Aufgaben für derzeitige Problemstellen

1. a) Schreibe die 3 binomischen Formeln allgemein auf

b) Berechne:
- $(x+3)^2$
- $(2x+4)^2$
- $(3x-2)^2$
- $(4x-1)^2$
- $(5x+3)(5x-3)$
- $(2x-1)(2x+1)$

2. Wie kann man folgende Rechnungen / Aufgaben lösen (M = Mitternachtsformel, A = Ausklammern, B = Binomische Formel, ⋮)

a)
- $5x^2+3x-2=0$
- $5x^2+2x=2$
- $5x^2+2x=0$
- $13x^2-7x=0$
- $13x^2-7x=1$
- $x^2+2x+1=0$

Berechne:
- $x^2-1=0$

b)
- $\sqrt{x-3}=2$
- $2+\sqrt{x+2}=3$
- $2+\sqrt{x-2}=3$
- $\frac{5}{4}x^2+\frac{7}{2}x+\frac{13}{4}=0$
- $\frac{7}{3}x^2+\frac{9}{2}x=0$

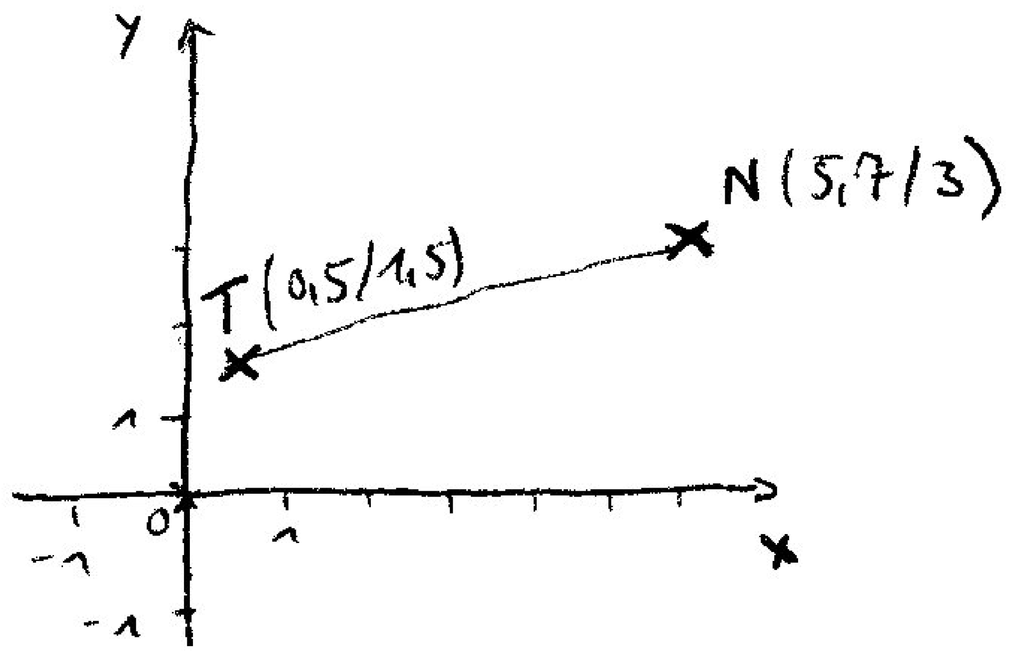
Kürze:

c)
- $\frac{x+y}{x}$
- $\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{8}$

3. Was bedeutet die Formel?
- $d=\sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}$

ist sie die selbe wie
- $d=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$ / $d=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_Q-y_P)^2}$ / $d=\sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_P-y_Q)^2}$ /
- $d=\sqrt{(y_P-y_Q)^2+(x_P-x_Q)^2}$ / $d=\sqrt{(y_Q-y_P)^2+(x_Q-x_P)^2}$
- $d=\sqrt{[(x_Q-x_P)+(y_Q-y_P)]^2}$ / $d=\sqrt{[(y_Q-y_P)+(x_Q-x_P)]^2}$

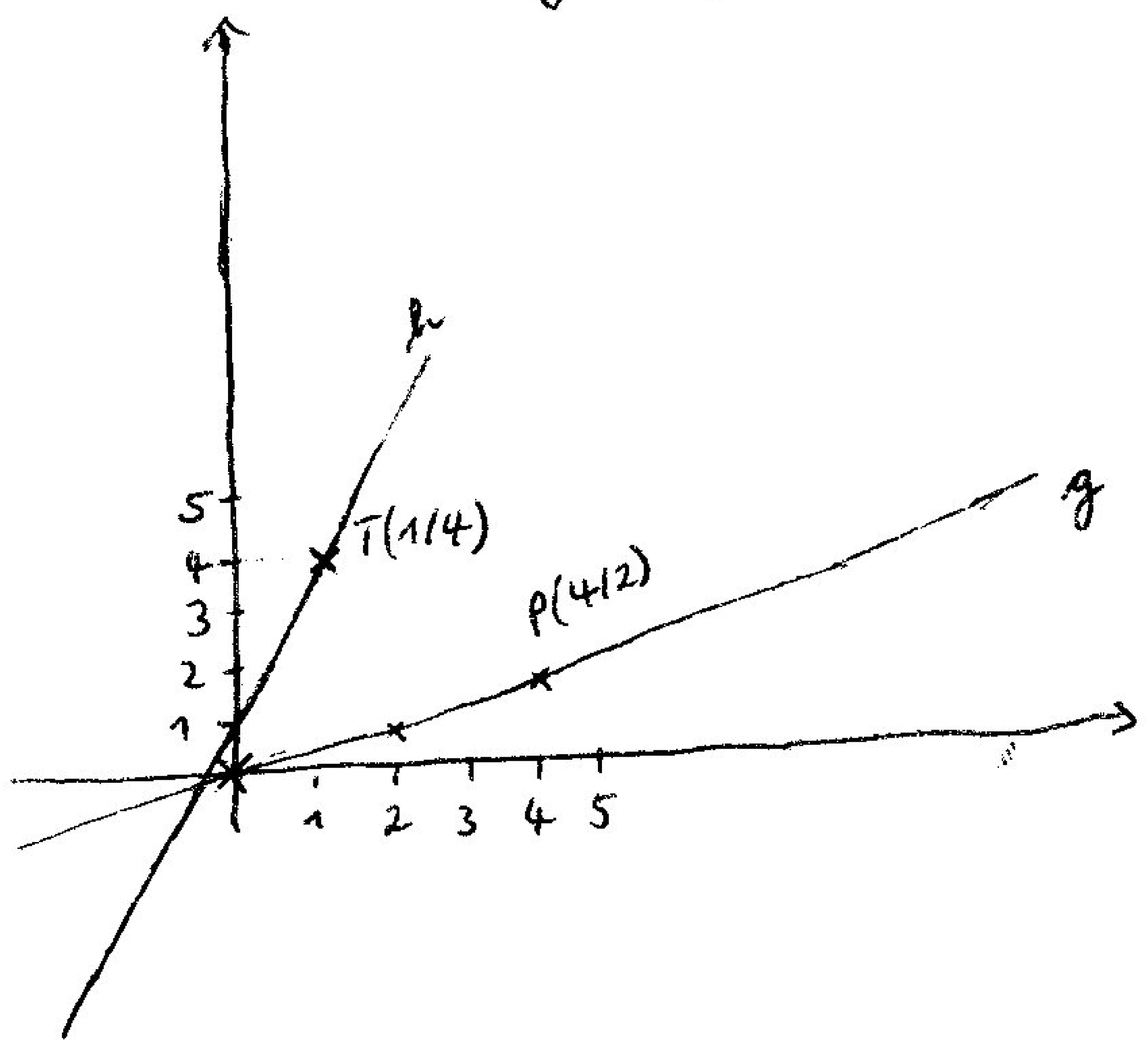
4a) Stelle eine Formel, passend zu den Angaben im Schaubild, auf, die es künftigen (zw. 2 Punkten)
Schülern ermöglicht, durch einfaches Einsetzen der Punkte die Länge einer Strecke zu berechnen:



jeweils eine
allgemeine
Formel

b) Und den Mittelpunkt der Strecke zu berechnen.

5. Stelle die Funktionsgleichung auf:



6. Was bedeutet:

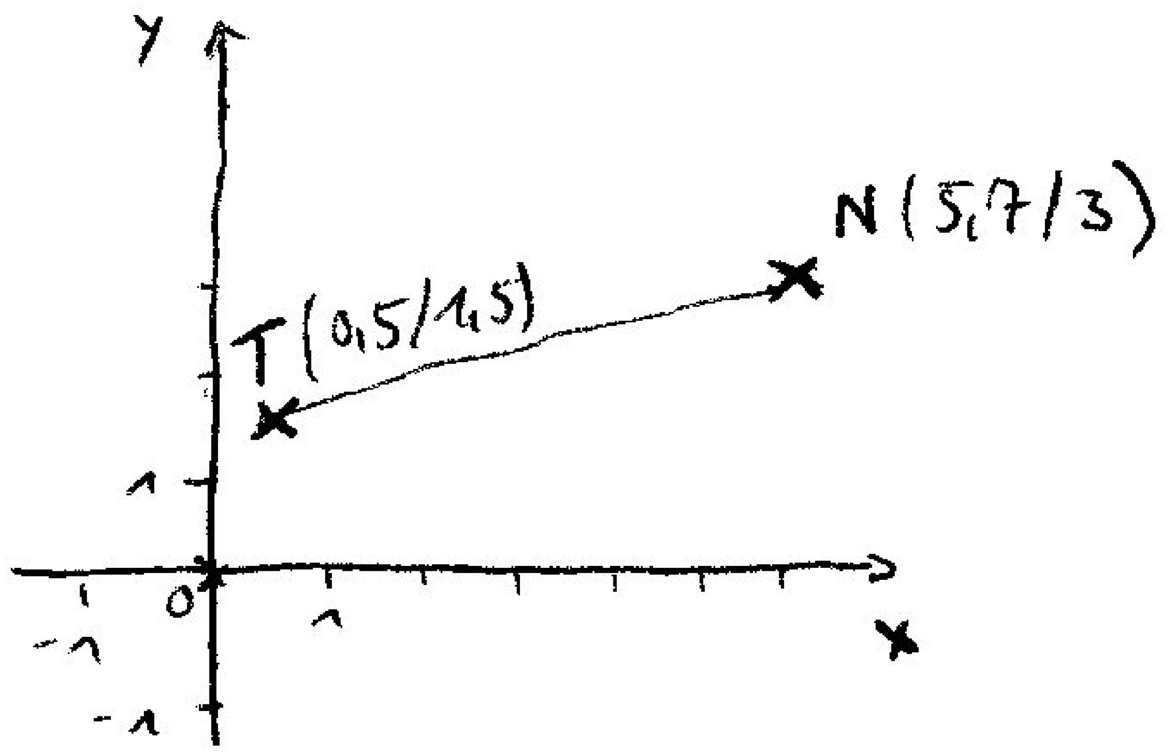
- P(irgendein Ereignis) für alle $x \in \mathbb{R}$
- für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \geq 0$
- für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \in \mathbb{N}$

7. Warum ist dies so:

Für jede Potenzfunktion $f: x \mapsto c \cdot x^n$ gilt: Zum k-fachen x-Wert erhält man den k^n-fachen Funktionswert.

(Tipp: statt x einfach kx einsetzen)

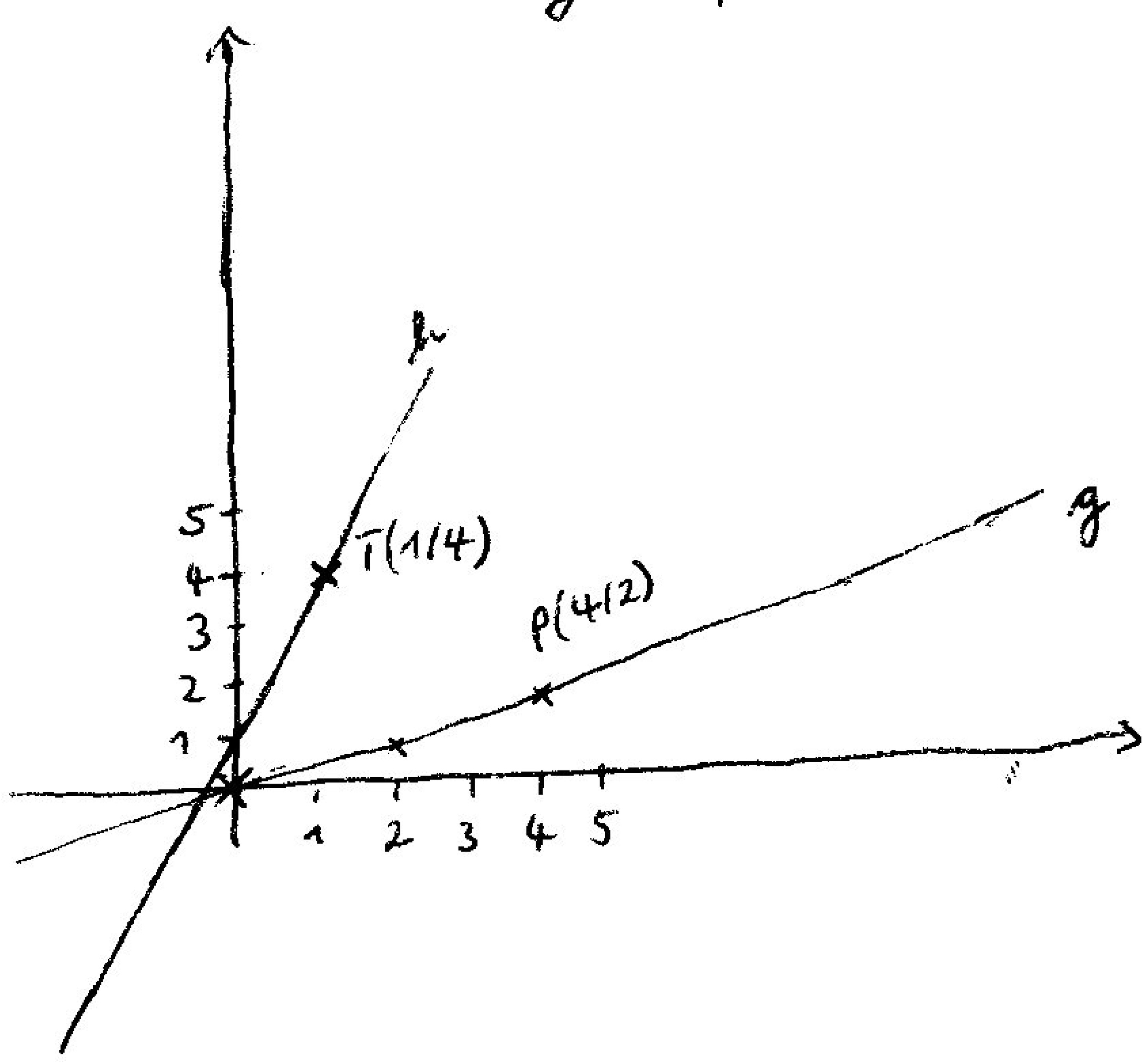
a) Stelle eine Formel, passend zu den Angaben im Schaubild, auf, die es künftigen Schülern ermöglicht, durch einfaches Einsetzen der Punkte die Länge einer Strecke zu berechnen (zw. 2 Punkten)



jeweils eine <u>allgemeine</u> Formel

b) Und den Mittelpunkt der Strecke zu berechnen.

