1

Theo 6

Michael Kopp

$\varphi R = r \qquad \varphi = \frac{\dot{r}}{R}$

$x = r + a \qquad \dot{x} = \dot{r} + \dot{a}$

$T_1 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \frac{\dot{r}^2}{R^2} = \frac{1}{4} m \dot{r}^2$

$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + 2 \dot{r} \dot{a} + \dot{a}^2)$

$\cancel{= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 +}$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \dot{r} + m \dot{r} + m \dot{a}$

kanonischer Impuls bleibt erhalten!

$= \frac{3}{2} m \ddot{r} + m \ddot{a} = 0$

$\frac{3}{2} \cancel{m} \ddot{r} = - \cancel{m} \ddot{a}$

$\ddot{r} = - \frac{2}{3} \ddot{a} \qquad \int dt$

(a) $\dot{r} + \underbrace{\dot{r}(t_0)}_{0} = - \frac{2}{3} \dot{a} + \underbrace{\dot{a}(t_0)}_{0} \qquad \int dt$

$r + \underbrace{r(t_0)}_{0} = - \frac{2}{3} a + \underbrace{a(t_0)}_{0}$

$r(t) = - \frac{2}{3} a(t)$

$r(t_1) = - \frac{2}{3} a(t_0)$

(b) $a(t) = a_0 \cos \omega t$

$\ddot{a}(t) = - a_0 \omega^2 \cos \omega t$

$\ddot{r} = \frac{2}{3} a_0 \omega^2 \cos \omega t \qquad \int dt$

$\dot{r} + \underbrace{\dot{r}(t_0)}_{0} = \frac{2}{3} a_0 \omega \sin \omega t + \dot{a}(t_0) \qquad \int dt$

$r + r(t_0) = \frac{2}{3} a_0 \cos \omega t + \dot{a}(t_0) \cdot t + a(t_0)$

Amplitudenverhältnis: $\hat{a} : \hat{r} = \cancel{\frac{2}{3}} \ \frac{3}{2}$

Theo I (6)

$\boxed{2}$

$m_1: \quad r_1 = (x, 0) \qquad r_1(x,\varphi) = (x, 0)$

$m_2: \quad r_2 = (\tilde{x}, \tilde{y}) \qquad r_2(x,\varphi) = (x + l \cdot \sin\varphi, \; -l\cos\varphi)$

(Verallgem. Koord.: x, φ)

(a)

$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$

$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\underbrace{[\dot{x} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}]}_{\dot{\tilde{x}}}{}^2 + \underbrace{[l\sin\varphi\,\dot{\varphi}]}_{\dot{\tilde{y}}}{}^2 \right)$

$= \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\,l\cos\varphi\,\dot{\varphi} + l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 \right)$

$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_2\dot{x}\,l\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2$

$V = -m_2 g l \cos\varphi$

$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_2\dot{x}\,l\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 g l\cos\varphi$

(i) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\; \underbrace{(m_1+m_2)\dot{x}}_{p_x} + \underbrace{m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi}_{p_\varphi} = 0$

$\Rightarrow$: Impulse bleiben erhalten!

$(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0$

(ii) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(m_2\dot{x}l\cos\varphi + m_2 l^2\dot{\varphi}\right) + m_2\dot{x}l\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 g l\sin\varphi = 0$

$= m_2\ddot{x}l\cos\varphi - \cancel{m_2\dot{x}l\sin\varphi\,\dot{\varphi}} + m_2 l^2\ddot{\varphi} + \cancel{m_2\dot{x}l\dot{\varphi}\sin\varphi} + m_2 g l\sin\varphi = 0$

$= m_2 l\left(\ddot{x}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi\right) = 0$

(b) Da $\varphi \ll 1 \Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$; $\cos\varphi \approx 1$; $\dot{\varphi}^2 \approx 0$; $m_1 + m_2 := M$

(i) $M\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{-m_2 l\ddot{\varphi}}{M}$] einsetzen

(ii) $\ddot{x} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$

$\frac{-m_2 l\ddot{\varphi}}{M} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 = \frac{Ml - m_2 l}{M}\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$

$\Rightarrow$ Harmonische Schwingung: $\varphi(t) = \hat{\varphi}\sin(\omega t + \varphi_0)$; $\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi$

