$\boxed{8}$ $f_A$ orth.: $\underline{x} \mapsto \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ orthog. $\Rightarrow$

$\|\underline{x}\| = \|f(\underline{x})\|$ da $\langle \underline{x} | \underline{x} \rangle = \langle f(\underline{x}) | f(\underline{x}) \rangle = \|\underline{x}\|^2$

$\underline{x} \mapsto \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$

$\|\underline{x}\| = \|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\| \quad | : \|\underline{x}\|$

$1 = |\lambda|$

$\boxed{9}$ Drehung $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}} \in SO(3) \Leftrightarrow \det \underline{\underline{A}} = 1$, $\underline{a}_i \perp \underline{a}_j$

($\underline{a}_{i,j}$ Spaltenvekt. von $\underline{\underline{A}}$, $j \neq i$)

- $\det A = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \cdot 2^3 - 1 + 2^3 + 2^2 + 2^2 + 2^2$

  $= \frac{1}{27} \cdot 27 = 1 \quad (\checkmark)$

- $\underline{a}_i \perp \underline{a}_j$: $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 + 4 - 2 = 0$

  $(i \neq j)$ $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 - 2 + 4 = 0$

  $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 - 2 - 2 = 0 \quad (\checkmark)$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \in SO(3)$

<u>Drehachse</u> ist EV! $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\underline{\underline{A}}} \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV! $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Drehachse!

<u>Drehwinkel</u>:

$\underline{v} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}$ wird um $\varphi$ auf $\underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ gedreht!

$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\langle \underline{v} | \underline{v}' \rangle}{\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{v}'\|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\varphi = 60°$

$\boxed{10}$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \\ -r\cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \Big(\underbrace{\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta}_{=1} + \sin^2\vartheta\Big)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{8}$ $f_A$ orth.: $x \mapsto A x$ orthog. $\Rightarrow$

$\|x\| = \|f(x)\|$ da $\langle x | x \rangle = \langle f(x) | f(x) \rangle = \|x\|^2$

$x \mapsto A x = \lambda x$

$\|x\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad | : \|x\|$

$1 = |\lambda|$

$\boxed{9}$ Drehung $\Rightarrow$ $A \in SO(3) \iff \det A = 1$, $a_i \perp a_j$

($a_{i,j}$ Spaltenvekt. von $A$, $j \neq i$)

- $\det A = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \cdot 2^3 - 1 + 2^3 + 2^2 + 2^2 + 2^2$

  $= \frac{1}{27} \cdot 27 = 1$ (✓)

- $a_i \perp a_j$: $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 + 4 - 2 = 0$

  $(i \neq j)$ $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 - 2 + 4 = 0$

  $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 - 2 - 2 = 0$ (✓)

$\Rightarrow A \in SO(3)$

<u>Drehachse</u> ist EV! $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{A} \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV! $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Drehachse!

<u>Drehwinkel</u>:

$v \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v$ wird um $\varphi$ auf $Av$ gedreht!

$A v = v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\langle v | v' \rangle}{\|v\| \cdot \|v'\|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\varphi = 60°$

$\boxed{10}$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \\ -r\cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \left( \underbrace{\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta}_{=1} + \sin^2\vartheta \right)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$