2 (a) • $[J_z, J_+] = J_z J_+ - J_+ J_z = \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) a_+^\dagger a_- - \frac{1}{2} a_+^\dagger a_- (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)$

$= \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_- a_+^\dagger a_- - a_+^\dagger a_- a_+^\dagger a_+ + a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_-)$

$= \frac{1}{2}([a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_-] + [a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger a_-])$

$a^\dagger a_-$

$[a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_-] = a_+^\dagger [a_-, a_-^\dagger a_-] + [a_+^\dagger, a_-^\dagger a_-] a_-$

Siehe Relationen Blatt 4!

$= -a_+^\dagger (a_-^\dagger \underbrace{[a_-, a_-]}_{0} + \underbrace{[a_-^\dagger, a_-]}_{-1} a_-) - (a_-^\dagger \underbrace{[a_-, a_+^\dagger]}_{0} + \underbrace{[a_-, a_+^\dagger]}_{0} a_+^\dagger) a_-$

boson. Vert'relat.

$= a_+^\dagger a_- = J_+$

$[a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger a_-] = a_+^\dagger [a_+, a_+^\dagger a_-] + [a_+^\dagger, a_+^\dagger a_-] a_+$

$= -a_+^\dagger (a_+^\dagger \underbrace{[a_-, a_+]}_{0} + \underbrace{[a_+^\dagger, a_+]}_{-1} a_-) - (a_+^\dagger \underbrace{[a_-, a_+^\dagger]}_{0} + \underbrace{[a_+^\dagger, a_+^\dagger] a_-}_{0}) a_+^\dagger$

$= + a_+^\dagger a_- = J_+$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(J_+ + J_+) = J_+$

• $[J_z, J_-] \overset{?}{=} J_-$ analog!

• $[J_+, J_-] = [a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_+] = a_+^\dagger [a_-, a_-^\dagger a_+] + [a_+^\dagger, a_-^\dagger a_+] a_-$

$= -a_+^\dagger (a_-^\dagger \underbrace{[a_+, a_-]}_{0} + \underbrace{[a_-^\dagger, a_-]}_{-1} a_+) - (a_-^\dagger \underbrace{[a_+, a_+^\dagger]}_{1} + \underbrace{[a_-^\dagger, a_+^\dagger]}_{0} a_+) a_-$

$= + a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_- = 2 J_z$

• ◇ $L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$; $\underline{L} = (L_x, L_y, L_z)^T \Rightarrow$ $(\underline{L} = \underline{J})$

$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$

$\frac{1}{2}(L_+ L_- + L_- L_+) = \frac{1}{2}((L_x + iL_y)(L_x - iL_y) + (L_x - iL_y)(L_x + iL_y))$

$= \frac{1}{2}(L_x^2 + \cancel{iL_y L_x} + iL_y^2 - \cancel{iL_x L_y} + L_x^2 + \cancel{iL_x L_y} - \cancel{iL_y L_x} + L_y^2)$

$= \frac{1}{2}(2L_x^2 + 2L_y^2) = L_x^2 + L_y^2$

$\Rightarrow J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2} J_+ J_- + \frac{1}{2} J_- J_+$

◇ $J_z^2 = \frac{1}{4}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) =$

$= \frac{1}{4}(a_+^\dagger a_+ a_+^\dagger a_+ - a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- - a_-^\dagger a_- a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- a_-^\dagger a_-)$ $\quad a^\dagger a = N$

$= \frac{1}{4}(N_+^2 - N_+ N_- - N_- N_+ + N_-^2)$

$= \frac{1}{4}(N_+ - N_-)^2$

$[N, a]$

$[a^\dagger a, a] = a^\dagger \underbrace{[a, a]}_{0} + \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1} a$