- Stelle die Funktionsgleichung auf:



- Was bedeutet:
  - P(irgendein Ereignis) für alle $x \in \mathbb{R}$
  - für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \geq 0$
  - für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \in \mathbb{N}$

- Warum ist dies so:

  Für jede Potenzfunktion $f: x \mapsto c \cdot x^n$ gilt: Zum k-fachen x-Wert erhält man den k^n-fachen Funktionswert.

  (Tipp: statt x einfach kx einsetzen)

$\mathbb{N}$: Natürliche Zahlen

→ positive, ganze Zahlen, z.B.

1, 2, 3, 4

$\mathbb{Z}$: Ganze Zahlen:

→ pos. & neg. ganze Zahlen, z.B.

-2, -1, 0, 1, 2

$\mathbb{Q}$: Rationale Zahlen:

→ mit Brüchen der Form $\frac{m}{n}$;

$m \in \mathbb{Z}$

$n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}$: Reelle Zahl:

→ alle Zahlen, auch nicht abbrechende, wie

π, $\sqrt{2}$, e, ...

$\mathbb{C}$: Komplexe Zahl:

→ auch aus negativen Zahlen Wurzeln ziehen können.

$i = \sqrt{-1}$

Lösungen zu Übungsblatt

1. a)

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

b)

- $x^2 + 6x + 9$
- $4x^2 + 16x + 16$
- $9x^2 - 12x + 4$
- $16x^2 - 8x + 1$
- $25x^2 - 9$
- $4x^2 - 1$

2. a)

- M
- M
- A
- A
- M
- B

b)

- $x_1 = 1 \quad x_2 = -1$
- $x - 3 = 4 \rightarrow x = 7$
- $x + 2 = 1 \rightarrow x = -1$
- $x - 2 = 1 \rightarrow x = 3$
- $5x^2 + 14x + 13 = 0$

$\frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 13}}{10}$ → keine Lsg, da unter Wurzel neg.

- $14x^2 + 27x = 0$

$x(14x + 27) = 0 \qquad x_1 = 0$

$14x = -27 \qquad x_2 = -\frac{27}{14}$

$x = -\frac{27}{14}$

c)

- $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$
- $\frac{2 \pm \sqrt{10}}{4}$

3.

- Abstands-/Längenberechnung anhand von Phytagoras:

Länge der unteren Seite im Quadrat + Länge der oberen ² → Wurzel → Länge der Hypotenuse

- gleich wie die ersten 5

6&7 anders wegen bin. Formel

4. a) $d = \sqrt{(x_N - x_T)^2 + (y_N - y_T)^2}$

b) $M = \frac{1}{2}(x_N + x_T) \, / \, \frac{1}{2}(y_N + y_T)$

5. g: $y = \frac{1}{2}x$

h: $y = 3x + 1$

6.

- egal welche reelle Zahl man für x einsetzt, P tritt immer ein
- für jede reelle Zahl, die man für x einsetzt, ist der Funktions-/y-Wert größer/gleich 0, z.B. $y = x^2$
- für jede Zahl, die man für x einsetzt kommt für den Funktionswert eine natürliche Zahl raus.

7.

$$f(x) = c \cdot x^n$$

$$f(kx) = c \cdot (kx)^n$$

$$= c \cdot k^n \cdot x^n$$

$$= k^n \cdot c x^n$$

qed

Allgemein wichtig für Klasse 11 von früher

- Grundwissen: wichtig für 12/13/Abi
  - schriftl. Multiplizieren / Dividieren / Addieren / Subtrahieren
  - Brüche addieren / ... kürzen
  - Mitternachtsformel
  - Ausklammern, Ausmultiplizieren, ...
  - LGS
  - Strahlensätze
  - Wurzeln

1. a) $178 \cdot 341 =$

b) $215 : 4 =$

c) $13x^2 + 5x = 0$

d) $7x^{-1} + 5x^{-2} + 3x + 2x^2 = 0$, schreibe als Produkt

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

f) Kürze $\frac{5x + 7x^2}{3x^3}$; $\frac{5x + 7}{3x^2}$; $\frac{3x \cdot y \cdot z^2}{y \cdot z \cdot t}$; $\frac{x+y}{x}$

g) vereinfache:

$x^2 + 2x + 1$

2 Mglk.: 1. Linearfaktorzerlegung
2. ...

h) $(x-2)(x+2)$

i) $(x-3)^2$

j) I $\quad x + y = 3$
II $\quad 2x + 7y = 4$

k) Welche Steigung hat die Funktion $y = 2x^2$ bei $x = 3$?

l) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

m) Berechne:
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
- $\sqrt{2} + \sqrt{2}$
- $\sqrt{4}$
- $\sqrt{a^2}$
- $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2}$
- $\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$
- $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$

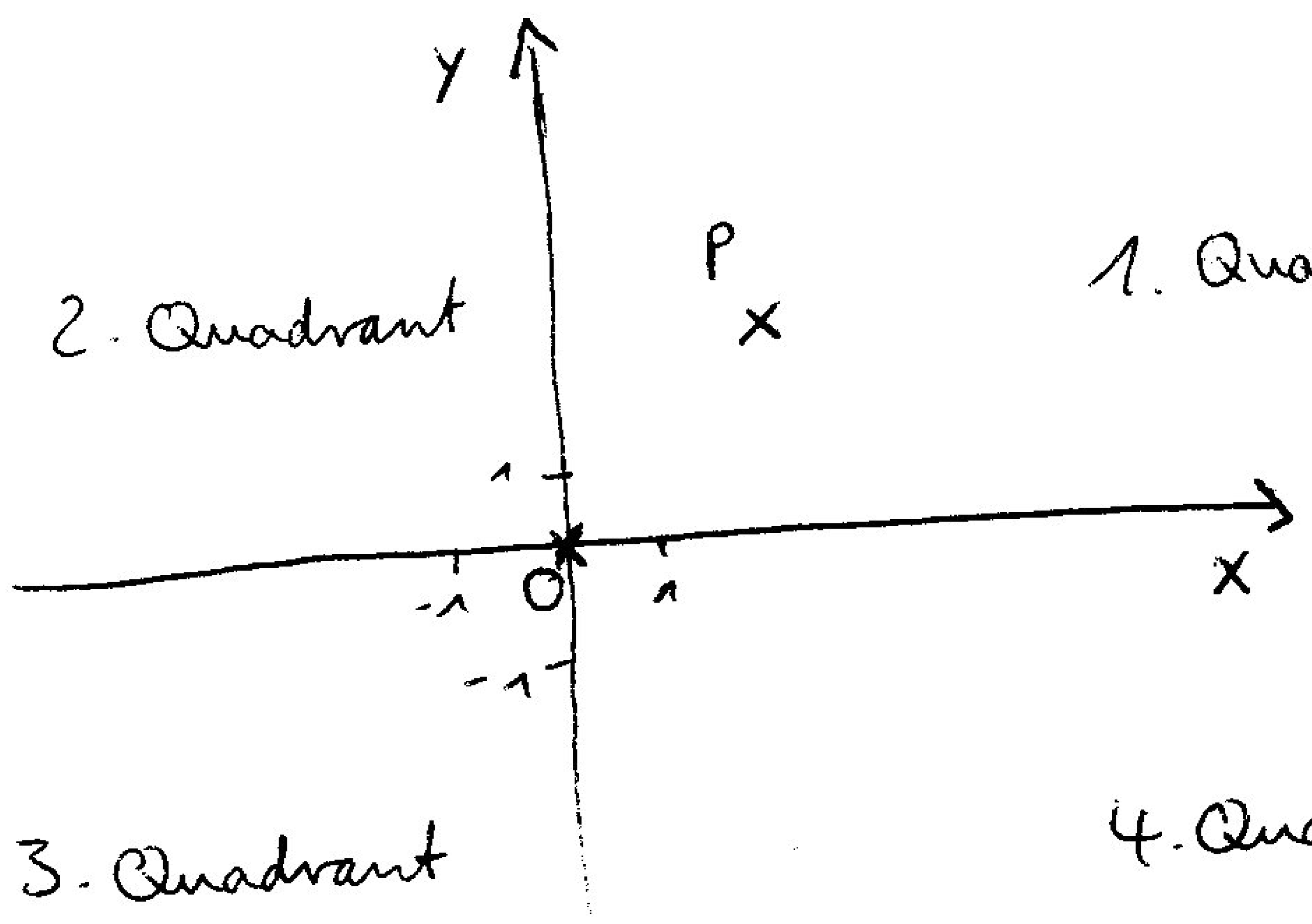
n) Ziehe teilweise die Wurzel:
- $\sqrt{8}$
- $\sqrt{24}$

o) Berechne:
- $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{12}}$
- $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$
- $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

sin, cos

1 Mathe Klasse 11

- Allgemeines zu Koordinatensystem & Funktion:



- kartesisch

- $P(x/y)$

x = Abszisse von P

y = Ordinate von P

- $y = \ldots$
irgendwas mit „x"

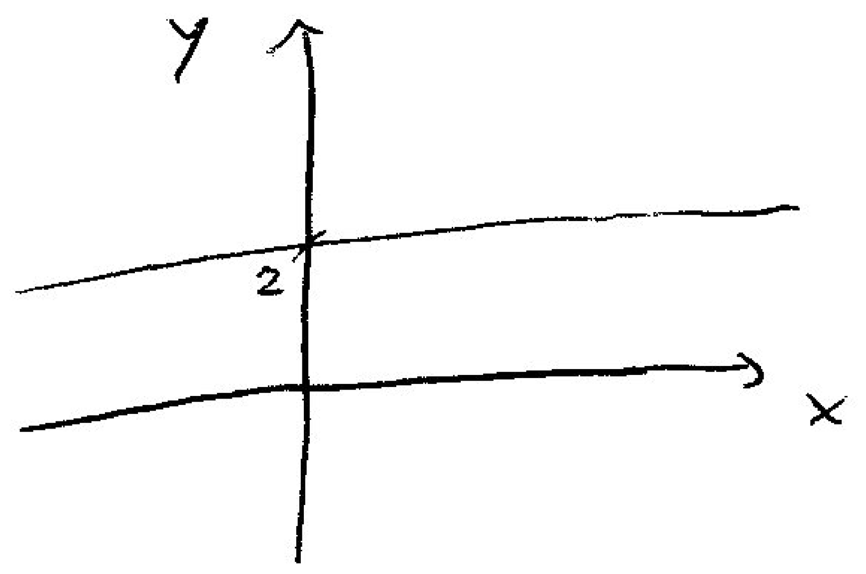
- „O" = Origo = Ursprung

→ y-Wert ist abhängig von x-Wert

→ ~~…~~ y & x können nie durch Zahlen ersetzt werden, nur bei „Punktprobe"

Besonderheiten

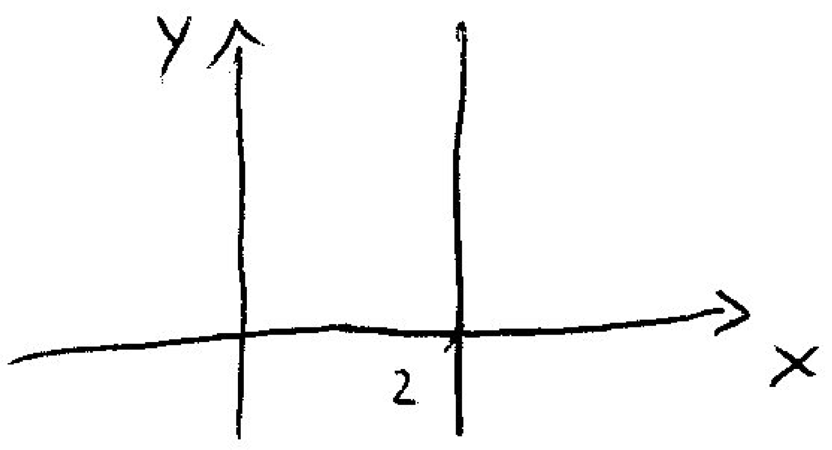
-



Bedeutet: y-Wert ist überall 2, nicht von x abhängig

→ $y = 2$

-

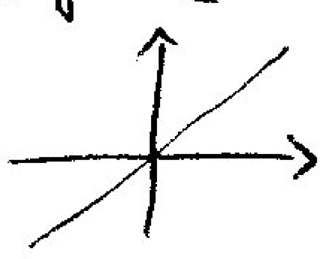
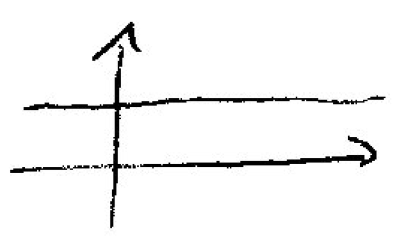
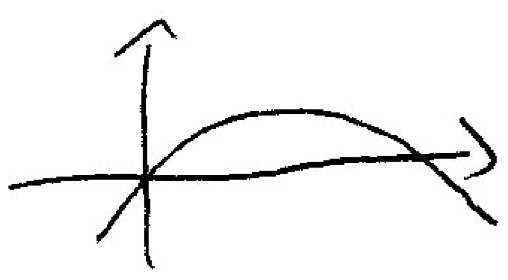
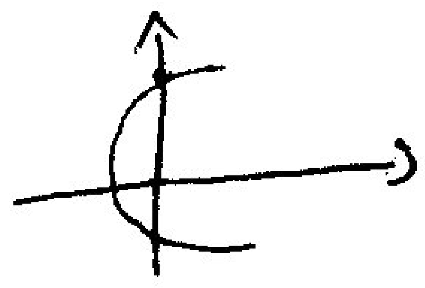
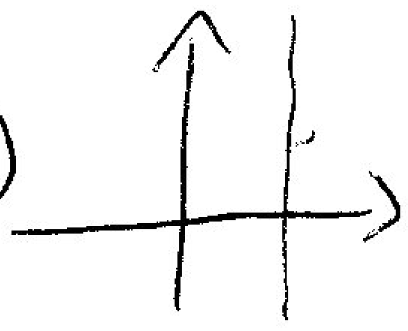


Bedeutet: x-Wert ist immer 2, y egal

→ $x = 2$

- Funktion: Jeder x-Wert wird genau einem y-Wert zugeordnet.

Sind folgende Schaubilder Funktionen?

