.4: Gekoppeltes Fadenpendel (Die gestauchte Feder soll die Verkürzung der Feder als Überlappung symbolisieren)

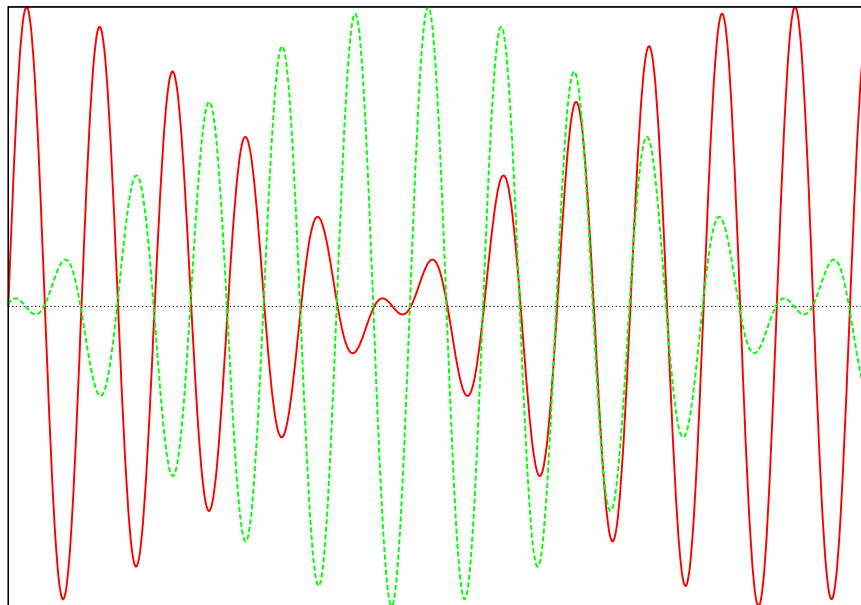


Abbildung 6.5: Schwebung: Nur eines der beiden gekoppelten Pendel ist zu Anfang ausgelenkt

6.4.2 Entkoppeln ohne Ansatz

Oben haben wir den Sinusansatz wieder durch *Clever guess* (vgl. Kap. 6.3.1) gefunden. Wir wollen das Problem nochmal besprechen, wobei wir einen etwas allgemeineren Ansatz wählen. Wir gehen wieder aus von den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + Kx + D(x - y) &= 0 \\ m\ddot{y} + Ky + D(y - x) &= 0 \end{aligned} \quad (6.57)$$

aus, nur dass wir sie diesmal einmal addieren und einmal subtrahieren:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} - \ddot{y}) + K(x - y) + 2D(x - y) &= 0 \\ m(\ddot{x} + \ddot{y}) + K(x + y) &= 0 \end{aligned} \quad (6.58)$$

Durch „Koordinatentransformation“ erhält man daraus die zwei neuen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + Ku + 2Du &= 0 \text{ oder } m\ddot{u} + (K + 2D)u = 0 \\ m\ddot{v} + Kv &= 0 \end{aligned} \quad (6.59)$$

Die wir einfach lösen können: Es handelt sich um *harmonische Schwingungen*, die wir aus Kap. 6.1 kennen. So kennen wir auch die Lösung dafür:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{K + 2D}{m}} \cdot t + \varphi\right) \text{ und } v(t) = \hat{v} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \psi\right) \quad (6.60)$$

Auf die eigentlichen Koordinaten x und y kommen wir nun wieder durch Addition und Subtraktion von u und v :

$$x = \frac{1}{2}(v + u) \text{ und } y = \frac{1}{2}(v - u) \quad (6.61)$$

Über die Anfangsbedingungen erhält man Größen für \hat{u} und \hat{v} (und φ und ψ), die darüber bestimmen, welchen Anteil u und v an x und y haben.

6.4.3 Entkoppeln mit Matrix

Wir stellen nun den Schwinger durch einen *Vektor* dar: $\vec{z} = (x, y)^T$. Damit verändert sich (6.57) zur Vektorgleichung

$$m\ddot{\vec{z}} + \begin{pmatrix} K + D & -D \\ -D & K + D \end{pmatrix} \cdot \vec{z} = \vec{0} \text{ oder } \begin{pmatrix} m\frac{d^2}{dt^2} + K + D & -D \\ -D & m\frac{d^2}{dt^2} + K + D \end{pmatrix} \cdot \vec{z} = \vec{0} \quad (6.62)$$

Als allgemeinen Ansatz machen wir (vgl. Kap. 6.2.2)

$$\vec{z} = \vec{z}(t) = \vec{Z} \cdot e^{\lambda t} \quad (6.63)$$

Damit erhält man

$$\begin{pmatrix} m\lambda^2 + K + D & -D \\ -D & m\lambda^2 + K + D \end{pmatrix} \cdot \vec{z} = \vec{0} \text{ oder } \mathbf{A} \cdot \vec{z} = \vec{0} \quad (6.64)$$

Damit diese Gleichung nicht trivial wird (also $\vec{z} = \vec{0}$), muss $\det \mathbf{A} \equiv 0$ werden¹⁴. Für die 2×2 -Matrix ist dies noch machbar:

$$(m\lambda^2 + K + D)^2 - D^2 \equiv 0 \quad (6.65)$$

und so erhält man für λ die Identitäten:

$$\lambda = -\sqrt{-\frac{K}{m}}, \lambda = \sqrt{-\frac{K}{m}}, \lambda = -\sqrt{-\frac{K}{m} - \frac{2D}{m}}, \lambda = \sqrt{-\frac{K}{m} - \frac{2D}{m}} \quad (6.66)$$

Dabei haben wir stets negative Wurzeln – also Komplexe Zahlen! Dies wiederum bedeutet, dass in unserem Ansatz (6.63) der e-Term eine Schwingung beschreibt. Die Korrekte Lösung besteht aus einer Linearkombination von vier Termen nach (6.63) wobei alle \vec{Z} – theoretisch – frei bestimmbar sind. Weil wir jedoch wieder nur an *reellen* Lösungen interessiert sind, müssen die \vec{Z} jeweils für die beiden ersten und die beiden Letzten λ aus (6.66) voneinander das komplexe Konjugat sein; damit bekommen wir aber weiterhin *vier* Freiheitsgrade. Wie in Kap. 6.2.2 bekommen wir zwei (komplexe) Vektoren \vec{Z} und zwei *Phasenverschiebungen* der Cosini.

Hier haben wir die ganze Zeit über angenommen, dass die beiden Massen m gleich sind, ebenso wie dass die beiden Federn K gleich hart sind. Wenn dem *nicht* so wäre, wäre die Lösung mit diesem Ansatz ebenso zu bestimmen – nur ein wenig komplizierter. Die Ausdrücke (für *ein* λ) sind so lange, dass sie nicht in eine Zeile hier passen...

6.5 Überlagerung von Schwingungen – Interferenz

6.5.1 Gleiche Frequenz

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega t) \\ y &= B \sin(\omega t) \\ x + y &= (A + B) \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (6.67)$$

6.5.2 Unterschiedliche Frequenz

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega_1 t) \\ y &= A \sin(\omega_2 t) \\ x + y &= 2A \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \end{aligned} \quad (6.68)$$

Wir benutzen dabei ein Additionstheorem für $\sin(\vartheta) + \sin(\vartheta)$. Siehe auch Kap. 6.9.

¹⁴Sonst (also $\det \mathbf{A} \neq 0$) sind die Spalten von \mathbf{A} linear unabhängig und damit können sie nur durch die triviale Linearkombination zu 0 addiert werden.

6.5.3 Beliebige Schwingungen

Dank der FOURIER-Analyse ist es möglich, jede periodische Funktion aus Sinus- und Cosinus-Schwingungen zusammenzusetzen.

In der Realität ist das nicht immer möglich, weil bspw. die Federhärte nicht konstant ist und so die formal mit Sinusschwingungen gelösten Bewegungen eigentlich gar keine solche absolvieren.

6.6 Fortschreitende Welle

Wichtig! 48 (Energietransport) *Bei einer Schwingung wird Energie transportiert. Die Massenteilchen selbst bleiben am Ort und schwingen nur um eine Ruhelage.*

6.6.1 Wellengleichung und Definitionen

Wir gehen von der Schwingung in der Zeit an einem Ort (wir denken sie uns im Ursprung) mit der Gleichung

$$y_0(t) = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6.69)$$

über zu einer Schwingung, die zusätzlich noch eine räumliche Komponente hat.

Definition 6.3 (Wellenlänge λ) *Der räumliche Abstand zwischen zwei phasengleich schwingenden Punkten einer Welle.*

Die Überlegung ist, dass je weiter in x -Richtung wir uns von dem in (6.69) betrachteten Schwinger wegbewegen, die Schwingung in einer anderen Phase ist. Wenn man ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge zurückgelegt hat, soll die Phase wieder die gleiche sein. Deshalb teilen wir die Entfernung x durch die Wellenlänge λ und haben so die Entfernung normiert als *Anzahl von Wellenlängen*. Genau so oft hat die Welle bis zum Punkt x schon eine komplette Periode hinter sich. Eine Periode des Sinus ist 2π lang – also hat die Welle bis zum Punkt x die Phasendifferenz $2\pi \frac{x}{\lambda}$ zum Ursprungspunkt der mit Gl. (6.69) beschrieben wird. Also hat der Punkt x die Phase

$$\varphi(x) = \varphi_0 + 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

Um die Schwingung im Punkt x zur Zeit t zu berechnen, können wir die Schwingung im Punkt $x = 0$ betrachten – also Gl. (6.69) verwenden. Indem wir von der Phase der Schwingung im Punkt x den Wert $\varphi(x)$ abziehen, erhalten wir die Phase, die der Punkt in $x = 0$ zur Zeit t hat und können so $y(x, t)$ ausrechnen.

Es ergibt sich die Wellengleichung

$$y = y(x, t) = \hat{y} \cdot \sin \left(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right)$$

Eine Kleine Erinnerung: Wir können die Gleichung auch schreiben als

$$y = y(x, t) = \hat{y} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right)$$

Damit sieht man den Zusammenhang von Periodendauer T und Wellenlänge λ noch besser. Wie man die Frequenz ω als Abkürzung $\omega = \frac{2\pi}{T}$ verwendet, verwendet man als Abkürzung von $\frac{2\pi}{\lambda}$:

Definition 6.4 ((Kreis)Wellenzahl k) mit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.70)$$

Damit können wir die Gleichung für $y(x, t)$ noch weiter umschreiben:

$$y = y(x, t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (6.71)$$

Definition 6.5 (Ausbreitungs- / Phasengeschwindigkeit c oder c_{Phase})
Ein bestimmter Schwingungszustand der Schwingung – also eine gewisse Phase – bewegt sich mit der Geschwindigkeit c fort.

$$c_{\text{Phase}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k} \quad (6.72)$$

mit der Kreiswellenzahl k (s. (6.70)) und

Definition 6.6 (Periodendauer T) *An einem Ort dauert es T bis sich der selbe Schwingungszustand wieder eingestellt hat.*

D.h. die Gleichung

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

entspricht

$$v = \frac{s}{t}$$

6.6.2 Differenzielle Form der Wellengleichung

Im Speziellen Fall für nur eine Dimension gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} y \quad (6.73)$$

Der Allgemeine Fall berücksichtigt noch mehr Raumdimensionen x_i :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{y} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \vec{y} \right) = 0 \quad (6.74)$$

Dabei können wir dies mit dem LAPLACE-Operator Δ umschreiben zu:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{y} - \Delta \vec{y} = 0 \quad (6.75)$$

Wenn wir nun unsere Gleichung (6.71) einsetzen, so erhalten wir:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \quad (6.76)$$

und damit wieder den Zusammenhang aus (6.72). Die von uns anschaulich hergeleitete Lösung stimmt also.

6.7 Arten von Wellen

Wir unterscheiden zwei Typen:

Transversalwellen Schwingen *senkrecht* zu ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeit (bspw. Wasserwellen)

Longitudinalwellen Schwingen *parallel* zur Ausbreitungsrichtung (bspw. Schallwellen¹⁵)

6.8 Interferenz

Zwei Wellen durchdringen sich im Allgemeinen ohne Probleme – also gehen *unverändert* weiter. In dem Bereich, in dem sie sich durchdringen **überlagern** sie sich; ihre Auslenkungen addieren sich.

Im besonderen Fall hat man zwei Wellen der selben Frequenz ν ; hier ergeben sich zwei Spezialfälle:

Definition 6.7 (konstruktive und destruktive Interferenz) Bei **konstruktiver Interferenz** hat die Summe der Wellen eine maximale Amplitude ($|\hat{y}_1| + |\hat{y}_2|$), bei **destruktiver Interferenz** wird die Amplitude der Überlagerung *minimal* ($||\hat{y}_1| - |\hat{y}_2||$).

Haben die Wellen sogar die gleiche Amplitude \hat{y} , so hat die Überlagerung bei konstruktiver Interferenz die Amplitude $2\hat{y}$ und bei destruktiver Interferenz verschwindet die Amplitude der Überlagerung.

Wir definieren

Definition 6.8 (Gangunterschied Δs) Der *kürzeste räumliche Abstand zwischen zwei gleichen Schwingungszuständen zwischen zwei verschiedenen (überlagernden) Wellen.*

und analog dazu

Definition 6.9 (Phasendifferenz $\Delta\varphi$) Der *Unterschied der Phasen zweier Wellen am selben Ort.*

Es gilt der Zusammenhang

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta s \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k \quad (6.77)$$

wobei k die *Kreiswellenzahl* aus (6.70) ist.

Wir betrachten gleichförmige (also gleiche Frequenz bzw. Wellenlänge und Amplitude) Wellen x , y und z :

$$x = A \cos(\omega t - kx), \quad y = A \cos(\omega t - k(x + \Delta s)) \quad \text{und} \quad z = A \cos(\omega t - kx + \Delta\varphi)$$

Anschaulich ist klar, dass sich genau dann eine maximale Amplitude von $2A$ ergibt, wenn die Argumente der Cosini sich um vielfache von 2π unterscheiden und genau dann die minimale Amplitude von $A - A = 0$, wenn sich die Argumente um $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ unterscheiden. Für die *Phasendifferenz* $\Delta\varphi$ kann man

¹⁵Der Mensch kann Schallwellen mit Frequenzen von $\nu \in [20 \text{ Hz}; 20\,000 \text{ Hz}]$ wahrnehmen.

so sofort die gewünschten Bedingungen finden (s. (6.79) und (6.81)). Für den *Gangunterschied* dagegen vergleichen wir x mit y und sehen, dass $k\Delta s$ für konstruktive Differenz vielfache von 2π sein müssen und für destruktive Interferenz $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$. Dies hätte man auch aus Gl. (6.77) schließen können. Es folgen damit die Bedingungen:

Wichtig! 49 (Bedingung: Konstruktive Interferenz) *liegt vor, wenn*

$$\Delta s = \lambda \cdot n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.78)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.79)$$

und

Wichtig! 50 (Bedingung: Destruktive Interferenz) *liegt vor, wenn*

$$\Delta s = n \cdot \lambda + \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.80)$$

$$\Delta\varphi = n \cdot 2\pi + \pi \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.81)$$

6.9 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei Überlagerung

Wir wollen zwei Wellen mit verschiedenen Wellenlängen und Frequenzen überlagern. Mit der Kreiswellenzahl $K_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$ gilt

$$u = A \sin(\omega_1 t - K_1 x) \quad (6.82)$$

$$v = A \sin(\omega_2 t - K_2 x) \quad (6.83)$$

und mit dem Additionstheorem

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

weiter:

$$u + v = 2A \cdot \sin \left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\omega} t - \underbrace{\frac{K_1 + K_2}{2}}_K x \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{K_1 - K_2}{2} x \right) \quad (6.84)$$

und damit

$$u + v = 2A \cdot \sin(\omega t - Kx) \cdot \cos \left(\frac{1}{2}(\Delta\omega \cdot t - \Delta K \cdot x) \right) \quad (6.85)$$

Dabei ist der Cosinus-Term die **Einhüllende** der Schwingung, weil die Maxima der Schwingung auf ihr liegen. Vgl. dazu Abb. 6.6.

Nun wollen wir die Geschwindigkeit bestimmen, mit der sich die Einhüllende fortbewegt. Dazu betrachten wir ein Maximum der Einhüllenden; dazu muss $\cos = 1$ sein, also am besten:

$$\left(\frac{1}{2}(\Delta\omega \cdot t - \Delta K \cdot x) \right) = 0 \quad (6.86)$$

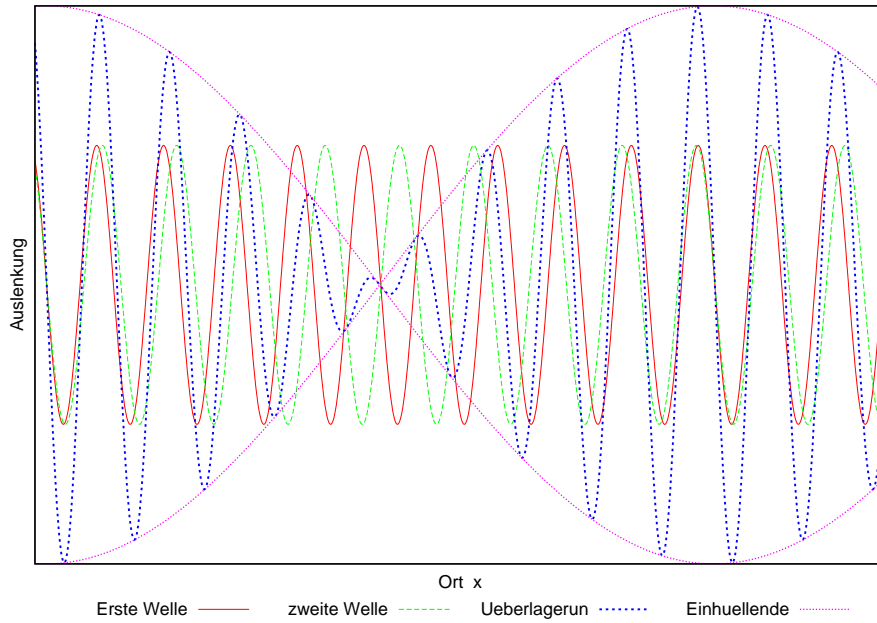


Abbildung 6.6: Zwei Wellen, deren Überlagerung und die Einhüllende

Wenn wir diese Gleichung mit $\frac{1}{2}$ kürzen und nach $\frac{x}{t} = v$ auflösen, bekommen wir genau Gl. (6.87).¹⁶

Wir definieren:

Definition 6.10 (Gruppengeschwindigkeit c_{Gruppe}) Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Schwingungszustand der Einhüllenden bewegt ist die **Gruppengeschwindigkeit**.

$$c_{\text{Gruppe}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta K} \quad (6.87)$$

Als **Zusammenhang zwischen c_{Gruppe} und c_{Phase}** finden wir, das bei einer infinitesimalen Betrachtung von Gl. (6.87), wobei wir ω durch $\omega = c_{\text{Phase}} \cdot K$ ersetzen:

$$c_{\text{Gruppe}} = \frac{d\omega}{dK} = \frac{d(c_{\text{Phase}} \cdot K)}{dK} = c_{\text{Phase}} \frac{dK}{dK} + K \frac{dc_{\text{Phase}}}{dK} \quad (6.88)$$

Wobei $\frac{dK}{dK} = 1$ ist. Wenn wir $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ einsetzen, erhalten wir so (weil $dK = d\frac{2\pi}{\lambda} = -2\pi \cdot \frac{1}{\lambda^2} d\lambda$):

$$c_{\text{Gruppe}} = c_{\text{Phase}} - K \frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{dc_{\text{Phase}}}{d\lambda} = \boxed{c_{\text{Phase}} - \lambda \cdot \frac{dc_{\text{Phase}}}{d\lambda} = c_{\text{Gruppe}}} \quad (6.89)$$

¹⁶Dabei haben wir die Annahme gemacht, dass die Gruppengeschwindigkeit *linear*, also nicht beschleunigt ist. Diese Behauptung dürfen wir machen, weil die Wellen u und v selbst auch nicht beschleunigt waren, sondern sich linear mit c_{Phase} ausgebreitet haben.

6.10 Reflexion

Wenn Wellen an einem **festen Ende** auf ein Hindernis treffen, so können die Enden des Wellenträgers nicht schwingen und damit keine Schwingungsenergie aufnehmen: Die Energie der Welle wird wieder zurück auf die Welle geworfen.

Man kann sich vorstellen, dass die Welle die Wand mit Kraft F bewegen will (es aber nicht schafft) dafür die Wand die Welle aber mit der *Reactio* F in die Gegenrichtung zurückbewegt.

Direkt an der Wand liegt ein **Phasensprung** von

$$\Delta\varphi = \pi$$

vor, weil hier die Welle vom unteren Umkehrpunkt unvermittelt zum oberen Umkehrpunkt „springt“.

Wenn der Wellenträger mit einem **losen Ende** zuende geht, so können die letzten Teilchen auf dem Wellenträger ungehindert *Schwingungen* ausführen – sie schwingen also über ihre Ruhelage hinaus und wieder zurück und sorgen so dafür, dass wenn eine Welle mit einer **Schnelle**¹⁷ nach nach oben ankommt, nach der Reflexion wieder eine Schnelle nach oben vorliegt.

Hier liegt also kein Phasensprung vor:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{6.90}$$

6.11 Stehende Wellen

6.11.1 Entstehung und Aussehen

Wir betrachten zwei Wellen der gleichen Frequenz und Amplitude, die aufeinander zulaufen. Ihre Wellengleichungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} u &= A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ v &= A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \end{aligned}$$

Wenn wir diese Wellengleichungen addieren, um die Überlagerung zu erhalten, können wir A ausklammern und ein Additionstheorem des Sinus anwenden und erhalten dann

$$y = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cdot \sin(\omega t) \tag{6.91}$$

Wenn wir diese Welle zu verschiedenen Zeiten betrachten (vgl. Abb. 6.7), so fällt auf, dass die x -Achse stets an den selben Punkte geschnitten wird – diese nennen wir **Knoten** – und dass es Stellen gibt, die sich maximal bewegen – **Bäuche**. Wichtig ist dabei, dass weder Knoten noch Bäuche ihre x -Position verändern. Die Welle *steht* also wirklich auf einem Fleck und die einzelnen Massenpunkte führen einfache harmonische Schwingungen aus, wobei entscheidend ist *wo* sie

¹⁷ die Bewegung der Schwingung selbst – also bei einer Transversalwelle die Geschwindigkeit, mit der ein Massenteilchen sich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bewegt

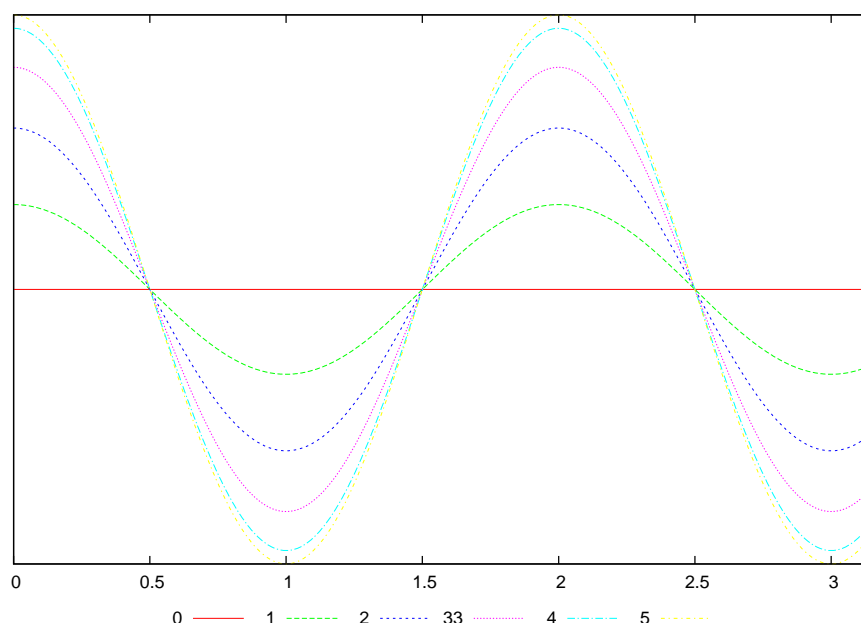


Abbildung 6.7: Stehende Welle in 5+1 Zeitschritten

schwingen. Die Teilchen, die direkt auf einem Knoten liegen, schwingen garnicht, während die Teilchen, die auf einem Bauch liegen, maximal schwingen.

Die Knoten treten in festen Abständen auf: An einem Ort ist der Cosinus-term aus (6.91) konstant. Wenn er also verschwindet, verschwindet auch die Schwingung an dieser Stelle und wir haben einen Knoten. Wenn der Cosinus-term dagegen maximal (also 1) wird, haben wir einen Bauch. Die Knoten liegen also bei

$$x = \lambda \cdot \frac{2n+1}{4} \quad (6.92)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und die Bäuche bei

$$x = \lambda \cdot \frac{2n}{4} \quad (6.93)$$

6.11.2 Visualisierung

Wenn nun die schwingenden Teilchen so klein sind, dass wir sie nicht mehr sehen können – also wenn bspw. Luft als Longitudinalwelle schwingt – dann müssen wir uns einen Trick einfallen lassen, um die Schwingung trotzdem zu visualisieren.

Wenn Luftteilchen Schwingen, so bilden sich Knoten und Bäuche der Luftteilchen; diese werden als *Geschwindigkeitsknoten* und *-bäuche* bezeichnet. Daneben gibt es noch *Druckbäuche* und *-knoten*. Dort wo ein Geschwindigkeitsknoten ist, sitzt ein Druckbauch, einfach weil hier von links und von rechts ständig Teilchen an das ruhende Teilchen stoßen und drücken und so eine Kraft auf das Teilchen ausüben, die wir als Druck interpretieren.

Wir können nun die Bewegungsknoten visualisieren, indem wir bspw. in einer Röhre eine stehende Welle erzeugen, indem wir an beide Enden Lautsprecher

setzen, die den selben Ton spielen. Wenn wir nun kleine Krümel – bspw. Bär-lappsporen, die besonders leicht und fein sind – gleichmäßig im Rohr verteilen, so werden diese an den Stellen „weggewischt“, an denen die Geschwindigkeits-bäuche sind und in Ruhe gelassen, wo die Geschwindigkeitsknoten liegen. Wir bekommen also kleine Häufchen des Staubs bei den Geschwindigkeitsknoten.

6.11.3 Auf beschränktem Wellenträger

Nur die wenigsten Wellenträger die wir kennen sind unendlich ausgedehnt. Die Länge L eines solchen Wellenträgers bestimmt mit, was für stehende Wellen sich darauf bilden können.

Wichtig! 51 *Es bilden sich nur stehende Wellen bei charakteristischen Frequenzen.*

Definition 6.11 (Eigenfrequenz ω_0) *Diese Frequenzen nennen wir **Eigenfrequenz** des Wellenträgers.*

Das liegt daran, dass die Enden des Wellenträgers die Welle reflektieren – abhängig davon, ob wir ein loses oder ein festes Ende haben mit oder ohne Phasensprung (s. Kap. 6.10). D.h. die Enden des Wellenträgers sind entweder selbst (Geschwindigkeits)Bäuche (beim losen Ende) oder (Geschwindigkeits)Knoten (bei festem Ende).

Zwei feste Enden Zwei Knoten haben stets den Abstand $\frac{\lambda}{2}$. Hat ein Wellenträger die Länge L , so kann man genau n Bäuche darauf platzieren; damit die Knoten mit den Rändern zusammenfallen, muss $\frac{\lambda}{2} n = L$ sein oder:

$$\lambda_n^{(f,f)} = \frac{2 \cdot L}{n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (6.94)$$

Und mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c und (6.72) gilt für die Frequenz:

$$\nu_n^{(f,f)} = \frac{c}{2 \cdot L} \cdot n \quad (6.95)$$

Ein festes und ein loses Ende Zwei Knoten haben weiterhin den Abstand $\frac{\lambda}{2}$, aber diesmal kommt an einem Ende noch ein Abstand Knoten-Bauch, also $\frac{\lambda}{4}$, dazu. Wir können auf dem Wellenträger also n Bäuche zwischen zwei Knoten und einen Bauch am losen Ende platzieren. Damit dies mit der Länge übereinstimmt, muss $\frac{\lambda}{2} n + \frac{\lambda}{4} = L$ gelten, oder¹⁸

$$\lambda_n^{(f,l)} = \frac{2 \cdot L}{n - \frac{1}{2}} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (6.96)$$

und für die Frequenz:

$$\nu_n^{(f,l)} = \frac{c}{2L} \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) \quad (6.97)$$

¹⁸Das „–“ im Nenner kommt daher, dass in dieser Gleichung $n \in \mathbb{N}$ sein soll! Damit man die längste Schwingung (also maximal großes λ) damit darstellen kann, die einen Bauch und einen Knoten direkt an den Enden hat, braucht man im Nenner die $\frac{1}{2}$, und diese kann man nur erreichen, wenn man von 1 die $\frac{1}{2}$ *abzieht*.

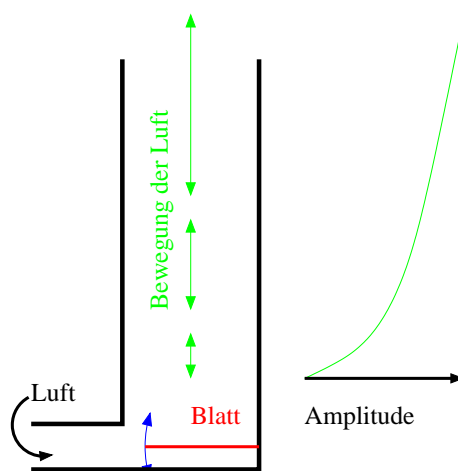


Abbildung 6.8: Prinzip einer Flöte

Definition 6.12 (Grund- und Oberschwingungen) Wir nennen die Schwingung mit der größt möglichen Wellenlänge (also für $n = 1$) **Grundschwingung** und jede weitere Schwingung mit entsprechend kürzerer Wellenlänge n -te **Oberschwingung**.

Bei einem Musikinstrument haben die verschiedenen Oberschwingungen verschiedene Amplituden. Das Verhältnis dieser Amplituden zueinander bestimmt die **Klangfarbe** des Instruments.

6.11.4 Funktionsprinzip von Flöten

Durch Lufteinblasen wird ein Blatt (eine Schneide) in Schwingungen versetzt. Sie regt die Luftsäule über sich in der Flöte zu Schwingungen an (vgl. Abb. 6.8). Je näher die Luft am Blatt ist, desto weniger Bewegungsfreiheit hat sie und schwingt hier deshalb nur wenig, dafür aber entfernt vom Blatt stärker. In der Nähe des Blattes ist also der Druck groß, die Teilchenbewegung klein, weiter entfernt anders herum.

Die schwingende Luftsäule kann nun am Ende der Pfeife die Luft der Umgebung zu Schwingungen anregen – der Ton wird übertragen. Gleichzeitig wird aber die Schwingung innerhalb der Pfeife reflektiert und es bildet sich eine stehende Welle aus, wodurch der Ton sich verstärken kann (Durch *Resonanz* kann sich die Amplitude „aufschaukeln“). Die *Höhe* des Tones hängt davon ab, wie gut das Blatt schwingen kann bzw. wie gleichmäßig es angeregt wird und von der Länge der Pfeife.

Wir unterscheiden zwischen **gedeckten** Pfeifen, die ein Offenes und ein geschlossenes Ende haben und **offenen** Pfeifen, bei denen beide Enden offen sind.

In einer Pfeife können verschiedene Frequenzen stehende Wellen erzeugen, so lange die Bedingungen aus Kap. 6.11.3 eingehalten werden. Vgl. dazu Abb. 6.9.

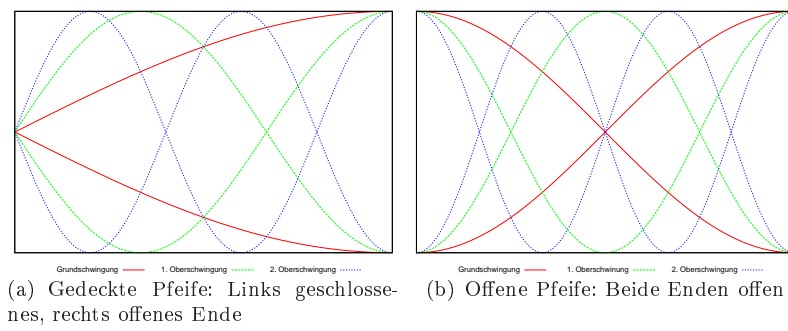


Abbildung 6.9: Gedeckte und offene Pfeifen

Kapitel 7

Thermodynamik

In der Thermodynamik betrachten wir keine kleinste schwingende Teilchen in der Materie sondern schauen uns die makroskopischen Eigenschaften – die **Zustandsgrößen** (wie Temperatur, Entropie usw) – an.

▷ (a) **Absolute Temperatur** Wir verwenden eine Temperaturskala, deren absoluter Nullpunkt eine Naturkonstante ist: Je weiter man ein Gas abkühlt, desto geringer ist sein Dampfdruck. Dabei zeigt sich, dass bei der Temperatur $-273,15^\circ\text{C}$ alle Gase den Druck 0 (Pascal) haben.

7.1 Zustandsgrößen und Gasgleichung

Definition 7.1 (Zustandsgrößen) Um einen thermodynamischen Gleichgewichtszustand eines Systems genau bestimmen zu können, braucht man die vier Größen

- Temperatur T
- Volumen V
- Druck p
- Entropie S

▷ (b) **Ideale Gasgleichung** Wir werden uns häufig mit der Idealen-Gas-Gleichung

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

beschäftigen. So ist es wichtig, dass wir die beiden verschiedenen möglichen Formulierungen dieses Satzes in Einklang bringen.

Dazu verwendet man gerne die AVOGADRO Konstante¹ $N_A = 6.023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ und kann so $R = N_A \cdot K_B$ setzen. So kann man die Gasgleichung umformulieren:

$$p \cdot V = N \cdot K_B \cdot T \quad (7.1)$$

¹Auch manchmal mit L für LOSCHMIDT abgekürzt

Dabei ist p der Druck, V das Volumen und T die absolute Temperatur (s. ▷ (a)) ist. N ist die Anzahl an Gasteilchen selbst, wobei n die Anzahl der Mole im Gas angibt (Es gilt $N = N_A n \approx 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \cdot n$.)

Die obere Gleichung wurde *empirisch* gefunden. R wurde hier als *Proportionalitätskonstante* eingeführt.

7.2 BROWN'sche Molekularbewegung und Druck

Gasteilchen fliegen chaotisch durch die Gegend und auch gegen größere Teilchen und die Gefäßwände. Stoßen sie gegen andere, größere, mit dem bloßen Auge beobachtbare Teilchen und übertragen ihren Impuls auf diese, so nehmen wir das als ungeordnete Bewegung dieser Teilchen wahr – das ist die **BROWN'sche Molekularbewegung**.

Stoßen sie dagegen gegen ihre Gefäßwand, so nehmen wir das als *Druck* wahr; die mikroskopische Ursache für den Druck ist also die chaotische Bewegung der Gasteilchen.

Nun kann man untersuchen, wie die Teilchen den (Stempel)Druck ergeben: Die N Gasteilchen im Volumen V haben die Masse m und bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$. Wir betrachten nur die x -Richtung: Hier fliegen die Teilchen mit v_x auf eine Wand der Fläche A zu. Dort übertragen sie beim Stoß (jeweils) den Impuls $\Delta p = 2mv_x$. Es haben $n(v_x)$ Teilchen die Geschwindigkeit $|v_x|$ (also $\frac{1}{2}n(v_x)$ die Geschwindigkeit in die gewünschte Richtung, die andere Hälfte in Gegenrichtung).

Im Zeitintervall Δt bewegen sich die Teilchen um $\Delta x = v_x \cdot \Delta t$ weiter. Damit werden alle Teilchen mit der Geschwindigkeit v_x , die sich in dem Volumen $V' = A \cdot v_x \Delta t$ aufhalten, während Δt gegen A stoßen. Da die Teilchen gleich verteilt sind, können wir annehmen, dass der Quotient $\frac{V'}{V}$ von diesem Volumen zum Gesamtvolumen dem Quotienten von Teilchen mit v_x innerhalb von V' zu Teilchen mit v_x insgesamt im Volumen V entspricht:

$$\frac{V'}{V} = \frac{A \cdot v_x \Delta t}{V} = \frac{n(v_x, \text{in } V')}{n(v_x)} = \frac{n'(v_x)}{n(v_x)}$$

Von diesen $n'(v_x)$ Teilchen bewegt sich nun die Hälfte in die „richtige“ Richtung und damit wird (wenn jedes Teilchen $\Delta p = mv_x$ überträgt) insgesamt von den Teilchen mit v_x der Impuls

$$\Delta p^\Sigma = \Delta p \cdot \frac{1}{2} n'(v_x) = \frac{1}{2} \cdot 2mv_x \cdot \frac{A \cdot v_x \cdot \Delta t}{V} \cdot n(v_x) \quad (7.2)$$

übertragen. Dies teilt man nun noch durch Δt und A und erhält

$$\frac{\Delta p^\Sigma}{A \cdot \Delta t} = \frac{mv_x^2 \cdot n(v_x)}{V} \quad (7.3)$$

Für kleine Δt gilt nun $\Delta t \rightarrow dt$ und $\Delta p^\Sigma \rightarrow dp^\Sigma$. Also für den Impuls aus Gl. (7.2):

$$\frac{dp^\Sigma}{A \cdot dt} = \frac{d}{dt} p^\Sigma \cdot \frac{1}{A} = \frac{F}{A} = P$$

wobei P der (messbare) Gesamtdruck ist.² D.h. dieser Druck P resultiert einzig aus den Gasteilchen, die mit v_x gegen die eine Wand stoßen.

²Normalerweise bekommt der Druck das Formelzeichen p – in diesem Falle wurde P gewählt, damit man ihn vom *Impuls* p unterscheiden kann.

Betrachtet man nun alle Geschwindigkeiten, so gilt mit Gl. (7.3):

$$P = \int_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} \frac{mv_x^2 \cdot n(v_x)}{V} dv_x = \frac{m\bar{v}_x^2 \cdot N}{V} \quad (7.4)$$

Dabei ist \bar{v}_x die *Durchschnittsgeschwindigkeit*:

$$\bar{v}_x^2 = \int_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} v_x^2 \cdot \frac{n(v_x)}{N} dv_x$$

Der Quotient $\frac{n(v_x)}{N}$ kann als Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen die Geschw. v_x hat, interpretiert werden. (Oder man sagt, dass die Summe über alle Teilchen, gewichtet mit dem Geschwindigkeitsquadrat, gebildet ($\bar{v}^2 = \sum_{i=1}^N (v_x^{(i)})^2$) wird und anschließend das mittlere Geschwindigkeitsquadrat, indem man durch die Anzahl an Teilchen teilt ($\bar{v} = \frac{\bar{v}^2}{N}$).)

Nehmen wir eine isotrope Teilchenbewegung an (also dass keine Richtung ausgezeichnet ist), so folgt $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2$ und mit $\bar{v}^2 := \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2$ folgt

$$\bar{v}_x^2 = \frac{\bar{v}^2}{3}$$

Setzt man dies in Gl (7.4) ein, so ergibt sich

$$P = \frac{m\bar{v}^2 N}{3V} = \boxed{\frac{2}{3} \frac{N}{V} \cdot \underbrace{\frac{m\bar{v}^2}{2}}_{\bar{u}}} = P \quad (7.5)$$

Dabei ist \bar{u} die **Mittlere kinetische Energie eines Teilchens**.

Nun betrachten wir $N = L$ Teilchen (mit $\mathbf{L} = \mathbf{6,023} \cdot \mathbf{10^{23}} = \mathbf{1}$ mol) setzen unsere Formel für Druck (Gl. (7.5)) in die *ideale Gasgleichung* ein, so erhalten wir

$$PV = RT = \frac{2}{3} L \bar{u} \Rightarrow \bar{u} = \frac{3}{2} \left(\frac{R}{L} \right) T = \boxed{\frac{3}{2} K_B T = \bar{u}} \quad (7.6)$$

Wir haben hier die **BOLTZMANN-Konstante** definiert:

Definition 7.2 (BOLTZMANN-Konstante K_B)

$$\frac{R}{N_A} = K_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

(Die universelle (oder molare) Gaskonstante R hat die Einheit $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ und $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.)

Außerdem haben wir dadurch, dass \bar{u} die mittlere kinetische *Energie* eines Teilchens ist, in Gl (7.6) gesehen, dass auf der rechten Seite der Gleichung auch eine *Energie* stehen muss:

Definition 7.3 (Innere Energie U) Die *Innere Energie* (auch „*Thermische Energie*“) eines Körpers ist

$$\boxed{U = \frac{f}{2} \cdot N \cdot K_B \cdot T} \quad (7.7)$$

weil die *Thermische Energie* eines Teilchens $u = \frac{f}{2} \cdot K_B \cdot T$ ist und der Körper N Teilchen hat.

▷ (c) **Beachtung der Freiheitsgrade** Dabei haben wir in unserer Rechnung noch eine Vereinfachung gemacht; der Faktor $\frac{3}{2}$ in Gl (7.6) kommt daher, dass wir als Teilchenbewegungen nur *Translationen* (also gewissermaßen Verschiebungen) in den drei Raumrichtungen zugelassen haben. Die Teilchen können aber auch noch über andere Energieformen verfügen.

Dies äußert sich mathematisch in der

Definition 7.4 (Zahl der Freiheitsgrade) Die Zahl f gibt an, wie viele Bewegungsarten mit Energie verknüpft sind. Möglich ist dabei u.a.

- *Translation*
- *Rotation*
- *Schwingungen*

Dabei kann ein **punktförmiges Molekül** wirklich nur drei Freiheitsgrade haben, weil für eine Rotation keine Energie benötigt wird, ebensowenig kann das Teilchen schwingen: $f = 3$, wie in unserer Formel (7.6).

Betrachtet man aber **mehratomige Moleküle** – bspw. Sauerstoff O_2 –, so kann hier neben den drei Translationen noch *Rotationen* um zwei Achsen stattfinden (die Translation um die Längsachse ist wieder nicht mit Energie verbunden) und außerdem noch eine *Schwingung* – eben längs der Längsachse. Für die Zählung der Freiheitsgrade müssen wir diese aber *doppelt* zählen, weil neben der Schwingungsenergie auch noch *potentielle* Energie durch die Anziehungskräfte der Teilchen gegeneinander auftritt, die vom Betrag her so groß ist, wie die Bewegungsenergie beim Schwingen. Der Freiheitsgrad eines solchen Teilchens wäre also $f = 7$. In Rechnungen vernachlässigt man die Schwingung aber gerne, weil sie bei Raumtemperatur sehr klein ist: $f = 5$.

Zusätzlich ändern sich die Freiheitsgrade je nach **Anregungszustand** der Teilchen; bei tiefen Temperaturen bspw. rotieren die Teilchen kaum und so ist $f = 3$. Steigt die Temperatur, rotieren sie stärker, und so erhält man bspw. $f = 5$. Bei noch weiterer Erwärmung kommt dazu noch die Schwingung, die zweite Freiheitsgrade aufaddiert – also bspw auf $f = 7$.

Die Zahl der Freiheitsgrade muss keine ganze Zahl sein: Wie oben beschrieben hängt sie stark von Temperatur ab. Da die Temperatur eine *kontinuierliche* Größe ist (also „fließen“ von einer zur nächsten Größe geht) sollte die Zahl der Freiheitsgrade dies auch tun – und dazu *muss* $f \in \mathbb{R}$ liegen.

▷ (d) **Zusammenhang kinetische Energie – Thermische Energie** Wir finden über diese Freiheitsgrade den Zusammenhang, den wir in Gl. (7.6) schon für ideale Gase mit $f = 3$ gesehen haben:

$$\bar{u} = \frac{f}{2} \cdot K_B \cdot T \quad (7.8)$$

Die Energie des Gasteilchens liegt vollständig als kinetische Energie vor.³ Damit ist \bar{u} gleichzeitig die Kinetische Energie, und für ein Teilchen gilt:

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \bar{u} \text{ und damit } \bar{v} = \sqrt{\frac{f K_B T}{m}} \quad (7.9)$$

³Es kann ja keine Spannenergie haben, die Potentielle Energie wird in diesem Kapitel nicht betrachtet.

Dabei ist \bar{v} die mittlere Geschwindigkeit eines Teilchens.

7.3 Thermische Eigenschaften von Materie

Definition 7.5 (Spezifische Wärme(kapazität)) Um die Temperatur eines Körpers um ΔT zu ändern, braucht man die Wärme ΔQ mit

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T \quad (7.10)$$

dabei ist c die **Spezifische Wärme(kapazität)** und eine Eigenschaft des Körpers.

Möchte man eine Größe verwenden, die von der Teilchenzahl unabhängig ist, so kann man die

Definition 7.6 (Wärmekapazität) verwenden:

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T \quad \text{bzw.} \quad dQ = C \cdot dT \quad (7.11)$$

Dies bedeutet, dass sich C auf einen kompletten Körper (bspw. ein technisches Gerät) bezieht, von dem uns einfach nur der C -Wert interessiert. Mithilfe des c -Wertes kann man den C -Wert ausrechnen, braucht dazu aber Zusatzinformationen wie Stoffmenge oder Masse usw.⁴

Diese Definition ist allgemeiner Natur. Das C kann bei ein und dem selben Stoff unter verschiedenen Bedingungen völlig andere Werte haben – bspw. bei konstantem Druck oder konstantem Volumen Idealer Gase.

7.3.1 Verschiedene Spezifische Wärmen für ein (ideales) Gas

Berechnet man die spezifische Wärme eines idealen Gases einmal bei konstantem Volumen (c_v) und einmal bei konstantem Druck (c_p), so kommt man auf verschiedene Ergebnisse. Das liegt daran, dass wenn man das Gas unter konstantem Volumen erhöht, die hereingesteckte Wärmemenge ΔQ sich sofort in *Innere Energie* U umwandeln muss: Die kugelförmigen Teilchen des Idealen Gases haben keine andere Möglichkeit, die Energie zu speichern, als sich schneller zu bewegen.⁵

Wenn wir nun das Volumen nicht als konstant voraussetzen, so können die Teilchen einen Teil der Wärmemenge ΔQ auch in *Arbeit* ΔW investieren, indem sie die Wände des Volumens „wegdrücken“. Die einfache Proportionalität zwischen ΔT und ΔU stimmt hier also nicht mehr.