$\left(\frac{m_2 l - Ml}{M}\omega^2 + g\right)\varphi = 0 \qquad \omega^2 = \frac{gM}{Ml - m_2 l}$

Mit (ii) ergibt sich:

$$\ddot{x} = + \frac{m_2 l_2}{M}\omega^2 \hat{\varphi} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x} = \frac{m_2 l g \cancel{M}}{\cancel{M}(Ml - m_2 l)} \hat{\varphi} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$= g \cdot \frac{m_2}{m_1} \hat{\varphi} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{\omega} g \frac{m_2}{m_1} \hat{\varphi} \cos(\omega t + \varphi_0) + v_0$$

$$x = -\frac{1}{\omega^2} g \frac{m_2}{m_1} \hat{\varphi} \sin(\omega t + \varphi_0) + v_0 t + x_0$$

(3) Zylinderkoord. $\quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\varphi \\ r \cos\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$\underline{r}_1:$ $\quad \varphi = \omega t \qquad \varphi' = \omega t + \pi \qquad \dot\varphi = \omega = \dot\varphi'$

$\qquad r = a \sin\vartheta \qquad\qquad\qquad \dot r = a \cos\vartheta\, \dot\vartheta$

$\qquad z = a \cos\vartheta \qquad\qquad\qquad \dot z = -a \sin\vartheta\, \dot\vartheta$

$\underline{r}_2:$ $\quad \varphi = \omega t \qquad \dot\varphi = \omega$

$\qquad r = 0 \qquad\qquad \dot r = 0$

$\qquad z = 2a \cos\vartheta \qquad \dot z = -2a \sin\vartheta\, \dot\vartheta$

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_1 \cdot \left[\dot r^2 + (r\dot\varphi)^2 + \dot z^2\right]$$
$$= m_1 \cdot a^2 \left[\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, \omega^2\right]$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[4a^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot\vartheta^2\right]$$
$$= 2 m_2 a^2 \sin^2\vartheta\, \dot\vartheta^2$$

$$V = -m_2 g\, 2a \cos\vartheta - 2 m_1 g a \cos\vartheta = -2ag M \cos\vartheta$$

$$L = T_1 + T_2 - V =$$

(a₁) $\quad = a^2 m_1 \left[\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \cdot \omega^2\right] + 2 a^2 m_2 \sin^2\vartheta \cdot \dot\vartheta^2 + 2agM \cos\vartheta$

(b) Dabei ist das Eff. Pot. $U = a^2 m_1 \sin^2\vartheta\, \omega^2 \mp 2agM \cos\vartheta$

↪ Es hängt lediglich von der Position der Teilchen ab, nicht von deren Geschwindigkeit.

Wir setzen $E = T_1 + T_2 + V$ und erhalten die Ableitung $\frac{d}{dt} E$

$$\dot E = 2a^2 \dot\vartheta \ddot\vartheta \left[m_1 + 2m_2 \sin^2\vartheta\right] + \sin\vartheta \cos\vartheta \left[2\omega^2 a^2 m_1 + 4 a^2 m_2 \dot\vartheta^2\right]$$
$$+ 2agM \sin\vartheta\, \dot\vartheta \qquad \neq 0$$

(a₂) dieser Term verschwindet ist nicht $\Rightarrow$ $E \neq$ const.

(c) Eine stationäre Lösung findet man durch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \cancel{\ddot\vartheta \left[2a^2 m_1 + 4 m_2 a^2 \sin^2\vartheta\right] + \dots} \sin\vartheta \cos\vartheta \cdot$$
$$\left[4 m_2 a^2 \dot\vartheta^2 - a^2 m_1 2\omega^2\right] + 2agM \sin\vartheta$$