$[N, a] = -1$

$aa^\dagger = aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a$

$= \underbrace{a^\dagger a}_{N} + \underbrace{[a, a^\dagger]}_{+1}$

$[N_+, a_-] = 0$

$[N_-, a_+] = 0$

$[1_-, a_+] = 0$

$\mathbb{1} = 1_+ = 1_-\,!$

$$\frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) = \frac{1}{2}\big(a_+^\dagger \underbrace{a_- a_-^\dagger}_{N_- + 1_-} a_+ + a_-^\dagger \underbrace{a_+ a_+^\dagger}_{N_+ + 1_+} a_-\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big((N_- + 1_-)\underbrace{a_+^\dagger a_+}_{N_+} + (N_+ + 1_+)\underbrace{a_-^\dagger a_-}_{N_-}\big)$$

$$= \frac{1}{2}(N_- + 1_-)N_+ + \frac{1}{2}(N_+ + 1_+)N_-$$

$$\Rightarrow J^2 = \frac{1}{4}(N_+^2 + N_-^2) \cancel{- \frac{1}{2} N_+N_-} + \frac{1}{2}N_-N_+ + \frac{1}{2}1_-N_+ + \frac{1}{2}N_+N_- + \frac{1}{2}1_+N_-$$

$$= \frac{1}{4}(N_+ + N_-)^2 + \frac{1}{2}(N_+ + N_-) \quad \ominus$$

Setze $N_+ + N_- =: 2N$:

$$\ominus\!: \quad N^2 + N = N(N+1)$$

$\square$

(b)

1. Z: $J_+ |n_+, n_-\rangle \propto |n_+ + 1, n_- - 1\rangle$:

$$N J_+ |n_+, n_-\rangle = (N_+ + N_-) J_+ |n_+, n_-\rangle$$

Dafür: $[N, J_+] =$
$[a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_-] =$
$[a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger a_-] + [a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_-] =$
$a_+^\dagger [a_+, a_+^\dagger a_-] + [a_+^\dagger, a_+^\dagger a_-] a_+$
$+ a_-^\dagger [a_-, a_+^\dagger a_-] +$

— Siehe Blätter —

Zz: ① $J_+ |n_+ n_-\rangle \propto |n_+ + 1, n_- - 1\rangle$

$$N J_+ |n_+, n_-\rangle = (N_+ + N_-) J_+ |n_+ n_-\rangle$$
$$= N_+ J_+ |n_+ n_-\rangle + N_- J_+ |n_+, n_-\rangle \quad (*)$$

- $N_+ J_+ = N_+ J_+ - J_+ N_+ + J_+ N_+ = J_+ N_+ + [N_+, J_+]$

$$[N_+, J_+] = [a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger a_-]$$
$$= a_+^\dagger [a_+, a_+^\dagger a_-] + [a_+^\dagger, a_+^\dagger a_-] a_+$$
$$= -a_+^\dagger \Big(a_+^\dagger \underbrace{[a_-, a_+]}_{0} + \underbrace{[a_+^\dagger, a_+]}_{-1} a_- \Big) - \Big(a_+^\dagger \underbrace{[a_-, a_+^\dagger]}_{0} + \underbrace{[a_+^\dagger, a_+^\dagger]}_{0} a_- \Big) a_+$$
$$= a_+^\dagger a_- = J_+$$

- $N_- J_+ = N_- J_+ - J_+ N_- + J_+ N_- = J_+ N_- + [N_-, J_+]$

$$[N_-, J_+] = [a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_-]$$
$$= a_-^\dagger [a_-, a_+^\dagger a_-] + [a_-^\dagger, a_+^\dagger a_-] a_-$$
$$= -a_-^\dagger \Big(a_+^\dagger \underbrace{[a_-, a_-]}_{0} + \underbrace{[a_+^\dagger, a_-]}_{0} a_- \Big) - \Big(a_+^\dagger \underbrace{[a_-, a_-^\dagger]}_{1} + \underbrace{[a_+^\dagger, a_-^\dagger]}_{0} a_- \Big) a_-$$
$$= -a_+^\dagger a_- = -J_+$$

Aus (*) folgt so:

$$N J_+ |n_+, n_-\rangle = \Big\{ (J_+ N_+ + J_+) + (J_+ N_- - J_+) \Big\} |n_+, n_-\rangle$$
$$= J_+ \Big\{ (N_+ + 1) + (N_- - 1) \Big\} |n_+ n_-\rangle$$
$$= J_+ \Big\{ (n_+ + 1) + (n_- - 1) \Big\} |n_+, n_-\rangle$$

$\Rightarrow$ $J_+ |n_+, n_-\rangle$ liefert bzg. N den selben EW. wie $|n_+ + 1, n_- - 1\rangle$

$\Rightarrow$ $J_+ |n_+ n_-\rangle \propto |n_+ + 1, n_- - 1\rangle$.

