Analysis IV
Uebung 10

Michael Kopp

June 29, 2010

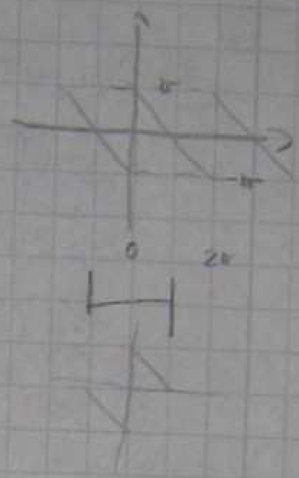
$\boxed{1}$

(a) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) f(x)\cos(nx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{2\pi} + \int_{0}^{\pi}\right) f(x)\cos(nx)\,dx$ Periode: 2π

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$ da f antisymm.



$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ "

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin(nx)\,dx$

$= -\frac{1}{\pi}x\cos(nx)\frac{1}{n}\Big|_{0}^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)\,dx}_{0}$

$= \frac{1}{\pi n}\, 2\pi\cos(2\pi n) = \frac{2}{n}$

(b)

$\boxed{3}$

(b) h_n liegt in S' da $e^{-x^2/2} \in S'$ und folglich auch nach Def. $P_n e^{-x^2/2}$ für alle Polynome P_n.

$$\langle h_\ell \mid h_n \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} P_\ell \cancel{e^{\frac{x^2}{2}}} N \cancel{e^{\frac{x^2}{2}}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \, dx$$

Für $\ell < n$ fällt nach $(\ell+1)$ fachem partiellen Integrieren $\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}\ (\ell+1)\text{mal aufl.}, P_\ell\ (\ell+1)\text{mal abl.}\right)$ weg. Alle Randterme fallen weg da e^{-x^2} schneller fällt als jedes Polynom

$\Rightarrow \quad \langle h_\ell \mid h_n \rangle = 0 \quad$ für $\ell < n$.

Für $\ell = n$ gilt

$\langle h_n \mid h_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} P_n^2 e^{-x^2} dx > 0$ da Integrand stets positiv.

(c) $h_0 = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \mathcal{F}[h_0] = h_0$

$$\mathcal{F}[N \cdot (\partial_x - x)^n h_0] = N \cdot (i\xi - i\partial_\xi)^n \mathcal{F}[h_0]$$
$$= (-i)^n N \cdot (\partial_\xi - \xi)^n h_0 = (-i)^n h_n(\xi)$$

(a) Induktion: (hochgest. Indexe $\to$ welche der Formeln)

(IA) $h_0^{I}(x) = \pi^{-1/4} e^{x^2/2} e^{-x^2} = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2} \qquad h_0^{II}(x) = 1 \cdot h_0(x)$ ✓

(IV) Sei $h_n^{I} = h_n^{II}$

(IS) $h_{n+1}^{II} = (2\, 2^n n! (n+1))^{-\frac{1}{2}} (\partial_x - x)(\partial_x - x)^n h_0 = (2(n+1))^{-\frac{1}{2}} (\partial_x - x) h_n^{II}$

$h_{n+1}^{I} = (\cancel{2\, 2^n n! (n+1)})^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^{n+1} e^{-x^2}$

$h_{n+1}^{II} \overset{(IV)}{=} (\cancel{2(n+1)})^{-\frac{1}{2}} (\partial_x - x) (\cancel{2^n n!})^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^n e^{-x^2}$

$\propto \partial_x \left(e^{\frac{x^2}{2}} (\partial_x^n e^{-x^2}) \right) - x e^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^n e^{-x^2} = \cancel{x e^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^n e^{-x^2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^{n+1} e^{-x^2} - \cancel{x e^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^n e^{-x^2}}$

$\Rightarrow h_{n+1}^{I} = h_{n+1}^{II}$ ▨

4

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \qquad \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$$

$$|\hat{f}(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \cdot |e^{-ixy}|\, dx \qquad f = |f| \text{ da } f > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \qquad = \hat{f}(0)$$

$|\hat{f}(y)| \leq \hat{f}(0)$.

Zeige, dass = nicht gilt:

$$|\hat{f}(y)| = \hat{f}(0) \iff$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \right| = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$$

$\Rightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi]: \quad | \cdot | \cdot e^{i\varphi} =$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-ixy}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\varphi}\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(e^{-ixy} - e^{-i\varphi}\right) dx = 0 \qquad | \cdot e^{i\varphi}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f(x)}_{\neq 0} \underbrace{\left(e^{-i(xy-\varphi)} - 1\right)}_{\in [0,-2]} dx = 0$$

$\lightning$ da das Integral < 0 ist.