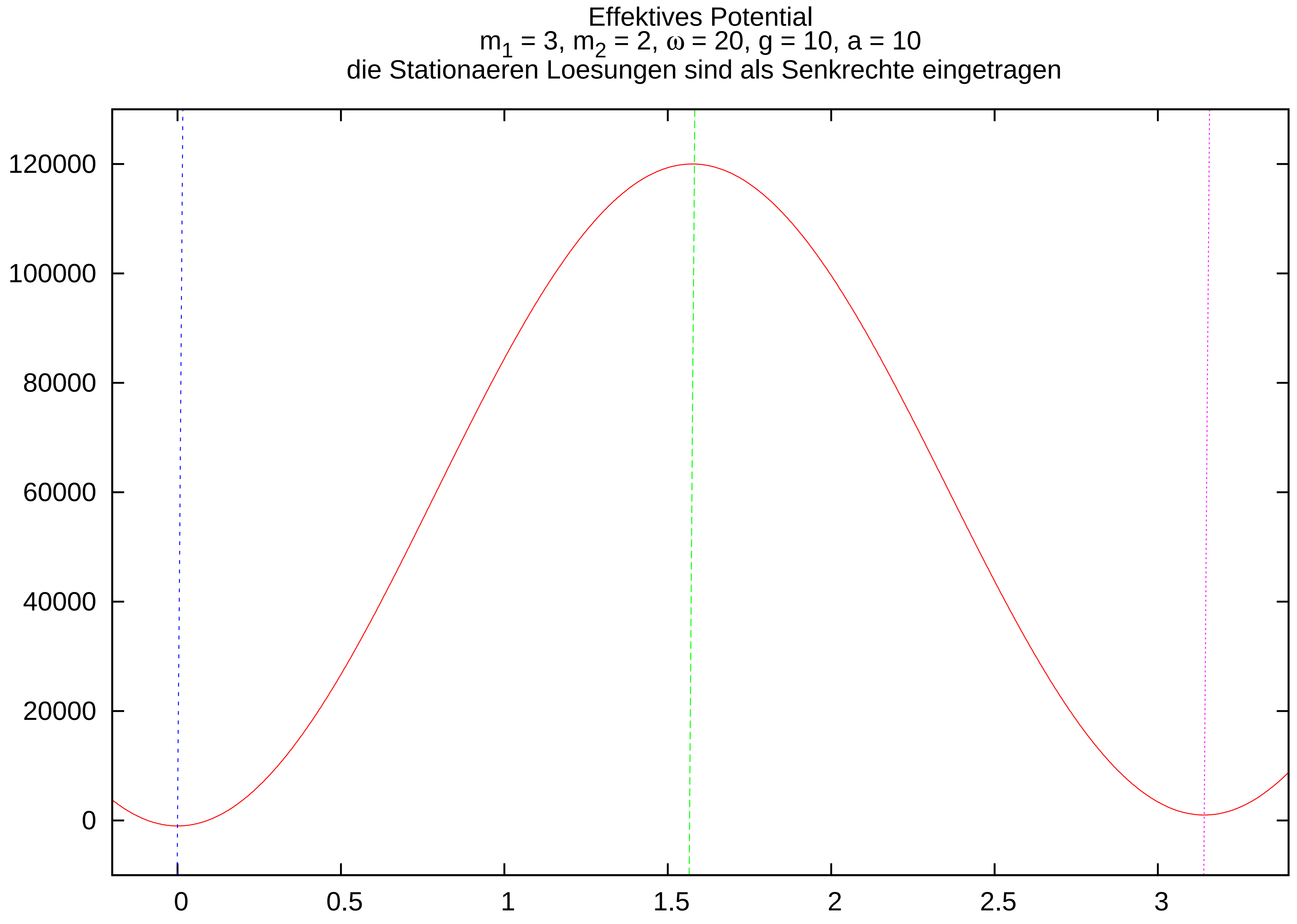
Mit der Bedingung $\vartheta = \text{const} \Rightarrow \dot\vartheta = 0,\ \ddot\vartheta = 0$ folgt

$\vartheta = \arcsin 0 = 0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \dots$

$\vartheta = \arccos \frac{gM}{a m_1 \omega^2}$

Für ~~...~~ die zweiten Lösungen hat ~~...~~ U kein Minimum $\Rightarrow$ instabil!

für $\vartheta = \arcsin 0$ ist die Lösung bei einem Energiemin. und damit stabil.


Effektives Potential
m1 = 3, m2 = 2, ω = 20, g = 10, a = 10
die Stationaeren Loesungen sind als Senkrechte eingetragen
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3