Anm

- Kann (+) durch den Satz über impl. Flt. in der Form 17.1.'10

$$f^{(n)}(x) = H(x, f(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$$

aufgelöst werden, dann heißt die DGL explizit.

- Oft werden die Symbole ~~x,y~~ $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ für die Abl. verwendet; die DGL ist dann

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (\ddagger)$$

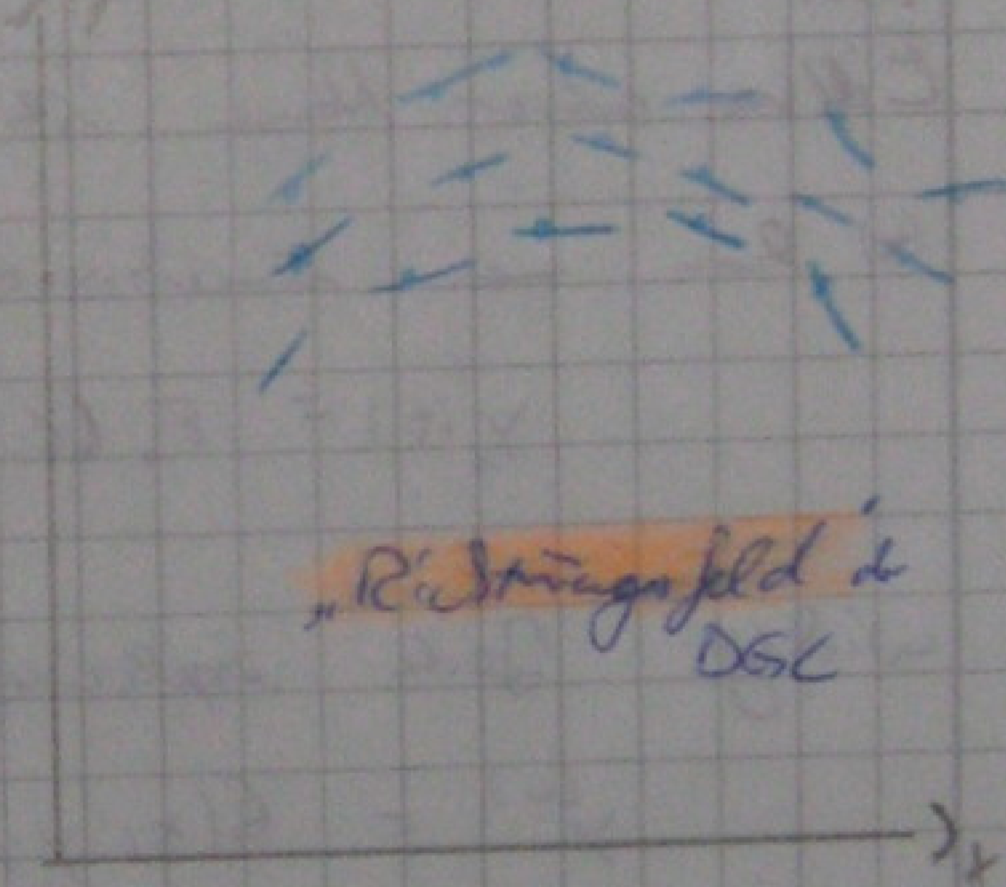
Lös. sind dann Funkt. f, die formal in $(\ddagger)$ eingez. werden können.

<u>Anschauung: Bilder für explizite DGLs 1. Ordnung:</u> 18.1.'10

$$y' = G(x,y), \quad G \text{ stetig}$$

An jedem Punkt (x,y) legt man eine Gerade mit Steigung $m = y' = G(x,y)$ an.