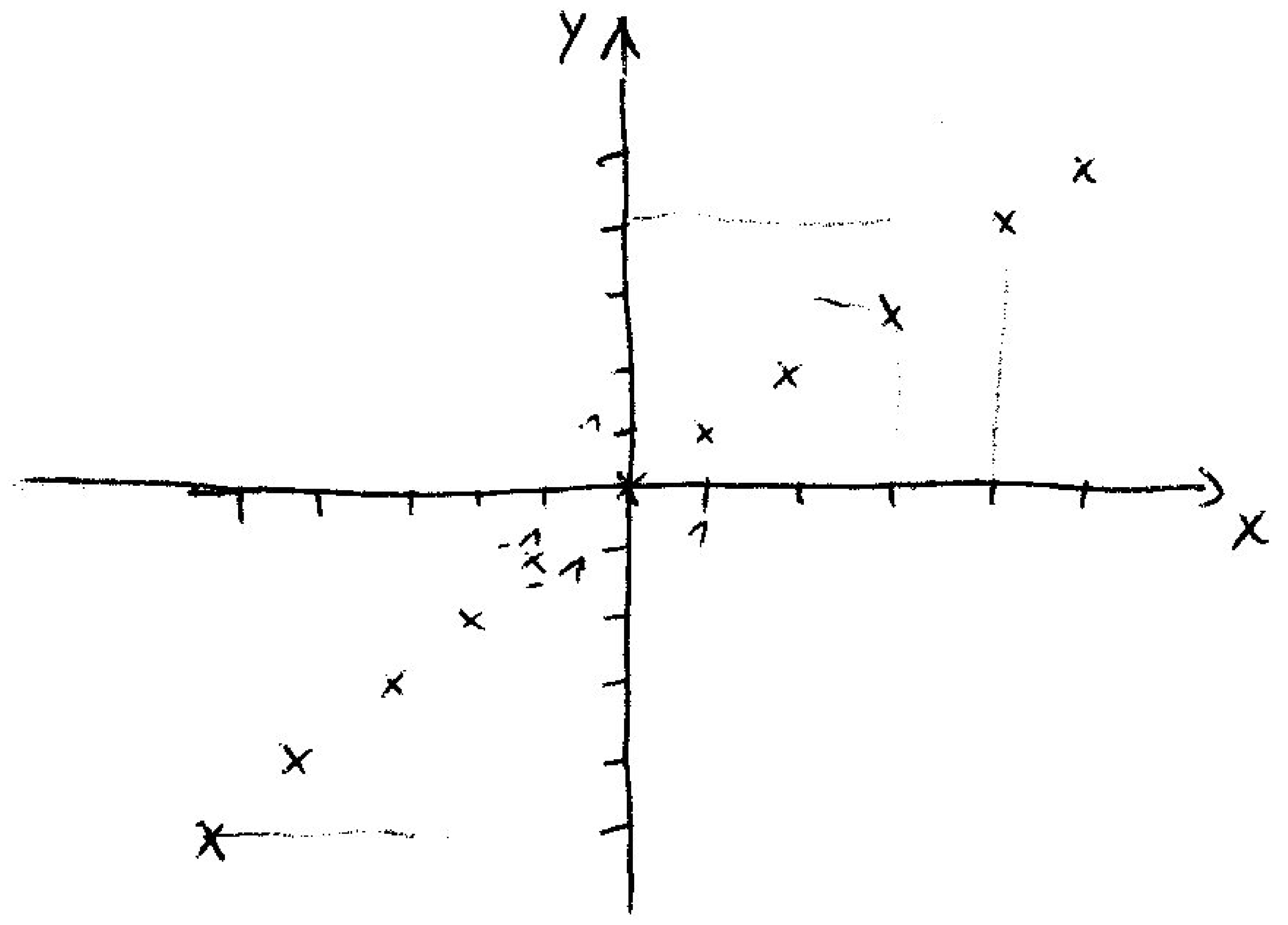
a)  b)  c)  d)  e) 

Das Schaubild

a) $y = x$ → y abhängig von x → man setzt für x eine Zahl ein (jede beliebige) und berechnet daraus y

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Koordinatensystem stellt dies nur grafisch dar

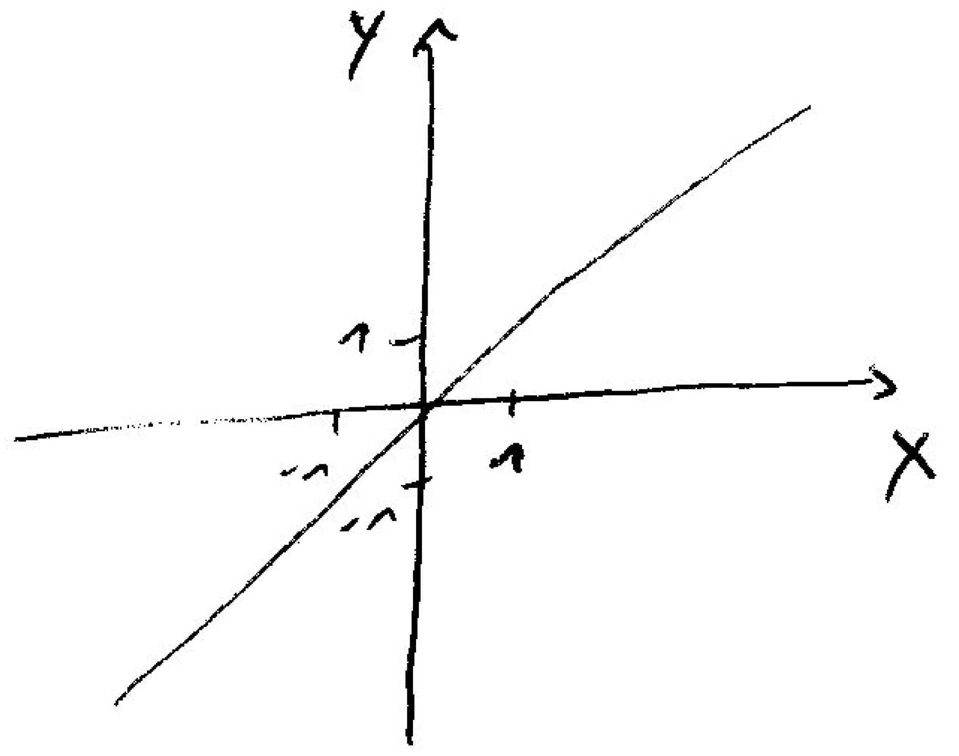


Da man nicht nur einzelne Werte, sondern alle Werte für x einsetzen will, muss man auch Bereiche zwischen z. B. 3 und 4 berücksichtigen.

Bspw.				
x	3,1	3,2	3,3	...
y	3,1	3,2	3,3	

Führt man diese Schritte immer weiter fort, ergibt sich irgendwann aus den Punkten eine Linie

→ Das Schaubild / Der Graph der Funktion

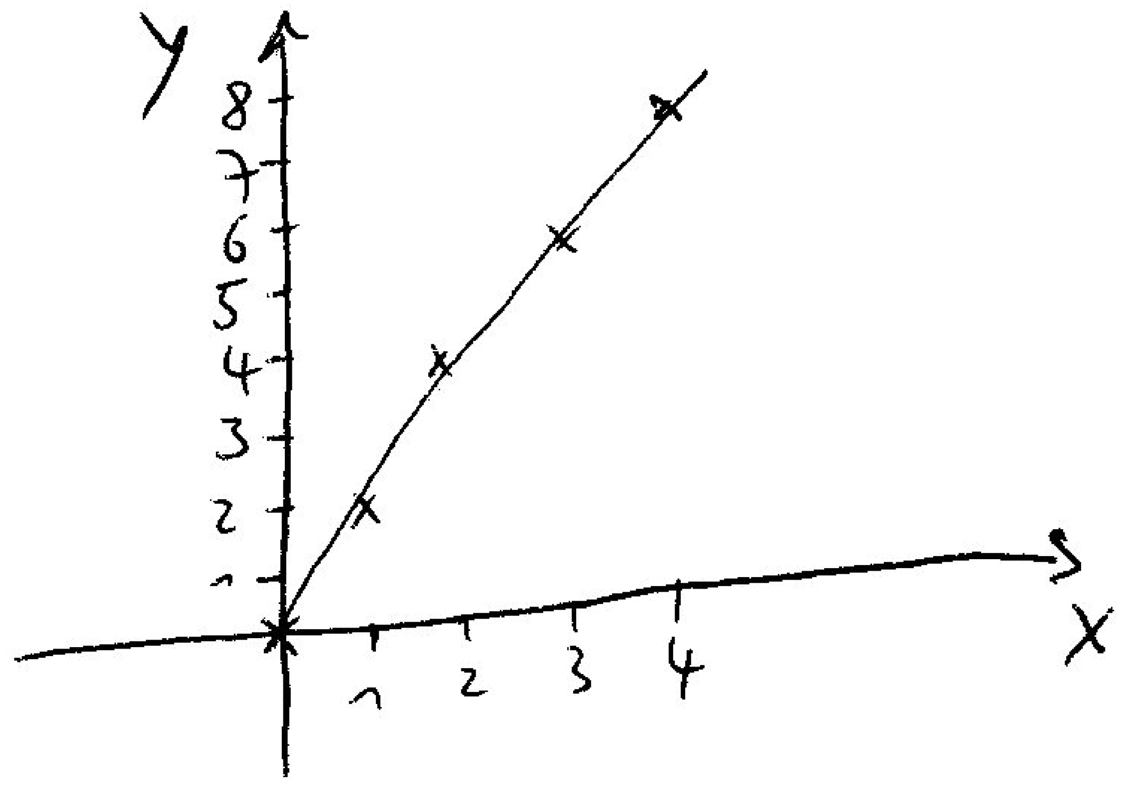


b) Wie sieht nun $y = 2x$ aus?

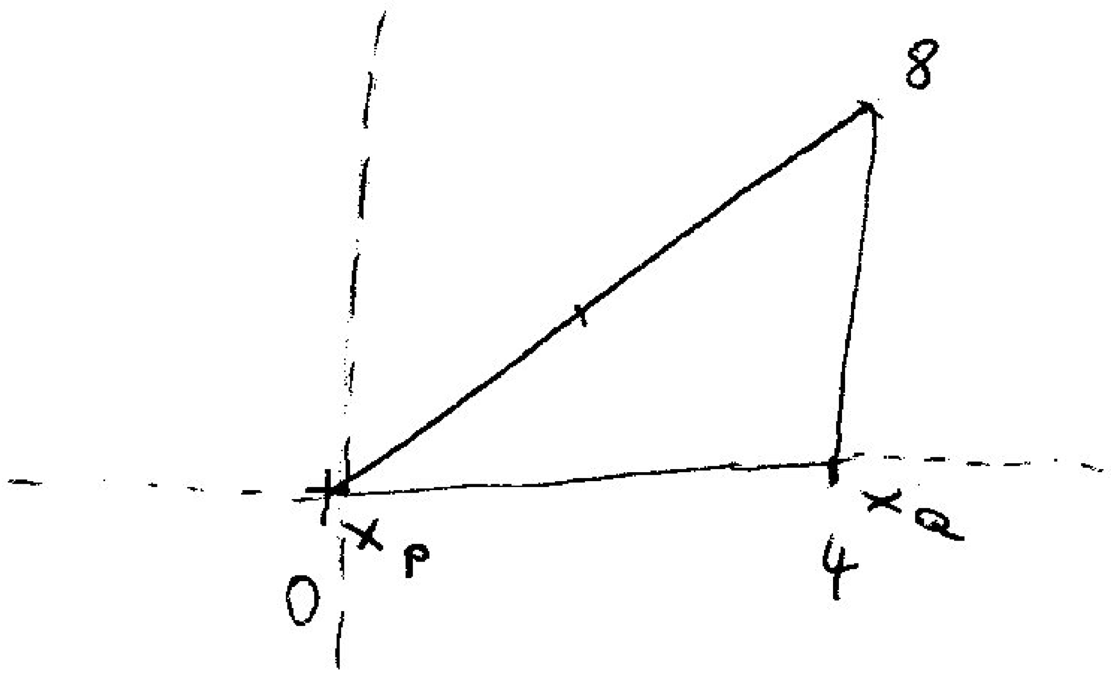
Mathe Klasse 11

$y = 2x$

x	0	1	2	3	4	...
y	0	2	4	6	8	...



Betrachtet man die Strecke von $x=0$ bis $x=4$, wie lang ist diese Strecke?



→

↓

rechtwinkliges Dreieck

Länge

→ $d = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

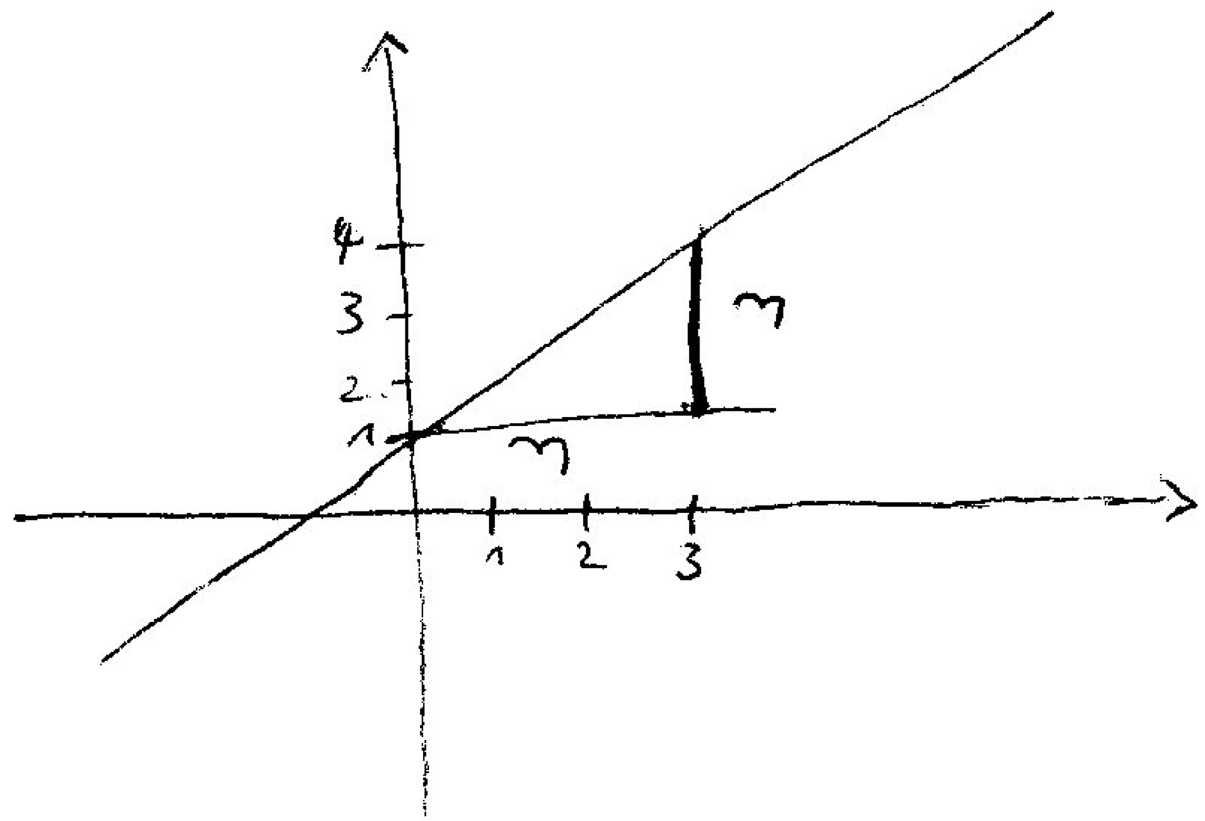
Mittelpunkt

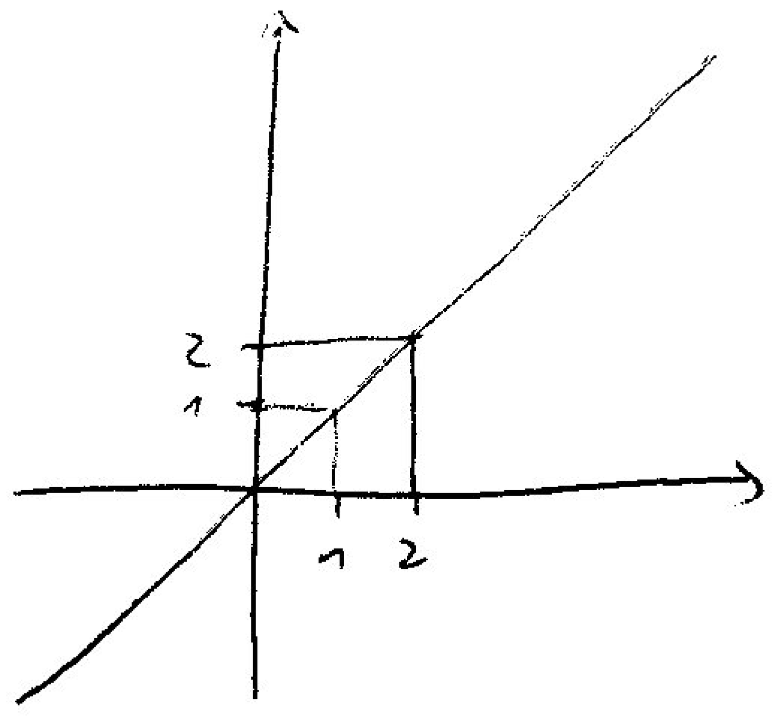
→ $M\left(\frac{1}{2}(x_P + x_Q) \,/\, \frac{1}{2}(y_P + y_Q)\right)$

