III
Trigonometrie

In der Schule sind vor allem grobe Kenntnisse über Sinus, Kosinus und Tangens gefragt, oft aber etwas unbeliebt. Daher jetzt eine Darstellung der wohl wichtigsten Elemente der Trigonometrie. Es geht hierbei immer um rechtwinklige Dreiecke und Verhältnisse darin. Um sich die Schreibarbeit "die eine Seite geteilt durch die andere, etc." zu sparen, führt man neue Namen ein, die wie folgt definiert werden:

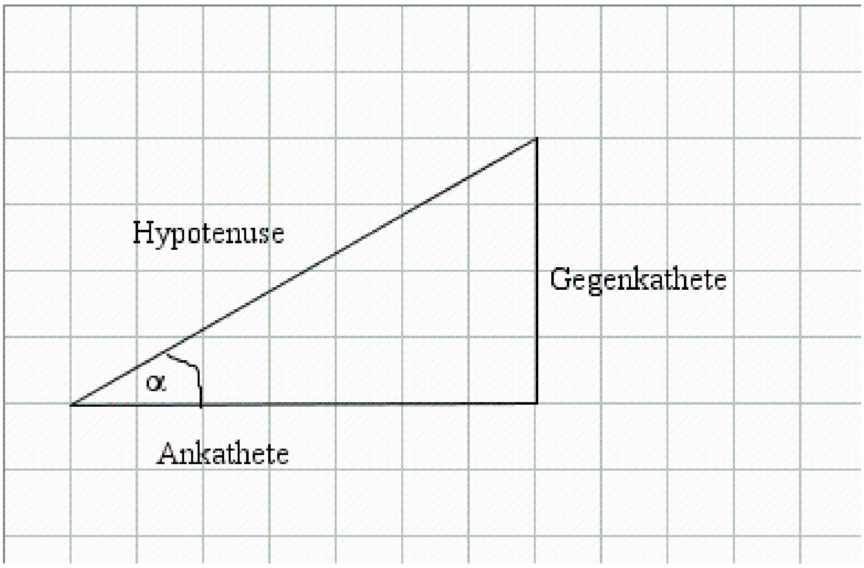
sinusα = sinα = $\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$

cosinusα = cosα = $\frac{Ankathete}{Hypotenuse}$

tangensα = tanα = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ (wobei man sich den letzten Schritt selbst herleiten kann)

Jetzt ist natürlich interessant, was die einzelnen Begriffe bedeuten.

Hypotenuse: Die Hypotenuse ist die längste Seite im Dreieck, sie liegt immer gegenüber vom rechten Winkel.
Ankathete: Dies ist die Seite, die am Winkel α "an"liegt (→ "An"kathete) [nicht die Hypotenuse]. Man wählt ja immer einen Winkel α, so ergibt sich dann die Ankathete, benennt man einen anderen Winkel mit α, ist die Ankathete folglich eine andere, die Hypotenuse bleibt aber immer gleich.
Gegenkathete: Die übrig bleibende Seite, sie liegt nicht am Winkel α an, daher "gegen".



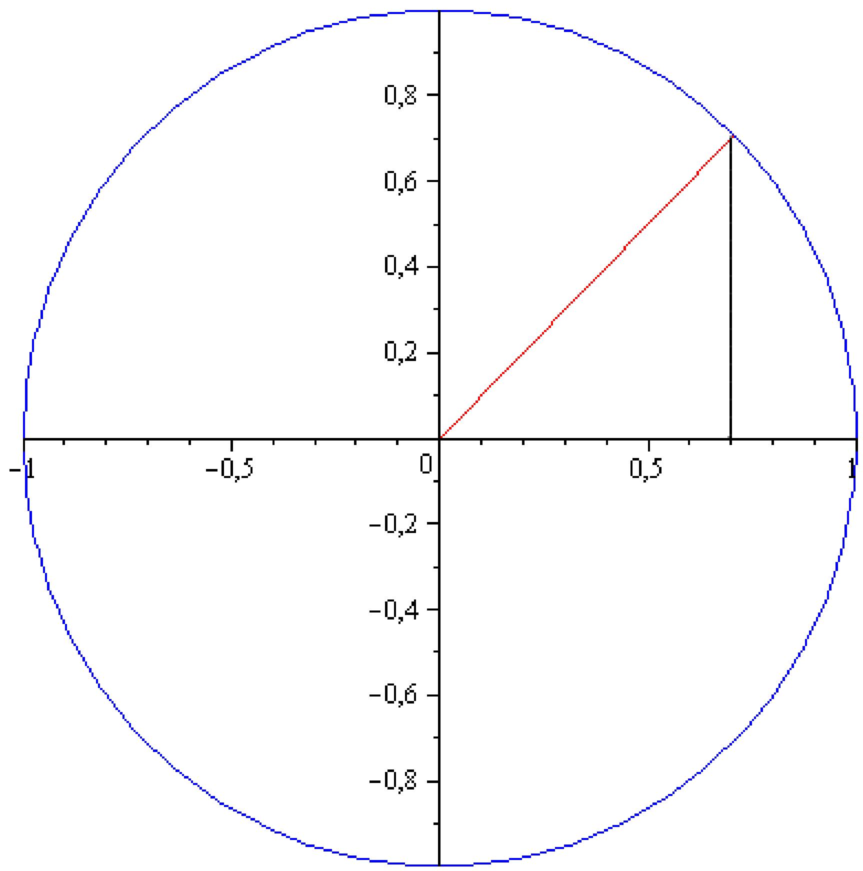
So in etwa kann ein Dreieck jetzt also aussehen und beschriftet werden.
Ein zentraler Punkt in der Trigonometrie ist der Einheitskreis. Das ist ein Kreis in einem Koordinatensystem mit Radius 1. Zeichnet man nun ein rechtwinkliges Dreieck in das Koordinatensystem, wie es unten gemacht wird, ist hoffentlich zu erkennen, dass die Länge der Hypotenuse immer gleich bleibt. Sie ist 1 LE lang.
Zuerst einmal eine Möglichkeit eines Einheitskreises mit einbeschriebenem Dreieck:

$with(plottools); with(plots)$

$c1 := circle([0, 0], 1, color = blue)$

CURVES([[1., 0.], [0.9921147013, 0.1253332336], [0.9685831611,
0.2486898873], [0.9297764859, 0.3681245527], [0.8763066800,
0.4817536741], [0.8090169943, 0.5877852524], [0.7289686273,
0.6845471060], [0.6374239896, 0.7705132429], [0.5358267951,
0.8443279254], [0.4257792918, 0.9048270523], [0.3090169938,
0.9510565165], [0.1873813142, 0.9822872508], [0.06279051925,
0.9980267284], [−0.06279051966, 0.9980267284], [
−0.1873813146, 0.9822872507], [−0.3090169942, 0.9510565163], [
−0.4257792913, 0.9048270526], [−0.5358267946, 0.8443279257], [
−0.6374239893, 0.7705132431], [−0.7289686283, 0.6845471050], [
−0.8090169950, 0.5877852514], [−0.8763066805, 0.4817536732], [
−0.9297764862, 0.3681245519], [−0.9685831613, 0.2486898865], [
−0.9921147014, 0.1253332330], [−1., −4.102067615 10^{-10}], [
−0.9921147013, −0.1253332338], [−0.9685831611,
−0.2486898873], [−0.9297764859, −0.3681245527], [
−0.8763066801, −0.4817536740], [−0.8090169946,
−0.5877852520], [−0.7289686277, −0.6845471056], [
−0.6374239887, −0.7705132437], [−0.5358267939,
−0.8443279262], [−0.4257792906, −0.9048270529], [
−0.3090169934, −0.9510565166], [−0.1873813138,
−0.9822872509], [−0.06279051884, −0.9980267285],
[0.06279052007, −0.9980267284], [0.1873813150,
−0.9822872507], [0.3090169946, −0.9510565162], [0.4257792917,
−0.9048270524], [0.5358267950, −0.8443279255], [0.6374239896,
−0.7705132429], [0.7289686286, −0.6845471047], [0.8090169953,
−0.5877852510], [0.8763066807, −0.4817536729], [0.9297764863,
−0.3681245515], [0.9685831614, −0.2486898861], [0.9921147014,
−0.1253332326], [1., 8.204135230 10^{-10}]]], *COLOUR*(*RGB*, 0., 0.,
1.00000000))

display(*c1*)



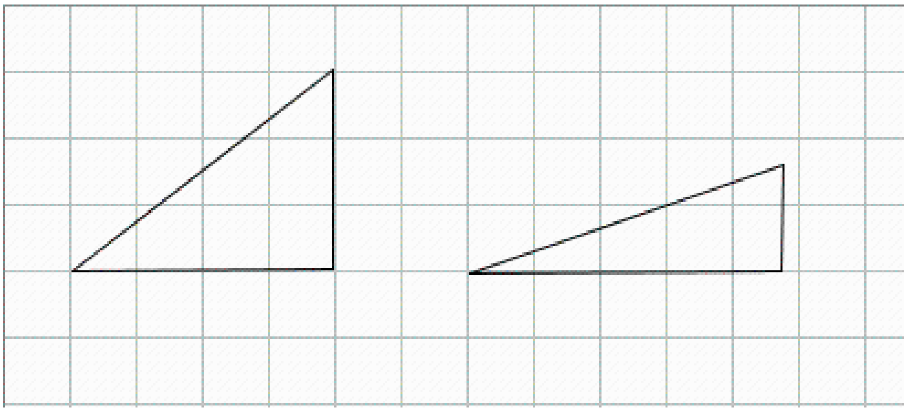
$plot\left(x, x = 0..\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Jetzt wollen wir in diesem Dreieck im Einheitskreis wieder die Seiten beschriften, und den Winkel α einzeichnen.