Best. Norm von $J_+|n_+,n_-\rangle$:

$$J_+|n_+,n_-\rangle = k_2 \cdot |n_++1, n_--1\rangle \qquad k_2\in\mathbb{C}, \text{ const.} \quad (**)$$

$$\|J_+|n_+,n_-\rangle\|^2 = |k_2|^2 \langle n_+ n_-|\underbrace{J_+^+}_{J_+^+ = J_-} J_+|n_+,n_-\rangle$$

$$= \langle n_+,n_-|J_- J_+|n_+,n_-\rangle$$

$$= \langle n_+,n_-|a_-^+ a_+ a_+^+ a_-|n_+,n_-\rangle$$

Mit $a_+a_+^+ = a_+a_+^+ - a_+^+a_+ + a_+^+a_+ = a_+^+a_+ + [a_+,a_+^+] = N_+ + 1$

und $a_-^+(N_++1)a_- = (N_++1)(a_-^+a_-)$
$= (N_++1)N_-$

$$= \langle n_+,n_-|(N_++1)N_-|n_+,n_-\rangle$$

$$= (n_++1)n_- \langle n_+,n_-|n_+,n_-\rangle. \qquad (***)$$

Wir (i.A.) nehmen ~~$\langle n_+ n_-|$~~ $|n_+n_-\rangle$ als normiert an, also
$\||n_+n_-\rangle\|^2 = \langle n_+n_-|n_+n_-\rangle = 1$.

~~Es ist also $|n_++1, n_--1\rangle$ normiert, wenn $|k_2|^2 = \frac{1}{(n_++1)n_-} \Leftrightarrow k_2 = \frac{1}{\sqrt{(n_++1)n_-}}$ ist~~

~~Mit (**) folgt:~~

~~$J_+|n_+n_-\rangle =$~~

Es folgt aus $(***)$, $(**)$: $\|J_+|n_+n_-\rangle\|^2 = |k_2|^2\||n_++1, n_--1\rangle\|^2 = (n_++1)n_- \cdot 1$

$|n_++1, n_--1\rangle$ ist also normiert wenn

$$k_2 = \sqrt{(n_++1)n_-}.$$

□

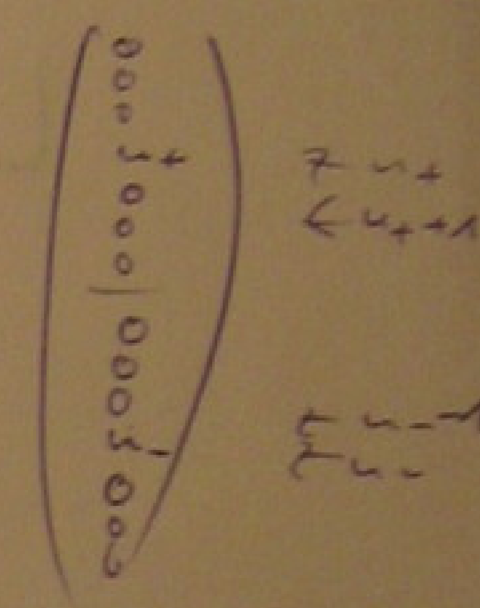
(2) Die Rechnung für $J_-|n_+n_-\rangle$ erfolgt genau analog! □

