Ana (6)

Michael Kopp

II

(a) $\nabla \times \underline{F} = 0 \iff$ Int'Bed.

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin y + z^2 \\ x \cos y + \alpha \cos z \\ \beta x z - y \sin z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin z + \alpha \sin z \\ 2z - \beta z \\ \cos y - \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+\alpha)\sin z \\ (2-\beta) z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \alpha = 1,\ \beta = 2 \Rightarrow \underline{F}$ hat Potential $V(x)$.

$$V(\underline{x}) = \int_{\underline{0}}^{\underline{x}} F \, d\hat{\underline{x}}$$

$\partial_x V = \sin y + z^2 \rightsquigarrow V = x \cdot \sin y + x z^2 + c_1(y,z)$

$\partial_y V = \cancel{x \cos y} + \frac{\partial c_1}{\partial y} \stackrel{!}{=} \cancel{x \cos y} + 1 \cdot \cos z + c_2(z)$

$\rightsquigarrow c_1(y,z) = y \cos z + \int_0^z c_2(\hat{z}) \, d\hat{z}$

$\partial_z V = \partial_z \left(x \sin y + x z^2 + y \cdot \cos z + \int_0^z c_2(\hat{z}) d\hat{z} \right)$

$= 2xz - y \sin z + c_2(z) \stackrel{!}{=} 2xz - y \sin z$

$\rightsquigarrow c_2 \equiv C = \text{const.}$ (bel.)

$V = x \sin y + x z^2 + y \cdot \cos z + C$

(b) $\alpha = 1,\ \beta = 2 \qquad \gamma: [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3: t \longmapsto (\pi \cdot t, \pi - t, t)^T \qquad \gamma = (\pi, -1, 1)^T$

$\int_\gamma \underline{F} \, d\underline{s} = \int_0^\pi F \, d\gamma/dt \cdot dt = \int_0^\pi \pi \underbrace{\sin(\pi - t)}_{\sin t} + \pi t^2 - \pi t \underbrace{\cos(\pi - t)}_{-\cos t}$

$- \cos(t) + 2\pi t^2 - (\pi - t) \cdot \sin t \quad dt$

$= \int_0^\pi t \sin t + (\pi t - 1) \cos t + \underbrace{(2\pi + \pi)}_{3\pi} t^2 \, dt$

$= \pi - \pi(1+1) + 3\pi \frac{1}{3} \pi^3 = \pi^4 - \pi$

Zur Kontrolle: $V(\gamma(\pi)) - V(\gamma(0)) = \pi^4 - \pi$ ✓

$\int t \sin t \, dt =$

$-t \cos t + \int 1 \cos t =$

$-t \cos t + \sin t$

$\int t \cos t \, dt =$

$t \sin t + \int 1 \sin t \, dt$

$t \sin t - \cos t$

$\alpha = 0,\ \beta = -1$

$\int_\gamma \underline{F} \, d\underline{s} = \int_0^\pi \pi \underbrace{\sin(\pi - t)}_{\sin t} + \pi \cdot t^2 - \pi t \underbrace{\cos(\pi - t)}_{-\cos t} - \pi t^2 - (\pi - t) \sin t \, dt$

$= \int_0^\pi t \sin t + \pi t \cos t \, dt$

$= \pi + \pi(-1-1) = -\pi$

Anmerkung: Potentiale heißen stets $V(\underline{x})$,

Vektorfelder $\underline{F}(\underline{x}) = \nabla V(\underline{x})$.

BRUNNEN

$\boxed{2}$ $\underline{F}: \mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^2: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

(a) $\gamma: \varphi \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T \qquad \varphi \in (0, \vartheta)$

$\gamma': \varphi \mapsto (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)^T$

$$\int_{\mathcal{C}} \underline{F}\, d\underline{s} = \int_0^{\vartheta} \frac{1}{r^2} \left\langle \begin{matrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r(-\sin\varphi) \\ r(\cos\varphi) \end{matrix} \right\rangle d\varphi \qquad r = \text{const.}$$

$$= \int_0^{\vartheta} \frac{1}{r} \cdot r \cdot 1 \cdot d\varphi = \vartheta \qquad (*)$$

(Anderer Teil d. Kurve auf x-Achse weggelassen da $d\underline{s} \perp \underline{F}$.

(b) $\dot{\gamma} = \dot{r}(\cos\varphi, \sin\varphi)^T + r(-\sin\varphi, \cos\varphi)^T$

$\Rightarrow \langle \underline{F} | \dot{\gamma} \rangle = \langle \underline{F} | \dot{r}(\cos\varphi, \sin\varphi)^T + r(-\sin\varphi, \cos\varphi)^T \rangle$

$= \langle \underline{F} | r(-\sin\varphi, \cos\varphi)^T \rangle$

$\Rightarrow$ auch für $r \neq$ const. ergibt sich die gleiche Form wie in $(*)$. Das Arbeitsintegral hängt folglich nur vom überstr. Winkel ab. Läuft $\mathcal{C}_N$ bei $\varphi = 0$ los und endet bei $\varphi = 2\pi N$ bei N überstr. Kurven

$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}_N} \underline{F}\, d\underline{s} = N \cdot 2\pi$ für $\mathcal{C}_N$: N Kurven

Jede Kurve $\mathcal{C}$ kann mit geeigneten $r = r(t)$ durch $\gamma(t)$ parametr. werden.