Aufgabe: Welche Punkte auf den Koordinatenachsen haben von P den Abstand d?

a) $P(3|3)$ $d = 5$

Die Steigung:





$y = m x + c$

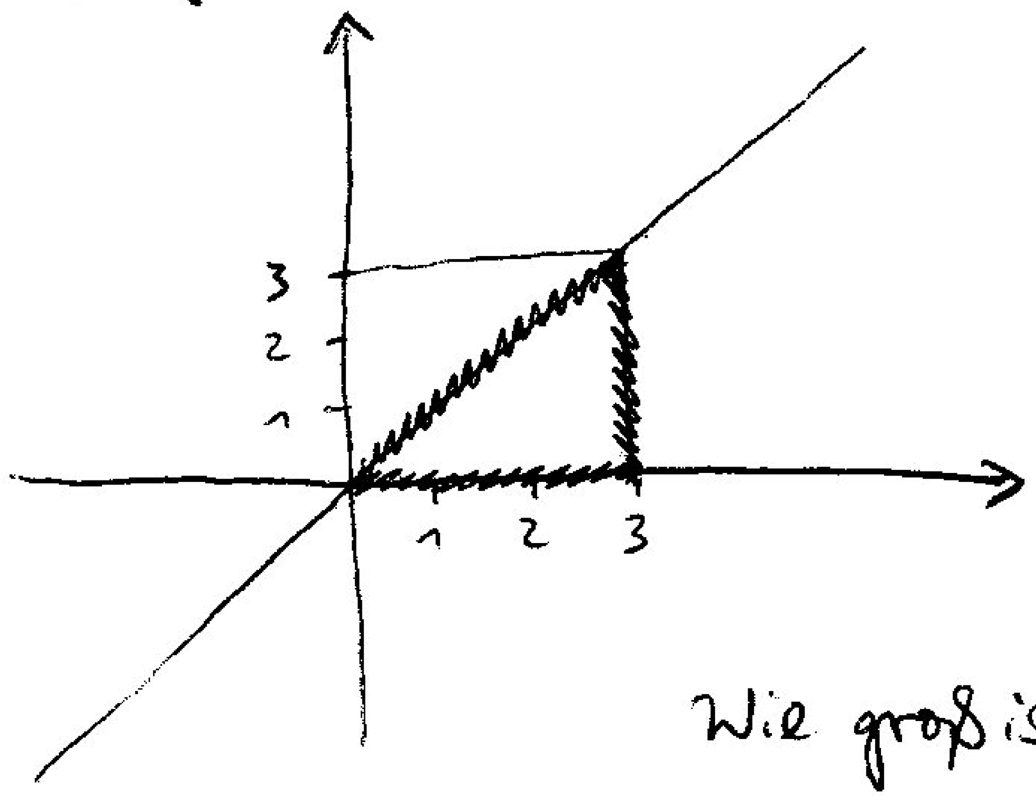
m → Steigung

+c → y-Achsenabschnitt: schneidet y-Achse in Punkt c

Für die Steigung ist „c" völlig egal → $y = mx$

möchte man m wissen, ergibt sich: $m = \frac{y}{x}$

↳ Steigungsdreieck:



Wie groß ist m?

$m = \frac{y}{x} = \frac{3}{3} = 1$

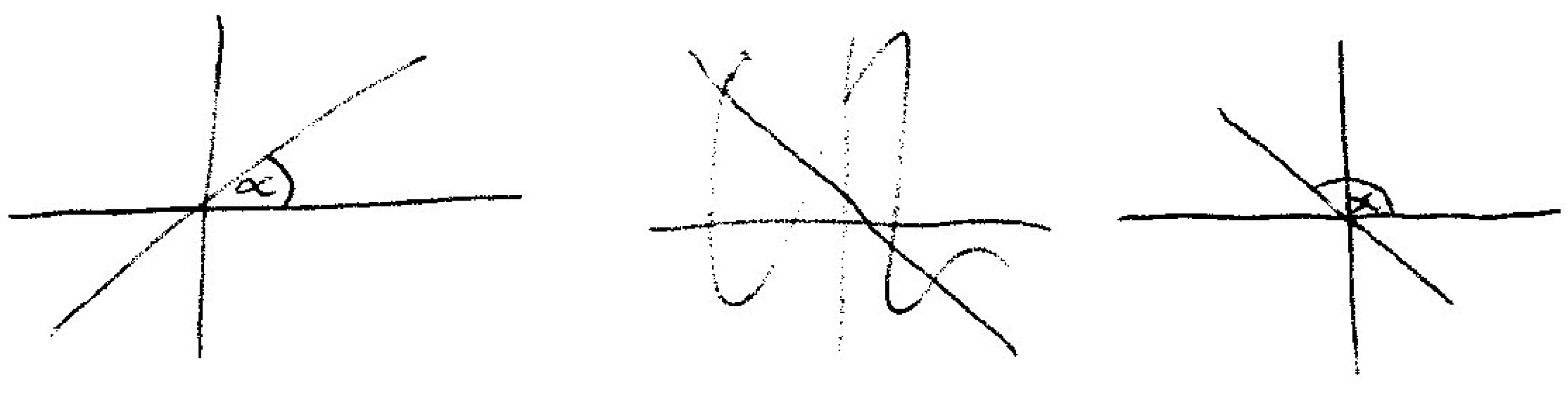
→ $y = x$

Allgemein gilt: $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ (bei uns: $m = \frac{3-0}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$)

gleich

bzw. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Winkel: Steigungswinkel:

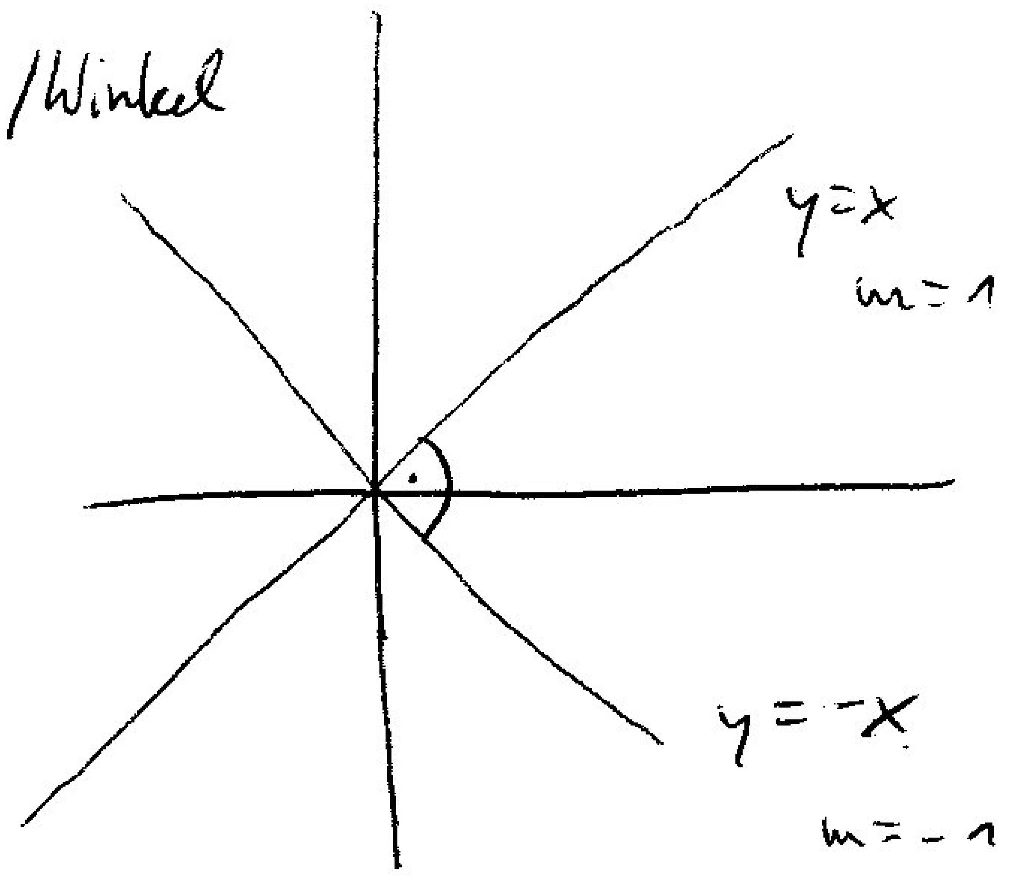


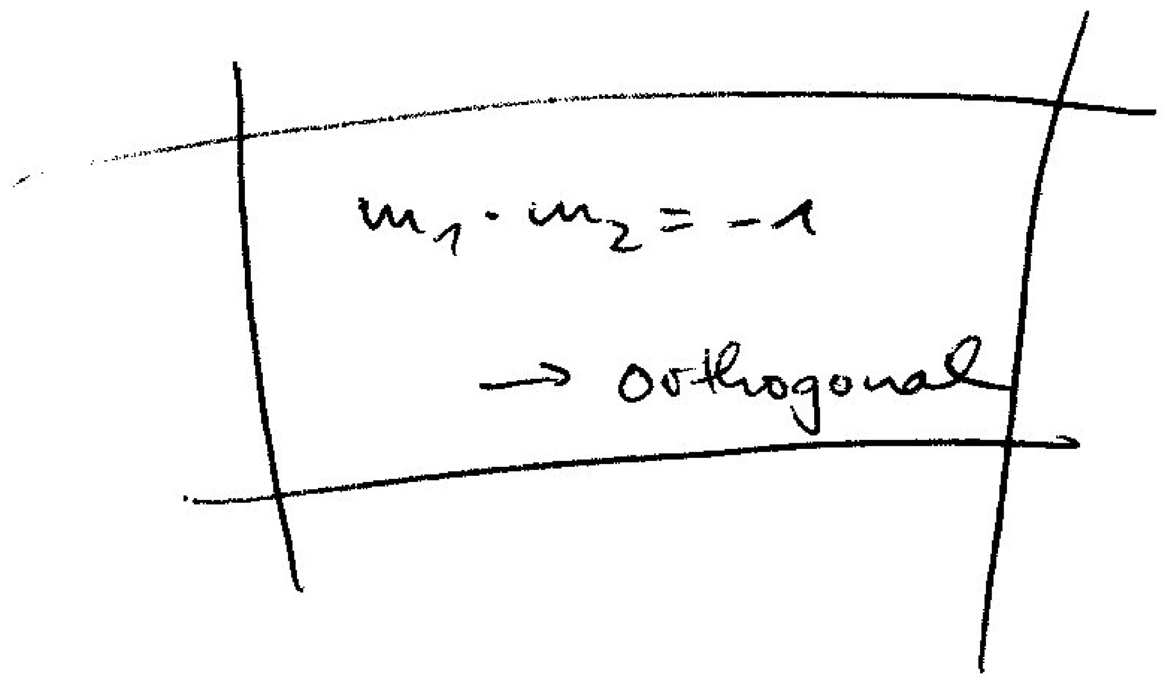
$0° \leq \alpha < 180°$

$\boxed{\tan \alpha = m}$ + Herleitung: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{Geg}{Hyp}}{\frac{An}{Hyp}} = \frac{Geg}{An} = \frac{y}{x}$

5 Mathe Klasse 11

Steigung / Winkel





1. Bestimme die Steigung & den Steigungswinkel für die Gerade durch die Punkte P und Q

   a) P(-1/1) Q(5/4)

2. Zeichne eine Gerade durch Punkt P mit m (Steigung)

   a) P(-3/1), $m = \frac{3}{5}$

3. Berechne Steigung einer Geraden, die orthogonal zu der Geraden durch P und Q ist.

   a) P(3/-3) Q(-2/-2)

4. Gibt die Geradengleichung an:

   a) m=3 A(0/0)

   b) m=0,4 A(0/3)

S.67/6.17.

1 Punkt + Steigung gegeben → <u>Punktsteigungsform</u>:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = m$$ wenn $A(x_A/y_A)$ geg. & m geg.

Bsp.: A(2/1) m=2

$$\rightarrow \frac{y-1}{x-2} = 2$$

$$y - 1 = 2(x-2)$$

$$y = 2x - 1$$

2 Punkte gegeben → <u>Zweipunkteform</u> $A(x_A/y_A)$ $B(x_B/y_B)$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$ & von oben: $m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$

$$\rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

oder einfach m berechnen und Punktsteigungsform benutzen

A(-2/3) B(4/-1)
x y x y

Mathe Klasse 11

- Untersuche, ob A, B & C auf einer Geraden liegen:

  a) $A(-1{,}5/0{,}5)$
  $B(2/2)$
  $C(3{,}5/2{,}5)$

- ABC bilden Dreieck, $A(-1/-1)$
  $B(4/0)$
  $C(2/3)$
  - Handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck?