Wir wollen die beiden Wärmekapazitäten noch *berechnen*:

Konstantes Volumen Aus (7.10) folgt mit $\frac{dU}{dT} = \frac{dQ}{dT} = \frac{3}{2}K_B N$ (Gl. (7.7)) folgt:

$$C_v = \frac{3}{2}NK_B$$

⁴Dies ist vergleichbar damit, dass man den Widerstand R eines Körpers mit dem *Spezifischen Widerstand* ρ ausdrückt: $R = \rho \cdot \frac{L}{A}$.

⁵Damit steigt also die Innere Energie ($\Delta U = \Delta Q$) und damit auch die Temperatur (weil $U \sim T$ ist $\Delta U \sim \Delta T$) und damit der Druck (weil $p \sim T$).

Im Allgemeinen – also unter Berücksichtigung der f Freiheitsgrade des Systems – müsste man hier schreiben

$$C_v = \frac{f}{2} N K_B \quad (7.12)$$

Man verwendet diesen Wert C_v , um die Freiheitsgrade f eines Systems zu bestimmen, weil C_v eine Größe ist, die man makroskopisch recht einfach in einem Kalorimeter bestimmen kann.

Wichtig! 52 Nur bei konstantem Volumen $dV = 0$ ist

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{dQ}{dT} \text{ bzw. } dQ = dU = C_V \cdot dT$$

Nach dem **DULONG-PETIT'schen Gesetz** gilt zudem, dass sich in **Festkörpern** für große Temperaturen und für $N = N_A = 1 \text{ mol}$ asymptotisch

$$C_V \xrightarrow{T \text{ groß}} 3 \cdot R = \frac{6}{2} N_A K_B \approx 24,9 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

annähert (mit R der Molaren Gaskonstanten). Damit haben die Atome hier sechs Freiheitsgrade (vgl. (7.12)).

Konstanter Druck Eine Erwärmung führt nach $pV = NK_B T$ zur Expansion und die Volumenänderung ist eig. Arbeit:⁶ $dW = F \cdot ds$ D.h. ein Teil der Zugeführten Energie wird nicht in innere Energie U umgewandelt, sondern damit wird Expansionsarbeit verrichtet. Um die Gleichung elegant⁷ herzuleiten, bilden wir das Differenzial der Idealen Gasgleichung unter Beachtung von $dp = 0$:

$$d(pV) = d(NK_B T) \text{ ist } p dV = NK_B dT$$

und haben damit die vom Gas geleistete Arbeit dW auf der linken Seite der Gleichung. Diese Energie muss man dem Gas zusätzlich zu $dQ' = C_V dT$ zuführen:

$$dQ = dQ' + p dV = (C_V + NK_B) dT$$

Und durch Teilen durch dT erhält man nach Definition und mit (7.12):

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = C_V + NK_B = \frac{f}{2} NK_B + NK_B = \boxed{\frac{f+2}{2} NK_B = C_p} \quad (7.13)$$

⁶Die mechanische Arbeit, die ein Gas verrichtet, ist:

$$dW = F ds = \frac{F}{A} A ds = p dV$$

wenn man $dV = d(A \cdot s)$ annimmt, wobei $dA = 0$ ist. Nach *Vorzeichenkonvention* setzt man $dW = -p dV$.

⁷Noch eleganter geht das mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik: $dU = dQ + dW$ Nun ist nach Def. $dQ = C_p dT$ und wegen $d(pV) = p dV = -dW = d(NK_B T) = NK_B dT$ und $dU = d(\frac{f}{2} NK_B T) = \frac{f}{2} NK_B dT$ folgt:

$$\frac{f}{2} NK_B dT = C_p dT - NK_B dT \text{ und damit } C_p = \frac{f+2}{2} NK_B$$

Die beiden C unterscheiden sich also (gewaltig). Diesen unterschied drückt man aus mit:

Definition 7.7 (Adiabatenkoeffizient κ)

$$\kappa := \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f} \quad (7.14)$$

In unserem Falle also $\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$. Dieser Koeffizient ist eine weitere Möglichkeit, die Freiheitsgrade eines Systems zu bestimmen!

7.4 Erster Hauptsatz

Wichtig! 53 (Erster Hauptsatz der Thermodynamik) *Führt man einem System die Wärme dQ zu, so wird diese einerseits verwendet, um die Innere Energie U zu erhöhen, andererseits aber auch um Arbeit W gegen den Druck p zu verrichten:*

$$dQ = dU + dW \quad (7.15)$$

Schreibt man die Formel etwas um, erhält man

$$dU = dQ - dW$$

und kann so sagen, dass sich die Zunahme der Inneren Energie eines Systems aus der zugeführten Wärmemenge und der am Körper verrichteten Arbeit addiert.

Wichtig! 54 (Vorzeichenkonvention) *Steckt man Arbeit / Energie in das System, so ist diese Arbeit positiv. Leistet das System Arbeit bzw. gibt Energie ab, so bekommt diese Energie ein negatives Vorzeichen.*

Man kann diesen Satz als **Energieerhaltungssatz** bezeichnen.

7.5 Thermodynamische Arbeit

Verringert man das Volumen V eines Systems beim Druck p leicht (um dV), so ist $dV < 0$ und man leistet Arbeit am System; Damit diese Arbeit positiv ist (wegen Vorzeichenkonvention) führen wir ein „-“ ein (für die Herleitung siehe Fußnote 6 auf S. 88):

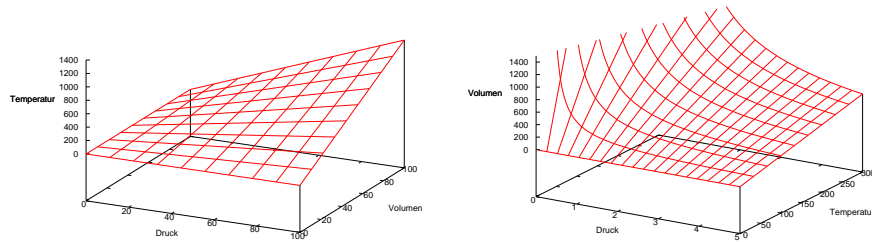
$$dW = -p \cdot dV \quad (7.16)$$

Zusammen mit dem ersten Hauptsatz (s. Gl. (7.15)) formuliert man so den

Definition 7.8 (Ersten Hauptsatz für ein Ideales Gas)

$$dU = dQ - p \cdot dV \quad (7.17)$$

Wenn eine der Größen Q , p , V oder T konstant bleiben, so kann man (7.17) verwenden um den Zusammenhang zwischen diesen Größen herzustellen, auch wenn Q eigentlich *keine Zustandsgröße* ist.



(a) Temperatur gegen Druck (vorne) und Volumen (rechts) (b) Volumen gegen Druck (vorne) und Temperatur (rechts)

Abbildung 7.1: Fläche der Idealen Gasgleichung im \mathbb{R}^3 – Zahlen gelten für 1 mol Gas. Die eingezeichneten Linien sind Isobare, Isotherme bzw. Isochore.

7.6 Zustandsflächen des idealen Gases

Durch die **Ideale-Gasgleichung**

$$\boxed{p \cdot V = N \cdot K_B \cdot T = n \cdot R \cdot T} \quad (7.18)$$

ist für ein Gas mit einer bestimmten Zahl N an Molekülen durch die Vorgabe von zwei der verbleibenden Parameter (von $\{p, V, T\}$) der dritte eindeutig vorgegeben. Mathematisch beschreibt diese Gleichung – *im Gleichgewicht* – also eine Fläche im \mathbb{R}^3 (siehe Abb. 7.1).

Wir unterscheiden folgende entscheidende Fälle:

Isotherm	konstante Temperatur	$dT = 0$
Iso-bar	konstanter Druck	$dp = 0$
Isochor	konstantes Volumen	$dV = 0$
Adiabatisch	kein Wärmeaustausch	$dQ = 0$

Sie sind Spezialfälle für den *Ersten Hauptsatz der Thermodynamik* (s. 7.4) und können mit diesem genauer betrachtet werden.

7.6.1 Isotherm

Es gilt

$$T = T_0 = \text{const} \text{ oder } dT = 0$$

und mit (7.18) folgt

$$p \sim \frac{1}{V}$$

Im Experiment muss das Gas *langsam* komprimiert werden, damit die entstehende Wärme komplett in ein Wärmebad (mit $T = T_0$) abgegeben werden kann.

Die **Isotherme Kompressibilität**⁸

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (7.19)$$

gibt die relative Volumenänderung bei konstanter Temperatur pro Druckänderung an.

Wie wir schon gesehen haben (in (7.7)) hängt U alleine von der Temperatur T ab. Ist diese konstant, wie in diesem Fall, folgt aus $dT = 0$ auch $dU = 0$. Weiter folgt mit (7.17):

$$-dW = dQ = p \cdot dV = \frac{nRT}{V} dV \quad (7.20)$$

Wichtig! 55 *Es wird also die komplette, dem System zugefügte Energie ΔQ in Volumenarbeit umgewandelt.*

Durch Integration kann man einfach die *Energie* ausrechnen, die ein Gas verrichtet, welches sich isotherm von V_1 auf V_2 ausdehnt:

$$W = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (7.21)$$

Mit (7.18) folgt schließlich noch

$$pV = nRT = \text{const} \Rightarrow p \sim \frac{1}{V} \quad (7.22)$$

Man spricht hier vom **BOYLE-MARIOTTE'schen Gesetz**.

7.6.2 Isobar

Es gilt

$$p = p_0 = \text{const} \text{ oder } dp = 0$$

Und mit (7.18) folgt

$$V \sim T$$

Der **isobare Ausdehnungskoeffizient**

$$\gamma_v = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (7.23)$$

gibt die relative Volumenausdehnung pro Kelvin Temperaturerhöhung an, wenn $p = \text{const}$.

Für ein konstantes p erhalten wir $dp = 0$. Nun führen wir (vorläufig) ein:

Definition 7.9 (Enthalpie) *Die Enthalpie H ist*

$$H = U + p \cdot V \quad (7.24)$$

Sie besteht also aus Innerer Energie und Volumenarbeit. Man verwendet H , um die Energie im System anzugeben.

⁸Die Kompressibilität κ ist uns noch aus Kap. 5.2 bekannt. Dieses κ hier ist der Kehrwert eines *Kompressionsmoduls* ($\kappa = \frac{1}{K}$) und hat mit dem *Adiabatenkoeffizient* κ wenig zu tun.

Es gilt nun also für dH , wenn man (7.17) einsetzt (und $dp = 0$ wegen isobar beachtet):

$$dH = dU + V dp + p dV = dQ + V dp$$

und damit

$$dH = dU + p dV = dQ \quad (7.25)$$

Wichtig! 56 *Es wird die komplette zugeführte Wärmemenge in Enthalpie umgewandelt.*

Wir können dies verwenden, um die Spezifische Wärmekapazität C_p umzuschreiben; bei konstantem Druck gilt:

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (7.26)$$

Vergleiche Gl. (7.29).

7.6.3 Isochore

Es ist

$$V = V_0 = \text{const} \text{ oder } dV = 0$$

und mit (7.18) folgt

$$p \sim T$$

Der **Isochore Spannungskoeffizient**

$$\gamma_p = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (7.27)$$

gibt an, wie sich der Druck bei konstantem Volumen vergrößert, wenn die Temperatur geändert wird.

Mit Gl. (7.17) und $dV = 0$ gilt

$$dQ = dU = C_V \cdot dT \quad (7.28)$$

Wichtig! 57 *D.h. die zugeführte Wärmemenge wird vollständig in innere Energie umgesetzt.*

Hier kann man jetzt definieren:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (7.29)$$

Vgl. Gl. (7.26).

7.6.4 Zusammenhang zwischen den Koeffizienten

Die komplette Volumenänderung eines Volumens $V(p, T) = V_0$ schließlich ergibt sich bei einer Änderung von T und p mit (7.19) und (7.23) zu

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT = -\kappa \cdot V_0 \cdot dp + \gamma_V \cdot V_0 \cdot dT$$

Bei isochoren Prozessen bleibt das Volumen konstant ($dV = 0$) und man bekommt hierfür

$$\kappa \cdot dp = \gamma_V dT$$

Und so erhält man durch Division durch dT und mit Gl. (7.27) schließlich als Zusammenhang zwischen den Koeffizienten:

$$\kappa \cdot \gamma_p \cdot p = \gamma_V \quad (7.30)$$

7.6.5 Adiabate

Es findet *kein Wärmeaustausch* mit der Umgebung statt; also ist

$$Q = Q_0 = \text{const} \text{ oder } dQ = 0$$

In der Natur finden solche Vorgänge häufig als *Grenzfälle* statt; wenn sich der Zustand eines Gases so schnell ändert, dass das Gas einfach keine Zeit hat, mit der Umgebung Wärme auszutauschen – bzw. nur vernachlässigbar wenig.

Für den 1. HS (7.17) folgt (mit 7.29) da $dQ = 0$:

$$dU = -p dV = C_V dT \quad (7.31)$$

Verwenden wir nun noch (7.18) und ersetzen $p = \frac{nRT}{V}$ und nach (7.12) $C_V = \frac{f}{2} K_B N$ so gilt (nach anschließender Integration):

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} K_B N dT &= -\frac{N K_B T}{V} dV \\ \frac{f}{2} \cdot \frac{1}{T} dT &= -\frac{1}{V} dV \\ \frac{f}{2} \int \frac{1}{T} dT &= -\int \frac{1}{V} dV \\ \frac{f}{2} \ln T &= -\ln V + \text{const} \\ \ln(T^{\frac{f}{2}} \cdot V) &= \text{const} \\ T^{\frac{f}{2}} \cdot V &= \text{const} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Die Gleichung kann man noch mit $K_B N$ potenzieren und erhält unter Beachtung von (7.13):

$$T^{C_V} \cdot V^{(C_P - C_V)} = \boxed{T \cdot V^{\kappa - 1} = \text{const}} \quad (7.33)$$

Alternativ kann man aus (7.32) mit (7.18) T ersetzen (und ein paar Konstanten kürzen). Beachtet man nun, dass $V \cdot V^{\frac{2}{f}} = V^{\frac{2+f}{f}}$ ist und verwendet (7.14) statt $\frac{2+f}{f}$, so erhält man

$$\boxed{pV^{\kappa} = \text{const}} \quad (7.34)$$

(Dieses Ergebnis hätte man auch erhalten, hätte man mit (7.18) das $TV^{\kappa-1} = \frac{T}{V} V^{\kappa}$ das $\frac{T}{V}$ ersetzen können.)

7.6.6 Erwärmung bei adiabatischer Kompression

Für isotherme Prozesse gilt $pV = \text{const}$ und für adiabatische $pV^\kappa = \text{const}$. (In einem V - p -Diagramm⁹ sind die Isothermen steiler als die Adiabaten.) Es liegt also nahe, diese beiden Prozesse zu vergleichen. Siehe dazu Abb. 7.2: Die Adiabate schneidet die beiden Isothermen an zwei Stellen. Bei adiabatischer Kompression – also wenn wir einer Adiabaten folgen – wechseln wir folglich von der niedrigen auf die höhere Isothermen und folglich muss sich die Temperatur bei der Kompression erhöhen.

Das kommt daher, dass bei der Kompression mechanische Arbeit in Wärme umgewandelt wird. Beim isothermen Prozess ist es nun so, dass diese Wärme abgegeben werden kann, beim adiabatischen dagegen verbleibt diese Wärme im Gas und sorgt hier dafür, dass die Temperatur steigt.

7.7 Zweiter Hauptsatz

Während der erste Hauptsatz noch die Energieerhaltung postuliert, beschreibt der zweite Hauptsatz, *wie* sich die Energieformen ineinander umwandeln können.

Wir führen dazu die Entropie ein:

Definition 7.10 (Entropie) Die Entropie S ist eine Zustandsgröße, die zunimmt, wenn sich ein System einem Gleichgewichtszustand annähert.

Es gilt dabei mit der reversiblen Wärmemenge:

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad (7.35)$$

Eigentlich setzt sich dS zusammen aus einem *Entropiefluss* dS^e von Außen in das System und einer inneren *Entropieproduktion* dS^i durch Prozesse im Inneren des Systems:

$$dS = dS^e + dS^i \quad (7.36)$$

Analog zu Gl. (7.35) könnte man schreiben:

$$dS^e = \frac{dQ}{T}$$

wobei diesmal dQ die gesamte mit der Umgebung ausgetauschte Wärmemenge ist.

Mit der Definition folgt:

$\Delta S > 0$ irreversibler Prozess

$\Delta S = 0$ reversibler Prozess

$\Delta S < 0$ Wird in der Natur nicht beobachtet (zumindest nicht in *makroskopischen* Systemen).

⁹ also p auf der x -Achse und V auf der y -Achse

Die Wärmemenge

$$\Delta Q = T \cdot \Delta S$$

die bei einem Prozess frei wird, bezeichnet man auch als *Abwärme* oder *Verlust-Energie*, weil sie bei dem Prozess nur zur Änderung der Entropie verwendet wird, nicht aber, um wirklich Arbeit zu verrichten.

Wir können sagen, dass die Entropie die **Zahl der Zustände** eines Systems ist. Führt man in diesem System eine Zwangsbedingung ein, so reduziert man die mögliche Zahl der Zustände und *erniedrigt* damit die Entropie. Um das System auf diese Zwangsbedingungen zu bringen, sind aber *Zwangskräfte* nötig. Man muss Arbeit investieren, um das System in den neuen, mit den Zwangsbedingungen verträglichen Zustand zu bringen.

◇ Bei dem berühmten Beispiel eines Kastens der zur Hälfte mit Gas gefüllt ist, haben wir die Zwangsbedingung der Trennung. Wird die Trennung weggenommen – also die Zwangsbedingung aufgehoben – verteilt das Gas sich im ganzen, ihm zur Verfügung stehenden Raum, und maximiert so seine Entropie. Möchte man den ursprünglichen Zustand wieder herstellen, so muss man *von Außen* Energie investieren, um die Teilchen wieder zurückzusortieren. ◇

Ebenso kann man die Entropie als **Informationsgehalt** verstehen: Je größer die Information, desto kleiner die Entropie. ◇ In dem halbvollen Kasten ist der Informationsgehalt höher: Man kann mit absoluter Sicherheit für jedes Teilchen einen Punkt „irgendwo“ innerhalb von $\frac{1}{2}V$ annehmen. Bei dem großen Kasten dagegen kann man für die Teilchen nur noch sagen, sie befinden sich „irgendwo“ in V . Der Informationsgehalt hat also vom halbvollen zum vollen Kasten so *abgenommen*, wie die Entropie *zugenommen* hat. ◇

Nicht ganz korrekt, aber dafür anschaulich, kann man sagen, dass die Entropie ein *Maß für die Unordnung* eines Systems ist.

Wie wir in Kap. 7.10.1 sehen werden, strebt die Natur zu einem *Gleichgewicht*; sie ist also bestrebt, dass $\Delta S > 0$ ist. Man könnte also sagen, sie ist bestrebt, die Entropie zu maximieren.

So ist auch der zweite Hauptsatz zu verstehen:

Wichtig! 58 (Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik) *In einem abgeschlossenen (adiabatischen) System kann die Entropie nicht ab-, sondern nur zunehmen, und bleibt höchstens bei reversiblen Prozessen konstant:*

$$\boxed{\Delta S \geq 0} \quad (7.37)$$

Man kann ihn auch umformulieren:

Wärme fließt von selbst nur von wärmeren zu kälteren Stellen –
niemals umgekehrt

Interessant ist noch, dass bei einem irreversibel ablaufenden, adiabatischen Prozess Entropie dS^i im System erzeugt wird, bei einem reversiblen logischerweise nicht; Entropieänderung (*-fluss* dS^e) von außen wird aber in keinem der Fälle ins System gebracht.

7.8 Dritter Hauptsatz

Der Dritter Hauptsatz ist sehr schlicht:

Wichtig! 59 (Dritter Hauptsatz der Thermodynamik) *Es ist nicht möglich, ein System bis auf $T = 0$ abzukühlen.*

Außerdem gilt für die Entropie:

$$S(T, p, V) \xrightarrow{T \rightarrow 0} S_0$$

d.h. wenn T verschwindet, so geht S unabhängig von den anderen Parametern p, V, \dots gegen den Zustand S_0 wobei für diesen gilt:

$$S_0 = K_B \ln \Omega_0$$

wobei Ω_0 die Anzahl möglicher Mikrozustände im System darstellt.

Für alle physikalisch-chemischen Reaktionen, bei denen die teilnehmenden Stoffe am absoluten Nullpunkt als ideale kristalline Festkörper vorliegen, gilt:

$$S_0 = 0$$

und damit folgt $\ln \Omega_0 = 0$ bzw. $\Omega_0 = 1$. Es gibt also nur einen einzigen Zustand, den das System am absoluten Nullpunkt einnehmen kann.

7.9 Freie Energie und Enthalpie

7.9.1 Freie Energie

In der *Mechanik* versuchen (makroskopische) Körper ihre (potentielle) Energie zu minimieren: Ein Körper fällt so weit er kann nach „unten“, damit die potentielle Energie möglichst klein wird. In der *Thermodynamik* ist dies offensichtlich nicht so – sonst würden sich alle Luftteilchen möglichst nahe über dem Boden befinden und weiter oben gäbe es keine Luft mehr.

Um diesen Drang der Natur nach einem Energieminimum weiterhin als physikalische Regel beibehalten zu können, müssen wir eine Art *thermodynamisches Potential* definieren:

Definition 7.11 (Freie Energie \mathcal{F}) *Die Freie Energie F ist definiert als*

$$\boxed{\mathcal{F} = U - T \cdot S} \quad (7.38)$$

mit der Entropie S und der Inneren Energie U .

*Wir bezeichnen \mathcal{F} auch als **thermodynamisches Potential**.*

Im Gegensatz zur freien Energie, bezeichnet man als **gebundene Energie**:

$$TS = U - \mathcal{F} \quad (7.39)$$

Wichtig! 60 (Freies Energieminimum) *Die Natur ist (bei konstantem Volumen – also bei einem mechanisch isolierten System – und konstanter Temperatur) bestrebt, dass die **freie Energie \mathcal{F} minimal** wird. Dies entspricht dem Gleichgewichtszustand.*

Vergleichen wir das mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (Kap. 7.7), der besagt, dass S maximal werden soll, sehen wir, dass diese beiden in Einklang stehen: Wird S größer, so wird \mathcal{F} wegen des Minuszeichens in (7.38) kleiner.

Wichtig! 61 *Es wird sich stets ein Gleichgewicht – bzw. ein Kompromiss zwischen der Maximierung von S und der Minimierung von \mathcal{F} geben.^a Dieser Kompromiss ist die BOLTZMANN-Verteilung (Kap. 8.1.5).*

^aMinimierung von \mathcal{F} : Gasteilchen bewegen sich nicht mehr uns liegen am Boden ($\mathcal{F} \min \Rightarrow N\bar{u} \min \Rightarrow \bar{u} \min \Rightarrow \bar{v} \min$)
 Maximierung von S : Teilchen verteilen sich homogen; nehmen möglichst viel Platz ein.

7.9.2 Freie Enthalpie

Analog zur Freien Energie definiert man in einem System für die Enthalpie:

Definition 7.12 (Freie Enthalpie G)

$$G = H - TS \quad (7.40)$$

*Es handelt sich dabei um ein weiteres **Thermodynamisches Potential***

Wichtig! 62 (Freies Enthalpieminimum) *Bleiben Druck und Temperatur eines Systems konstant, ist die Natur bestrebt G zu minimieren.*

Dieser Satz wird häufig in der Chemie gebraucht, weil hier die meisten Reaktionen bei (konstantem) Druck ablaufen (in offenen Gefäßen). Man sieht hier: Eine Reaktion läuft nur dann ab, wenn $\Delta G < 0$ ist. Der Chemiker bezeichnet dies als *exergonische* Reaktion. Im Gegensatz dazu benötigen *endergonische* Reaktionen mit $\Delta G > 0$ *Energiezufuhr*.

7.10 Kreisprozesse

Definition 7.13 (Kreisprozess) *Ein thermodynamisches System durchläuft verschiedene Zustände, kommt anschließend aber wieder zum Ausgangszustand zurück: Es hat wieder die selben Zustandsgrößen.*

Bei einem Kreisprozess bleibt die Innere Energie U zwischen Anfangs- und Endzustand erhalten: $U_a = U_e$ bzw. $\Delta U = 0$ (wobei sich das „ Δ “ auf dem gesamten Prozess bezieht). Mit dem ersten HS (7.15) folgt so:

$$\Delta Q = -\Delta W$$

Es wird also alle aufgenommene Wärme direkt in Arbeit umgesetzt (und anders herum). Das „–“ bedeutet hier, dass wenn man Wärme in das System hineinsteckt, man Arbeit verrichtet bekommt, und anders herum eine Wärmemenge erhält, wenn man an dem System Arbeit verrichtet. Wir bezeichnen solche Systeme auch als **Wärmekraftmaschinen**. Sie können (nur) arbeiten, wenn ihnen ständig Wärme zugeführt wird.

7.10.1 Reversible und Irreversible Prozesse

Wir unterscheiden bei Kreisprozessen, ob ein Prozess re- oder irreversibel ist. Kann er in beiden Richtungen ablaufen, so heißt er *reversibel*, kann er nur in einer Richtung ablaufen, so ist er *irreversibel*. In der Natur kommen erstere höchstens auf der mikroskopischen Scala vor – im makroskopischen Bereich bleiben reversible Prozesse leider Gedankenexperimente.

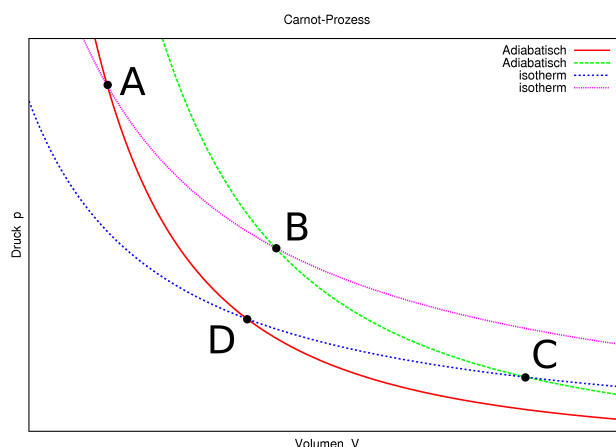


Abbildung 7.2: p - V -Diagramm des Carnot-Prozesses. Die beiden steilen Kurven gehören zu Adiabatischen Vorgängen, die flachen zu isothermen. Verwendet man ein V - p -Diagramm tauschen Adiabaten und Isothermen die Position.

Wichtig! 63 Thermodynamische Prozesse laufen häufig nur in eine Richtung von selbst ab.

◇ Haben wir bspw einen Kolben, dessen Innendruck den Außendruck übersteigt, so wird der Kolben herausgeschoben und verrichtet so Arbeit. Der Umgekehrte Fall ist zwar nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik möglich, wird in der Natur jedoch nicht eintreten. ◇

Eine gute Erklärung dafür ist, dass der ausgedehnte Kolben ein *Gleichgewichtszustand* ist. Die Natur ist bestrebt, diesen Gleichgewichtszustand einzustellen – jedoch alles andere als bestrebt, diesen wieder zu verlassen; der Prozess ist also folglich *irreversibel*. Dies motiviert den zweiten Hauptsatz (Kap. 7.7).

7.10.2 Der CARNOT-Prozess

Es handelt sich hierbei um einen *fundamentalen Kreisprozess*, in dem die vier Zustände A bis D periodisch durchlaufen werden. Wir betrachten

- einen Gasbehälter mit Kolben, in dem das Gas („**Arbeitsgas**“) komprimiert bzw. expandiert wird.
- Der Behälter wird abwechselnd in Wärmebäder unterschiedlicher Temperaturen getaucht: T_w für warme und T_k für kalte Bäder.

Im einzelnen geschieht (In Abb. 7.2 sind die vier Zustände A bis D markiert. Die jeweiligen Vorgänge hier sind also die jeweiligen Verbindungslinien zwischen den Punkten.):

A → B Isotherme Expansion Da $T = \text{const}$ folgt $dT = 0$. Da $U \sim T$ (s. (7.7)) ist $dU = 0$ und mit dem 1. HS (7.15) folgt:

$$dU = dQ + dW = 0 \Rightarrow dQ = -dW = p dV$$

Das Gas nimmt aus dem Reservoir die Wärmemenge ΔQ_w auf und leistet (damit) die Expansionsarbeit ΔW_{AB} . Es gilt

$$\Delta W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{RT_w}{V} dV = -RT_w \ln \frac{V_B}{V_A} = RT_w \ln \frac{V_A}{V_B} = -\Delta Q_w$$

Im \ln ist $\frac{V_A}{V_B} < 1$ und damit der \ln negativ: Es wird wirklich ΔW_{AB} frei.

B→C adiabatische Expansion Diesmal ist $dQ = 0$ und damit mit dem ersten HS:

$$dU = dW = \frac{f}{2} R dT$$

Und mit $dT = T_k - T_w$ und $\frac{f}{2} R = C_V$ folgt:

$$\Delta W_{BC} = \int_{T_w}^{T_k} C_V dT = C_V (T_k - T_w)$$

Die Differenz rechts ist negativ: Das Gas leistet die Expansionsarbeit. Die Arbeit kommt dabei aus der Inneren Energie U des Gases.

C→D isotherme Kompression Es ist wieder $dT = 0$, nur wird diesmal die Kompressionsarbeit ΔW_{CD} in das Gas gesteckt und die Wärmemenge ΔQ_k wird ans Wärmebad abgegeben. Analog zu AB gilt:

$$\Delta W_{CD} = -RT_k \ln \frac{V_D}{V_C} = -\Delta Q_k$$

Da der Quotient $\frac{V_D}{V_C} < 1$ ist der \ln wieder negativ – damit ΔW *positiv* und es wird wirklich die Arbeit ΔW am Gas geleistet.

D→A adiabatische Kompression Es ist wieder $dQ = 0$ und analog zu BC gilt

$$\Delta W_{DA} = C_V (T_w - T_k)$$

D.h. es wird diesmal wegen $\Delta W > 0$ Arbeit ins Gas gesteckt.

Nun wollen wir bilanzieren: Die Arbeit bei DA und BC ist praktisch die selbe – wir wollen sie also nicht weiter beachten. Die Gesamtarbeit, die das System verrichtet hat, sei W und für W gilt:

$$W = \sum_{AB,BC,CD,DA} \Delta W = nRT_w \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_k \ln \frac{V_D}{V_C} \quad (7.41)$$

Für die adiabatischen Prozesse BC und DA gilt nun nach (7.34):

$$\begin{aligned} T_w V_B^{\kappa-1} &= T_k V_C^{\kappa-1} \\ T_w V_A^{\kappa-1} &= T_k V_D^{\kappa-1} \\ \frac{V_B}{V_A} &= \frac{V_C}{V_D} \end{aligned} \quad (7.42)$$

In Gl. (7.41) gilt also $\ln \frac{V_B}{V_A} = -\ln \frac{V_D}{V_C}$ und weiter

$$\boxed{W = nR \cdot (T_w - T_k) \cdot \ln \frac{V_B}{V_A}} \quad (7.43)$$

Dies ist also die Arbeit, die beim Carnot-Prozess verrichtet wurde. *Graphisch* findet man sie wieder, wenn man die Fläche in Abb. 7.2 betrachtet, die von den vier Kurven zwischen A, B, C und D eingerahmt wird.

Definition 7.14 (Wirkungsgrad) Der Wirkungsgrad η ist definiert als

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q} = \frac{\text{mechanisch nutzbare Arbeit}}{\text{aufgenommene Wärme}} \quad (7.44)$$

Um beim Carnot-Prozess die Arbeit W zu leisten, wurde aus dem Wärmebad die Wärmemenge ΔQ_w entnommen. Für den Carnot-Prozess können wir also den Wirkungsgrad

$$\eta^{(C)} = \frac{T_w - T_k}{T_w} = 1 - \frac{T_k}{T_w} \quad (7.45)$$

definieren.

Hier sehen wir, dass die Carnot-Maschine umso effizienter arbeitet, je höher die Differenz zwischen den Temperaturen des Wasserbads ist. Wir sehen aber auch, dass $\eta^{(C)} < 1$ ist (da $T > 0$ nach Kap. 7.7):

Wichtig! 64 (Wirkungsgrad) Es kann nicht alle aufgenommene Wärme in Arbeit umgesetzt werden.

Es gilt außerdem:

Wichtig! 65 Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, deren Wirkungsgrad höher ist als der der Carnot-Maschine.

7.10.3 Kreisprozess von Stirling

Modifiziert man den Kreisprozess von CARNOT und verwendet statt adiabatischer Kompression und Expansion eine *isochore* ($V = \text{const}$ s. Kap. 7.6.3), so hat man einen Kreisprozess, dessen Wirkungsgrad geringer ist, jedoch ist er in der Praxis leichter umsetzbar.

7.11 Zustandsgleichung für ein Reales Gas

Bisher hatten wir ein ideales Gas angenommen – mit *punktförmigen Teilchen*, die untereinander *keine Wechselwirkungen* (bis auf die Stöße untereinander) ausführen. Nun wollen wir dies ändern und führen ein:

- Schwache *attraktive Wechselwirkungen* zwischen den Teilchen

Das äußert sich darin, dass in einem abgeschlossenen Behälter mit Realem Gas der Druck auf den Behälter kleiner wird als bei einem Idealen Gas, weil die Gasteilchen von der Wand durch die Kräfte aufeinander *zurückgehalten* werden.

- Gasteilchen haben *Volumen*

Das sog. **Eigenvolumen** erhöht das Volumen, welches N Teilchen einnehmen.

Wir kommen so von der *Idealen Gasgleichung* auf die

Stoff	a in $\frac{\text{kPa} \cdot \text{l}^2}{\text{mol}^2}$	b in $\frac{\text{l}}{\text{mol}}$
Helium (<i>He</i>)	3,45	0,0237
Neon (<i>Ne</i>)	21,3	0,0171
Argon (<i>Ar</i>)	136,3	0,0322
Wasserstoff (<i>H₂</i>)	24,7	0,0266
Stickstoff (<i>N₂</i>)	140,8	0,0391
Sauerstoff (<i>O₂</i>)	137,8	0,0318
Luft (80% <i>N₂</i> , 20% <i>O₂</i>)	135,8	0,0364
Kohlendioxid (<i>CO₂</i>)	363,7	0,0427
Wasser (<i>H₂O</i>)	557,29	0,031
Chlor (<i>Cl₂</i>)	657,4	0,0562
Ammoniak (<i>NH₃</i>)	422,4	0,0371
Methan (<i>CH₄</i>)	225	0,0428

Tabelle 7.1: Einige Werte für *a* und *b* (Quelle: WIKIPEDIA)

Definition 7.15 (VAN-DER-WAALS-Gleichung) Für $n = 1$ bzw. $N = 1$ mol Teilchen eines Realen Gases gilt:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = RT \quad (7.46)$$

(hierbei steht V_m für das Molare Volumen – also das Volumen, welches ein mol dieser Teilchen einnehmen)

bzw. allgemein

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right) \cdot (V - nb) = nRT \quad (7.47)$$

Man nennt in dieser Gleichung $\frac{a}{V^2}$ den **Binnendruck**: Er kommt durch die attraktiven Wechselwirkungen zustande. Man kann also sagen, dass der *ideale Druck* $p + \frac{n^2 a}{V^2}$ um den Binnendruck *größer* ist, als der reale Druck p .

b ist hier das **Covolumen**: b gibt das Volumen an, welches ein mol Teilchen des Gases ausmacht – also das Volumen *der Teilchen selbst*, nicht das Volumen, welches sie *einnehmen*!.

In diesem Sinne kann man die Terme $\frac{n^2 a}{V^2}$ und nb als *Korrekturterme* verstehen, mit denen man die real gemessenen Bedingungen auf die entsprechenden idealisierten Größen umrechnet, um die Ideale-Gasgleichung verwenden zu können.

Die beiden Größen a und b sind dabei logischerweise materialabhängig. In Tab. 7.1 ist eine kleine Auswahl zu finden.

Das unterschiedliche Verhalten zwischen Realen und Idealen Gasen ist schön in p - V -Diagrammen zu sehen. Siehe dazu Abb. 7.3. Für höhere Temperaturen

näheren sich die Temperaturverläufe einander an und besonders bei niedriger Temperatur weichen sie weit ab: Bei tiefen Temperaturen ist die Teilchenbewegung kleiner und die attraktiven Effekte zwischen den Teilchen stärker zu spüren. Bei hohen Temperaturen sind die Teilchen so schnell, dass die attraktiven Wechselwirkungen eine kleinere Rolle spielen.

Wichtig! 66 *Der in Abb. 7.3(b) skizzierte Verlauf tritt nur rechnerisch ein; in der Realität wird das nicht so kommen:*

Die Wendepunkte verschwinden in der Praxis und stattdessen werden die konkaven Abschnitte durch eine x -Achsen-Parallele ersetzt, sodass die zwischen Gerade und Funktion eingeschlossenen *Orientierten Flächen*¹⁰ in der Summe 0 ergeben. In Abb. 7.4 ist so etwas skizziert.

Die Temperatur, bei der sich gerade nur ein Wendepunkt bildet, wird mit T_k bezeichnet.¹¹ Wie in Abb. 7.4 zu sehen ist, bildet sich eine Kurve, wenn man die Punkte miteinander verbindet, die den Unterschied zwischen Formel und Experiment markieren. Zusammen mit der Kurve mit nur einem Wendepunkt (die also bei T_k aufgenommen wurde) teilt sie das Diagramm in Vier Abschnitte – I bis IV – auf:

Bereich III Das Volumen ist groß, der Druck jedoch klein; Das System bleibt **gasförmig**.

Bereich II Der Druck ist im Experiment konstant (deshalb die Konstruktion der Parallelen Linien), obwohl V größer oder kleiner wird.

Die Gasteilchen kommen sich näher und näher und attraktive Kräfte wirken zwischen ihnen. Manche der Gasteilchen kondensieren so und senken so den Druck weiter (weil die flüssigen Teilchen weniger Platz brauchen). Je weiter das Volumen reduziert wird, desto mehr Teilchen kondensieren, also desto mehr Flüssigkeit entsteht.

Insgesamt liegt eine **Koexistenz** zwischen gasförmigem und flüssigem Zustand vor, die sich weiter in Richtung Flüssigkeit verschiebt, je kleiner das Volumen wird.

Bereich I Alles (oder zumindest viel Gas) ist kondensiert – schon für geringe Volumenänderungen ist ein sehr großer Druck nötig (Im Schaubild strebt die Druck-Kurve hier gegen ∞). Die Teilchen liegen also größtenteils als **Flüssigkeit** vor.

Bereich IV Hier befinden wir uns oberhalb der Temperatur T_k – hier ist keine Kondensation möglich; die kinetisch Energie der Teilchen ist zu groß, als dass die zwischenmolekularen Kräfte so stark wirken könnten, dass sich eine Flüssigkeit bildet.

Diesen Zustand nennt man **Fluid**.

Definition 7.16 (Fluid) *Ein Fluid ist eine Substanz, die man verformen kann, ohne dass sie einen Widerstand entgegen setzt. In diesem Sinne gehören zu den Fluiden sowohl Gase als auch Flüssigkeiten.*

¹⁰also eine positive, wenn die Funktion größer als die Gerade ist und eine negative, wenn die Funktion kleiner ist

¹¹Entsprechend das entsprechende Volumen als V_k und der dazugehörige Druck als p_k .

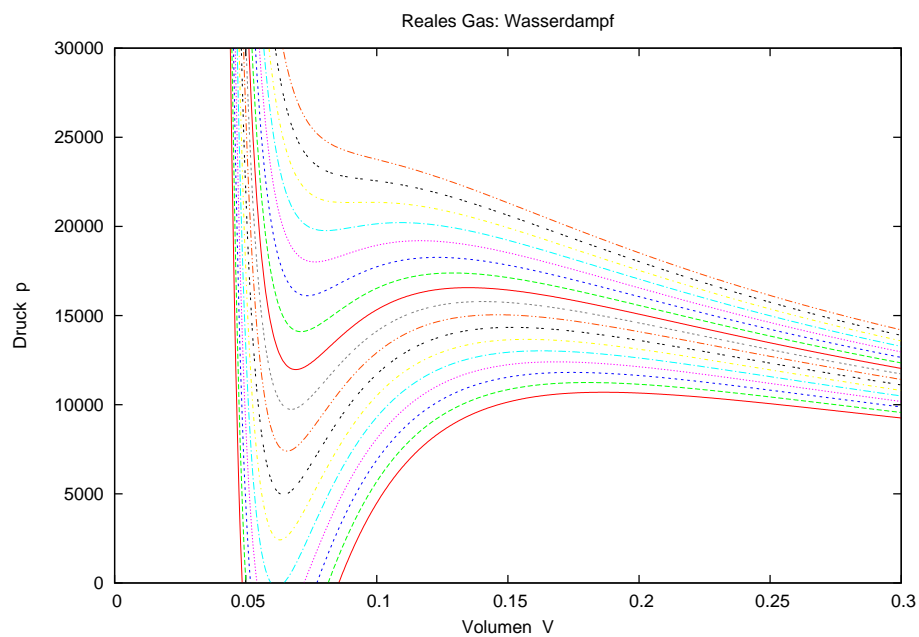
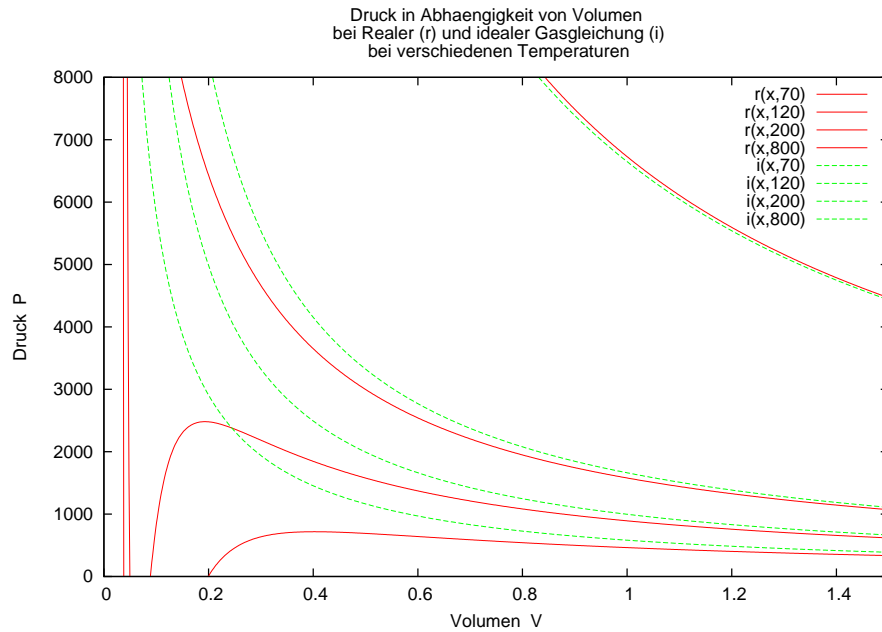


Abbildung 7.3: Diagramme Idealer und Realer Gase

Diese Verallgemeinerung macht Sinn, weil viele physikalische Gesetze für Gase und Flüssigkeiten (qualitativ) gleichermaßen gelten und die Eigenschaften sich nur quantitativ unterscheiden.

Mit anderen Worten: Es macht hier keinen Sinn, zwischen Flüssigkeit und Gas zu unterscheiden, deshalb nenne man den Zustand Fluid.

In Tabelle 7.2 sind ein paar der kritischen Temperaturen aufgeführt, wie sie im Experiment vorkommen.

So kann man auch noch ein sog. **Phasendiagramm** zeichnen. In ihm wird genau festgehalten, wie das *Verhältnis von Druck und Temperatur* sein muss, damit man eine bestimmte Phase erhält. In Abb. 7.5 ist ein solches dargestellt.¹²

Um die Kurve, welche den flüssigen vom gasförmigen Zustand eines Mols Gas trennt (auch *Siedekurve* genannt) zu berechnen, verwendet man

$$p(T) = p_0 \cdot \exp \frac{-Q_D}{RT}$$

wobei mit Q_D die *Verdampfungswärme* eines Mols der Teilchen ist.

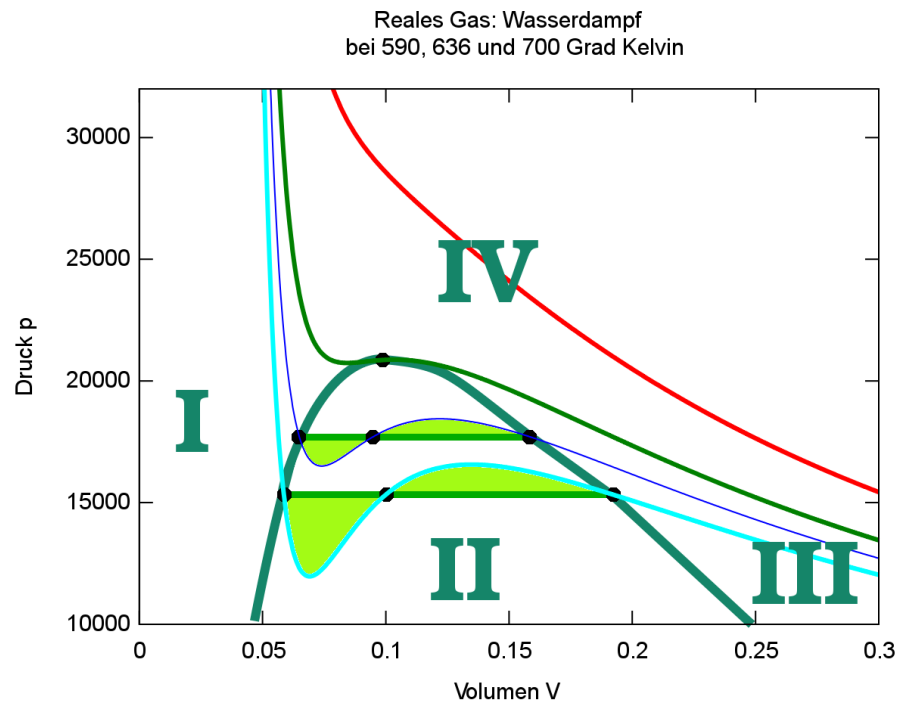


Abbildung 7.4: Realer Kurvenverlauf skizziert, mit diversen Konstruktionshilfen und den gebieten I bis IV eingezeichnet.

