Analysis2 Blatt1 Version 1.0 (evtl. fehlerhaft)
Fehler bitte an marc.sartison@gmx.de melden, danke
0100010101
ABAABABAB

Marc Sartison
Matrnmr
Armin Krauß
MatrNmr
Denis Todaro
Matrnmr

10. Juni 2009

Aufgabe 1.A

a) $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} ak$ divergent.
Diese Aussage ist wahr:

Beweis:
$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow$ es existieren unendlich viele Glieder $a_k > 1 \Rightarrow \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge.
Somit ist das notwendige Kriterium der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}, a_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$, nicht erfüllt.

b) $\liminf\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist falsch.

Begründung:
Gegenbeispiel: betrachte $a_k = 1$ für k gerade, und $a_k = \frac{1}{2^k}$ für k ungerade.
$\Rightarrow \liminf\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \liminf\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1$

Außerdem gilt: $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ und $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ existiert nicht $\Rightarrow a_k$ ist keine Nullfolge. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Aufgabe 2.B.1.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{sin^2(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n sin^2(n)}_{a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$$

Wir wenden das Kriterium von Dirichlet an, welches besagt, dass die Reihe konvergiert, genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ und die m-te Partialsumme von a_n beschränkt ist, also $\sum_{n=1}^{m}(-1)^n sin^2(n)$ beschränkt.

Das erste Kriterium für b_n ist erfüllt. Bleibt nur noch zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{m}(-1)^n sin^2(n)$ beschränkt ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}(-1)^n sin^2(n) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{2}(1 - cos(2n)) \\
&\overset{!}{=} Re\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{2}\left(1 - e^{2ni}\right)\right) \\
&= Re\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left((-1)^n - \left(-e^{2ni}\right)\right) \\
&= Re\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{m}\underbrace{(-1)^n}_{:=c_n} - \sum_{n=1}^{m}\underbrace{\left(-e^{2ni}\right)}_{:=d_n}\right)
\end{aligned}$$

Nun schätzen wir den Absolutbetrag beider geometrischer reihen in der Klammer ab.

$$\left|\sum_{n=1}^{m} c_n\right| \leq 1$$

Für die komplette weitere Aufgabe definiere ich: $e^{2i} = Re\ e^{2i}$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{m} \left(-e^{2ni}\right)\right| &= \left|-e^{2i}\frac{1-\left(-e^{2i}\right)^m}{1+e^{2i}}\right| \\
&= \left|-e^{2i}\left(\frac{1}{1+e^{2i}} - \frac{\left(-e^{2i}\right)^m}{1+e^{2i}}\right)\right| \\
&= \left|-e^{2i}\right| \cdot \left|\frac{1}{1+e^{2i}} - \frac{\left(-e^{2i}\right)^m}{1+e^{2i}}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{1+e^{2i}}\right| + \left|\frac{e^{2im}}{1+e^{2i}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{1+e^{2i}}\right| + \left|e^{2im}\right| \cdot \left|\frac{1}{1+e^{2i}}\right| \\
&\leq 2\left|\frac{1}{1+e^{2i}}\right|
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist gültig, da $e^{2i} = Re\ e^{2i} \neq -1$
$c := \left|1+e^{2i}\right| \Rightarrow 2\left|\frac{1}{1+e^{2i}}\right| = \frac{2}{c}$
$\left|\sum_{n=1}^{m}(-1)^n sin^2(n)\right| \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{c}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{c}$
Also ist die m-te Partialsumme von b_n beschränkt. Somit ist das Kriterium von Dirichlet anwendbar und unsere Ausgangsreihe ist bedingt konvergent, da $|a_n b_n| \neq a_n b_n$.

b) Betrachte die Partialsummen der gegebenen Reihe.

$$S_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Setze k=2m

$$\begin{aligned}
S_{2m} &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \sum_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{j}+1} - \frac{1}{\sqrt{2j-1}-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \sum_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{2j-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{2j}+1}\right)
\end{aligned}$$

