Das Problem mit der Rechtecksspannung

Michael Kopp

Ich gehe davon aus, dass der Leser mit dem Versuch E44 – also insbesondere dem Aufbau und der Durchführung – vertraut ist.

Aus dem Induktionsgesetzt folgt, dass die Induktionsspannung in der kleinen Spule proportional zur Änderung des B-Feldes ist:

$$U_i = -n\dot{\Phi} = -n\dot{B}A \;, \tag{1}$$

(mit n: Windungszahl der kleinen Spule, A: Fläche der große Spule) wobei wiederum die Änderung von B mit der Änderung des Stroms I in der großen Spule einhergeht; für die Spaltmitte gilt nämlich

$$B = \mu \frac{NI}{l} \tag{2}$$

(N: Windungszahl der großen Spule, l: Länge der großen Spule).

Um nun den Strom I zu bestimmen, verwendet man das Ohmsche Gesetz $I = U/R$ am Ohmschen Widerstand mit $R = 1\Omega$. Die Spannung, die hier gemessen wird, ist U_a, also gilt

$$I = \frac{U_a}{R} \;. \tag{3}$$

Um diese Spannung U_a nun bestimmen zu können, greift man auf die Übertragungsfunktion $(U_a/U_e) =: q(\omega)$ zurück, die in dem Versuch mit hinreichender Genauigkeit bestätigt wurde. Damit schreibt man nämlich statt (3)

$$I = q(\omega) \cdot \frac{U_e}{R} \;, \tag{4}$$

wobei man die Spannung U_e genau kennt: Schließlich ist es die eingegebenen Sinus-/Dreiecks-/Rechtecksspannung, die man zudem auf dem Oszilloskop überwachen kann.

Setzt man nun (4) in (2) ein und leitet nach der Zeit ab, so kann man den Ausdruck (1) wie folgt schreiben:

$$U_i = -nA\mu \frac{N}{l}\frac{1}{R}\, q(\omega)\, \dot{U}_e =: \kappa\, q(\omega)\, \dot{U}_e \;. \tag{5}$$

Was man nun aber nicht beachtet hat, ist, dass (5) in Strenge nur für Sinusspannungen gilt – bspw. verwendet man bei der Herleitung von $q(\omega)$ den (komplexen) Widerstand einer Spule zu $Z_L = \mathrm{i}\,\omega L$. Die Herleitung diese Terms erfolgt unter der expliziten Annahme, dass Strom und Spannung von der Gestalt

$$\psi(t) = \hat{\psi}\, \exp(\mathrm{i}\,\omega t + \varphi) \text{ oder } \psi(t) = \hat{\psi}\, \cos(\omega t + \varphi) \tag{6}$$

sind.

Da wir nun aber kein Sinusförmiges, sondern bspw. ein Kastenförmiges Potential für U_e verwenden, müssen wir dieses in Terme der Gestalt (6) entwickeln – also eine *Fouriertransformation* durchführen.

Die Rechtecksfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < \pi \\ -2 & -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wurde Fourierzerlegt. Aus Symmetriegründen fallen alle Cosinusterme weg und für die Sinusterme gilt

$$a_n = \frac{4}{\pi\, n}(1 - (-1)^n)\ ;$$

sodass die Funktion f – die unere Spannung U_e sein soll – geschrieben werden kann als Grenzwert

$$U_e(t) = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}^*} \frac{4}{\pi\, \omega}(1 - (-1)^\omega)\, \sin(\omega t)\ . \tag{7}$$

Nach Fejér konvergiert die Cesarosumme dieser Reihe gleichmäßig, desweiteren sind die einzelnen Glieder beschränkt; damit darf man Reihe und Ableitung vertauschen sofern die folgende Reihe existiert.... Man erhält dann

$$\dot{U}_e = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}^*} \frac{4}{\pi}(1 - (-1)^\omega)\, \cos(\omega t)\ ; \tag{8}$$

vergleiche Abb. 1 .

