Elektrodynamik
Uebung 04

Michael Kopp

May 15, 2010

$\boxed{1}$

(a) $\partial_t \underline{B} = \partial_t \underline{E} = \underline{0}$; dies ist eine Voraussetzung der Elektrostatik

$\rho, \underline{j}$ dürfen nur im Endlichen definiert sein; ~~damit~~ dann können wir den Fundamentalsatz anwenden:

$$\text{rot } \underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = -\text{grad } \phi$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div } \underline{E}(r')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r'$$

$$\text{div } \underline{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B} = \text{rot } \underline{A}$$

$$\underline{A} = \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} \int \frac{\text{rot } \underline{B}(r')}{\|\underline{r} - \underline{r}'\|} d^3r'$$

(b)

(i) Punktladungen q_i an $\underline{R}_i$

$$\underline{j} = 0 \Rightarrow \underline{A} = \underline{0} \Rightarrow \underline{B} = 0.$$

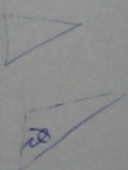
$$\phi(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_n q_n \delta(\underline{r} - \underline{R}_n) \frac{1}{\|\underline{r} - \underline{r}'\|} d^3r' = \sum_n \frac{q_n}{\|\underline{r} - \underline{R}_n\|}$$

$$\underline{E} = \cancel{\text{grad}} -\underline{\nabla} \sum_n \frac{q_n}{\|\underline{r} - \underline{R}_n\|} = + \sum_n \frac{q_n}{\|\underline{r} - \underline{R}_n\|^3} (\underline{r} - \underline{R}_n)$$

(ii) Flächenladung σ auf Kugel mit Rad. a.

$$\underline{j} = 0 \Rightarrow \underline{A} = \cancel{\underline{0}}\, 0 \Rightarrow \underline{B} = \underline{0}.$$

$$\phi(\underline{r}) = \int_0^\infty dr' \int d\Omega \frac{\sigma \cdot \delta(r' - a)}{\|\underline{r} - \underline{r}'\|} d_r$$



Die ~~...~~ $\underline{r}'$-Richtung wählen wir so, dass ~~...~~ die z'-Achse in $\underline{r}$-Richtung zeigt.

$$\|\underline{r} - \underline{r}'\|^2 = \langle \underline{r} - \underline{r}' | \underline{r} - \underline{r}' \rangle = r^2 + r'^2 - 2\langle r | r' \rangle$$
$$= r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\vartheta$$

$$\phi(\underline{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int dr'\, r'^2 \frac{\sigma\, \delta(r' - a)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\vartheta}}$$

$$= \quad '' \quad \frac{\sigma \cdot a^2}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2 r a \cos\vartheta}}$$

$\cos\vartheta = x \leadsto -\sin\vartheta\, d\vartheta = dx$

$$= \cancel{\phi}\, 2\pi \int_1^{-1} (-dx) \frac{\sigma a^2}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2 r a x}} = 2\pi \sigma a^2 \sqrt{r^2 + a^2 - 2 r a x}\, \frac{(2)}{-2ra} \Bigg|_1^{-1}$$

$\boxed{1}$ (b) (ii) – Forts –

$$= \frac{2\pi\sigma a}{r} \left[\sqrt{r^2+a^2+2ra} - \sqrt{r^2+a^2-2ra} \right] =$$

$$= \frac{2\pi\sigma a}{r} \left[|r+a| - |r-a| \right] = \frac{2\pi\sigma a}{r} \cdot \begin{cases} \frac{4\pi\sigma a^2}{r} , & r-a>0 \\ 4\pi\sigma a , & r-a<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi = 4\pi\sigma a^2 \frac{\underline{r}}{r^3}$ außen $r>a$

$\underline{E} = \underline{0}$ $r<a$

Interpretation: Innerhalb der Kugel $(r<a)$ ist $\underline{E} = \underline{0}$. Das ist konsistent mit S. v. Gauß: In der Kugel schließt man nie Ladung ein, weil sie sich außen auf der Außenseite der Kugel befindet.

