Abi Vorbereitungskurs — Marcel Beyl, Michael Kopp

Abschlussklausur – Lösungen

Extycion

Wir haben versucht, in den hier vorgestellten Lösungen kleine Hinweise zu geben, damit man nachvollziehen kann, was gerechnet wurde. Außerdem haben wir bei vielen Aufgaben versucht, verschiedene Wege parallel zu beschreiben – damit man auch zu den Rechnungen Alternativen sieht.

Auch haben wir oft ohne Taschenrechner gerechnet, obwohl man mit GTR komfortabler ans Ziel gekommen wäre. Die Idee dahinter ist einfach: Vielleicht wollen (besonders Motivierte) die Aufgaben zur Übung komplett von Hand rechnen. Oder es ist interessant, wie weit man im Wahlteil ohne GTR kommt. Oder – und das ist das Wichtigste – manchmal darf man auch im Wahlteil den GTR nicht verwenden. Achtet an dieser Stelle auf die „Operatoren“ die anzeigen, was getan werden soll.

Wir würden euch bitten, diese Lösungen nur für den privaten Gebrauch zu verwenden. Gebt also bitte weder die Klausur selbst noch diese Lösungen an Leute weiter, die nicht bei uns im Kurs waren. Das ganze hat diverse rechtliche Hintergründe.

Schließlich noch ein abschließender Hinweis: Irren ist menschlich. Es kann also gut sein, dass sich in diesen Lösungen noch irgendwo das Fehlerteufelchen eingeschlichen hat. Wir haben uns Mühe gegeben, aber auszuschließen ist das ja nie...

Nichtsdestoweniger: Viel Erfolg beim Lernen (und dann natürlich auch beim Abi) wünscht

Extycion – www.extycion.de

Kommentierte Lösungen zur Abschlussklausur

I Pflichtteil:

A1 $f(x) = e^x \cdot \cos(2x+3)$ → Produkt- & Kettenregel!

$f'(x) = e^x \cdot \cos(2x+3) + \left[-\sin(2x+3) \cdot 2\right] \cdot e^x$

$= e^x \left[\cos(2x+3) - 2\sin(2x+3)\right]$

A2 $\int_0^{e-1} \frac{1}{1+x}\, dx =$ → $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

$\left[\ln(1+x) + c\right]_0^{e-1} =$ → bei linearer Verkettung: (äußere Aufleitung)/(innere Ableit.)

$[\ln(1+e-1)+c] - [\ln(1)+c] =$ → $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$

1

A3 $\cos^2 x - \cos x = 0$

1\. Weg: $\cos x$ ausklammern: $\cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$

⇝ Satz vom Nullprodukt

- entw. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$
- oder $(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$, $x = 2\pi$

2\. Weg: Substitution: $\cos x = y$: $y^2 - y = 0$

⇝ Satz vom Nullprodukt : $y = 0$ od. $y = 1$

⇝ Mitternachtsformel: $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-0}}{2}$ $y_1 = 1, y_2 = 0$

Rücksubstitution: $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$, $x = 2\pi$

A4 $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(1) Tangente hat Steigung $f'(x)$: → Quotientenregel

$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Nullstellen von f': $x^2 + 2x = 0$ → Zähler = 0

$x(x+2) = 0$ ⇝ $x = 0$, $x = -2$

extycian.de

Bei „Punkte" ist nicht nur nach x sondern auch nach y-Werten gefragt:

$f(0) = 0$, $\quad f(-2) = \frac{4}{-1} = -4$

$\rightsquigarrow P_1(0|0)$, $\quad P_2(-2|-4)$

(2) $f(1) = \frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ P liegt also auf dem Graphen von f, damit Normale n:

$$n: \; y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

$$= -\frac{1}{3/4}(x-1) + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-1) + \frac{1}{2}$$

(*)

$$= -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$$

45

(1) • $f(-1) = 0$ mit VZW von (−) nach (+)