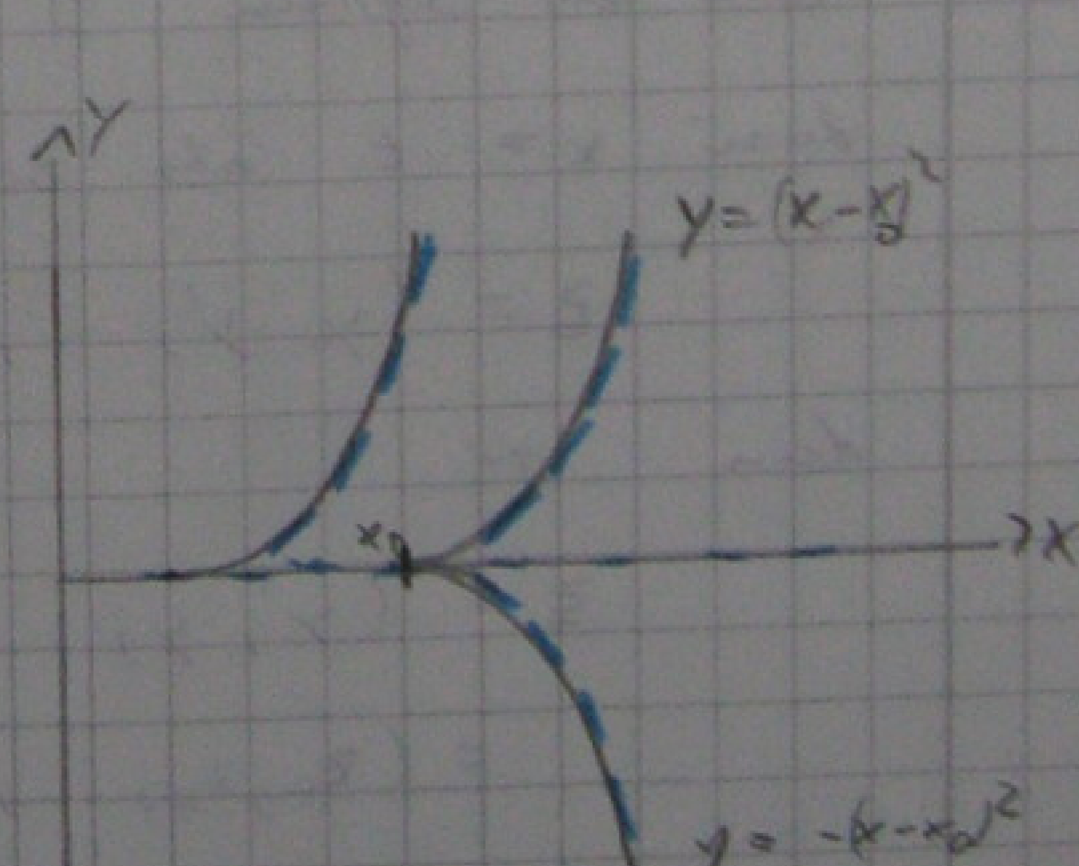
Eine Lösung der DGL soll die eingez. Geradenstücke als Tangenten haben.



<u>Beispiel:</u>

(1) $v = \mathbb{R}^2$

Hier sieht man: Die Lösung ist nicht klar durch einen Anfangswert gegeben. Startet man bei 0, kann man beliebig weit auf der x-Achse ~~l~~ laufen und dann in einen „Zweig" abbiegen.



18.1.'10 Gegeben ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ („Zeitintervall"). Sei

$$F: I \times U \to \mathbb{R}^n$$

(zeitlich variables Vektorfeld \{, zeitabh. VF). Ein dynamisches System ist gegeben durch

$$\underline{y}'(t) = F(t, \underline{y}). \qquad (*)$$

Eine Lösung („Lösungsgruppe") ist über dem Intervall $J \subseteq I$ ist ein diff'b. Weg

$$\varphi: J \to U$$

mit

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t)) \qquad \forall t \in J$$

Eine andere Name ist „Diff'gl-System 1. Ordnung"), dann

(*) kann man umschreiben:

$$y_1'(t) = F_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$$

wichtig: Jede explizite DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{n-1}) \qquad (1)$$

kann als System 1. Ordnung aufgefasst werden; fasse dazu $x =: t$ als Zeit auf, bilde

$$\underline{z} = (y, y', \ldots, y^{n-1}),$$

dann ist

$$\underline{z}' = (y', y'', \ldots, y^{n}) = (y', y'', \ldots, G(t, \underline{z}))$$
$$= (z_2, z_3, \ldots, G(t, \underline{z})) \qquad (2)$$

Satz 4:

Jede Lösung von (1) liefert über

$$\underline{z} = (y, y', \ldots, y^{n-1})$$

eine Lösung von

$\underline{z}' = (z_2, z_3, \ldots, z_n, G(t, \underline{z}))$.

Umgekehrt können aus den Lösungen des Systems alle Lösungen von (1) abgegeben werden.

18.1.'10

Es genügt also, Systeme 1. Ordnung zu betrachten!

§ 2 Einige explizit lösb. DGL

18. 1. '10

(a) Bernoulli - DGL

Gegeben: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ seien $A, B : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann heißt

$$y' = A(x) \cdot y + B(x) \cdot y^{\alpha} \qquad (\mathcal{JB})$$

Bernoulli - DGL.