Betrache nun nur den Absolutbetrag der Summe:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{2j-1}-1}-\frac{1}{\sqrt{2j}+1}\right)\right| \\
&\geq \left|\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{2j-1}}-\frac{1}{\sqrt{2j}+1}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{\sqrt{2j-1}}{2j-1}-\frac{\sqrt{2j}-1}{2j-1}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{j=2}^{m}\frac{\sqrt{2j-1}-\sqrt{2j}+1}{2j-1}\right| \\
&\geq \left|\sum_{j=2}^{m}\frac{\sqrt{2j}}{2j-1}\right| \\
&\geq \left|\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{2j-1}\right|
\end{aligned}$$

Substituiere $2j-1=k \Rightarrow 2\cdot 2-1=k=3$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\left|\sum_{j=2}^{m}\frac{1}{2j-1}\right| \\
&= \underbrace{\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{k=3}^{m}\frac{1}{k}\right|}_{divergent} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \text{divergent}$$

c) Substituiere $y=x^p \Leftrightarrow x=\sqrt[p]{y}$. Daraus folgt: $dx=\frac{1}{p}\cdot y^{-\frac{p-1}{p}}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} cos\left(x^p\right)dx &= \int_1^{\infty} cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}dy \\
&= \underbrace{\int_1^{\frac{\pi}{2}} cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}dy}_{=A<\infty} + \sum_{k=1}^{\infty}?(-1)^k?\left(\int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}dy\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Fall 1: $p > 1$ **und** $y \geq 1$

$$\left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| \leq 1 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy \leq \pi$$

$$\left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| > \left|cos(y+\pi)\frac{(y+\pi)^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right|$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy \overset{>}{} \int_{\frac{\pi}{2}(2k+1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+3)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy \tag{2}$$

$$\left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| \xrightarrow{y\to\infty} 0 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{3}$$

Für (1) folgt nun:

$$(1) = \mathrm{A} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy$$

Da $\int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy$ eine monoton fallende Nullfolge ist, was aus (2) und (3) folgt, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy$ nach Dirichlet konvergent. Dies impliziert nun für $p > 1$ die Konvergenz von $\int_1^{\infty} cos\,(x^p)\,dx$.

Fall 2: $0 < p \leq 1$ **,** $y \geq 1$

$$\left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| > 0 \qquad \text{für } y \neq \pi \cdot l\ ,\ l \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy > q > 0 \qquad \forall k$$

Für (1) folgt nun Divergenz, da $\int_{\frac{\pi}{2}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2}(2k+1)} \left|cos(y)\frac{y^{-\frac{p-1}{p}}}{p}\right| dy$ keine Nullfolge ist. Also ist auch $\int_1^{\infty} cos\,(x^p)\,dx$, für $p \leq 1$ divergent.

Aufgabe 2.B.2

D'Alembertsches Quotientenkriterium

$$\begin{aligned} D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \cdot \frac{(x+a_1)\cdot \ldots \cdot (nx+a_n)}{(x+a_1)\cdot \ldots \cdot (nx+a_n)((n+1)x+a_{n+1})} \\ &= \frac{(n+1)x}{(n+1)x+a_{n+1}} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist nicht auswertbar, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)x}{(n+1)x+a_{n+1}} = 1$.

Raabsches Kriterium

$$\begin{aligned}
R_n =& n \cdot \left(\frac{(n+1)x + a_{n+1}}{(n+1)x} - 1 \right) \\
&= n \cdot \left(1 + \frac{a_{n+1}}{(n+1)x} - 1 \right) \\
&= \frac{n \cdot a_{n+1}}{(n+1)x} \\
&= \frac{n \cdot a_{n+1}}{nx + x} \\
&= \frac{n}{n} \cdot \frac{a_{n+1}}{x + \frac{x}{n}}
\end{aligned}$$

Geht man nun zum Grenzwert $n \to \infty$ über, so ergibt sich für $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{x+\frac{x}{n}} = \frac{a}{x}$. Das impliziert wenn $x < a$ Konvergenz der Reihe, $x > a$ Divergenz und über $x = a$ kann keine Aussage gemacht werden.

Aufgabe 3.A.1.

