Ana (12)

Michael Kopp

1

(a) $w = y/x \Rightarrow y = w\cdot x \Rightarrow y' = w'x + w \Rightarrow$

$w'x + w = f(w) \Rightarrow w' = \frac{f(w)-w}{x} = f_1(x)/f_2(w)$

mit $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(w) = \frac{1}{f(w)-w}$

$F_2(w) = \int \frac{1}{f(\xi)-\xi}\,d\xi$, $F_1(x) = \int \frac{1}{\xi} d\xi = \ln|x| + C$

$\Rightarrow \quad y = F_2^{-1}(\ln|x| + C)$

(b) $xy' = y - 3x - xe^{-2y/x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} - e^{-2y/x} - 3$

Dies ist analog zu (a) mit $f(\frac{y}{x}) = f(w) = w - e^{-2w} - 3$.

Mit den Bez. aus (a) gilt:

$F_2 = \int \frac{1}{-e^{-2\xi}-3}\,d\xi = \int \frac{-e^{2\xi}}{1+3e^{2\xi}}\,d\xi \quad \circledast$

$u := e^{2\xi} \Rightarrow du/d\xi = 2e^{2\xi} \Rightarrow d\xi = \frac{1}{2}e^{-2\xi}du$

$\circledast \int \frac{-1/2}{1+3u}\,du = -\frac{1}{6}\ln|1+3u| =$

$-\frac{1}{6}\ln(1+3\cdot e^{2w})$ (Argument ist stets positiv da $e^x > 0$!)

$F_2^{-1}(r) = \ln[(e^{-6r}-1)/3]/2 = w$

$w = \ln[(e^{-6(\ln|x|+C)}-1)/3]/2$ $\quad (|x|^{-6} = x^{-6}\,!)$

$= \ln[(Dx^{-6}-1)/3]/2$ mit $D = e^{-6C}$

$y = x\cdot\ln[(Dx^{-6}-1)/3]/2$

2

(a) $y + y'' = 0 \Rightarrow$

$yy' + y''y' = 0$

$(y^2)' + (y'^2)' = 0$ (u. diesen Umformungen)

$y^2 + y'^2 = C$ (Integration)

$y' = \sqrt{C-y^2}$

Für Trennung d. Var.: $y' = f_1(x)/f_2(y)$ $\quad f_1(x) = 1$, $f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{C-y^2}}$

$F_2 = \int \frac{1}{\sqrt{C-y^2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{C}}\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2/C}}\,dy$ $\quad y/\sqrt{C} = u \quad du/dy = \frac{1}{\sqrt{C}}$

$= \frac{1}{\sqrt{C}}\int \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin u + D = \arcsin(\frac{y}{\sqrt{C}}) + D$

$$F_2^{-1}(r) = y = \sqrt{C}\,\sin(r - D)$$

$$F_1 = \int 1\,dx = x + E$$

$$y = \tilde{C}\,\sin(r - \tilde{D})$$

$\tilde{D} = E - D$, $\tilde{C} = \sqrt{C}$

Phase   Amplitude

(b) $y' = \operatorname{sign}(y)\sqrt{|y|}$

Da $\operatorname{sign}(y) = 1/\operatorname{sign}(y)$ folgt

$y' \cdot \operatorname{sign} y = \sqrt{|y|}$.

Wegen $|x|' = \operatorname{sign} x \cdot 1$ folgt mit Kettenregel:

$|y|' = \operatorname{sign} y \cdot y'$.

Substit. $z := |y|$. Die DGL hat dann die Form

$$z' = \sqrt{z} = f_1(x)/f_2(z) \qquad f_1(x) = 1,\; f_2(z) = 1/\sqrt{z}$$

$$F_2 = \int \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\,d\zeta = \int \zeta^{-1/2}\,d\zeta = 2z^{1/2} + C$$

$$F_1 = \int 1\,d\eta = x + D$$

$$F_2^{-1}(r) = \left(\frac{r-C}{2}\right)^2 = z$$

$$y = \pm\left(\frac{x-\tilde{C}}{2}\right)^2$$

(c) $y' = -\operatorname{sign} y\,\sqrt{|y|}$

$$|y|' = -\sqrt{|y|} \longmapsto z' = -\sqrt{z}$$

$$F_2 = \int -\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\,d\zeta = -2z^{1/2} + \hat{C} \Rightarrow z = \left(\frac{-r+\hat{C}}{2}\right)^2$$

$$y = \pm\left(\frac{-r+\hat{C}}{2}\right)^2$$

(d) $y' = \frac{-1}{1+x}\,y - (1+x)\,y^4$ Bernoullidgl mit $\alpha = 4$

$$z := y^{-3} \Leftrightarrow z^{-1/3} = y \Rightarrow \begin{array}{l} y' = -\frac{1}{3} z^{-4/3} z' \\ y^4 = z^{-4/3} \end{array}$$

$$-\frac{1}{3} z^{-4/3} z' = \frac{-1}{1+x} z^{-1/3} - (1+x) z^{-4/3} \qquad \Big|\cdot z^{4/3}$$