(iii) Unendlich großer Plattenkondensator ~~Kugel~~

$$\phi(\underline{r}) = \int dx \int dy \int dz \frac{\sigma[\delta(z+a) - \delta(z-a)]}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} =$$

subst. $\tilde{x} = x-x'$ $d\tilde{x} = dx$, Grenzen analog

$$= \int dx \int dy \frac{\sigma}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{1/2}} + \int dx \int dy \frac{-\sigma}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}}$$

$$= \sigma \int_0^{+\infty} dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{r}_{\text{Jacobian}} \left[\frac{1}{(r^2+(z+a)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2+(z-a)^2)^{1/2}} \right]$$

$$= \sigma \cdot 2\pi \cdot \left[(r^2+(z+a)^2)^{1/2} - (r^2+(z-a)^2)^{1/2} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \sigma \cdot 2\pi \cdot \left[(+\infty - +\infty) - \left((z+a)^{2/2} - (z-a)^{2/2} \right) \right]$$

$$= -\sigma 2\pi \left(|z+a| - |z-a| \right) = \begin{cases} -4\pi\sigma a , & z-a>0 \\ -4\pi\sigma z , & z-a<0 \end{cases}$$

$\underline{E}(\underline{r}) = +4\pi\sigma\, \underline{e}_z$ für $\underline{r}$ im Kond.; $\underline{0}$ außerhalb

Interpret.: Im Kondensator ist das E-Feld konstant und senkrecht auf den Platten

$\boxed{1}$ (b)

(iv) Strom der auf z-Achse nach oben fließt

$\rho = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \underline{E} = 0$.

$$\underline{A} = \frac{1}{c} \iiint \frac{I \, \underline{e}_z \, \delta(x')\delta(y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \, dx'dy'dz'$$

$\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$

$$= \frac{1}{c} \int dz' \frac{I \, \underline{e}_z}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{1/2}}$$

$\tilde{z} = z - z'$

$d\tilde{z} = dz$

$$\Gamma = \frac{1}{c} 2 \int_0^{+\infty} dz' \frac{I \, \underline{e}_z}{(R^2 + z'^2)^{1/2}}$$

$x^2 + y^2 = R^2$

$z'^2 = R^2 \cdot \sinh^2\varphi$

$dz' = R \cosh\varphi \, d\varphi$

$$= \frac{2}{c} \int_0^{+\infty} R \cosh\varphi \, d\varphi \, \frac{I \, \underline{e}_z}{R \cosh\varphi} = \infty$$

L

Da $\underline{A} \propto \underline{e}_z$: x-Komp. von rot $\underline{A}$: $\partial_y \int \cdots$

$$B^x = \frac{1}{c} \int \partial_y \frac{I}{(x^2+y^2+z'^2)^{1/2}} \, dz' = -\frac{1}{c} I \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{1 \, y}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{2I}{c} \int_0^{+\infty} \sqrt{x^2+y^2} \cosh\varphi \, d\varphi \, \frac{y}{\left[(x^2+y^2)\cosh^2\varphi\right]^{3/2}}$$

$z' = \sqrt{x^2+y^2} \, \sinh\varphi$

$$= -\frac{2I}{c} (x^2+y^2)^{-1} y \int \frac{1}{\cosh^2\varphi} \, d\varphi$$

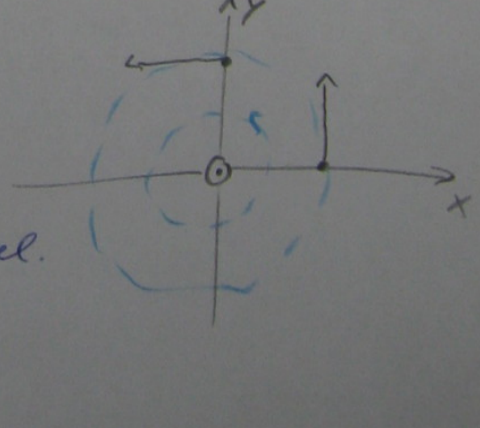
$\tanh\varphi \searrow \frac{1}{\cosh^2\varphi}$

$$= -\frac{2I}{c} (x^2+y^2)^{-1} y \cdot \tanh\varphi \Big|_0^{+\infty} = -\frac{2I}{c} \frac{y}{x^2+y^2}$$

Analog y-Komp. von rot $\underline{A}$: $-\partial_x \int \cdots$

$$B^y = + \frac{2I}{c} \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = \frac{2I}{c} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wirbelstrom mit Rechte-Hand-Regel.