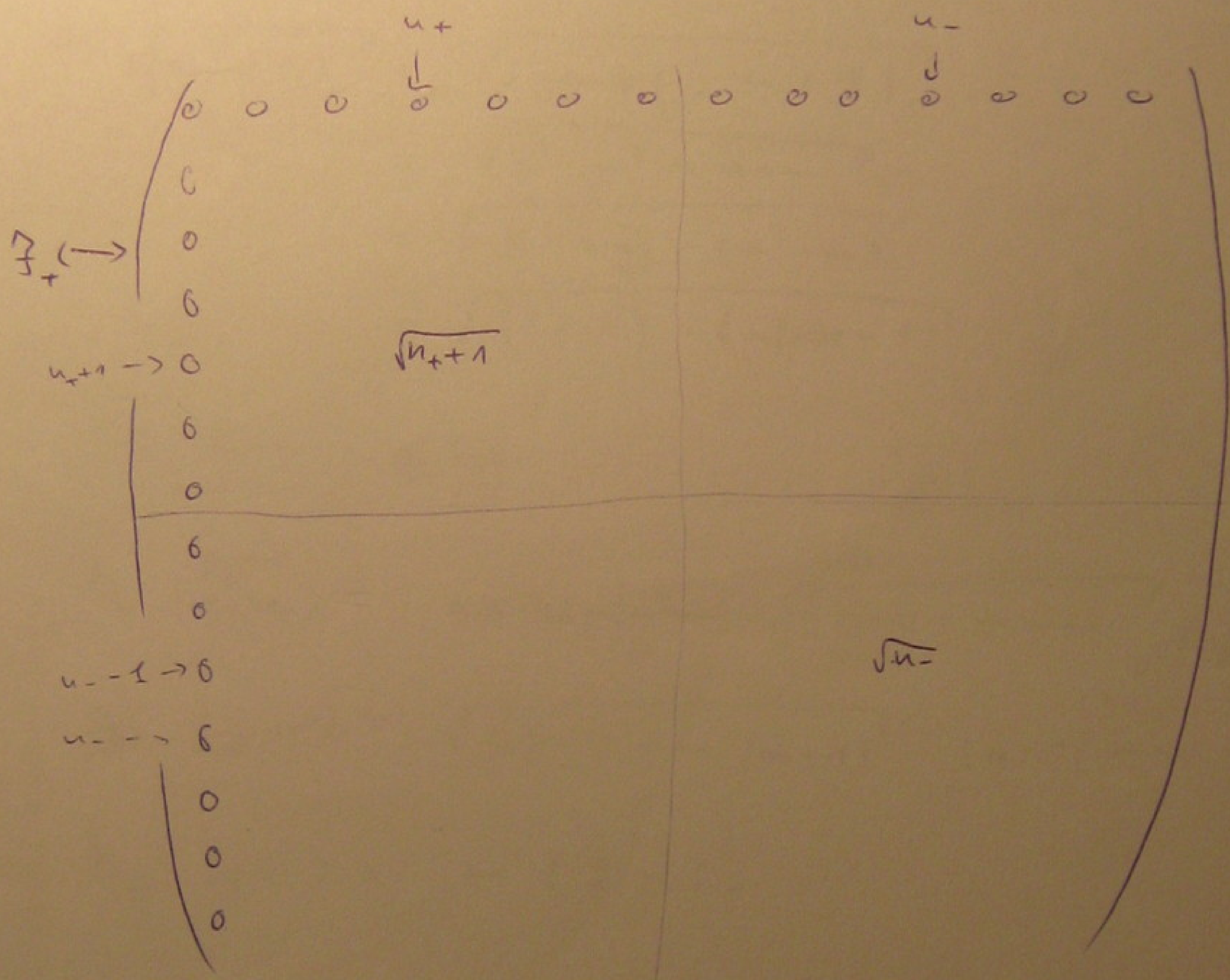
(3) Da $J_z = \frac{1}{2}(N_+ - N_-)$ folgt sofort

$\frac{1}{2}(n_+ - n_-)\,|n_+ n_-\rangle = J_z\,|n_+, n_-\rangle$.

(4) Annahme (zwecks Darstellung): $\dim \mathcal{H} = 14$.

