Mathematische Methoden der Physik
Übung 7, Aufgabe 3. (b)

Michael Kopp

2. Dezember 2008

$$\delta(h(x)) = \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|}\delta(x - x_i) \tag{1}$$

In (a) haben wir die Eigenschaft der δ-Funktion genutzt, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) = 1 \tag{2}$$

Man darf das Integral auseinanderziehen, wenn nur die *Peaks* von δ in den Integrationsgrenzen enthalten sind. Die Peaks liegen jeweils bei $\delta(0)$ und $\delta(0) = \delta(h(x))$ für $h(x_i) = 0$.

Teilt man so das Integral auf, erhält man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(h(x)) = \sum_i \int\limits_{x_i-a}^{x_i+a} dx\delta(h(x)) \tag{3}$$

Über die Substitution $y = h(x)$ und $\frac{dy}{dx} = h'(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{h'(x)}$ erhält man:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(h(x)) = \sum_i \int\limits_{h(x_i-a)}^{h(x_i+a)} dy \frac{1}{|h'(x)|}\delta(y) \tag{4}$$

Die Betragsstriche kommen daher, dass die δ-Funktion stehts positiv ist, die Ableitung $h'(x)$ jedoch auch negativ sein kann.

Für die δ-Funktion gilt ein weiterer Zusammenhang:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0) \tag{5}$$

Diese Eigenschaft kann man nun in Formel 4 verwenden: Das Integral unter der Summe kann jeweils ausgewertet werden, weil der Peak der δ-Funktion für $y_i = h(x_i) = 0 = (x_i - x_i)$ zustande kommt und die Integrationsgrenzen des Integrals sind gerade so gewählt, dass $h(x_i)$ enthalten ist. Somit ergibt sich:

$$\sum_i \int_{h(x_i-a)}^{h(x_i+a)} dy \frac{1}{|h'(x)|}\delta(y) = \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|}\delta(y_i) = \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|}\delta(x - x_i) \tag{6}$$

Das $(x - x_i)$ ergibt sich daraus, dass das Argument der δ-Funktion 0 sein muss. Dies ist allgemein gewährleistet, wenn man für $y = h(x_i)$ einsetzt, oder wenn man einfach $x - x_i$ rechnet – denn für Nullstellen von $h(x)$ liefert dieser Therm das selbe Ergebnis.