$\boxed{b}$ $\rho(\underline{r}) = \sigma\,\delta(r-R)$ $\qquad \sigma = q/4\pi R^2$ Theo 4

$\underline{E}$ von 1 (b) (ii):

$$\underline{E} = \begin{cases} 4\pi\sigma a^2 \frac{\underline{r}}{r^3} & r>R \\ \underline{0} & r<R \end{cases}$$

$$\underline{j}\Big|_{\underline{r}'} = \rho\cdot\underline{v}\Big|_{\underline{r}'} = \sigma\,\delta(r'-R)\,(\underline{\omega}\times\underline{r}')$$

$$\underline{A}\Big|_{\underline{r}} = \frac{\sigma}{c}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta(r'-R)(\underline{\omega}\times\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|}\,d\underline{r}'$$

Da $\int d\underline{r}'$ lin, x. bilin., ~~daß~~ gilt

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\sigma}{c}\cdot\underline{\omega}\times\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta(r'-R)\,\underline{r}'}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|}\,d\underline{r}' \;\ominus$$

Mit Rotationssymmetrie(*): $\underline{e}_z' = \hat{\underline{r}}$; damit

(*) des Integrationsbereichs

$$\langle \underline{r}-\underline{r}' \,|\, \underline{r}-\underline{r}'\rangle = r^2 + r'^2 - 2rr'\cdot\cos\vartheta$$

$$\ominus\; \frac{\sigma}{c}\underline{\omega}\times\int_0^\infty dr'\int_0^\pi d\vartheta\; r'^2\sin\vartheta\,\frac{\delta(r'-R)\,\underline{r}'}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta)^{1/2}}\int_0^{2\pi}d\varphi \;\ominus \qquad \underline{r}' = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi\sin\vartheta \\ r'\sin\varphi\sin\vartheta \\ r'\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

$$\cancel{= 2\pi\frac{\sigma}{c}\underline{\omega}\times\int_0^\pi d\vartheta\,\frac{\sin\vartheta\; R^3}{(r^2+R^2-2rR\cos\vartheta)^{1/2}}}$$

Die x, y-Komponenten des Integrals sind verschwindet, weil hier $\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos\varphi = \int_0^{2\pi}d\varphi\,\sin\varphi = 0$ gilt!

$$\ominus\; 2\pi\frac{\sigma}{c}\underline{\omega}\times\underline{e}_{z'}\int_0^\pi d\vartheta\,\frac{\sin\vartheta\;R^3\cos\vartheta}{(r^2+R^2-2rR\cos\vartheta)^{1/2}} \;\ominus$$

Beachte: $\underline{e}_{z'} = \hat{\underline{r}} = \frac{\underline{r}}{r}$

Vgl für den Integral das Blatt „Nebenrechnung", σ s.o.

$$\ominus \begin{cases} \frac{q}{3cR}\,\underline{\omega}\times\underline{r} & r<R \quad \text{(in Kugel)} \\ \frac{q}{3c}R^2\,\underline{\omega}\times\frac{\underline{r}}{r^3} & r>R \quad \text{(außerhalb)} \end{cases}$$

~~[illegible]~~

Mit $\underline{\nabla}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) = \underline{\omega}\cdot(\underline{\nabla}\cdot\underline{r}) - (\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{r}$ gilt

- $r<R$ $\quad \mathrm{rot}\,\underline{A} = \frac{q}{3cR}\left(\underline{\omega}\cdot 3 - \omega_i\partial_i\,\underline{r}\right) = \frac{q}{3cR}\left(3\underline{\omega} - \omega_i\,\underline{e}_i\right) = \frac{2q}{3cR}\,\underline{\omega}$

 (dies gilt auch für den allg. Fall da $(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{r} = (\omega_x\partial_x + \dots)\,\underline{r} = \omega_x\underline{e}_x + \dots = \underline{\omega}$
 $\leadsto \underline{B} = 2q/3cR\cdot\underline{\omega}$)

- $r>R$:

$$\underline{\nabla}\cdot\frac{\underline{r}}{r^3} = \partial_x(x/r^3) + \partial_y(y/r^3) + \partial_z(z/r^3) = \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} + \dots$$

$$= 3\frac{1}{r^3} - 3\frac{1}{r^3} = 0$$

Nebenrechnung zu [7]

$$I = \int_0^{\pi} d\vartheta \; \frac{\sin\vartheta \, R^3 \cos\vartheta}{(R^2+r^2-2rR\cos\vartheta)^{1/2}} \qquad \cos\vartheta = u$$

$$-\sin\vartheta \, d\vartheta = du \;\rightarrow\; d\vartheta = \frac{-du}{\sin\vartheta}$$

$$= \int_1^{-1} -du \; \cancel{\frac{1}{\sin\vartheta}} \; \frac{\sin\vartheta \, R^3 u}{(R^2+r^2-2rRu)^{1/2}}$$

Partielle Integration;

$$= \underbrace{u \cdot R^3 \left(-\frac{1}{rR}\right)(R^2+r^2-2rRu)^{1/2} \Big|_{-1}^{1}}_{(1)} - \underbrace{\int_{-1}^{1} du \, R^3 \, (R^2+r^2-2Rru)^{1/2} \cdot \left(-\frac{1}{Rr}\right)}_{(2)}$$

