Übungsblatt 3 – Aufgabe 12

Michael Kopp

$$Q(a) : 2x^2 + 2axy + 2y^2 - a^2 - 1 = 0$$

kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a^2 - 1 = 0$$

Eigenvektoren: $\det A = (2-\lambda)^2 - a^2 = 0$ mit Eigenwerten $\{(2-a), (2+a)\}$ also

$$EV = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Es ist $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Damit gilt $BAB^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Nun ersetzen wir $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $w = Bv$; dann gilt

$$v^T A v = v^T B^T B A B^T B v = (v^T B^T) B A B^T (Bv) = w^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} w$$

Wendet man Bv an, gilt: $w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.

Für die Quadrik Q gilt dann:

$$\begin{aligned} w^T \tilde{A} w - a^2 - 1 &= \frac{1}{2}(2+a)(x-y)^2 + (2-a)(x+y)^2 - a^2 - 1 \\ &= (2+a)\xi^2 + (2-a)\eta^2 - a^2 - 1 \\ &= 2\xi^2 + a\xi^2 + 2\eta^2 - a\eta^2 - a^2 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

oder umgeschrieben:

$$Q(a) : \ (2+a)\xi^2 + (2-a)\eta^2 - a^2 = 1$$

oder noch anders:

$$Q : \ \mu\xi^2 + \varrho\eta^2 = 1 + \pi$$

und damit

$$Q : \ \mu'\xi^2 + \varrho'\eta^2 = 1$$

Die Form dieser Quadrik ist also:

$a < -2$ Hyperbel

$a = -2$ 2 parallele Geraden

$a \in (-2; 2)$ Ellipse

$a = 2$ 2 parallele Geraden

$a > 2$ Hyperbel