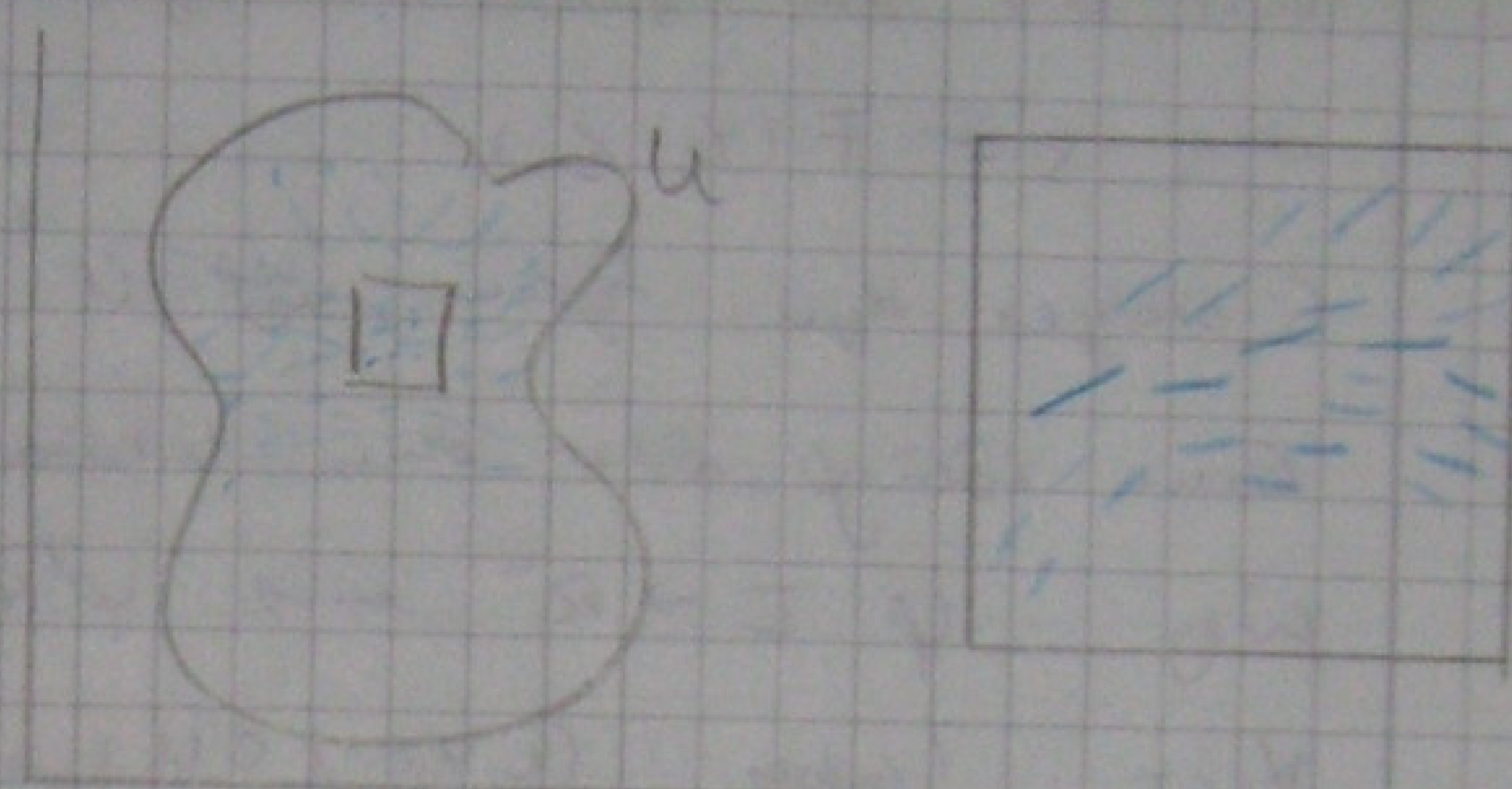
Ana

§3 Existenz- & Eindeutigkeitssatz

Gegeben sei eine DGL $y' = f(x,y)$ mit $f: U \to \mathbb{R}$ stetig auf $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. 20. 1. '10

Die DGL def. ein Richtungsfeld.

Wähle x_0 fest, $\delta > 0$.
Auf $[x_0, x_0+\delta]$ wähle Strecke durch (x_0,y_0) mit Steigung $f(x_0,y_0)$, dann weiter mit $x_0+\delta$.



Wir bekommen einen Streckenzug. Mit $\delta \mapsto \delta/2$ bekommen wir einen feineren Streckenzug, und damit eine Folge von Streckenzügen φ_n mit Feinheit $\delta_0/2^n$.

Ob diese φ_n zu einer stetigen Funktion konvergieren sagt:

Satz: Existenzsatz von Peano:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0,y_0) \in U$. Sei $f: U \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \ni x_0$ und eine diff'bare Fkt. $\varphi: I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ $\forall t \in I$.