Schnittwinkel bei 2 Geraden:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$$

Neben Geraden gibt es div. weitere Funktionen:

↳ Funktionen ersten Grades

- Funktionen 2. Grades → Parabel

⋮

- Ganzrationale Funktionen

- Gebrochenrationale Funktionen

allgemein gilt:

- $f(x) = y$
- $f: x \mapsto x^2 \;=\; f(x) = x^2$
- D_f = Definitionsmenge, d.h. alle Zahlen die eingesetzt werden dürfen:

$y = x \qquad D_f = \mathbb{R}$

$y = \frac{1}{x} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = 3\sqrt{4-x^2} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{|x| > 2\}$

$= [-2;2]$

- W_f = Wertmenge, Werte, die für $f(x)$ resultieren können:

$y = 3\sqrt{4-x^2}$

→ alles zwischen 0 und 6

$W_f = [0;6]$

[→ dazugehörig $= x \geqq \ldots$

(→ nicht dazu $= x > \ldots$

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \qquad D_f = ?$

7 Mathe Klasse 11

Betragsfunktion : $y = |x|$

$$y = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -x & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases} \quad \text{oder} \quad y = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

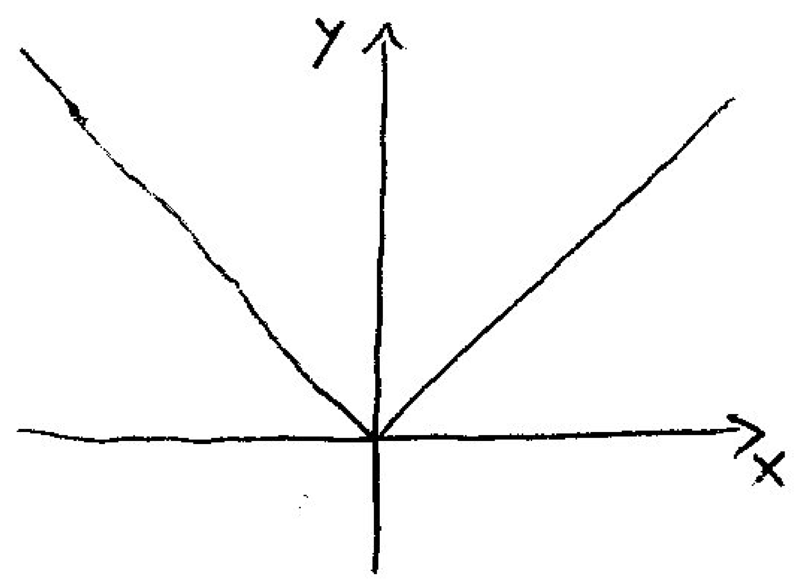
Betrag heißt, für y dürfen nur positive Werte rauskommen.

Ist x bspw. -5, ist der Betrag von $x = 5$, d.h. x muss $\cdot(-1)$ genommen werden. Für alle negative x ergibt sich also y, indem man x mit „-1" multipliziert.

→ wenn $x < 0$ ist (→ d.h. negativ), ist $y = -1 \cdot x$, oder einfach $y = -x$

→ wenn $x \geq 0$ ist, kann x für y übernommen werden.

→ $y = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$



Allgemein gilt: das was zwischen Betragsstrichen steht betrachten

- für alle x, bei denen Inhalt ≥ 0 = Fall 1 = so lassen
- für alle x, bei denen Inhalt < 0, d.h. negativ ist = Fall 2, d.h.

Betrag $\cdot(-1)$

Bsp.:

$$f(x) = -0{,}5 \cdot |x-4| + 2$$

→ $f(x) = \begin{cases} -0{,}5 \cdot (x-4) + 2 & \text{für } x \geq 4 \\ -0{,}5 \cdot -(x-4) + 2 & \text{für } x < 4 \end{cases}$

→ $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + 4 & \text{für } x \geq 4 \\ 0{,}5x & \text{für } x < 4 \end{cases}$

→ Schaubild kann gezeichnet werden

→ in GTR: abs(...)

→ $-0{,}5 \cdot \underbrace{\text{abs}}_{= \text{Betrag}}(x-4) + 2$

- Aufgaben: Stelle ohne Betragszeichen dar:

a) $f(x) = 2 \cdot |x|$ b) $f(x) = |2-x|$ c) $f(x) = x - |x|$

Funktionenscharen

In der Funktion kommt neben x eine weitere Variable vor, für die mehrere Werte gegeben sind, der Buchstabe ist meist ein „t", Bsp.:

$$f_t(x) = tx + 1 \quad ; \quad t_1 = 1,\; t_2 = 2,\; t_3 = 3$$

Es kann nun nach und nach t_1, t_2 und t_3 eingesetzt werden, wobei 3 unterschiedliche Grafen entstehen.

Beispielaufgabe:

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = tx - t^2$

a) Zeichne die Schaubilder für $t = \pm 0{,}25$; $\pm 0{,}5$; ± 1; $\pm\sqrt{2}$; ± 2

b) Ermittle den Schnittpunkt N des Schaubildes von f_t mit der x-Achse

c) Untersuche, für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Punkte $P(2|2)$, $Q(2|1)$, $R(2|0{,}75)$ jeweils auf dem Schaubild von f_t liegen.

Potenzfunktionen

aus Buch:

> Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt die Funktion
>
> $f: x \mapsto c \cdot x^n \quad , c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
>
> Potenzfunktion n-ten Grades
>
> Ihr Schaubild nennt man für $n > 1$ Parabel n-ter Ordnung

→ Das heißt ...

Aufgabe: · Bestimme n, dass P auf f

$$f(x) = x^n, \quad P(1{,}2 | 1{,}728)$$

· liegt hier die Potenzfunktion $f(v) = c \cdot v^n$ vor? :

v	4	7	9	12	15
f(v)	11,2	34,3	56,7	100,8	157,5

Gerade Hochzahl : Achsensymmetrisch

→ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \geq 0$ → Bedeutung?

Ungerade Hochzahl : Punktsymmetrisch zum Ursprung

~~Aufgabe ...~~

9 Mathe Klasse 11

Wiederholung zur Parabel (Abiturwissen!)

- 2 Formen: $f(x) = ax^2+bx+c$

$f(x) = a(x-b)^2 + c$

a = Parabel gestreckt / gestaucht
$|a|>1$ $\quad -1<a<1$

b = Verschiebung in x-Richtung — b positiv → nach links, b negativ → nach rechts

c = y-Wert des Scheitelpunkts

$S(-b/c)$

eine Form auf andere: $f(x) = ax^2+bx+c$

$f(x) = ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a}\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$

$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a}\right) - \frac{b^2}{4} + c$

$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4} + c$

$\frac{b^2}{4} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b^2}{4a}$

x

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} \ldots + \frac{c}{a}\right)$

$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

→ auf andere Form gebracht

$f(x) = a(x-b)^2 + c$

$= a(x^2 - 2xb + b^2) + c$

$= ax^2 - 2abx + ab^2 + c$

→ auf andere Form gebracht

10 Mathe Klasse 11 (+ alte Arbeit?)

Ganzrationale Funktionen

- Parabel: $f(x) = ax^2 + bx + c$ → ganzrat. Funktion

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 (x^0)$

$= x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a^1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$

für ganz große Werte gehen $\left(\frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$ gegen 0

→ es bleibt $x^n a_n$ / $a_n x^n$ übrig.

→ Verhalten ganzrat. Funktionen für große x-Werte von $a_n x^n$ abhängig.

a_n positiv → $f(x)$ immer größer wenn x größer wird

→ für $x \to \infty$ strebt $f(x)$ gegen ∞

Für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to \infty$

a_n positiv, n ungerade: Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$

Aufgabe: 1. Untersuche Verhalten für $x \to \pm\infty$

a) $f(x) = 4 - 3x^3 + x^2 - x^5$

b) $f(x) = -3x^4 + 3x^3 - x + 1$

c) $f(x) = (1-2x)(2+5x^2)$

2. Begründe: Das Schaubild einer ganzrat. Fkt. mit ungeradem Grad schneidet die x-Achse mindestens einmal. Begründe.

Symmetrie:

- ganzrat. Fkt. nur gerade Hochzahlen → achsensymmetrisch
- ganzrat. Fkt. nur ungerade Hochzahlen → punktsymmetrisch

Gerade / ungerade / nichts?

a) $f(x) = -2x^6 + 3x^2$

b) $f(x) = 2 - 3x^4$

c) $f(x) = 2 - 3x^3$

d) $f(x) = x^3 - x + 1$

e) $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$

- achsensymm. zu Geraden $x = x_0$:

  - $f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$ → $\boxed{\text{ABI}}$

- Punktsymm. zu Punkt $P(x_0 / y_0)$:

  - $f(x_0 - h) - y_0 = y_0 - f(x_0 + h)$

Nullstellen

- 1. Grades : $2x+2=0$

  $4x-3=0$

- 2. Grades : $4x^2+2x-1=0$ $\quad 4x^2+2x=0$

- höher: • $x^3-2x^2-x=0$ → Ausklammern

  • $x^4-7x^2+12=0$ → Substituieren

  • $x^3-6x^2+11x-6=0$ → Polynomdivision

Grenzverhalten / Asymptoten

Für $x\to\infty$ gilt: $f(x)\to a$; andere Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$

→ $y=a$: waagerechte Asymptote

Aufgabe: Untersuche Verhalten für $x\to\pm\infty$

1. a) $f(x)=\frac{2}{2x-1}$ b) $g(x)=3-\frac{2}{x}$ c) $h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$ d) $k(x)=1-\sqrt{x}$

Gib gegebenenfalls Gleichung der waag. Asymptote an.

2. ~~a) f(x)~~ Untersuche Verhalten der Funktion f für $x\to\pm\infty$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$

a) $f(x)=\frac{a}{x}$ b) $f(x)=\frac{a}{x+c}$ c) $f(x)=\frac{a}{bx+c}$

d) $f(x)=a+\frac{b}{x}$ e) $f(x)=x+\frac{b}{x}$ f) $f(x)=ax+b$

12 Mathe Klasse 11

Senkrechte Asymptoten

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

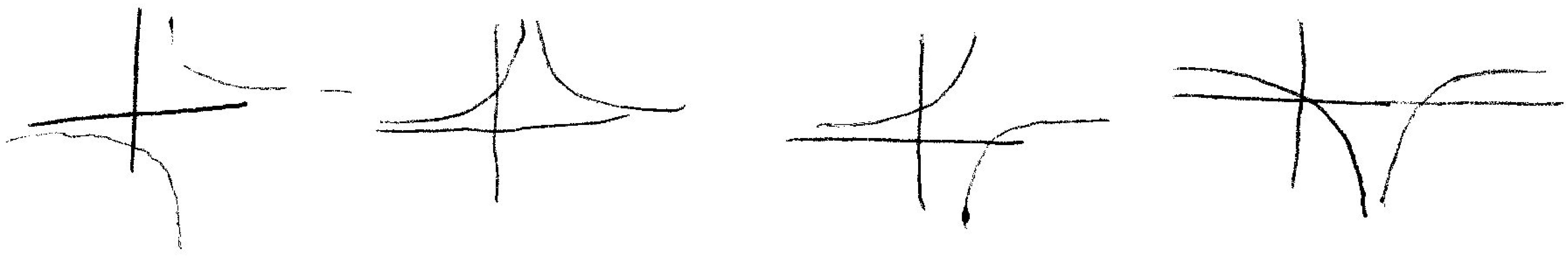
$x \to x_0$ heißt: Annäherung an Definitionslücke

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Für $x \to 1$ und $x > 1$ gilt: $f(x) \to \infty$

für $x \to 1$ und $x < 1$ gilt: $f(x) \to -\infty$

→ senkrechte Asymptote bei $x = 1$

4 Mglk.: 

Aufgabe:

1. Gegeben sind die Funktionen: • $f(x) = \frac{-0{,}5}{x-3}$

   • $h(x) = \frac{0{,}3}{(x+2)^2}$

   a) Gib maximale Definitionsmenge an.

   b) Untersuche Verhalten bei Annäherung an Definitionsmenge

   c) Gib Gleichung der senkrechten Asy. an.

   d) Zeichne die Schaubilder.

2. Gib Funktion an, die die Bedingung erfüllt:

   a) Für $x \to 0$ $(x > 0)$ gilt: $f(x) \to -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

   b) Für $x \to 1$ $(x > 1$ und $x < 1)$ gilt: $f(x) \to \infty$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$

Beginn der Funktionsuntersuchung:

$f(x) = x(x^2-1)$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
x	−	−	+	+
x^2-1	+	−	−	+
$x(x^2-1)$	−	+	−	+

, da NS $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

Gebietseinteilung

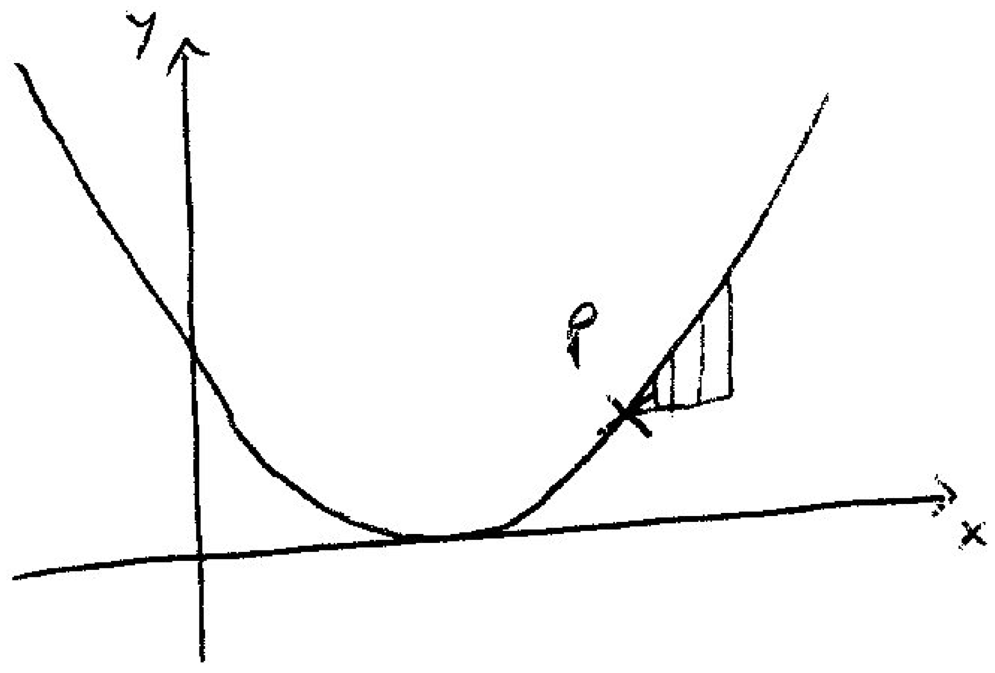
Aufgabe: 1. Führe Gebietseinteilung durch: / Skizziere Funktion

a) $f(x) = x(x-3)$

2. Bestimme Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ mit Hilfe geeigneter Termumformung:

a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$ c) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ d) $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$

Steigung



Wie groß ist m bei P ?