$\Rightarrow$ F hat hier Tiefpunkt

(alternativ: $f(-1) = F'(-1) = 0$, $f'(-1) = F''(-1) > 0$)

• f hat bei 0 ein Maximum $\Rightarrow$ F hat hier eine Wendestelle

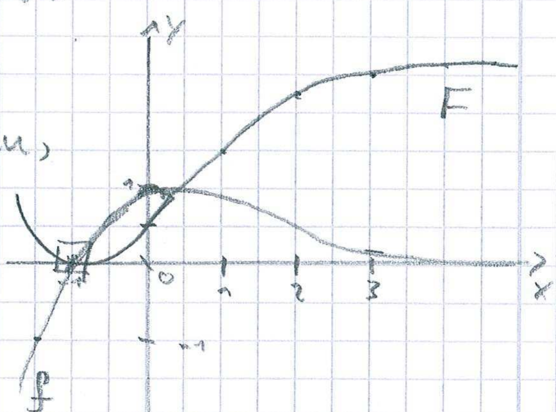
(2) Die Tangenten an F haben die Steigung $F' \overset{!}{=} f$.

Die Tangenten an F haben also genau dort positive Steigung, wo f positiv ist — also im Intervall $x \in [-1; 3]$

Für $x = -1$ ist ist die Steigung von F null und $0 \geq 0$ ist positiv.

(3) Tips zum Zeichnen:

F muss durch $\boxed{}$ gehen, dort einen Tiefpunkt und bei 0 einen Wendepunkt.



Um abzuschätzen, wie groß F bei 0 ist, kann man die Kästchen unter f im Bereich [0, 1] zählen (bei mir ca 2 Kästchen, 2 Kästchen $= \frac{1}{2}\,cm^2 \rightarrow F(0) \approx \frac{1}{2}$), dann für F(1) die Kästchen unter f zw. [0, 1] addieren (bei mir sind das ca 4 $\hat{=}$ $1\,cm^2 \rightarrow F(1) \approx F(0) + 1 = 1{,}5$) etc.

(46) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ k \end{pmatrix}$

Wenn $\vec{c}$ Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, dann gibt es Zahlen u, v sodass

$$u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b} = \vec{c} :$$

Für die einzelnen Koordinaten (Zeilen der Vekt.) bedeutet das:

$$\begin{aligned} 2u + 4v &= -4 \\ 1u - 1v &= 7 \\ -1u - 2v &= k \end{aligned}$$

1 Weg: Bilde LGS mit u, v, k:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -9 \end{array}\right) \quad I/2 - II$$

$\Rightarrow 3v = -9 \Rightarrow v = -3$

$\Rightarrow u + 3 = 7 \Rightarrow u = 4$

$\Rightarrow -4 - 2(-3) - k = 0 \Rightarrow k = -4 + 6 = \underline{2 = k}$

2. Weg: Einsetzen:

$2u + 4v = -4 \Leftrightarrow u + 2v = -2 \Rightarrow u = -2 - 2v$

$u - v = 7 \Leftrightarrow -2 - 2v - v = 7 \Rightarrow -3v = 9 \Rightarrow v = -3$

$\Rightarrow u = -2 - 2(-3) = -2 + 6 = 4$

$-4 - 2(-3) = k = -4 + 6 = 2 \qquad \underline{k = 2}$

Damit also $4\vec{a} - 3\vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\7\\2\end{pmatrix}$.