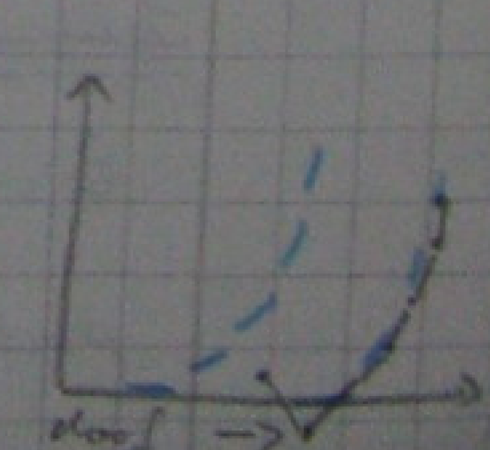
Beweisidee:

φ_n konvergiert auf einem kleinen Intervall um x_0 □

Bem: Peano gilt auch für dynamische Systeme.

Die Eindeutigkeit ist mit diesem Verfahren nicht gegeben (vgl. Richtungsfeld, hier kann man mit dem Streckenzug unter 0 kommen)

Außerdem findet man nur eine Lösung!



Ziel: Existenz- & Eindeutigkeitssatz für dynam. System:

20.1.'10 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ni (t, \underline{x})$, t: Zeit, $\underline{x}$: Ort

Stets in diesem Abschnitt: $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen,

$F: U \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Wir betr. das Dynamische System #

$$\underline{x}' = F(t, \underline{x})$$

(„stetiges dyn. System auf U")

Eine Lösung über einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist ein diff'b. Weg $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ $\forall t \in I$ (insbes. $(t, \varphi(t)) \in U$ $\forall t \in I$)

Statt von ‚Lösung' spricht man auch von „Integralkurve".

Def. (lokal) Lipschitz-stetig

Ein Dynamisches System (eigentlich nur die Funktion F) heißt Lipschitz-stetig, wenn es eine Zahl $L > 0$ gibt mit

$$\|F(t, \underline{x}) - F(t, \underline{y})\| \leq L \cdot \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

für alle $(t, \underline{x}) \in U$, $(t, \underline{y}) \in U$.

F heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn es zu allen $(t_0, \underline{x}_0) \in U$ eine Umgebung (offen) von $(t_0, \underline{x}_0)$ gibt, auf der F Lipschitz-stetig ist.

Bem: Man kann für $\|\cdot\|$ eine bel. Norm verwenden, am besten bei DGL → ist die Max-Norm mit

$$\|\underline{x}\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_i |x_i|$$

Lemma 1: Stetig partiell diff'bar ⇒ Lipschitz-stetig

Sei F dyn. Syst. auf U. Für jedes j sei F nach x_j partiell diff'bar und $\partial F / \partial x_j$ sei auf U stetig.

Dann ist F lokal Lipschitz-stetig. Ana

Bew.:

20. 1. '10

Mit ~~Mittelwertsatz~~ Hauptsatz

$$\|F(t,\underline{x}) - F(t,\underline{y})\| \le \|\underline{x}-\underline{y}\| \cdot \max \|\nabla F\|_2$$ □

Lemma 2: Lemma von Gronwall $g(t)\le A|\int_{t_0}^t g(s)ds| + B \Rightarrow g(t)\le B e^{A|t-t_0|}$

Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, $g: I\to[0,\infty[$ stetig. Es gebe $t_0\in I$ und $A,B\ge 0$ mit

$$g(t)\le A\cdot\left|\int_{t_0}^t g(s)\,ds\right| + B \qquad \forall_{t\in I}$$

Dann gilt:

$$g(t)\le B\cdot e^{A|t-t_0|}$$

Beweis:

Sei oBdA $t>t_0$: $\int_{t_0}^t g(s)\,ds\ge 0$

Z.: $g(t)\le A\cdot\int_{t_0}^t g(s)\,ds + B$

Fall ($g(t)=0$): trivial da $B\ge 0$

Fall (sonst): $g(t)>0$, also $g(t)>0$ in Umgeb. von t.

Def.: $G(t) := A\int_{t_0}^t g(s)\,ds + B$, $G'(t) = A\cdot g(t)$

Nach Voraussetzung: $G'(t) = A\cdot g(t) \le A\cdot\left(A\int_{t_0}^t g(s)\,ds + B\right) = A\cdot G(t)$

Damit: $\frac{G'(t)}{G(t)}\le A$ mit $(\ln G(t))' = \frac{G'(t)}{G(t)}$:

$$\int_{t_0}^t (\ln G(t))'\,ds = \ln G(t) - \ln G(t_0) \le A\cdot(t-t_0) = \int_{t_0}^t A\,ds$$

$$\Rightarrow \log G(t)\le A\cdot(t-t_0) + \underbrace{\ln G(t_0)}_{\ln B} \qquad |\exp(\cdot)$$

$$g(t) \underset{\text{nach Voraussetzung}}{\le} G(t) \le B\cdot \cancel{\ln}\, e^{A(t-t_0)}$$ □

Notation: Integration von Vektoren

Ist $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$ ein stetiger Weg, $I=[a,b]$ mit $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, dann def.

$$\int_a^b\varphi(t)\,dt = \left(\int_a^b\varphi_1(t)\,dt,\dots,\int_a^b\varphi_n(t)\,dt\right).$$