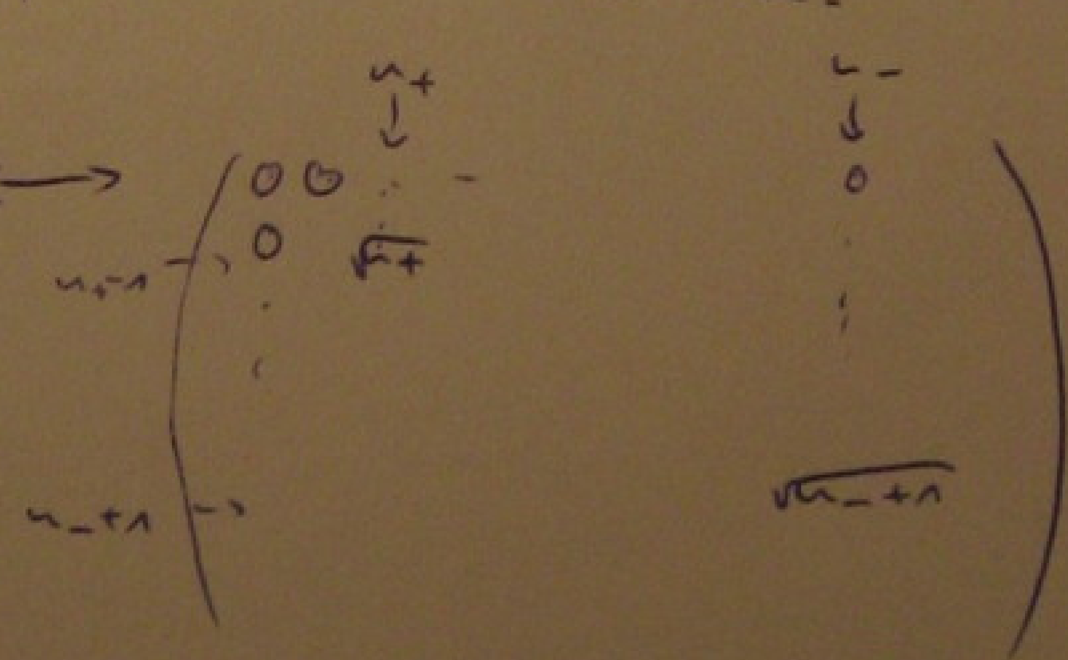
$|n_+ n_-\rangle \longleftrightarrow$

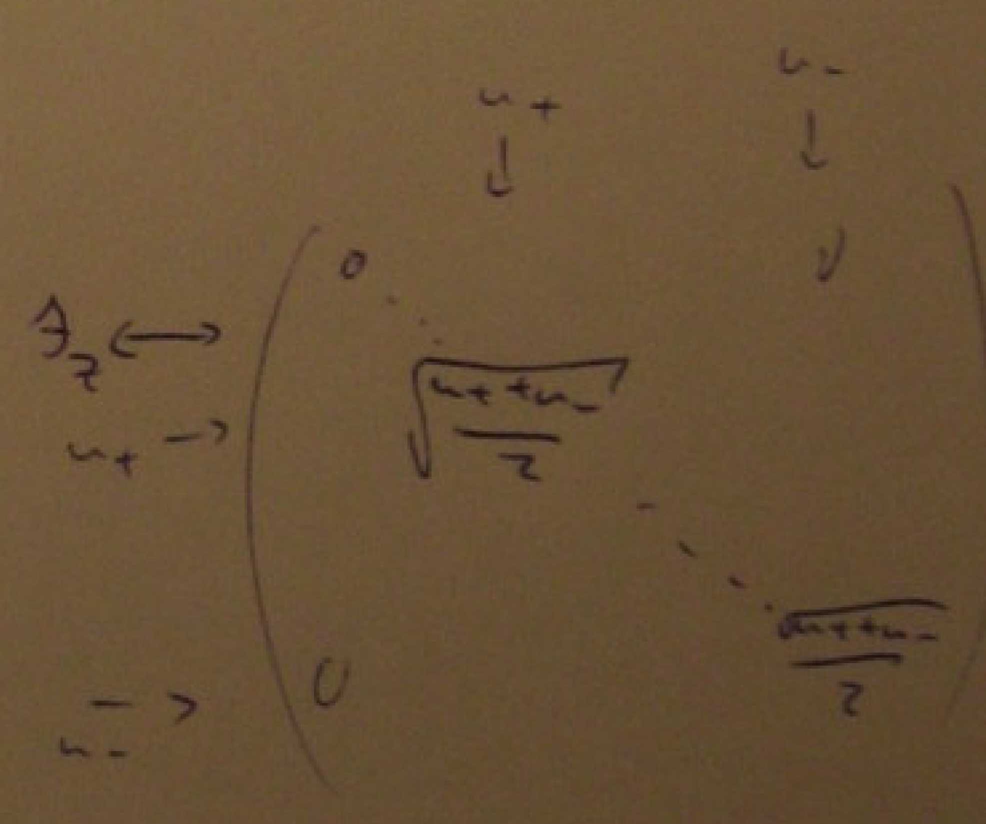




Wo weiß ist, sollen 0en stehen.