(47) $A(1|1|3)$ $B(5|-3|1)$ $C(3|5|-1)$

1. Weg: LGS ⇝ Koordinatenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 14 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 27 & 6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad a_3 = 6/27 = 2/9$

$\Rightarrow \quad -a_2 + 5 \cdot \frac{2}{9} = 1 \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{9}$ $\quad 5 \cdot \frac{2}{9} = \frac{10}{9}$

$\Rightarrow \quad a_1 + \frac{1}{9} + 3\,\frac{2}{9} = 1 \Rightarrow \quad a_1 = \frac{2}{9}$

$E: \quad \frac{2}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 + \frac{2}{9}x_3 = 1 \iff 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 9$

2. Weg: über Parameterform gehen:

$\vec{s} = \vec{OA} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \vec{AC} = \begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$

Parameterform: $\vec{x} = \vec{s} + a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$

Normalenvekt. best.: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}(-4)(-4) - (-2)(4) \\ (-2)(2) - (4)(-4) \\ (4)(4) - (-4)(2)\end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}16+8\\-4+16\\16+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\12\\24\end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

b von $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ erhält man, wenn man einen Punkt in die Gl. einsetzt, von dem man weiß, dass er auf der Ebene liegt – bspw. $\vec{s}$:

$24 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 24 \cdot 3 = 12(2 + 1 + 6) = 12 \cdot 9 = 108$

$\Rightarrow \quad E: \quad 24x_1 + 12x_2 + 24x_3 = 108 \quad |:12$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

(48) → Sind die Richtungsvekt. l.a. → $g \parallel h$

↳ Ist Stützvekt. von g in h & $g \parallel h$ ⇒ $g = h$ (ident.)

→ Ist g nicht $\parallel h$: Unterscheide Schnitt

↳ entw. schneiden sich g, h oder sie sind windschief.

Zusatzfragen & Nachtrag:

(A9) $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$: Kommutativgesetz

(A10) $a^0 = a^{3-3} = a^3 \cdot a^{-3} = \frac{a^3}{a^3} = 1$

$0{,}9 = 1 - 0{,}1$

$0{,}99 = 1 - 0{,}01$

$0{,}999 = 1 - 0{,}001$

$\vdots$

$0{,}99\ldots9 = 1 - 0{,}00\ldots01$

$\downarrow$

$0{,}\overline{9} = 1 - 0 = 1$

(A11) Nein kann sie nicht.

Gleichungen $a^n + b^n = c^n$ mit $n \geq 3$ haben nie ganzzahlige Lösungen für a,b,c

Das ist der (wichtige) Satz von Fermat.

(*) Nachtrag zu (A4): Zeige dass ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

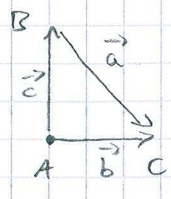
Dazu musst Vektoren der drei Kanten bestimmen:

$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Daraus die jew. Längen

$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 64 + 4}$, $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 16 + 16}$, $|\vec{c}| = \sqrt{16 + 16 + 4}$

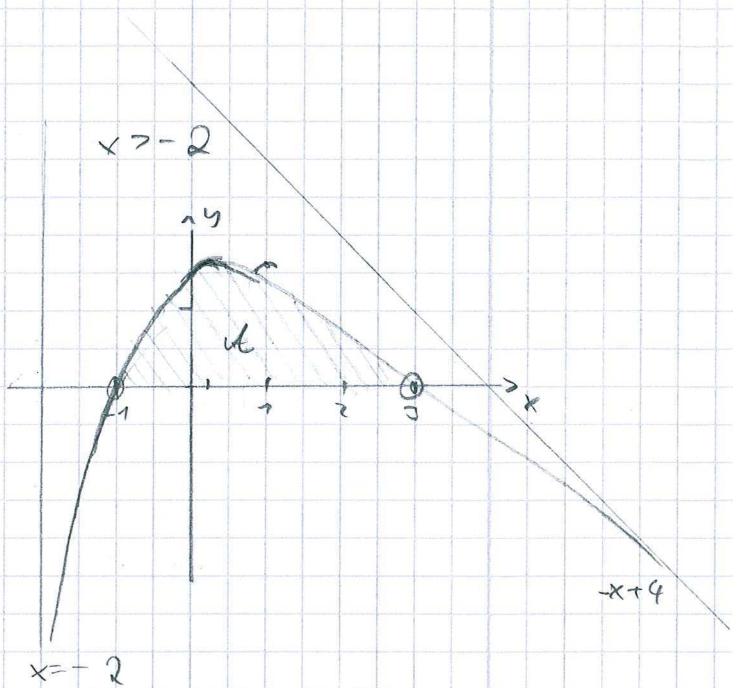
Offenbar sind $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gleich lang (man hätte das auch gesehen, weil $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus den selben Zahlen besteht). Das Dreieck ist also gleichschenklig.