20.1.'10

Lemma 3: Standardabsch. für Vektorintegrale

$$\left\| \int_a^b \varphi(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|\varphi(t)\|\,dt$$

Bew.:

$$\left| \int_a^b \varphi_i(t)\,dt \right| \le \int_a^b |\varphi_i(t)|\,dt \le \int_a^b \|\varphi(t)\|\,dt$$ □

Gegeben sei ein dyn. Syst. $\underline{x}' = F(t, \underline{x})$ auf U, ferner $(t_0, x_0) \in U$. Gesucht ist ein offenes Intervall $I \ni t_0$ und eine Int'kurve $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ („Anfangswertproblem zum Startwert $(t_0, \underline{x}_0)$")

Hoffnung: φ ist eindeutig

Satz 2: Eindeutigkeitssatz

Sei F Lipschitz-stetig. Seien φ_1, φ_2 $I \to \mathbb{R}^n$ Integralkurven. Es gebe ein $t_0 \in I$ mit

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t)$$

Dann sind die beiden Integralkurven gleich.

Also: Durch Vorgabe des Anfangswerts ist die Lösung eindeutig.

Lemma 4: Dyn. System als Fixpunktproblem

Geg. sei $\underline{x}' = F(t, \underline{x})$.

Genau dann löst $\underline{\varphi}: I \to \mathbb{R}^n$ das AWP $\underline{x}_0' = F(t_0, \underline{x}_0)$, wenn

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t F(s, \underline{\varphi}(s))\,ds \quad \forall_{t \in I} \quad \text{und } \underline{\varphi} \text{ stetig} \quad (*)$$

Bew.:

Gilt $(*)$, dann ist $\underline{\varphi}$ diff'bar: $\underline{\varphi}' = F(t, \underline{\varphi}(t))$ $(\dagger)$

Umgekehrt: Gilt $(\dagger)$, kann man $\underline{\varphi}'$ integrieren:

$$\underbrace{\int_{t_0}^t \underline{\varphi}'(s)\,ds}_{= \underline{\varphi}(t) - \underline{\varphi}(t_0)} = \int_{t_0}^t F(s, \underline{\varphi}(s))\,ds$$ □

Ana

20.1.10

Der Sinn dahinter: liegen zwei Funktionen f, g in der Supremumsnorm nahe beieinander, dann sind ihre Integrale ähnlich. Die Ableitungen jedoch können stark verschieden sein. Deshalb arbeiten wir hier lieber mit Integralen in (*), als mit Abl. in $x' = F(t, x)$.

<u>Beweis</u> (Eindeutigkeitssatz):

I ist Intervall, $I' \subseteq I$ offen und abgeschl. in I, dann ist entw. $I' = I$ oder $I' = \emptyset$.

<u>Idee</u>: $I' = \{ t \mid \varphi_1(t) = \varphi_2(t) \} \subseteq I$. I' ist abgeschl., da

$\psi(t) := \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ stetig.

Für einen Häufungspunkt am Rand von I' muss ψ aus Stetigkeitsgründen verschwinden $\Rightarrow$ $\partial I' \subseteq I'$.

Gleichzeitig ist I' offen. Sei $t_0 \in I'$

$$\|\psi(t)\| = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \underset{\text{Lemma 4}}{=} \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_1(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_2(s))\,ds \right\|$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_1(s)) - F(s, \varphi_2(s))\,ds \right\| \underset{\text{Lemma 3}}{\le} \int_{t_0}^{t} \|F(s,\varphi_1(s)) - F(s,\varphi_2(s))\|\,ds$$

$$\underset{\text{wg. Lipschitz-...}}{\le} L \cdot \int_{t_0}^{t} \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|\,ds = L \cdot \int_{t_0}^{t} \|\psi(s)\|\,ds$$

4 Nach Lemma 2 mit $A = L$, $B = 0$: ~~KEA~~ $\|\psi(s)\| = 0$ $\forall s \in I$ $\Rightarrow$ $\psi(t) = 0\ \forall t$ $\Rightarrow$ $\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$. □

Iteratives Lösen eines Anfangswertproblems (AWP)

Aufgabe: Löse $x' = F(t, x)$ zum Aw. (t_0, x_0).

Idee: Zu einer Kurve ψ mit $\psi(t_0) = x_0$ def. neue Kurve $T\psi$ durch

$$T(\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \psi(s))\,ds$$

Es gilt $T(\psi)(t_0) = x_0$. Eine Lös. des AWP ist ges. $\Leftrightarrow T\psi = \psi$.

Satz von Pragmen-Lindelöf — Iteration konvergiert

Sei F ein lokal Lipschitz-stetiges dyn. System auf U, $(t_0, \underline{x}_0) \in U$.

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass auf $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ die durch $\varphi_0(t) = \underline{x}_0$ und $\varphi_k(t) = T^k(\varphi_0)(t) = T(\varphi_{k-1})(t)$ erklärte Folgen von Wegen gleichmäßig gegen <u>die</u> Lösung des AWP zum Startpunkt (t_0, x_0) konvergiert.