Hier wurde aber noch nicht die Übertragungscharacteristik $q(\omega)$ einbezogen. Sie ist gegeben durch

$$q(\omega) = \frac{R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + (R + R_S)^2}} \tag{9}$$

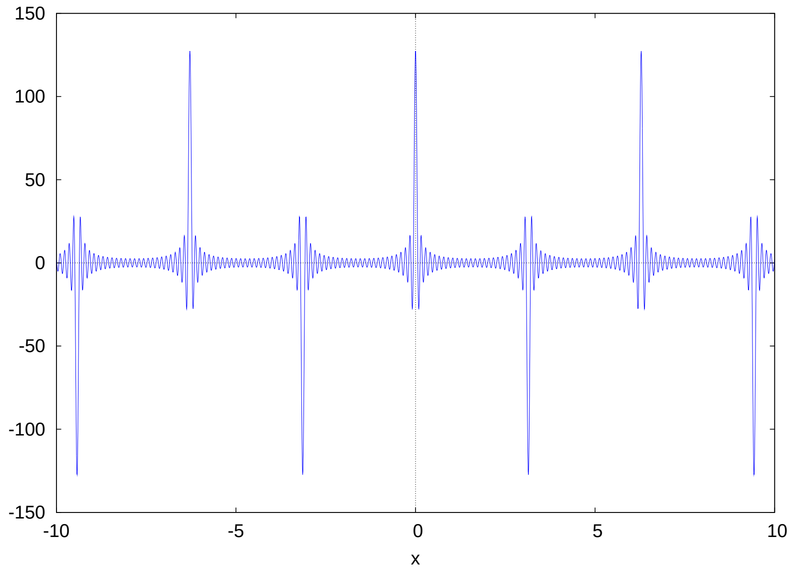

Abbildung 1: Abbildung der Funktion aus Gl (8) – dies ist die Partialsumme mit ω-Termen aus $\{-50, 50\}$.

und muss jetzt für jeden Term in (8) angewandt werden:

$$\dot{U}_e = \sum_{\omega\in\mathbb{Z}^*} \frac{R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + (R+R_S)^2}} \frac{4}{\pi}(1-(-1)^\omega)\cos(\omega t)\ . \tag{10}$$

Als Zahlenwerte wähle ich $R = 1$, $R + R_S = 1.4$ und $L = 0.000137$, was sich aus den experimentellen Werten ergibt.

Betrachtet man Abb.

so sieht man, dass die Korrekturen sehr wohl zu eienr Deformation der Kurvew führen – aber dass sie grob die selbe ist: Der Kurvenverlauf sieht weiterhin wie der einer Deltafunktion aus.

Das war halb zu erwarten, weil die Übertragungsfunktion (9) für kleine Werte ω recht konstant ist; vgl Abb. 4 und beachte die Skalierung. Die Komponenten der Reihe (10) mit hohem ω stören den Grunsätzlichen Verlauf der Kurve immer weniger, weil die höheren Frequenzen nur noch schmale „Zacken“ einbringen... Werden sie von q abgeschnitten, so sorgen sie damit nur noch für eine fehlende Verschmälerung der δ-Funktion.

Nach diesen Ergebnissen kann man das q in (5) getrost konstant setzen und sich an dem Zusammenhang

$$U_i \propto \dot{U}_e \tag{11}$$

erfreuen.

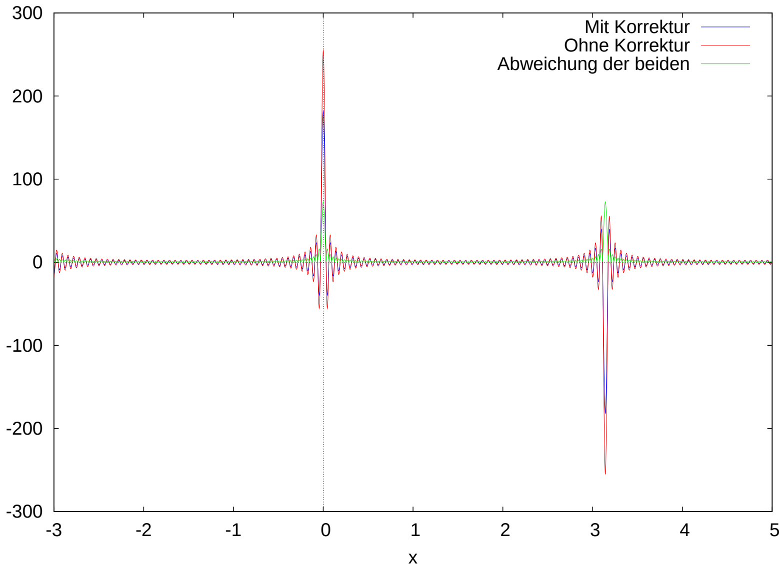

Abbildung 2: Vergleich der Reihen aus (10) und (8) sowie deren absolute Abweichung; bis zu Termen mit $\omega = 100$ summiert.