Wegen $\vec{b} \cdot \vec{c} = 8 - 16 + 8 = 0$ auch rechtwinklig (bei A).

II Analysis

$f(x) = -x + 4 - \frac{5}{x+2}$ $\quad x > -2$



(1) • Tips zum Skizzieren:

Eine grobe Skizze vom GTR abmalen, diese immer weiter verfeinern: Wenn man einen Hoch/Tief-punkt, Asymptoten, ... berechnet, diese da eintragen und Schaubild so neu zeichnen, dass es diese Eigenschaften hat.

• Fläche A:

Schnittpunkte mit x-Achse bestimmen:

$-x+4-\frac{5}{x+2}=0 \quad |\cdot(x+2) \Rightarrow (-x+4)(x+2)-5=0 \Rightarrow$

$-x^2+2x+3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2} = 1\mp 2 = \begin{matrix}-1\\ 3\end{matrix}$

$A=\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2+4x-5\cdot\ln(x+2)+c\right]_{-1}^{3} =$

$\left[-\frac{1}{2}9+12-5\ln(5)\right]-\left[-\frac{1}{2}-4-5\underbrace{\ln 1}_{0}\right] = 12-5\ln 5$

$\approx 3{,}95$

Mit GTR: $Y_1=f(x)$ plotten, mit Calc → Zero Nullstellen bestimmen, $A = \text{fnInt}(Y_1, X, -1, 3)$.

• Fläche hat in x-Richt. Ausdehn. $3-(-1)=4$, in y-Richtung: Best. Max. von f

$f'(x) = -1+\frac{5}{(x+2)^2}$ $\quad \rightarrow$ Verw. $\left(-5(x+2)^{-1}\right)' = (-1)(-5)(x+2)^{-2}\cdot 1$ innere Ableitung

$f'(x)=0: \quad 1=\frac{5}{(x+2)^2} \Rightarrow$

$(x+2)^2=5 \Rightarrow (x+2)=\sqrt{5} \Rightarrow x=\sqrt{5}-2 \approx 0{,}236$

Maximum also bei $((\sqrt{5}-2) \mid f(\sqrt{5}-2))$

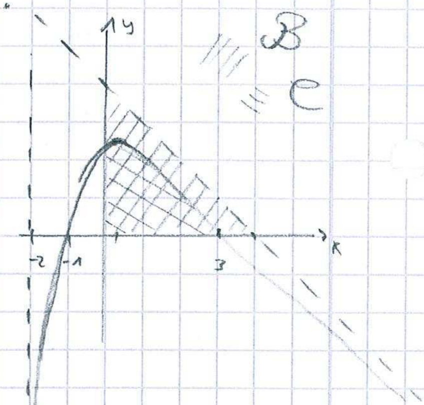
$f(\sqrt{5}-2) = -(\sqrt{5}-2)+4-\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}+2+4-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5}$
$\approx 1{,}528$

extycian.de

Die max. Ausdehn. in y-Richt. ist also ca. 1,528.

Mit GTR: Mit Calc -> maximum bestimmen.

(2) • Für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ wird $\frac{5}{x+2}$ sehr klein - damit kann man es ignorieren. Für $x \to \pm\infty$ ist also $f(x) \approx -x+4$. $-x+4$ ist also unsere schiefe Asymptote.



• Fläche B-C ist gesucht.

Die Gleichung für die Fläche zwischen zwei Kurven ist hier weniger geeignet, weil man f von 0 bis 3 und die Asymptote von 0 bis 4 integrieren müsste (bei x=4 ist die Asympt. $-4+4=0$).