¹² Bitte beachten: dies ist ein p - T -Diagramm; man kann es nur schwer mit den p - V -Diagrammen wie 7.3(a) oder 7.4 vergleichen!

	p_k in bar	T_k in K	ρ_k in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
H_2	12,9	33,2	31
CO_2	73,7	304,1	465
H_2O	221,0	647,3	317

Tabelle 7.2: Tabelle kritischer Dampfdrücke, Temperaturen und Dichten von Gasen

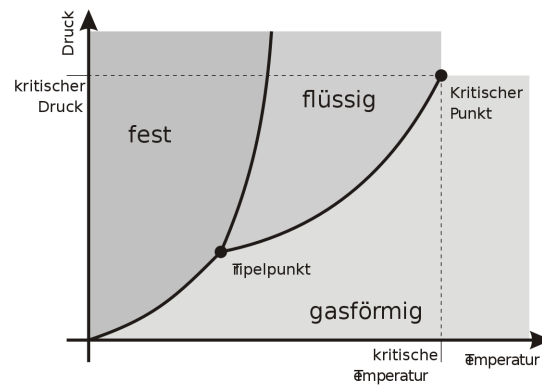


Abbildung 7.5: Phasendiagramm eines realen Stoffes (ohne Anomalie – also nicht wie Wasser). (Quelle: WIKIPEDIA)

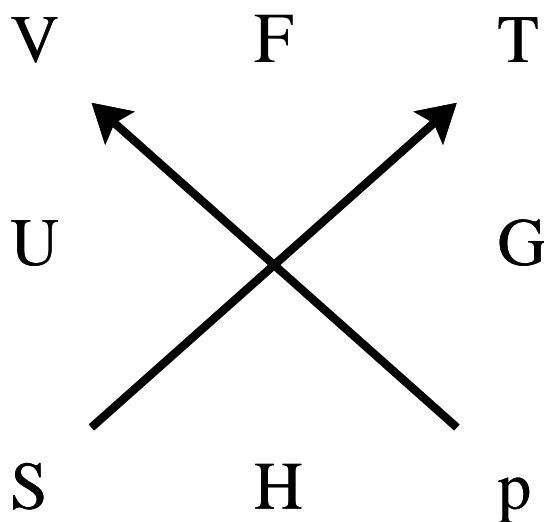


Abbildung 7.6: Das GUGGENHEIM-Schema

7.12 Das GUGGENHEIM-Quadrat (und seine Verewaltigung) (★)

In Abb. 7.6 ist das GUGGENHEIM-Schema dargestellt. Es ermöglicht, sich zahlreiche Zusammenhänge der Thermodynamischen Größen (mit geringem Aufwand) zu merken.

Darin stehen die Buchstaben für: S: Entropie, V: Volumen, T: Temperatur, p: Druck, H: Enthalpie, U: Innere Energie, F: Freie Energie und G: Gibbs'sche Enthalpie. Um sich dieses Schema merken zu können, gibt es einen schönen Merkspruch:

So Viel Thermo-Physik Hätte Uns Fast Geschafft!

Dabei fängt man in der linken unteren Ecke an und schreibt im Uhrzeigersinn die vier Zustandströßen S, V, T und p an und beginnt direkt hinter p mit den restlichen Größen. Die Pfeile haben anschließend eine wichtige Bedeutung.

Es gelten nun folgende „Gebrauchsanweisungen“:

Ableitungen Um Partielle Ableitungen der Größen nacheinander zu gewinnen, gilt die Formel:

$$\left(\frac{\partial \langle \text{Kante} \rangle}{\partial \langle \text{Ecke} \rangle} \right)_{\langle \text{Ecke des Dreiecks} \rangle} = \pm \langle \text{Pfeil folgen} \rangle \quad (7.48)$$

D.h. man Wählt eine Größe auf der Kante X (bspw. H) und bewegt sich zu einem anliegenden Eck Y (bspw. S) um die partielle Ableitung $\frac{\partial X}{\partial Y}$ zu bestimmen. Nun folgt man dem Pfeil zur nächsten Ecke und erhält hier die Größe Z rechts der Gleichung. Wenn man dabei *mit* dem Pfeil gegangen ist, ist das Vorzeichen *positiv*, *entgegen* dem Pfeil, ist es *negativ*. Bei der Ableitung hat eine Größe konstant zu bleiben: Dabei handelt es

sich um die Ecke W , welche zusammen mit den bisher gewählten Größen ein rechtwinklig, gleichschenkliges Dreieck bildet. Es ist dann:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_W = \pm Z$$

Und so bspw:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T \text{ oder } \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V \text{ oder } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p$$

Für diese Aufgabe ist das Schema eigentlich gemacht, deshalb stimmen hier die Pfeilrichtungen mit $+$ und $-$ überein.

Totale Differenziale So kann man die totalen Differenziale einer der **Kanten** bestimmen:

$$d < K. > = \pm < E. \text{ gegenüber } > d < P. \text{ folg. } > \pm < andere E. > d < P. \text{ folg. } > \quad (7.49)$$

D.h. man wählt eine Kante und geht von dieser zur gegenüberliegenden Ecke und multipliziert diese Größe mit dem Differenzial der Größe, zu der man gelangt, wenn man dem Pfeil folgt (in der endgültigen Formel sind also die Größen aller drei Differenziale Nachbarn im GUGGENHEIM-Quadrat). Das Vorzeichen ist dabei *mit* der Pfeilrichtung *negativ* und *entgegen* der Pfeilrichtung *positiv*. Wichtig ist dabei, dass man *beide* gegenüberliegende Ecken enbezieht, also im Endeffekt alle vier Zustandsgrößen gebraucht hat.

Bspw. gilt:

$$dH = T dS + V dp \text{ oder } dG = V dp - S dT$$

MAXWELL-Beziehungen Hier kann man die Ecken gegeneinander partiell ableiten. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial < E.1 >}{\partial < E.2 >}\right)_{< \text{Nenner gegenüb.} >} = \left(\frac{\partial < P. \text{ folgen } >}{\partial < letzte E. >}\right)_{< \text{Nenner gegenüb.} >} \quad (7.50)$$

Dabei wählt man die ersten beiden Ecken frei aus und bildet die linke Ableitung. Dann folgt man dem Pfeil (von $< E.2 >$) zur nächsten Ecke und bildet mit dieser und der letzten Ecke die rechte Ableitung. Dabei ist bei der linken Ableitung die Größe Konstant, die Rechts im Nenner steht und anderst herum. Auf einer der Seiten *sowohl* S als auch p auftauchen (diese liegen beide an den stumpfen Pfeilenden), dann kommt vor diese Ableitung ein „-“, sonst *nicht*.

Also bspw.:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \text{ oder } \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

Definitionen Man kann die drei Definitionen

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= U - TS \text{ eigentlich } U = \mathcal{F} + TS \\ G &= H - TS \\ H &= U + pV \end{aligned}$$

(mit ein wenig Gewalt) in das Schema pressen:

$$\langle K. \rangle = \langle \text{nächste K.} \rangle \pm \langle \text{nächste E.} \rangle \cdot \langle P. \text{ folgen} \rangle \quad (7.51)$$

Man wählt also eine Kante und bewegt sich zur nächsten Kante im Uhrzeigersinn, weiter zur nächsten Ecke und folgt hier dem Pfeil. Das Vorzeichen ist wieder positive, wenn man *gegen* den Pfeil geht und *mit* dem Pfeil *negativ*.

Man kann diese Relationen herleiten, indem man bekannte Größen per **Legendre-Transformation** transformiert (damit kann man elegant die totalen Differenziale umschreiben) und erhält durch Koeffizientenvergleiche die Ableitungen $\frac{\partial \langle Kante \rangle}{\partial \langle Ecke \rangle}$.

Mit diesen Grundgleichungen zusammen mit $\bar{u} = \frac{f}{2} K_B T$ kann man viele der hier besprochenen Fälle schnell und einfach nachrechnen!

Kapitel 8

Mikroskopische Thermodynamik

In diesem Kapitel betrachten wir einzelne Atome, Moleküle oder einfach kleinste Teilchen – jedoch versuchen wir gar nicht erst, für die großen Mengen an Teilchen exakte Bewegungsgleichungen zu lösen, sondern verwenden die Aussagen aus der Thermodynamik (Kap 7), die wir aus Beobachtungen des Makrozustandes gewonnen haben, und untersuchen damit das Verhalten der kleinsten Teilchen.

Wir verlassen uns also auf *statistische* Ansätze, die uns zwar keine exakten Aussagen ermöglichen, dafür aber eine Aussage, die für ein Teilchen *im Allgemeinen* gilt. Eine wohldefinierte, konstante (makroskopische) Zustandsgröße ist auf der mikroskopischen Scala unter Umständen starken Schwankungen unterworfen – so als würden wir unsere Messergebnisse jetzt unter dem Mikroskop betrachten.

Wie im FEYNMANN'schen Experiment der **Molekularen Ratsche** kann es dabei zu eigentlich verwirrenden Ergebnissen kommen – die sich aber doch wieder logisch über bekannte physikalische Probleme erklären lassen.

8.1 STOKES-EINSTEIN-Relationen

Wir betrachten N Kolloide¹, die in einem Flüssigkeitsvolumen V suspendiert² sind und definieren die **Teilchendichte**:

$$n_K = \frac{N}{V} = \frac{p}{K_B T} \quad (8.1)$$

Sei nun n_K hinreichend klein – also wenige dieser Kolloide „gelöst“, so kann man die Kolloide als Ideales Gas behandeln (und die Flüssigkeit als Vakuum zwischen den „Gasteilchen“).

¹Kleine Teilchen ($d \approx 1 \mu\text{m}$) die jedoch noch *weit größer* sind, als die Teilchen der Lösung. Eine *kolloidale Lösung* kann bspw. ein klares Lösungsmittel sein, in dem so viele Kolloide das Licht streuen, dass die Flüssigkeit eine milchige Trübung erhält.

²Ein Feststoff ist in einer Flüssigkeit fein verteilt, aber immer noch im festen Aggregatzustand.

8.1.1 Betrachtung als Kräftegleichgewicht

Die „Gasteteilchen“ respektive Kolloide erzeugen den Druck

$$p = n_K \cdot K_B \cdot T \quad (8.2)$$

Auf die Kolloide wirkt noch eine weitere Kraft F – bspw. *Gravitation*, ein *elektrisches Feld* etc. Im Thermischen *Gleichgewicht* gilt:

$$\sum_i F_i = 0$$

und so für die *Kraftdichten*

Definition 8.1 (Kraftdichte \vec{f}) Die Kraftdichte \vec{f} ist als „Kraft pro Volumen“ so definiert, dass

$$d\vec{F} = \vec{f} dV \quad \text{oder} \quad \vec{F} = \int_V \vec{f} dV \quad (8.3)$$

ist.

Die Kraftdichte ergibt sich aus dem Druck durch

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} p(\vec{r}) \quad (8.4)$$

Wenn die Kräfte auf alle N Teilchen der Teilchendichte $n = \frac{N}{V}$ gleich wirken und auf jedes Teilchen die Kraft \vec{F} wirkt, so folgt für die Kraftdichte und weil insgesamt die Kraft $N \vec{F}$ wirkt:

$$\vec{f} = \frac{N \vec{F}}{V} = \vec{F} \cdot n$$

Damit und der Definition aus Gl. (8.3) folgt so:

$$n_K(\vec{r}) \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} p(\vec{r}) = 0 \quad (8.5)$$

mit Gl. (8.2) folgt

$$\frac{p(\vec{r})}{K_B T} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} p(\vec{r}) = 0 \quad (8.6)$$

Dies ist eine (partielle) Differentialgleichung mit der Lösung

$$p(\vec{r}) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{K_B T}\right)}_{\text{BOLTZMANN-Faktor}} \sim n_K(\vec{r}) \quad (8.7)$$

Die Proportionalität zu n_K ergibt sich aus Gl. (8.2). Dies ist eine *BOLTZMANN-Verteilung*!

Nun können wir als Spezialfall die **Gravitation** als Kraft verwenden mit $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$:

$$n_K(h) \sim \exp\left(-\frac{mg \cdot h}{K_B T}\right) \quad (8.8)$$

und erhalten die **Barometrische Höhengleichung**; die Kolloide in der Lösung verhalten sich also wie die Luft in der Atmosphäre.

8.1.2 Betrachtung mit Teilchenstrom

Der Gleichgewichtszustand des Systems ist Ergebnis zweier gegenläufiger Teilchenströme.

Definition 8.2 (Teilchenstrom \vec{j}) *gibt an, wie sich die Teilchendichte ausbreitet (nicht ein einzelnes Teilchen). Es gilt*

$$\vec{j} = n_K(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad (8.9)$$

Bei uns laufen gegeneinander

1. Diffusionsstrom

Teilchen strömen nach oben, weil oben im Gefäß die Dichte kleiner ist. Die Diffusion läuft entgegen des Gradienten³:

$$\vec{j}_{\text{dif}} = -D \cdot \nabla n_K(h) \quad (8.10)$$

Dabei ist D der *Diffusionskoeffizient* (mit $[D] = \frac{m^2}{s}$).

Nur mit der Diffusion würden die Teilchen sich lediglich gleichverteilen.

2. Driftstrom

Durch die Schwerkraft strömen Teilchen nach unten. Mit der STOKES-Reibung

$$\vec{F} = 6\pi\eta r \vec{v}$$

mit der Viskosität η und dem Teilchenradius r ergibt sich (im Gleichgewicht):

$$\vec{j}_{\text{drift}} = n_K \cdot \vec{v} = n_K \cdot \frac{\vec{F}}{6\pi\eta r} \quad (8.11)$$

Im Gleichgewicht gilt nun:

$$\vec{j}_{\text{dif}} + \vec{j}_{\text{drift}} = 0$$

und mit Gl. (8.10) und (8.11) gilt:

$$D \cdot \nabla n_K(h) = n_K \cdot \frac{\vec{F}}{6\pi\eta r} \quad (8.12)$$

Setzt man auf der linken Seite für $n_K(h)$ Gl. (8.8) ein gilt mit

$$\nabla n_K(\vec{h}) = \nabla \exp\left(-\frac{m\vec{g} \cdot \vec{h}}{K_B T}\right) = -\frac{m\vec{g}}{K_B T} \cdot \exp\left(-\frac{m\vec{g} \cdot \vec{h}}{K_B T}\right) = -\frac{\vec{F}_g}{K_B T} \cdot n_K(\vec{h})$$

und da $\vec{F} = -\vec{F}_g$ gilt für Gl. (8.12):

$$D \cdot \frac{\vec{F}}{K_B T} \cdot n_K(h) = n_K \cdot \frac{\vec{F}}{6\pi\eta r}$$

³weil der Gradient ja in die Richtung der *größten* Änderung zeigt, also dorthin, wo die Dichte weiter zunimmt

und so aufgelöst nach D ergibt sich die **STOKES-EINSTEIN-Relation**:

$$D = \frac{K_B T}{6\pi\eta r} \quad (8.13)$$

An dieser ist interessant, dass sie – ganz im Geiste der Mikroskopischen Thermodynamik – die makroskopische Größe D in Zusammenhang bringt mit den atomaren Größen η und r .

8.1.3 Mittlere Freie Weglänge

Definition 8.3 (Mittlere Freie Weglänge λ oder ℓ) Länge λ , wie weit sich ein Teilchen bewegen kann, ohne mit einem anderen zu kollidieren.

Wichtig! 67 Der mittlere Teilchenabstand \bar{a} ist verschieden von der mittleren freien Weglänge λ .

Wir unterteilen das Volumen V , welches N Teilchen enthält, nun in N Würfel mit der Kantenlänge a ; und mit (8.1) folgt

$$V = Na^3 = \frac{N}{n_K} \Rightarrow \frac{1}{n_K} = a^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{n_K}} = n_K^{-\frac{1}{3}} = a \quad (8.14)$$

Es ist nun $a = \bar{a} \neq \lambda$: Denken wir uns die Gasteilchen gleichverteilt – mit Verteilung n_K – so hat jedes für sich einen eigenen kleinen Würfel mit Kantenlänge a . Denken wir nun, dass jedes Teilchen sich nur in seinem Würfel bewegt, so haben sie im Mittel den Abstand \bar{a} voneinander.

Wir betrachten nun einen Quader mit Länge dx und Seitenfläche A , in dem sich N Teilchen (mit Dichte n_K) befinden und sich bewegen. Von außen fliegt ein weiteres Teilchen auf A zu. Man projiziert nun die Teilchen *im* Quader parallel zur Bewegung \vec{v} des anfliegenden Teilchens auf die Fläche A . Ein Teilchen mit Radius r nimmt hier die Fläche

$$\sigma = \pi r^2 \quad (8.15)$$

ein – die N Teilchen logischerweise die Fläche $N \cdot \sigma$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das anfliegende Teilchen in der Zeit dt ein Teilchen im Quader erwischt ist

$$\frac{A_{\text{Teilchen}}}{A_{\text{Fläche insgesamt}}} = \frac{\overbrace{n \cdot A \cdot dx}^N \cdot \sigma}{A} = n \cdot \sigma \cdot dx \quad (8.16)$$

Aufgrund von Kollisionen nimmt die Zahl j von Teilchen in V , die sich in Richtung \vec{v} bewegen (und so mit dem anfliegenden stoßen), immer weiter ab, je weiter man sich in V hereinbewegt:

$$j(x + dx) = j(x) - j(x) \cdot n\sigma dx \quad (8.17)$$

(wir subtrahieren auf dem Weg nach x von den stoßbereiten Teilchen j die Teilchen, mit denen das anfliegende zusammenprallen wird ($j \cdot n \sigma dx$, weil nach (8.16) dies angibt, mit wie vielen Teilchen aller *Wahrscheinlichkeit* nach das anfliegende stoßen wird).

Subtrahieren wir in (8.17) $j(x)$ und teilen durch dx , so haben wir eine Differentialgleichung. Eine Lösung ist

$$j(x) = j_0 \cdot \exp(-n\sigma x) \quad (8.18)$$

Wir interpretieren das Ergebnis jetzt als *Verteilung*: Je größer der Abstand x wird, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen noch mit einem anderen stößt – aber dafür ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen schon sehr früh stößt, außerordentlich hoch, d.h. nur wenige Teilchen kommen überhaupt in die Nähe der großen x . (8.18) ist also die Verteilung der Teilchen mit denen dein anfliegender stoßen kann, wobei x dann logischerweise für die Strecke *vor* dem Stoß – also die freie Weglänge λ – steht.

Um jetzt noch die *mittlere* freie Weglänge zu bestimmen, verwenden wir eine Eigenschaft der e -Funktion: Das Mittel liegt bei $y = \frac{1}{e}$; in unserem Fall also bei $\frac{1}{e} \cdot j_0$. Mit $x = \lambda$ gilt:

$$\lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma} \quad (8.19)$$

8.1.4 Alternative Herleitung und Wirkungsquerschnitt (★)

In der vorhergehenden – etwas weitschweifigen – Herleitung haben wir quasi nebenher bestimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen, welches sich um x bewegt, stößt (Gl. (8.18)).

Eine wesentlich **einfachere Herleitung** für die mittlere freie Weglänge λ geht folgendermaßen vor: Ein Teilchen habe wieder die (effektive) Fläche σ zu seiner Bewegungsrichtung⁴. Wenn dieses Teilchen sich im Volumen V mit insgesamt N Teilchen bewegt, so wird es *im Mittel* (so ist ja λ definiert) die Strecke λ zurücklegen können, ohne gegen ein anderes Teilchen zu stoßen. Dabei überstreicht es das Volumen

$$V_\lambda = \sigma \cdot \lambda$$

Nun hat jedes Teilchen das selbe Volumen zur Verfügung – also bei N Teilchen folgt so – wesentlich schneller –

$$V_\lambda = \frac{V}{N} = \frac{1}{n} \equiv \sigma \cdot \lambda \text{ oder } \lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma} \quad (8.20)$$

Der *Hintergrund* ist, dass in dieser kurzen Herleitung σ einfach als Querschnittsfläche interpretiert wurde, in der in der ersten Herleitung dagegen als **Wirkungsquerschnitt**. Dieser ist definiert als Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Wechselwirkungsprozess (in unserem Falle ein Stoß) zwischen

⁴Also die Projektion parallel der Bewegungsrichtung auf eine Fläche senkrecht zur Bewegungsrichtung ist σ .

Teilchen eines Teilchenstrahls und einem Streuzentrum (hier die anderen Teilchen) eintritt. Dieses Maß ist der Quotient aus gestreuten Teilchen zum Teilchenfluss:

$$\sigma = \frac{\text{Gestrene Teilchen pro Zeit}}{\text{Anfliegende Teilchen pro Zeit und Fläche}}$$

und hat damit die *Dimension* einer Fläche.

Alternativ kann man die anfliegenden Teilchen auch als Punktförmig interpretieren. Dann stellt σ eine Fläche auf dem Ziel senkrecht zur Bewegungsrichtung des anfliegenden Teilchens dar, wobei die Wechselwirkung stattfindet, wenn das Punktteilchen in σ trifft und ausbleibt, wenn es an σ vorbeigeht. Damit ist σ auch ein Maß für die „Stärke“ der Wechselwirkung.

Die Wahrscheinlichkeit w für eine Wechselwirkung ergibt sich bei einer Targetfläche von A_T und N_T Targetteilchen zu

$$w = \frac{\sigma N_T}{A_T} = \frac{N_W}{N} \text{ und damit } \frac{\sigma}{A_T} = \frac{\frac{N_W}{N}}{N_T} = \frac{w}{N_T}$$

Hier bezeichnet N_W die (angeflogenen) Teilchen, die gewechselwirkt haben und N die insgesamt angeflogenen Teilchen.

Betrachten wir nun ein (dünnes) Teilchenvolumen $V_T = A_T \cdot dx$, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß hier

$$w = \frac{N_W}{N} = \frac{\sigma N_T \cdot dx}{A_T \cdot dx} = \frac{\sigma dx \cdot N_T}{V_T} = \sigma n_T dx$$

wobei wir mit n_T die *Teilchendichte* der Zieleteilchen bezeichnen. Bei dem Durchfliegen von dx „verliert“ man also $w \cdot N$ Teilchen und hat so (wenn N_0 die anfängliche Teilchezahl im Teilchenstrahl war) $N_0 - N_W$ Teilchen übrig; damit ist $N_W = -\Delta N$. Bei infinitesimaler Betrachtung führt das zu

$$-dN = N \cdot w = N \cdot \sigma n_T dx$$

und die Lösung dieser DGL (durch N teilen und aufintegrieren) ist

$$N = N(x) = N_0 e^{-\sigma n_T x}$$

Wir betrachten nun, wann der Strahl auf $\frac{1}{e}$ seiner ursprünglichen Intensität abgesunken ist⁵, also wenn $N(x) = \frac{1}{e} N_0$. Ein einfacher Koeffizientenvergleich liefert dann

$$\sigma n_T x = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{1}{n_T \sigma}$$

und danach definiert man die *mittlere Freie Weglänge* $x \equiv \lambda$, die diese Gleichung löst.

8.1.5 Exkurs: BOLTZMANN-Faktor und Thermische Energie

In Gl. (8.8) haben wir eine BOLTZMANN-Verteilung gesehen, die in ihrem Argument von potentieller Energie (mg bei der Schwerkraft) und der Thermischen Energie (T) abhängt.

⁵ Diese Betrachtung ist üblich: Bei radioaktivem Zerfall betrachtet man die Zeit τ , zu der $\frac{1}{e}$ des ursprünglichen Materials übrig ist, anstatt der *Halbwertszeit* $T_{1/2}$.

Über diesen Zusammenhang können wir eine Verteilung $n(E)$ definieren, wobei n der Besetzungswahrscheinlichkeit für das Energieniveau E entspricht⁶:

$$n(E) = n(E=0) \cdot \exp\left(-\frac{E}{K_B \cdot T}\right) \quad (8.21)$$

Wichtig! 68 Die Boltzmann-Verteilung gilt immer nur im Gleichgewicht!

◇

Energiezustände im Atom: Hier gibt n die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein bestimmter Zustand besetzt ist. für zwei Zustände E_1 und E_2 gilt:

$$n(E_i) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_i}{K_B \cdot T}\right) \Rightarrow \frac{n(E_1)}{n(E_2)} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{K_B \cdot T}\right)$$

Nehmen wir nun an, $\Delta E > 0$ (also E_2 höherenergetisch⁷), so ist $\frac{\Delta E}{K_B \cdot T} \geq 0$ und damit $\exp\left(-\frac{\Delta E}{K_B \cdot T}\right) < 1$. D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass Zustand E_2 besetzt ist, ist niedriger, da Energetisch ungünstiger. ◇

8.2 Entropie des idealen Gases

Wir hatten in Gl. (7.35) schon eine Definition der Entropie:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Hier wollen wir aber noch eine zweite kennenlernen und die Entropie zunächst naiv als *Maß der Unordnung* eines Systems betrachten.

Dazu definieren wir Ω als *Anzahl der möglichen Zustände*, die ein System einnehmen kann.⁸ Dann gilt für die **Entropie** nämlich:

$$S = K_B \cdot \ln \Omega \quad (8.22)$$

Da die Entropie eines Systems stets bestrebt ist, zu wachsen (s. Kap. 7.7) könnte man nun annehmen, dass wenn die Entropie steigt und folglich auch Ω steigen muss, das System zwangsläufig unordentlicher wird; dem ist aber nicht so.

Wichtig! 69 Die Entropieerhöhung eines Systems kann auch Ordnung erzeugen!

Definition 8.4 (Entropische Kräfte) Kräfte, die nur auftreten, damit die Entropie maximiert wird.

⁶in E stecken verschiedene Energieformen – die thermische und dann noch potentielle oder kinetische oder ...

⁷da $\Delta E = E_2 - E_1$.

⁸Etwas genauer: Ω gibt ein *Volumen* im *Phasenraum* an. Der Phasenraum ist ein Vektorraum, der durch die Veränderlichen eines Systems aufgespannt wird, welche das System vollständig charakterisieren. Ein Punkt in diesem Raum entspricht dann einer Kombination dieser Veränderlichen: Einem *Zustand*. Bspw. verwenden wir in Kap. 7.6 auch eine Art Phasenraum; wenn wir im \mathbb{R}^3 (s. Abb. 7.1) eine Fläche darstellen, entspricht diese Fläche einer Einschränkung des dreidimensionalen Phasenraums auf zwei Dimensionen.

Je größer das Volumen dieses Raums ist, desto mehr Punkte enthält er und folglich ist so die Anzahl der möglichen Kombinationen größer.

8.2.1 Kristallisation von harten Kugeln

Harte Kugeln haben ein rein repulsives Potential, welches nur auf nächste Nähe (eig. bei Kontakt) wirkt:

$$V(d) \sim \delta(d) \quad (8.23)$$

Wobei δ die DIRAC'sche Deltafunktion ist und d der Abstand der beiden Kugeloberflächen voneinander. Die Kugeln stoßen sich also genau dann ab, wenn sie sich berühren.

Die Energie eines Systems solcher Teilchen ist unabhängig von der Lage der Teilchen zueinander, weil die Kugeln ja keine Kräfte aufeinander ausüben. Da somit die Innere Energie $U = \text{const}$ ist, können wir sie *definieren* als

$$U = 0$$

und mit Gl. (7.38) können wir folgern:

$$\mathcal{F} = -T \cdot S \quad (8.24)$$

ein solches System bezeichnen wir als *rein entropisch*:

Definition 8.5 (Rein entropisches System) *Das Verhalten eines Systems wird alleine durch dessen Entropie bestimmt.*

Da wir eine *spontane* Kristallisation unserer Kugeln wollen, muss nach Kap. 7.7 gelten:

$$dS > 0$$

D.h. für die Freie Energie \mathcal{F} in flüssigem bzw. kristallinem Zustand muss gelten:

$$\mathcal{F}_{\text{fl}} > \mathcal{F}_{\text{kr}}$$

In einem normalen atomaren System sieht das Potential der Wechselwirkungskräfte aus wie in Abb. 8.1. Bei diesem ist die Kraft bei großen Abständen noch attraktiv (im Schaubild bis dieses seinen Tiefpunkt erreicht). Hier wirken die VAN-DER-WAALS-Wechselwirkungen. Danach wird die Kraft repulsiv, weil sich die gleich geladenen Atome abstoßen. Die Kristallation eines Stoffes kommt dann daher, dass sich die Teilchen so nahe kommen, dass sie den Tiefpunkt des Potentials erreicht haben und hier in einer stationären – stabilen – Entfernung voneinander liegen und sich so nicht weg bewegen lassen. Der Kristall ist entstanden und stabil.

Nun ist es im Falle der Harten Kugeln aber so, dass wir kein solches Potential haben! Wir können bei den Harten Kugeln die Kristallisation nicht mit einem solchen Energieminimum erklären, weil wir keine attraktiven Wechselwirkungen vorweisen können.

Stattdessen untersuchen wir zwei verschiedene Arten der Entropie:

1. Konfigurationsentropie S_K

Hängt ab von der Anzahl verschiedener Möglichkeiten, wie man die Harten Kugeln in einem gegebenen Volumen anordnen kann. Die Zahl der Möglichkeiten, wie man Kugeln zu einem Kristall anordnen kann ist logischerweise *kleiner*, als eine Flüssigkeit zu bilden:

$$S_{K,\text{fl}} \gg S_{K,\text{kr}}$$

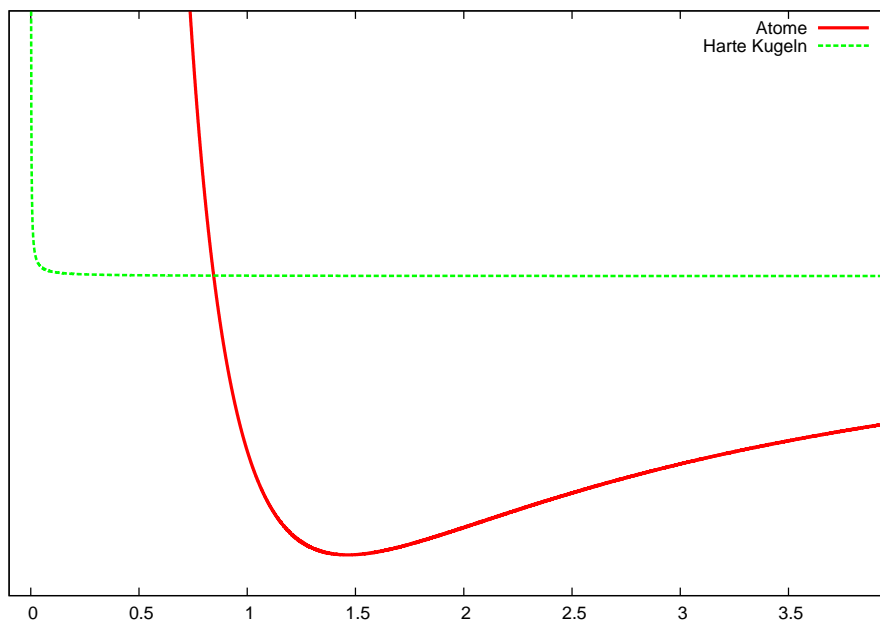


Abbildung 8.1: Potential zwischen den Atomen bei einem natürlichen Kristall und bei Harten Kugeln; links im Schaubild sind sich die Atome bzw. Kugeln näher.

2. Entropie des freien Volumens S_V

Bei gegebener Konfiguration kann sich jedes Teilchen ein wenig um seine Ruhelage bewegen. Je nach dem, wie viel Volumen das Teilchen um seine Ruhelage herum hat, kann es sich weiter bewegen.

Wir untersuchen nun S_V für verschiedene Kugelpackungen und finden heraus, dass wenn man die Kugeln kristallförmig anordnet, die einzelnen Teilchen mehr Platz um sich haben: Bei einer ungeordneten Kugelpackung kann man maximal 64% des Volumens mit Kugeln ausfüllen – bei geordneten Kugeln sind es bis zu 74%.⁹

Da also im Kristall mehr Kugeln in das selbe Volumen gehen, brauchen gleich viele Kugeln im Kristall weniger Platz und so kann dieser Unterschied an Platz als Bewegungsfreiraum erhalten, der S_V erhöht.

Da

$$S = S_K + S_V$$

gilt, ist die Entropie im Geordneten System größer – und nach Gl. (8.24) ist hier die Freie Energie *kleiner*.

Wichtig! 70 Die Harten Kugeln erreichen ihr Energieminimum also, wenn sie kristallisieren.

⁹ Ab einer Packungsdichte von 49% trägt S_V schon zu einer Erhöhung von S bei und sorgt so dafür, dass sich das System spontan anordnet.

8.2.2 Quantitative Beschreibung entropischer Kräfte

Wir betrachten ein System mit einer großen Harten Kugel (Rad. R) und um sie herum N kleine Kugeln (Rad. r), die in einem Gefäß mit harten Wänden sind. Die kleinen Kugeln wechselwirken untereinander und mit der Wand nicht – bzw. nur durch Stöße.

(s. (8.23)).

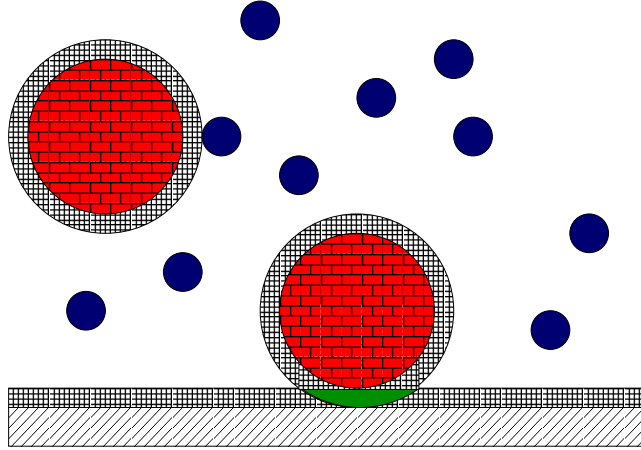


Abbildung 8.2: Skizze der großen und kleinen Kugeln mit „verbotener Zone“ und deren Überlappung

Wir ziehen um die große Kugel einen Kreis mit Abstand r – in diesem Bereich darf sich kein Mittelpunkt einer kleinen Kugel aufhalten (weil sie hier abgestoßen würde) – und ebenso um die Wand: Die „verbotene Zone“. Siehe Abb. 8.2 für eine Skizze.

Um hier die Freie Energie in dem Rein Entropischen System nach (8.24) zu berechnen, benötigen wir nur S aus (8.22) wobei wir $\Omega = V$ verwenden wollen und V das Volumen angibt, welches die Mittelpunkte der kleinen Kugeln erreichen können.¹⁰ Für das System gilt:

$$\mathcal{F} = -T \cdot S = -N \cdot K_B \cdot T \cdot \ln V \quad (8.25)$$

Wenn nun die große Kugel nahe an den Rand kommt, überschneiden sich die „verbotenen Zonen“ von Kugel und Wand und so können die kleinen Kugeln effektiv mehr Raum einnehmen, weil ja ein Teil des Volumens quasi doppelt verboten ist¹¹ und dann entsprechend dieser Teil an einer anderen Stelle *nicht* verboten ist.

Unser erreichbares Volumen V vergrößert sich also um ΔV wobei

$$\Delta V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r - h)^2 \cdot (3R + r + h) \quad (8.26)$$

¹⁰ Wir ignorieren die Entropie, die uns die große Kugel mit einbringt, weil es sich ja nur um *eine* große handelt, wir aber N kleine (mit $N \gg 1$) haben.

¹¹ wobei es für die kleinen Kugeln natürlich keinen Unterschied macht, ob ein Bereich doppelt oder nur einfach verboten ist

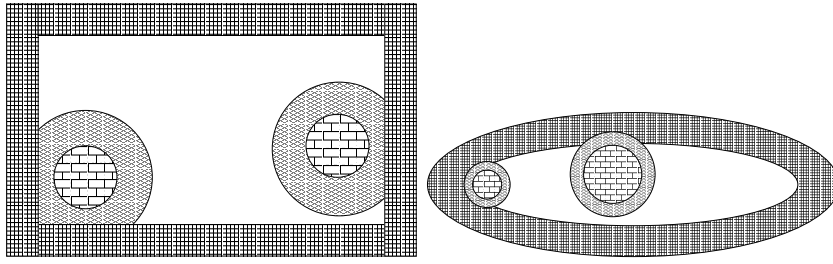


Abbildung 8.3: Harte Kugeln in verschieden geformten Gefäßen

in Abhängigkeit vom Abstand h zwischen Kugel(oberfläche) und Wand gegeben ist.¹²

In Abhängigkeit von h erhalten wir nun für die Änderung der Freien Energie:

$$\Delta\mathcal{F}(h) = -N \cdot K_B \cdot T \cdot \ln \frac{V + \Delta V}{V} \quad (8.27)$$

Damit also \mathcal{F} minimal wird, muss $\Delta\mathcal{F}$ maximal negativ werden und das erreicht man durch ein möglichst großes ΔV und damit ein möglichst kleines h . Wenn also rein energetisch h sich minimieren soll, bedeutet das, dass die Kugel sich am Rand aufhält.

Wichtig! 71 *Es resultiert also effektiv eine attraktive Kraft in Richtung Wand, obwohl im System nur repulsive Kräfte herrschen.*

Interessant ist auch, dass diese Kraft eine *geordnete* Kraft ist, obwohl die Teilchenstöße allesamt ungeordnet sind.

8.2.3 Eigenschaften Entropischer Kräfte

Wir haben gesehen, dass für die entropischen Kräfte in Kap. 8.2.1 gilt:

- attraktiv (Achtung: In Realität gibt es durchaus auch repulsive!)
- Reichweite: $2r$
- Stärke: $F \sim \frac{N}{V}$

Je nach Form von großen Kugeln und dem Volumen, welches sie insgesamt einnehmen können, wird die spontane Kristallisation an verschiedenen Punkten beginnen (bzw. stattfinden): Die Kugeln werden sich stets so an der Wand anlagern, dass der Überlapp (also die doppelt verbotene Zone) maximal wird. Siehe dazu Abb. 8.3.

Es ist auch möglich, statt nur einer großen, mehrere große Kugeln zu verwenden. Auch hier sorgt die Entropie nach dem selben Schema wieder dafür, dass zwischen den Kugeln eine Anziehung entsteht.

¹²Diese Formel erhält man, wenn man das Volumen der Kugelkappe berechnet, die doppelt verboten ist; Siehe BRONSTEIN⁷ Kap. 3.3.4

Kapitel 9

Elektrizitätslehre

In der **Elektrostatik** untersuchen wir *ruhende* Ladungen, in der **Elektrodynamik** *bewegte* Ladungen.

9.1 Ladung und E -Feld

9.1.1 Elektrische Ladung und COULOMB-Kraft

Wichtig! 72 *Man kann Ladungen weder erzeugen noch vernichten; nur trennen.*

Eine Ladung Q tritt stets nur als Vielfaches der Elementarladung $e_o \approx 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ auf.

Diese Ergebnis erhält man bspw. aus dem MILIKAN-Versuch: Öltröpfchen mit Radius r werden zwischen zwei Kondensatorplatten bei einem bestimmten E -Feld und damit mit bestimmter Spannung U_0 in Schwebe gehalten und dann fallengelassen.

Durch die STOKES-Reibung (s. Kap. 5.6.2.3) nähert sich das Öltröpfchen einer Geschwindigkeit v_0 an, dadurch kann man die Masse m bestimmen ($m = \frac{6\pi\eta r v_0}{g}$).

Über m und U_0 kann man schließlich die Ladung q berechnen ($q = \frac{mg}{E} = \frac{6\pi\eta r v_0}{E_0}$).

Wichtig! 73 *Zwischen zwei Ladungen Q_i im an den Orten \vec{r}_i wirkt die Coulomb-Kraft*

$$\vec{F}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \quad (9.1)$$

Dabei ist ϵ_0 die **Influenzkonstante** mit $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}}$

Rechnet man nicht im SI sondern im cgs-System, so wird der Faktor $\frac{1}{4\pi\epsilon}$ durch 1 ersetzt. Im cgs-System verwendet man als Einheit der Ladung die Einheit ESL mit

$$1 \text{ ESL} = 1 \text{ cm} \cdot \sqrt{\text{dyn}} \quad (9.2)$$

wobei dyn die Einheit einer Kraft ist.

Das praktische an Formel (9.1) ist, dass sie Anziehung und Abstoßung abdeckt: Bei zwei gleichnamigen Ladungen ist das letzte Produkt positiv, bei zwei verschiedennamigen negativ. Betrachten wir nun zwei gleichnamige Ladungen, so sollten diese sich abstoßen – und wirklich zeigt die Kraft \vec{F}_{12} , die *auf* das erste Teilchen wirkt, *weg* vom zweiten Teilchen. Ist genau eine der beiden Ladungen negativ, so dreht sich die Richtung um und die Kraft auf das erste Teilchen zeigt zum zweiten Teilchen.

9.1.2 E-Feld

Definition 9.1 (E-Feld) *Der Raum um eine Ladung Q , in dem eine (Probe)Ladung q eine COULOMB-Kraft erfährt, ist vom **Elektrischen Feld** durchsetzt.*

*Eine elektrisch positive Probeladung bewegt sich im E-Feld auf **Feldlinien**.*

Dabei ist das E-Feld ein *Vektorfeld* $\vec{E}(\vec{r})$. Dieser Vektor zeigt in die Richtung, in welche die Kraft auf eine positive Probeladung wirkt. Quantitativ gilt:

$$\vec{E} := \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{E} \cdot q} \quad (9.3)$$

So ist das E-Feld eines mit Q geladenen Punkts (dabei ist \vec{r} der Verbindungsvektor der Ladungsmittelpunkte):

$$\vec{E} = \frac{1}{q} \cdot \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \cdot \|\vec{r}\|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot \|\vec{r}\|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \vec{E}(\vec{r}) \quad (9.4)$$

Möchte man das E-Feld bestimmen, welches die N Ladungen Q_i erzeugen, so summiert man über die einzelnen E-Felder, die jede Ladung für sich erzeugt. Dazu verwenden wir Gl. (9.4), weil wir jede Ladung als Punkt verwenden.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 \cdot \|\vec{r}_i\|^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|} \right) \quad (9.5)$$

dabei ist \vec{r}_i der Verbindungsvektor zwischen \vec{r} und $\vec{r}(Q_i)$ – also der Position der i -ten Ladung.

Wenn wir nun zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung übergehen, müssen wir $N \rightarrow \infty$ laufen lassen und verwenden statt den einzelnen Ladungen Q_i die **Ladungsdichte** $\varrho(\vec{r})$ und erhalten:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\varrho(\vec{r}_i)}{\|\vec{r}_i\|^2} \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|} dV} \quad (9.6)$$

mit den Verbindungsvektoren \vec{r}_i zwischen \vec{r} und dem Volumenelement dV .

Anstelle der Dichte ϱ die sich auf ein Volumen bezieht, verwendet man auch die **Flächenladungsdichte** $\sigma = \sigma(\vec{r})$, für die entsprechend gilt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(\vec{r}_i)}{\|\vec{r}_i\|^2} \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|} dA \quad (9.7)$$

Formal kann man sich dies herleiten, indem man eine *Delta-Distribution* einführt; diese steht bei ϱ . Damit formal noch gilt

$$Q = \int_V \varrho \, dV$$

verwendet man als Ladungsdichte σ , die Definiert ist über:

$$Q = \int_V \sigma \delta(u) \, dV = \int_A \sigma \, dA$$

9.1.3 Superposition

Wir behandeln das E-Feld hier als *lineare* Theorie, d.h. wir können die Rechenregeln der Linearen Algebra verwenden.

Praktisch heißt das für uns eigentlich, dass wir E-Felder stets als Überlagerung elementarer E-Felder sehen können: Die Felder durchdringen sich ohne sich gegenseitig zu beeinflussen, was wir aber *beobachten* ist die Vektoraddition der E-Felder.

9.1.4 Elektrisches Potential

Das Potential eines Punktes \vec{r} im E-Feld ist definiert als Quotient aus Arbeit, die benötigt wird, um ein Teilchen der Ladung q von der Stelle wegzubewegen, und der Ladung q selbst. Da das E-Feld theoretisch bis ins Unendliche reicht, muss man das Teilchen auch wirklich bis ins Unendliche bewegen.

Da die Arbeit (über der Kurve γ) definiert ist als

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

gilt entsprechend wegen $\vec{F} = \vec{E} \cdot q$:

$$\frac{W}{q} = \frac{1}{q} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{q} \int_{\gamma} q \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Definition 9.2 (Elektrisches Potential φ) *des von Q erzeugten E-Felds mit Q im Zentrum:*

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}(\vec{s}) \, d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\|\vec{r}\|} \quad (9.8)$$

(nach (9.4)) mit der Einheit $[\varphi] = \frac{J}{C} = V$ (Volt)

Das Potential hängt also nur von der *Entfernung* zu Q ab. Dadurch entstehen *Äquipotentialflächen* als Kugelflächen mit Q im Zentrum.

Je näher man mit q an Q ist, desto größer ist φ – also wird q vom Ursprung Q stark abgestoßen: Es wird viel Energie frei, wenn q sich wegbewegt.

Wir haben gleichzeitig ein Potential φ erzeugt, welches wir in alle Raumrichtungen partiell ableiten können – also den *Gradienten* bilden können. Dabei gilt:

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\|\vec{r}\|} \quad (9.9)$$

Da $\|\vec{r}\| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ können wir schreiben:

$$\frac{1}{\|\vec{r}\|} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Und das können wir ableiten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \frac{1}{\|\vec{r}\|} &= \vec{\nabla} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\vec{r} \cdot \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \end{aligned}$$

und so gilt für Gl. (9.9):

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\vec{r} \cdot \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \right) \quad (9.10)$$

Und das ist bis auf das „−“ genau die Formel für \vec{E} die wir in (9.4) für das Potential einer einzelnen Ladung gefunden hatten.

Wir haben es also geschafft, das Vektorfeld \vec{E} durch ein Potential φ auszudrücken, sodass

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi} \quad (9.11)$$

gilt.

Daraus folgt nun, weil man \vec{E} als (negativen) Gradient eines Skalarpotentials φ darstellen kann:

Wichtig! 74 \vec{E} ist wirbelfrei, also

$$\boxed{\oint_{\gamma} \vec{E} \, d\vec{s} = 0} \quad (9.12)$$

Alternativ kann man auch sagen, dass in \vec{E} die *Rotation* verschwindet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (9.13)$$

Rein praktisch bedeutet dies:

Wichtig! 75 Das E -Feld ist konservativ.