Wenden wir uns erst dem Sinus zu:

sinusα = sinα = $\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$, in diesem Fall also $\frac{Gegenkathete}{1}$ = Gegenkathete (da ja, wie oben festgelegt, die Hypotenuse 1 LE lang ist.)

Die Länge der Gegenkathete ist also gleich dem Sinus. Diese Länge ist offensichtlich von α abhängig, denn wenn man α anders wählt, ist die Gegenkathete unterschiedlich lang.
Zur Illustration:



Im rechten Dreieck wurde α kleiner gewählt, also wurde die Gegenkathete kürzer.

Daraus folgt eigentlich schon die erste wichtige Tatsache: Wenn α klein wird, wird Sinus klein, oder auch: Wenn $\alpha = 0°$, dann ist $\sin\alpha = \sin 0° = 0$
Genau das gleiche machen wir ejtzt mal in die andere Richtung, das heißt, wir wählen ein größeres α. Schaut man sich also erst das rechte Dreieck an, und danach das linke, ist zu erkennen, dass bei größer werdendem α die Gegenkathete größer wird. Maximal ist die Gegenkathe, wenn $\alpha = 90°$ ist, denn bei noch größerem α wird die Gegenkathete kleiner, dies kann man sich denke ich gut anhand des Einheitskreises vorstellen.
Wie groß ist denn $\sin 90°$?
Hier entsprechen sich ja Hypotenuse und Gegenkathete, da die Hypotenuse aber immer 1 LE lang ist, muss also die gegenkathete auch 1 LE lang sein.
Daraus folgt also: $\sin 90° = 1$

Machen wir α größer als 90° geht das Spielchen eigentlich genau so weiter, das kann man jetzt mal alleine versuchen.

Jetzt haben wir das alles mit Grad gemacht, aus der Schule dürfte auch das Wort Bogenmaß bekannt sein. Es gibt einen direkten Zusammenhang zwischen Grad und Bogenmaß, 360° sind praktisch gleichbedeutend zu 2π. Aus dieser Gleichheit lassen sich alle anderen herleiten (anhand des Dreisatzes).

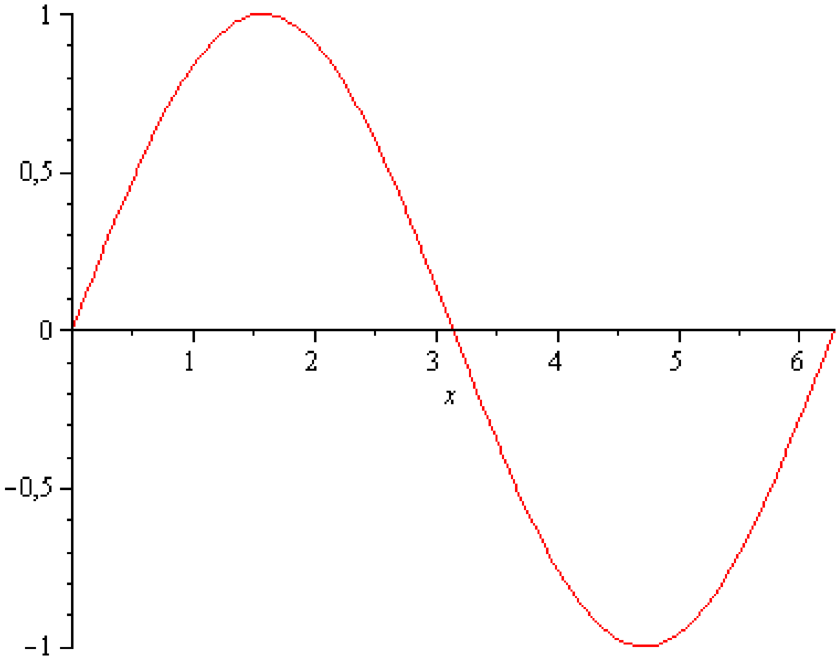
Da 360° 2π entsprechen, lässt sich folgern, dass 180° π entspricht, ebenso wie 90° $\pi/2$, 270° $(3/2)\pi$, etc.