Stattdessen ber. B: Dreieck mit Grundlänge 4 (da $t(x)=0$ für $x=4$) und Höhe 4 (da y-Achsen-Abschnitt 4). Damit $B = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. $\left(= \frac{16}{2}\right)$

$C = \int_0^3 f(x)dx = [-\frac{9}{2}+12-5\ln 5]-[-5\ln 2] = \frac{15}{2} - 5\ln(5/2)$

und gesuchte Fläche insges. $B-C = \frac{1}{2} + 5\ln(5/2) \approx 5,08$.

Alternativ: GTR: 8− fnInt(Y_1, X, 0, 3) $\approx 5,08$.

(3) • B_1 liegt auf f da $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}+4 - \frac{5}{3/2} = \frac{9}{2} - \frac{10}{3} = \frac{27-20}{6}$.

Wir können für Tangente t_1 also

$t_1: y = f'(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{9}(x+\frac{1}{2}) + \frac{7}{6}$

verwenden. Die Ableitung bekommt man mit

Ⅱ 2

$f'(x) = -1 + \frac{5}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(-\frac{1}{2}) = -1 + \frac{5}{(3/2)^2} = -1 + \frac{20}{9} = \frac{11}{9}$

- Eine Funktion schneidet die y-Achse dort wo $x=0$ ist – also $t_1(0) = \frac{11}{9}(0+\frac{1}{2}) + \frac{7}{6} = \frac{11}{18} + \frac{21}{18} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}$.

Damit also $C(0 | \frac{16}{9})$.

Alternativ in GTR Tangentengl. eintippen: $Y_3 = (11/9)\cdot(x+1/2) + 7/6$, dann $Y_3(0)$ ber.

- Da B_2 auf f liegt, wissen wir, dass wenn B_2 die x-Koordinate b hat, dass dann $B_2(b | f(b))$ ist. In B_2 hat die Tangente die Steigung $f'(b)$. Da für die Steigung bei einer Geraden immer auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gilt, ist $f'(b) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Für Δy und Δx setzt man jetzt die Koordinaten der Punkte C und B_2 ein:

$$f'(b) = (\tfrac{16}{9} - f(b)) / (0-b) \qquad (*)$$

Diese Gl. muss man für b lösen:

$$-1 + \frac{5}{(b+2)^2} = (\tfrac{16}{9} + b - 4 + \tfrac{5}{b+2}) / (-b) \qquad | \cdot (-b)$$

$$\cancel{b} - \frac{5b}{(b+2)^2} = \frac{-20}{9} + \cancel{b} + \frac{5}{b+2} \qquad | \cdot (b+2)^2$$

$$-5b = -\frac{20}{9}(b+2)^2 + 5(b+2)$$

$$-5b = -\frac{20}{9}b^2 - 4\cdot\frac{20}{9}b - 4\cdot\frac{20}{9} + 5b + 10$$

$$0 = -\frac{20}{9}b^2 + \frac{10}{9}b + \frac{10}{9} \qquad | \cdot 9 \,/\, 10$$

$$0 = -2b^2 + 1b + 1$$

$$\Rightarrow b_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2\cdot 2} = \frac{-1\pm 3}{-4} \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases}$$

Alternativ mit GTR: Die linke und die rechte Seite von (*) plotten ($Y_4 = $ nDeriv(Y_1, X, X); $Y_5 = (16/9 - Y_1)/(-X)$) und Schnittpunkte suchen.

Die Lösung $b = -1/2$ haben wir bereits gewusst:

sie gehört zum Punkt B_1.

