Theo Üb ②

Michael Kopp

1

(a) z.z. $\int_0^L \varphi^*_n(x) \varphi_m(x) = \delta_{nm}$

- $n = m$: $\int_0^L \frac{1}{L} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \cdot e^{i\frac{2\pi n}{L}x} dx = \int_0^L \frac{1}{L} dx = 1$
- $n \neq m$: $\int_0^L \frac{1}{L} e^{i\frac{2\pi}{L}x(m-n)} dx = \frac{L}{iL\, 2\pi (m-n)} e^{i\frac{2\pi}{L}x(m-n)}\Big|_0^L$

$= 0$ da $e^{i\frac{2\pi}{L}(m-n)L} = e^{i\frac{2\pi}{L}(m-n)0} = 1$ da

$m - n \in \mathbb{Z}$.

(b) z.z. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^*_n(x) \varphi_n(x') = \delta(x-x')$

$\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{L}\cdot(x'-x)} = \frac{1}{L}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{L}(x'-x)}\right) \ominus$

Mit $2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$ folgt

$\ominus \frac{1}{L}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cos\left(\frac{2\pi n}{L}\cdot(x'-x)\right)\right) = \frac{2}{L}\cdot\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x'-x)\right)\right) \circledast$

Aus Analysis bekannt (lässt sich mit vollst. Ind. nach n zeigen): Für $\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos\ldots\right)$ gilt:

$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{\sin(2N+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

$\circledast \frac{2}{L}\cdot\left(\frac{\sin(2N+1)\frac{2\pi}{L}\frac{(x-x')}{2}}{2\sin\frac{2\pi}{L}\frac{(x-x')}{2}}\right) =: A_N(x-x')$

z.z. $A_N(x-x') \longrightarrow \delta(x-x')$ $\quad (x - x' := y)$

- $y \to 0$: Wende L'Hôpital an (da $\sin 0 = 0$): $\frac{L}{1} A_N \to \frac{(2N+1)\frac{\pi}{L}\cos 0}{\frac{\pi}{L}\cos 0}$

Für $N \to \infty$ geht A_N bei $y = 0$ gegen $+\infty$.

- Außerhalb von $y = 0$ oszilliert A_n so schnell, dass man im Grenzfall $\lim_{N\to\infty} A_N$ stets über „Berge & Täler" integriert und das Integral hier verschwindet.

Durch numerische Integration lässt sich zeigen/vermuten, dass das Integral für über $Q \not\ni 0$ verschwindet, aber für $Q \ni 0$ 1 ergibt.

(c) $L \to \infty$: $\Delta p = p_{n+1} - p_n = \frac{2\pi\hbar}{L} \longrightarrow dp$

$p_n \longrightarrow p$ (p_n ist diskret, p kontinuierlich)

Verwende (6): $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} e^{i/\hbar\, p_n (x-x')} = \delta(x-x')$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i/\hbar\, p\cdot(x-x')} = \delta(x-x')$$

(2) $S[q,t] = \int_{t_0}^{t} L(q,\dot q,t')\,dt'$

(a)

(i) $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot q^2 \qquad S =$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial t} = m\ddot q = 0 \Rightarrow m\dot q = \text{konst.} = p$

$S = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}\,dt = \frac{1}{2}mv^2\cdot(t-t_0)$

(ii) $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot q^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = \cancel{\frac{1}{2}}\,\cancel{m}\ddot q + \cancel{m}\omega^2 q = 0 \rightsquigarrow$ Schwing. mit ω.

$q(t) = \tilde q\cos(\omega t) \qquad \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\tilde q^2\omega^2\sin^2(\omega t) - \frac{1}{2}m\omega^2\tilde q^2\cos^2(\omega t)$

$\cancel{q(t) = \tilde q e^{i\omega t} \qquad \dot q(t) = i\omega\tilde q e^{i\omega t} = i\omega q(t)}$

$\cancel{\Rightarrow L = -\frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = -m\omega^2 q^2}$

$L = \frac{1}{2}m\tilde q^2\omega^2\left(\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)\right)$

$S(q,t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}m\omega^3\tilde q^2\left(\sin^2(\omega t') - \cos^2(\omega t')\right)dt'$

$= \frac{1}{2}m\omega\tilde q^2\left[\cos(\omega t_0)\sin(\omega t_0) - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]$

(iii) $V = -F_0\cdot q \qquad F_0 = \text{const.}$

$L = \frac{1}{2}m\dot q^2 + F_0 q \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot q - F_0 = 0$

$\dot q = F_0/m\cdot t + C \qquad q = \frac{1}{2}F_0/m\cdot t^2 + Ct + \cancel{D}$ da $q(t_0) = 0$

$L = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{F_0}{m}t\right)^2 + 2\frac{F_0 C}{m}t + C\right] + F_0 q$

$= \frac{F_0^2}{2m}t^2 + F_0 C t + \frac{1}{2}mC + \frac{1}{2}F_0^2/m\cdot t^2 + F_0\cdot C t + \cancel{F_0 D}$

$S = \int_{t_0}^{t} L\,dt \qquad (t_0 := 0,\ t := t)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{F_0^2}{m}\right)t^3 + F_0 C\cdot t^2 + \left(\frac{1}{2}mC + \cancel{F_0 D}\right)t$

(b)

$\cancel{H := p\dot q - L \Rightarrow L = p\dot q - H.}$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial q}\int_{t_0}^{t} p\dot q - H\,dt = \int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial q}(p\dot q) - \frac{\partial}{\partial q}(H)\,dt =}$

$\cancel{\int_{t_0}^{t} p + \dot p\,dt = p + \int_{t_0}^{t}\dot p\,dt}$

- $\frac{\partial}{\partial q}S = \frac{\partial}{\partial q}\int L\,dt = \int\frac{\partial}{\partial q}L\,dt = \int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)dt = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = p$
- $\frac{d}{dt}S = \frac{\partial S}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q}}_{p}\dot q + \overbrace{\frac{\partial S}{\partial p}}^{0}\dot p = L$

$\frac{\partial S}{\partial t} = L - p\dot q = -H$