Es ist also egal, welchen Weg man zwischen den Punkte A und B nimmt, man wird stets die selbe Energie dafür brauchen.

Über das Potential definieren wir nun:

Definition 9.3 (Spannung U) Die Elektrische Spannung zwischen zwei Punkten ist die Potentialdifferenz der Punkte:

$$U_{12} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} \quad (9.14)$$

Dadurch ist auch klar, dass eine Ladung q die Arbeit W braucht, um die Spannung U zu überwinden:

$$W = U \cdot q \quad (9.15)$$

9.1.5 E-Feld eines Dipols, Dipolmoment

Wir betrachten einen Dipol, der auf der z -Achse liegt mit der (positiven) Ladung Q^+ in Höhe $z = \frac{d}{2}$ und der (negativen) Ladung Q^- in Höhe $z = -\frac{d}{2}$.

Das Potential dieses Dipols ist also eine Überlagerung zweier Potentiale, deren Ursprünge vom Koordinatensystemursprung verschoben liegen. Wir addieren diese Potentiale einfach:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} + \frac{-Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \frac{d}{2})^2}} \right) \quad (9.16)$$

Nun wollen wir aber das *Fernfeld* betrachten – also $r \gg d$. Dazu betrachten wir zuerst einmal die Nenner:

$$\left(x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(x^2 + y^2 + z^2 - dz + \frac{d^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

weil d gegenüber r so klein ist, könne wir $d^2 \approx 0$ setzen¹ und erhalten

$$(r^2 - dz)^{-\frac{1}{2}}$$

Wenn wir die TAYLOREntwicklung nach d machen, erhalten wir²

$$\frac{1}{r} + \frac{z d}{2 r^3} + \frac{3 z^2 d^2}{8 r^5} + \frac{5 z^3 d^3}{16 r^7} + \dots$$

und vernachlässigen wir alle Terme, in denen d quadratisch ist. Wenn wir dies in Gl. (9.16) verwenden, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\left(\frac{Q}{r} + \frac{z Q d}{2 r^3} \right) - \left(\frac{Q}{r} - \frac{z Q d}{2 r^3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z Q d}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (9.17)$$

Nun definieren wir:

¹Formal muss man dazu so vorgehen:

$$\left(z - \frac{d}{2} \right)^2 = z^2 \left(1 - \frac{d}{z} + \frac{d^2}{4 z^2} \right)$$

hier haben wir explizit den Term $\left(\frac{d}{z} \right)^2$ vorliegen und *diesen* dürfen wir vernachlässigen. Hier untersucht man einen *Bruch*, d.h. wir setzen die Größen z und d direkt in den Vergleich zueinander und können hier $z \gg d$ verwenden.

²Wir hätten auch gleich die TAYLOR-Entwicklung machen können und wären auf das selbe Ergebnis gekommen!

Definition 9.4 (Dipolmoment \vec{p}) zeigt von der positiven Ladung Q^+ zur negativen Ladung Q^- , die den Abstand d haben: $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$

³ Wenn wir unsere Punkte \vec{r} , in denen wir das Fernfeld bestimmen wollen, um z über die x - y -Ebene legen, können wir z schreiben als

$$z = \|\vec{r}\| \cdot \cos \theta$$

wobei θ der Winkel zwischen \vec{r} und der z -Achse – also auch \vec{p} – ist. Da weiter

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = p \cdot r \cdot \cos \theta = p \cdot z = Q \cdot d \cdot z$$

gilt, folgt für das Fernfeld eines Dipols mit (9.17):

$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \quad (9.18)$$

D.h. wir haben im Gegensatz zum Coulombpotential (mit $\varphi \sim \frac{1}{r}$) hier $\varphi \sim \frac{1}{r^2}$. Das liegt einfach daran, dass in größerer Entfernungen die Felder der negativen und positiven Ladung sich immer stärker überlagern und gegenseitig auslöschen.

Wenn wir uns in der x - y -Ebene selbst bewegen, ist $\vec{p} \perp \vec{r}$ und damit $\varphi = 0$, weil sich hier die Potentiale perfekt aufheben.

9.1.6 Elektrischer Fluss

Wir betrachten Feldlinien, die durch eine Fläche A fließen. Von der Fläche A betrachten wir nur ein Flächenelement dA , welches wir mit dem Normalenvektor der Fläche multiplizieren; so erhalten wir einen Vektor $d\vec{A}$, dessen Betrag die Größe des Flächenelements dA ist und der senkrecht auf der Fläche steht:

$$d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$$

So können wir definieren:

Definition 9.5 (Elektrischer Fluss Φ_E) Die Zahl der Feldlinien, die durch A gehen ist Φ_E :

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (9.19)$$

Manchmal auch mit Ψ bezeichnet. Mit der Einheit $[\Phi_E] = \text{C}$.

Für eine Punktladung ergibt sich mit Gl. (9.4):

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (9.20)$$

³ Wenn man statt der Technischen Stromrichtung von \oplus nach \ominus die physikalische verwendet, zeigt das Dipolmoment auch in die entgegengesetzte Richtung.

9.1.7 Satz von GAUSS

Satz von GAUSS – allgemein:

Der gesamte Fluss des Vektorfelds \vec{f} durch die Randflächen ∂V des Volumens V ist gleich dem Integral der Stärke der Quellen („Divergenz“: $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$) im Inneren des Volumens:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \cdot dV = \oint_{\partial V} \vec{f} \cdot d\vec{A} \quad (9.21)$$

Dies ist ein Satz aus der Vektoranalysis. Für uns existiert noch ein weiterer, *physikalischer* Satz (der auch „von Gauss“ genannt wird):

Wichtig! 76 (Satz von GAUSS) *Der Fluss des Elektrischen Feldes aus einer beliebig geformten Oberfläche, welche die Ladung Q umschließt ist stets*

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (9.22)$$

Wir können nun damit und mit der Ladungsdichte $\varrho = \frac{Q}{V}$ das Ergebnis von Gl. (9.20) schreiben als:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon_0} dV \quad (9.23)$$

und damit folgt

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}} \quad (9.24)$$

Da wir mit $\vec{\nabla}$ Quellen und Senken eines Vektorfeldes bestimmen, folgt so:

Wichtig! 77 *Die Ladungen sind die Quellen des Elektrischen Feldes*

9.1.8 Satz von STOKES

Allgemein lautet der **Satz von STOKES**:

Der Fluss der Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ eines Vektorfelds \vec{f} durch eine Fläche A ist gleich dem geschlossenen Linienintegral über den Rand $\gamma = \partial A$ der Fläche.

Und in Zeichen:

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (9.25)$$

Wenn wir nun diesen Satz auf unser Vektorfeld \vec{E} anwenden, so können wir ein geschlossenes Kurvenintegral \oint_{γ} umschreiben.

Wenn wir nun die Energie berechnen wollen, die ein Teilchen aufbringen muss, um eine geschlossene Kurve im E-Feld zu durchlaufen, berechnen wir (mit dem Satz von STOKES):

$$\Delta W = \oint_{\gamma} q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \cdot \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \cdot \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} \quad (9.26)$$

Diese Integrale müssen verschwinden, weil auf der linken Seite $q \cdot (\varphi(\vec{r}_0) - \varphi(\vec{r}_0)) = 0$ steht: So haben wir φ in Kap. 9.1.4 definiert.

Über den Koeffizientenvergleich

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \Delta\varphi = 0$$

erhalten wir so

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Wichtig! 78 *Damit folgt wieder, dass das E-Feld rotationsfrei ist, also dass keine Wirbel auftreten.*

Auf diese Weise kann man bequem mit dem Satz von STOKES zeigen, dass die Rotation bei einem Gradientenfeld (also ein Vektorfeld, welches durch den Gradienten von einem Skalarfeld erzeugt wurde) verschwindet.

9.2 Anwendungen der Elektrostatik

Wir werden für die Berechnung als „**Handwerkszeug**“ verwenden:

Aus dem Satz von GAUSS:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho(\vec{r}) \cdot dV \quad (9.27)$$

wobei A die Oberfläche des Volumens V ist: $A = \partial V$.

Aus dem Satz von STOKES:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (9.28)$$

Wobei γ eine beliebige geschlossene Kurve ist.

9.2.1 E-Felder verschiedener Objekte

9.2.1.1 Unendlich ausgedehnte, ebene Platte

Die Ladungen verteilen sich auf der Plattenoberfläche und bilden hier ein E-Feld. Wir können nun mit dem Superpositionsprinzip annehmen, dass die Feldlinien entfernt vom Rand senkrecht auf den Platten stehen und sich um die Kanten das etwas deformierte Feld einer Punktladung bildet; siehe Abb. 9.1.

Wir integrieren nun über ein kastenförmiges Volumen V , welches parallel der Platten die Fläche A_0 hat und welches im homogenen Bereich des E-Felds liegt, und einen Teil der Platte zwischen sich einschließt.

Die $d\vec{A}$ aus Gl. (9.27) stehen senkrecht auf den Kastenoberflächen und sind somit nur auf den Seiten parallel zur geladenen Platte (die mit Fläche A_0) parallel zu \vec{E} – an den vier anderen Seitenflächen ist $d\vec{A} \perp \vec{E}$ und damit $\vec{E} \cdot d\vec{A} = \langle \vec{E} | d\vec{A} \rangle = 0$. An den Flächen parallel der Platte ist $\vec{E} \cdot d\vec{A} = \langle \vec{E} | d\vec{A} \rangle = E \cdot A$. Es muss also gelten:⁴

$$\Phi_E^{(\text{Platte})} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2 \cdot A_0 \cdot E \stackrel{\text{GAUSS}}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (9.29)$$

⁴Die 2 kommt daher, dass man vorne und hinten jeweils eine Fläche A_0 hat.

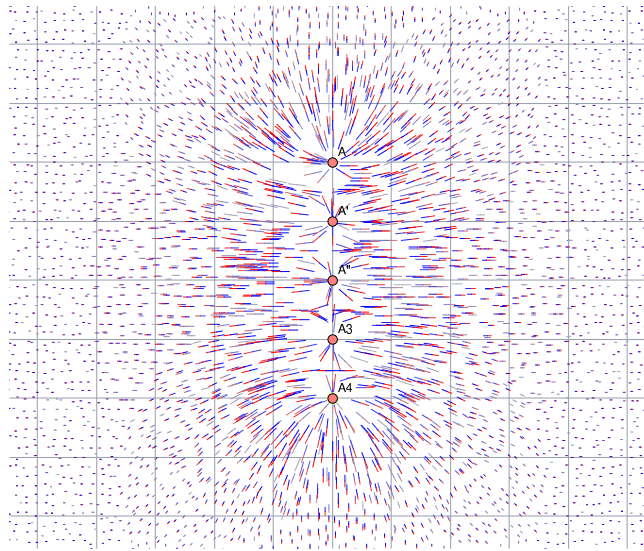


Abbildung 9.1: E-Feld einer Platte

oder umgeformt:

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} =: \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = E_{\text{Platte}}} \quad (9.30)$$

Dabei definieren wir:

Definition 9.6 (Flächenladungsdichte σ) Die Flächenladungsdichte σ ist Quotient aus Ladung Q und Fläche A , auf die Q verteilt ist:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (9.31)$$

mit der Einheit $[\sigma] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$.

Man sagt auch, σ ist „Ladung pro Fläche“.

Wichtig! 79 E ist bei der unendlich großen Platte unabhängig vom Abstand zur Platte.

9.2.1.2 Plattenkondensator

Wir betrachten zwei unendlich ausgedehnte, parallele Platten, die gegenpolig aber gleich stark geladen sind. Nach dem Superpositionsprinzip hebt sich das E-Feld aus Symmetriegründen außerhalb des Kondensators weg (wir verwenden dazu Wichtig 79: Das E-Feld der beiden Platten ist von der Entfernung unabhängig) und verstärkt sich in seinem Inneren noch.

Im Inneren liegen also doppelt so viele Feldlinien vor, als bei einer einzelnen Platte, weil die Feldlinien von beiden Platten sich konstruktiv überlagern, weil beide Felder in die gleiche Richtung zeigen (weg von der positiv geladenen Platte):

$$\Phi_E^{(\text{Kondensator})} = 2 \cdot \Phi_E^{(\text{Platte})} \quad (9.32)$$

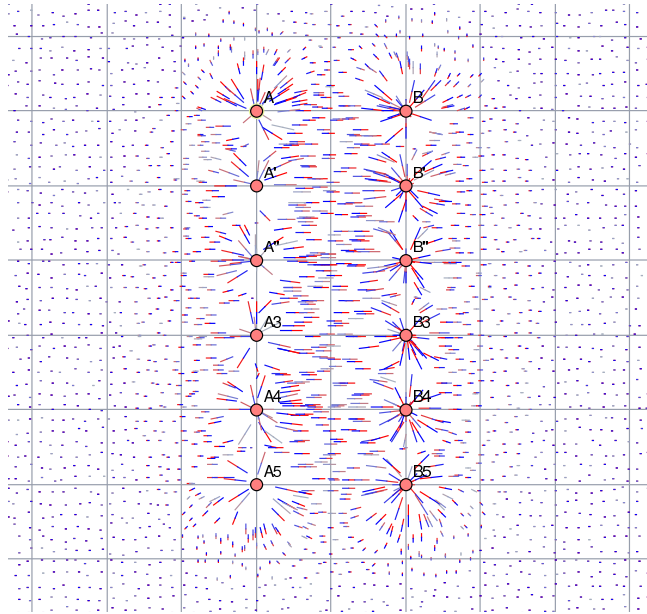


Abbildung 9.2: (reales) E -Feld eines Plattenkondensators; für uns ist dieses Feld im Kondensator (also zwischen den Platten) in guter Näherung homogen und verschwindet außerhalb.

Damit gilt also:

$$E_{\text{Kondensator}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (9.33)$$

Mit (9.14) und weil zwischen den Platten das Feld homogen ist (und sich dadurch eine Probeladung senkrecht zu den Platten bewegen würde, also parallel zu \vec{E} und damit $\langle \vec{E} | d\vec{s} \rangle = E \cdot s$) gilt weiter (mit $s = d$ als Plattenabstand):

$$U = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d \Rightarrow U \sim Q \quad (9.34)$$

Für die Proportionalität definieren wir:

Definition 9.7 (Kapazität C) Das „Fassungsvermögen für elektrische Ladungen“ ist

$$C = \frac{Q}{U} \quad (9.35)$$

mit der Einheit $[C] = \frac{C}{V} = F$ (Farad).

Für C gilt beim Plattenkondensator:

$$C_{\text{Plattenkondensator}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \quad (9.36)$$

9.2.1.3 Exkurs: Schaltung von Plattenkondensatoren

Wir können zwei **parallel** geschaltete Kondensatoren C_1 und C_2 als einen großen interpretieren; die Ladungen der einzelnen Kondensatoren addieren sich:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

und die Spannung bleibt gleich. Also gilt mit (9.35)

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = \boxed{C_1 + C_2 = C_{\text{parallel}}} \quad (9.37)$$

Bei zwei **in Reihe** geschalteten („seriellen“) Kondensatoren ist die Ladung auf den „inneren“ Platten gleich mit verschiedenen Vorzeichen, also verschwindet die Summe der Ladung auf den Inneren Platten und die äußeren Platten tragen so effektiv die Ladung $Q = Q_1 = Q_2$.

Dagegen teilt sich die Spannung U in zwei Teile auf:

$$U = U_1 + U_2$$

Und so gilt wieder nach (9.35):

$$C = \frac{Q}{U_1 + U_2} = \left(\frac{U_1 + U_2}{Q} \right)^{-1} = \boxed{(C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1} = C_{\text{reihe}}} \quad (9.38)$$

9.2.1.4 sehr langer, geladener Draht

Wir definieren die

Definition 9.8 (Lineare Ladungsdichte λ) Als Quotient „Ladung pro Länge“ eines mit Q geladenen Leiters der Länge L

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad (9.39)$$

mit der Einheit $[\lambda] = \frac{\text{C}}{\text{m}}$.

Nach dem Superpositionsprinzip stellen wir uns das E-Feld dieses Leiters also radialsymmetrisch zum Leiter vor: Die E-Feldlinien stehen stets senkrecht auf der Oberfläche, da der Leiter praktisch unendlich ausgedehnt (sehr lang!) ist; nur an den Endpunkten erwarten wir wieder das veränderte Feld einer Punktladung.

Wir integrieren nun über ein Zylinderförmiges Volumen der Länge L und mit Durchmesser $2r$ (größer als Leiter), welches den Leiter symmetrisch umschließt. Die Flächennormale $d\vec{A}$ zeigt hier stets Parallel zu \vec{E} und damit ist wieder $\langle \vec{E} | d\vec{A} \rangle = E \cdot dA$. Die Fläche A ist also $2\pi r L$.

An den Zylinderenden ist $\vec{E} \perp d\vec{A}$ und verschwindet hier das Skalarprodukt. Wir erhalten also nach (9.27):

$$\Phi_E^{(\text{Draht})} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2\pi r L \stackrel{\text{GAUSS}}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0} \quad (9.40)$$

und damit:

$$\boxed{E_{\text{Draht}} = \frac{\lambda}{2\pi r \cdot \varepsilon_0}} \quad (9.41)$$

9.2.1.5 Koaxialkabel

Ein Leiter (Außendurchmesser $2R_1$) wird durch eine leitende „Hülle“ umschlossen (Innendurchmesser $2R_2$). Zwischen ihnen ist Platz. Die Ladungsmenge im inneren Leiter ist von der Menge her gleich und im Vorzeichen verschieden zur Ladung auf der Hülle.

Wir umschließen den Leiter wieder mit einem zylinderförmigen Volumen der Länge L und dem Durchmesser $2r$.

Die E-Feldlinien gehen wieder senkrecht durch die Zylinderwand und es gilt damit $\langle \vec{E} | d\vec{A} \rangle = E \cdot dA$, wobei $A = 2\pi r \cdot L$ und damit für konstantes L : $dA = d(2\pi r L) = 2\pi L dr$

Es gilt also (mit konstantem λ):

$$\Phi_E^{(\text{Koax})} = \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{A} = E \cdot 2\pi L \cdot r \stackrel{\text{GAUSS}}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0} \quad (9.42)$$

und damit:

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}} \quad \text{mit } R_1 \leq r \leq R_2 \quad (9.43)$$

Wenn $r < R_1$, so ist $E = 0$, weil die Ladungen sich auf der Außenseite des Leiters verteilen. Nach dem Satz von Gauss verschwindet also die eingeschlossene Ladung und damit auch das E-Feld. Für $r > R_2$ ist es ebenso: Die Summe der Ladungen im eingeschlossenen Volumen verschwindet und damit auch das E-Feld.

Für den Raum dazwischen existiert aber offensichtlich ein E-Feld, welches nach außen hin abnimmt.

Wir können die Spannung für den Abstand r vom inneren Leiter nach Gl. (9.14) bekommen:⁵

$$U(r) = \int_{R_1}^r \vec{E} d\vec{s} = \int_{R_1}^r E ds = \int_{R_1}^r \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} dr = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{r}{R_1} \quad (9.44)$$

und mit (9.35):

$$C = \frac{Q}{U(R_2)} = \frac{\lambda L \cdot 2\pi \cdot \varepsilon_0}{\lambda \cdot \ln \frac{r}{R_1}} = \frac{L \cdot 2\pi \cdot \varepsilon_0}{\ln \frac{r}{R_1}} \quad (9.45)$$

9.2.1.6 Homogen geladene, nicht leitende Kugel

Auf einer Kugel mit Radius R ist die Ladung Q homogen verteilt und die Kugel ist nicht leitend.

Definition 9.9 (nicht leitend) bedeutet dabei, dass die Ladungen fixiert sind.

Wir integrieren über eine zentrische Kugel mit Radius r und Oberfläche $A = 4\pi r^2$. Die E-Feldlinien zeigen wieder senkrecht zur Fläche A , also $\langle \vec{E} | d\vec{A} \rangle = E \cdot dA = E \cdot 8\pi \cdot r dr$. Es gilt also:

$$\Phi_E^{(\text{Kugel})} = \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{A} = \int_0^r E \cdot 8\pi \cdot \hat{r} d\hat{r} = 4\pi \cdot E \cdot r^2 \stackrel{\text{GAUSS}}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (9.46)$$

⁵Wir setzen hier wieder $\langle \vec{E} | d\vec{s} \rangle = E \cdot ds$, weil wir den kürzesten Weg zwischen zwei Untersuchten Punkten wählen: Die direkte, radiale Verbindung, parallel zu \vec{E} .

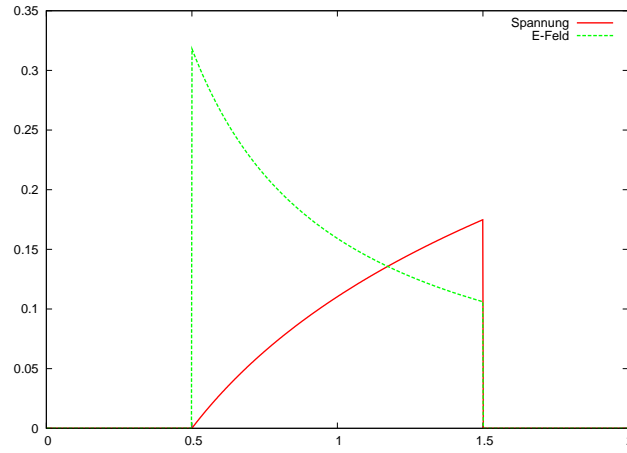


Abbildung 9.3: Spannung und E-Feld im Koaxkabel; der Außendurchmesser des Leiters ist 1, der Innendurchmesser der Hülle ist 3 (und hier ist der Radius auf der x -Achse). Siehe Gl. (9.43) und (9.44)

und damit

$$\boxed{E_{\text{Kugel}}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}} \quad \text{mit } r \geq R \quad (9.47)$$

Weil hier die Ladungen fixiert sind, gilt im inneren der Kugel ein anderer Zusammenhang; hier ist die Ladung Q homogen verteilt, und damit ist

$$\varrho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

und damit die Ladung innerhalb der Kugel mit Radius r (mit $r \leq R$):

$$\tilde{Q} = \varrho \cdot \tilde{V} = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Es gilt also nach Gl. (9.46):

$$\Phi_E^{(\text{Kugel, innen})} = 4\pi \cdot E \cdot r^2 \stackrel{\text{GAUSS}}{=} \frac{\varrho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad (9.48)$$

und damit

$$\boxed{E_{\text{Kugel, innen}}(r) = \frac{Q \cdot r}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^3}} \quad \text{mit } r \leq R \quad (9.49)$$

Analog zu Kap. 9.2.1.5 berechnen wir noch die Spannung außen:

$$U_a(r) = \int_R^r \vec{E} \, d\vec{s} = \int_R^r E \, ds = \int_R^r \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hat{r}^2} \, d\hat{r} = \left[\frac{-Q}{4\pi \varepsilon_0 \hat{r}} \right]_R^r \quad (9.50)$$

Wenn wir die Kapazität bestimmen wollen, so denken wir uns die zweite Platte in der Unendlichkeit. Mit (9.35) gilt:

$$C = \frac{Q}{U_a(\infty)} = 4\pi \varepsilon_0 \cdot R \quad (9.51)$$

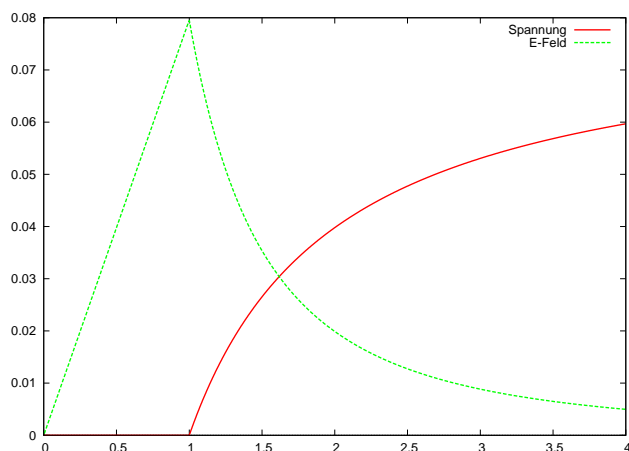


Abbildung 9.4: E-Feld um eine geladene Kugel mit fixierten Ladungen. $R = 1$

Wichtig! 80 Für die Kapazität einer einzelnen Ladung interpretiert man diese als Teil eines Kondensators mit $d = \infty$.

9.2.2 Vergleich der E-Felder

Die berechneten E-Felder kann man nun schnell vergleichen; siehe Tab. 9.1.

Form:	Kugel	Draht	Platte
$E =$	$\frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$	$\frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0}$	$\frac{Q}{2A \epsilon_0}$
Abh. von $\frac{R}{r}$	$\frac{Q}{A \epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^2$	$\frac{2Q}{A \epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^1$	$\frac{Q}{2A \epsilon_0}$
Ausbreitung von E :	3 Dim.	2 Dim.	1 Dim

Tabelle 9.1: Vergleich der E-Felder bei verschiedenen Symmetrien

9.2.3 E-Feld im Leiter

Definition 9.10 (Leiter) Material, in welchem sich Ladungsträger möglichst leicht bewegen können.

Das klassische Beispiel sind Metalle, hier sind die Elektronen als „Elektronengas“ frei und von den Rumpfen unabhängig beweglich.

Da die Elektronen frei beweglich sind, wirkt auf sie insgesamt keine Kraft ($F = 0$) und wegen (9.3) darf auch kein E-Feld existieren: $E = 0$:

Wichtig! 81 Innerhalb eines Leiters herrscht kein E-Feld.

Aus dem Satz von GAUSS (Kap. 9.1.7) folgt nun, dass wenn das E-Feld verschwindet, in einem eingeschlossenen Volumen keine Quellen – also Ladungen – vorhanden sein dürfen: Betrachten wir das komplette (innere) Volumen des Leiters, so muss hier folglich $\varrho = 0$ sein. Die Ladungen halten sich also nicht im

Inneren des Leiters auf; damit müssen sie sich (um überhaupt im Leiter zu sein) auf einer schmalen äußeren Fläche befinden; hier haben die Ladungen außerdem dem maximalen Abstand voneinander.

Da die Ladungen auf der Schicht außen *bleiben*, müssen sie auf einer Äquipotentialfläche liegen und damit muss das E-Feld *senkrecht* zur Leiteroberfläche liegen (weil Äquipotentialflächen immer senkrecht zu den Feldlinien liegen).

◇ Wir betrachten nun ein Leiterende – als Kugel ausgeführt. Hier gilt mit (9.8) und (9.47) direkt am Leiterende:

$$E_{\perp} = \frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon_0} \text{ und } U = \frac{Q}{4\pi R \varepsilon_0}$$

und damit

$$E_{\perp} = \frac{U}{R}$$

D.h. E_{\perp} ist proportional zu U und reziprok proportional zu R . Für kleinen R wird also E *sehr* groß.

Wenn man also einen Leiter mit einer Spitze oder einer scharfen Kante o.ä. hat, so wird an dieser Stelle das E-Feld extrem groß werden. Es kann sogar dazu kommen, dass Elektronen und Atome ausgeschleudert werden. Man wendet dies bspw. bei der *Feldlinienemission* an: Dabei gibt man auf eine Metallspitze eine hohe Spannung; Hier wird E sehr groß und es werden Elektronen ausgeschleudert, die man als Elektornenstrahl verwenden kann. ◇

9.2.4 FARADAYScher Käfig

Wir betrachten einen abgeschlossenen Hohlraum in einem Metall oder einem anderen Leiter:

Wichtig! 82 In metallischen Hohlräumen herrscht kein E-Feld: $E = 0$.

Wenn dem *nicht* so wäre, hätten wir ein E-Feld, welches von Ladungen erzeugt wird. Nun würden aber die Ladungen im Hohlraum (also in der Luft) dem E-Feld folgen und auf das Metall gebracht werden.

Damit würde das potentielle E-Feld nur durch Ladungen im Metall aufgespannt. Diese Ladungen würden aber selbst dem E-Feld folgen (das E-Feld sorgt für ein Potentialgefälle, dem die Ladungen folgen wollen) also einfach „abfließen“ anstatt ein E-Feld aufzubauen.

◇ Der **Van-De-Graaf-Generator** funktioniert nach diesem Prinzip: Ladung wird auf ein „Förderband“ aufgenommen und damit auf das Innere einer Metallkugel gegeben. Das ist ohne Arbeitsaufwand möglich, weil in der Kugel ja kein E-Feld herrscht und die Elektronen so keine Gegenkraft erfahren. Einmal auf die Kugel gebracht, bewegen sich die Ladungen nach außen, weil sie hier den größten Abstand voneinander haben können. Auf der Kugelaußenseite können sich so sehr hohe Spannungen bilden. ◇

9.2.5 Influenz

Bringt man einen Leiter in ein E-Feld, so erfahren die Ladungen im Leiter eine elektrische Kraft und werden (da im Leiter beweglich) abgelenkt. Sie bilden so eine Zone mit Mangel und eine mit Überfluss und dazwischen ein E-Feld („Gegenfeld“).

Definition 9.11 (Influenzladungen) *Quellen des Gegenfelds.*

Die Ladungen werden sich so lange bewegen, bis das neue, innere E-Feld so stark ist, wie das äußere: Wenn dem so ist, heben die Felder sich durch Superposition im Inneren des Leiters gegenseitig weg und die Ladungen haben keinen Grund (keine elektrische Kraft) mehr, sich zu bewegen.

Außerdem werden die bewegten Ladungen durch Reibung gebremst und wenn die Reibungskraft nicht permanent von einer elektrischen Kraft überwunden wird, wird die Ladung immer langsamer und bleibt schließlich stehen.

Im Unterschied dazu haben **Supraleiter** keinen Widerstand. Die Ladungen werden also, wenn keine Kräfte durch E-Felder auf sie wirken, nicht abgebremst. In Supraleitern bleibt also die Bewegung der Ladungen gleich: Man kann endlose Ströme erzeugen.

9.2.6 Prinzip der Bildladungen

Wichtig! 83 *In einem Leiter verteilen sich die Ladungen so, dass der Rand des Leiters eine Äquipotentialfläche ist.*

Wenn dem nicht so wäre, würden sich die Ladungen so verschieben, dass dem so ist: Mit dem selben Argument wie in Kap 9.2.4 müssen sich alle Ladungen auf dem Rand verteilen. Wenn nun eine Stelle am Rand weniger dicht und eine andere dichter, so würden die Ladungen zur Stelle niedrigerer Dichte fließen, weil sie nach dieser Stelle angezogen werden. Ebenfalls analog zu 9.2.3 muss das E-Feld nun senkrecht auf der Oberfläche des Leiters stehen.

Das Problem ist nun, das E-Feld zu *bestimmen*, welches außerhalb des Leiters existiert: Weil die Feldlinien immer senkrecht auf der Oberfläche stehen müssen und die Geometrie der Oberfläche beliebig kompliziert sein kann, kann das E-Feld ziemlich komplizierte Formen annehmen; Wir führen deswegen die *Bildladungen* ein:

Definition 9.12 (Bildladung) *Eine Bildladung q' ist eine gedachte Ladung in einem Leiter, die auf eine Ladung q außerhalb des Leiters so wechselwirkt, wie es der Leiter tut.*

Eine Bildladung q' ist betragsmäßig gleich q mit verschiedenen Vorzeichen ($q = -q'$).

Wir ersetzen also die Wechselwirkung des Leiters durch die Wechselwirkung mit einer anderen Ladung.

Die Idee dahinter: Wir betrachten zwei Ladungen Q^+ und Q^- mit ihrem Coulomb-Feld und schieben eine dünne Metallplatte genau zwischen die beiden Ladungen. Die Platte nimmt Influenzladungen q an, sodass das äußere E-Feld im Prinzip nicht gestört wird: Jetzt laufen die E-Feldlinien nicht mehr von Ladung Q^- zu Q^+ sondern von Q^+ zu q^- , haben aber die selbe Form und Stärke wie vorher.

Entfernt man nun eine der beiden Ladungen und ersetzt sie durch einen kompakten Leiter, so hat man das äußere E-Feld immer noch nicht gestört; es besteht jetzt zwischen einer Ladung (oBdA) Q^+ und den Influenzladungen q^- .

Die Influenzladungen aus unserer Idee sind nun die *tatsächlichen* Ladungen auf der Oberfläche eines Leiters – und diese können wir jetzt genau durch die Ladung Q^- ersetzen.

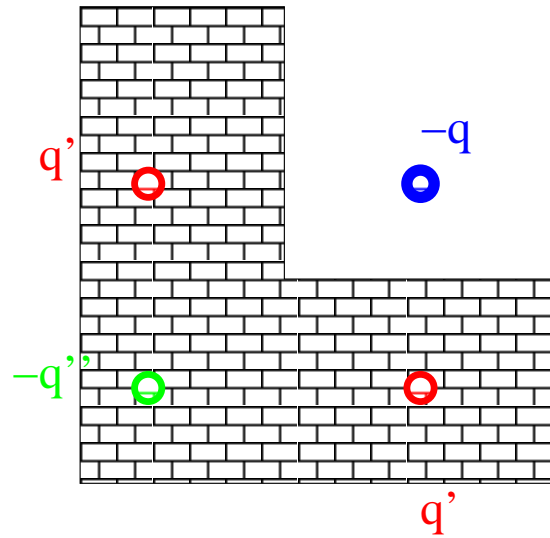


Abbildung 9.5: Prinzip der Bildladungen: 1. Generation in Blau, 2. in Rot und 3. in Grün

Damit müssen wir auch $\rho(\vec{r})$ nicht genauer ausrechnen und verwenden stattdessen das überlagerte Feld der Bildladungen.

Wichtig! 84 *Spiegeln wir eine Ladung $-q$ außerhalb eines Leiters an an jeder Oberfläche (bzw. deren Verlängerung) des Leiters, erhalten wir mehrere q' („1. Generation“). Man muss nun auch diese q' an den Oberflächen spiegeln ($q'' = -q'$: „2. Generation“), bis jede weitere Spiegelung eine Ladung auf eine andere spiegeln würde.*

9.2.7 Energie des E-Felds

Möchte man einen Kondensator aufladen, so braucht man dafür Energie: Die bereits auf den Platten vorhandenen Ladungen stoßen die neu dazukommenden Ladungen ab und diese Abstoßungen gilt es zu überwinden.

Um die Kraft, mit der abgestoßen wird, zu bestimmen, stellt man folgende Überlegung an: Um eine Platte positiv zu laden, muss man hier alle negativen Ladungsträger der Ladung $q = q^-$ – alle Elektronen – abziehen und auf die negative Platte bringen. Dazu muss man also das einzelne Elektron mit den E-Feldlinien bewegen – und somit gegen die Kraft $\vec{F} = \vec{E} \cdot q^-$, und dafür braucht man die Arbeit $W_q = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Ob man nun die Elektronen wirklich innerhalb des Kondensators direkt gegen das E-Feld bewegt oder nicht, ist nicht entscheidend, weil das E-Feld ja wirbelfrei ist (vgl. Kap. 9.1.4).

Für einen (Platten)Kondensator der Breite a gilt wegen $E = \frac{U}{a}$ (vgl. (9.34)) also:

$$W_q = \int_0^a \frac{U}{a} q \, ds = \frac{U}{a} q \cdot a = U \cdot q$$

Überträgt man nun nicht nur ein einzelnes Elektron, sondern die Ladung $Q = \int_0^Q 1 \, dq$, so braucht man (mit $U = \frac{q}{C}$ – vgl. Gl. (9.35) – hier ist q die Ladung,

die sich auf den Platten befindet und von Q , der Ladung die Stück für Stück auf die Platten gebracht wird, verschieden) die Arbeit

$$W = \int_0^Q U \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

In unserer Herleitung haben wir allgemeine Annahmen gemacht, die so nicht nur für den Plattenkondensator gelten, sondern allgemein für beliebige Kondensatoren: Man kann sich jeden Kondensator vorstellen als (beliebig komplizierte) Verschaltung von Plattenkondensatoren.

Ersetzt man nun noch nach Gl. (9.35) $Q = CU$, erhält man:

Wichtig! 85 Die Energie eines beliebigen, mit der Spannung U aufgeladenen Kondensators ist

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \quad (9.52)$$

Denken wir uns nun weiter jeden Kondensator aufgebaut aus kleinen Plattenkondensatoren, so können wir die **Energiedichte** bestimmen: Beim Plattenkondensator gilt wegen (9.36) und mit $U = E \cdot a$ (vgl. (9.34)):

$$W = \frac{\varepsilon_0 A}{a} \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 A}{a} \cdot \frac{E^2 \cdot a^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 A \cdot E^2 \cdot a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot V \quad (9.53)$$

Und damit:

Definition 9.13 (Räumliche Energiedichte $\varrho_{E,V}$ oder w) Die Energiedichte bezeichnet die Verteilung von Energie W auf ein Volumen V . Bei Kondensatoren gilt:

$$\varrho_{E,V} = w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (9.54)$$

Eine direkte Folge aus der hier konzentrierten Energie ist eine Kraft zwischen den Platten des Kondensators; In differenzieller Schreibweise ist $dW = F ds$. Wendet man das Differenzial d auf (9.53) an, gilt:

$$\begin{aligned} dW &= d\left(\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot V\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot dV \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot d(A \cdot s) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot A \cdot ds \\ &= F \cdot ds \end{aligned}$$

Wobei wir verwenden, dass das E-Feld homogen und damit konstant ist, ebenso wie die Fläche des Kondensators, wobei s der differenzielle Abstand zu einer Platte ist. Ein Koeffizientenvergleich liefert also mit (9.36) und (9.34):

$$F = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot A = \frac{1}{2} QE \quad (9.55)$$

Stoff	Dielektrizitätszahl ε_r
Vakuum	1 <i>per Definition</i>
Luft	1.000 59
Paraffin	2.1
Methanol	32.6
Wasser	80
Eis	100
Spezielle Keramiken	10 000
$SrTiO_3$	12 000

Tabelle 9.2: Dielektrizitätszahl ausgewählter Materialien (Quelle: BECHINGER und WIKIPEDIA)

9.2.8 Isolatoren bzw Dielektrika im E-Feld

Definition 9.14 (Dielektrikum) *Ein Dielektrikum ist nichts anders als ein Isolator, also ein nicht- oder nur schwach stromleitendes Material. Die Ladungsträger sind i.A. nicht frei beweglich.*

In einem Experiment laden wir einen Kondensator auf und führen anschließend ein Dielektrikum ein. Die Spannung nimmt dabei von U_0 auf U_D ab. Man definiert:

Definition 9.15 ((relative) Dielektrizitätskonstante ε_r) *auch „relative Permittivität“ oder „Dielektrizitätszahl“: Der Faktor ε_r gibt an, wie stark sich die Spannung (Kapazität) beim Einführen des Dielektrikums vermindert (erhöht):*

$$\varepsilon_r = \frac{U_0}{U_D} = \frac{\frac{Q}{U_D}}{\frac{Q}{U_0}} = \frac{C_D}{C_0} \quad (9.56)$$

Die Dielektrizitätszahl ist dimensionslos, also $[\varepsilon_r] = 1$ und hängt vom Material ab. Siehe dazu Tab. 9.2.

Möchte man die **Kapazität eines Kondensators** mit Dielektrikum bestimmen, so gilt, weil die Kapazität um ε_r zunimmt und weil $C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$:

$$C = \varepsilon_r C_0 = \boxed{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} = C} \quad (9.57)$$

Wichtig! 86 *Wegen $U \sim E$ nimmt nicht nur die Spannung im Kondensator um ε_r ab, sondern auch die Stärke des E-Felds:*

$$E_0 = \varepsilon_r \cdot E_D$$

Die **Ursache** für die Verminderung des E-Felds ist die Dielektrische Polarisation.

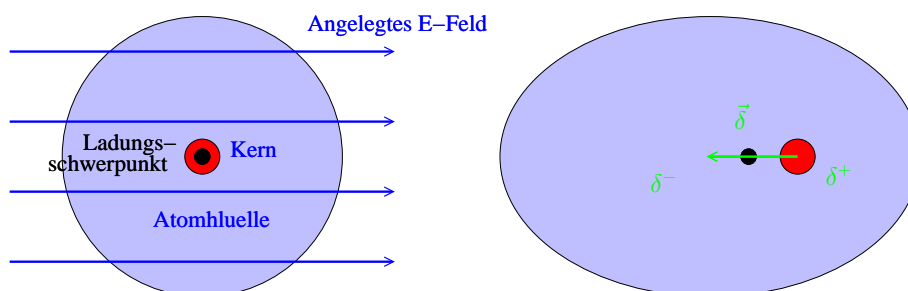


Abbildung 9.6: In einem Atom wird durch ein äußeres E-Feld ein Dipolmoment induziert (das linke Bild ist eine Kurzaufnahme direkt beim Anlegen des Feldes). Dieses Dipolmoment kompensiert das äußere E-Feld im Atom. $\vec{\delta}$ ist ein pointing Vector für die Ladungsverschiebung

9.2.9 Die elektrische Polarisation

Sie ist sehr ähnlich zur Influenz, nur dass sich hier durch ein äußeres E-Feld nur Ladungen *innerhalb* des Moleküls verschieben können.

Legt man an ein Atom oder Molekül ein äußeres E-Feld an (vgl. dazu Abb. 9.6), dann wird die Elektronenhülle bezüglich des Kerns verschoben: Diese Verschiebung geht so lange, bis die rücktreibende Kraft die Kraft, die das angelegte E-Feld auf die Teilchen ausübt ($F = E \cdot q$), kompensiert.

Wenn vorher noch die Schwerpunkte von positiver und negativer Ladung aufeinanderfielen, so sind diese nun getrennt – mit dem Abstand δ . Man führt einen *Pointing-Vector* $\vec{\delta}$ ein: Dieser hat als Länge besagte Ladungsverschiebung und zeigt vom Positiven zum Negativen Ladungsschwerpunkt. In seinem Mittelpunkt liegt der gesamte (neutrale) Ladungsschwerpunkt des Atoms bzw. Moleküls.

Gemäß Kapitel 9.1.4 und der dortigen Definition ist das **Induzierte Dipolmoment**

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\delta} \quad (9.58)$$

wobei q die Ladung des Atoms bzw. Moleküls ist. (Allgemein ist q der Betrag der *verschobenen* Ladung, wobei logischerweise ein q^+ und ein q^- existieren und $q = |q^+| = |q^-|$.)

Wir definieren nun:

Definition 9.16 (Polarisierbarkeit α) Sie ist ein Maß dafür, wie leicht sich in Atomen bzw. Molekülen die Ladungen durch ein äußeres E-Feld gegeneinander verschieben lassen: Je größer α , desto besser polarisierbar. Es wird ein (elektrisches) Dipolmoment induziert.

Die Einheit ist $[\alpha] = \frac{\text{C} \cdot \text{m}^2}{\text{V}} = \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg}}$. Im Allgemeinen ist α kein Skalar, sondern ein Tensor (α), weil Atome, die nicht völlig rund sind, in verschiedenen Richtungen verschieden gut polarisierbar sind. Die wichtigste Beziehung gilt näherungsweise für kleine Feldstärken: Hier ist die Rücktreibende Kraft – also die COULOMB-Anziehung zwischen positivem und negativem Ladungsschwerpunkt – annähernd proportional zur Auslenkung δ . Dann gilt:

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E} \quad (9.59)$$

wobei \vec{p} das *induzierte Dipolmoment* ist und \vec{E} das *lokal herrschende E-Feld*.

Es gilt also nach Gl. (9.58) für *ein* Atom oder Molekül:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\delta} = \alpha \cdot \vec{E}_D \quad (9.60)$$

⁶und so für viele Atome / Moleküle mit einer Teilchendichte von n (also N Teilchen pro Volumen und $n = \frac{N}{V}$)⁷:

$$\vec{P} = n \cdot \vec{p} = n \cdot \alpha \cdot \vec{E}_D \quad (9.61)$$

Betrachtet man nun das Dielektrikum (vgl. dazu Abb. 9.7), so schlägt sich das Dipolmoment \vec{P} (auch **Polarisation** genannt) – schließlich zeigt es ja eine Trennung von Ladungen an – am Rande des Dielektrikums als Flächenladung mit Flächenladungsdichte σ_p nieder. Im Inneren des Dielektrikums gleichen sich dagegen die Polarisationen aus. Wir unterscheiden dabei zwischen der Flächenladungsdichte auf den Platten – auch *freie Ladungsdichte* σ_f genannt, weil hier die Ladungen sich bewegen und abfließen können – im Gegensatz zu den *erzwungenen*, induzierten Ladungen (auch *Polarisationsladung* genannt) im Dielektrikum. Nach der Definition der Flächenladungsdichte σ (Wir verwenden als betrachtetes Volumen $V = A \cdot \delta$, weil dies der Bereich ist, in dem die Ladungen sich nicht gegenseitig ausgleichen, in dem es also effektiv Ladung (Q) gibt.):

$$\sigma_p = \frac{Q}{A} = \frac{\overbrace{n \cdot q \cdot A \cdot \delta}^Q}{A} = n \cdot q \cdot \delta \quad (9.62)$$

und damit nach Gl. (9.61):

$$\sigma_p = \|\vec{P}\| = P \quad (9.63)$$

Aus praktischen Gründen verwendet man den Pointing-Vektor $\vec{\sigma}_p$ mit

$$\vec{\sigma}_p = \vec{P} \quad (9.64)$$

Insgesamt ergibt sich also für das Dipolmoment \vec{P} des Dielektrikums, das ja das Volumen $A \cdot L$ ausfüllt:

$$\vec{P} = \vec{P} \cdot A \cdot L = n \cdot q \cdot \vec{\delta} \cdot A \cdot L = \vec{\sigma}_p \cdot A \cdot L \quad (9.65)$$

Aus Gl. (9.61) folgt außerdem der Zusammenhang

$$\vec{P} = N \cdot \alpha \cdot \vec{E}_D$$

Mit dem Satz von GAUSS (s. Kap. 9.1.7) gilt für das außen anliegende E-Feld \vec{E}_0 , weil die Ladungen auf den Kondensatorplatten die Quellen des E-Felds \vec{E}_0 sind:

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0} \quad (9.66)$$

⁶Wir verwenden hier E_D , weil das lokal herrschende E-Feld im Dielektrikum das E-Feld im Dielektrikum ist, also E_D .

⁷Dabei ignoriert man bspw. thermische Wechselwirkungen. Zu Beachten ist, dass hier eigentlich eine Vektorsumme gebildet wird, und der entstehende Vektor durch das Volumen geteilt wird: $\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ – die Äquivalenz der Aussagen ergibt sich daraus, dass (a) alle \vec{p}_i paarweise parallel sind und (b) $n = \frac{N}{V}$.