Es ist hieraus die Formel

Bogenmaß = $\frac{Grad \cdot \pi}{180}$ zu erschließen.

Meistens ist von Bogenmaß die Rede, wenn des um Trigonometrie geht.
Trägt man jetzt alles zusammen, was wir herausgefunden haben, können wir doch mal versuchen den Graphen der Sinus-Funktion darzustellen:

$plot(\sin(x), x = 0..2\pi)$



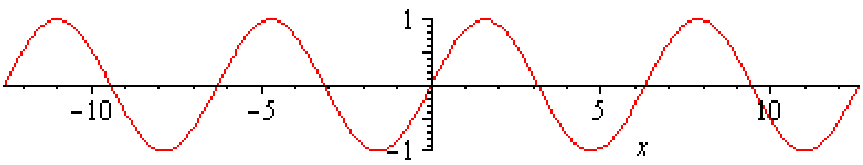
Hat man keine Lust, großartig zu überlegen, kann man auch folgende Formel auswendig lernen, der Rest ergibt sich von selbst:

$sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}$, wobei gilt:

α = 0°/ 0π	30°/ $\frac{\pi}{6}$	45°/ $\frac{\pi}{4}$	60°/ $\frac{\pi}{3}$	90°/ $\frac{\pi}{2}$
x = 0	1	2	3	4

Das heißt: ist nach sin30° gefragt, setzen wir x = 1 in die Formel ein: $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} = \frac{1}{2}$, was also der Wert von sin30° oder auch sin($\frac{\pi}{6}$) ist. (Darf gerne mit dem Taschenrechner verifiziert werden)

Jetzt ist noch wichtig, zu wissen, was passiert, wenn man Winkel, die größer als 360° sind, heranzieht. Der Kreis geht hier praktisch wieder von vorn los, oder auch:
Der y-Wert von sin20° = sin380°, es wiederholt sich also wieder alles, dies führt zur charakteristischen sinus-Funktion:
$plot(\sin(x), x = -4\pi..4\pi)$



Exakt die gleiche Vorgehensweise scheint auch für die Werte des **Kosinus** erfolgversprechend: Hierbei interessiert und immer die untere Seite im Dreieck, die Seite, die mit "Ankathete" bezeichnet wird, denn

cosinusα = cosα = $\frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{Ankathete}{1} = Ankathete$

Die Länge des Kosinus ändert sich aber anders als die Länge des Sinus bei anderen α. Bei α gegen 0 geht der Wert des Kosinus offensichtlich gegen 1, das heißt

cos(0°) = cos(0) = 1

Geht α gegen 90° wird cos immer kleiner, geht also gegen 0:

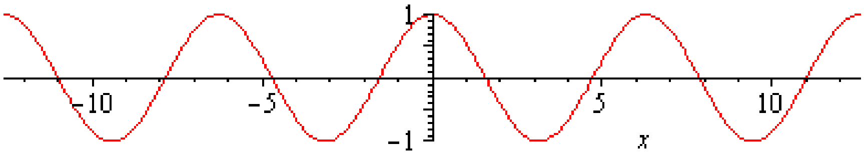
cos(90°) = cos($\frac{\pi}{2}$) = 0

usw.

Der Leser kann sich das wohl selbst anschaulich machen, wenn er den Einheitskreis und die Herleitung des Sinus verstanden hat.

Es ergibt sich folgende cos-Funktion:

$plot(\cos(x), x = -4\pi..4\pi)$



Auch hier gibt es eine Formel, die einem das Leben unter Umständen vereinfachen kann:

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}$, wobei gilt:

α = 0°/ 0π	30°/ $\frac{\pi}{6}$	45°/ $\frac{\pi}{4}$	60°/ $\frac{\pi}{3}$	90°/ $\frac{\pi}{2}$
x = 4	3	2	1	0

Eine gewisse Ähnlichkeit zum Sinus ist nicht zu verleugnen, was auch irgendwo klar ist, da die cos-Funktion ja nur etwas verschoben zur sin-Funktion ist.

Für den Tangens reicht es wohl, nur erneut eine nette Formel aufzustellen, die hier wie folgt lautet:

$\tan\alpha = (\sqrt{3})^x$, wobei gilt:

α = 0°/ 0π	30°/ $\frac{\pi}{6}$	45°/ $\frac{\pi}{4}$	60°/ $\frac{\pi}{3}$	90°/ $\frac{\pi}{2}$
x= -∞	-1	0	1	∞

Dies waren die absolut notwendigen Kenntnisse zur Trigonometrie, die jeden Schüler von Ende der 10. Klasse bis ins Abi verfolgen.