(c) Windungsfeld; ~~die~~ Arbeit nur von Anz. d. Windungen abh.

Umlaufzahl: So oft läuft man insg. komplett um $\underline{0}$ rum.

Die Strecke $[\underline{a}, \underline{x}]$ überstreicht für $\underline{x} = \gamma(t)$ auf dem Einheitskreis die Strecke l, dann ist die Umlaufzahl von γ um a:

$N := l/2\pi$.

Wichtig: „überstreichen" ist orientiert: Überstr. γ im Gegenuhrzeig., wird dieser Betrag entspr. abgezogen... $l = \int \tilde{\gamma}\, dt$, $\tilde{\gamma} = P_{\mathbb{R}^2 \to S^1}(\gamma)$.

i) 1 (linksrum gel.)
ii) -1 (rechtsrum gel.)
iii) 2

} bzw. einfache Kurven angen.

(d) f ist stetig, nimmt also auf dem Kreis mit Rad ε sein Min. $\underline{f}^\varepsilon$ und sein Max $\overline{f}^\varepsilon$ an. Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_K \underline{f}^\varepsilon \cdot W \, d\underline{s} \le \frac{1}{2\pi}\int_K f W \, d\underline{s} \le \frac{1}{2\pi}\int_K \overline{f}^\varepsilon W \, d\underline{s}$$

$$\underline{f}^\varepsilon \xrightarrow[(*)]{\varepsilon \to 0} f(0,0) \xleftarrow[(*)]{\varepsilon \to 0} \overline{f}^\varepsilon$$

(*) wg. Stetigkeit von f

$\frac{1}{2\pi}\int_K W \, d\underline{s} = 1$ nach (b).

Alternativ:

$$\int_K f W \, d\underline{s} = \int_K f(\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t) \cdot 1 \, d\underline{s}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_K f(\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t) \, ds = \frac{1}{2\pi}\int_K \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t) \, d\underline{s}$$

S.v. Lebesgue: $\overline{f}^\varepsilon$ ist ob. Schranke und integrierbar, damit Schranke.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_K f(0,0) \, d\underline{s} = f(0,0) \cdot \frac{1}{2\pi}\int_K 1 \, d\underline{s} = f(0,0).$$

weil sin, cos beschr.: $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \varepsilon \cdot \sin \to 0$.

$\boxed{5}$ $$\mathrm{vol}(G) = \frac{1}{2}\int_\gamma \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} d\underline{s}$$

$$\dot{\gamma} = (-4\sin t + 4\sin 4t, \; 4\cos t - 4\cos 4t)^T$$

$$\mathrm{vol}(G) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -4\sin t + \sin 4t \\ 4\cos t - \cos 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\sin t + 4\sin 4t \\ 4\cos t - 4\cos 4t \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 16\sin^2 t - 16\sin t \sin 4t - 4\sin t \sin 4t + 4\sin^2 4t + 16\cos^2 t - 16\cos t\cos 4t - 4\cos t \cos 4t + 4\cos^2 4t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 16 + 4 \underbrace{- 20\sin t \sin 4t}_{0\ (*)} \underbrace{- 20\cos t \cos 4t}_{0\ (*)} \, dt$$

(*) wg. Symmetrie!

$$= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2\pi = 20\pi.$$

(3)

(a) $\underline{F} = \underline{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\,(2x+y,\ 2y-x)$

$\{(x,y),\ y>0\}$ ist Sterngebiet. Untersuche auf Int'bed.:

$\partial_x F_2 = \partial_x (2y-x)(x^2+y^2)^{-1} = -(x^2+y^2) - (2y-x)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x$

$\partial_y F_1 = \partial_y (2x+y)(x^2+y^2)^{-1} = 1\,(x^2+y^2)^{-1} - (2x+y)(x^2+y^2)^{-2}\,2y$

$\Rightarrow$ Int'bed. gelten nicht.

$\Rightarrow$ Suche Potential $V(x)$ mit $\nabla V = \underline{F}$:

$\partial_x V \overset{!}{=} \frac{2x+y}{x^2+y^2} \qquad V = \int \frac{2x+y}{x^2+y^2}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx$

$\ln(x^2+y^2) + \frac{1}{y}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \ln(x^2+y^2) + \operatorname{atan} x/y + C^1$

$\partial_y V = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+x^2/y^2}\,x y^{-2} + \underset{0}{\underset{\|}{\partial_y C^1}} \overset{!}{=} \frac{2y-x}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow C^1 = C = \text{const}.$

$V = V(x) = \ln(x^2+y^2) + \operatorname{atan} x/y$ ist Potential.