Bertand'sches Kriterium Das Kriterium von Bertrand folgt aus dem Kummer'schen Kriterium in dem wir $c_n = n \cdot \ln n$, für $n \geq 2$, setzen. Dies ist zulässig, da $\sum \frac{1}{n \ln n}$ divergent ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
K_n &= n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)(\ln(n+1)) \\
&= \underbrace{\ln n [\overbrace{n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)}^{=R_n (Raabe)} - 1]}_{:=B_n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \\
&= B_n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \\
&= \ln n (R_n - 1)
\end{aligned}$$

B_n habe einen endlichen oder unendlichen Grenzwert.
Es gilt: $B = \lim_{n\to\infty} B_n$

$$\begin{aligned}
K = \lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} \left(B_n - ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right) \\
= B - \ln(\mathrm{e}) \\
= B - 1
\end{aligned}$$

Nun muss man nur noch das Kummer'sche Kriterium benutzen.

$$\begin{aligned}
B > 1 \Rightarrow K > 0 \Rightarrow & \text{ Konvergenz} \\
B \leq 1 \Rightarrow K \leq 0 \Rightarrow & \text{ Divergenz.}
\end{aligned}$$

$\square$

Kriterium von Gauß Der Fall $\lambda > 1$ und $\lambda < 1$ führt zum D'Alembert'schen Quotientenkriterium.
$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$$

$\Rightarrow$ nach D'Alembert konvergent für $0 < \lambda < 1$. Für $\lambda > 1$ folgt Divergenz.
Der Fall $\lambda = 1$ führt zum Raab'schen Kriterium.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \\ \underbrace{n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)}_{R_n} &= \mu + \frac{\theta_n}{n} \\ R_n &= \mu + \frac{\theta_n}{n} \end{aligned}$$

Somit gilt für $\mu > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n > 1 \Rightarrow$ nach Raabe konvergent. Für $\mu < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n < 1 \Rightarrow$ folgt somit nach Raabe die Divergenz.
Der Fall $\mu = 1$ führt und zum Kriterium von Bertrand.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= 1 \\ n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= 1 + \frac{\theta_n}{n} \\ n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 &= \frac{\theta_n}{n} \\ \underbrace{\ln(n) \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]}_{B_n} &= \frac{\ln(n)}{n}\theta_n \end{aligned}$$

Da $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und θ_n beschränkt ist folgt somit $B_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Also die Divergenz nach Bertrand.
Das Gauß'sche Kriterium ist also auf schon bewiesene Kriterien zurückzuführen.

$\square$

Aufgabe 3.A.2

a) Verwendung des Gauss'schen Kriteriums

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n!n^{-p}}{(n+1)!(n+1)^{-p}} \cdot \frac{q(q+1)\cdot \ldots \cdot (q+n)(q+n+1)}{q(q+1)\cdot \ldots \cdot (q+n)} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^{-p}}{(n+1)^{-p}} \cdot (q+n+1) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^p}{n^p} \cdot (q+n+1) \\
&= \frac{(n+1)^{p-1}}{n^p} \cdot (q+n+1) \\
&= \frac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{p-1}}{n^p} \cdot (q+n+1) \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1} \cdot \frac{q+n+1}{n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{q+1}{n}+1\right)
\end{aligned}$$

Setze nun $x = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = (1+x)^{p-1} \cdot ((q+1)x+1)$$

Nun bilden wir die Taylorreihe des Quotienten $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ bis zur zweiten Ableitung an der Stelle $x_0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + (q+p)x + \left((p-1)(q+1) + \frac{1}{2}(p-1)(p-2)\right) x^2 + O(x^3)$$

Rücksubstitution: $x = \frac{1}{n}$
Somit folgt

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q+p}{n} + \frac{(p-1)(q+1) + \frac{1}{2}(p-1)(p-2)}{n^2}$$

$\sum a_n$ ist konvergent für $\lambda = 1$ und $\mu = p+q > 1$. Also folgt die Konvergenz für alle $p, q > 0$ für die gilt $p+q > 1$.

