1 Es gilt allgemein für eine 1-Form: (e ist durch γ param.):
$$\int_e \eta = \int_e \sum b_i\, dx_i = \int_0^1 b_i(\gamma(t))\, d\gamma_i$$
$$= \int_0^1 \langle b(\gamma(t)) \mid \dot\gamma(t) \rangle dt$$

- $\phi^* \omega = \phi^* \sum_i a_i dx_i = \sum_i a_i \circ \phi \cdot d\phi_i = \langle a \circ \phi \mid d\phi \rangle$

$\rightarrow \int_e \phi^* \omega = \int_0^1 \langle a \circ \phi(\gamma(t)) \mid \phi' \dot\gamma(t) dt \rangle$

da $d\phi = \phi' d\underline{x}$
$= \phi' \dot\gamma\, dt$

$\rightarrow \int_{\phi e} \omega = \int_0^1 \langle \omega(\phi \circ \gamma(t)) \mid d(\phi \circ \gamma) \rangle$

Nach Kettenregel: $d(\phi \circ \gamma) = \phi' d\gamma$
$= \phi' \cdot \dot\gamma\, dt$

Die Gleichheit gilt wg. Assoziativität der Verkettung.

Nach Def.* d. Integr. von k-Formen in k-dim. Gebieten gilt für eine Fläche $\mathcal{F}$ param. durch $\gamma: \Omega \to V \subseteq \mathbb{R}^n$:
$$\int_{\mathcal{F}} \omega = \int_\Omega \gamma^* \omega$$
wobei man $\mathcal{F}$ als Spur von γ deuten kann: $\mathcal{F} = \gamma(\Omega)$:
$$\int_{\gamma(\Omega)} \omega = \int_\Omega \gamma^* \omega.$$

$\boxed{3}$ Es ist $\operatorname{rot} V = \left(0, 0, \left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - \left[-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\right)$

$= (0,0,0)^T \Rightarrow \int_M \langle \operatorname{rot} V \mid \nu \rangle \, d\underline{o} = 0$

$\int_{\partial M} V \, d\underline{s}$

$\partial M = \{ 4(1, v) \mid v \in [0, 2\pi) \}$ $\qquad 4(1,v) =: \gamma(t) \quad v = t$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos(2t) \\ (2+\cos t)\sin(2t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -4\sin(2t) - \sin t \cos 2t - 2\cos t \sin 2t \\ 4\cos(2t) - \sin t \sin(2t) + 2\cos t \cos 2t \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial M} V \, d\underline{s} = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-(2+\cos t)\sin 2t}{(2+\cos t)^2}, \frac{(2+\cos t)\cos 2t}{(2+\cos t)^2}, 0 \right) \middle| \dot\gamma(t) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{4(2+\cos t) + 2\cos t (2+\cos t)}{(2+\cos t)^2} \, dt = \int_0^{2\pi} 2 \, dt = 4\pi$$

(c) Es ist dann $\int_M \langle \operatorname{rot} V \mid \nu \rangle \, d\underline{o} \neq \int_{\partial M} V \, d\underline{s}$

(d) Dies widerspricht nicht dem Satz v. Stokes, weil dafür eine orientierbare Mannigfaltigkeit gefordert wird. Setzt man jedoch auf M an $\underline{x}$ einen Normalenvektor $\nu(\underline{x})$, so wird dieser nach einer Umdrehung ($\nu(\tilde{\underline{x}})$ mit $\tilde{\underline{x}} = f\underline{x}(u, v+2\pi)$) entgegengesetzt, in einem Punkt ist also $\nu(P) = -\nu(P)$, M also nicht orientierbar.

$\boxed{5}$

(a) Sei $\frac{\underline{x} - f(\underline{x})}{\|\underline{x} - f(\underline{x})\|} = \underline{r}$ der Richtungsvekt. der Geraden $\overline{\underline{x}\, f(\underline{x})}$.