Bei J_-: $J_- \longleftrightarrow$





(5)

$$\left.\begin{aligned} j &= \tfrac{1}{2}(n_+ + n_-) \\ m &= \tfrac{1}{2}(n_+ - n_-) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\oplus \quad j+m = n_+ \\ &\ominus \quad j-m = n_- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{n_-(n_+ + 1)} &= \sqrt{(j-m)((j+m)+1)} \\ &= \sqrt{j^2 - m^2 + j - m} \\ &= \sqrt{(j^2+j) - (m^2+m)} \\ &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{n_+(n_- + 1)} &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \\ &= \sqrt{j^2 - m^2 + j + m} \\ &= \sqrt{(j^2+j) - (m^2-m)} \\ &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \end{aligned}$$

$$\frac{n_+ - n_-}{2} = m$$

$$\Rightarrow \quad J_+ |j,m\rangle = \cancel{j(j+1) - m^2} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\ |j+1, m-1\rangle$$

$$J_- |j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\ |j-1, m+1\rangle$$

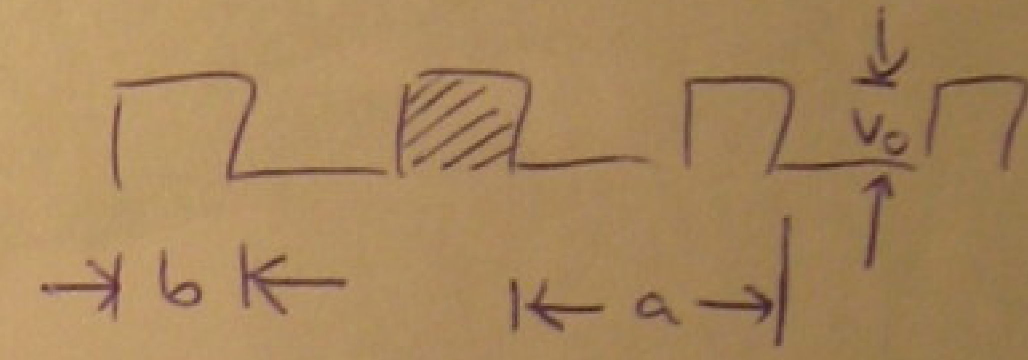
$$J_z |j,m\rangle = m\,|j,m\rangle.$$

(1)

(a) δ hat zwei wichtige Eigenschaften:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$\int \delta(x)\,dx = 1.$$



Geometr. ist g der „Inhalt" einer Barriere. Er bleibt gleich, wenn

~~g~~ $b \to 0$

deshalb: $V_0 \to \infty$.

An einer Stelle (x_0) ~~ist~~ geht also $V \to \infty$, sonst geht $V \to 0$

und das Integral darüber gibt immer g ⇝ Eigensch. d. δ-Fkt.

(b)

Wir (will) machen einen Separationsansatz. $\tilde{\Psi}$ ist die Lösung der Schrödingergl. $(\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(x,t))$

$$\hat{H}\tilde{\Psi} = \hat{E}\tilde{\Psi}, \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\partial_x^2, \quad \hat{E} = -i\hbar\partial_t$$

wir setzen

$$\tilde{\Psi} := \psi(x)\cdot\varepsilon(t).$$

Es ist dann $\hat{H}\tilde{\Psi} = \varepsilon(t)\cdot\hat{H}\psi(x)$ und $\hat{E}\tilde{\Psi} = \psi(x)\cdot\hat{E}\varepsilon(t)$.