b) Wir wenden das Ermakoff'sche Kriterium an. Es gilt:$\sum_{n=3}^{\infty} a_n = \sum_{n=3}^{\infty} f(n)$
$f(n) = \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^p} = \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^p} = f(x)$ für $x = n \geq 3$. Zusätzlich erfüllt $f(x)$ noch alle Voraussetzungen des Kriteriums.
Somit folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} &= \frac{e^x}{e^x \cdot x (\ln x)^p} \cdot \frac{x \ln x (\ln\ln x)^p}{1} \\
&= \frac{(\ln\ln x)^p}{(\ln x)^{p-1}}
\end{aligned}$$

1) $p = 1$

$$\frac{\ln \ln x}{(\ln x)^0} = \ln \ln x > 1$$

für alle $x \geq x_0 \Rightarrow$ Divergenz.

2) $p > 1$

$$\begin{aligned}\frac{(\ln \ln x)^p}{(\ln x)^{p-1}} &\overset{x=e^y}{=} \frac{(\ln y)^p}{y^{p-1}} \\ &\overset{y=e^z}{=} \frac{z^p}{(e^z)^{p-1}} \xrightarrow{z\to\infty} 0\end{aligned}$$

wobei $z \to \infty \Leftrightarrow x \to \infty$.
Da der Quotient gegen 0 geht $\Rightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{x \geq x_0} \frac{f(e^x)e^x}{f(x)} \leq q < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=3}^{\infty} a_n = \sum_{n=3}^{\infty} f(n)$ konvergent.

3) $p < 1$ Unter Verwendung der selben Substitution wie in 1) und 2) folgt

$$\frac{(\ln \ln x)^p}{(\ln x)^{p-1}} = z^p \cdot \left(e^z\right)^{1-p}$$

Da $1 - p > 0 \Rightarrow z^p \cdot \left(e^z\right)^{1-p} \xrightarrow{z\to\infty} = \infty$. D.h. $\exists_{x_0 \in \mathbb{R}} \forall_{x \geq x_0} \frac{f(e^x)e^x}{f(x)} \geq 1 \Rightarrow$ Divergenz.

Aufgabe 4

4.1 Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} + cos(x) \\ f_1 &= \frac{sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{sin\left(\frac{1}{2}x + x\right)}{2sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{2sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot cos(x) - sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot cos(x) + sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= cos(x) + \frac{1}{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$f_n = \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Induktionsschluss:

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{1}{2} + cos(x) + cos(2x) + ... + cos(nx) + cos((n+1)x) \\
&= \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)} + cos((n+1)x) \\
&= \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2sin\left(\frac{x}{2}\right) + cos((n+1)x)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) + sin\left(\frac{2n+3}{2}x\right) - sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

dies folgt aus dem Additionstheorem $2sin(x) \cdot cos(x) = \frac{1}{2}s\left(in(x+y) + sin(x-y)\right)$

$$
= \frac{sin\left(\frac{2(n+1)+1}{2}x\right)}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \checkmark
$$

4.2 Durch Partielle Integration folgt für I_n:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi x \cdot f_n(x)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} sin(kx)\right]\Bigg|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} sin(kx)dx \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \left[\frac{1}{4}x^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} cos(kx)\right]\Bigg|_0^\pi \qquad (*)
\end{aligned}
$$

$$
\left[\frac{1}{n^2} cos(nx)\right]\Bigg|_0^\pi = \begin{cases} -\frac{2}{n^2}, & n \text{ ungerade}, \\ 0, & n \text{ gerade}. \end{cases}
$$

Daraus folgt für

$$
\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} cos(kx)\right]\Bigg|_0^\pi = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}
$$

Somit gilt für (*)

$$
\begin{aligned}
(*) &= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Berechnung von I_{2n-1}:

$$
\begin{aligned}
I_{2n-1} &= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k-1)^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} - \frac{1}{(2k)^2}}_{=0} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)^2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

4.3

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{\frac{x}{2}}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} && \text{für } x \in (0, \pi] \\
u'(x) &= \frac{1}{2} \frac{sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