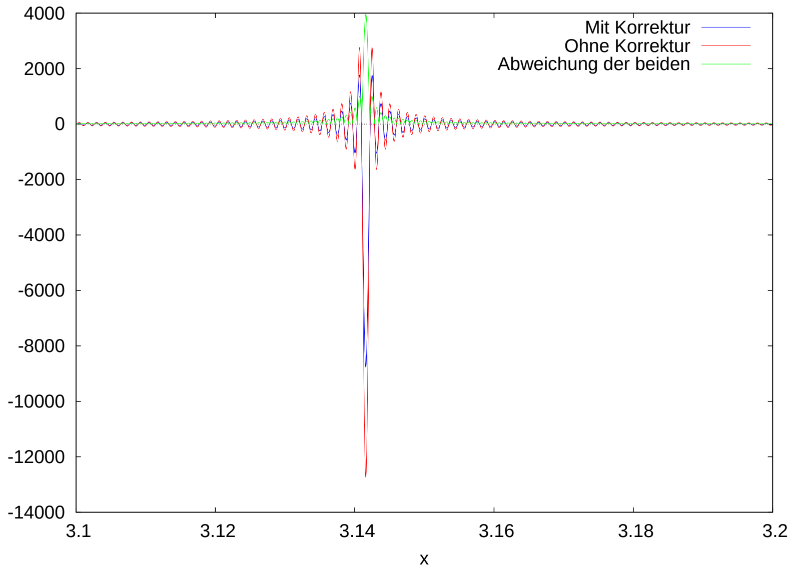

Abbildung 3: Vergleich der Reihen aus (10) und (8) sowie deren absolute Abweichung; bis zu Termen mit $\omega = 5000$ summiert.

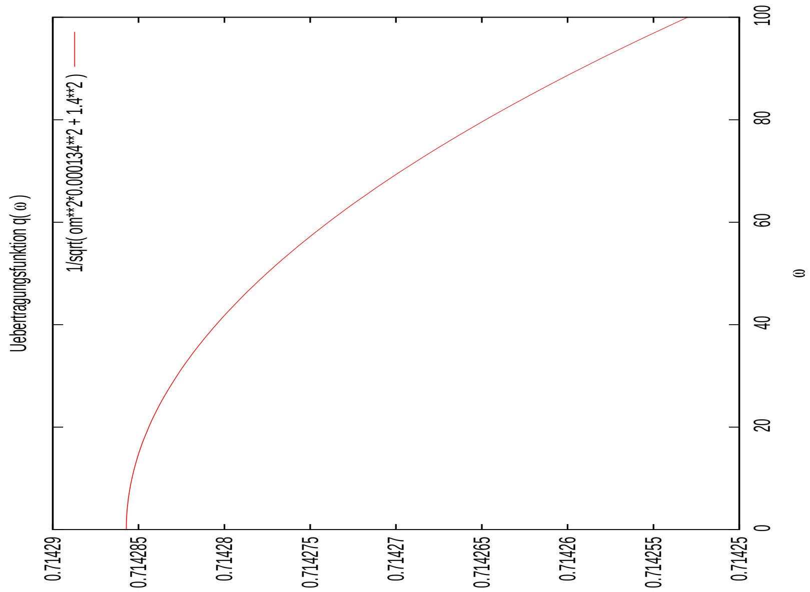

Abbildung 4: Übertragungsfunktion $q(\omega)$ für „kleine“ Frequenzen ω

Andere Einfluüsse, die (11) nichtig machen, möchte ich hiermit aber keinesfalls ausschließen, sondern nur *eine* Fehlerquelle relativieren...

Um die Rechnungen nachvollziehen zu können hier die `Maxima`-Funktionen, mit denen ich gerechnet habe. Weil mein PC nicht der schnellstes ist, konnte ich nicht mit beliebig hohen ω arbeiten...

```
S(k) := sum( 4/%pi * (1-(-1)**n) * cos(n*x), n, -k, k );
q(n) := 1/sqrt( n**2 * 0.000137**2 + 1.4**2 );
T(k) := sum( q(n) * 4/%pi * (1-(-1)**n) * cos(n*x), n, -k, k );
plot2d( [T(100), S(100), abs(T(100) - S(100)) ], [x,-3,5] ,
    [legend, "Mit Korrektur", "Ohne Korrektur", "Abweichung der beiden"]
);
```