⇝ Lös. für ε:

$$\varepsilon(t) = e^{-Et/i\hbar}$$

⇝ Lös. für ψ: (im n-ten „Topf")

$$\psi_n(x) = A_n e^{ik(x-na)} + B_n e^{-ik(x-na)}$$

-16-

Stetigkeit: $\psi_{n-1}(an) = \psi_n(an)$:

$$A_{n-1} e^{ik(an-(n-1)a)} + B_{n-1} e^{-ik(an-(n-1)a)} = A_n + B_n$$

$$A_{n-1} e^{ika} + B_{n-1} e^{-ika} = A_n + B_n$$

Differenzierbarkeit: Mit Hauptsatz der Differential-/Integralrechnung:

Betrachte ε-Umgeb. von Potential-Peak:

$$\psi_n'(na+\varepsilon) - \psi_{n-1}'(na-\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi''(an+x)\,dx$$

Mit Schrödingergl. kann man ψ'' erhalten:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = E\psi \Rightarrow \psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi$$

Wobei $V = g\cdot\delta(x)$. Das Integral ist dann:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi''(an+x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - g\,\delta(\cancel{an}\,x)\right)\psi(\overset{an-x}{\cancel{x}})\,dx$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\cdot 2\varepsilon\cdot E + \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(an)$$

Für $\varepsilon \to 0$ gilt wg. Stetigkeit von ψ:

$$\psi_n'(na) - \psi_{n-1}'(na) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(an)$$

(c) Das Potential V ist a-periodisch und es macht keinen Unterschied, ob man nach x oder $x+an$ ableitet:

$$\partial_{(x+an)} \psi(x) \underset{\uparrow \text{ Shift}}{=} \partial_x \psi(x - \underbrace{an}_{\substack{\uparrow \\ \text{Spielt bei Ableitung} \\ \text{keine Rolle}}}) = \cancel{\partial_x \psi} \underset{\uparrow \text{ Rück-Shift}}{\overset{\text{Rü}}{=}} \partial_x \psi(x)$$

$\Rightarrow \quad H(x) = H(x-an)\,! \qquad (*)$

Der Operator T definiert eine Verschiebung:

$$T_{an}\,\psi(x) = \psi(x+an)$$

Untersuche $[H,T]$:

$$[H,T] = 0 \iff HT = TH \iff T^{-1}HT = H$$

$$T^{-1}HT\,\psi(x) = H\psi(x)$$

$$T^{-1}H\,\psi(x+an) = H\psi(x)$$

$$H(x-an)\,\psi(x) = H\psi(x) \qquad \text{dies gilt nach } (*)$$

$\Rightarrow [H,T] = 0$

Da die Operatoren kommutieren, ist eine Eigenbasis von H auch eine Eigenbasis von T. (H,T simultan diag'bar!)

Da $\hat{H}\psi = E\psi \propto \psi$ folgt $T\psi \propto \psi$. $(**)$

D_{an} sei eine Darstellung des Operators; das wegen $(**)$ gilt:

$$D_{an}\psi(x) \propto \psi(x) \rightsquigarrow D_{an}\psi(x) = C_{an}\,\psi(x)$$

C_{an}: Konstante!

Die Darstellung muss die Gruppenstruktur repräsentieren.

- Neutrales Elem. T_0: $\quad D_0\psi = \mathbb{1}\psi$
- Verknüpfung: $T_a \circ T_b$ $\quad D_{a+b}\psi = D_a D_b \psi \overset{\text{Abelsche Gruppe}}{=} D_b D_a \psi$
- Inverses Elem.: $T_a^{-1} = T_{-a}$: $\quad D_{-a} \cdot D_a \psi = \mathbb{1}\psi$

Diese drei Eigenschaften werden von der e-Funktion erfüllt:

- $e^0 = 1$
- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b = e^b \cdot e^a$
- $e^{a-b} = e^a \cdot e^{-a} = e^a/e^a = 1$

$\Rightarrow D_a = e^{iqa}$ wobei $q \in \mathbb{R}$ sein muss, da andernfalls die Amplitude bei mehrmaligem Anwenden von D_a beliebig groß wird.