Es gilt folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
sin(x) - xcos(x) &\leq sin(x) - sin(x)cos(x) \\
&= sin(x)(1 - cos(x)) \\
&= \frac{sin(x)}{1 + cos(x)} sin^2(x) \\
&\leq sin^2(x) && \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} cos\left(\frac{x}{2}\right) &\leq sin\left(\frac{x}{2}\right) - sin\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= \frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + cos\left(\frac{x}{2}\right)} sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\leq sin^2\left(\frac{x}{2}\right) && \text{für } x \in [0, \pi]
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2} \frac{sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{2} \frac{sin^2 \frac{x}{2}}{sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$ für $x \in [0, \pi]$

Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass $u'(x) > 0$ für $x \in (0, \pi]$.

$$
\begin{aligned}
u'(x) = 0 \Rightarrow sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} cos\left(\frac{x}{2}\right) &= 0 \\
\frac{x}{2} = \frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)} &= tan\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Betrachte das geschlossene Intervall $[0, \pi]$. Als Lösung für $sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ergibt sich $x = 0$. Bleibt nur noch zu zeigen, dass dies die einzige Lösung auf $[0, \pi]$ ist.

Dies kann mit der Wachstumsgeschwindigkeit, also der Ableitung von $tan\left(\frac{x}{2}\right)$ und $\frac{x}{2}$ gemacht werden.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{x}{2} &< \frac{d}{dx}tan\left(\frac{x}{2}\right)\\ \frac{1}{2} &< \frac{1}{2}\frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\ 1 &< \frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Diese strikte Ungleichung ist für $x \in (0, \pi]$ erfüllt, da $0 \leq cos^2\left(\frac{x}{2}\right) < 1$. Daraus folgt, dass $tan\left(\frac{x}{2}\right)$ schneller wächst als $\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ es existiert keine Nullstelle von $u'(x)$ auf $(0, \pi]$ $\Rightarrow u'(x) > 0$ für $x \in (0, \pi]$.

4.4

$$F := \int_0^{\pi} u'(x) \cdot cos\left(\frac{(4n-1)x}{2}\right) dx$$

$$I_{2n-1} = \frac{1}{4n-1}\left[2 + 2 \cdot F\right] \qquad (***)$$

Durch Partielle Integration folgt somit für F

$$\begin{aligned}F &= \left[u(x) \cdot cos\left(\frac{(4n-1)x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} u(x) \cdot \frac{(4n-1)x}{2} \cdot sin\left(\frac{(4n-1)x}{2}\right) dx\\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{cos\left(\frac{(4n-1)\pi}{2}\right)}_{=0} - 1 + \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \cdot \frac{4n-1}{2} \cdot \frac{sin\left(\frac{(4n-1)x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx\\ &= -1 + \frac{4n-1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{2n-1} cos(kx)dx\\ &= -1 + \frac{4n-1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \frac{x}{2}dx + \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} cos(kx)dx\\ &= -1 + \frac{4n-1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{2n-1}\right)\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Das Einsetzen von F in (***) ergibt nun offensichtlich I_{2n-1}.

4.5

$$\begin{aligned}I_{2n-1} &= \frac{1}{4n-1}\left(2 + 2\int_0^{\pi} \underbrace{u'(x)}_{0<u'(x)\leq\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{cos\left(\frac{(4n-1)x}{2}\right)}_{\leq 1}\right) dx\\ &= \frac{(4n-1)x}{2}\left(2 + 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot 1 dx\right)\\ &= \frac{(4n-1)x}{2} \cdot (2 + \pi) \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

$$I_{2n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2}$$
$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2}$$
$$\frac{\pi^2}{4} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$
$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

4.6

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k)^2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)^2} \\
\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\
\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{8} \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.1 Aus $\sum_{k,m\in\mathbb{N}} |a_{k,m}|$ konvergent folgt mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,m}| = b_m$ auch, dass $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergent ist.

Es sei E eine abzählbare Menge, bestehend aus den Punkten $x_0, x_1, x_2, ...$, und es gelte $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Man definiere

$$f_k(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{k,m} \qquad \text{(k=1,2,3,...) (1)}$$
$$f_k(x_n) = \sum_{m=1}^{n} a_{k,m} \qquad \text{(k,n=1,2,3,...) (2)}$$
$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \qquad (x \in E)$$

Aus (1),(2) und $\sum_{k,m} |a_{k,m}|$ konvergent folgt, dass jedes f_k stetig an x_0 ist. Wegen $|f_k(x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ für $x \in E$ folgt nun die gleichmäßige Konvergenz von $g(x)$, und somit die Stetigkeit von g an x_0.