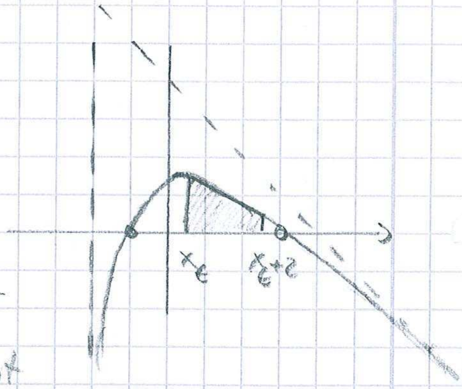
Der Punkt B_2 ist also $B_2(1|f(1))$

$f(1) = -1 + 4 - \frac{5}{3} = \frac{9}{3} - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow B_2(1, \frac{4}{3})$.

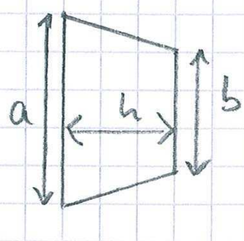
- Für die Tangente können wir jetzt die Gl. aufstellen:

$t_2: y = f'(1)(x-1) + f(1)$, mit $f'(1) = -1 + \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}$:

$t_2: y = -\frac{4}{9}(x-1) + \frac{4}{3} = -\frac{4}{9}x + \frac{16}{9}$.



(4) Von dem Trapez wissen wir, dass eine der Ecken auf der x-Achse bei x_t, die andere zwei Einheiten weiter rechts – bei x_t+2 – liegt. Die „Höhe" unseres Trapez ist damit fest: $h = 2$. Die beiden anderen Eckpunkte liegen auf der Funktion – bei $(x_t|f(x_t))$ und $(x_t+2|f(x_t+2))$. Der Flächeninhalt für ein Trapez hat immer die Form $J = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Wir können jetzt diesen ausrechnen, indem wir unser konkretes Trapez einsetzen:



$a = f(x_t)$, $b = f(x_t+2)$:

$$J = J(x_t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot [f(x_t) + f(x_t+2)].$$

J ist also von x_t abhängig und wir können das Maximum bestimmen via

$$J'(x_t) = -1 + \frac{5}{(x_t+2)^2} - 1 + \frac{5}{(x_t+4)^2} = 0$$

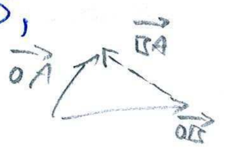
Von Hand können wir das nicht lösen. Bestimme deshalb mit Calc → maximum das Max. direkt von $Y_6 = Y_1(X) + Y_1(X+2) \Rightarrow X = -0,256$,

II 4/4 $J_{max} = 2,31$. ⇒ Eckpkt: $(-0,256|0)$, $(1,744|0)$, $(-0,256|1,39)$, $(1,744|0,920)$

Abschlussklausur Analytische Geometrie

① $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{OB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix}$

- Da die Leinwand rechteckig ist, sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und ~~…~~ parallel; also $\cancel{\vec{BD}}$ $\vec{BA} = \vec{CD}$, mit $\vec{BA} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB})$



$\Rightarrow \vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OC} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ D: (10 | 24 | 12)

- Parameterform: Da A in d. Eb. liegt, ist $\vec{OA}$ ein Stützv. und $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ Aufspannvektoren.

$\vec{AB} = -\vec{BA} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ E: $\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{x}$

~~Die Vektoren könnte man~~ Da es bei den Aufspannvektoren nur auf die Richtung ankommt, kann man sie kürzen:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Koordinaten-/Normalenform:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-(-12) \\ -10-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow 6x_1 + 12x_2 - 5x_3 = 288$

- Alternative für Koordinatenform: Matrix aus A, B, C mit GTR lösen:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 20 & 0 & 1 \\ -4 & 26 & 0 & 1 \\ -2 & 30 & 12 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{ref}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/48 \\ 0 & 1 & 0 & 1/24 \\ 0 & 0 & 1 & -5/288 \end{array}\right) \rightsquigarrow$ Matrix neu wählen mit i

$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 20 & 0 & 288 \\ -4 & 26 & 0 & 288 \\ -2 & 30 & 12 & 288 \end{array}\right) \overset{\text{ref}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow 6 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 = 288.$