(1)

$$-\frac{R^2}{r}\left\{ (\underbrace{R^2+r^2-2rR}_{(R-r)^2})^{1/2} + (\underbrace{R^2+r^2+2rR}_{(R+r)^2})^{1/2} \right\}$$

$$= -\frac{R^2}{r}\left\{ |R-r| + |R+r| \right\} = -\frac{R^2}{r} \cdot \begin{cases} +2r & , R-r<0 \\ +2R & , R-r>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\frac{R^3}{r} & , r<R \\ -2R^2 & , r>R \end{cases}$$

(2)

$$\frac{R^2}{r}\left[\left(-\frac{1}{2Rr}\right) \frac{2}{3} (R^2+r^2-2Rru)^{3/2} \right]_{-1}^{1} =$$

$$-\frac{R}{3r^2}\left\{ (\underbrace{R^2+r^2-2Rr}_{(R-r)^2})^{3/2} - (\underbrace{R^2+r^2+2Rr}_{(R+r)^2})^{3/2} \right\} =$$

$$-\frac{R}{3r^2}\left\{ |R-r|^3 - |R+r|^3 \right\} =$$

$$-\frac{R}{3r^2}\begin{cases} -6R^2r - 2r^3 & , R-r>0 \\ -6r^2R - 2R^3 & , R-r<0 \end{cases}$$

$$[R+r]^3 = R^3 + 3R^2r + 3Rr^2 + r^3$$

$$[-(R-r)]^3 = [r-R]^3 = r^3 - 3r^2R + 3rR^2 - R^3$$

$$[R-r]^3 = R^3 - 3R^2r + 3Rr^2 - r^3$$

$$\begin{cases} \frac{2R^3}{r} + \frac{2}{3}Rr & , R>r \\ 2R^2 + \frac{2}{3}\frac{R^4}{r^2} & , R<r \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} \frac{2}{3}Rr & , R>r \\ \frac{2}{3}\frac{R^4}{r^2} & , R<r \end{cases}$$

- Forts. -

$$(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\frac{\underline{r}}{r^3} = \omega_i \partial_i \frac{\underline{r}}{r^3} = \frac{\underline{\omega}}{r^3} - 3\,\frac{(\underline{\omega}\cdot\underline{r})\cdot\underline{r}}{r^5}$$

$$\partial_x \frac{\underline{r}}{r^3} = \frac{\underline{e}_x}{r^3} - 3\,\frac{\underline{r}x}{r^5}$$

Theo 4

$$\Rightarrow \text{rot}\,\underline{A} = \underline{B} = \frac{4}{3c}R^2\,\left(\frac{\underline{\omega}}{r^3} - \frac{3(\underline{\omega}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5}\right)$$

3)

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi}\left(\underline{E}^2 + \underline{B}^2\right)$$

$$T_{\alpha\beta}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta\right) - \delta_{\alpha\beta}\,u$$

Annahme: $\underline{j} = \underline{0}$

$$\underline{E} = \begin{cases} 4\pi\sigma\,\underline{e}_z & \text{innen} \\ \underline{0} & \text{außen}\end{cases}$$

Vgl. 1 (b) (iii)

$$\underline{B} = \underline{0}$$

$$u(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{16\pi^2\sigma^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2 & \text{innen} \\ 0 & \text{außen}\end{cases}$$

$$(T_{\alpha\beta})^{\text{innen}} = \begin{array}{c|ccc} \alpha\backslash\beta & x & y & z \\ \hline x & -2\pi\sigma^2 & 0 & 0 \\ y & 0 & -2\pi\sigma^2 & 0 \\ z & 0 & 0 & 2\pi\sigma^2 \end{array} \qquad (T_{\alpha\beta})^{\text{außen}} = \underline{0}$$

- Die Kraft in α-Richtung auf ein Oberflächenelement mit Normale $\underline{n}$ ist $(T_{\alpha\beta}\,n_\beta)_\alpha$; es ist $\underline{n} = \underline{e}_z = (\delta_{\beta z})_\beta$

$$(T_{\alpha\beta}\,n_\beta)_\alpha = (T_{\alpha\beta}\,\delta_{\beta z})_\alpha = (T_{\alpha z})_\alpha \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi\sigma^2 \end{pmatrix}$$

Bem: Dies entspricht der „Elementaren" Formel $F = \frac{1}{2}\cdot Q\cdot E$, weil $Q \mapsto \sigma$, $E \mapsto 4\pi\sigma$ $\leadsto$ $\frac{1}{2}QE \leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 4\pi\sigma\cdot\sigma = 2\pi\sigma^2$.