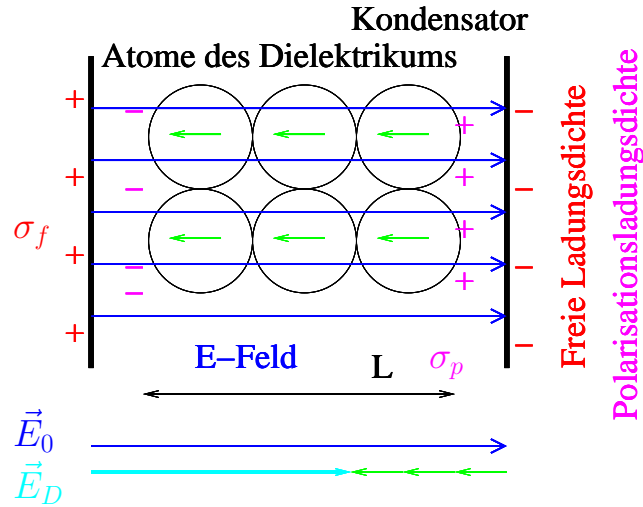


Abbildung 9.7: Mikroskopische Betrachtung der Polarisation im Dielektrikum. Die Grünen Pfeile sind die \vec{p}

Ist man nun am E-Feld \vec{E}_D im Dielektrikum interessiert, so betrachtet man nur das Dielektrikum als Kondensator. Die „Platten“ (D-Platten) dieses Kondensators bestehen einmal aus dem Rand des Dielektrikums mit der Ladung σ_p und den entsprechenden Platten des Kondensators mit der Ladung σ_f . Weil die beiden Ladungen einander entgegengesetzt sind, verwenden wir die *Differenz* daraus als Ladungsdichte der D-Platten. Wieder gilt mit GAUSS und Gl. (9.63)

$$E_D = \frac{\sigma_f - \sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_f - P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} \quad (9.67)$$

Vergleicht man nun die Stärke der beiden E-Felder, indem man den Quotienten bilden, erhält man (vgl. (9.56)):

$$\frac{E_0}{E_D} = 1 + \frac{P}{E_D \cdot \varepsilon_0} =: 1 + \chi = \frac{U_0}{U_D} = \varepsilon_r \quad (9.68)$$

Dabei haben wir eingeführt:

Definition 9.17 (Elektrische Suszeptibilität χ) Ist ein anderes Maß für die Polarisierbarkeit eines Stoffes unter einem außen angelegten E-Feld.

Setzen wir in Gl. (9.61) Gl. (9.67) ein, erhalten wir

$$P = n\alpha \left(E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} \right)$$

Löst man diese Gleichung nach P auf, erhält man mit Gl. (9.56):

$$P = \frac{n\alpha E_0}{1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}} = \frac{n\alpha E_D \varepsilon_r}{1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}} = \underbrace{n \cdot \underbrace{\alpha \cdot E_D}_P}_{P} \cdot \frac{\varepsilon_r}{1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also:

$$\frac{\varepsilon_r}{1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}} = 1 \text{ und damit } 1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

und weiter mit Gl. (9.68)

$$\chi = \frac{n \cdot \alpha}{\varepsilon_0} \quad (9.69)$$

Die drei Größen α , ε_r und χ stehen also im Zusammenhang

$$1 + \chi = \varepsilon_r \text{ und } \chi = \frac{n \cdot \alpha}{\varepsilon_0}$$

Damit kann man beispielsweise die Polarisation \vec{P} in Abhängigkeit der E-Felder ausrechnen; dazu löst man die rechte Gleichung nach α auf, die linke nach χ , setzt das χ ein, und das dann wiederum in $\vec{P} = n \alpha \vec{E}_D$. Es folgt:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot (\vec{E}_0 - \vec{E}_D) = \varepsilon_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \cdot \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \cdot \underbrace{(\varepsilon_r - 1)}_{\chi} \cdot \vec{E}_D \quad (9.70)$$

9.2.10 Arten von Polarisation

Verschiebungspolarisation Verschiebung der Ladungsschwerpunkte durch ein äußeres E-Feld induziert ein Induziertes Dipolmoment $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$ welches von der Temperatur abhängig ist.

Orientierungspolarisation Die Moleküle sind schon polarisiert (bspw. Wasser – vgl. Abb. 9.8(a)) und werden durch ein externes E-Feld nur noch ausgerichtet. Bei höheren Temperaturen macht die thermische Bewegung der Moleküle die Orientierung der Teilchen – und damit auch die Polarisierung – schwer. Es gilt

$$\|\vec{p}\| \sim \frac{1}{T}$$

Ionenpolarisation Die beiden Gitter für Kationen und Anionen werden gegeneinander verschoben; aus der Ladungsverschiebung resultiert ein Feld. S. Abb. 9.8(b)

Ferroelektrika Die Kristalle besteht aus vielen Dipolen. Diese sind innerhalb von *Domänen* (auch WEISS-Bezirke genannt) parallel ausgerichtet. Eine Domäne umfasst 10^6 bis 10^9 Atome und hat eine Ausdehnung zwischen 10^{-8} und 10^{-6} m. Beim Anlegen eines äußeren Feldes richten sich diese Zellen Stück für Stück aus – die Ausrichtung erfolgt nicht kontinuierlich, sondern sprunghaft.

9.2.11 Elektrostatik in Dielektrika

Wir hatten bisher homogene E-Felder betrachtet. Hier waren die negativen und positiven Polarisationsladungen (bzw. σ_p) stets gleich groß, sodass die *Summe* der Polarisationsladungen verschwand. Wir wollen jetzt aber ein *inhomogenes* E-Feld mit Dielektrikum betrachten; vgl. dazu Abb. 9.9.

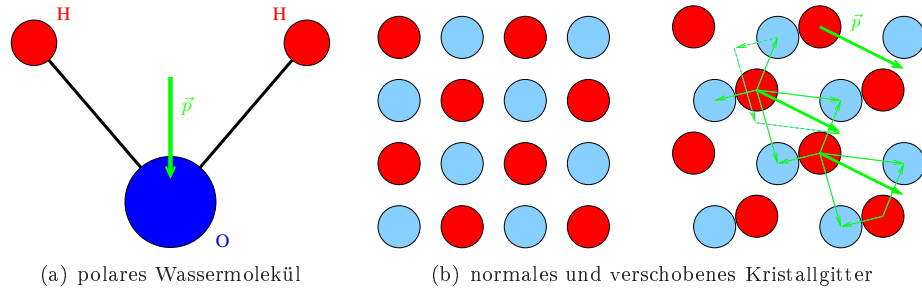


Abbildung 9.8: Arten von Polarisation

Wenn man sich gemäß Abb. 9.7 versucht, die einzelnen Dipole des Dielektrikums vorzustellen, so wird man bald sehen, dass es in diesem Feld nicht möglich ist, dass die Dipole ihre Ladungen gegenseitig zu Null ausgleichen: Auch innerhalb des Dielektrikums wird es Ladungen geben. Somit sind die Polarisationsladungen, die sich auf der Oberfläche bilden $-\sigma_p^+$ und σ_p^- – verschieden groß und so kann man die Ladung Q bestimmen, die insgesamt auf der Oberfläche liegt. Dazu integriert man über die Oberfläche A und verwendet Gl. (9.63) und anschließend (bei *) den Satz von GAUSS (vgl. Kap. 9.1.7)

$$Q = \int_A \sigma_p dA = \int_A \vec{P} \cdot d\vec{A} \stackrel{*}{=} \int_V \vec{\nabla} \vec{P} dV \quad (9.71)$$

Da das Dielektrikum insgesamt neutral ist, muss im Inneren eine Ladung Q_P existieren mit

$$Q_P = -Q$$

Da diese sich irgendwo im Volumen V aufhält, integrieren wir die Ladungsdichte im gesamten Volumen:

$$Q_P = -Q = \int_V \varrho_p dV \quad \text{bzw.} \quad Q = - \int_V \varrho_p dV \quad (9.72)$$

Nun können wir mit Gl. (9.71) einen Koeffizientenvergleich anstellen und erhalten

$$\boxed{\vec{\nabla} \vec{P} = -\varrho_p} \quad (9.73)$$

Wichtig! 87 Die Polarisationsladungen im Dielektrikum sind die Quellen der Polarisation.

Vergleiche dazu auch $\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ aus Kap. 9.1.7.

Neben den Polarisationsladungen im Inneren kommen (bzw. können kommen) noch weitere, *freie* Ladungen im Inneren mit der Dichte ϱ_f hinzu, sodass die gesamte Ladungsdichte sich zusammensetzt:

$$\varrho = \varrho_p + \varrho_f \quad (9.74)$$

Wenden wir nun wieder den Satz von GAUSS an (Kap. 9.1.7), erhalten wir:

$$\int_A \vec{E}_D d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V (\varrho_f + \varrho_p) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho_f dV + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho_p dV \quad (9.75)$$

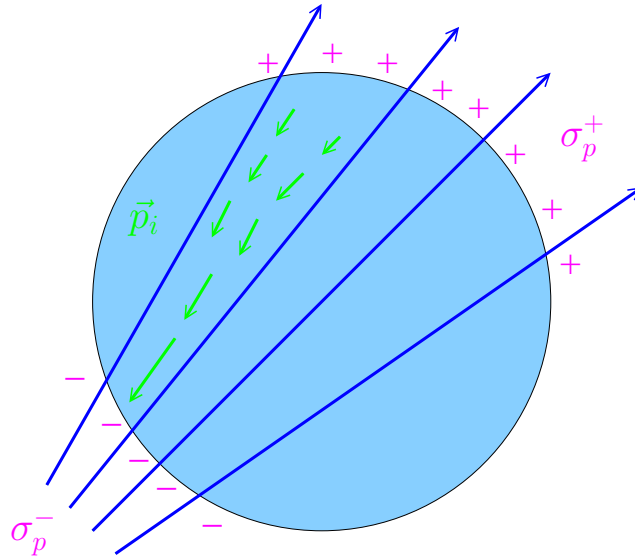


Abbildung 9.9: Dielektrikum in inhomogenem E-Feld

und mit Gl. (9.72) und (9.71)

$$\int_A \vec{E}_D d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho_f dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_A \vec{P} d\vec{A}$$

Dies kann man wegen der Linearität des Integrals und mit Gl. (9.67) umformen zu

$$\int_A \left(\vec{E}_D + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) d\vec{A} = \int_A \vec{E}_0 d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho_f dV = \frac{Q_f}{\varepsilon_0} \quad (9.76)$$

Multipliziert man dies mit ε_0 , so kann man einführen:

Definition 9.18 (Elektrische Flussdichte \vec{D}) oder „Dielektrische Verschiebung“

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_D + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}_D = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0} \quad (9.77)$$

Das D-Feld kann man sich vorstellen als das E-Feld, welches nur von den freien Ladungen erzeugt wird, während das E-Feld von allen Ladungen erzeugt wird.

Man kann dies schreiben als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho_f \quad (9.78)$$

Dies entspricht genau Gl. (9.76), wenn man mit ε_0 multipliziert, den Satz von GAUSS anwendet und einen Koeffizientenvergleich macht.

Das D-Feld besteht aus dem E-Feld \vec{E}_D im Dielektrikum und der Polarisation \vec{P} . Deswegen hat es auch die Einheit der Polarisation oder Flächenladungsdichte: $[\vec{D}] = \frac{C}{m^2} = \frac{As}{m^2}$.

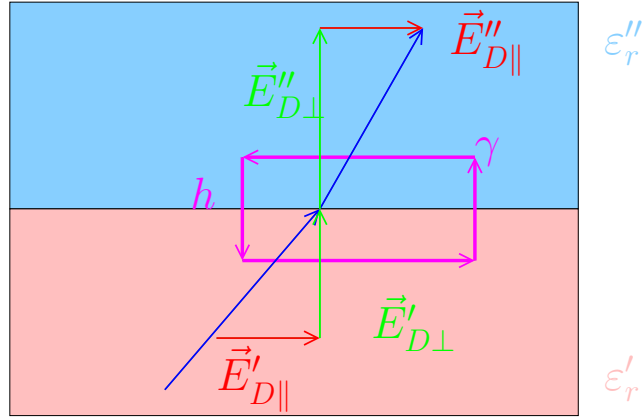


Abbildung 9.10: Brechung eines E-Felds beim Phasenübergang mit $\varepsilon''_r < \varepsilon'_r$

Wichtig! 88 In Materie gilt also

$$\boxed{\int_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q_f + Q_p}{\varepsilon_0}} \quad (9.79)$$

Diese Schreibweise ist allgemeiner, weil ohne Materie keine Ladungen polarisiert werden können und damit Q_p verschwindet.

9.2.12 Brechungsgesetz (★)

Wir betrachten die Grenzfläche zwischen zwei Materialien an die ein E-Feld angelegt werde. Der E-Feldvektor habe im ersten Material den Winkel α zur Flächennormalen. Wir bezeichnen die E-Felder mit \vec{E}' und \vec{E}'' und analog die Felder in Materie \vec{E}_D und die relativen Permittivitäten ε_r . Es sei

$$\varepsilon''_r < \varepsilon'_r \quad (9.80)$$

Vgl. dazu Abb. 9.10.

Wir betrachten nun das E-Feld komponentenweise:

Senkrecht zum Phasenübergang $\vec{E}_{D\perp}$ Wie wir in Kap. 9.2.8 gesehen haben, gilt

$$\vec{E}_{0\perp} = \varepsilon'_r \cdot \vec{E}'_{D\perp} = \varepsilon''_r \cdot \vec{E}''_{D\perp} \quad (9.81)$$

D.h. mit (9.80) wissen wir, dass $\vec{E}''_{D\perp}$ größer sein muss, als $\vec{E}'_{D\perp}$ und zwar um den Faktor

$$n = \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon''_r} \text{ womit } E''_{D\perp} = n \cdot E'_{D\perp} \quad (9.82)$$

Parallel zum Phasenübergang $\vec{E}_{D\parallel}$ Dazu bilden wir ein geschlossenes Ringintegral über γ (vgl. wieder Abb. 9.10), wobei $h = o(1)$ sein soll – also verschwindend klein:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \, ds = \int_{\text{hin}} E'_{D\parallel} \, ds_{\text{hin}} + \int_{\text{rück}} E''_{D\parallel} \, ds_{\text{rück}} + o(1) \quad (9.83)$$

Wobei s_{hin} der untere lila Pfeil ist, also die Strecke im ersten Medium. Da das E-Feld wirbelfrei ist, muss dieser Ausdruck verschwinden. Da außerdem γ so gewählt ist, dass

$$\gamma_{\text{hin}} = \gamma_{\text{rück}} \text{ bzw. } ds_{\text{hin}} = ds_{\text{rück}}$$

folgt sofort

$$E'_{D\parallel} = E''_{D\parallel} \text{ bzw. } \vec{E}'_{D\parallel} = \vec{E}''_{D\parallel} \quad (9.84)$$

Wenn \vec{E}'_D also unter

$$\tan \alpha = \frac{E'_{D\parallel}}{E'_{D\perp}}$$

einfällt, so wird \vec{E}''_D ausfallen unter β (mit n aus Gl. (9.82) und Gl. (9.84)):

$$\tan \beta = \frac{E''_{D\parallel}}{E''_{D\perp}} = \frac{E'_{D\parallel}}{n \cdot E'_{D\perp}} = \frac{1}{n} \cdot \tan \alpha \quad \text{oder} \quad \boxed{\tan \alpha = n \cdot \tan \beta}$$

Dabei haben wir mit n den **Brechungsindex** eingeführt:

Definition 9.19 (Brechungsindex oder Brechzahl n) ist eine Größe für die Richtungsänderung von Licht (oder hier einem E-Feld) beim Übergang zwischen zwei Materialien.

9.3 Der Elektrische Strom

9.3.1 Stromstärke und Stromdichte

Definition 9.20 (Stromstärke I)

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \quad (9.85)$$

Die Stromstärke ist die Ladungsmenge die pro Zeiteinheit durch die zur Stromrichtung senkrecht stehende Querschnittsfläche des Leiters fließt.

Mit der Einheit $[I] = A = \frac{C}{s}$. Die Einheit ist eine der fundamentalen Einheiten des MKS-Systems (vgl. Kap. 1.1.5); ihre Definition ist deshalb entscheidend:⁸

1 Ampère ist die Stärke eines zeitlich konstanten Stromes, der zwischen zwei parallelen, unendlich langen, im Vakuum liegenden Leitern, die im Abstand von 1 m angeordnet sind, die Kraft von $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ pro Meter Leitungslänge bewirkt.

Neben der Stromstärke benötigen wir auch die Stromdichte:

Definition 9.21 (Stromdichte \vec{j}) Die Stromdichte ist der Quotient von Stromstärke pro Fläche:

$$\vec{j} = \frac{I}{A} \quad (9.86)$$

und zeigt als Vektor in Richtung der Stromrichtung. (\rightarrow Pointing-Vector)

⁸Die Leiter liegen parallel angeordnet im Abstand von einem Meter im Vakuum und werden mit Strom beschickt. Sie bilden B-Felder aus, welche sich durchdringen, verstärken und so die Drähte einander anziehen. Der Strom wird so reguliert, dass die beiden Drähte pro Meter eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ aufeinander ausüben – der Strom hat dann per Definition die Stärke 1 A.

Die Einheit der Stromdichte ist $[\vec{j}] = [j] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$.

Die Ladung Q in einem Leitervolumen V ist $\varrho \cdot A \cdot x$ und mit der Ladungsträgerdichte n und der Ladung q eines Ladungsträgers kommt man auf $n \cdot q \cdot A \cdot x$. Um nun die *Stromstärke* zu bestimmen, braucht man dies nur zeitlich abzuleiten. Für die *Stromdichte* teilt man anschließend durch A :

$$\frac{d(n \cdot q \cdot A \cdot x)}{A \cdot dt} = \frac{n \cdot q \cdot A}{A} \cdot \frac{dx}{dt} = \boxed{n \cdot q \cdot \vec{v}_d = \varrho \cdot \vec{v}_d = \vec{j}} \quad (9.87)$$

Hier bezeichnet \vec{v}_d die *Driftgeschwindigkeit*, mit der sich die Ladungsträger durch den Leiter bewegen.

Ein wichtiger **Zusammenhang** zwischen Stromstärke und -dichte ist:

$$\boxed{I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}} \quad (9.88)$$

Dabei ist I der gesamte Strom⁹ durch die Fläche A . Ist die Stromdichte räumlich konstant und ist \vec{A} parallel zu \vec{j} vereinfacht sich dies zu

$$I = \vec{j} \cdot \vec{A} = j \cdot A$$

Wichtig! 89 (Ursache des Stroms) Eine Voraussetzung dafür, dass Strom fließen kann, ist die Anwesenheit von Spannung.

Die Spannung U ist eine *Potentialdifferenz* $\Delta\varphi$ (vgl. (9.14): Ladungen bewegen sich an die Stelle niedrigeren (elektrischen) Potentials. Diese Bewegung von Ladung bezeichnen wir als Strom.

Wichtig! 90 Wir verwenden als Stromrichtung die **konventionelle** oder technische **Stromrichtung**: Strom fließt von Plus nach Minus.

Mit dieser Vereinbarung ist Strom und bspw. E-Feld besser vereinbar.

9.3.2 Exkurs: Kontinuitätsgleichung (★)

Wendet man auf $\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$ den Satz von GAUSS (vgl. Kap. 9.1.7) an, so ist

$$I = \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \, dV \quad (9.89)$$

Wir betrachten nun ein Volumen V , welches die Ladung $Q = Q(t)$ enthält bzw. die Ladungsdichte $\varrho = \varrho(\vec{r}, t)$ mit

$$Q(t) = \int_V \varrho(\vec{r}, t) \, dV$$

⁹Man kann deshalb I auch als *Stromfluss* bezeichnen; dabei ist der Begriff *Fluss* aus der Feldtheorie, in der Allgemein $\Phi = \int_A \vec{\phi} \cdot d\vec{A}$ mit einem Allgemeinen Fluss Φ und einer allgemeinen Flussdichte $\vec{\phi}$.

Wenn nun Ladung aus dem Volumen *herausfließt*, so wird Q *kleiner*. Dies führt also dazu, dass an der Oberfläche $A = \partial V$ Strom mit *positiver* Stärke austritt. Damit ist also an der Oberfläche

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV = - \int_V \frac{\partial \varrho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV \quad (9.90)$$

Vergleicht man das mit Gl. (9.89), so sieht man sofort

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r}, t)} \quad (9.91)$$

oder auch¹⁰:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

In Worten bedeutet dies:

Wichtig! 91 (Kontinuitätsgleichung) Die Ladungsverteilung in einem Volumen (rechte Seite) kann sich ausschließlich durch Verschiebung der Ladung ändern: Es kann keine Ladung erzeugt oder vernichtet werden!

9.3.3 Elektrischer Widerstand

Definition 9.22 (Widerstand R) ist ein Maß dafür, welche Spannung U erforderlich ist, um den Strom I durch ein Material fließen zu lassen.

$$R = \frac{U}{I} \quad (9.92)$$

Die Einheit des Widerstandes ist $[R] = \Omega = \frac{V}{A}$ (Ohm), als Schaltsymbol verwendet man einen Kasten.

Wichtig! 92 (OHM'sches Gesetz) R ist konstant und nur vom Material abhängig.

Leider ist dieses Gesetz nicht allgemeingültig, sondern ist nur eine *Näherung* bei (relativ) kleinen Stromstärken. Siehe auch Kap. 9.3.4 und weiter unten.

Die **Ursache** für einen Widerstand R ist, dass Ladungsträger von dem Medium, in dem sie leiten *ausgebremst* werden: Sie stoßen mechanisch oder erfahren Anziehungskräfte. Diese Effekte sind mit einer Reibung zu vergleichen, die dem Vorankommen der Ladungsträger entgegenwirkt. Die Ladungsträger erreichen so eine mittlere Geschwindigkeit, als **Driftgeschwindigkeit** v_d bezeichnet. Sie ist proportional zur Kraft, mit der die Ladungsträger bewegt werden, also

$$v_d \sim F = q \cdot E \quad (9.93)$$

Mit Gl. (9.87) ist dies auch proportional zur Stromdichte j . Die Proportionalitätskonstante ist:

¹⁰unter Misshandlung des ∂ -Operators

Material	ρ in $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$
Quecksilber	0.96
Blei	0.21
Stahl	0.13
Platin	0.105
Eisen	0.098
Gold	0.022
Kupfer	0.0172
Silber	0.0163

Material	ρ in $\Omega \cdot \text{m}$
Seewasser	0.3
Flusswasser	10 – 100
destilliertes Wasser	$10^4 - 4 \cdot 10^4$
reines Wasser in Vakuum	$2.5 \cdot 10^5$

Tabelle 9.3: Spezifische Widerstände ausgewählter Materialien bei 20°C

Definition 9.23 ((elektrische) Leitfähigkeit σ) (oder „Konduktivität“) Gibt an, wie gut ein Stoff Strom leitet, wenn ein E-Feld anliegt.

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (9.94)$$

¹¹Die Einheit der Leitfähigkeit ist $[\sigma] = \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}$.

Den Kehrwert der Leitfähigkeit bezeichnet man auch als **Spezifischen Widerstand** ρ_Ω oder ρ . Dessen Einheit ist $[\rho] = [\rho_\Omega] = \Omega \cdot \text{m}$:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (9.95)$$

Wichtig! 93 Sowohl σ als auch ρ sind Materialkonstanten.

Aus dem Spezifischen Widerstand kann man den Widerstand eines Körpers der Länge L und Querschnittsfläche A bestimmen:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \quad (9.96)$$

In Tab. 9.3 sind ein paar Werte für ρ für verschiedene Materialien aufgelistet.

Die **Temperaturabhängigkeit** des Spezifischen Widerstands drückt man bei einem normalen metallischen Leiter durch materialabhängige Temperaturkoeffizienten α und β aus mit

$$\rho = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot (\vartheta - 20) + \beta \cdot (\vartheta - 20)^2) \quad (9.97)$$

¹¹Im Allgemeinen Fall ist σ ein Tensor! D.h. dass die Richtung von \vec{j} und \vec{E} nicht unbedingt parallel sein müssen. Beispiele dafür sind Materialien mit Schichtstruktur wie Graphit.

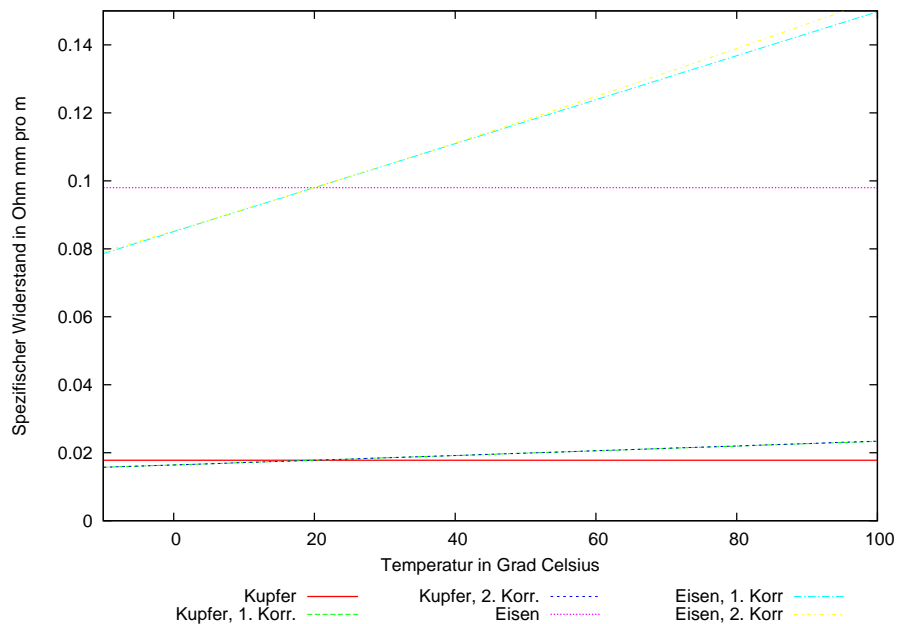


Abbildung 9.11: Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Eisen und Kupfer

wobei ϑ die Temperatur in Grad Celsius ist und ρ_{20} der spezifische Widerstand. Für kleine α und β oder für nur kleine Temperaturabweichungen von 20° C kann man diese Korrekturfaktoren vernachlässigen. Siehe dazu auch Abb. 9.11. Hier sieht man die quadratischen Korrekturen kaum...

9.3.4 Mechanismen elektrischer Leiter

Festkörper Die Atome des Körpers sind (mehr oder weniger) starr miteinander verbunden und damit ortsfest.

Reine Metalle Sehr gute Leiter: Die Elektronen sind völlig delokalisiert; Die Elektronen geben ihre Valenzelektronen in ein *Elektronengas*. Hier sind die Elektronen frei beweglich.

Der Widerstand ist (stark) *temperaturabhängig*: Bei tiefen Temperaturen ist er klein, bei steigenden Temperaturen wächst auch der Widerstand: Je größer die Temperatur, desto stärker ist die Thermische Bewegung der Atomrümpfe und desto größer die Reibung, die den Elektronen entgegengesetzt ist; die Elektronen werden stärker gestreut.

Supraleiter Bei einer bestimmten Temperatur T_C („Kritische Temperatur“ oder „Sprungtemperatur“ genannt) sinkt der Widerstand mit tieferen Temperaturen schlagartig auf exakt 0 und bleibt bei 0.

Halbleiter Die Zahl der Ladungsträger, die auch wirklich *leiten* hängt von der Temperatur stark ab: Sie müssen mit einer bestimmten Ener-

gie angeregt werden, damit sie vom *Valenzband* (wo sie nicht leiten können) ins *Leitungsband* gehoben werden (wo sie leiten).

Isolator Hat keine freien Elektronen; diese sind an Atomrümpfe gebunden; bei hohen Temperaturen trotzdem leitfähig.

◇ Bspw. fließt bei Glas Strom, wenn man es auf 500° C erwärmt hat: Glasionen werden frei beweglich. Ab dann wird wegen des großen Widerstands des Glases durch die Reibungswärme der Ionen das Glas weiter erwärmt, bis es schmilzt. ◇

Flüssigkeiten Bei reinem Wasser ist die Leitfähigkeit klein. Nur mit Salzen (Ionen) ist die Leitfähigkeit größer. Bei Flüssigkeiten ist Stromleitung allgemein mit *Materialtransport* verbunden.

Elektrolyse Kommen in einer Lösung Salzionen an die Elektroden, findet **Elektrolyse** statt. Nach dem **Faraday**'schen Gesetz braucht man die Ladung Q um N Mole von z -wertig geladene Ionen zu elektrolisieren:

$$Q = F \cdot z \cdot N$$

mit der FARADAY'schen Konstante¹² $F = 96\,485 \frac{\text{C}}{\text{mol}}$

Zusammenhang Strom, Spannung Die Ionen erfahren die STOKES'sche Reibung (vgl. Kap. 5.6)

$$F_R = 6\pi\eta r \cdot v \quad (9.98)$$

und ein Elektron erfährt im E-Feld die Kraft

$$F_{el} = E \cdot e \quad (9.99)$$

In der Lösung wird sich nach kurzer Zeit ein Gleichgewicht einstellen, sodass

$$6\pi\eta r \cdot v = E \cdot e \text{ und damit } v = \frac{E \cdot e}{6\pi\eta r} = \frac{U \cdot e}{\varepsilon_r \cdot d \cdot 6\pi\eta r} \quad (9.100)$$

und da $I \sim v$ ist somit auch $I \sim U$ – das OHM'sche Gesetz gilt also!

Gase In einem Elektrolyt werden die Ladungsträger durch eine Hydrathülle stabilisiert: Diese sorgt dafür, dass die Ionen nicht sofort zu einem Salz rekombinieren können. In Gasen fehlt dieser Stabilisierungsmechanismus: Die Ionen rekombinieren sofort. Damit ein Gas leitfähig ist, müssen ständig neue Ionen gebildet werden.

◇ **Glimmlampe.** An einem Gasgemisch liegen an zwei Seiten Kontakte, die gegeneinander isoliert sind. Durch eine hohe Spannung werden Ionen und freie Elektronen erzeugt, durch das E-Feld werden die Elektronen beschleunigt und die Elektronen stoßen an andere Atome und lösen hier Ionen aus; dieser Vorgang heißt „Stoßpolarisation“. Dadurch sind ständig neue Ionen vorhanden.

¹²Diese Konstante ist das Produkt zweier Konstanten: $F = N_A \cdot e$ wobei N_A die Avogadro-Konstante ist (Anzahl von Teilchen in einem Mol: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$) und e die Elementarladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ist.

Die eigentliche Leuchterscheinung kommt dadurch zustande, dass die Atome teilweise nicht ionisiert, sondern „nur“ angeregt werden und diese Anregungsenergie als Photonen ($E = h \cdot \nu$) abgeben.

Geiger-Müller-Zähler: In einem Metallrohr befindet sich ein Gas. Die Seitenflächen des Rohrs sind Isolatoren und in der Rohrmittte ist ein Draht gespannt. Dieser wird gegen das Rohr positiv geladen und der Strom im Draht wird gemessen.

Trifft ein Radioaktives Teilchen ein, ionisiert dieses Gasteilchen. Die positiven Anionen werden zum negativen Rohr, die Ionen zum positiven Draht gezogen. Es findet jeweils ein Ladungsausgleich statt und auf dem Draht ist ein Strom zu messen. \diamond

9.3.5 Stromkreis und Schaltungen

Komplizierte Schaltungen lassen sich zerlegen. Dazu fasst man Verbraucher bzw. Widerstände zu *Ersatzwiderstände* zusammen. Es gibt dafür zwei grundlegende Möglichkeiten (vgl. Abb. 9.12).

Serienschaltung Zwei Widerstände sind direkt hintereinander geschaltet: Der Strom, der durch den einen fließt, fließt auch durch den anderen. Dementsprechend ist I auch in beiden gleich. Die Spannung dagegen teilt sich auf. Betrachtet man das Potential, so muss, damit ein Strom fließt, außen zwischen den Widerständen eine Potentialdifferenz anliegen, ebenso eine Differenz zwischen den äußeren Enden und der Verbindung der Widerstände. Diese „kürzeren“ Potentialdifferenzen addieren sich zur gesamten. Bezeichnen wir die einzelnen Widerstände mit R_1 und R_2 und entsprechend ihre Stromstärken und Spannungen und mit R_0 den Ersatzwiderstand des Systems, gilt

$$I_1 = I_2 = I_0 \text{ und } U_1 + U_2 = U_0 \quad (9.101)$$

und damit

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_1}{I_0} + \frac{U_2}{I_0} = \boxed{R_1 + R_2 = R_0} \quad (9.102)$$

Parallelschaltung Hier muss sich der Strom beim fließen *aufteilen* – er kann das Potentialgefälle entweder durch R_1 oder durch R_2 passieren. Da keine Ladung auf dem Weg verloren gehen darf, müssen die Stromstärken sich addieren. Dafür ist aber das Potentialgefälle – und damit die Spannung – auf beiden Wegen gleich.

$$I_1 + I_2 = I_0 \text{ und } U_1 = U_2 = U_0 \quad (9.103)$$

und damit

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \left(\frac{I_0}{U_0} \right)^{-1} = \left(\frac{I_1}{U_0} + \frac{I_2}{U_0} \right)^{-1} = \boxed{(R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1} = R_0} \quad (9.104)$$

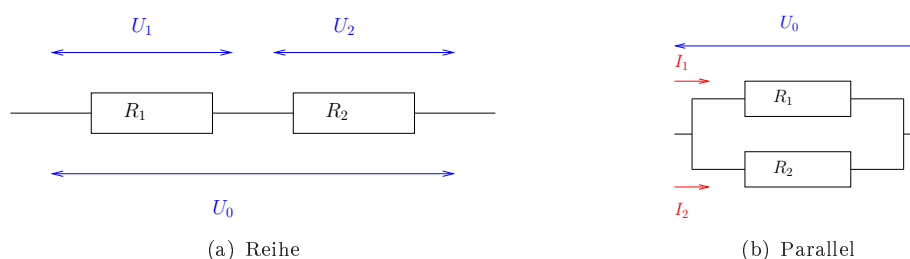


Abbildung 9.12: Schaltung von Widerständen

9.3.6 Die KIRCHHOFF'schen Gesetze

Um diese Gesetze anwenden zu können, teilt man eine Schaltung (bestehend aus **Knoten** und **Kanten**: Kanten sind Leiter auf denen der Strom fließt und Knoten sind die Punkte, an denen sich Kanten treffen) in **Maschen** ein. Eine Masche besteht aus einem geschlossenen Teil des Stromkreises; in ihm kann der Strom auf genau einem Weg von einem Knoten im „Kreis“ fließen, dabei alle Knoten und Kanten der Masche durchfließen und schließlich wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren.

Man definiert nun in der Schaltung an jeder Kante eine Stromrichtung: Diese ist nur entscheidend für die Wahl der Vorzeichen für die eigentlichen **Kirchhoff'schen** Gesetze. Dazu zeichnet man in einer Masche eine „Wirbelrichtung“ (in willkürlicher Richtung) ein und bestimmt nach den folgenden Gesetzmäßigkeiten, wie die Elemente der Kante verrechnet werden.

Wichtig! 94 (Knotenregel) Die Summe aller gerichteten Ströme an einem Knoten verschwindet:

$$\sum_i I_i \equiv 0 \quad (9.105)$$

„Gerichtet“ bedeutet dabei, dass wenn der Strom in einen Knoten hineinläuft er ein anderes Vorzeichen hat, als wenn er herausläuft.

Zu erklären ist das ganz einfach dadurch, dass der Strom in der Schaltung ja nicht verloren gehen darf; Was an Strom in den Knoten läuft (oBdA positiv) muss auch wieder herausfließen (oBdA negativ).

Für Spannungen entsprechend:

Wichtig! 95 (Maschenregel) Die Summe aller gerichteten Spannungen in einer orientierten Masche verschwindet:

$$\sum_i U_i \equiv 0 \quad (9.106)$$

„Orientiert“ bedeutet dabei, dass die Masche eine feste Umlaufrichtung (oBdD im Uhrzeigersinn) hat. Eine Spannungsquelle deren Stromrichtung in die Richtung („Orientierung“) der Masche zeigt bekommt ein positives Vorzeichen¹³ und

¹³und entsprechend wenn ihr Strom *entgegen* der Stromrichtung zeigt ein negatives

ein Verbraucher dessen Stromrichtung mit der Richtung der Masche übereinstimmt entsprechen ein negatives Vorzeichen¹⁴.

Wichtig! 96 Dabei ist wichtig, dass man wirklich alle Maschen beachtet – also dass man alle möglichen Wege von und zur Spannungsquelle durchprobiert; für jeden Weg bekommt man eine eigene Gleichung.

◇ *Kondensatorentladung.* Siehe für den Aufbau Abb. 9.13. Sei C geladen, bei $t = 0$ werde S geschlossen. Die Ströme und Spannungen an Kondensatorn und Widerstand werden im Index mit C bzw. R gekennzeichnet, der Leiter bzw. Schalter habe keinen Widerstand.

Wir haben also eine Masche M und zwei Knoten K' und K'' . Für die Masche gilt mit $U_R = I_R \cdot R$ und $U_C = \frac{Q_C}{C}$:

$$U_R + U_C = 0 = I_R \cdot R + \frac{Q_C}{C} \quad (9.107)$$

Wegen der Knotenregel ist

$$I_R - I_C = 0 \text{ und damit } I_R = I_C = I = \dot{Q} \quad (9.108)$$

Betrachtet man K' , so fließt hier Strom von R hinein, und Strom von C heraus. Bei K'' dagegen fließt Strom von C hinein und bekommt das positive Vorzeichen und Strom von R fließt heraus und bekommt das negative Vorzeichen: Wir hätten lediglich Gl. (9.108) mit (-1) multipliziert.

Wir haben also mit den beiden Gleichungen eine Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0 \quad (9.109)$$

die wir mit dem Ansatz (mit $\lambda = -\frac{1}{\tau}$)

$$Q = Q(t) = \hat{Q} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

angehen, und erhalten durch Einsetzen (\hat{Q} ist durch eine Anfangsbedingung zu bestimmen!)

$$\tau = R \cdot C$$

Für Strom und Spannung ergibt sich

$$I(t) = \frac{d}{dt}Q(t) = -\frac{1}{RC} \cdot \hat{Q} \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \text{ und } U(t) = R \cdot I(t)$$

Der Kondensator entlädt sich also exponentiell.

◇

9.3.7 Elektrische Arbeit und Leistung

Beim Stromfluss bewegen sich Ladungsträger q von einem Ort hohen Potentials φ_1 zu einen niedrigeren Potentials φ_2 . Dabei wird die Arbeit

$$W = q \cdot \Delta\varphi = q \cdot U \quad (9.110)$$

aufgewandt bzw. frei. Ist die Spannung U zeitlich konstant, so können wir bestimmen:

¹⁴Und somit ein positives Vorzeichen, wenn der Strom entgegen der Orientierung der Masche fließt.

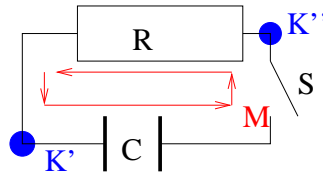


Abbildung 9.13: Schaltplan RC-Glied

Definition 9.24 (Elektrische Leistung P) Leistung ist verrichtete Arbeit dW je Zeitintervall dt . Bei konstanter Spannung gilt:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(q \cdot U)}{dt} = \frac{dq \cdot U}{dt} = \boxed{I \cdot U = P} \quad (9.111)$$

Und damit entsprechend auch

$$W = \int_t P(\hat{t}) d\hat{t} \text{ und bei } P = \text{const: } W = P \cdot t \quad (9.112)$$

Bei einem OHM'schen Widerstand ersetzt man mit $R = \frac{U}{I}$:

$$P = \frac{1}{R} \cdot U^2 = R \cdot I^2 \quad (9.113)$$

9.3.8 Gleichspannungserzeugung

Wenn wir eine Spannung nutzen wollen, müssen wir sie zuerst *erzeugen*. Egal, was für ein Gerät man dafür verwendet, so hat dieses Gerät einen elektrischen **Innenwiderstand** R_i . Wenn das Gerät also die Spannung U_0 liefert (auch „**elektromotorische Kraft**“ oder „*Klemmspannung*“ genannt), so wird nicht die gesamte Spannung nutzbar. Vielmehr ist die nutzbare Spannung U abhängig davon, wie groß der angelegte (Außen)Widerstand R (also der des Verbrauchers) ist: Der Gesamtwiderstand des Systems¹⁵ ist dann $R_g = R_i + R$ und so fließt der Strom $I = \frac{U_0}{R_i + R}$.

Es fällt also die Spannung $U_i = I \cdot R_i$ in der Spannungsquelle an – und diese ist für den Verbraucher nicht nutzbar. Die nutzbare Spannung U ist also vielmehr

$$\begin{aligned} U &= U_0 - I \cdot R_i = U_0 \cdot \left(1 - \frac{I \cdot R_i}{U_0}\right) \\ &= U_0 \cdot \left(1 - \frac{R_i}{R_g}\right) = U_0 \cdot \left(1 - \frac{R_i}{R_i + R}\right) \\ &= \boxed{U_0 \cdot \frac{R}{R_i + R} = U} \end{aligned} \quad (9.114)$$

In Abb. 9.14 ist dies veranschaulicht. Man sieht hier: Je kleiner der Innenwiderstand R_i ist, desto unabhängiger ist die Nutzbare Spannung U von der Größe des angelegten Widerstandes R – und dies ist in der Technik natürlich angestrebt: Man will eine Batterie, die immer 1.5V abgibt – egal in welchem Verbraucher.

¹⁵Modellhaft ist eine reale Spannungsquelle eine ideale Spannungsquelle, wobei an einem Ausgang der Widerstand R_i angehängt ist; er ist zu dem angeschlossenen Verbraucher stets in Reihe.

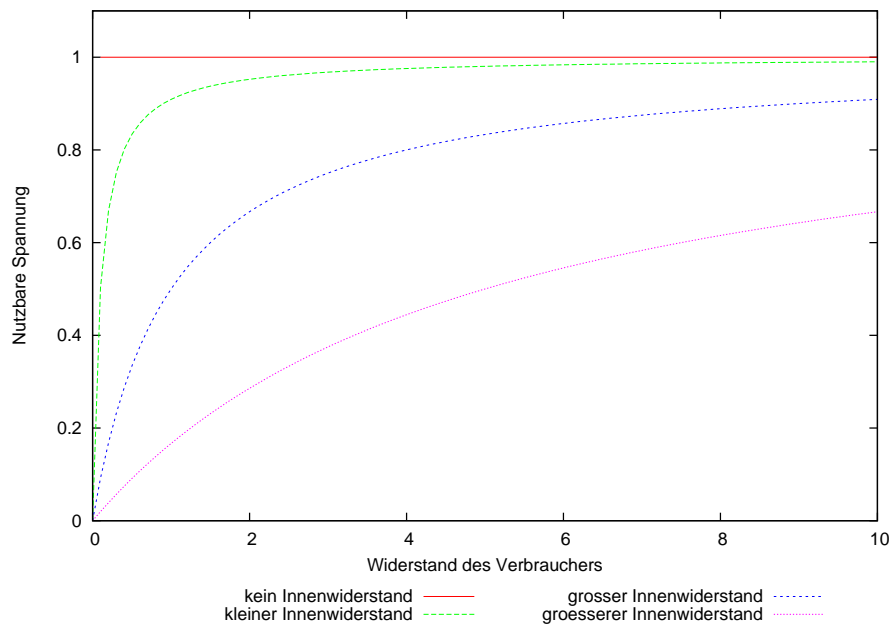


Abbildung 9.14: Nutzbare Spannung in Abhängigkeit des Innenwiderstands

GALVANISCHES Element Gibt man ein Metall in Lösung, so haben die Metallatome Bestreben („Lösungstension“ genannt) positiv ionisiert zu werden und in Lösung zu gehen. Dieses Bestreben hängt vom Material ab (Bindungsenergie der Metallatome im Metall vs Ionisierungsenergie und Hydratationsenergie der Metallionen in Lösung).

Das Metall wird durch die zurückbleibenden Elektronen negativ, die Lösung positiv. So ergibt sich ein E-Feld, welches die Positiven Ionen wieder in das Metallgitter zurückdrückt. Zwischen dem Bestreben des E-Felds und der Lösungstension stellt sich ein Gleichgewicht ein¹⁶.

Diese Anordnung wird als **Halbzelle** bezeichnet. Um Strom fließen zu lassen, benötigt man noch eine zweite Halbzelle. Zwischen diesen beiden kann man eine materialcharakteristische Spannung U messen.¹⁷ Die Spannung U ergibt sich aus den Spannungen U_g und U'_g , die zwischen Metall und Lösung bestehen, aber nicht gemessen werden können:

$$U = U_g - U'_g$$

Willkürlich hat man festgelegt, dass eine platiniierte Elektrode in einmola-

¹⁶Es handelt sich um ein **Boltzmann**-Gleichgewicht zwischen Konzentration im Metall (c_M) und Konzentration in der Lösung (c_L), wobei das Potential der Teilchen im Metall $\varphi_M \cdot z \cdot e$ und in der Lösung $\varphi_L \cdot z \cdot e$ ist. Es stellt sich dann ein Gleichgewicht ein ($U = \varphi_M - \varphi_L$):

$$\frac{c_M}{c_L} = \exp\left(-\frac{z \cdot e \cdot U}{K_B \cdot T}\right)$$

¹⁷Man kann die Spannung wirklich nur zwischen zwei Halbzellen messen, leider nicht die Spannung zwischen Metall und Lösung, weil man sonst in die Lösung ein Messinstrument tauchen müsste, welches selbst die zweite Halbzelle bildet.

rer Salzsäure die von Wasserstoffgas umspült wird („*Standardwasserstoffelektrode*“), das elektrochemische Potential 0 bekommt. Misst man also die Spannung zwischen einer Halbzelle und dieser Standardzelle, so ist die gemessene Spannung die Spannung aus der *Elektrochemischen Spannungsreihe*. Je negativer hier die Spannungen, desto größer die Lösungstension. Man sagt, das Metalle mit negativen Spannungen *unedel* sind, die mit positiven Spannungen dagegen *edel*.