Beachte: Dies ist explizite DGL mit $G(x,y) = Ay + By^{\alpha}$ def. auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. ($y$ hat positiv zu sein!)

Wir suchen alle Lös. von $(\mathcal{JB})$.

Wir nehmen an, φ ist Lösung mit $\varphi : I \to (0, \infty)$

$$\psi(x) := (\varphi(x))^{1-\alpha} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \psi'(x) = (1-\alpha)\,\varphi(x)^{-\alpha} \cdot \varphi'(x)$$

$$= (1-\alpha)\,\varphi^{-\alpha}\,(A\varphi + B\varphi^{\alpha})$$

$$= (1-\alpha)\,A\psi + (1-\alpha)\,B$$

Ist φ Lös. von $(\mathcal{JB})$, dann ist $\psi = \varphi^{1-\alpha}$ Lösung der Linearen DGL

$$y' = (1-\alpha)\,Ay + (1-\alpha)\,B. \qquad (L)$$

Umgekehrt: Ist ψ eine Lösung von (L) mit $\psi > 0$, dann ist $\varphi = \psi^{1/(1-\alpha)}$ Lös. von $(\mathcal{JB})$.

Da (L) nach Satz 1-3 explizit gelöst sind, sind alle Lös. von $(\mathcal{JB})$ durch $(*)$ gegeben.

Zusammenfassung:

$$z := y^{1-\alpha} : \quad y' = Ay + By^{\alpha} \iff z' = (1-\alpha)Az + (1-\alpha)B$$

(b) Trennung der Variablen:

Anzuwenden, wenn die DGL die Gestalt

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$$

hat; dabei seien $f_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : I_2 \to (0, \infty)$ stetig.

Angenommen, $y = y(x)$ ist Lösung.

$$f_1(x) = f_2(y(x)) \cdot y'(x)$$

Seien F_i Stammfunkt. zu f_i jew. auf I_i.

Da $f_2 > 0$ ist F_2 monoton st. $\Rightarrow$ F_2 hat Umkehrfkt. F_2^{-1}.

$$\int_{x_0}^{x} f_1(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f_2(y(t))\, y'(t)\,dt$$

$$F_1(x) - F_1(x_0) \qquad\qquad F_2(y(x)) - F_2(y(x_0))$$

Da $\frac{d}{dt} F_2(y(t)) = f_2(y(t)) \cdot y'(t)$

Da F nur auf eine Konstante bestimmt ist, wähle F_2 so, dass $F_2(y(x_0)) = 0$. $F_1(x_0)$ ist eine Integrationskonstante C.

$$\Rightarrow \quad y(x) = F_2^{-1}(F_1(x) + C)$$

So muss jede Lös. aussehen:

$$y' = f_1(x)/f_2(y) \quad \Rightarrow \quad y = F_2^{-1}(F_1(x) + C)$$

Beispiel:

(1) $y' = x^2/y$ $\qquad F_1(x) = \frac{1}{3}x^3, \; F_2(y) = \frac{1}{2}y^2$

$z = F_2(y)$ $\qquad \Rightarrow F_2^{-1}(z) = \sqrt{2z} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C}$ für $x > -\frac{3}{2}C$

18.1.'10

(c) Allg. Variablentransformation

Gegeben sei DGL $y' = F(x,y)$ mit stetigem F. Gegeben sei ferner $g: I_1^* \to I_1$, $h: I_2^* \to I_2$ mit stetigen, monotonen, diff'b. Fkt. g, h zwischen Interv. I_j^*, I_j, ~~die~~ die diese bijektiv ~~aufeinander~~ aufeinander abbilden;

$$dy - F(x,y)\,dx = 0 \Leftrightarrow dy = F(x,y)\,dx. \qquad (1)$$

Wir transformieren $x = g(u)$, $y = h(v)$:

$$dh(v) = F(g(u), h(v))\,dg(u)$$

$$h'(v)\,dv = F(g(u), h(v))\,g'(u)\,du$$

$$\frac{dv}{du} = F(g(u), h(v))\,\frac{g'(u)}{h'(u)} \qquad (2)$$

Satz: $(1) \Leftrightarrow (2)$

Sei φ eine Lös. von (1) über I_1. Dann ist $h^{-1} \circ \varphi \circ g$ eine Lösung von (2) über I_1^*.

Ist ψ eine Lösung von (2) über I_1^*. Dann ist $h \circ \psi \circ g^{-1}$ eine Lös. von (1) über I_1.

Beweis (Physiker): s. o.

Beweis (Mathematiker): Mit Kettenregel nachrechnen.