$\Rightarrow \psi(x) = u(x) \cdot e^{iqx}$. ($\heartsuit$)

Die Eigenschaft $u(x+a) = u(x)$ folgt aus der Symmetrie des Hamilton:

$$H(x+a)\psi(x+a) = H(x)\psi(x) = E\psi(x+a) = E\psi(x)$$

folgt $\psi(x+na) \propto \psi(x)$. (statt a kann man auch na verschieben)

„Periodische Randbed." bedeuten, dass nach N Potentialtöpfen sich wieder eine Periodizität ergeben soll;

Es soll (für festes N) gelten:

$$\psi(x+Na) = \psi(x).$$

(unser Kristall hat N Atome nebeneinander ...)

Mit ($\heartsuit$) folgt:

$$\psi(x+Na) = \psi(x) \cdot e^{iqNa} = \psi(x) \Rightarrow e^{iqNa} = 1$$

$$\Rightarrow qNa = 2\pi p \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow q = \frac{2\pi}{a}\frac{p}{N}.$$

(d)

Nach Bloch: $A_n = A_{n-1} \cdot e^{iqa}$, dito B_n, bzw.

$$A_n = \alpha_n = \alpha_0 \cdot e^{iqna}$$

$$B_n = \beta_n = \beta_0 \, e^{iqna}$$

mit $q := \frac{2\pi}{Na}$ $(p=1;\ \text{oBdA!})$

- $\alpha_0 e^{i\frac{2\pi}{N}(n-1)} e^{ika} + \beta_0 e^{i\frac{2\pi}{N}(n-1)} e^{-ika} = \alpha_0 e^{i\frac{2\pi}{N}n} + \beta_0 e^{i\frac{2\pi}{N}n}$ $\quad \left(\cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-1)}\right)$

$$\alpha_0\left(e^{ika} - e^{i\frac{2\pi}{N}}\right) + \beta_0\left(e^{-ika} - e^{i\frac{2\pi}{N}}\right) = 0$$

- $\alpha_0 e^{i\frac{2\pi}{N}n} - \beta_0 e^{i\frac{2\pi}{N}n} - \alpha_0 e^{i\frac{2\pi}{N}(n-1)} e^{ika} + \beta_0 e^{i\frac{2\pi}{N}(n-1)} e^{-ika} = \frac{2mg}{\hbar^2 ik}\left(\alpha_0 e^{i\frac{2\pi}{N}n} + \beta_0 e^{i\frac{2\pi}{N}n}\right)$

$$\alpha_0\left(e^{i\frac{2\pi}{N}} - 1e^{ika} - \frac{2mg}{\hbar^2 ik} e^{i\frac{2\pi}{N}}\right) + \beta_0\left(-e^{i\frac{2\pi}{N}} + e^{-ika} - \frac{2mg}{\hbar^2 ik} e^{i\frac{2\pi}{N}}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e^{ika} - e^{i\frac{2\pi}{N}} & e^{-ika} - e^{i\frac{2\pi}{N}} \\ -e^{ika} + e^{i\frac{2\pi}{N}} - \frac{2mg}{\hbar^2 ik} e^{i\frac{2\pi}{N}} & e^{-ika} - e^{i\frac{2\pi}{N}} - \frac{2mg}{\hbar^2 ik} e^{i\frac{2\pi}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \underline{0}.$$

Summe & Diff. d. Zeilen:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2mg}{\hbar^2 ik} e^{i\frac{2\pi}{N}} & 2\left(e^{-ika} - e^{i\frac{2\pi}{N}}\right) - \frac{2mg}{\hbar^2 ik} e^{i\frac{2\pi}{N}} \\ 2\left(e^{ika} + e^{i\frac{2\pi}{N}}\right) + \frac{2mg}{\hbar^2 ik} e^{i\frac{2\pi}{N}} & \frac{2mg}{\hbar^2 ik} e^{i\frac{2\pi}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -\mu & 2\vartheta - \mu \\ 2\vartheta + \mu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$

$\det = -4\vartheta^2$

$\Rightarrow$ 1. $\vartheta = 0 \Rightarrow e^{-ika} = e^{i\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow ka = \frac{2\pi}{N}$: Lösungen exist.

$\Rightarrow$ 2. $\vartheta \neq 0 \Rightarrow \det \neq 0 \Rightarrow$ Matrix hat vollen Rang $\Rightarrow$ Nur Lös. $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Sei also $\vartheta = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\mu & -\mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \alpha_0 = -\beta_0$.

klingt komisch, ist aber so... ☺