Der Ladungstransport (Strom) ist hier mit Stofftransport verbunden: Am \ominus -Pol fließen die Elektronen ab, das rücktreibende Gegenfeld wird abgeschwächt und mehr Metallatome gehen in Lösung. Die positiven Ionen werden durch ein E-Feld in der Lösung zum \oplus -Pol gezogen. Am \oplus -Pol kommen Elektronen an, das Gegenfeld wird verstärkt und mehr Ionen kommen aus der Lösung als Atome ins Metall zurück.

Wichtig ist, dass die Lösungen der beiden Halbzellen so verbunden sind, dass die Ionen wandern können, sonst baut sich in der Lösung ein unausgeglichenes E-Feld auf, welches den (eigentlich nutzbaren) Strom zum Erliegen bringt.

Membranspannung Seien zwei elektrisch neutrale Lösungen mit großen negativen (bspw. CL^-) und kleinen positiven (bspw. K^+) Ionen und stark unterschiedlichen Konzentrationen durch eine Membran getrennt. Die Membran habe Poren, die so klein sind, dass die kleinen Ionen hindurchdiffundieren können, die großen jedoch nicht. Diese Diffusion geschieht durch osmotische Kräfte: Die kleinen Ionen sind bestrebt, ihre Konzentration auf beiden Seiten der Membran gleich groß zu halten und diffundieren so an den Ort niedriger Konzentration. Die großen Ionen können dies nicht tun. So werden die beiden Lösungen nicht mehr elektrisch neutral und es entsteht eine Spannung.¹⁸

Kontaktspannung Um ein Elektron aus einem Metall M_1 zu lösen, braucht man Arbeit W_1 , wenn es in ein anderes Metall aufgenommen wird, erhält es Arbeit W_2 . Die Kontaktspannung ist dann

$$U_{\text{Kontakt}} = \frac{\Delta W_i}{e} \quad (9.115)$$

Thermospannung Man baut zwei gleiche Kontaktelemente hintereinander – nur das eine in umgekehrter Reinehfolge, also $M_1-M_2-M_2-M_1$. Die Effekte durch die Kontaktspannung heben sich jetzt gerade wieder auf – nicht aber, wenn man verschiedene Temperaturen anlegt: Die Ablösearbeit ist Temperaturabhängig. Die gemessene Spannung hängt so also von der *Temperaturdifferenz* an den beiden Kontaktspannungselementen ab.

Für Kupfer gilt bspw. ein linearer Zusammenhang mit

$$U_{\text{Thermo}} = 0.04 \frac{\text{mV}}{\text{K}} \cdot \Delta T$$

¹⁸ Analog zu Fußnote 16 kann man hier die Spannung bestimmen:

$$U = \frac{R \cdot T}{z \cdot F} \cdot \ln \frac{c_1}{c_2}$$

mit der Molaren Gaskonstanten R , der FARADAY'schen Konstanten F und der Ladung z .

Auf diese Weise lassen sich Temperaturmessfühler sehr filigran ausführen und sie nehmen Temperaturänderungen sehr schnell wahr.

Peltierelement Hier wird der Effekt der Thermospannung umgekehrt: Anstatt eine Spannung zu messen, legt man eine Spannung an und bekommt eine Temperaturdifferenz an den Kontaktspannungselementen: Die Elektronen bewegen sich ständig über die Potentialdifferenzen und müssen einmal Energie abgeben (warm) und einmal aufnehmen (kalt).

Photospannung Stoßen ein positiv und ein negativ dotierter *Halbleiter* zusammen, so bildet sich eine *Raumladungszone* um die Kontaktstelle. Hier können einfallende Photonen absorbiert werden und Ladungsträger erzeugen. Durch das in der Raumladungszone herrschende E-Feld werden diese getrennt und Strom fließt.

Dies ist das Prinzip der Solarzelle.

9.4 Das Magnetische Feld

9.4.1 Unterschied zum E-Feld, Erregung (★)

Statische Elektrische Felder werden von ruhenden Ladungen hervorgerufen, statische Magnetische Felder von ruhenden Magneten. Interessant ist aber, dass in dem ruhenden Magneten der eigentliche magnetische Effekt von bewegten Ladungen in den Atomen selbst kommen.

Elektrische Felder werden von *Monopolen* gebildet: Es ist möglich, dass eine einzelne positive oder negative Ladung alleine im Raum liegt. Im Gegensatz dazu kann man einen Stabmagneten immer weiter zerteilen und wird niemals einen magnetischen Monopol finden.¹⁹

Wichtig! 97 *Ein Magnet besteht also immer aus Nord- und Südpol, wobei sich gleichnamige Pole abstoßen und ungleichnamige anziehen.*

Ein sehr bedeutender Unterschied zum Elektrischen Feld ist:

Wichtig! 98 *Feldlinien in Magnetfeldern sind immer geschlossen.*

In Elektrischen Feldern gehen Feldlinien von einer positiven zu einer negativen Ladung und enden dort. Bei einem Magneten laufen die Feldlinien bei einem Pol los, laufen zum anderen Pol und laufen *innerhalb* des Magneten zurück.

In Analogie zum Coulomb-Gesetz (vgl. Kap. 9.1.1) definiert man als Entsprechung zur Ladung Q die **Magnetische Polstärke** p und findet so experimentell als Kraft zwischen zwei Magneten

$$\vec{F}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \mu_0} \cdot \frac{p_1 \cdot p_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \quad (9.116)$$

mit

¹⁹Das stimmt leider nicht mehr: In jüngsten Forschungen sind die Effekte magnetischer Monopole nachgewiesen worden. Die Existenz von magnetischen Monopolen würde eine elegante Symmetrie zwischen B- und E-Feld ergeben. Bisher liegen die Monopole jedoch noch nicht *isoliert* vor, sondern nur als *Quasiteilchen* im Gitter eines exotischen Kristalls; einem *Spin-Eis*

Definition 9.25 (Magnetische Permeabilitätskonstante μ_0) oder „Induktionskonstante“

$$\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \quad (9.117)$$

Diese Formel ist praktisch weniger Sinnvoll, weil es ja keine Magnetischen Monopole p_i gibt: Näherungsweise bekommt man dies aber, indem man einen sehr langen Stabmagneten nimmt. So kann man definieren:

Definition 9.26 (magnetische Erregung H) eines Magneten der Polstärke p_1 wird mithilfe eines Probemagneten mit $p_2 \ll p_1$ definiert:

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{p_2} \quad (9.118)$$

Mit der Einheit $[H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$.

Eigentlich sollte man \vec{H} als **magnetisch Feldstärke** definieren – es hat sich jedoch herausgestellt, dass man diesen Begriff für die Größe \vec{B} mit

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (9.119)$$

reserviert mit der Einheit $[B] = T \text{ (Tesla)} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$. Betrachtet man das Magnetische Feld als von bewegten Ladungen erzeugt, so findet man eine bessere Analogie zum E-Feld im B-Feld, wobei man die Ladungsdichten der Elektrostatik durch Stromdichten (\rightarrow Bewegte Ladungen) ersetzt. Aus Bequemlichkeit wird in diesem Script „Magnetfeld“ und B-Feld analog verwendet.

Doch später mehr dazu.

9.4.2 Strom und Magnetfeld

Fließt Strom durch einen Leiter, so erzeugt er kreisförmig darum ein B-Feld.

Wichtig! 99 Das Wirbel-B-Feld um einen stromdurchflossenen Leiter folgt der Rechten-Faust-Regel!

Zeigt der Daumen in die (technische) Stromrichtung, so bilden die Finger der Hand die Richtung der B-Feldlinien.

Wichtig! 100 Die Stärke des B-Feldes um einen Leiter, in dem der Strom I fließt ist im Abstand \vec{r} vom Leiter

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\vec{I} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^2} \quad (9.120)$$

wobei man die Stromstärke als Pointing-Vector verwendet.

Diese Formel findet sich *experimentell*!

Um Abzuschätzen, wie das B-Feld mehrerer trivialer Leiter nebeneinander aussieht, bilden wir die B-Felder der einzelnen Leiter und überlagern sie:

Wichtig! 101 (Superposition) Es gilt das Superpositionsprinzip.

Ein paar der Erkenntnisse sind in Abb. 9.15 dargestellt.

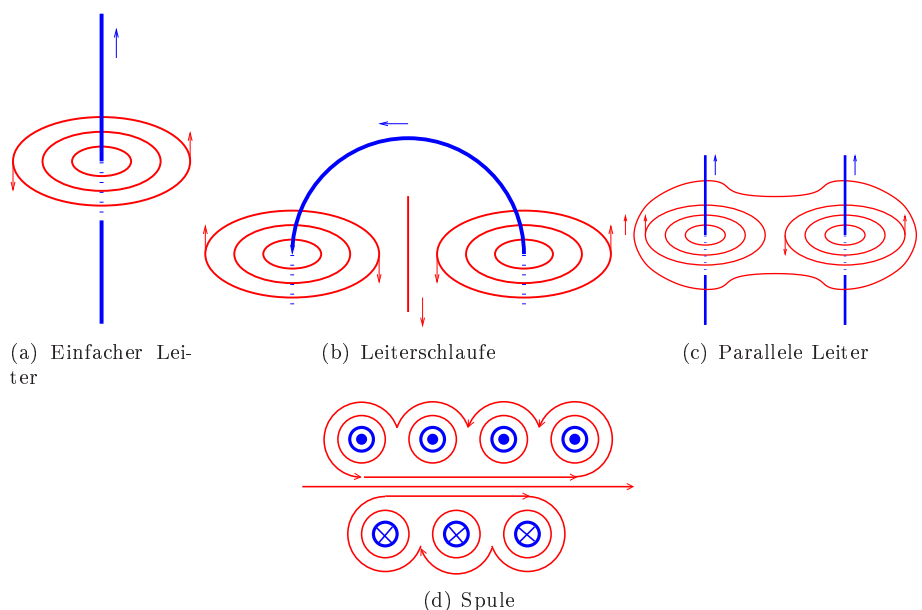


Abbildung 9.15: B-Felder von Leitern

9.4.3 Das AMPÈRE'sche Gesetz

Analog zum Elektrischen Fluss Φ_E – der auch *elektirscher Kraftfluss* heißt – definieren wir:

Definition 9.27 (Magnetischer (Kraft)Fluss Φ_B) Die Anzahl an Magnetischen Feldlinien durch die Fläche A ist:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \, d\vec{A} \quad (9.121)$$

Mit der Einheit $[\Phi_B] = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{W}$ (Weber).

Da alle Magnetfeldlinien geschlossen sind, bedeutet dies, dass in ein Volumen V genau so viele Feldlinien herein- wie herausfließen. Integriert man also über die geschlossene Oberfläche eines Volumens V (also $A = \partial V$), ergibt sich

$$\oint_A \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \quad (9.122)$$

Mit dem Satz von GAUSS (vgl. Kap. 9.1.7) finden wir (mit $A = \partial V$):

$$\oint_A \vec{B} \, d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = 0 \quad (9.123)$$

und damit

Wichtig! 102

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (9.124)$$

Die Divergenz des B-Felds verschwindet: Es hat also keine Quellen!

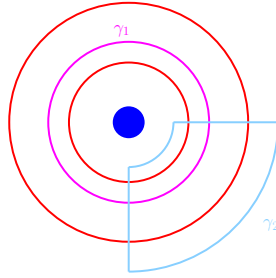


Abbildung 9.16: Integrationswege zur Herleitung des AMPÈRE'schen Gesetzes

Wir wenden dies nun auf einen Stromdurchflossenen Leiter an und integrieren das B-Feld einmal rund um den Leiter (γ_1) $\oint_{\gamma_1} \vec{B} d\vec{s}$ und einmal außerhalb des Leiters mit zwei Strecken radial zum Leiter und zwei kreissegmentigen (γ_2). Vgl. dazu Abb. 9.16.

Den Weg γ_1 kann man parametrisieren über

$$\vec{r} = R \cdot \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \phi \in [0; 2\pi[$$

Weil wir uns im Kreis bewegen ist $d\vec{s} \parallel \vec{B}$ und damit $\langle \vec{B} | d\vec{s} \rangle = \|\vec{B}\| \cdot ds$ und wegen $\vec{I} \perp \vec{r}$ ist $\|\vec{I} \times \vec{r}\| = I \cdot r$ und Mit Gl. (9.120) gilt (Wir integrieren in Polarkoordinaten, also $ds = r d\phi$):

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\|\vec{r}\|} ds = \oint_{\gamma_1} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} r d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \cdot \oint_{\gamma_1} r d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I \quad (9.125)$$

Integriert man stattdessen über γ_2 , so gilt für die Parametrisierung $\phi \in [\alpha, \beta[$ (α und β legen den Öffnungswinkel des Segments fest). Hier tragen beiden radialen Kanten nichts zum Integral bei, weil hier $\vec{B} \perp d\vec{s}$ ist und damit $\langle \vec{B} | d\vec{s} \rangle = 0$ ist, für die Kreissegmente ist die Argumentation wie oben. Für das Integral ergibt sich:

$$\oint_{\gamma_2} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\|\vec{r}\|} ds = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\|\vec{r}\|} r d\phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left(\left[\frac{r_a}{r_a} \phi \right]_{\alpha}^{\beta} + \left[\frac{r_b}{r_b} \phi \right]_{\beta}^{\alpha} \right) = 0 \quad (9.126)$$

Damit haben wir das gewünschte Gesetz gefunden:

Wichtig! 103 (AMPÈRE'sches Gesetz) Für einen beliebigen Weg γ gilt

$$\oint_{\gamma} \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \cdot I \quad (9.127)$$

wobei I der von γ eingeschlossene Strom ist.

Für eine beliebige Stromverteilung \vec{j} gilt nach Definition:

$$I = \int_A \vec{j} d\vec{A} \quad (9.128)$$

Mit dem Satz von STOKES (vgl. Kap. 9.1.8) schreiben wir das Gesetz von AMPÈRE um als

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \, d\vec{s} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{B} \, d\vec{A} = \mu_0 \cdot I \quad (9.129)$$

Und ein Koeffizientenvergleich mit Gl. (9.128) liefert:

Wichtig! 104

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}} \quad (9.130)$$

Das B-Feld ist ein Wirbelfeld, welches durch bewegte Ladungen hervorgerufen wird.

In Integralschreibweise lautet dies:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \cdot \int_A \vec{j} \, d\vec{A} \quad \text{mit } \partial A = \gamma \quad (9.131)$$

9.4.4 B-Felder verschiedener Körper

9.4.4.1 Stromdurchflossener Leiter

Wir betrachten zuers einen Stromdurchflossenen Leiter mit Durchmesser $2R$. Wir integrieren auf zwei konzentrischen kreisförmigen Wegen innen γ_i und außen γ_a .

Im Inneren nehmen wir Stromdichte j als homogen und das B-Feld als homogenes Wirbelfeld ($\vec{B} \parallel \vec{s}$ und damit $\langle \vec{B} | d\vec{s} \rangle = B \cdot ds$) an. Dadurch vereinfacht sich (mit dem Quotienten $\frac{r_1^2}{R^2}$ gibt man bei einer Homogenen Stromdichte j den Strom innerhalb eines Kreises mit Radius r_1 an, wenn der gesamte Strom I_0 durch einen Kreis mit Radius R fließt) das Wegintegral:

$$\oint_{\gamma_i} \vec{B}(\vec{r}) \, d\vec{s} = \mu_0 \cdot \int_{A_i} \vec{j} \, d\vec{A} \text{ zu } B(r) \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 \cdot I_0 \cdot \frac{\pi r_1^2}{\pi R^2}$$

und damit

$$B(r_1) = \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot r_1}{2\pi \cdot R^2} \quad \text{mit } r_1 \in [0, R] \quad (9.132)$$

Außerhalb des Leiters gilt analog (nur dass hier der Quotient $\frac{r_1^2}{R^2}$ wegfällt kann, weil der eingeschlossene Strom sowieso I_0 ist):

$$B(r_2) = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi \cdot r_2} \quad \text{mit } r_2 \in [R, \infty[\quad (9.133)$$

Das B-Feld steigt nach außen hin also linear bis zur Leiterhülle an und fällt dann reziprok proportional ab.

9.4.4.2 Koaxialkabel

Analog ist beim Koaxialkabel, welches aus einem Innenleiter mit Durchmesser $2R_i$ und einer Metallhülle mit Innenradius $2R_a$ (und vernachlässigbarer Dicke) besteht das B-Feld:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot r_1}{2\pi \cdot R^2} & \text{für } r \in [0, R_i] \\ \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi \cdot r_2} & \text{für } r \in [R_i, R_a[\\ 0 & \text{für } r \in [R_a, \infty[\end{cases} \quad (9.134)$$

Außerhalb der Metallhülle verschwindet das B-feld. Das liegt daran, dass hier der Strom, der im Innenleiter hin fließt, wieder zurückkommt. Die Summe der eingeschlossenen Ströme verschwindet damit und mit dem Gesetz von AMPÈRE muss so auch das B-Feld verschwinden.

9.4.4.3 Lange, dünne Spule

Bei einer Langen Spule betrachtet man einen Integrationspfad γ , der um N Windungen herumführt, parallel zur Spule die Länge L hat und der entweder parallel zu \vec{B} oder senkrecht dazu ist – wo $d\vec{s} \parallel \vec{B}$ ist nämlich wieder $\langle \vec{B} | d\vec{s} \rangle = B \cdot ds$ und für $d\vec{s} \perp \vec{B}$ ist $\langle \vec{B} | d\vec{s} \rangle = 0$ und muss nicht berücksichtigt werden.

Zudem ist in der Spule das B-Feld Innen weit größer als Außen, und so kann man $\vec{B}_{\text{außen}} \approx \vec{0}$ setzen. Wir rechnen:

$$\oint_{\gamma} B ds = B \cdot L = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

Wichtig! 105 Für eine *lange, dünne Spule* (Länge L , Windungszahl N) gilt

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{L} \quad (9.135)$$

Es ist deshalb wichtig, dass die Spule lang und dünn ist, weil wenn γ sich über die komplette Länge L erstreckt, wir am Ende der Spule eigentlich nicht mehr den Integrationsweg senkrecht zu L ignorieren dürfen, weil hier das Feld zur Seite geht und so eine Komponente parallel zu $d\vec{s}$ hat. Bei einer langen dünnen Spule ist dieser Effekt vernachlässigbar.

In der Technik wird oft die **Windungsdichte** $n = \frac{N}{L}$ angegeben; dafür gilt

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I$$

9.4.5 Das BIOT-SAVART'sche Gesetz

Das AMPÈRE'sche Gesetz ist zwar allgemein anwendbar, aber nicht immer einfach *handhabbar*. Das Linienintegral ist bei komplizierteren Leiterformen schwierig zu berechnen. Stattdessen zerlegen wir den Leiter in kleine Volumenelemente der Länge dl (mit Pointing-Vector $d\vec{l}$ in Richtung Stromfluss) und bestimmen dann an einem Punkt P (der Verbindungsvektor vom Volumenelement zu P ist \vec{r}) den Beitrag des Volumenelements zum B-Feld. Es gilt dann:

Wichtig! 106 (Biot-Savart'sches Gesetz) Am Punkt P gilt für den Beitrag des Volumenelements an der Stelle P „+“ $-\vec{r}$ zum B-Feld:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad (9.136)$$

Über die Anteile $d\vec{B}$ summiert oder integriert man.

9.4.6 Das Vektorpotential (★)

Wichtig! 107 Das B-Feld darf kein (skalares) Potential haben:

(GA)²⁰ Es existiere ein B-Feld-Potential φ_B , dann ist $B = -\vec{\nabla}\varphi_B$ und für die Rotation gilt²¹

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi_B) = 0$$

Dies ist aber nicht korrekt, sobald sich Ladungen bewegen (vgl. (9.130)) und damit ein Widerspruch. q.e.d.

Weil aber andererseits $\vec{\nabla} B = 0$ (vgl. (9.124)) ist, kann man eine Vektorgröße $\vec{\mathcal{A}}$ definieren:

Definition 9.28 (Vektorpotential des B-Felds) Wir definieren $\vec{\mathcal{A}}$ so, dass

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}} = 0 \quad (9.137)$$

Die zweite Bedingung heißt **Coulomb-Eichung**.

Die Eichung ist nötig, weil man sonst statt \mathcal{A} auch $\mathcal{A} + \vec{\nabla}\omega$ mit beliebiger Skalarfunktion ω hätte verwenden können:

$$\vec{\nabla} \times (\mathcal{A} + \vec{\nabla}\omega) = \vec{\nabla} \times \mathcal{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\omega)}_{\vec{0}}$$

Wir wollen nun $\vec{\mathcal{A}}$ aus einer gegebenen Stromdichte \vec{j} bestimmen. Dazu brauchen wir aus der Vektoranalysis (dies entspricht der BAC-CAB-Regel!)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathcal{A}) - \Delta \vec{\mathcal{A}} \quad (9.138)$$

mit dem LAPLACE-Operator $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$. Wegen (9.130) und weil $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}} = 0$ (nach Def.) wissen wir:

$$\Delta \vec{\mathcal{A}} = -\mu_0 \cdot \vec{j} \quad (9.139)$$

Dies ist eine partielle Differenzialgleichung 2. Ordnung mit der Lösung

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} dV_2 \quad (9.140)$$

Dabei betrachtet man $\vec{\mathcal{A}}$ am Punkt \vec{r}_1 und integriert über das gesamte stromführende Volumen V : Hier (Punkt \vec{r}_2) bestimmt man die Stromdichte im infinitesimalen Volumen dV_2 .

Um nun das B-Feld zu bestimmen, wendet man $\vec{\nabla}_1 \times \cdot$ auf Gl. (9.140) an (die 1 im Index von ∇ bedeutet, dass wir nach den Koordinaten \vec{r}_1 ableiten –

²⁰Beweis durch **G**egen**a**nnahme

²¹Der Beweis für diese Identität lässt setzt voraus, dass die partiellen Ableitungen nach x^j und x^k vertauschbar sind – dies sei gegeben! Der Beweis geht elegant mit dem ε -Tensor und EINSTEIN-Notation:

$$[\nabla \times (\nabla \varphi)]^i = \varepsilon_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi = \varepsilon_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi + \underbrace{\varepsilon_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi}_{\varepsilon_{kj}^i \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi} = 0$$

wobei $\overset{\oplus}{\varepsilon}$ nur die *positiven* Fälle von ε abdeckt und $\overset{\ominus}{\varepsilon}$ entsprechend nur die *negativen*.

integrieren jedoch nach denen an \vec{r}_2). Weil die Stromdichte genügend gutartig ist, darf man den Operator mit dem Integral vertauschen und erhält

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}_1 \times \vec{j}(\vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} dV_2 \quad (9.141)$$

Dies ergibt

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) \times \vec{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2 \quad (9.142)$$

Wobei $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist und \vec{e}_{12} der Einheitsvektor in die Richtung.

Ist die Stromdichte homogen verteilt, kann man sogar noch weiter vereinfachen: Weil $dV = dA \cdot ds$ ist

$$\vec{j} dV = \vec{j} \cdot d\vec{A} \cdot d\vec{s} = I \cdot d\vec{s}$$

und damit (das „–“ kommt daher, weil das Kreuzprodukt gedreht wurde)

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int_V \frac{\vec{e}_{12} \times d\vec{s}}{r_{12}^2} \quad (9.143)$$

Dies ist genau das BIO-SAVART'sche Gesetz aus Kap. 9.4.5.

9.4.7 Formelchen

Hier eine Übersicht über die bisher gefunden Gleichungen für statische B- und E-Felder:

E-Feld		B-Feld	
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	wirbelfrei	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$	durch bewegte Ladung erzeugt
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Durch Ladung erzeugt	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	quellenfrei
$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$	hat (Skalar)Potential	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	keine skalares- nur Vektorpotential
$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ Die Verbindung (i)			
$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$ Die Verbindung (ii)			

9.5 Bewegung geladener Teilchen im B-Feld

Wir betrachten zeitlich konstante B-Felder:

$$\dot{\vec{B}} = 0$$

9.5.1 Kraft auf ein Teilchen

Experimentell ergibt sich, dass auf Teilchen der Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem B-Feld mit dem Fluss \vec{B} bewegen, die Kraft \vec{F} mit

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})} \quad (9.144)$$

wirkt. Wir nennen sie **LORENTZkraft**.

Interessant ist, dass die Experimente statt der Gleichheit eigentlich nur eine *Proportionalität* zeigen; Die explizite *Gleichheit* gilt nur, weil die Proportionalitätskonstante in den Einheiten „verschwindet“²².

Wichtig! 108 Die *allgemeine Lorentzkraft* wirkt auf ein Teilchen, welches sich in einem B- und einem E-Feld bewegt:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.145)$$

9.5.2 Magnetische Kraft auf einen Stromdurchflossenen Leiter

Auf einen Leiter der *effektiven* Länge L (also der die Länge L *senkrecht* zu dem B-Feldlinien hat) hat, und der vom Strom I durchflossen wird, wirkt eine Kraft: Der Strom besteht aus bewegter Ladung (n ist die Teilchendichte und N die Teilchenzahl):

$$I = \frac{d}{dt} (n \cdot A \cdot q \cdot L) = n \cdot A \cdot q \cdot \underbrace{\dot{L}}_{\vec{v}_d}$$

und auf diese N Teilchen wirkt die Lorentzkraft nach (9.144)

$$\vec{F} = n \cdot \underbrace{A \cdot L}_V \cdot q \cdot (\underbrace{\vec{v}_d}_N \times \vec{B})$$

Setzt man hier das \vec{v}_d von oben ein, gilt

$$\vec{F} = L \cdot (\vec{I} \times \vec{B}) \quad (9.146)$$

Dabei macht man aus dem Strom I einen *Pointing-Vector*.

Man kann die Kraft auch in ihrer differenziellen Form schreiben. Für ein Konstantes B-Feld gilt dann bei einer konstanten Bewegung v der Ladungen q :

$$d\vec{F} = dq(\vec{v} \times \vec{B}) = dq\left(\frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B}\right) = \frac{dq}{dt}(d\vec{s} \times \vec{B}) = I \cdot (d\vec{s} \times \vec{B})$$

9.5.3 Der HALL-Effekt

Fließen Elektronen durch einen Leiter, der von einem B-Feld durchsetzt ist, so werden sie senkrecht zur Bewegungsrichtung abgelenkt. In einem normalen Stromleiter also an die Wand. Hier bildet sich ein negativer Ladungsüberschuss und Elektronen werden von hier abgestoßen.

Irgendwann ist der Ladungsüberschuss so groß, dass sich ein Gleichgewicht zwischen Lorentzkraft und Coulombkraft bildet:

$$q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -q \cdot \vec{E} \quad (9.147)$$

- Da \vec{B} und \vec{E} (durch Spannungsmessung: $E = \frac{U}{d}$) bestimmbar sind, kann man v bestimmen.

²²Nur dank deren geschickter Wahl ist die Proportionalitätskonstante 1.

- Wegen

$$\vec{j} = n \cdot \vec{v} \cdot q \quad \text{folgt} \quad \vec{v} = \frac{\vec{j}}{n \cdot q}$$

und damit

$$\frac{\vec{j}}{n \cdot q} \times \vec{B} = -\vec{E} \quad (9.148)$$

kann man mit bekanntem j , E und B die Teilchendichte n bestimmen – und sogar das Vorzeichen von q : So kann man in Metallen ermitteln, dass Elektronen Strom leiten und in Halbleitern (manchmal) Löcher.

- Ist $v = \text{const}$ bekannt, so kann man daraus B bestimmen (**Hallsonde**):

$$B_y = -\frac{E_z}{v} \quad (9.149)$$

9.5.4 Bewegte Leiter im B-Feld

Bewegt man einen Leiter (Länge d) durch ein B-Feld, so erfahren die Ladungsträger darin eine Lorentzkraft, die für positive und negative Ladungsträger entgegengesetzt aber gleich stark ist: Die Summe der Kräfte hebt sich auf, es fließt aber ein Strom.

Wenn der Leiter kein Teil eines Stromkreises ist, so bildet sich durch die getrennten Ladungen ein E-Feld („Gegen-E-Feld“) \vec{E} . Im Gleichgewicht gilt wieder (9.147). Dieses E-Feld sorgt für eine *Spannung* $U = E \cdot d$ im Leiter mit

$$U = -B \cdot v \cdot d$$

Wird der Leiter hin und her bewegt, so wird eine Wechselspannung erzeugt: **Generatorprinzip**.

9.5.5 Kraft auf einen magnetischen Dipol im B-Feld

Definition 9.29 (magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$) (auch \vec{p}_m oder \vec{m}) einer Leiterschleife der Fläche A , in dem Strom der Stärke I , fließt, hat das Dipolmoment

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} \quad (9.150)$$

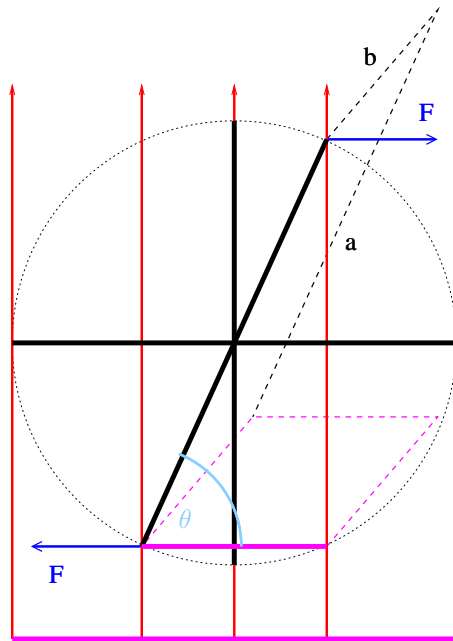
Wichtig ist dabei, dass das Dipolmoment *senkrecht* zur Leiterschleife steht!

Wir betrachten nun eine Leiterschleife der Fläche $A = a \cdot b$ im B-Feld des Flusses \vec{B} . (Vgl. Abb. 9.17). Die Elektronen, die an der Vorderseite fließen haben eine Bewegungskomponente \vec{v}_\perp^a senkrecht zu \vec{B} und eine \vec{v}_\parallel^a parallel zu \vec{B} . Nur erstere ist für eine Lorentzkraft verantwortlich²³. Da aber auf der Vorderseite der Strom in die eine und auf der Rückseite in die Gegenrichtung fließt, heben sich die entstehenden Kräfte auf. Es ist also nur die Bewegung der Elektronen auf der b -Kante interessant.

Mit Gl. (9.146) folgt weil $\vec{I}_b \perp \vec{B}$:

$$F = I \cdot B \cdot b \quad (9.151)$$

²³ das \times -Produkt paralleler Vektoren verschwindet



Wir wollen nun das *Drehmoment* \vec{M} gemäß Gl. (3.23) bestimmen, dazu lösen wir das Kreuzprodukt $\vec{r} \times \vec{F}$ auf zu

Die „2“ kommt daher, dass die Kraft oben und unten angreift. θ (bzw. sein Gegenwinkel) ist in Abb. 9.17 zu sehen.

$$M = a \cdot I \cdot B \cdot b \cdot \sin \theta \quad (9.153)$$
$$\vec{M} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B} \quad (9.154)$$
$$\boxed{\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}} \quad (9.155)$$

In einem H -Atom kreist ein Elektron (Umlauffrequenz ν) auf einer Bahn (Radius R), was einem Wirbelstrom entspricht:

$$I = q\nu = q\frac{v}{2\pi R}$$

	magnetischer Dipol	Elektrischer Dipol
Drehmoment \vec{M}	$\vec{\mu} \times \vec{B}$	$\vec{p} \times \vec{E}$
pot. Energie	$-(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$	$-(\vec{p} \cdot \vec{E})$
Kraft F (inhom. Feld)	$(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$	$(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$

Tabelle 9.4: Folgerungen aus Analogie zum E-Feld

Wir bestimmen das Dipolmoment dieses Wirbelstroms (mit $v = \omega R$ und da $\vec{A} \parallel \vec{\omega}$ ist $\|\vec{A}\| = A = \pi R^2$):

$$\|\vec{\mu}\| = qv \cdot A = q \frac{\omega}{2\pi} \pi R^2 = \frac{1}{2} q R^2 \omega \text{ bzw. } \vec{\mu} = \frac{1}{2} q R^2 \vec{\omega}$$

Der Drehimpuls des Elektrons ist

$$\vec{L} = m(\vec{R} \times \vec{v}) = mR^2 \vec{\omega}$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert einen Zusammenhang zwischen Drehimpuls des Elektrons und magnetischem Dipolmoment:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot \vec{L} \quad (9.156)$$

Da der Drehimpuls von Elektronen im H -Atom gequantelt ist und nur als ganzzahliges Vielfaches $l \in \mathbb{N}$ vom PLANCK'schen Wirkungsquantum \hbar vorkommt ($L = l \cdot \hbar$) können wir für $l = 1$ einsetzen: $q = -e$ und $m = m_e$.

$$\mu^e = \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} \hbar =: \mu_B \quad (9.157)$$

Diese Größe bezeichnet man als **Bohr'sches Magneton**. \diamond

9.5.6 Bahnen freier Ladungen im B-Feld

Die Lorentzkraft steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung und treibt das Teilchen so in eine Kreisbahn; das Teilchen behält seine ursprüngliche Geschwindigkeit bei, nur seine *Richtung* wird verändert, weil die Kraft keine bremsende ist, da sie nicht parallel zur Geschwindigkeit wirkt: $\|\vec{v}\| = v_0$. Es gilt mit der Zentripetalkraft:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = q \cdot v \cdot B \text{ und damit } r = \frac{mv}{qB} \quad (9.158)$$

Mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{v}{r}$ erzählten wir die **Zyklotronfrequenz** ω_c zu

$$\boxed{\omega_c = \frac{q}{m} \cdot B} \quad (9.159)$$

Kreiselt also ein Teilchen in einem B-Feld, so hängt seine Kreisfrequenz nur von der Stärke des B-Felds und der **spezifischen Teilchenladung** $\frac{q}{m}$ ab.

\diamond

Zyklotron (S. Abb. 9.18(a)) Ein Elektron wird zwischen metallenen Platten, die von einem B-Feld durchsetzt sind, durch eine angelegte Spannung U beschleunigt (Es bildet sich ein E-Feld mit $E = \frac{U}{d}$). Innerhalb der Platten wird es ohne Geschwindigkeitsverlust abgelenkt und wieder zum Spalt zurückbefördert, wo es erneut beschleunigt wird, wofür die Polung der Platten natürlich umgekehrt werden muss.²⁴

Massenspektrometer (S. Abb. 9.18(b)) Teilchen einer Geschwindigkeit fallen in ein B-Feld ein und absolvieren je nach spezifischer Teilchenladung einen unterschiedlich großen Radius. Ein Detektor registriert die Teilchenströme.

Geschwindigkeitsfilter (S. Abb. 9.18(c)) Nur Teilchen, bei denen sich Lorentz- und Coulombkraft ausgleichen kommen durch die Blende: Sind sie zu schnell, werden sie vom B-Feld zu stark abgelenkt, sind sie zu langsam, sind sie zu lange im E-Feld und werden davon abgelenkt. Die Filtergeschwindigkeit ist:

$$q \cdot \vec{E} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \text{ oder } qE = qvB \Leftrightarrow E = Bv \Leftrightarrow v = \frac{E}{B}$$

Schraubenbahn Ist \vec{v} nicht senkrecht zu \vec{B} , so ist $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ und damit

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \left((\vec{v}_\perp \times \vec{B}) + \underbrace{(\vec{v}_\parallel \times \vec{B})}_{\vec{0}} \right) \quad (9.160)$$

Es ergibt sich also wegen \vec{v}_\perp eine Kreisbewegung und \vec{v}_\parallel wird davon nicht beeinflusst. Auf seiner Kreisbahn wird das Teilchen noch zusätzlich in Richtung Kreisachse bewegt: Auf einer Schraubenbahn.

Teilchenfalle (S. Abb. 9.18(d)) Je tiefer das Teilchen kommt, desto stärker wird \vec{B} und damit der Radius kleiner (Gl. (9.158)). Weil das B-Feld inhomogen ist, hat die Lorentzkraft eine Komponente, die für die Kreisbahn zuständig ist, aber auch eine Komponente, die nach *oben* zeigt: Das Teilchen wird abgebremst und schließlich nach oben reflektiert. Damit der Drehimpuls L erhalten bleibt, rotiert das Teilchen schneller: Wegen

$$L = m\omega r^2 = \text{const} \text{ und mit } \omega = \frac{qB}{m} \text{ folgt } B \cdot r^2 = \text{const} \text{ und } r \sim \frac{1}{\sqrt{B}}$$

◇

9.6 Induktionserscheinungen

9.6.1 FARADAY'sches Induktionsgesetz

Durch Experimente findet man:

²⁴Die Geschwindigkeit der Teilchen ist nach oben beschränkt, weil sie bei großen Geschwindigkeiten Strahlen und so (Bewegungs)Energie verlieren.

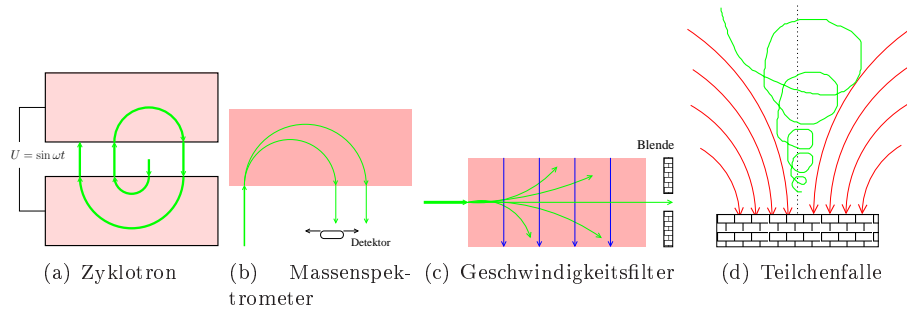


Abbildung 9.18: Anwendung: Bahnen freier Ladungen im B-Feld

Wichtig! 109 (FARADAY'sches Induktionsgesetz) Ändert sich der Magnetische (Kraft)Fluss durch eine Leiterschleife, so wird die Spannung U_i induziert:

$$\boxed{U_i = -\dot{\Phi}_B} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad (9.161)$$

◇ Lässt man eine Leiterschleife der Fläche A in einem homogenen, zeitlich konstanten B-Feld rotieren, wird Wechselstrom induziert.²⁵

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \vec{B} \int_A dA = \vec{B} \cdot \vec{A}(t) = B \cdot \hat{A} \cdot \cos \theta$$

Ist θ der Winkel zwischen Spulennormaler (\vec{e}_A) und B-Feldvektor, so gilt für θ , weil die Spule rotiert:

$$\theta = \omega t$$

Setzt man dies ein, folgt

$$\Phi_B = B \cdot \hat{A} \cdot \cos \omega t \text{ und } -\dot{\Phi}_B = -(-B \cdot \hat{A} \cdot \omega \cdot \sin \omega t) = U_i^{(1)}$$

Für N Windungen gilt entsprechend

$$U_i^{(N)} = N \cdot B \hat{A} \omega \sin \omega t$$

Wenn man umgekehrt die Schleife festhält und das B-Feld variiert ($\vec{B} = \vec{B}(t)$), so ist

$$\Phi_B = \Phi_B(t) = \int_A \vec{B}(t) d\vec{A} \text{ und } -\dot{\Phi}_B = -\int_A \dot{\vec{B}}(t) d\vec{A} = U_i \quad (9.162)$$

Diese Spannung kann auf ein E-Feld zurückgeführt werden; mit Gl. (9.14) gilt:

$$U = \int_{\gamma} \vec{E} d\vec{s} \quad (9.163)$$

²⁵ Wäre \vec{B} nicht homogen, so müsste man für Φ_B schreiben:

$$\Phi_B(t) = \int_{A(t)} \vec{B} d\vec{A} \text{ also bspw. } \Phi_B(t) = \int_{\hat{A} \cdot \cos \omega t} \vec{B} d\vec{A}$$

wobei $\gamma = \partial A$ ist. Demnach handelt es sich um einen geschlossenen Integrationsweg – also \oint statt \int . Es gilt mit dem Satz von STOKES (vgl. Kap. 9.1.8):

$$U = \oint_{\gamma} \vec{E} \, d\vec{s} = \int_A \vec{\nabla} \times \vec{E} \, d\vec{A} \quad (9.164)$$

Ein Vergleich von Gl. (9.162) und Gl. (9.164) liefert:

Wichtig! 110

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\dot{\vec{B}} \quad (9.165)$$

*Eine zeitliche Änderung des B-Felds induziert ein elektrisches **Wirbelfeld!***

Dieses induzierte E-Feld hat kein Potential: Es verläuft rund um die B-Feldlinien und beginnt und endet nicht bei Ladungen. Es verhält sich also völlig anders, als wir es bisher kennengelernt hatten.

Das $\dot{}$ in Gl. (9.165) steht für eine *partielle* Zeitableitung. Diese abkürzende Schreibweise sollte nur dann verwendet werden, wenn eine Verwechslung mit der totalen Zeitableitung ausgeschlossen ist!

9.6.2 Die LENZ'sche Regel

Wichtig! 111 (LENZ'sche Regel) *Die Induktion wirkt ihrer Ursache entgegen.*

Verkleinert sich \vec{B} , so wird eine Spannung induziert welche Ursache für einen Strom ist, der wiederum ein B-Feld hervorruft, welches \vec{B} verstärkt. Nimmt \vec{B} zu, so wirkt das neue B-Feld \vec{B} entgegen.

Werden in einem Leiter Ströme induziert, so fließen diese so, dass sie die Bewegung, die sie verursachte, hemmen.

Man kann dies mit dem Energieerhaltungssatz zeigen: Bewegt man einen Magneten in eine Leiterschleife, so wird mit $U_i = -\dot{\Phi}_B$ ein Strom $I = \frac{U_i}{R} = -\frac{\dot{\Phi}_B}{R}$ erzeugt. Dazu muss in der Leiterschleife die Leistung $P = I^2 \cdot R$ aufgebracht werden. Diese Leistung kommt aus der Kinetischen Energie des Stabmagneten: Er wird gebremst, d.h. auf den Magneten wirkt effektiv eine Kraft \vec{F} entgegen \vec{v} . Diese Kraft ist die Abstoßung des Stabmagneten und dem B-Feld, welches sich durch den Induktionsstrom etablieren konnte.

◇ Wir wollen ein paar Beispiele betrachten:

- Kurzzeitig hohe B-Felder erzeugen (S. Abb. 9.19(a)): (Permanente Felder sind bis maximal 25 T möglich.) Durch Sprengstoff wird die Fläche kurzfristig stark verkleinert; Φ_B ändert sich hier sehr stark: $\dot{\Phi}_B \ll 0$ und $U_i \gg 0$. Diese starke Spannung lässt einen starken Strom fließen, welcher ein B-Feld induziert. Das induzierte Feld ist bis zu 1400 T stark.
- Eine Leiterschleife aus einem B-Feld ziehen (S. Abb. 9.19(b)): Bewegt man die Schleife, wird ein Strom induziert. Die geladenen Teilchen erfahren eine Lorentzkraft entgegen der Zugrichtung.

Ist der Widerstand $R \rightarrow 0$, so ist $I \rightarrow \infty$ und wegen $I \sim F$ ist der Leiter nicht zu bewegen. Bei $R \rightarrow \infty$ dagegen geht $I \rightarrow 0$ und so auch $F \rightarrow 0$.

Wählt man R so, dass man das erzeugte B-Feld ignorieren kann, so ist

$$\Phi_B = B \cdot b \cdot x \text{ und } \dot{\Phi}_B = B \cdot b \cdot v \text{ und so } I = -\frac{Bb}{R} \cdot v$$

und damit die Lorentzkraft

$$F = I \cdot B \cdot b = -\frac{B^2 b^2}{R} \cdot v \sim -v$$

Auf eine Spule übertragen heißt das: Möchte man eine Spule in ein B-Feld einbringen, wird sie abgestoßen: Der Fluss in der Spule soll erhöht werden und durch Induktion entsteht ein (abstoßendes) Gegenfeld. Möchte man sie herausziehen, wird sie zurückgehalten: Der Fluss soll erniedrigt werden und durch Induktion wird er erhöht und das entstehende Feld verstärkt das bestehende.

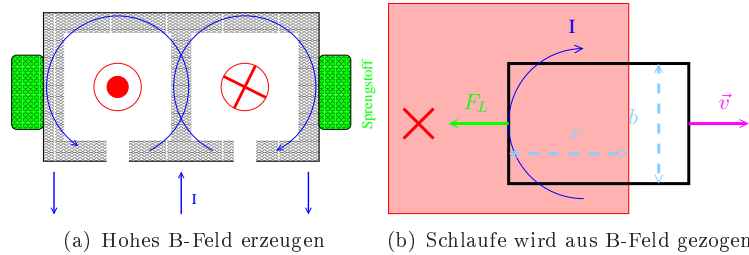


Abbildung 9.19: Beispiele für das Induktionsgesetz

◇

9.6.3 Selbstinduktion

Eine Stromdurchflossene Leiterschleife baut ein B-Feld auf. Dieses B-Feld selbst induziert eine Spannung in der Spule und ändert U damit selbst.

Aus Kap. 9.4.4 wissen, ist in einer Spule $B \sim I$ und damit innerhalb der Spule auch

$$\Phi_B \sim I \sim B$$

Die Proportionalitätskonstante für $\Phi_B \sim I$ heißt

Definition 9.30 ((Eigen- oder Selbst)Induktivität L) ist der Quotient

$$L = \frac{\Phi_B}{I} \text{ oder differenziell } L = \frac{d\Phi_B}{dI} \quad (9.166)$$

Mit der Einheit $[L] = \frac{V \cdot s}{A} = H$ (Henry).

Mit ihr lassen sich Induktionsspannungen U_i einfacher berechnen, als wenn man immer Φ_B und dann $\dot{\Phi}_B$ bestimmen muss. Es gilt der wichtige Zusammenhang:

$$U_i = -L \cdot \frac{d}{dt} I = -L \cdot \dot{I} \quad (9.167)$$

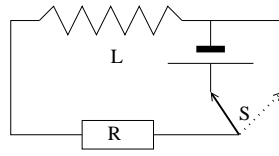


Abbildung 9.20: Schaltplan beim Laden und Entladen einer Spule

Ändert sich in einer Spule also der Stromfluss, so wird eine Spannung induziert, die dieser Änderung entgegenwirkt! Dieser Prozess heißt **Selbstinduktion**.