→ möglichst kleines Steigungsdreieck

$\to m \approx \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ wenn $t \to t_0$

oder $m \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ → x-Methode

$x \to x_0$

wenn $h = x - x_0$

$\to x = x_0 + h$

$\to m \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

→ h-Methode

$h \to 0$

Aufgaben dazu:

1. Bestimme Steigung mit x-Methode:

$f(x) = \frac{3}{x}$ an Stelle $x_0 = 2$

2. mit h-Methode

$f(x) = x^2 - 4x$ Ableitung bei $x = 3$

Ableitung:

z. B. $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

• $f(x) = k \cdot x^n$

$f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$

Bsp.: a) $f(x) = x$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = 5x^3$

• $f = g + h \to f'(x) = g'(x) + h'(x)$

• $f = c \cdot g$ mit $c \in \mathbb{R}$ $\to f'(x) = c \cdot g'(x)$

Bsp.: a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = 3 \cdot x^2$ c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2$

14 Mathe Klasse 11

Tangenten

K = Schaubild der Funktion

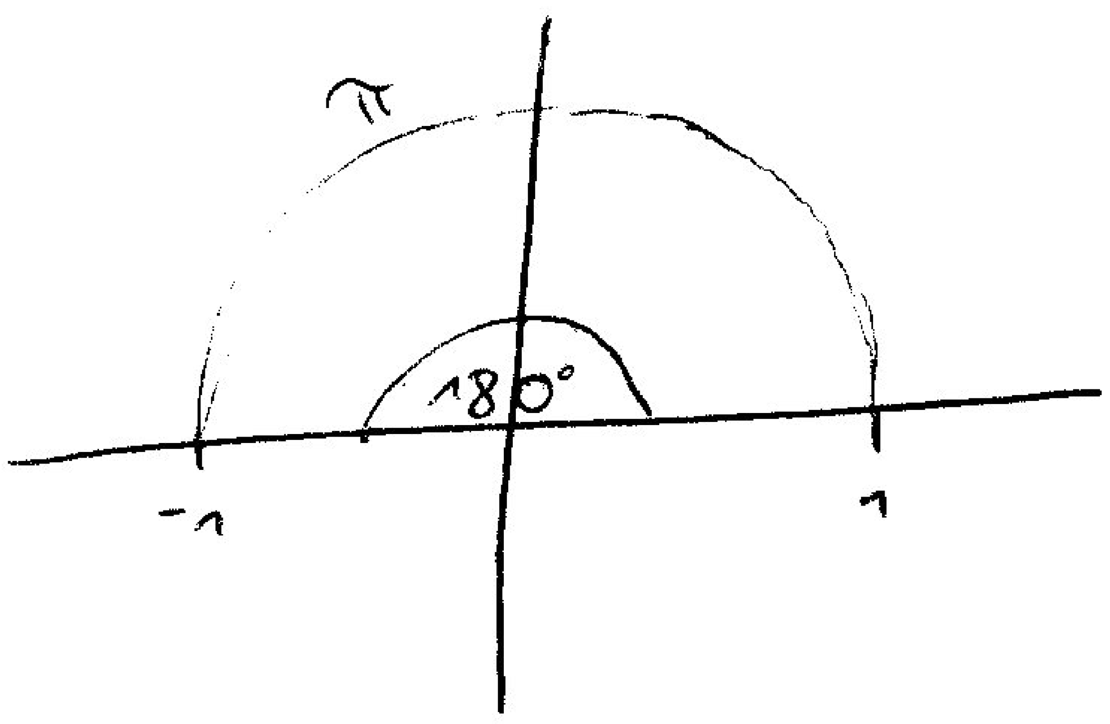
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ und $P(3/\frac{9}{5})$.

Ermittle die Gleichung der Tangente t und der Normalen n von K in P.

Allgemein für's Abi, wenn Tangente durch Punkt, der nicht auf Schaubild liegt:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Sinus- & Kosinusfunktion



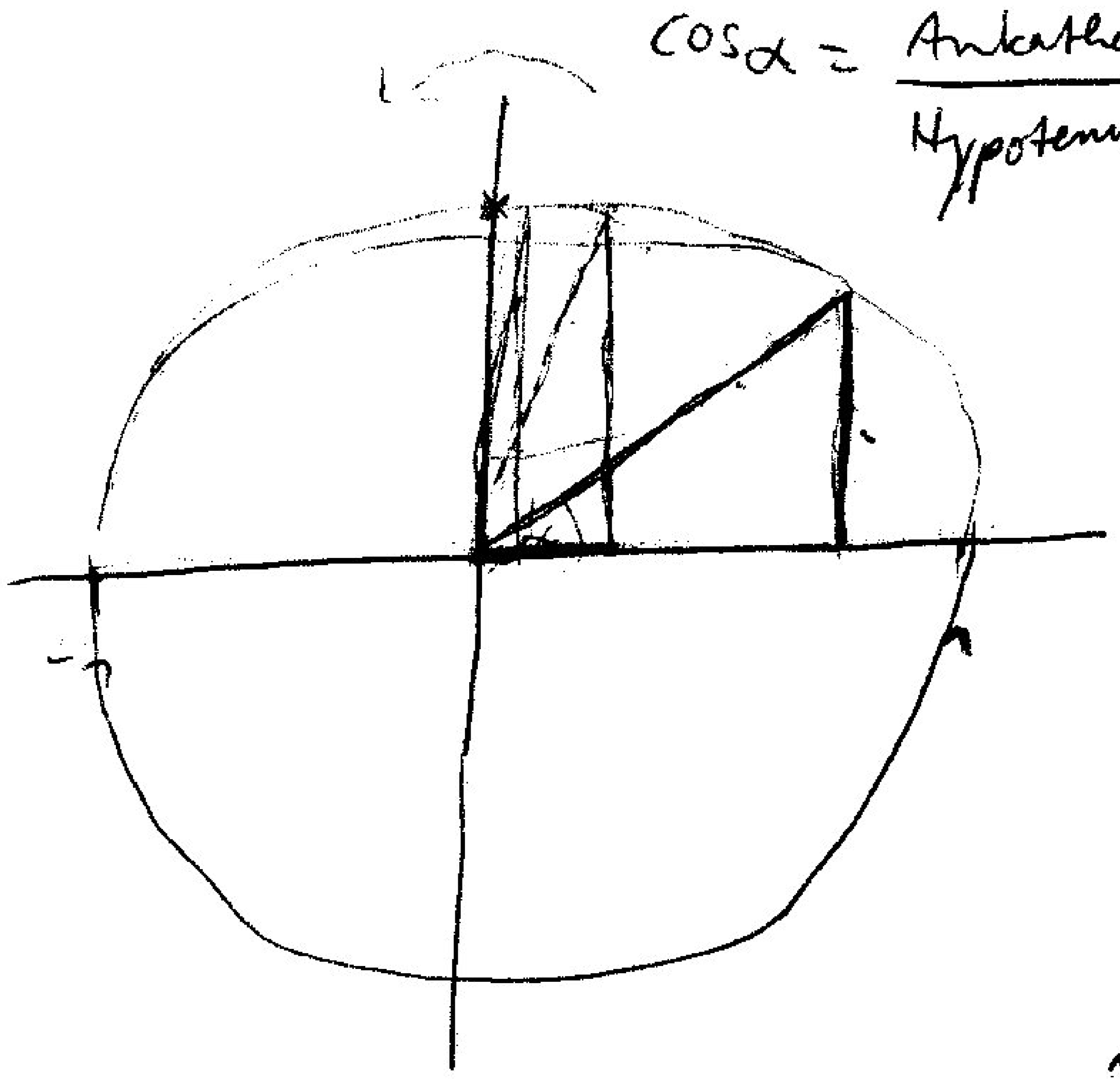
180° → Umfang des Halbkreises = π

α	x (Bogenmaß)
180°	π
90°	$\frac{1}{2}\pi$
45°	$\frac{1}{4}\pi$
⋮	⋮
270°	$\frac{3}{2}\pi$
360°	2π

$$\frac{\alpha}{180°} = \frac{x}{\pi}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

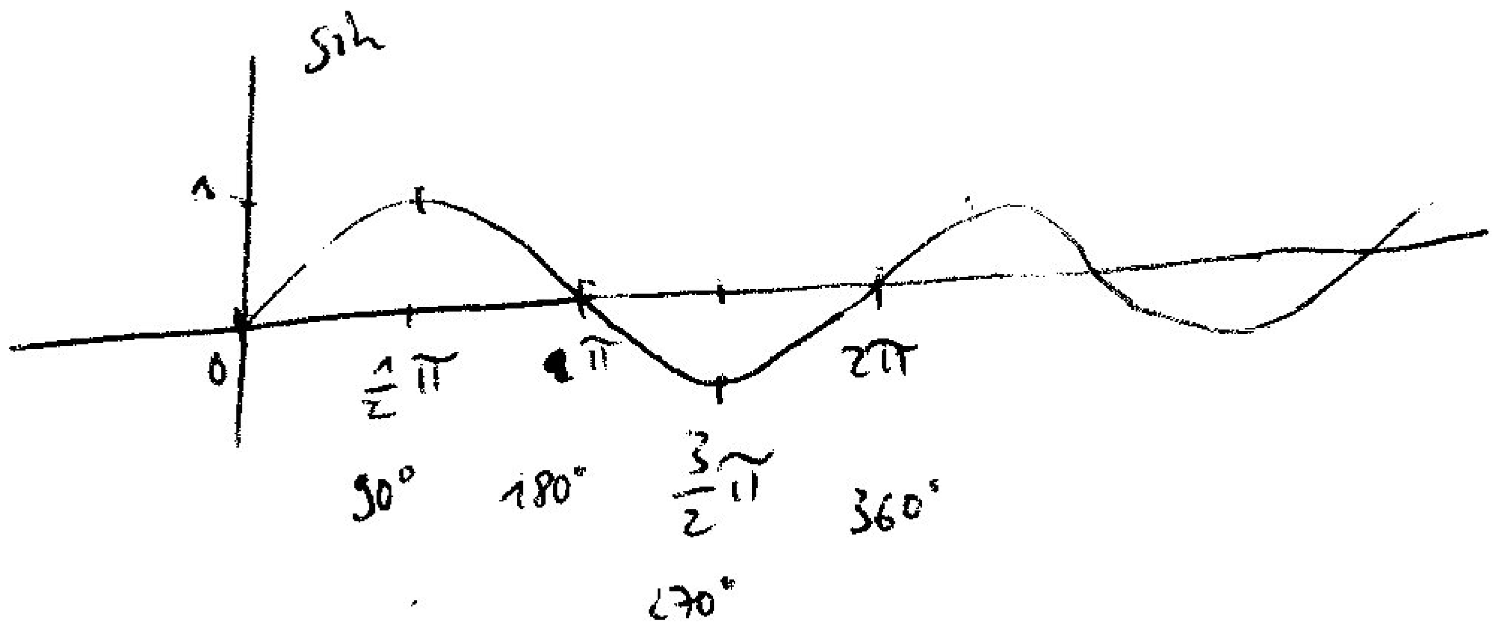
$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

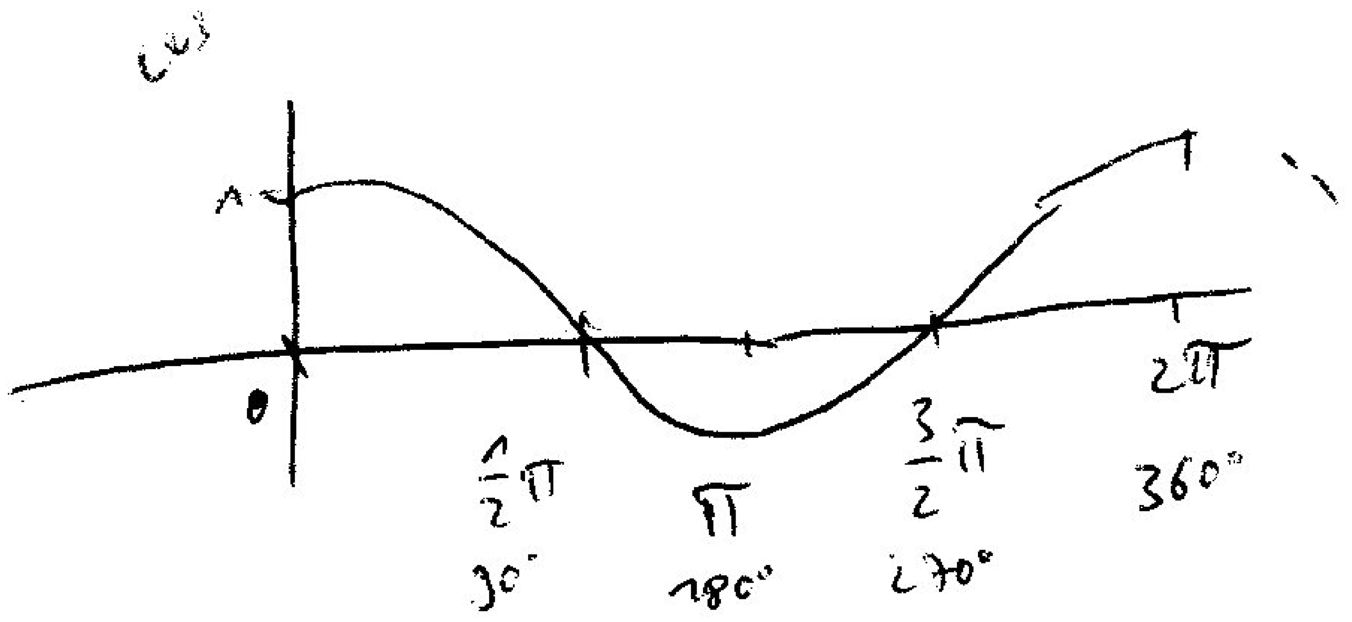


$\alpha \to 90°$

$\sin\alpha = \sin 90° = 1$

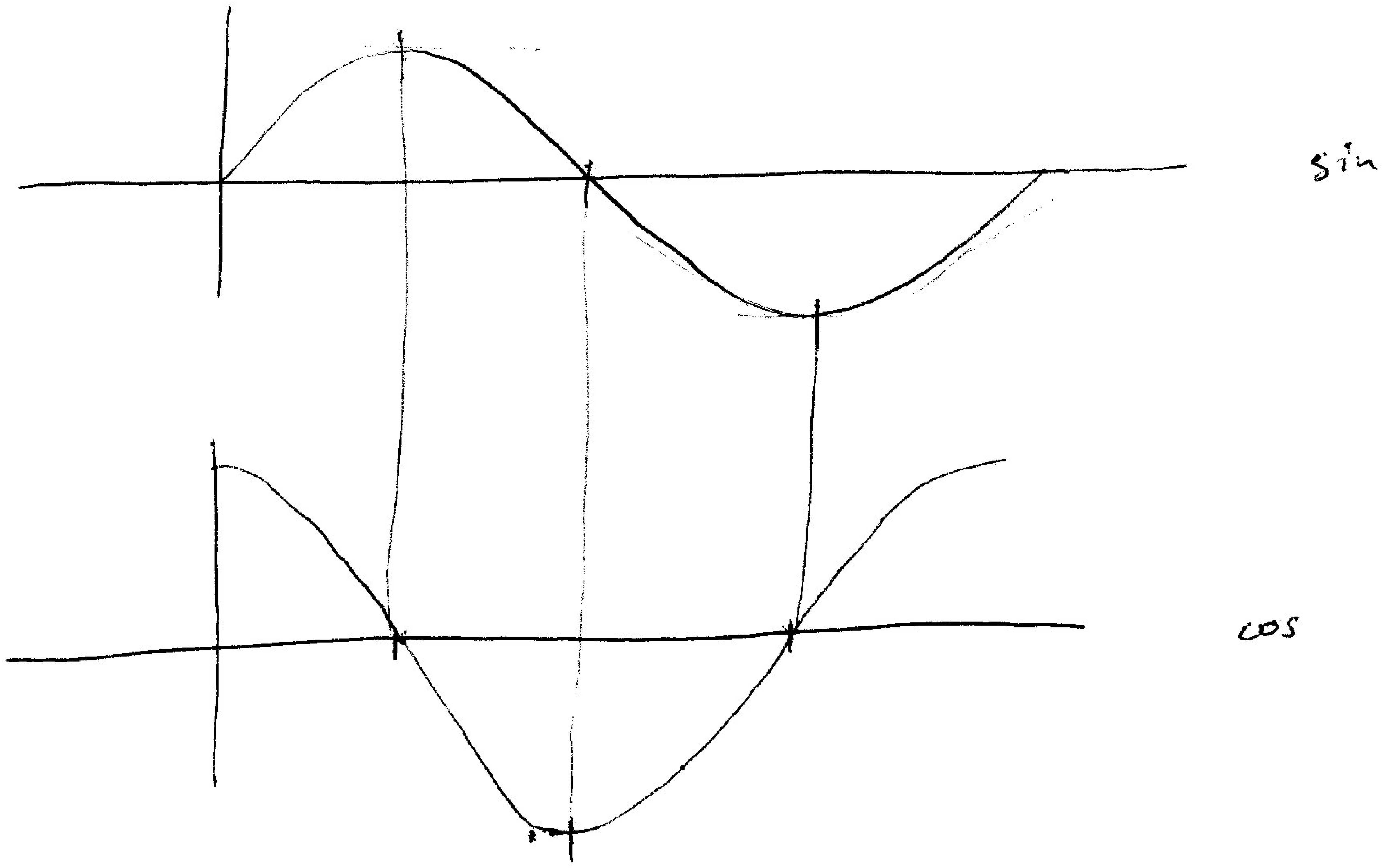
$\cos\alpha = \cos 90° = 0$





15 Mathe Klasse 11

Sinus- & Kosinus



wenn sin HP → cos : NP (+ zu −)