$$-\frac{1}{3} z' = \frac{-1}{1+x} z - (1+x)$$

$$z' = \frac{3}{1+x}\cdot z + (3+3x)$$

Best. Lösungen nach Satz 3: $\left(A = \frac{3}{1+x},\ B = 3+3x\right)$

$$\varphi(x) = e^{\int A(x)\,dx} = e^{3\int \frac{1}{1+x}\,dx} = e^{3\cdot \ln|1+x| (+c)} = \tilde{C}(1+x)^3$$

$$\frac{h(x)}{\varphi(x)} = \int B/\varphi\,dx = \int 3/(1+x)^2\,dx = -3\,\frac{1}{1+x}\,\frac{1}{\tilde{C}} + D$$

$$h(x) = -3(1+x)^2 + D^+(1+x)^3$$

(der hintere Teil ist die homogene Lösung, der vordere die Partikulär-Lösung ...)

$$\Rightarrow\ y = \left[-3(1+x)^2 + D^+(1+x)^3\right]^{-1/3}$$

$\boxed{3}$ Ich nehme an, dass f nicht konstant 0 ist.

Aus $f(x_0) = 0$ und $|f'(x_0)| \leq |f(x_0)| = 0$ folgt $|f'(x_0)| = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ d.h. $|f|$ hat an dieser Stelle ein Minimum (f kann Min/Max/Wendept. sein).

In einem Abst. h von x_0 ist das Max. von $|f|$ (für kleine h): $\max_{\xi \in (x_0, x_0+h)} |f(\xi)| = |f(x_0+h)|$ (Randmax).

Mit dem M. .. Diff'r. gilt wegen $f(x_0) = 0$:

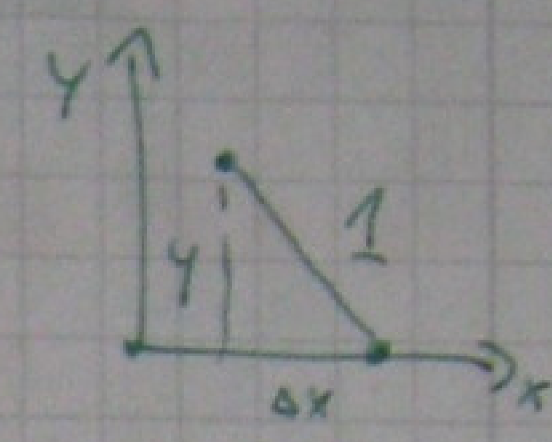
$$f(x_0+h) \leq c\,|f(x_0+h)| \cdot h.$$

Diese Ungl. gilt nur für $ch \geq 1$, also $h \geq \frac{1}{c}$, und damit nicht in nächster Umgebung von x_0. ↯

Damit muss der Punkt x_1 neben x_0 $f(x_1) = 0$ erfüllen usw. ...

[4] Die Hundeleine soll stets in Tangentialrichtung der Hundebewegung liegen und die Länge 1 haben.

Da Herrchen auf x-Achse läuft ist $\Delta y = y = y(x)$ und Δx kann man aus der Tangentensteigung bestimmen, weil $y' = \Delta y / \Delta x = y / \Delta x$ ist, also $\Delta x = y/y'$.



Als Bed. für die DGL findet man also mit Pythagoras:

$$y^2 + (y/y')^2 = 1.$$

In schönerer Form ist die DGL also:

$$y' = \sqrt{y^2/(1-y^2)}.$$

Wir trennen die Variablen, so gilt:

$$x = \int \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}}\, dy + C$$

Dies kann man durch Substitution lösen:

$$\int \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}}\, dy \underset{y = \sin\phi \quad dy = \cos\phi\, d\phi}{=} \int \sqrt{\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi}} \cos\phi\, d\phi = \int \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}\, d\phi$$

$$= \int \frac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{1}{\sin\phi} - \sin\phi\, d\phi.$$

Für das erste Integral gilt mit $u = \cos\phi$ ($du = -\sin\phi\, d\phi$):

$$\int \frac{1}{\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\phi}}\, d\phi = -\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{\sin\phi} = -\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\int \frac{1}{1-u^2}\, du = -\operatorname{atanh} u = -\operatorname{atanh}(\cos\phi)$$

$$= -\operatorname{atanh}\sqrt{1-\sin^2\phi} = -\operatorname{atanh}\sqrt{1-y^2}$$

$$\operatorname{atanh}'\theta = \frac{1}{\tanh'\theta} = \cosh^2\theta = \cosh^2(\operatorname{atanh} x) = \frac{\cosh^2\theta}{\cosh^2\theta - \sinh^2\theta} = \frac{1}{1-\tanh^2\theta} = \frac{1}{1-x^2}$$

Das hintere Integral ist einfacher:

$$-\int \sin\phi\, d\phi = \cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-y^2}$$

Dann gilt insgesamt:

$$x = -\operatorname{atanh}\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-y^2} + C \quad ,$$

dies muss man, nur mal auflösen.