Wir bestimmen die Eigeninduktivität einer SPULE der Länge l mit N Windungen: Aus (9.135) wissen wir $B = \mu_0 I \frac{N}{l}$. Weil \vec{B} in der Spule (annähernd) homogen ist, gilt

$$\Phi_B = B \cdot A = \mu_0 I \frac{N}{l} \cdot A \quad \text{und} \quad -\dot{\Phi}_B = -\mu_0 \cdot \dot{I} \cdot \frac{N}{l} \cdot A = -\mu_0 \frac{N^2}{l} A \cdot \dot{I}$$

und für die Induktionsspannung

$$U_i = -N \cdot \dot{\Phi}_B = -\mu_0 \frac{N^2}{l} A \cdot \dot{I}$$

Wichtig! 112 Die Induktivität L einer langen dünnen Spule ist

$$L_{\text{Spule}} = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot A \quad (9.168)$$

oder in technischerer Schreibweise

$$L_{\text{Spule}} = \mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot l = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V$$

◇ Ladevorgänge bei einer Spule. Beim **Ausschaltvorgang** wird der Schalter S geöffnet. Aus der *Maschenregel* folgt:

$$RI + L\dot{I} = 0 \quad \text{oder} \quad RI = -L\dot{I}$$

Dabei *addiert* man bei der linken Gleichung, obwohl man nach der Maschenregel ja eigentlich alle Spannungen aufsummiert; danach müsste gelten $RI + (-L\dot{I}) = 0$. Hier ist aber wichtig, dass die Induktionsspannung $U_i = -L\dot{I}$ *entgegen* der herrschenden Spannung wirkt, deswegen müssen wir sie abziehen: $RI - (-L\dot{I}) = 0$.

Die Spannung, U_L , die an der Spule selbst von außen anliegt (so wie eine Spannung bspw. am Kondensator anliegt) ist formal *verschieden* von U_I : Dieses U_i ist eine (indirekte)²⁶ Folgerung aus der anliegenden Spannung U_L .

Die Lösung der DGL ist:

$$I(t) = \hat{I} \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) \quad \text{also} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Vergleiche dazu den Kondensator (Kap. 9.3.6): Hier war $\tau = R \cdot C$.

²⁶ Aus der angelegten Spannung folgt ein Stromfluss und aus der Änderung dieses Flusses folgt die Induktionsspannung.

Mit der Anfangsbedingung $I(t=0) = I_0$ folgt

$$I(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) \quad (9.169)$$

Für den **Einschaltvorgang** gilt entsprechend mit der Maschenregel

$$RI + L\dot{I} = U_0$$

Mit einem Ansatz vom Typ der Rechten Seite kann man dies lösen:

$$I(t) = \hat{I} \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) + I_0$$

Mit der Anfangsbedingung $I(t=0) = 0$ folgt

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \text{ und } \hat{I} = -I_0$$

und damit als Lösung

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)\right) \quad (9.170)$$

◇

Wichtig! 113 Induktionsspannungen werden nach der LENZ'schen Regel bei Rechnung mit den KRICHHOFF'schen Gesetzen mit (-1) multipliziert, weil sie der (eigentlichen) Spannung entgegenwirken.

9.6.4 Die Energie des B-Felds

Schaltet man eine Spule ab, so fließt ein Strom (s. Gl. (9.169)). Dieser verrichtet am Widerstand die Arbeit W mit

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty I \cdot U \, dt = \int_0^\infty RI^2 \, dt \\ &= \int_0^\infty R \cdot I_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{2R}{L} \cdot t\right) \, dt = \left[-I_0^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \exp\left(-\frac{2R}{L} \cdot t\right)\right]_0^\infty \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \cdot I_0^2 \cdot L = W} \end{aligned} \quad (9.171)$$

Um die **Energiedichte der Spule** zu bestimmen, setzen wir L aus Gl. (9.168) und B aus Gl. (9.135) ein:

$$\varrho_{E,V} = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \mu_0 Al \left(\frac{N}{L}\right)^2 \cdot I_0^2 \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{2} \cdot Al \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot B^2$$

und erhalten so

$$\varrho_{E,V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot B^2 \quad (9.172)$$

Diese Formeln sind wieder denen des E-Feldes sehr ähnlich:

E-Feld	B-Feld
$W = \frac{1}{2} CU^2$	$W = \frac{1}{2} LI^2$
$\varrho_{E,V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$	$\varrho_{E,V} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$

9.7 Wechselstromkreis

Bei einem Stromkreis mit einem **OHM'schen Widerstand** schwingen Strom und Spannung in Phase. Statt der (Momentan)Leistung $P = P(t)$ verwendet man

Definition 9.31 (Wirkleistung \bar{P}) Dies ist der Mittelwert der Leistung:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(t) dt \quad (9.173)$$

Im Wechselstrom mit $U(t) = \hat{U} \cos \omega t$ ist

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \hat{I} \cdot \hat{U} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \quad (9.174)$$

Würden wir statt des Wechselstroms Gleichstrom verwenden, sodass sich die selbe Wirkleistung ergibt, würde man

$$U_e(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U} \text{ und } I_e(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I} \quad (9.175)$$

verwenden. Dies bezeichnet man auch als

Definition 9.32 (Effektiver Strom I_e bzw. Effektive Spannung U_e)
Gleichstrom, der die selbe Leistung abgibt, wie der entsprechende Wechselstrom:

$$\bar{P}_e \equiv \bar{P}$$

Man schreibt für das (zeitliche) Mittel einer Größe x manchmal auch $\langle x \rangle$.

Verfügt der Stromkreis dagegen über eine **Spule** oder einen **KONDENSATOR**, so sind Strom und Spannung nicht mehr in Phase. Sei bspw.

$$U = \hat{U} \cdot \cos \omega t \text{ und } I = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

wobei φ die (zeitlich konstante) *Phasenverschiebung* angibt, so ist die Wirkleistung abhängig von derselben:²⁷

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} UI d\theta = \frac{1}{2\pi} \hat{U} \hat{I} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \cos(\theta + \varphi) d\theta = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cdot \cos \varphi$$

Um dreiphasige Wechselspannung zu erzeugen, lässt man einen Magneten rotieren und hält drei Spule in der Nähe in denen die Spannung induziert wird (**Generatorprinzip**). Die drei Spulen werden symmetrisch um den rotierenden Magneten verteilt und alle an einem Ende geerdet. So erhält man drei Phasen, die alle um $\frac{2\pi}{3}$ phasenverschoben sind:

$$U_1 = \hat{U} \cos(\omega t + 0) , \quad U_2 = \hat{U} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \text{ und } \quad U_3 = \hat{U} \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3})$$

²⁷ Zur Integration benötigt man das Additionstheorem (BRONSTEIN⁷ Gl (2.124)) $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$ und kann anschließend $x = 2\theta + \varphi$ substituieren.

Verwendet man nun eine der Phasen gegen die Erde, erhält man „normale“ Wechselspannung mit \hat{U} . Schaltet man dagegen zwei Phasen gegeneinander, so erhält man²⁸

$$U_1 - U_2 = -2\hat{U} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \Delta\varphi)$$

Man kann auch weitere Spulen hinzufügen und bekommt so mehrphasigen Strom.

9.7.1 Komplexe Widerstände

Wir betrachten einen Stromkreis, der nur eine Spule L (**Induktivität**) und eine Wechselspannungsquelle enthält. Nach der Maschenregel (vgl. 9.3.6) gilt, wenn die Spannung $U = \hat{U} \cos \omega t$ angelegt wird:²⁹

$$U + U_i = 0 \text{ bzw. } \hat{U} \cos \omega t = L \dot{I} \text{ und damit } \dot{I} = \frac{\hat{U}}{L} \cos \omega t \quad (9.176)$$

Löst man dies per Integration nach t , erhält man

$$I = \frac{\hat{U}}{\omega \cdot L} \sin \omega t = \hat{I} \cdot \sin \omega t \quad \text{mit } \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega \cdot L} \quad (9.177)$$

Damit hat man eine *Phasenverschiebung* zwischen Strom I und Spannung U von $\varphi = \frac{\pi}{2}$: *Der Strom fließt der Spannung um 90° hinterher.* Zuerst muss eine Spannung aufgebaut werden, damit Strom fließen kann.

Der **induktive Widerstand** der Spule ist im reellen

$$|R_{\text{Spule}}| = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega \cdot L \quad (9.178)$$

Wir führen nun einen Formalismus ein; wir betrachten **Strom und Spannung** in der **Komplexen Ebene**:

$$Z, U, I \in \mathbb{C}$$

Die eigentlich messbaren Größen stellen den *Realteil* der Zahl dar, während der *Imaginärteil* als Blindwert bezeichnet wird. D.h. der Strom fließt zwar im Stromkreis, kann dort jedoch keine Arbeit verrichten.³⁰

²⁸ Additionstheorem $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$, BRONSTEIN⁷ Gl. (2.118)

²⁹ Interessant ist hier, dass die Induktivität positiv auf der Seite der Spannungsquelle steht. Dies ist aber nur folgerichtig, weil wir oben (Kap. 9.6.3) besprochen hatten, dass U_i der allgemeinen Stromrichtung *entgegenläuft* und damit eigentlich ein „–“ verdient. Wir hätten also rein formal aufgestellt: $-U - U_i = 0$ (das Minus bei U , weil hier eine *Quelle* ist).

³⁰ Dass diese eigentlich nicht messbaren Blindwerte existieren sieht man bei großen Firmen: Diese müssen für (große) Blindwerte bezahlen, weil diese dafür sorgen, dass die Leistung kurzzeitig aus dem Netz gezogen werden und sofort danach wieder eingespeist werden: Das belastet das Stromnetz.

Wir wollen nun die Rechnung zur Spule nochmal im Komplexen durchführen. Die Größen, mit denen wir oben gerechnet haben seien die jeweiligen Realteile:³¹

$$U = \hat{U} e^{i\omega t} = \hat{U} (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t) \text{ also } \Re U = \hat{U} \cos \omega t \quad (9.179)$$

Analog zu Gl. (9.176) gilt:

$$\dot{I} = \frac{\hat{U}}{L} e^{i\omega t} \quad (9.180)$$

und damit mit Integration

$$I = \frac{\hat{U}}{i \cdot \omega \cdot L} \cdot e^{i\omega t} \quad (9.181)$$

Mit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ folgt nun für den Widerstand als Quotient $\frac{U}{I}$, den wir Z_L nennen wollen:

$$Z_L = \frac{U}{I} = \frac{\hat{U} e^{i\omega t}}{\frac{\hat{U}}{i \cdot \omega \cdot L} \cdot e^{i\omega t}} = \omega \cdot L \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i \cdot \omega \cdot L = Z_L} \quad (9.182)$$

Wie man sieht ist Z_L betragsmäßig wie R_{Spule} und hat die Phase³² $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Wichtig! 114 (Der Komplexe Widerstand $Z = \frac{U}{I}$) enthält alle Informationen wie sich Spannung und Strom zueinander verhalten.

D.h. bei Wechselstrom rechnet man am besten nur mit komplexen Werten. Dabei muss man aber bedenken:

Wichtig! 115 (Die Natur ist reell) Nur die Realteile $\Re I$ und $\Re U$ sind in einer Schaltung messbar!

Wir wollen nun noch den Komplexen Widerstand eines Kondensators (einer **Kapazität**) bestimmen. Dazu betrachten wir einen Stromkreis, der nur eine Wechselspannungsquelle $U = \hat{U} e^{i\omega t}$ und einen Kondensator C mit Spannung U_c enthält. Mit der *Maschenregel* folgt (hier müssen wir als mathematische Hilfe $Q \in \mathbb{C}$ zulassen):

$$U = U_c \text{ und damit } \hat{U} \cdot e^{i\omega t} = \frac{1}{C} \cdot Q \quad (9.183)$$

wegen $I = \dot{Q}$ folgt durch Ableiten nach der Zeit t :

$$I = \hat{U} \cdot C \cdot i \omega \cdot e^{i\omega t} \quad (9.184)$$

und für den komplexen Widerstand

$$Z_C = \frac{U}{I} = \frac{\hat{U} \cdot e^{i\omega t}}{\hat{U} \cdot C \cdot i \omega \cdot e^{i\omega t}} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot e^{i\frac{-\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} = Z_C} \quad (9.185)$$

³¹Achtung: $U \in \mathbb{C}$ aber $\hat{U} \in \mathbb{R}$!

³²für $\xi \in \mathbb{C}$ gibt es zwei Darstellungen:

$$\xi = \Re \xi + i \Im \xi = a + i b \text{ oder } \xi = |\xi| \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } \tan \varphi = \frac{\Im \xi}{\Re \xi}$$

wobei φ als *Phase* bezeichnet wird.

Und wir können als Phase $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ablesen: *Der Strom läuft der Spannung um 90° voraus.* Eine Erklärung dafür ist, dass zuerst Ladung fließen muss, damit sich Spannung im Kondensator aufbauen kann.

Trivialerweise gilt für einen (normalen) Widerstand R im Komplexen

$$\boxed{R = Z_R} \quad (9.186)$$

damit hat man hier keine Phasenverschiebung $\varphi = 0$.

9.7.2 Schaltungen mit Komplexen Widerständen

Wichtig! 116 (Für Schaltungen mit komplexen Widerständen)
gelten die selben Regeln wie gewohnt.

Man kann sogar sagen, dass die „normalen“ oder Gleichstromschaltungen nur Sonderfälle der neuen komplexen Betrachtungsweise sind.

Wir betrachten einen Stromkreis mit Widerstand R , Spule L und Kondensator C mit einer Wechselspannungsquelle $U = \hat{U} e^{i\omega t}$ in Reihe geschaltet.

Aus der *Maschenregel* folgt³³ mit $I = \dot{Q}$:

$$U_C + U_R - U - U_i = 0 \text{ also } \frac{1}{C}Q + R\dot{Q} + L\ddot{Q} = \hat{U} e^{i\omega t} \quad (9.187)$$

und durch ableiten nach der Zeit

$$\frac{1}{C}I + R\dot{I} + L\ddot{I} = \hat{U} \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t}$$

Also eine DGL 2. Ordnung. Der Lösungsansatz ist³⁴

$$I = I(t) = \hat{I} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Dieser liefert

$$\left(\frac{1}{C} + i\omega R - L\omega^2 \right) \cdot I = i\omega U \quad (9.188)$$

Und damit ist wegen $\frac{1}{i} = -i$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\left(\frac{1}{C} + i\omega R - L\omega^2 \right)}{i\omega} = \frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L = R + i \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L \right) \quad (9.189)$$

Dies ist also als hätten wir die komplexen Widerstände addiert, wie man es von der Reihenschaltung gewöhnt ist:

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L$$

³³Hier haben die Spannungsquelle und die induzierte Spannung negative Vorzeichen: Die Spannungsquelle, weil sie Leistung *liefert* anstatt sie zu verbrauchen, und die Induktionsspannung, weil sie dem allgemeinen Stromfluss (der allgemeinen Spannung) in der Masche entgegenarbeitet.

³⁴Man verwendet „ $-\varphi$ “, weil die Phase eigentlich beim Widerstand Z liegt; mit $U = Z \cdot I$ wird so die Phase („ $+\varphi$ “) des Widerstands ausgeglichen zur „Phase“ „0“ der Spannung.

Wir haben also eine Phase von

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (9.190)$$

und ein \hat{I} von

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{|Z|} \quad (9.191)$$

◇ Legt man an einem **Tiefpass** (S. Abb. 9.21(a)) die Eingangsspannung $U_e = U_e(t)$ an, so fließt der Strom $I = I(t) = \frac{U_e(t)}{Z}$. Man kann sagen, dass dieser Aufbau ein Kondensator und ein Widerstand in Reihe geschaltet sind, wobei man die Spannung des Kondensators bestimmt. Was man dabei ignoriert, ist, dass U_a einen Widerstand hat, also dass hier die Schaltung eigentlich *belastet* wird. Weil ein Spannungsmesser aber einen recht großen (OHM'schen) Widerstand hat, kann man dies ignorieren...

Mit der Maschenregel folgt für die linke Masche³⁵

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} \text{ und } I = \frac{U_e}{R + \frac{1}{i\omega C}}$$

und für die rechte Masche

$$U_a = I \cdot Z_C = \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \cdot U_e = \frac{U_e}{1 + i\omega RC}$$

Uns interessiert nun das Verhältnis der Spannungen:³⁶

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Dieses ist bei klein(st)en Frequenzen am Größten und nimmt für große Frequenzen ab.

Bei einem **Hochpass** nimmt man entsprechend die Spannung am Widerstand ab (vgl. Abb. 9.21(b)) und erhält so

$$U_a = I \cdot R = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \cdot U_e = \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}} U_e$$

Und für das Spannungsverhältnis:³⁷

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Bei kleinen Frequenzen verschwindet das Verhältnis praktisch: Es kommt kein Signal durch, bei großen Frequenzen ist das Verhältnis ungefähr 1 : 1.

Die Frequenzabhängigen Spannungsverhältnisverläufe sind in Abb. 9.21(c) zu sehen.

◇

³⁵Mit der oben angesprochenen Näherung ist $I_R = I_C$.

³⁶Darauf kommt man, wenn man mit $(1 - i\omega RC)$ erweitert, den Real- und Imaginärteil bestimmt und anschließend $\sqrt{\Re^2 + \Im^2}$ rechnet.

³⁷Gleicher Trick wie oben, diesmal noch mit x^2 durchmultiplizieren...

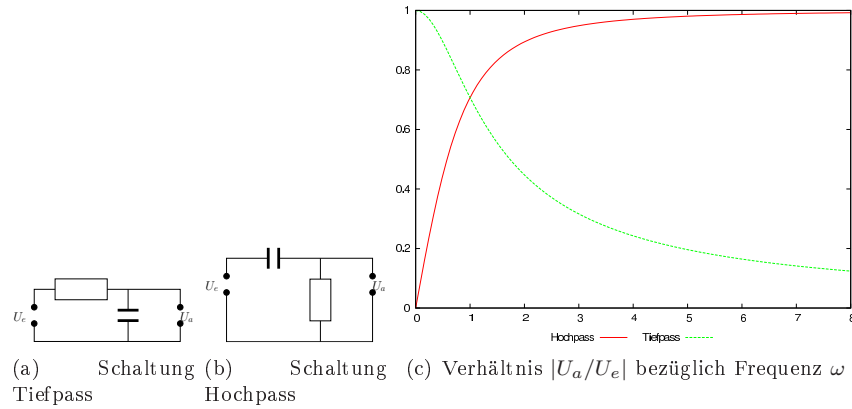


Abbildung 9.21: Hoch- und Tiefpass mit Kondensator

9.7.3 Transformator

An einem Eisenjoch³⁸ sind an zwei Seiten zwei Spulen mit verschiedenen Windungszahlen N_i angebracht. Legt man an eine eine Wechselspannung U_1 an, so erhält man an der anderen ebenfalls eine Spannung U_2 : Die erste Spule erzeugt ein sich änderndes B-Feld, welches in der zweiten Spule U_2 induziert.

Für die erste Spule gilt mit Maschenregel:

$$U_1 + U_{i,1} = 0 \quad (9.192)$$

und für die Induktionsspannungen gilt:

$$U_{i,1} = -N_1 \cdot \dot{\Phi}_B \text{ und } U_{i,2} = -N_2 \cdot \dot{\Phi}_B \quad (9.193)$$

Und weil an der Zweiten Spule nur die Induktionsspannung abfällt:

$$U_2 = U_{i,2} = -N_2 \cdot \dot{\Phi}_B = -N_2 \cdot \frac{U_{i,1}}{-N_1} = -\frac{N_2}{N_1} U_1$$

Und damit der allgemeine Zusammenhang

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

D.h. zwischen den beiden Spannungen liegt eine Phase von $\varphi = \pi$, also 180° .³⁹

Hat die Sekundärspule einen angeschlossenen Stromkreis mit Widerstand R , so gilt wegen der Energieerhaltung

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

und damit

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}} \quad (9.194)$$

³⁸viereckiger Donought

³⁹Diese Phasenbeziehung gilt, weil $U_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1$ ist; das entscheidende ist das *negative* Vorzeichen. Aus $\cos \theta$ wird so $-\cos \theta$, welches einen Phasenunterschied von π bedeutet.

◇ Leistungsverlust minimieren durch Hochspannungsleitungen:

Eine Leitung hat Widerstand R , dann fällt die Leistung $P = UI = RI^2$ ab; der relative Leistungsverlust ist (die Stromstärke I bleibt konstant, weil ja keine Ladungen aus der Leitung entfernt werden):

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta UI}{UI} = \frac{\Delta U}{U}$$

Bei der Übertragung von 20 kW mit einem Leiter mit Widerstand $R = 2.125\Omega$ ergibt sich

Bei 230V $I = \frac{P}{V} = 87 \text{ A}$ und $\Delta U = RI = 185 \text{ V}$, also $\frac{\Delta U}{U} = 0.80$

Bei 20 kV $I = 1 \text{ A}$ und $\Delta U = 2,125 \text{ V}$, also $\frac{\Delta U}{U} = 1.1 \cdot 10^{-4}$.

Der relative Leistungsverlust ist also weit geringer bei hohen Spannungen. ◇

9.7.4 Der Elektrische Schwingkreis

In einem Stromkreis liegen Spule L , Kondensator C und Widerstand R vor, außerdem ein Schalter S . Der Kondensator wird geladen und der Schalter bei $t = 0$ geschlossen.

Der gemessene Strom schwingt: C entlädt sich – wegen U_i der Spule nur langsam. Ist C entladen, sollte der Strom abbrechen, wird aber von U_i aufrecht erhalten, wodurch C wieder entgegengesetzt geladen wird usw.

Wichtig! 117 Es wird ständig Elektrische Energie ($W = \frac{1}{2}CU^2$) in Magnetische ($W = \frac{1}{2}LI^2$) umgewandelt.

Diesen Aufbau haben wir in Kap. 9.7.2 behandelt. In Gl. (9.187) können wir deshalb einfach $U = 0$ setzen:

$$\frac{1}{C}I + RI + L\ddot{I} = 0 \quad (9.195)$$

Der Ansatz ist nun

$$I(t) = Ae^{\lambda t} \text{ und so } \dot{I} = \lambda I \text{ und } \ddot{I} = \lambda^2 I$$

Durch Einsetzen folgt das charakteristische Polynom

$$\frac{1}{C} + R\lambda + L\lambda^2 = 0 \quad (9.196)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}_{\beta} \quad (9.197)$$

Und damit ist die Lösung der eine Linearkombination der bisher gefundenen Lösungen:

$$I(t) = A_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + A_2 e^{-(\alpha-\beta)t} \quad (9.198)$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Kriechfall $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ bzw. $R^2 > 4\frac{L}{C}$: $\beta \in \mathbb{R}$ und damit $\lambda \in \mathbb{R}$. I fällt einfach exponentiell ab.

Aperiodischer Grenzfall $R^2 = 4\frac{L}{C}$ und damit $\beta = 0$. Die Lösung ist

$$I(t) = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 \cdot t) \quad (9.199)$$

Gedämpfte Schwingung $R^2 < 4\frac{L}{C}$: $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und damit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\beta \equiv i\omega$ und

$$I(t) = e^{-\alpha t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) \text{ mit } \bar{A}_1 = A_2$$

(Die zweite Bedingung machen wir, damit wir eine reelle Lösung bekommen.) Damit kann man dies umformen zu

$$I(t) = e^{-\alpha t} |A| \cos(\omega t + \varphi) \quad (9.200)$$

D.h. eine abklingende, harmonische Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{-\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{CL}} \text{ und der Eigenfrequenz } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}} \quad (9.201)$$

Legt man eine äußere Spannung U an, so hat man eine **erzwungene Schwingung** mit Gl. (9.187). Aus Kap. 9.7.2 wissen wir (Gl. (9.189)), den Gesamtwiderstand Z und die Phase φ des Systems. Untersuchen wir dies auf die Abhängigkeit der Frequenz ω , so ergibt sich dass $|Z|$ minimal wird, wenn $\omega \rightarrow \omega_0$; dann verschwindet der Imaginärteil von Z . Der Realteil, R , wird von der Frequenz nicht verändert! Für $\omega \rightarrow \omega_0$ verschwindet auch die Phase.

Man kann eine **gekoppelte Schwingung** erzeugen, indem man die Spulen zweier Schwingkreise nebeneinander hält, damit diese ineinander Spannungen induzieren, oder indem sich die Schwingkreise einen Kondensator teilen.

All diese Rechnungen verlaufen analog zu denen aus Kap. 6.

9.8 Materie im B-Feld

Wird eine Luftspule von Strom durchflossen, etabliert sich gem. Gl. (9.135) das B-Feld

$$B_0 = \mu_0 I \frac{N}{L}$$

Führt man nun Materie ein, so steigt B an.⁴⁰ Analog zu ε_r (vgl Kap. 9.2.8) definiert man:

Definition 9.33 (relative Permeabilität μ_r) Ist der Quotient der B-Feldstärke mit (B) und ohne (B_0) Materie:

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} \text{ oder } B_{\text{Materie}} = \mu_r \cdot B_{\text{Vakuum}} \quad (9.202)$$

⁴⁰ Eigentlich bemerkt man nur, dass sich $\Phi_B = \int_A \vec{B} d\vec{A}$ ändert, aber da A bei dem Versuch konstant bleibt, muss sich B ändern.

μ_r ist eine *dimensionslose* Materialkonstante: $[\mu_r] = 1$.

Wie im E-Feld, wo Dipole des Dielektrikums ausgerichtet wurden, werden vom angelegten B-Feld magnetische Pole mit den Momenten $\vec{\mu}$ ausgerichtet; diese sorgen nun selbst für eine magnetische Eigenschaft, die man als **Magnetisierung** \vec{M} bezeichnet (analog zur *Polarisierung* \vec{P}):⁴¹

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_V \vec{\mu} \quad \text{wenn alle } \vec{\mu} \text{ parallel: } \boxed{\vec{M} = n \cdot \vec{\mu}} \quad (9.203)$$

Mit der Einheit $[M] = \frac{A}{m}$.

Das B-Feld in der Materie ist nun⁴²

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \cdot \vec{M} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) \quad (9.204)$$

Wobei $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0$ (bzw in Materie: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$) die **magnetische Erregung** ist, die wir bereits aus Kap. 9.4.1 kennen.

Experimentell ergibt sich, dass bei nicht zu großen Feldstärken

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}_0 \quad (9.205)$$

ist mit:

Definition 9.34 (Magnetische Suszeptibilität χ) Ist eine Materialkonstante, welche angibt, wie gut ein Stoff durch ein externes B-Feld zu magnetisieren ist.

χ hat keine Einheit: $[\chi] = 1$.

Dabei wissen wir bereits, dass $B_0 = \mu_0 H_0$ und damit

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 = \mu_0 \mu_r \cdot \vec{H}_0 \quad (9.206)$$

Setzt man (9.205) in (9.204) ein, liefert ein Koeffizientenvergleich mit (9.206) den Zusammenhang

$$\mu_r = 1 + \chi \quad (9.207)$$

9.8.1 Arten der Magnetisierung

Nach der Größe von χ (also ihrer Magnetisierbarkeit) ordnet man verschiedene Stoffe ein in die Kategorien:

Diamagnetische Stoffe $|\chi| \ll 1, \chi < 0$

Schwächen ext. B-Feld ab: Aus $\chi < 0$ folgt $\mu_r < 1$ und $B < B_0$.

Bsp.: Helium, Neon, argon, Xenon, Wasserstoff, Stickstoff, Bismut.

Dieser Effekt trifft eigentlich *immer*, also in allem Materialien auf und ist bei Stoffen ohne permanentes magnetisches Dipolmoment wichtig.

Wird das Material ins B-Feld gebracht, werden darin Kreisströme induziert, die (nach LENZ'scher Regel) dem externen B-Feld entgegenwirken.

Ein Stäbchen Diamagnet würde im B-Feld rotieren, bis es senkrecht zum B-Feld steht. Gase werden aus dem B-Feld gedrängt.

⁴¹Verwendet man die Schreibweise $\vec{m} = \vec{\mu}$ so führt dies zu der etwas verwirrenden Schreibweise $\vec{M} = n\vec{m}$.

⁴²Vergleiche $E_D = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$

Paramagnetische Stoffe $|\chi| \ll 1, \chi > 0$

Verstärken B-Feld: Aus $\chi > 0$ folgt $\mu_r > 1$ und $B > B_0$.

Bsp.: Aluminium, Natrium, Mangan, Sauerstoff, Wolfram.

Im Material liegen permanente Dipole vor, die aber ungeordnet sind.; wegen thermischer Bewegung der Teilchen sind die Dipole zufällig orientiert und heben einander auf: $\frac{1}{V} \sum_V \vec{\mu} = \vec{0} = \vec{M}$.

Durch ein Externes B-Feld werden die Dipole teilweise in Richtung von \vec{B} orientiert, damit $\vec{M} \parallel \vec{B}$. Der Grad der Ausrichtung (also $\|\vec{M}\|$) ist *temperaturabhängig*. Die Parallel und antiparallel ausgerichteten Teilchen bilden eine BOLTZMANN-Verteilung

$$\frac{n_{\text{antipar}}}{n_{\text{parallel}}} = \exp\left(-\frac{E_{\text{antipar}} - E_{\text{parallel}}}{K_B \cdot T}\right) \quad \text{mit } E = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (9.208)$$

und es gilt für kleine Energiedifferenzen ($\Delta E \ll K_B \cdot T$)

Wichtig! 118 CURIE-Gesetz:

$$\chi \sim \frac{1}{T} \quad (9.209)$$

Ein Stäbchen Paramagnet rotiert, bis es parallel zum B-Feld steht.

Ferromagnete $|\chi| \gg 1, \chi > 0$

Verstärken B-Feld *deutlich*.

Bsp.: Eisen, Nickel.

Wie beim Permagetismus liegen hier permanente Dipole vor. *Aber:* Zusätzlich zur Ausrichtung von Außen beeinflussen sich die einzelnen Elementarmagnete: Zwischen ihnen wirkt eine Austauschwechselwirkung.

Die einzelnen Dipole bilden WEISS'sche Bezirke; also Bereiche, in denen alle $\vec{\mu}$ parallel ausgerichtet sind.

Die Magnetisierung ist wieder stark von der Temperatur abhängig. Bei hohen Temperaturen verhält sich ein Ferromagnet wie ein Permanentmagnet. Die Austauschwechselwirkungsenergie E_A , die für Ordnung sorgt, wirkt gegen die Thermische Energie $K_B T$ an, die für Unordnung sorgt. Überhalb der **CURIE-Temperatur** T_C ist $E_A < K_B T$. Hier kann $\chi(T)$ näherungsweise beschrieben werden durch:

Wichtig! 119 (CURIE-WEISS'sches Gesetz) Für $T > T_C$ gilt:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad (9.210)$$

mit der materialabhängigen **CURIEtemperatur** T_C und der materialabhängigen **CURIEkonstanten** C .

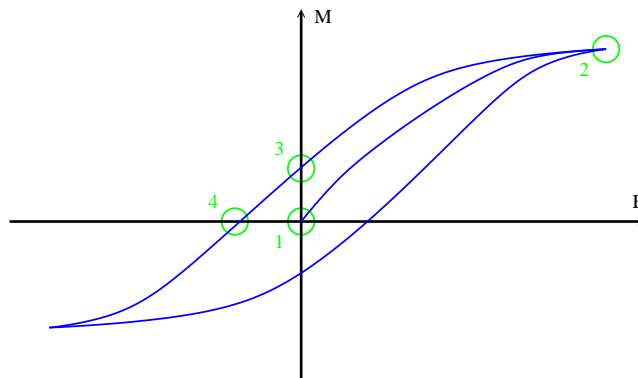


Abbildung 9.22: Hysteresekurve der Magnetisierung eines Ferromagneten

Magnetisiert man einen Ferromagneten mit einem äußeren B-Feld, so bleibt danach eine Restmagnetisierung übrig: Man hat einen Magneten „erschaffen“. Dies bezeichnet man als „Hysterese“. Die Ausgangsgröße (M) hängt nicht nur von der Eingangsgröße (B) ab, sondern auch von der *Geschichte*, welche die Eingangsgröße hatte. Man unterscheidet vier verschiedene Zustände:

1. $\vec{M} = \vec{0}$ wird dadurch erreicht, dass die Probe aufgeheizt wird und überhalb von T_C ihre magnetischen Eigenschaften verliert. Kühlt man schnell genug ab, so bleibt die Unordnung und damit $\vec{M} = \vec{0}$ erhalten.
2. \vec{B} wird erhöht: Die Dipole richten sich parallel zu \vec{B} aus, bis die **Sättigung** erreicht ist: Dann sind alle Dipole ausgerichtet.
3. Wegen den Austauschwechselwirkungen bleiben die Dipole teilweise ausgerichtet. Bei $\vec{B} = \vec{0}$ hat man noch eine endliche Magnetisierung \vec{M} , diese heißt **Rimanenz**.
4. Um die Magnetisierung auszulöschen ist sogar ein Gegenfeld \vec{B}' nötig; Hier ist $\vec{M}(\vec{B}') = \vec{0}$. \vec{B}' nennt man **Koerzitivfeldstärke**.

Um die Hysteresekurve zu messen baut man das Joch eines Transformators aus dem entsprechenden Material und legt das B-Feld an: $U \sim -N\dot{\Phi}_B \sim \dot{B}_{\text{Spule}} \sim \dot{M}$, außerdem $U \sim I$ in der Spule. Damit ist $I \sim M$.

Antiferromagnete $|\chi| \ll 1$, $\chi > 0$

Schwächen B-Feld *deutlich* ab.

Im Stoff liegen permanent magnetische Dipole $\vec{\mu}$ vor. Ist kein äußeres Feld angelegt, gleichen sie sich aus: Die Dipole sind paarweise antiparallel ausgerichtet, damit ist $\vec{M} = \vec{0}$.

9.9 Die MAXWELL'schen Gleichungen

Das AMPÈRE'sche Gesetz ($\oint_{\gamma} \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 I$; vgl. (9.127)) führt bei Wechselstromkreisen zu Widersprüchen: Betrachtet man einen Kondensator und integriert einmal um den Leiter (γ_1) und einmal einen Kreis zwischen den Platten (γ_2), so müsste zwischen den Platten das B-Feld verschwinden ($B(\gamma_2) = 0$), weil $I(\gamma_2) = 0$; trotzdem ist aber $B(\gamma_1) \neq 0$. Für Wechselstrom muss demnach eingeführt werden:

Definition 9.35 (Verschiebungsstrom(dichte) I_v (\vec{j}_v)) *Fließt der Strom I durch einen Kondensator, so werden Ladungen q von den und auf die Platten bewegt. Es etabliert sich ein E-Feld $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{A \cdot \varepsilon_0}$ bzw. $q = A \cdot \varepsilon_0 \cdot E$, welches den Verschiebungsstrom hervorruft:*

$$I_v = \frac{\partial q}{\partial t} = A \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \, d\vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{j}_v = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.211)$$

Weniger anschaulich, dafür korrekter ist die Definition

$$I_v = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \, d\vec{A} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \, d\vec{A}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit $I = \int_A \vec{j} \, d\vec{A}$ aus (9.128) liefert nun (9.211) (wobei wir hier noch ein ε_r eingeführt haben – in (9.211) befinden wir uns im Vakuum mit $\varepsilon_r = 1$. Hier sieht man, dass der Verschiebungsstrom ein Analogon zur Induktionsspannung beim B-Feld ist; vgl (9.161).

Addiert man diese Größe beim AMPÈRE'schen Gesetz, so gilt dieses auch für Wechselstrom:⁴³

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 (I + I_v) = \mu_0 \int_A (\vec{j} + \vec{j}_v) \, d\vec{A} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \, d\vec{A} \quad (9.212)$$

Dabei heißt I *Leitungsstrom*. Der letzte Ausdruck für den Verschiebungsstrom gilt für beliebige Kondensatoren.

Damit können wir die MAXWELL-Gleichungen formulieren:

⁴³Wenn E genügend stetig ist, dass man ableitung und Integral vertauschen darf.

Wichtig! 120 (MAXWELL-Gleichungen in Integralform)

(I) Satz von GAUSS: Ladungen sind Quellen des E-Felds:

$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho_q \, dV \quad (9.213)$$

(II) B-Felder sind quellenfrei, Feldlinien sind in sich geschlossen:

$$\oint_A \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \quad (9.214)$$

(III) Induktionsgesetz ($U_i = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_B$ umgeschrieben): Zeitlich veränderliches B-Feld induziert E-Feld (bzw. Spannung):

$$\oint_\gamma \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \, d\vec{A} \quad (9.215)$$

(IV) AMPÈRE'sches Gesetz: Zeitlich veränderliche E-Felder erzeugen B-Felder:

$$\oint_\gamma \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \int_A \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) \, d\vec{A} \quad (9.216)$$

Wendet man die Sätze von GAUSS (Kap. 9.1.7) [für die ersten beiden Gl.] und STOKES (Kap. 9.1.8) [für die beiden letzten Gl.] auf die Integrale an, erhält man die differenzielle Form:

Wichtig! 121 (MAXWELL-Gleichungen in Differenzial-Form)

(i) Ladungen sind Quellen des E-Felds

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_q \quad (9.217)$$

(ii) B-Feld hat keine Quellen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.218)$$

(iii) Änderung des B-Felds induziert Änderung des E-Felds

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (9.219)$$

(iv) Bewegte Ladungen und zeitlich ändernde E-Felder erzeugen B-Feld; B-Feld ist Wirbelfeld.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) \quad (9.220)$$

Wichtig! 122 Zusammen mit der LORENTZkraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

und $\vec{F} = m\vec{a}$ kann man damit alle elektromagnetischen Phänomene beschreiben.

9.9.1 Neues Potential, DGLs entkoppeln (★)

Liegt ein zeitlich veränderliches B-Feld vor, so bildet das E-Feld ein Wirbelfeld ((9.219)) bzw. die Rotation verschwindet nicht mehr und somit kann man kein (elektrisches) Potential φ mehr finden sodass

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

Stattdessen hat man in Gl. (9.219)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

Da wir das Vektorpotential $\vec{\mathcal{A}}$ definiert haben (9.137), können wir $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}$ verwenden, indem wir $\vec{\nabla} \times \cdot$ mit $\frac{\partial}{\partial t}$ vertauschen (wir setzen wieder eine ausreichende Glattheit voraus):

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} = \vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}} \quad (9.221)$$

Und dies in (9.219) eingesetzt, liefert

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}} \right) = 0 \quad (9.222)$$

Es verschwindet also die Rotation von $(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}})$ und damit können wir dies mithilfe eines Skalaren Potentials ϕ_{el} schreiben:

$$\left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}} \right) =: -\vec{\nabla} \phi_{el} \quad (9.223)$$

und damit

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi_{el} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}}} \quad (9.224)$$

Wenn kein B-Feld vorliegt oder es zeitlich konstant ist, dann stimmt ϕ_{el} mit φ überein – dies ist also ein allgemeinerer Fall.⁴⁴

Wie wir in Kap. 9.4.6 gesehen hatten, ist $\vec{\mathcal{A}}$ durch $\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} = \vec{B}$ nicht voll definiert. Man führt deshalb die **LORENTZ'sche Eichbedingung** ein:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}} = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{el}} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi_{el} \quad (9.225)$$

⁴⁴Wendet man die Rotation auf Gl. (9.224) an, so erhält man daraus die Maxwell-Gleichung (9.219), wenn man beachtet dass $\nabla \times (\nabla \phi_{el}) = 0$ ist.

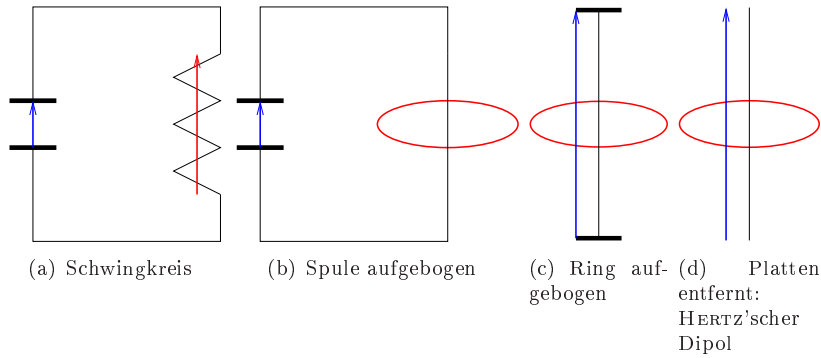


Abbildung 9.23: Morphose eines Schwingkreises zu einem Hertz'schen Dipol

Wendet man auf Gl. (9.224) die Divergenz an, so folgt mit dieser Eichbedingung und (9.217):

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \vec{\nabla} \left(-\vec{\nabla} \phi_{el} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}} \right) = -\vec{\nabla}^2 \phi_{el} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{\mathcal{A}} = \boxed{-\Delta \phi_{el} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_{el} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (9.226)$$

Außerdem folgt aus (9.220) mit (9.225):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}) - \Delta \vec{\mathcal{A}} = -\vec{\nabla} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{el} - \Delta \vec{\mathcal{A}} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Vertauscht man hier $\vec{\nabla}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ kann man (9.223) verwenden und erhält nach kürzen des E -Terms:

$$\boxed{-\Delta \vec{\mathcal{A}} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{A}} = \mu_0 \vec{j}} \quad (9.227)$$

Wichtig! 123 (MAXWELL-Gl. entkoppelt) Die MAXWELL-Gleichungen stellen gekoppelte Differenzialgleichungen dar. Mit (9.226) und (9.227) und den Potentialen $\vec{\mathcal{A}}$ und ϕ_{el} hat man diese entkoppelt und in Differenzialgleichungen zweiter Ordnung überführt.

9.10 Offerner Schwingkreis und HERTZ'scher Dipol

Wie in Abb. 9.23 gezeigt, handelt es sich bei einem einfachen Draht um eine Art Schwingkreis: Die bewegten Ladungen erzeugen Wirbel-B-Felder und an den Enden sorgen sie für ein E-Feld.

Wo anfangs (9.23(a)) die Elektrische und magnetische Energie noch lokal konzentriert war, breiten sich die Felder in 9.23(d) (mit Lichtgeschwindigkeit) im Raum aus und damit strahlt der Dipol Energie ab.

Damit auf dem Leiter Ladungen fließen, muss er in der Mitte angeregt werden (bspw kann man in die Mitte des Leiters eine kleine Spule setzen und an diese außen eine Spule hängen, die mit Wechselstrom beschickt wird).

Weil an den Enden des Leiters der Länge L , der in z -Richtung ausgerichtet ist und der in der Mitte ($z = 0$) angeregt wird, die Ladungen nicht weiter fließen können, gilt hier

$$I(z = \pm \frac{L}{2}) \equiv 0$$

und für den Strom, der eine *Stehende Welle* bildet, insgesamt

$$I(z, t) = \hat{I}(z) \cdot \sin \omega t$$

Man kann die Stabenden deshalb auch als *feste Enden* bezeichnen.

Die Amplitude $\hat{I}(z)$ ist vom Ort auf dem Leiter abhängig; es gilt auch $\hat{I}(z = \pm \frac{L}{2}) = 0$ wobei sich eine Sinuswelle der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

ergibt.

In großer Entfernung vom Dipol ist \vec{E} quasi parallel zum Dipol und \vec{B} steht senkrecht zu \vec{E} und liegt in einer Ebene mit der Ausbreitungsrichtung. Wenn ein zweiter Dipol also parallel zum ersten steht, so kann dieser als Antenne von dem E-Feld angeregt werden. Wichtig ist dabei, dass der Dipol die Energie praktisch nur radial abstrahlt und in seine Längsrichtung praktisch nichts.

9.10.1 Abstrahlung des schwingenden Dipols

Der Dipol strahlt eine elektromagnetische Welle mit der Energiedichte (auch mit w bezeichnet)

$$w_{em} = w_E + w_B = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (9.228)$$

ab. Im Fernfeld der Welle gilt⁴⁵

$$B = \frac{1}{c_0} E \quad (9.229)$$

und damit

$$w_{em} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c_0^2} E^2 \right) = \varepsilon_0 E^2 \quad (9.230)$$

Definition 9.36 (Energiestromdichte S) Ist die Energie die pro Zeit durch ein Flächenelement A transportiert wird:

$$S = \frac{W}{t \cdot A} \quad (9.231)$$

Hier ist also

$$S = \frac{w_{el} \cdot s}{t} = \varepsilon_0 \cdot c_0 \cdot E^2 \quad (9.232)$$

Da das Dipolmoment des Leiters wegen $I = \hat{I} \sin \omega t$ mit

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cdot \sin \omega t$$

⁴⁵ fällt hier vom Himmel; vgl dazu aber Kap. 9.11.4!

schwingt und die Leistung auf einer Kugeloberfläche mit Radius r abgestrahlt wird, ergibt sich für die *Leistung*:⁴⁶

$$P(r) = \oint_A \vec{S} d\vec{A} = \frac{p_0^2 \cdot \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c_0^3} \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c_0}\right)\right) \quad (9.233)$$

Und wenn wir das zeitliche Mittel $\langle P \rangle = \bar{P}$ bestimmen wollen, verwenden wir $\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$:

$$\bar{P} = \frac{p_0^2 \cdot \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c_0^3} \sim \omega^4 \quad (9.234)$$

◇

- Ein Elektron im Atom ist praktisch ein oszillierender Dipol.

Abschätzung der Abstrahlung: Ein Lichtquant habe $\lambda = 500 \text{ nm}$ und damit $W = \hbar\omega = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Es ist $\bar{P} = \frac{W}{\tau}$ mit der Abklingzeit $\tau = 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, also $\bar{P} = 0.8 \cdot 10^{-11} \text{ W}$.

- *Röntgenbremsstrahlung*: Wird ein Elektron beschleunigt, so strahlt es Energie „Bremsstrahlung“ ab. Werden die Elektronen sehr schnell auf eine Anode geschossen, so werden sie dort von den Elektronen des Anodenmaterials abgelenkt d.h. beschleunigt und strahlen Energie als Röntgenstrahlung mit einem kontinuierlichen Spektrum $P(\omega)$ ab – je nachdem, wie stark sie abgelenkt wurden.
- *Synchrotronstrahlung*: Ein Schnelles Elektron kommt in eine B-Feld und wird hier auf eine Kreisbahn gezwungen. Dies ist eine Beschleunigte Bewegung:

$$evB = \frac{mv^2}{r} \text{ und so } v = \frac{e}{m} Br$$

mit $a = \frac{v^2}{r}$ folgt

$$a = \frac{e^2}{m^2} B^2 r$$

Die abgestrahlte Leistung ist dabei proportional zu a^2 : $P \sim a^2$.