Also gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{k,m} &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)\\ &= g(x_0)\\ &= \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} a_{k,m}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,m}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,m}\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.A.2

Zuerst führen wir die Summation über m aus.

$$\sum_{m,n}\frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \sum_{n}\frac{1}{4n-1}\cdot\underbrace{\sum_{m}\left(\frac{1}{(4n-1)^2}\right)^m}_{geometr.Reihe}$$

Berechnung der geometrischen reihe mit $q = \frac{1}{(4n-1)^2}$ mit $\sum_{m=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$.

$$\begin{aligned}\sum_{m}\left(\frac{1}{(4n-1)^2}\right)^m &= \frac{\frac{1}{(4n-1)^2}}{1-\frac{1}{(4n-1)^2}}\\ &= \frac{\frac{1}{(4n-1)^2}}{\frac{(4n-1)^2-1}{(4n-1)^2}}\\ &= \frac{1}{(4n-1)^2-1}\\ &= \frac{1}{(4n-2)4n}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{m,n}\frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(4n-1)(4n-2)}$.
Durch Partialbruchzerlegung ergibt sich:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(4n-1)(4n-2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}-\frac{2}{4n-1}+\frac{1}{4n-2}$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}-\frac{2}{4n-1}+\frac{1}{4n-2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n-2}-\frac{2}{4n-1}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+...\right)+\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{7}-\frac{2}{11}-...\right)\right]$$
$$=\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+...\right)+\left(-1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\mp...\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\mp...\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\mp...\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\arctan(1)-\ln(2)\right)$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\ln(2)$$

Beweis der Identitäten $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln(2)$:

Wir entwickeln $\arctan(x)$ im Punkt $x_0=0$ und $\ln(x)$ im Punkt $x_0=1$ in eine Taylorreihe:

Entwicklung von $\arctan(x)$

$$T(0,x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\pm...$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{k+1}$$
$$\Rightarrow\arctan(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Entwicklung von $\ln(x)$:

$$T(1,x)=x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3\mp...=\ln(x)$$
$$\Rightarrow\ln(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\mp...$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{k}$$

Aufgabe 6.B.

Entwicklung von $cos(x)$:

$$\begin{aligned} cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \mp ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}}} = \infty$$

Entwicklung von $arctan(x)$:

$$arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1} \qquad \text{wie schon aus Aufgabe 5.A.2. bekannt}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}} = 1$$

Aufgabe 7.1 **Satz:** Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, und hat sie die Summe A (im üblichen Sinn), so ist die Potenzreihe $p(x)$ für $0 < x < 1$ konvergent und ihre Summe strebt für $x \to 1 - 0$ gegen A.

Beweis: Zunächst ist klar, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht kleiner als 1 ist, sodass die Reihe tatsächlich für $0 < x < 1$ konvergiert. Ferner gilt die Identität

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

mit $A_k = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k$. Subtrahieren wir sie gliedweise von der offenbar gültigen Identität

$$A = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} A x^k$$

und setzen wir $A - A_k = \alpha_k$, so gelangen wir zu

$$A - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \tag{1}$$

Wegen $\alpha_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ lässt sich zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein N derart finden, dass $|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt, sobald $k > N$ ist.
Wir zerlegen die Summe der Reihe auf der rechten Seite von (1) in die beiden Summen

$$(1-x)\sum_{k=0}^{N} \alpha_k x^k \text{ und } (1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k x^k.$$

Die zweite lässt sich sofort und unabhängig von x abschätzen:

$$\left|(1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k x^k\right| \leq (1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty} |\alpha_k|\, x^k < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{\infty} x^k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die erste verschwindet für $x \to 1$, sodass für hinreichend nahe bei 1 liegende x

$$\left|(1-x)\sum_{k=0}^{N} \alpha_k x^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Also ist schließlich

$$\left|A - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right| < \varepsilon.$$