(b) $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ def.: $\operatorname{arctan} x/0 := \pi/2$.

V ist hier Stammfkt., weil $\underline{F} = \underline{\nabla} V$ für $\underline{x} \in G$.

(c) $\mathcal{E}: \varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$: $\dot{\mathcal{E}}: \varphi \mapsto (-\sin\varphi, \cos\varphi)^T$

$\int_{\mathcal{E}} \underline{F}\,d\underline{s} = \int_0^{2\pi} -(2\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot\sin\varphi + (2\sin\varphi - \cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$

$= \int_0^{2\pi} -2\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} - \sin^2\varphi + 2\cancel{\sin\varphi\cos\varphi} - \cos^2\varphi\,d\varphi$

$= \int_0^{2\pi} -1\,d\varphi = -2\pi.$

$\int \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega =$

q

(u,v)

p

$\frac{1}{u}(v+t) =: h$

$\frac{dh}{dt} = 1/u$

(d)

(ii) $\int_{\mathcal{E}} \underline{F}\,d\underline{s} = V(u,v) - V(u,v) = 0.$

(i) $\gamma_1: t \mapsto (u, v+t)$ $t \in (0,p)$, $\dot\gamma_1: t \mapsto (0,1)$

$\int_{\gamma_1} \underline{F}\,d\underline{s} = \int_0^p \frac{2(v+t)-u}{u^2+(v+t)^2}\,dt = \int_0^p \frac{1}{u}\,\frac{\frac{1}{u}2(v+t)}{1+\frac{(v+t)^2}{u^2}}\,dt - \int_0^p \frac{1}{u}\,\frac{1}{1+(v+t)^2}\,dt$

$= \ln(u^2+(v+t)^2) -$

3

(a) i) $\gamma_1: t \mapsto (u+t, v)^T \quad t \in [0,p] \qquad \dot\gamma_1(t) = (1,0)^T$

$\gamma_2: \hat t \mapsto (u+v, v+\hat t)^T \quad t \in [0,q] \qquad \dot\gamma_2(t) = (0,1)^T$

$\gamma_3: t \mapsto (u+p-t, v+q)^T \quad t \in [0,p] \quad \dot\gamma_3(t) = (-1,0)^T$

$\gamma_4: \hat t \mapsto (u, v+q-t)^T \quad \hat t \in [0,q] \quad \dot\gamma_4(t) = (0,-1)^T$

(1) $$\int_{\gamma_1} \underline{F}\, d\underline{s} = \int_0^p \frac{2(u+t)+v}{(u+t)^2+v^2}\, dt$$

$$= \int_0^p \frac{2(u+t)}{(u+t)^2+v^2} + \frac{v}{(u+t)^2+v^2}\, dt$$

$$= \ln\left(v^2+(u+t)^2\right)\Big|_0^p + \int_0^p \frac{1}{v} \frac{1}{1+\left(\frac{u+t}{v}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{\ln\left(v^2+(u+p)^2\right)}{\ln\left(v^2+u^2\right)} + \operatorname{atan}\left(\frac{u+t}{v}\right)\Big|_0^p$$

$$= \text{—} \quad " \quad \text{—} + \operatorname{atan}\left(\frac{u+p}{v}\right) - \operatorname{atan}\frac{u}{v}$$

$\frac{u+t}{v} = A$

$\frac{dA}{dt} = 1/v$

$\int \frac{1}{1+A^2}$

$\operatorname{arctan} A$

Analog:

(2) $$\int_{\gamma_2} \underline{F}\, d\underline{s} = \int_0^q \frac{2(v+t)-(u+v)}{(u+v)^2+(v+t)^2}\, dt = \ln\left((u+v)^2+(v+t)^2\right)\Big|_0^q - \operatorname{atan}\left(\frac{v+t}{u+v}\right)\Big|_0^q$$

(3) $$\int_{\gamma_3} \underline{F}\, d\underline{s} = \ln\left((u+p-t)^2+(v+q)^2\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{u+p-t}{v+q}\right)\Big|_0^p$$

(4) $$\int_{\gamma_4} \underline{F}\, d\underline{s} = \ln\left(u^2+(v+q-t)^2\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{v+q-t}{u}\right)\Big|_0^q$$

Gesamt:

$$\ln\left((v+u)^2+(v+q)^2\right) - \ln\left(v^2+(v+u)^2\right) + \ln\left((v+q)^2+(p+u)^2\right) + \ln\left((u+p)^2+v^2\right)$$
$$-\operatorname{atan}\frac{v+q}{u+v} + \operatorname{atan}\frac{v}{u+v} + \operatorname{atan}\frac{v+q}{u} - \operatorname{atan}\frac{v}{u} - \operatorname{atan}\frac{p+q}{v+q} + \operatorname{atan}\frac{p}{v+q} - \operatorname{atan}\frac{u}{v} + \operatorname{atan}\frac{p+u}{v}$$

$\neq 0$.

(→ Lösung mod Rechenfehler...)

BRUNNEN