Bei kleinen Geschwindigkeiten ($v \ll c_0$) ist die „Abstrahlungsverteilung“ noch „normal“, das Elektron strahlt nach vorne und hinten ähnlich viel ab. Je größer die Geschwindigkeit wird, desto stärker werden relativistische Effekte, durch die die Elektronen ihre EM-Welle praktisch nur nach vorne mit einem sehr kleinen Raumwinkel Θ abstrahlen.

- *Streuung einer Welle an Atomen*: Eine EM-Welle regt die Elektronen im Atom zum Schwingen an; es bildet sich ein Dipol:

$$p = \alpha \cdot E = \underbrace{\alpha \cdot \hat{E}}_{\hat{p}} \sin \omega t = \hat{p} \sin \omega t$$

mit der Polarisierbarkeit α .

⁴⁶Weil das E-Feld sich „nur“ mit $v = c_0$ ausbreitet, dauert es $\frac{r}{c_0}$, bis die Änderung des Dipols am Punkt r angekommen ist.

Das Dipolmoment p *schwingt* mit der Frequenz der einfallenden Welle und ist damit selbst ein Dipol, welcher eine EM-Welle der gleichen Frequenz abstrahlt – aber in Alle Raumrichtungen senkrecht zu \vec{p} .

Wenn der Teilchendurchmesser kleiner als die Wellenlänge ist, spricht man von **RAYLEIGHTstreuung**; In Gl. (9.234) kann man $p = \alpha E$ und $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$ einsetzen und erhält

$$\bar{P} \sim \frac{1}{\lambda^4} \text{ und } \bar{P} \sim E^2$$

Hier sieht man: Kurzwelliges Licht wird stärker gebrochen weil \bar{P} größer ist! Deswegen ist der Himmel für uns blau: Weißes Sonnenlicht wird über der Erde gebrochen und der blaue Anteil nach unten abgelenkt, der rote Anteil geht weiter ins Weltall.

◇

9.11 EM-Welle im Vakuum

9.11.1 Die Wellengleichung

Im Vakuum sind keine Teilchen und damit auch keine Ladungen vorhanden: $\varrho = 0$. Es können so auch keine Ladungen bewegt werden: $\vec{j} = \vec{0}$.

Wir wenden die Rotation auf die III. MAXWELLgl. (9.219) an und verwenden, dass wegen der I. MAXWELLgl. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ist, weil ja keine Ladungen vorliegen:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (9.235)$$

Setzt man nun die IV. MAXWELLgl (9.216) ein, und beachtet $\vec{j} = \vec{0}$, erhält man:

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

oder die

Wichtig! 124 (Wellengleichung im Vakuum)

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (9.236)$$

Beispielsweise gilt alleine für E_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Die Lösung ist eine Welle, welche in Zeit und Raum schwingt.

Eine analoge Gleichung findet man auch für das B-Feld, wenn man die Rotation auf die IV. MAXWELLgl. (9.220) anwendet.

9.11.2 Ebene, periodische Welle

Die Welle hängt nur von der z -Koordinate und der Zeit ab:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(kz - \omega t)} \quad (9.237)$$

Hier bilden Real- und Imaginärteil jeweils Lösungen der DGL. (9.236).

Definition 9.37 (Wellenvektor \vec{k}) Der Wellenvektor gibt die Richtung an, in die sich eine Welle ausbreitet. Der Betrag ist $\|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$. Man kann eine Welle folgendermaßen beschreiben:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.238)$$

für $\vec{k} = (0, 0, k)^T$ sind die Gl. (9.238) und (9.237) identisch.

Bei der Welle handelt es sich um eine *Transversalwelle* (also $\vec{E} \perp \vec{k}$), bei der $\vec{E} \perp \vec{B}$ ist.

Wichtig! 125 Die Welle ist in Materie nicht mehr unbedingt eine Transversalwelle.

9.11.3 Polarisation vom EM-Wellen

Wir betrachten eine Welle, die sich nach z ausbreitet; vgl. (9.237). Hier kann \vec{E}_0 irgendwo in der xy -Ebene liegen. Die Orientierung von \vec{E} ist durch **Polarisation** der Welle bestimmt:

Lineare Polarisation \vec{E}_0 zeigt immer in die selbe Richtung:

$$\vec{E}_0 = (E_0^{(x)}, E_0^{(y)}, 0)^T \quad (9.239)$$

Dann ist

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^{(x)} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ E_0^{(y)} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.h. die x und die y -Komponenten schwingen in Phase.

Zirkulare Polarisation Die Beträge von $E_0^{(x)}$ und $E_0^{(y)}$ sind gleich, die beiden schwingen aber um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben.

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_0(t) = (\hat{E}' \cdot \cos \omega t, \hat{E}' \cdot \sin \omega t, 0)^T \quad (9.240)$$

Im Komplexen ist die Darstellung besser (Achtung: Dieses \hat{E} ist verschieden von dem \hat{E} in (9.240): $\hat{E}' = 2\hat{E}$):

$$\vec{E}_0 = (\hat{E}, i \cdot \hat{E}, 0)^T \quad (9.241)$$

Und damit ist die Wellengleichung:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \hat{E} \\ i \cdot \hat{E} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

Man spricht von σ^+ polarisiertem Licht, wenn \vec{E}_0 sich im mathematisch positiven Sinn dreht (also Rechte-Faust-Regel: Daumen in Richtung \vec{k} und Finger zeigen Rotationsrichtung).

Elliptische Polarisation Wie die Zirkulare, nur dass $E_0^{(x)} \neq E_0^{(y)}$ ist: Die Spirale hat eine elliptische Form.

unpolarisierte Welle \vec{E}_0 verhält sich zufällig: Statistische Richtungsänderung; Bspw. Sonnenlicht.

9.11.4 Magnetfeld einer EM-Welle

Wir betrachten eine Welle mit

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{mit } \vec{E}_0 = (\hat{E}, 0, 0)^T \quad (9.242)$$

und wenden darauf die *Rotation* an, um die IV. MAXWELLgl. anzuwenden (9.220):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (9.243)$$

Hier sieht man, dass B_x und B_z zeitlich konstant sein müssen (oBdA 0). Setzt man (9.242) ein, so erhält man die DGL

$$-i k E_x = -i k \cdot E_0^{(x)} e^{i(\omega t - kz)} = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \quad (9.244)$$

die man durch Integration nach t löst:

$$B_y = \frac{k}{\omega} E_x = \frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{2\pi \frac{c}{\lambda}} E_x = \frac{1}{c} E_x$$

Es ist also

$$\vec{E} = (E_x, 0, 0)^T \quad \text{und} \quad \vec{B} = (0, \frac{1}{c} E_x, 0)^T$$

und offensichtlich $\vec{E} \perp \vec{B}$. Und weil $\vec{k} = (0, 0, k)^T$ ist, kann man \vec{B} umschreiben zu

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})} \quad (9.245)$$

Wichtig! 126 Wir betrachten hier ein Fernfeld. B - und E -Feld sind hier in Phase, wobei sie im Nahfeld um 90° phasenverschoben sind.

9.11.5 Stehende EM-Welle

Wir betrachten eine lineare Welle

$$E_i = E_{0,i} \cos(\omega t - kz)$$

die an einem Metallsiegel bei $z = 0$ als E_r zurückgeworfen wird. Bei $z = 0$ muss $\vec{E}(z = 0) = 0$ sein, weil in Metallen keine E-Felder vorkommen (vgl. Kap. 9.2.3). Der Spiegel ist also ein *festes Ende* bei der Reflexion.

Da die Welle reflektiert wird, muss sie die gleiche Gestalt haben wie vorher, nur dass sie sich in die andere Richtung bewegt, also

$$E_r = E_{0,r} \cos(\omega t + kz)$$

Betrachten wir nun die Welle beim Spiegel, gilt:

$$E_i(0, t) + E_r(0, t) = 0 \text{ oder } E_{0,i} \cos \omega t + E_{0,r} \cdot \cos \omega t = 0 \text{ also } E_{0,i} = -E_{0,r} \quad (9.246)$$

und damit ist die Gesamt-Welle die *Überlagerung*⁴⁷ der beiden Wellen:⁴⁸

$$E_{ges} = E_i + E_r = \hat{E} (\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)) = 2 \cdot \hat{E} \cdot \sin kz \cdot \sin \omega t \quad (9.247)$$

Die Überlagerung ist also eine Stehende Welle!

Sei oBdA $\hat{\vec{E}} = (\hat{E}, 0, 0)^T$, also die Welle linear in x -Richtung polarisiert, dann folgt wegen der III. MAXWELLgl. (9.219) mit

$$\vec{E}_{ges} = \begin{pmatrix} 2\hat{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin kz \sin \omega t$$

für das B-Feld (die Cosini kommen hier, weil man den einen Sinus ableitet und den anderen aufleitet):

$$\vec{B}_{ges} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\hat{E} \frac{k}{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \cos kz \cos \omega t$$

Wichtig! 127 Die Felder sind also wieder um 90° phasenverschoben und aufeinander senkrecht! Wo beim B-Feld ein Bauch ist, hat das E-Feld einen Knoten und umgekehrt.

9.11.6 Dreidimensionale Stehende Welle

Wir betrachten einen Quader aus leitendem Material mit Kantenlängen a, b, c . Die Tangentialkomponenten von \vec{E} müssen an allen Oberflächen verschwinden.

Die allgemeine Lösung dafür ist kompliziert, es bilden sich nur in bestimmten Fällen stehende Wellen:

$$a = n \cdot \frac{\lambda_x}{2} \text{ und damit } k_x = n \cdot \frac{\pi}{a} \text{ wobei } n \in \mathbb{N} \quad (9.248)$$

und entsprechend für y und z (mit $m, q \in \mathbb{N}$). Dann ist

$$\|\vec{k}\| = k = \pi \cdot \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}} \quad (9.249)$$

⁴⁷Wir sind in einer Linearen Theorie!

⁴⁸Mit dem Additionstheorem (2.118) aus BRONSTEIN⁷

Da $\omega = c_0 \cdot k$ ist, gibt es für ω unendlich viele, unterschiedliche *Moden*.

Wir geben nun eine Grenzfrequenz ω_G vor und untersuchen, wie viele Frequenzen ω mit $\omega < \omega_G$ es gibt. Bzw. wir suchen alle \vec{k} sodass $\|\vec{k}\| < \frac{\omega_G}{c_0}$. Dabei beschränken wir uns auf den einfacheren Fall $a = b = c$.

Wir betrachten ein Koordinatensystem $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^3$ welches wir auf \mathbb{R} projizieren mit

$$f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (n, m, q) \mapsto \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2 + q^2} \quad (9.250)$$

Dies definiert eine Norm f auf den \mathbb{N}^3 .

Wir betrachten den \mathbb{N}^3 nun als Gitter im \mathbb{R}^3 eingebettet; jedem „Gitterpunkt“ ist eine Volumeneinheit $V_e = (\frac{\pi}{a})^3$ zugeordnet. Wir bestimmen nun die Anzahl der Gitterpunkte, für die $f(n, m, q) < k_G$ ist, indem wir näherungsweise betrachten, wie viele Volumenelemente sich in der Achteckskugel⁴⁹ im \mathbb{R}^3 aufhalten.

Die Achteckskugel hat das Volumen $V_K = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi k_G^3$, damit befinden sich etwa

$$\tilde{N}_G = \frac{V_K}{V_e} = \frac{a^3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot k_G^3}{8 \cdot 3 \cdot \pi^3} = \frac{1}{6} \frac{a^3 \cdot k_G^3}{\pi^2}$$

Gitterpunkte in der Kugel.

Betrachtet man nun noch, dass die Welle beliebig polarisiert sein kann und man für jede Polarisation *zwei* überlagerte Wellen braucht, gilt insgesamt:

$$N_G = \frac{1}{3} \frac{a^3 \cdot \omega_G^3}{\pi^2 \cdot c^3} \quad (9.251)$$

Und die *Modendichte*, also die Zahl der Moden pro Volumeneinheit ist:

$$n = \frac{N_G}{a^3} = \frac{1}{3} \frac{\omega_G^3}{\pi^2 \cdot c^3} \quad (9.252)$$

9.11.7 Wellenleiter

Wir betrachten die Wellenleitung zwischen zwei parallelen Metallplatten mit

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z)^T \text{ und } \vec{E}_0 = (0, E_y, 0)^T$$

Die Welle

$$\vec{E}_i = \vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

wird an der Wand in x -Richtung (also die Wand ist $\perp \vec{e}_x$) gespiegelt zu

$$\vec{E}_r = \vec{E}_r(\vec{r}, t) = -\vec{E}_0 \sin(\omega t + k_x x - k_z z)$$

Weil nur an einer Wand gespiegelt wird, kehrt sich die Ausbreitungsrichtung der Welle auch nur in der entsprechenden Richtung um. Für die Überlagerung der weiterlaufenden Welle gilt:⁵⁰

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2\vec{E}_0 \sin k_x x \cdot \cos(\omega t - k_z z) \quad (9.253)$$

⁴⁹ Die Gleichung $f(n, m, q) < k_G$ definiert eine Achteckskugel, weil $n, m, q > 0$ sein müssen.

⁵⁰ Mit dem Additionstheorem (2.118) aus BRONSTEIN⁷

Für $k_x = n \cdot \frac{\pi}{a}$ mit $n \in \mathbb{N}$ bildet sich eine in x -Richtung stehende Welle, die aber in z -Richtung weiter fortschreitet.

Im Hohlleiter kommt nun hinzu, dass auch in y -Richtung eine Wand da ist, dass es also weitere – analoge – Einschränkungen an E_y und k_y gibt.

Hier wird die effektive Wellenlänge λ_{eff} (der Abstand zwischen zwei Knoten) der Stehenden Welle größer als die der Stehenden Welle zwischen nur zwei Platten λ :

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\lambda}{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (9.254)$$

Zudem zeigt die Welle *Dispersion*: Die Phasengeschwindigkeit ist frequenzabhängig.

Unterhalb einer bestimmten Frequenz („Abschneidefrequenz“) werden keine Signale mehr übertragen.

Index

- Ableiten von Vektoren, 6
- Abschneidefrequenz', 199
- Abwärme, 95
- Actio, 10
- Adhasion, 45
- Adiabatenkoeffizient, 89
- amorph, 37
- Ampère, 147
- Aperiodischer Grenzfall, 184
- aperiodischer Grenzfall, 64
- Aquipotentialflächen, 16, 123
- Arbeit, 14
- Archimedisches Prinzip, 45
- Auftrieb, 45
- Ausbreitungsgeschwindigkeit, 74
- Avogadro-Konstante, 152
- Avogadro-Konstante, 83
- B-Feld
 - Koaxkabel, 163
 - Leiter, 163
 - Spule, 164
- Bananenflanke, 56
- Barometrische Höhenformel, 50, 110
- Basiseinheit, 1
- Bernulli-Gleichung, 55
- Bildladung, 136
- Binnendruck, 101
- Biot-Savart'sches Gesetz, 164
- Bohr'sches Magneton, 170
- Boltzmann, 85
- Boltzmann-Verteilung, 110
- Brechungsindex, 147
- Bremsstrahlung', 193
- Brownsche Molekulabbewegung, 84
- characteristisches Polynom, 62
- characteristisches Polynom, 183
- Clever guess, 71
- Corioliskraft, 14
- Coulomb-Eichung, 165
- Coulomb-Kraft, 121
- Covolumen, 101
- Curietemperatur, 186
- D-Feld, 145
- Dampfung', 60
- Delta-Distribution, 33
- Destruktive Interferenz, 76
- destruktive Interferenz, 75
- Dielektrikum, 139
- Dielektrische Verschiebung, 145
- Dielektrizitätskonstante, 139
- Diffusionskoeffizient, 111
- Diffusionsstrom, 111
- Dipolmoment, 126, 140
- Dispersion, 199
- Domanen, 143
- Drehimpuls, 19
- Drehimpulserhaltungssatz, 20
- Drehmoment, 20
- Driftgeschwindigkeit, 148, 149
- Dritter Hauptsatz der Thermodynamik, 96
- Druckspannung, 40
- Dulong-Petit'sches Gesetz, 88
- E-Feld
 - Draht, 131
 - Koaxkabel, 132
 - Kondensator, 130
 - Kugel, 133
 - Platte, 129
- Edle Metalle, 158
- Effektive Spannung, 177
- Effektiver Strom, 177
- Eigenfrequenz, 80
- Eigeninduktivität, 174

- eindimensionale Bewegung, 5
- Einhüllende, 76
- Einschwingphase, 66
- Eisenjoch, 182
- Elastisch, 39
- Elastizitätsmodul, 40
- Elektrische Flussdichte, 145
- Elektrische Leistung, 156
- elektrische Leitfähigkeit, 150
- elektrische Suszeptibilität, 142
- Elektrischer Fluss, 126
- Elektrisches Feld, 122
- Elektrisches Potential, 123
- Elektrochemische Spannungsreihe, 158
- Elektrolyse, 152
- elektromagnetische Welle, 192
- elektromotorische Kraft, 156
- Elektronengas, 134
- Elliptische Polarisierung, 196
- Energiedichte einer Spule, 176
- Energieerhaltungssatz der Mechanik, 17
- Energieminimum, 15
- Energietransport, 73
- Enthalpie, 91
- Entropie, 94, 115
- Entropische Kräfte, 115
- Erkenntnisprozess, xi
- Ersatzwiderständen, 153
- Erster Hauptsatz der Thermodynamik, 89
- Expansion, thermische, 39
- Fadenpendel, 59
- Faraday'sche Konstante, 152
- Faraday'sches Gesetz, 152
- Faradaysches Induktionsgesetz, 172
- Federmodell, 38
- Federpendel, 59
- Feldlinien, 122
- Feldlinienemission, 135
- Fernfeld, 125
- Ferroelektrika, 143
- festes Ende, 78, 197
- Flächenladungsdichte, 122, 129
- Fliehkraft, 14
- Fluid, 102
- Freie Achsen, 30
- Freie Energie, 96
- freie Schwingung, 59
- Freies Energieminimum, 96
- Freies Enthalpieminimum, 97
- Freiheitsgrade, 62, 86
- Galvanisches Element, 157
- Gangunterschied, 75
- Gedampfte Schwingung, 184
- gedeckte Pfeife, 81
- Gegenfeld, 135
- gegenphasig, 69
- Geigerzähler, 153
- gekoppelte Schwingung, 184
- Generatorprinzip, 168, 177
- gequantelt, 170
- Geschwindigkeitsfilter, 171
- Geschwindigkeitsprofil, 51
- Glas, 37
- gleichformige Bewegung, 5
- gleichphasig, 69
- Gleitreibung, 11
- Glimmlampe, 152
- Golfball, 56
- Gradienten, 123
- Gravitationskonstante, 12
- Gravitationskonstante, 9
- Grenzflächenenergie, 46
- Große, 1
- Grundschiebung, 81
- Gruppengeschwindigkeit, 77
- Guggenheim Schema, 106
- Haftreibung, 11
- Hagen, 52
- Hagen-Poiseuille, 52
- Halbzelle, 157
- Hallsonde, 168
- harmonische Schwingung, 60
- Haupt(tragheits)achsen, 29
- Hauptsatz Thermodynamik, 89, 95, 96
- Hebelgesetze, 26
- Hochpass, 181
- Hook'sches Gesetz, 11
- Hydrathülle, 152
- Hysteresis, 187
- Ideale-Gas-Gleichung, 83
- Impuls, 17
- Impulserhaltungssatz, 17
- Induktionskonstante, 160
- Induktivität, 174, 178

- Induzierte Dipolmoment, 140
- induziertes Dipolmoment, 141
- Inertialsystem, 13
- Influenzkonstante, 121
- Influenzladungen, 136
- Innenwiderstand, 156
- Innere Energie, 85
- Interferenz
 - Destruktive, 76
 - Konstruktive, 76
- Ionenpolarisation, 143
- Ionische Bindung, 37
- ioscorer Spannungskoeffizient, 92
- irreversibler, 94
- isobarer Ausdehnungskoeffizient, 91
- Isotherme Kompressibilität, 91

- Kalorimeter, 88
- Kapazität, 130, 179
- Kepler'sche Gesetze, 22
- Kilogramm, 2
- Kinetische Energie, 16
- Klangfarbe, 81
- Klemmspannung, 156
- Knotenregel, 154
- Koaxialkabel, 163
- Koerzitivfeldstarke, 187
- Kohasion, 45
- Kolloid, 109
- Kommunizierende Rohren, 44
- Komplexer Widerstand, 179
- Kompressibilität, 42, 91
- Kompressionsmodul, 42
- Kondensatorentladung, 155
- Konduktivität, 150
- konservativ, 124
- Konservative Kraft, 15, 16
- konstruktive Interferenz, 75
- Konstruktive Inverferenz, 76
- Kontaktspannung, 158
- Kontinuitätsgleichung, 149
- Koordinatentransformation', 71
- kovalente Bindung, 37
- Kraftdichte, 110
- Kreisbewegung, 7
- Kreisprozess, 97
- Kreiswellenzahl, 74
- Kriechfall, 184
- Kristalle, 37
- Kritische Temperatur, 151

- Kugelfallviskosimetern, 54

- Ladungsdichte, 122
- laminar, 50
- Leiter, 134
- Leitfähigkeit, 150
- Leitungsband, 152
- Leitungsstrom, 188
- Lineare Ladungsdichte, 131
- Lineare Polarisierung, 195
- Lineare Theorie, 6
- lineares Geschwindigkeitsprofil, 51
- Longitudinalwellen, 75
- Lorentz'sche Eichbedingung, 190
- Lorentzkraft, 166
- Loschmidt, 83
- loses Ende, 78
- Losungstension, 157

- magnetische Erregung, 160
- Magnetische Permeabilitätskonstante, 160
- Magnetische Polstärke, 159
- Magnetische Suszeptibilität, 185
- Magnetischer Monopol, 159
- Magnetischer Fluss, 161
- Magnetischer Kraftfluss, 161
- magnetisches Dipolmoment, 168
- Magnetisierung, 185
- Magnuskraft, 56
- Maschen, 154
- Maschenregel, 154
- Massenspektrometer, 171
- Massentransport, 73
- Maxwell-Gleichungen
 - Differenzialform, 189
 - Integralform, 189
- Membranspannung, 158
- Messfehler, 3
- Meter, 2
- Milikan, 121
- Minimalfläche, 47
- Mittlere Freie Weglänge, 112
- Mittlere kinetische Energie, 85
- MKS-System, 2, 147
- molare Gaskonstante, 85
- Molares Volumen, 101
- Momentangeschwindigkeit, 5

- Nahren, 33

- Navier-Stokes-Gleichung, 57
- Newton, 10
- Newton II, 10
- Newton (Einheit), 10
- Newton I, 10
- Newton II
 - Gleichung, 10
- Newton III, 10
- Newton'sche Grungleichung, 10
- nicht leitend, 132
- Normalverteilung, 3

- Oberflächenenergie, 46
- Oberflächenspannung, 46
- Oberschwingung, 81
- offene Pfeife, 81
- Ohm'sches Gesetz, 149
- Orientierungspolarisation, 143
- Osmose, 158

- Parallelschaltung, 53
- Parallelschaltung von Kondensatoren, 131
- Parametrisierung, 6
- Partikularlösung, 66
- Periodendauer, 74
- Phasendiagramm, 104
- Phasendifferenz, 75
- Phasengeschwindigkeit, 74
- Phasenraum, 115
- Phasensprung, 78
- Photospannung, 159
- Physikalische Grose, 1
- Planck'sches Wirkungsquantum, 35
- pointing Vector, 140
- Pointing-Vector, 147
- Poiseuille, 52
- Poissonzahl, 41
- Polarisation, 141, 195
- Polarisierbarkeit, 140
- Polarisierung, 185
- Potentialdifferenz, 125
- Potentielle Energie, 15
- Pradoxon, 55
- Prazession, 35

- Querkontraktion, 40, 41
- Querkontraktionszahl, 41
- Raketengleichung, 17

- Raumliche Bewegung, 5
- raumliche Energiedichte, 138
- Reactio, 10
- Rechte-Faust-Regel, 160
- Reibung, 60
- Reibungskraft, 11
- Reihenschaltung, 53
- Rein entropisches System, 116
- relative Permittivität, 139
- relative Dehnung, 39
- relative Permeabilität, 184
- relative Querkontraktion, 41
- Resonanz, 81
- Resonanzkatastrophe, 67
- reversibler, 94
- Reynoldszahl, 58
- Rimanenz, 187
- Rollreibung, 11
- Röntgenbremsstrahlung, 193
- Rotation, 27, 124
- rotierender Vektor, 13

- Sättigung, 187
- Satz von STEINER, 33
- Satz von Gauss, 127
- Satz von Stokes, 127
- Schaltssymbol
 - Widerstand, 149
- Scherspannung, 42
- Scherungswinkel, 42
- Schmelzen, 37
- Schnelle, 78
- Schraubenbahn, 171
- Schubmodul, 42
- Schubspannung, 42
- Schwebung, 69
- Schweredruck, 44
- Schwerkraft, 11
- Schwerpunkt, 18
- Sekunde, 2
- Selbstinduktion, 175
- Selbstinduktivität, 174
- SI-System, 2
- Spannung, 40
- Spezielle Grenzflächenenergie, 46
- Spezifische Wärme, 87
- Spezifische Wärmekapazität, 87
- Spezifischer Widerstand, 150
- Spin-Eis, 159
- Sprungtemperatur', 151

- Standardwasserstoffelektrode, 158
- Statistik, 3
- Statistische Messfehler, 3
- Stehende Welle, 192
- Stempeldruck, 43
- Stokes-Reibung, 53
- Stospolarisation', 152
- Stress', 40
- Stromdichte, 147
- Stromfluss, 148
- Stromrichtung, 148
- Stromstärke, 52, 147
- Stromungswiderstand, 52
- Superposition, 6, 160
- Superpositionsprinzip, 128
- Supraleiter, 136
- Suspension, 109
- Synchrotronstrahlung, 193
- Systematischer Messfehler, 3

- Teilchendichte, 49
- Teilchenfalle, 171
- Teilchenstrom, 111
- Thermische Energie, 85
- thermische Expansion, 39
- Thermodynamisches Potential, 96, 97
- Thermospannung, 158
- Tiefpass, 181
- Torsionspendel, 59
- Tragheitsmoment, 28
- Trajektorie, 5
- Translation, 27
- Transversalwelle, 195
- Transversalwellen, 75
- turbulent, 50
- Turbulenz, 56

- Unedle Metalle, 158
- universelle Gaskonstante, 85

- Valenzband, 152
- Van-De-Graaf-Generator, 135
- Van-der-Waals-Gleichung, 101
- Van-der-Waals-Kräfte, 37
- Vektor
 - ableiten, 6
- Vektorpotential des B-Felds, 165
- Verdampfen, 37
- Verlust-Energie, 95
- Verschiebungspolarisation, 143
- Verschiebungsstrom, 188
- Verschiebungsstromdichte, 188
- Viskosität, 51
- Vorzeichenkonvention, 89

- Wärmekapazität, 87
- Wärmekraftmaschinen, 97
- Wasserstrahlpumpe, 55
- Weiss-Bezirk, 143
- Weissche Bezirke, 186
- Wellengleichung im Vakuum, 194
- Wellenlänge, 73
- Wellenvektor, 74
- Wellenzahl, 74
- Widerstand, 149
- Winkelgeschwindigkeit, 7
- Wirbel, 56
- Wirbelfeld, 173
- Wirkleistung, 177
- Wirkungsgrad, 100
- Wirkungsquerschnitt, 113

- Young-Laplace-Gleichung, 47

- Zentralfeld, 22
- Zentrifugalkraft, 14
- Zentripetalbeschleunigung, 7
- Zerstauber, 55
- Zirkulare Polarisation, 195
- Zugspannung, 40
- Zustandsgrößen, 83
- Zwangsbedingung, 95
- Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik, 95
- Zyklotron, 171
- Zyklotronfrequenz, 170

Abbildungsverzeichnis

3.1	Gravitationswaage	12
3.2	Hebel	21
4.1	Wippe im Gleichgewicht	26
4.2	Vergleich: Stabil, instabil	27
4.3	Drehung: Rotationssymmetrischer Körper	32
4.4	Gestörter Kreisel	34
4.5	Abbildungen zur Präzession	35
5.1	Potentiale: Atomar, Feder	38
5.2	Dehnung eines Feststoffs im s - F -Diagramm	39
5.3	Scherung eines Körpers	42
5.4	Wechselwirkungen bei Flüssigkeiten	46
5.5	Kapillarkräfte	48
5.6	Geschwindigkeitsprofile von Flüssigkeiten	51
5.7	Schaltungen von Rohren	53
5.8	Ideale Flüssigkeit in untersch. dickem Rohr	55
5.9	Bananenflanke: Trajektorie und Vergrößerung der Kugel	56
6.1	Verschiedene Sorten von Pendeln	60
6.2	Dämpfungen einer Schwingung	65
6.3	Amplituden und phasen einer erzwungenen Schwingung	68
6.4	Gekoppeltes Fadenpendel	70
6.5	Schwebung	70
6.6	Überlappung zweier Wellen	77
6.7	Stehende Welle in 5+1 Zeitschritten	79
6.8	Prinzip einer Flöte	81
6.9	Gedekte und offene Pfeifen	82
7.1	Flächen der Idealen Gasgleichung	90
7.2	Phasendiagramm: Carnot-Prozess	98
7.3	Diagramme Idealer und Realer Gase	103
7.4	p-V-Diagramm reales Gas	104
7.5	Phasendiagramm: reales Gas	105
7.6	Das GUGGENHEIM-Schema	106
8.1	Potentiale: Atomar, Harte Kugeln	117
8.2	Große und kleine Harte Kugeln	118
8.3	Harte Kugeln in verschieden geformten Gefäßen	119

9.1	E-Feld einer Platte	129
9.2	E-Feld im Plattenkondensator	130
9.3	Spannung und E-Feld im Koaxkabel	133
9.4	E-Feld einer Kugel	134
9.5	Bildladungen	137
9.6	Dipolmoment	140
9.7	Polarisation im Dielektrikum	142
9.8	Arten von Polarisation	144
9.9	Dielektrikum in inhomogenem E-Feld	145
9.10	Brechung eines E-Felds beim Phasenübergang mit $\epsilon_r'' < \epsilon_r'$	146
9.11	Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Eisen und Kupfer .	151
9.12	Schaltung von Widerständen	154
9.13	Schaltplan RC-Glied	156
9.14	Nutzbare Spannung in Abhängigkeit des Innenwiderstands	157
9.15	B-Felder von Leitern	161
9.16	Integrationswege zur Herleitung des AMPÈRE'schen Gesetzes . .	162
9.17	Schleife im B-Feld	169
9.18	Bahnen freier Ladungen im B-Feld	172
9.19	Beispiele für das Induktionsgesetz	174
9.20	Schaltplan beim Laden und Entladen einer Spule	175
9.21	Hoch- und Tiefpass mit Kondensator	182
9.22	Hysteresekurve der Magnetisierung eines Ferromagneten	187
9.23	Morphose eines Schwingkreises zu einem Hertz'schen Dipol	191

Formelzeichen

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
	MECHANIK			
F	Kraft	$\text{N} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$F = m \frac{\text{d}^2 s}{\text{d} t^2}$	$F = ma$
F_g	Schwerkraft	N	fundamental	$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$
W	Arbeit	$\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$	$\text{d} W = F \text{ d} s$	
\vec{p}	Impuls	$\text{N} \cdot \text{s}$	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$
\vec{L}	Drehimpuls	$\text{m} \cdot \text{N} \cdot \text{s}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	
\vec{M}	Drehmoment	$\text{m} \cdot \text{N}$	$\vec{M} = \frac{\text{d}}{\text{d} t} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}$	
	STARRER KÖRPER			
I	Trägheitsmoment	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$	$I = \int_V \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{r}^2 \text{ d} V$	$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$
\mathcal{I}	Trägheitstensor	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$	$I_{ij} = \int_V \varrho(\vec{r}) \cdot (\delta_{ij} \vec{r}^2 - r_i \cdot r_j) \text{ d} V$	

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
E_{rot}	Rotationsenergie	J		$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \vec{\omega}^2 = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega}$
KREISBEWEGUNG				
ω	Kreisfrequenz	$\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$	$\dot{\varphi}$	$\omega = \frac{v}{r}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
a_z	Zentripetalbeschleunigung	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$a_z = \frac{F_z}{m}$	$a_z = \omega^2 r$
MECHANIK DEFORMIERBARER KÖRPER				
σ	(Zug-/Druck)Spannung	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$	$\sigma = \frac{F_N}{A}$	
ε	relative Dehnung	1	$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$	
ε_q	relative Querkontraktion			
μ	Poissonzahl	1	$\mu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}$	$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu)\varepsilon$
E	Elastizitätsmodul	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$	
K	Kompressionsmodul	Pa	$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}$	$K = \frac{1}{\kappa}$
τ	Scherspannung	Pa	$\tau = \frac{F_T}{A}$	
α	Scherwinkel	1	$\alpha = \arctan \frac{\Delta L}{L} \approx \frac{\Delta L}{L}$	
G	Schermodul	Pa	$G = \frac{\tau}{\alpha}$	
.	Zusammenhänge			$\frac{E}{2G} = 1 + \mu$ und $\frac{E}{2K} = 1 - 2\mu$
p	Druck	Pa	$p = \frac{F}{A}$	$p = \rho g h$

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
F_A	Auftrieb	N	$F_A = (\varrho_{\text{Wasser}} - \varrho_r)gV$	
σ	Oberflächenspannung	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2}$	$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F}{\ell}$	
.	JOUNG-LAPLACE		$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ (r_i : Haupkrümm'rad.)	
η	Viskosität	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	$\eta = \frac{F_{\parallel} \cdot d}{A \cdot v_0}$	$F_{\text{Stokes}} = 6\pi\eta r \cdot v$
I	Stromstärke	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \frac{dV}{dt}$	
R	Strömungswiderstand	$\frac{\text{Pa} \cdot \text{t}}{\text{m}^3}$	$R = \frac{\Delta p}{I}$	$R_{\text{Rohr}} = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$
R_e	REYNOLDSzahl		$R_e = \frac{\varrho \cdot d \cdot v}{\eta}$	

SCHWINGUNGEN UND WELLEN

λ	Wellenlänge	m		
T	Periodendauer	s		
ν	Frequenz	$\frac{1}{\text{s}}$	$\nu = \frac{1}{T}$	
ω	Kreisfrequenz	$\frac{1}{\text{s}}$	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$	
Δs	Gangunterschied	m		
$\Delta\varphi$	Phasendifferenz	1		
k	Kreiswellenzahl	$\frac{1}{\text{m}}$	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	$k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$
c, c_{Phase}	Phasengeschw.	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$c_{\text{Phase}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$	$c_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k}$
c_{Gruppe}	Gruppengeschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$c_{\text{Gruppe}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$	$c_{\text{Gr}} = c_{\text{Ph}} - \lambda \frac{dc_{\text{Ph}}}{d\lambda}$

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
.	Konstr. Interferenz			$\Delta s = \lambda n, \quad \Delta \varphi = 2\pi n$
.	Destr. Interferenz			$\Delta s = \lambda n + \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta \varphi = 2\pi n + \pi$
.	Stehende Welle			$\lambda_n^{(f,f)} = \frac{2L}{n}, \quad \lambda^{f,l} = \frac{2L}{n-\frac{1}{2}}$
THERMODYNAMIK				
\bar{u}	mittlere therm. Teilchenenergie	J	$\bar{u} = \frac{f}{2} K_B T$	$U = N \cdot \bar{u}$
U	Innere Energie	J	$U = \frac{f}{2} N K_B T$	
.	Ideale Gasgleichung			$pV = N K_B T = nRT$
c	Spezifische Wärmekapazität	$\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$c = \frac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T}$	
C	Wärmekapazität	$\frac{\text{J}}{\text{K}}$	$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$	$C = c \cdot n$
C_V	isochore W.		$C_V = \frac{f}{2} N K_B$	
C_p	isobare W.		$C_p = \frac{f+2}{2} N K_B$	
κ	Adiabatenkoeffizient		$\kappa = \frac{C_p}{C_V}$	$\kappa = \frac{f+2}{f}$
.	Erster Hauptsatz			$dU = dQ + dW$
dW	Volumenarbeit	J	$dW = -p dV$	
.	Isotherm			$dT = 0, \quad \Delta Q = -\Delta W$
.	Isobar			$dp = 0, \quad \Delta Q = \Delta H$
.	Isochor			$dV = 0, \quad \Delta Q = \Delta U$

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
.	Zusammenhang			$\kappa \cdot \gamma_p \cdot p = \gamma_V$
H	Enthalpie		$H = U + pV$	
.	Adiabatisch		$dQ = 0, \quad \Delta U = \Delta W, \quad T V^{\kappa-1} = \text{const}, \quad p V^{\kappa} = \text{const}$	
\mathcal{F}	Freie Energie	J	$\mathcal{F} = U - TS$	
.	\mathcal{F} wird bei $V, T = \text{const}$ minimiert.			
G	Freie Enthalpie	J	$G = H - TS$	
.	G wird bei $p, T = \text{const}$ minimiert.			
η	Wirkungsgrad	1	$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}}$	$\eta^{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_k}{T_w}$
.	Reale Gasgleichung		$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right) \cdot (V - nb) = nRT = NK_B T$	
.	Merkhilfe			S. Kap. 7.12 auf S. 106.
<hr/>				
MIKROSKOPISCHE THERMODYNAMIK				
n	Teilchendichte	$\frac{1}{\text{m}^3}$	$n = \frac{N}{V}$	
\vec{j}	Teilchenstrom	$\frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$	$\vec{j} = \frac{N}{V} \cdot \vec{v} = n \cdot \vec{v}$	
D	Diffusionskoeffizient		$\vec{j}_{\text{Diff}} = -D \vec{\nabla} n$	
σ	Wirkungsquerschnitt		$\sigma = \frac{N^{\text{abgelenkt}}/t}{N^{\text{Anflug}}/(t A)}$	
λ	mittlere Freie Weglänge	m		$\lambda = \frac{1}{\sigma \cdot \frac{N}{V}}$

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
ELEKTRIZITÄTSLEHRE				
F_C, F_E	COULOMBkraft	N	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$	
ϵ_0	Influenzkonstante, Permittivität	$\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$	
ϱ	Ladungsdichte	$\frac{\text{C}}{\text{m}^3}$	$\varrho = \frac{Q}{V} = \frac{dQ}{dV}$	
σ	Flächenladungsdichte	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dQ}{dA}$	
λ	Lineare Ladungsdichte	$\frac{\text{C}}{\text{m}}$	$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dQ}{dL}$	
\vec{E}	E-Feld	$\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$
φ	Elektrisches Potential	V	$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{r}$	$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}$
U	Spannung	V	$U = \Delta\varphi$	$W = U \cdot q$
Φ_E	Elektrischer Fluss	C	$\Phi_E = \int_A \vec{E} d\vec{A}$	$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \varrho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$
.	Satz von GAUSS			$\int_V \vec{\nabla} \vec{f} dV = \oint_{\partial V} \vec{f} d\vec{A}$
.	Satz von STOKES			$\int_A \vec{\nabla} \times \vec{f} d\vec{A} = \oint_{\gamma} \vec{f} d\vec{s}$
.	E-Felder			$E^{\text{Platte}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad E^{\text{Kondens}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
C	Kapazität	$\frac{\text{C}}{\text{V}} = F$	$C = \frac{Q}{U}$	
.	Kapazitäten		$C^{\text{Platte}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad E^{\text{Draht}} = \frac{\lambda}{2\pi r \cdot \epsilon_0}, \quad E^{\text{Kugel (Diel)}} = \frac{Q}{4\pi r^2 \cdot \epsilon_0}$	
W_C	Energie im Kondensator	J	$W_C = \frac{1}{2} C U^2$	
$w, \varrho_{E,V}$	(räuml) Energiedichte	$\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$	$w = \frac{W}{V}$	$w^{\text{Kondens}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$
ϵ_r	Dielektrizitätszahl	1	$\epsilon_r = \frac{U_0}{U_D} = \frac{C_D}{C_0}$	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
\vec{p}	(elektrisches) Dipolmoment		$\vec{p} = \vec{q} \cdot \vec{d}$	$\varphi_p \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)}$
α	Polarisierbarkeit	$\frac{\text{C} \cdot \text{m}^2}{\text{V}}$	$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}^{\text{lokal}}$	
\vec{P}	Polarisation		$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$	$\vec{P} = n \vec{p} = n \alpha \vec{E}_D$
σ_p	Polarisationsladungen		von \vec{P} an $\partial\text{Diel.}$ erz.	$ \sigma_p = \ \vec{P}\ $
ϱ_p	Polarisationsladungsdichte	$\frac{\text{C}}{\text{m}^3}$	Durch Pol. erz. Ladungen	$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\varrho_p$
E_D	E-Feld im Diel.		$E_D = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$	
χ	Elektr. Suszeptibilität		$\vec{P} = \chi \cdot \epsilon_0 E_D$	$\chi = \frac{n \cdot \alpha}{\epsilon_0}$
.	Zusammenhang			$1 + \chi = \epsilon_r, \quad \chi = \frac{n \cdot \alpha}{\epsilon_0}$
\vec{D}	elektr. Flussdichte (D-Feld) ⁵¹		$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_D + \vec{P}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho_f$
I	Stromstärke	$\frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$	$I = \frac{dQ}{dt}$	
\vec{j}	Stromdichte	$\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$	$\vec{j} = \frac{I}{A}$	$\vec{j} = \varrho \cdot \vec{v}$
.	Kontinuitätsgleichung			$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$
R	Widerstand	$\frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$	$R = \frac{U}{I}$	
σ	Leitfähigkeit	$\frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}$	$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$	$\sigma = \frac{1}{\rho}$
ρ	Spezifischer Widerstand	$\Omega \cdot \text{m}$	$R = \rho \cdot \frac{L}{A}$	
.	Schaltungen		$R^{\text{reihe}} = \sum_i R_i$ und $R^{\text{parallel}} = \left(\sum_i (R_i)^{-1}\right)^{-1}$	
P	Leistung	$\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$	$P = \frac{dW}{dt}$	$W = I U = R I^2 = \frac{U^2}{R}$

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
\vec{B}	Magnetische Feldstärke	$\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{T}$		
.	B-Feld <i>um</i> Leiter			$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{I} \times \vec{r}}{\ \vec{r}\ ^2}$
Φ_B	Magnetischer Fluss	$\text{T} \cdot \text{m}^2$	$\Phi_B = \int_A \vec{B} \, \text{d}\vec{A}$	
.	AMPÈRE'sches Gesetz			$\oint_{\gamma} \vec{B} \, \text{d}\vec{s} = \mu_0 I$
.	B-Feld einer Spule			$B^{\text{Spule}} = \frac{\mu_0 N I}{L}$
.	BIOT-SAVART'sches Gesetz			$\text{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (\text{d}\vec{l} \times \vec{r})$
$\vec{\mathcal{A}}$	Vektorpotential von B		$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}} = 0$
.	LORENTZkraft			$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{F} = L (\vec{I} \times \vec{B})$
$\vec{\mu}$	Magnetisches Dipolmoment	$\text{A} \cdot \text{m}^2$	$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}$	$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$
.	Dipole (analog \vec{p}, \vec{E})		$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad E^{\text{pot}} = -\langle \vec{\mu} \vec{B} \rangle, \quad \vec{F} = \langle \vec{\mu} \vec{\nabla} \rangle \vec{B}$	
ω_c	Zyklotronfrequenz	$\frac{1}{\text{s}}$	$\omega_c = \frac{q}{m} \cdot B$	
U_i	Induktionsspannung	V	$U_i = -\dot{\Phi}_B$	
L	Eigeninduktivität	$\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \text{H}$	$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\text{d}\Phi_B}{\text{d}I}$	$U_i = -L \cdot \dot{I}$
.	L einer Spule			$L^{\text{Spule}} = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$
.	L bei KIRCHHOFF			$U = L\dot{I}$ steht positiv bei Verbrauchern.
W_L	Energie in Spule	J	$W_B = \frac{1}{2} L I^2$	

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
w_L	Energiedichte in L		$w = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$	
\bar{P}	Wirkleistung	W	$\bar{P} = \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$	$\langle \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2}$
U_e, I_e	Effektivwerte		$\bar{P} = U_e \cdot I_e$	
.	\bar{P} mit Phase φ			$\bar{P} = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cdot \cos \varphi$
Z	Komplexer Widerstand	Ω	$Z = \frac{U}{I}$ mit $U, I \in \mathbb{C}$	
.	Z s			$Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_R = R$
.	Transformator			$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$
μ_r	Relative Permeabilität	1	$\mu_r = \frac{B}{B_0}$	
\vec{M}	Magnetisierung	$\frac{A}{m}$	$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}^i$	
\vec{B}	B-Feld in Materie		$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \cdot \vec{M} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$	
\vec{H}	Magnetische Erregung		$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 = \mu_0 \mu_r \vec{H}_0$	
χ	Magnet. Suszeptibilität	1	$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}_0$	
I_v	Verschiebungsstrom	A	$I_v = A \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$	
\vec{j}_v	Versch'stromdichte	$\frac{A}{m^2}$	$\vec{j}_v = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
.	Q ist Quelle von \vec{E}		$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho_q \, dV$ bzw. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_q$	
.	\vec{B} ist quellenfrei		$\oint_A \vec{B} \, d\vec{A} = 0$ bzw. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	
.	Induktionsgesetz		$\oint_\gamma \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$ bzw. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$	
.	Bewegte Q erzeugt \vec{B}		$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$ bzw. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$	
w_{em}	Energiedichte einer EMW	$\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$	$w_{em} = \varepsilon_0 E^2$	
S	Energiestromdichte	$\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$	$S = \frac{W}{tA} = \frac{w l}{t}$	
P	Abstrahlung Dipol		$P(r) = \oint_A \vec{S} \, d\vec{A} = \frac{p_0^2 \cdot \omega^4}{6\pi \varepsilon_0 c_0^3} \sin^2(\omega(t - \frac{r}{c_0}))$	$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \cdot \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c_0^3} \sim \omega^4$
.	Wellengleichung			$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$
.	Wellenbeschreibung			$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$
.	Zirkulare Polarisation			$E = (\hat{E}, i \hat{E}, 0)^T \cdot e^{i(kz - \omega t)}$
.	EMW: B, E-Feld			$B = \frac{1}{c_0} E, \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega} \left(\vec{k} \times \vec{E} \right)$

⁵¹Das D-Feld entspricht einem E-Feld, welches nur durch freie Ladungen erzeugt wurde (und mit einer konstanten multipliziert wird).