Es gilt: $\overline{\underline{x}\, f(\underline{x})}$: $\underline{x} + t \cdot \underline{r}$. Wir suchen t, sodass

$\|\underline{x} + t\underline{r}\| = 1$: $\langle \underline{x} + t\underline{r} \mid \underline{x} + t\underline{r} \rangle = 1 = \|\underline{x}\|^2 + 2\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle t + t^2 \underbrace{\|\underline{r}\|^2}_{1}$

Mitternachtsformel: $t_{1,2} = \dfrac{-2\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle \pm \sqrt{4\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle^2 - 4(\|\underline{x}\|^2 - 1)}}{2 \cdot 1}$

$= -\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle \pm \sqrt{\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle^2 + 1 - \|\underline{x}\|^2}$, wähle davon den positiven Zweig um die Richtung nicht zu verändern.

(b) $\langle F \mid F \rangle = \|F\|^2 = 1 \Rightarrow 2\langle F \mid F \rangle' = 0 \Rightarrow$

$F' \cdot F = 0$. Die Lin. Abb. hat im Kern mind.

einen Vektor F, damit ist der Rang von F':

$$\operatorname{rang} F' \leq n-1$$

wegen ~~[illegible]~~ sind die Spalten von F' nicht l.u. und damit ist $\det F' = 0$. $\square$

$\omega = F_1 \wedge dF_2 \wedge \dots \wedge dF_n \Rightarrow d\omega = dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n = \Delta$, wobei Δ eine ~~[illegible]~~ Determinantenform ist; also $\exists c: \Delta = c \cdot \det$. (also $d\omega = 0$)

(c) ~~S^{n-1} ist der Rand von~~

S^{n-1} ist der Rand von D^n : $S^{n-1} = \partial D^n$. Die Oberfläche von S^{n-1} kann ~~[illegible]~~ man berechnen via $\int_{S^{n-1}} 1\, do$

mit $\int_{S^{n-1}} 1\, do = \int 1_{S^{n-1}}\, do$.

In Differentialschreibweise heißt dies:

$$\text{Oberfl.}(S^{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega|_{S^{n-1}} = \int_{S^{n-1}} \omega$$

Mit S.v. Stokes folgt:

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{\partial D^n} \omega = \int_{D^n} d\omega = 0,$$

wobei die letzte Identität gilt weil $d\omega = 0$ – siehe (b).

Mit S.v. Stokes folgt also $\text{Oberfl}(S^{n-1}) = 0$ ↯.

(Wir dürfen Stokes anwenden, weil ω glatt ist, was auf einer Umgebung von D^n def. ist (lässt sich problemlos fortsetzen) und S^{n-1} orientiert ist ($\nu = \frac{x}{\|x\|}$).

[4]

(a) $\forall \underline{x} \in U$: $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Basis von $\Lambda^1 \mathbb{R}^n$,

[es gibt also eine eindeutige Darstellung
$\omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$]

Bekannt ist: Nach Def. Gilt für $l = 1, \dots, n$: $d^2 \alpha_l = 0$

$$d^2 \alpha_l = d(d\alpha_l) = d(\omega \wedge \alpha_l) = d\omega \wedge \alpha_l + \omega \wedge d\alpha_l$$
$$= d\omega \wedge \alpha_l + \omega \wedge \omega \wedge \alpha_l = 0$$

Da ω eine 1-Form ist, verschw. der Term $\omega \wedge \omega \wedge \alpha_l$
(da $\omega \wedge \tilde{\omega} = -\tilde{\omega} \wedge \omega$ $(\tilde{\omega} = \omega)$ $\Rightarrow$ $\omega \wedge \tilde{\omega} = 0$).

$$\forall_{l = 1, \dots, n}: \quad d\omega \wedge \alpha_l = 0. \qquad (*)$$

Um diese Gl. zu erfüllen, ist entweder $d\omega = 0$, dann wären wir fertig (weil ω dann geschl. ist), oder aber, $d\omega$ enthält ausschließlich Basiselemente mit $\alpha_l \wedge \alpha_i$, d.h. jedes Basiselement müsste alle 1-Formen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ enthalten (weil $(*)$ für all diese wahr ist). Da $d\omega$ eine 2-Form ist, kann dies nicht gelten, weil die Basiselemente von $\Lambda^2 \mathbb{R}^n$ nur aus 2 1-Formen bestehen

$\Rightarrow$ Es muss $d\omega = 0$ sein.

(b)