" " WP → cos : EP

" " TP → cos : NP (− zu +)

→ $f(x) = \sin x$ $\quad$ $f(x) = \cos x$

$f'(x) = \cos x$ $\quad$ $f'(x) = -\sin x$

$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi \cdot z)$ wenn $z \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi \cdot z)$ " " " "

1. Leite ab:

a) $f(x) = 3 \cdot \sin x$ $\quad$ b) $f(x) = x^2 - 4\cos x$

Neu:

$f(x) = \sin(ax)$ $\quad$ $f'(x) = a \cdot \cos(ax)$

$g(x) = \cos(ax)$ $\quad$ $f'(x) = a \cdot -\sin(ax) = -a \cdot \sin(ax)$

2. Leite ab:

a) $f(x) = \sin(3x)$ $\quad$ b) $f(x) = \frac{3}{5}\cos(10x)$

1E Mathe Klasse 11

Stetigkeit & Differenzierbarkeit (→ Abi!)

Stetig:
- Zeichnen mit Stift, ohne abzusetzen
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ → von links & rechts angenähert geht ~~[illegible]~~ die Funktion bei x_0 gegen das gleiche $f(x_0)$, $x_0 \in D$

Bsp.:

① $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \leq 2 \\ 3-x & \text{für } x > 2 \end{cases}$

Ist Fkt. an $x_0 = 2$ stetig?

→ dann muss $f(x_0) = f(x_0)$ sein

$\frac{1}{2}x = 3 - x$

$\frac{1}{2} \cdot 2 = 3 - 2$

$1 = 1$ ✓ stetig

1. Aufgabe:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \neq 2 \\ \frac{3}{2} & \text{für } x = 2 \end{cases}$ + Zeichnung

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Differenzierbarkeit

- Stetig + „kein Knick"

→ 1. auf Stetigkeit überprüfen
 2. Ableitung $x > x_0$, $x < x_0$ muss gleiches $f'(x)$ besitzen

2. Aufgabe

a) Untersuche auf Differenzierbarkeit: $f(x) = x \cdot |x-2|$

3. Bestimme s in Abhängigkeit von t so, dass f an der Stelle x_0 stetig ist. Ermittle dann den Wert ~~für~~ von t, für den f in x_0 differenzierbar ist.

a) $f(x) = \begin{cases} sx - 2 & \text{für } x \geq 2 \\ \frac{1}{2}tx^2 & \text{für } x < 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

4. Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = x^3 + 1$ und $g(x) = x^2 + x$. Zeige, dass sich die Schaubilder von f und g in einem Punkt B berühren. Gib den Berührpunkt und eine Gleichung der gemeinsamen Tangente an.

5. (Hammer) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{8}{9}x^2 + \frac{2}{3}x$ sowie für jedes $c \neq 0$ die Funktion g_c mit $g_c(x) = cx^2 + c$. Bestimme c so, dass sich die Schaubilder von f und g_c berühren. Ermittle den Berührpunkt.

Lösung 5. (S. 16)

$$\frac{16}{9}x + \frac{2}{3} = 2cx$$

$$\frac{16}{9}x - 2cx = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{16}{18}x + \frac{2}{6} = cx$$

$$\frac{8}{9}x + \frac{1}{3} = cx$$

$$\frac{\frac{8}{9}x + \frac{1}{3}}{x} = c$$

$$8x^2 - 9\left(\frac{\frac{8}{9}x+\frac{1}{3}}{x}\right)\cdot x^2 + 6x - 9\left(\frac{\frac{8}{9}x+\frac{1}{3}}{x}\right) = 0$$

$$8x^2 - 9\left(\frac{8}{9}x^2 + \frac{1}{3}x\right) + 6x - \frac{8x+3}{x} = 0$$

$$\cancel{8x^2 - 8x^2} - 3x + 6x - \frac{8x+3}{x} = 0$$

$$3x - \frac{8x+3}{x} = 0$$

$$\frac{3x^2}{x} - \frac{8x+3}{x} = 0$$

$$\frac{3x^2 - 8x - 3}{x} = 0$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 12\cdot 3}}{6}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + \cancel{108}\,36}}{6}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{\cancel{172}\,100}}{6}$$

$$= \frac{8 \pm 10}{6}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -\frac{1}{3}$$

$10 = 9c + c$

$c = 1$

⋮

17 Mathe Klasse 11

Funktionsuntersuchung

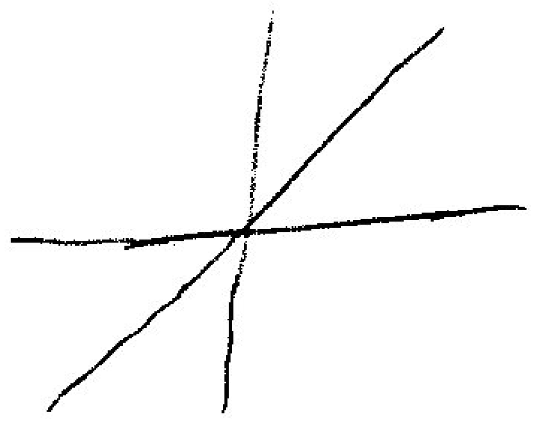
1. Monotonie

a) wenn für $x_1 < x_2 < x_3 < x_n$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{n < 4\}$

$\rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_n)$

ist die Funktion streng monoton steigend

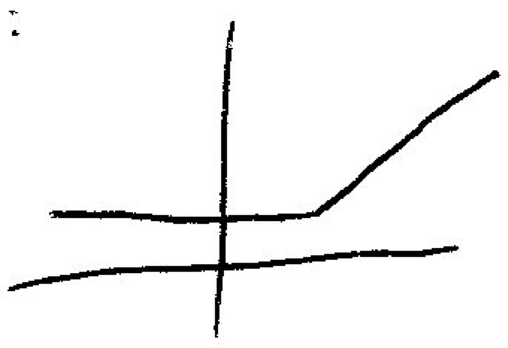
Bsp.:



b) monoton steigend:

Werte die $\geq$ Wert von zuvor sind

Bsp.:

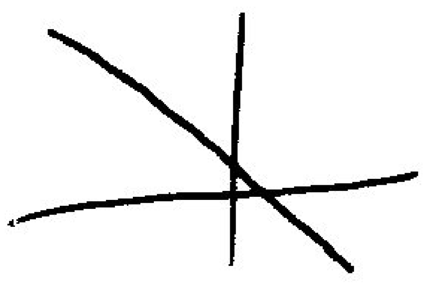


c) streng monoton fallend → Umkehrung zu a):

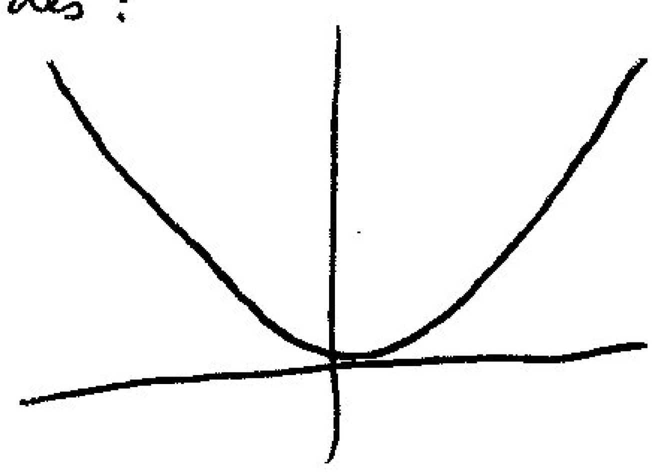
für $x_1 < x_2 < x_3 < x_n$

$\rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_n)$

Bsp.:



d) beides:



Im Intervall $(-\infty; 0)$ streng monoton fallend

Im Intervall $[0; \infty)$ monoton steigend

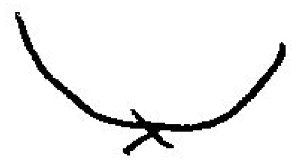
Beweis von Monotonie:

1. Ableitung bilden
2. a) Ableitung positiv → monoton steigend
   b) Ableitung negativ → monoton fallend

Aufgabe:

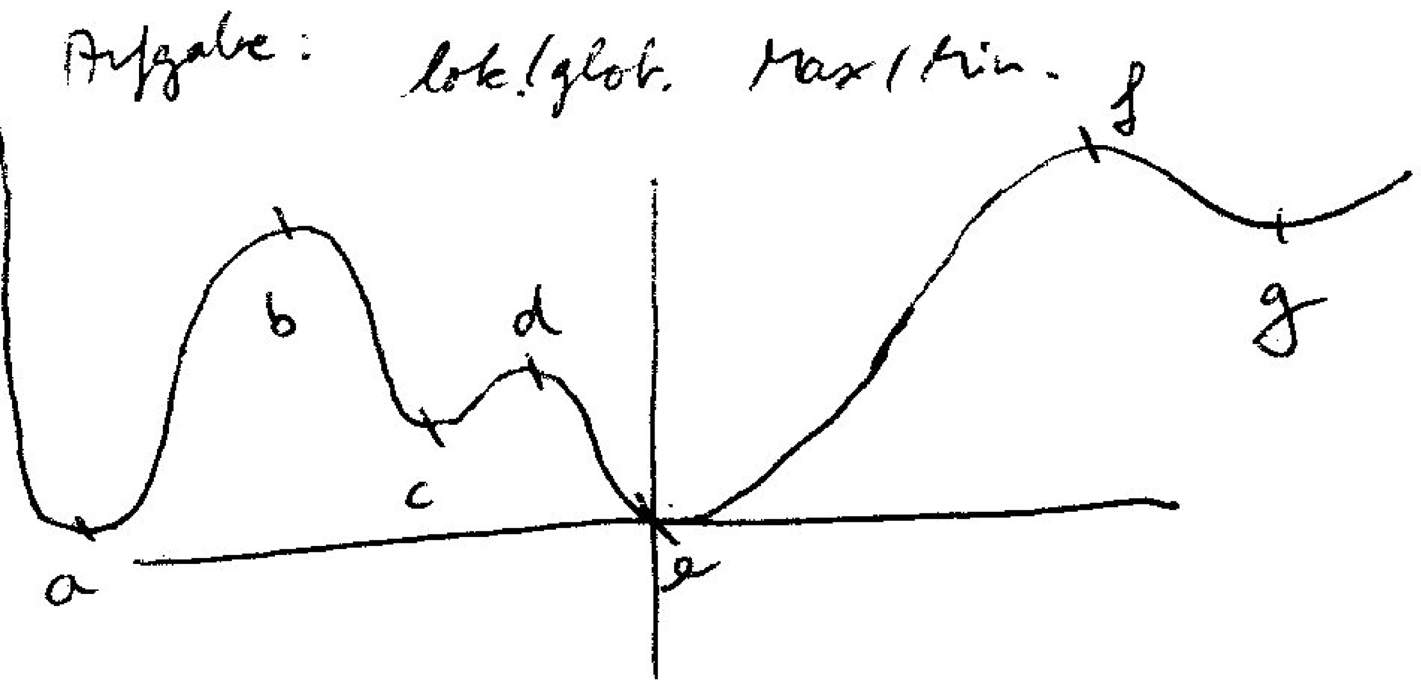
1. Untersuche $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ auf Monotonie

Extremstellen

- Maximum :  = Hochpunkt (HP)
- Minimum :  = Tiefpunkt (TP)

global : überhaupt
lokal : in bestimmten Intervall

Aufgabe : lok./glob. Max/Min.



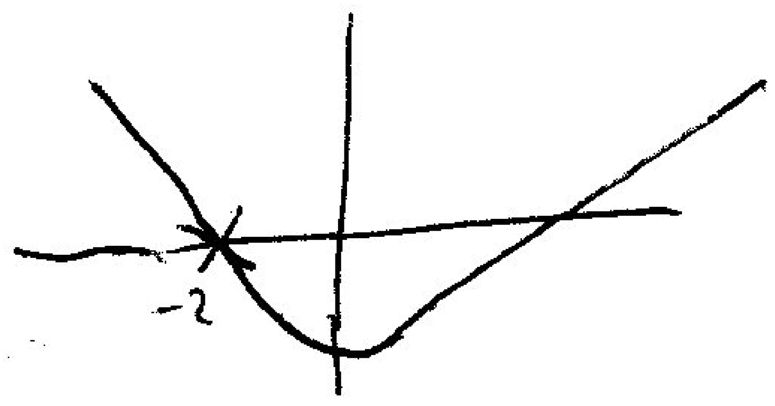
Hochpunkt : . links & rechts niedriger → Fkt. steigt, ~~wird~~ hat dann HP und fällt danach

→ d.h. Steigung erst positiv
dann $= 0$
dann negativ

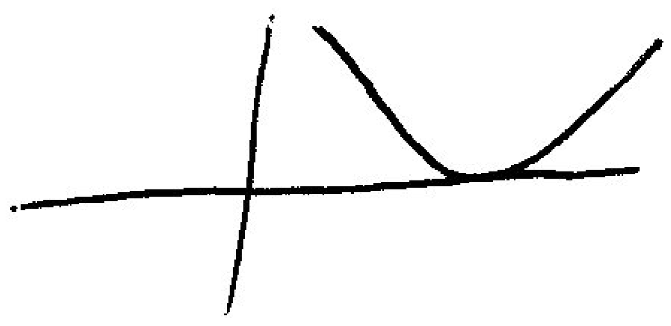
→ 1. Mglk. Hochpunkt zu ermitteln :

Ableitung $= 0$; etwas kleinerer Wert als x_0 → pos.
etwas größerer Wert als x_0 → neg.