- Abstand von Punkt P zu Ebene E via Hesse:

Mit $\|\vec{n}\| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 5^2} = \sqrt{205}$

$d(P,E) = \left| \frac{1}{\sqrt{205}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\underbrace{\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}}_{\vec{OP}} - \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{205}} (-102 - 228 - 80) \right| = \frac{410}{\sqrt{205}} \approx 28{,}64$

- Mittelpunkt der Leinwand ~~ist~~ ~~M/S~~: Halbe Leinwand ~~aus~~ von A aus nach rechts, halbe nach oben: $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{BC}}{2}$

$\vec{OM} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} / 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} / 2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 25 \\ 6 \end{pmatrix}$

Alternativ: Mittelpunkt liegt im Schnittpunkt der Diagonalen:

$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 25 \\ 6 \end{pmatrix}$

Strahl vom Scheinwerfer zum Mittelpunkt: $\vec{PM}$:

$\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP} = \begin{pmatrix}3\\25\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-9\\1\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\24\\-10\end{pmatrix}$

Es gilt $\vec{PM} = 2\cdot\vec{u} = 2\cdot\begin{pmatrix}6\\12\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{PM}$, da $\vec{u}$ parallel zu $\vec{PM}$ und senkrecht zu E ist, ist $\vec{PM}$ senkr. zu E.

Alternativ: $\vec{PM} \circ \vec{AB} = \begin{pmatrix}12\\24\\-10\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-12\\6\\0\end{pmatrix} = -144 + 144 = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{PM}$ ist senkrecht zu $\vec{AB}$, wobei $\vec{AB}$ in E liegt, also ist $\vec{PM}$ senkrecht zu E.

(2) • Für die Schattenbilder der Eckpunkte: bilde jew. die Gerade $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, ... und bestimme deren Schnittpkt. mit Ebene $x_3 = 0$: ($\overline{PA}$: $\vec{OA} + \vec{PA}\cdot t = \vec{x}$)

$\overline{PA}$: $\begin{pmatrix}8\\20\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-17\\-19\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow A' = A \Rightarrow \vec{OA'} = \begin{pmatrix}8\\20\\0\end{pmatrix}$

(Alternativ: A liegt schon in $x_3 = 0$-Ebene; es ist mit seinem Schatten identisch.)

B analog: $B' = B \Rightarrow \vec{OB'} = \begin{pmatrix}-4\\26\\0\end{pmatrix}$

$\overline{PC}$: $\begin{pmatrix}-2\\30\\12\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}7\\29\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 12 + t(-4) = 0 \Rightarrow t = 3$

(mit 3. Zeile best. man Wert für t, anschließend damit die Koordinaten des Schnittpkts, also des Schattenpunkts:)

$\vec{OC'} = \overline{PC}(t=3)$: $\begin{matrix}-2+21 = 19\\30+87 = 117\\12+(-12) = 0\end{matrix} \Rightarrow \vec{OC'} = \begin{pmatrix}19\\117\\0\end{pmatrix}$

$\overline{PD}$: $\begin{pmatrix}10\\24\\12\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}19\\23\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \vec{OD'} = \begin{pmatrix}10+57\\24+69\\12-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}67\\93\\0\end{pmatrix}$

• Für die Schattenfigur bestimmen wir die Kanten des Schattens:

$\vec{A'B'} = \begin{pmatrix}-12\\6\\0\end{pmatrix}$ $\vec{B'C'} = \begin{pmatrix}23\\91\\0\end{pmatrix}$ $\vec{C'D'} = \begin{pmatrix}48\\-24\\0\end{pmatrix}$ $\vec{D'A'} = \begin{pmatrix}-59\\-73\\0\end{pmatrix}$

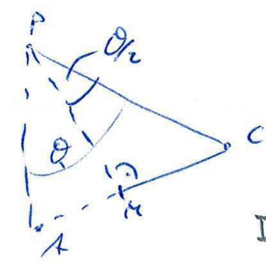
$\Rightarrow$ $\vec{A'B'}\cdot(-4) = \vec{C'D'}$ $\Rightarrow$ $\vec{A'B'}, \vec{C'D'}$ sind parallel, $\vec{B'C'}$ ist nicht parallel zu $\vec{D'A'}$

$\Rightarrow$ es handelt sich um ein Trapez!