Aufgabe 2: Fourierzerlegung

Michael Kopp

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < \pi \\ -2 & -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wurde Fourierzerlegt. Aus Symmetriegründen fallen alle Cosinusterme weg und für die Sinusterme gilt

$$a_n = \frac{4}{\pi\, n}(1 - (-1)^n) \ .$$

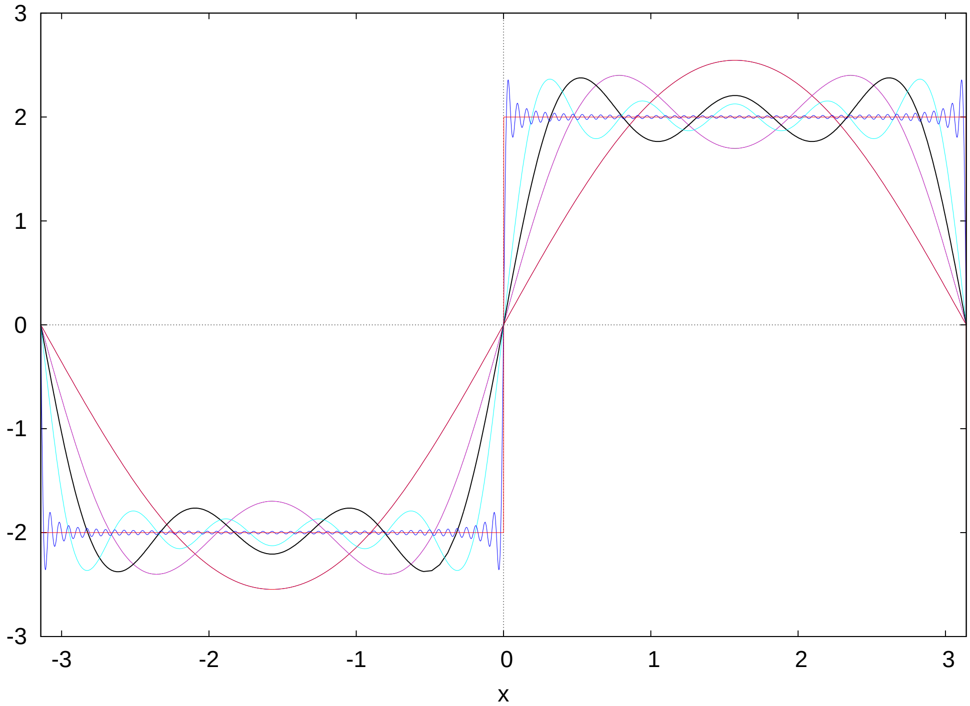
In Abb. 1(a) wurden die Partialsummen der Fourierreihe $S_1, ..., S_5, S_{10}$ und S_{100} geplottet mit

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k sin(k\, x)$$

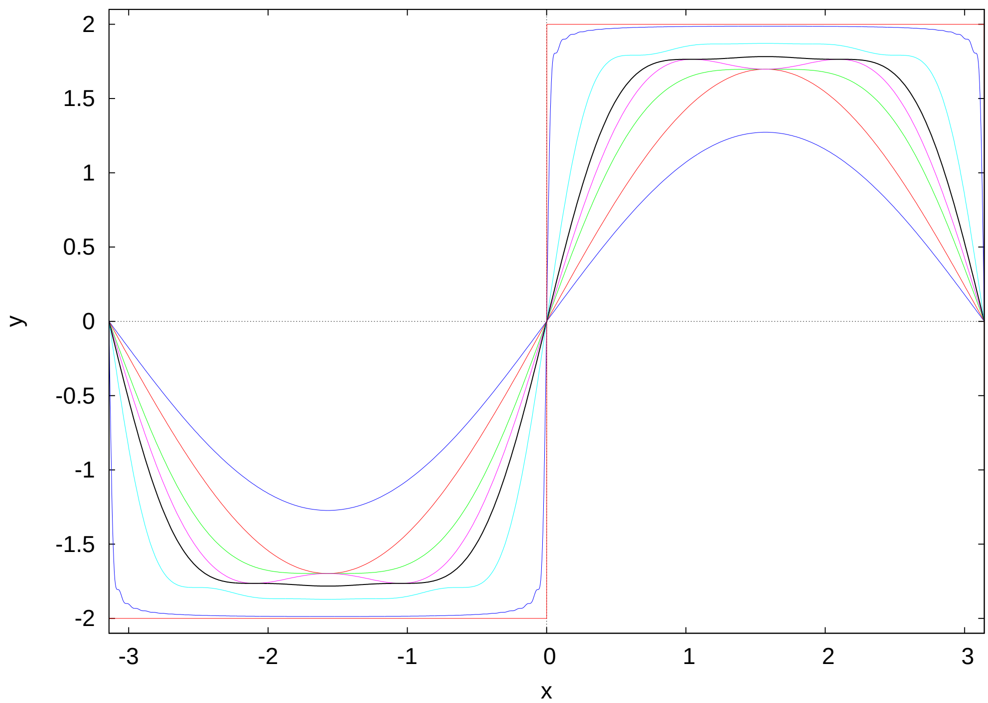
und in Abb. 1(b) die Cesaro-Summen $\sigma_2, ..., \sigma_6, \sigma_{10}$ und σ_{100} gemäß

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k \ .$$

Wie man sieht konvergieren die S_n so, dass an den Kanten stets hohe Überhänge bleiben. Diese fehlen bei den σ_n, dafür scheinen diese langsamer gegen f zu konvergieren. Natürlich ist diese subjektive Characterisierung der Tatsache geschuldet, dass S_n in einer Integralnorm und σ_n gleichmäßig bzgl. x konvergiert.



(a) Partialsumme der Fourierreihe



(b) Cesaro-Partialsumme der Fourierreihe

Abbildung 1: Approximation von $f(x)$