Theophys Blatt ~~2~~ 3

Michael Kopp

1

(a) Polarkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot\varphi \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\left(\dot x^2+\dot y^2\right)$$

$$T(r,\varphi) = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right)$$

$$V(r,\varphi) = \frac{1}{2}D\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right) = \frac{1}{2}Dr^2$$

$$L(\varphi,\dot\varphi,\dot r,r) = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) - \frac{1}{2}Dr^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\dot r^2 + m r^2\dot\varphi^2 - Dr^2\right)$$

(b) φ ist zyklisch.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\varphi}}_{0} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \text{const.}$$

$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}$ ist der kanonische (Dreh)impuls; $\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m r^2\dot\varphi$ bleibt also erhalten.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}m\dot r - \left(m r\dot\varphi^2 - Dr\right) = m\ddot r - m r\dot\varphi^2 + Dr = 0$$

(c) Kartesisch:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot x^2+\dot y^2\right) - \frac{1}{2}D\left(x^2+y^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot x + Dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot y} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$m\ddot y + Dy = 0$$

Ansatz: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x\sin\omega t + B_x\cos\omega t \\ A_y\sin\omega t + B_y\cos\omega t \end{pmatrix}$

Einsetzen: $\ddot y = -A_y\omega^2\sin\omega t - B_y\omega^2\cos\omega t$

$$-mA_y\omega^2\sin\omega t - B_y m\omega^2\cos\omega t + DA_y\sin\omega t + DB_y\cos\omega t = 0$$

mit Koeff. Vgl.: $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\frac{D}{m}}$

Analog für $x(t)$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ löst die Gl.

Polarkoord.

$$m\ddot r + Dr - mr\dot\varphi^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$m\ddot r + Dr = mr\dot\varphi^2 \quad | \cdot r^3$$

$$m\ddot r r^3 + Dr^4 = m r^4\dot\varphi^2 = \frac{\rho^2}{m} = \gamma = \text{const}$$

(da Impuls und m const)

$$m\ddot r r^3 + Dr^4 = \gamma$$

Ansatz: $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$

mit $x(t)$, $y(t)$ von oben.

$$r(t) = \sqrt{A_x^2 \sin^2\omega t + B_x^2\cos^2\omega t + 2A_xB_x \sin\omega t\cos\omega t + A_y^2\sin^2\omega t + B_y^2\cos^2\omega t + 2A_yB_y\sin\omega t\cos\omega t}$$

$$:= \sqrt{\mu\sin^2\omega t + \varrho\cos^2\omega t + \tau\sin\omega t\cos\omega t}$$

Einsetzen liefert mit Maple:

$$\gamma = \sqrt{\mu\varrho - \frac{\rho^2}{mD}}$$

Um noch $\varphi(t)$ zu best. löst man $mr^2\dot\varphi = \rho$ nach $\dot\varphi$ auf: $\dot\varphi = \frac{\rho}{m}\frac{1}{r^2}$ und integriert über t:

$$\varphi = \varphi(t) = \frac{\rho}{m}\int_0^t \frac{1}{r^2(\hat t)}\,d\hat t + \varphi_0$$

[2] (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ $\qquad B = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot dt$

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \left|\begin{pmatrix} -R\sin\varphi\,\dot\varphi \\ R\cos\varphi\,\dot\varphi \\ \dot z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2} \equiv L$$

B: Wirkung; L: Lagrange. L muss erfüllen:

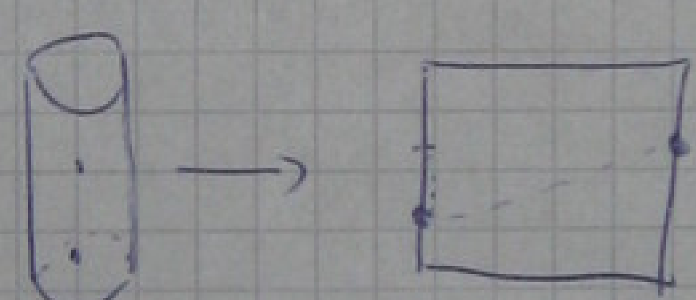
(i) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{R^2\dot\varphi}{\sqrt{R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2}} = \gamma_2$ da φ zyklisch.

(ii) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\dot z}{\sqrt{R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2}} = \gamma_1$ da z zyklisch

$$\dot z = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} R^2 \dot\varphi \quad \Big| \int dt$$

$$z = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} R^2 \varphi + \beta$$

* $r(\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ \frac{\gamma_1}{\gamma_2} R^2 \varphi + \beta \end{pmatrix}$ Wenn r diese Gl. einhält, ist es auf einer Geodäte



Für $\dot\varphi = 0 \Rightarrow L = |\dot z| \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$

Für $\dot z = 0 \Rightarrow L = R\dot\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

Bewegung rund herum und parallel zu z auch möglich

2

(b) $S = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}_{L}\, dt$ soll minimal werden.

Nach Variationsrechnung muss nun der L die Euler-Lagrange-Gl. erfüllen.

Wir parametrisieren $\varphi(\vartheta) = \varphi$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad S = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left| \frac{d\vec{r}}{d\vartheta} \right| \cdot d\vartheta$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\vartheta} = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi\, \varphi' \cos\vartheta - \sin\vartheta \cos\varphi \\ \cos\varphi\, \varphi' \cos\vartheta - \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \left(\text{wobei } \frac{dx}{d\vartheta} \equiv x'\right)$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\vartheta} \right| = R \sqrt{(\varphi'^2 \cos^2\vartheta + 1)} \equiv L$$

Für L gilt die Euler-Lagrange-Gl.:

$$\frac{d}{d\vartheta} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{0} \equiv 0 = \frac{d}{d\vartheta} \frac{\partial L}{\partial \varphi'}$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \underbrace{\frac{R^2 \cos^2\vartheta\, \varphi'}{L}}_{U} = 0$$

Damit das gilt, muss U konst. sein;

das erreichen wir, in dem wir unser Koordinatensystem so drehen, dass die beiden zu verbindenden Punkte parallel der z-Achse und über der x-Achse liegen; dann ist $\varphi' = 0$ da $\varphi = \text{const} = \varphi_0$.

Mit der Gl. für $\vec{r}$ beschreibt $\vec{r}$ also einen Kreisbogen mit Rad. R auf der Kugeloberfläche; damit muss der komplette Teil durch den Kreismittelpunkt gehen.