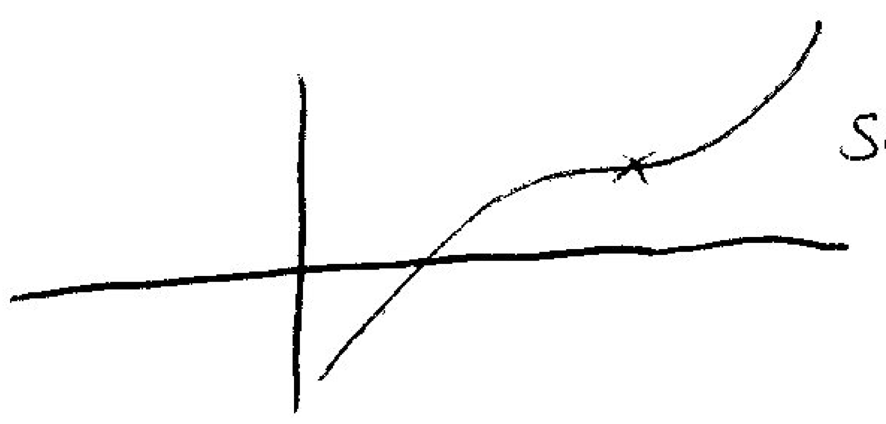
Ableitungsfkt.



→ HP bei $x_0 = -2$

• nur NS reicht nicht, da z.B.  mgl.

dann sieht Schaubild so aus :



Sattelpunkt, kein EP
(Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

• 2 Mglk. : $f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) < 0$ → HP

TP : 1. Mglk. : $f'(x_0) = 0$ + VZW von − zu +
2. Mglk. : $f'(x_0) = 0$ & $f''(x_0) > 0$

19 Mathe Klasse 11

1. Untersuche auf Extremstellen: (immer aufpassen, dass diff. bar)

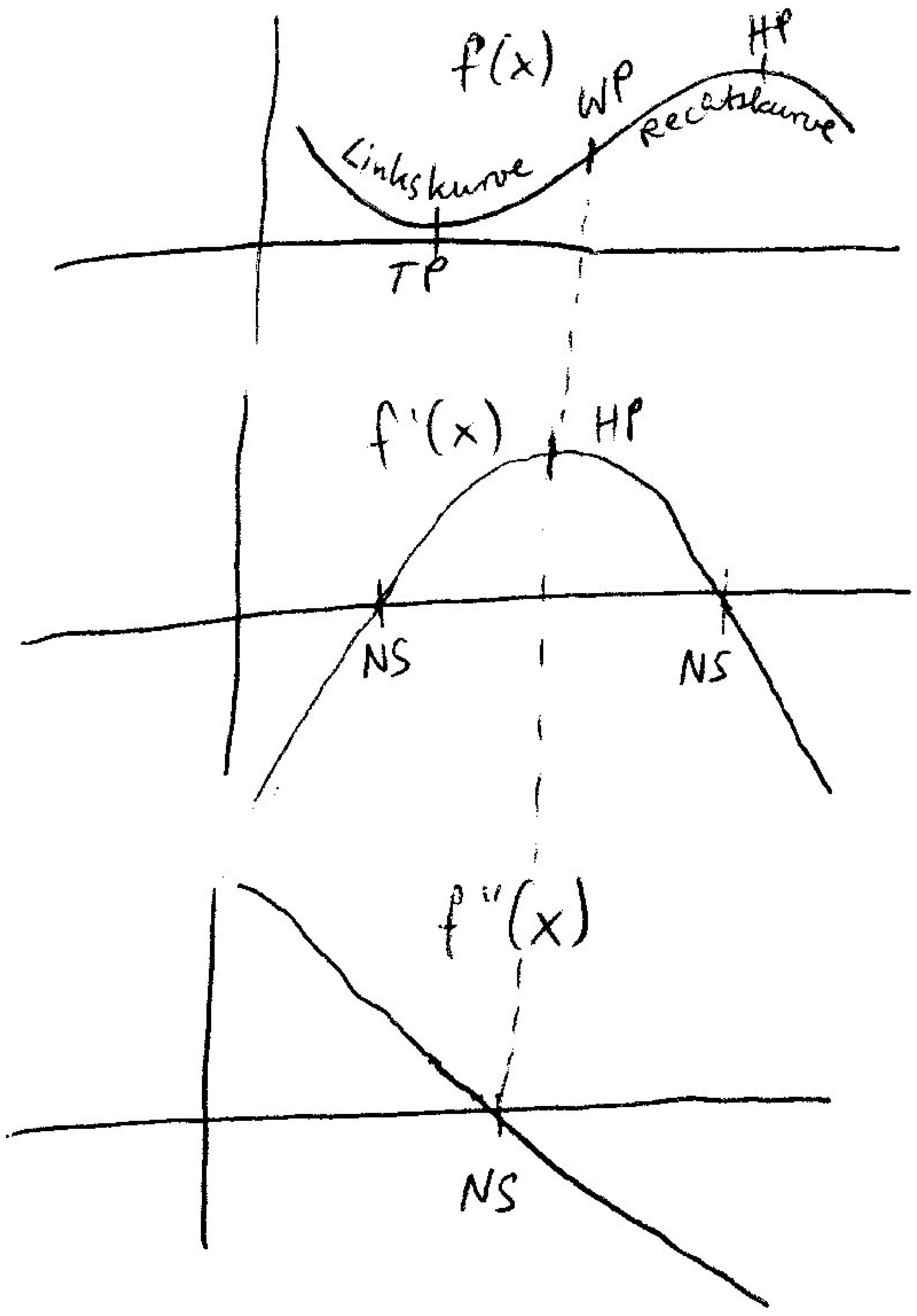
a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$

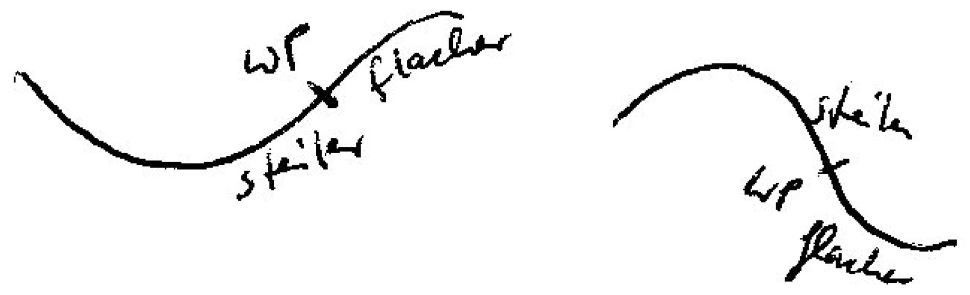
d) $f(x) = \left| \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x \right|$ im Intervall $I = [0;3]$

Wendepunkte



Wendepunkt: Man geht von einer Linkskurve in eine Rechtskurve über, oder andersrum

- Wendepunkt ist in der Ableitung eine Extremstelle



→ in $f''(x)$ ist der WP ein Nullpunkt

→ wieder mit VZW bei $f''(x)$

von + zu − heißt:

von Linkskurve zu Rechtskurve

→ andere Bedingung:

$f'''(x_0) \neq 0$

Aufgabe:

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x+1)^3 - 1$

a) Bestimme die Wendestellen

b) Bestimme die Gleichung der Tangente im WP & skizziere das Schaubild

3. Ermittle Wendepunkte:

a) $f(x) = 4 + 2x - x^2$

b) $f(x) = x^3 - x$

20 Mathe Klasse 11

Komplette Funktionsuntersuchung

1. Ableitung : $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ bilden
2. Symmetrie : zu Ursprung? → ungerade Hochzahlen
   zu y-Achse? → gerade Hochzahlen
3. Nullstellen : $f(x) = 0$
4. Verhalten für $|x| \to \infty$ / $x \to \pm\infty$ / $x \to \infty$ & $x \to -\infty$
5. Extremstellen
6. Wendestellen
7. Zeichnen

1. Aufgabe: a) Durchführen mit $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

   b) $f(x) = \frac{1}{6}(x+1)^2(x-2)$

Bestimmen ganzrat. Funktionen:

1. Bestimme ganzrat. Fkt. 2. Grades, die durch die Punkte $A(0|1)$, $B(1|2)$ und $C(2|7)$ geht.
2. Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 ist punktsymmetrisch zum Ursprung, geht durch $A(1|2)$ und hat für $x=1$ eine waagerechte Tangente. Bestimme f.

[illegible]

Ausblick auf Kl. 12

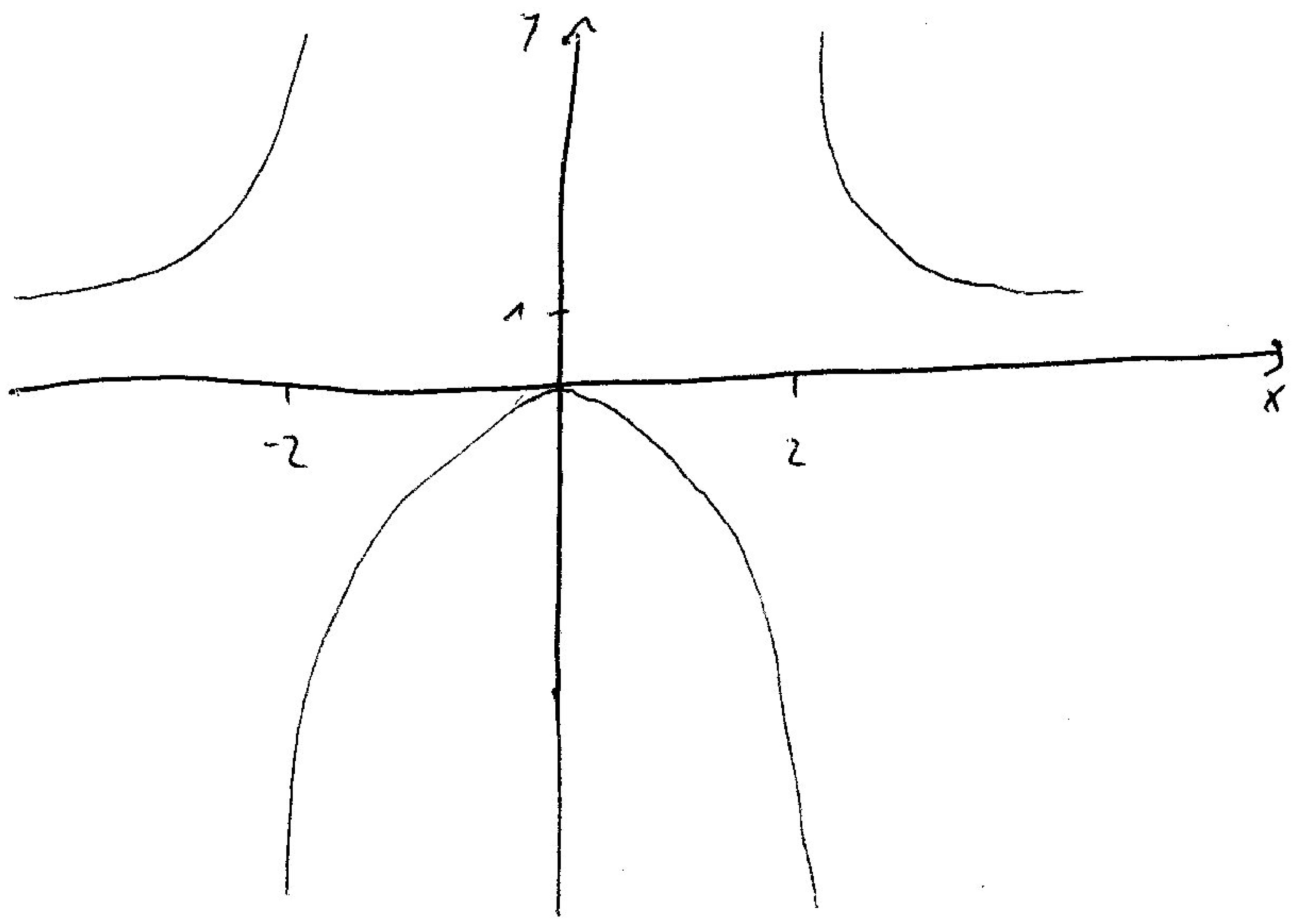
Logarithmen: $b^x = y$ Bsp.: $2^x = 8$

$x = \log_b y$ $\log_2 8 = 3$

$\log_b(b^x) = x$ → b hoch was ist b^x $(= x)$

$b^{\log_b y} = y$ → Oben: b hoch was y, dann wird b hoch das genommen

Gebrochenrationale Funktionen erkennen / ablesen



- Polstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ mit VZW

→ $f(x) = \frac{}{(x+2)(x-2)}$

- waagerechte Asymptote: $y = 1$

→ $f(x) = \frac{}{(x+2)(x-2)} + 1$

- PuP: $P(0|0)$, einsetzen

$f(x) = \frac{c}{(x+2)(x-2)} + 1$

→ $0 = \frac{c}{(0+2)(0-2)} + 1$

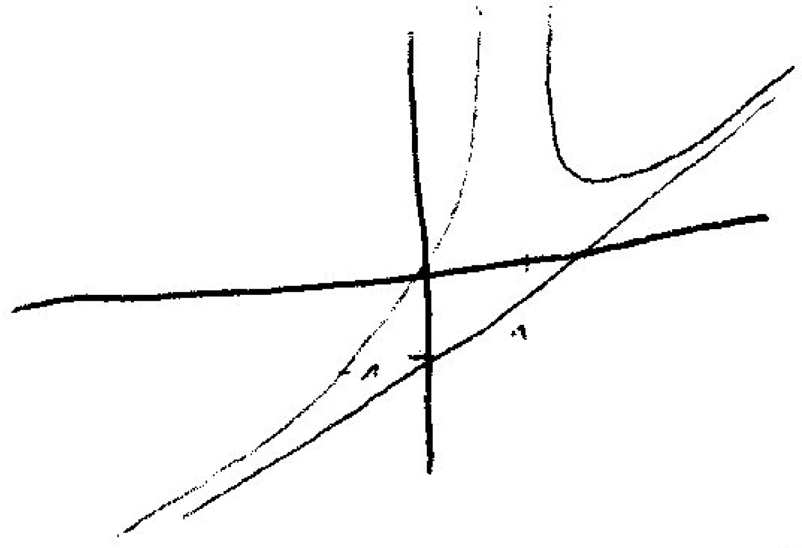
$0 = \frac{c}{-4} + 1$

$-1 = \frac{c}{-4}$

$4 = c$

- Gleichung: $f(x) = 1 + \frac{4}{(x-2)(x+2)}$

$= \frac{(x-2)(x+2) + 4}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4}{x^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4}$



schiefe As: $y = \frac{1}{2}x - 1$

Polstelle: $x = 1$, ohne VZW

→ $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{c}{(x-1)^2}$

$P(2|3)$ → $c = 3$

Stetig & Diffbar

1. $h(x) = \begin{cases} x^2 + sx + t & \text{für } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{ansonsten} \end{cases}$

an Stelle $x = 2$ ist die Funktion stetig.

Berechne s & t