Es ist $\|\vec{B'C'}\| = \|\vec{D'A'}\| = \sqrt{8810}$, die nicht-parallelen Kanten sind also gleich lang $\leadsto$ das Trapez ist symmetrisch.

• Da der Schirm rechteckig ist, ist der größte Abstand zwischen zwei Punkten seine Diagonale. Diese ist $\|\vec{AC}\| = \sqrt{10^2+10^2+12^2} = \sqrt{344}$

Der Öffnungswinkel ist dann nach Def. d. Sinus:



$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\|\vec{AC}\|}{2} \div \|\vec{PC}\| = \frac{\sqrt{344}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{906}} \approx 0{,}3081$

$\Rightarrow \theta \approx \underline{35{,}89°}$

Alternativ ist es der Winkel zw. $\vec{PA}$ und $\vec{PC}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{PA} \circ \vec{PC}}{\|\vec{PA}\| \cdot \|\vec{PC}\|} = \begin{pmatrix}-17\\-19\\16\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}7\\29\\-4\end{pmatrix} \Big/ \sqrt{17^2+19^2+16^2} \cdot \sqrt{7^2+29^2+4^2}$$

$$= -734 \Big/ \sqrt{906} \cdot \sqrt{906} \approx 0{,}8102 \Rightarrow \theta \approx 35{,}89°.$$

(weil diese beiden „Randstrahlen" die Punkte mit dem weitesten Abstand voneinander durchlaufen).

(3) Die kleinsten Abstände auf einem Rechteck sind Höhe bzw. Breite (je nach dem, was kleiner ist). Die Höhe ist $\|\vec{BC}\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\4\\12\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{164}$, die Breite $\|\vec{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix}12\\6\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{180}$.

$\Rightarrow$ der kleinste Abst. auf der Leinwand ist folglich $\sqrt{164}$.

Den Abstand $d(P'E)$ kann man über die Def. des Tangens erhalten: Die Verbindung von P' zum Punkt M muss weiterhin senkrecht zu E sein und ist damit die Ankathete des halben Öffnungswinkels, die Verbindung von P' zur Kante ist die Hypothenuse und der Abst. von M zur Kante (gemeint ist die obere Kante des Schirms) ist die Gegenkathete.

Es gilt also: $(\tilde{\theta} = 36°)$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{164}}{2} \div d(P'E) \Rightarrow d(P'E) = \frac{\sqrt{164}}{2\tan(18°)}$$

Für die Koord. von P' geht man also um $d(P'E)$ von M aus in Richtung $\vec{u}$; dazu normiert man $\vec{u}$ und multipliziert dies mit $d(P'E)$:

$$\vec{OP'} = \vec{OM} + d(P'E) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \begin{pmatrix}3\\25\\6\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{164}}{2\tan(18°)} \begin{pmatrix}6\\12\\-5\end{pmatrix} \Big/ \sqrt{205}$$

$$\approx \begin{pmatrix}-5{,}26\\8{,}48\\12{,}88\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{P'(-5{,}26 \mid 8{,}48 \mid 12{,}88)}$$

(Dabei musste man sich beim Rechnen vergegenwärtigen, ob P von M aus gesehen in Richtung $\vec{u}$ oder $-\vec{u}$ liegt. Hätte man dies nicht gemacht, hätte man P' auf der falschen Seite des Schirms erhalten, was aber auch richtig gewesen wäre; damit ergibt sich $\tilde{P}'(11{,}26 \mid 41{,}52 \mid -0{,}88)$.)