□

Aufgabe 7.A.2 Als Potenzreihe ergibt sich für $0 < x < 1$ und für $\theta \neq 0$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n cos(\theta n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x^2}{1-2x \cdot cos(\theta) + x^2}.$$

Für $x \to 1-0$ ergibt sich nun

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n cos(\theta n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x^2}{1-2x \cdot cos(\theta) + x^2} \longrightarrow 0.$$

Also ist die verallgemeinerte Summe der gegebenen trigonometrischen Reihe 0.
Da die Reihe nach PA konvergiert impliziert dies auch die Konvergenz nach Césaro.

Aufgabe 8.B.1. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k cos(kx)$ konvergiert gleichmäßig bzgl. x, da $\sum a_k$ absolut konvergiert und $cos(kx)$ beschränkt ist.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n cos(nx)) \cdot cos(kx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n cos(nx) cos(kx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\sum_{n=0}^{k-1} a_n \int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx + a_k \int_0^{2\pi} cos^2(kx)dx + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi} a_k \int_0^{2\pi} cos^2(kx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} a_k \int_1^{2} (1 + cos(2kx)) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} a_k \left(2\pi + \left[\frac{1}{2} sin(2kx)\right]_0^{2\pi}\right) \\
&= a_k \ \checkmark
\end{aligned}$$

Beweis, dass $\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx = 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx &= \underbrace{\frac{sin(nx)}{n}cos(kx)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{k}{n}\int_0^{2\pi} sin(nx)sin(kx)dx \\
&= \underbrace{\frac{k}{n}\frac{cos(nx)}{n}sin(kx)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{k^2}{n^2}\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx \\
\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx &= \frac{k^2}{n^2}\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx \\
0 &= \frac{k^2}{n^2}\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx - \int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} cos(nx)cos(kx)dx = 0$ weil $\frac{k^2}{n^2} \neq 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}a_k\int_0^{2\pi} cos^2(kx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}a_k\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 + cos(2kx)\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}a_k\int_0^{2\pi} 1 + cos(2kx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}a_k\left(2\pi + \left[\frac{1}{2}sin(2kx)\right]_0^{2\pi}\right) \\
&= a_k \quad \surd
\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_k cos(kx)dx$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k cos(kx)$ absolut konvergent.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_k cos(kx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_k cos(kx)dx\right] \\
&= a_0 + \frac{1}{2\pi}\cdot
\end{aligned}$$

$$underbracesum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot \frac{sin(kx)}{k}\right]_0^{2\pi}{}_{=0}$$

$$= a_0 \quad \surd$$

Aufgabe 8.B.2

$$\begin{aligned}
f^(2n)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^{2n} a_k \underbrace{cos(kx)(-1)^n}_{beschränkt} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} k^{2n} a_k \cdot c \\
&= c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k^{2n} a_k && \text{absolut konvergent}
\end{aligned}$$

$$b_k := (-1)^n k^{2n} a_k$$

$$\Rightarrow f^(2n)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot cos(kx)$$

Aufgabe 9.A

Taylorentwicklung von e^{-x^2} an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
T &= 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 \mp \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 T dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \cdot x^{2n+1} \Big|_0^1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.B Es gilt zu zeigen, dass $B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right)$.

$$\begin{aligned}
B(a,a) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{a-1} dx \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{a-1} dx
\end{aligned}$$

Nun substituieren wir mit $\frac{1}{2} - x = \frac{\sqrt{t}}{2} \Rightarrow dx = -\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B(a,a) &= 2\int_1^0 \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{4}\right)^{a-1} \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{4}\right)^{a-1} \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}dt && \text{(Aufgrund der Symmetrie)} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{4^{a-1}} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right)
\end{aligned}$$

Drücken wir nun auf beiden Seiten die Betafunktion durch die Gammafunktion aus, so folgt:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}$$

Durch Kürzen mit $\Gamma(a)$, Umstellen und Einsetzen der Identität $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ergibt sich somit der Legendre'sche Verdopplungssatz:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$$

$\square$