Elektrodynamik
Uebung 01

Michael Kopp

April 24, 2010

Theo 1

1)

(a) (i) $\int_L 2xyz^2\, d\underline{r} = \int_0^1 2\cdot u^2 \cdot 2u \cdot u^6 \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ 2 \\ 3u^2 \end{pmatrix} du =$

$\int_0^1 4u^9 \begin{pmatrix} 2u \\ 2 \\ 3u^2 \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} 8/11 \\ 8/10 \\ 12/12 \end{pmatrix}$

(ii) $\int_1^2 \begin{pmatrix} 6u^4 + 6u^2 \\ -5u^3 \\ +10u^2+10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ 4u \\ 3u^2 \end{pmatrix} du = \int_1^2 12u^5 + 12u^3 - 20u^4 + 30u^2 + 30u^4\, du$

$= 2u^6 + 2u^5 + 3u^4 + 10u^3 \Big|_1^2 = 320 - 17 = 303$

128
64
48
280
320

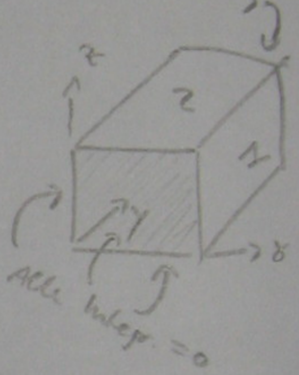
(iii) $\int_L \begin{pmatrix} xy \\ -z \\ x^2 \end{pmatrix} \times d\underline{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2u^3 \\ -u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2u \\ 2 \\ 3u^2 \end{pmatrix} du = \int_0^1 \begin{pmatrix} -3u^5 - 2u^4 \\ 2u^5 - 6u^5 \\ 4u^3 + 2u^4 \end{pmatrix} du$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} - 1 \\ 1 + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}9 \\ -2/3 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}$

(b) (i) $\int_{\partial V} xyz\, d\underline{f} = \int_0^a dz \int_0^a dy\, ayz + \int_0^a dy \int_0^a dx\, xya$
$\quad\; x=a \qquad\qquad\qquad z=a$

$+ \int_0^a dx \int_0^a dz\, xaz \underset{\uparrow \text{Symm.}}{=} 3\cdot a \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a^2$
$\quad y=a$

$= \frac{3}{4}a^5$



(ii) $\int_{\partial V} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot d\underline{f} \qquad V = \{ (x,y,z)^T \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \}$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \sin\vartheta \\ r\sin\varphi \sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \quad r = a = \text{const.},\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \vartheta \in [0, \pi]$

$d\underline{f} = -\underline{r}_{,\varphi}\, d\varphi \times \underline{r}_{,\vartheta}\, d\vartheta = -\begin{pmatrix} -r\sin\varphi \sin\vartheta \\ r\cos\varphi \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\, d\vartheta = \begin{pmatrix} +r^2\cos\varphi\sin^2\vartheta \\ +r^2\sin\varphi\sin^2\vartheta \\ +r^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\, d\vartheta$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r^2\cos^2\vartheta \end{pmatrix} \cdot r^2 \begin{pmatrix} +\cos\varphi\sin\vartheta \\ +\sin\varphi\sin\vartheta \\ +\cos\vartheta \end{pmatrix} \sin\vartheta =$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\, r\, \big(\underbrace{\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta}_{\sin^2\vartheta} + r\cos^3\vartheta\big) =$

$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^{\pi} d\vartheta\, r^3 \underbrace{\sin^3\vartheta}_{-[(-1)-1] + \frac{1}{3}[(-1)^3 - 1^3] = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}} + r^4 \underbrace{\sin\vartheta\cos^3\vartheta}_{-\frac{1}{4}((-1)^4 - 1^4) = 0} = \frac{8}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi a^3$

$\int \sin\vartheta\cos^3\vartheta\, d\vartheta = -\frac{1}{4}\cos^4\vartheta$

$\int \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \int \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta = \underbrace{\int \sin\vartheta\, d\vartheta}_{-\cos\vartheta} - \underbrace{\int \sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta}_{-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta}$

(iii) $\int_{\partial V} \underline{r} \times d\underline{f} \qquad V = \{ (x,y,z)^T \mid x^2+y^2 \leq a^2,\ |z| \leq b \}$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r = a = \text{const} \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ z \in [-b, b] \end{matrix} \qquad d\underline{f} = \underline{r}_{,\varphi} \times \underline{r}_{,z} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-b}^{b} dz \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-b}^{b} dz \begin{pmatrix} -z r\sin\varphi \\ -z r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$

(c) Theo 1

(i) $\int_{[0,a]^3} \underline{r}\, dV = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{1}{2} a^2 \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \cdot a^2$

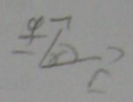
(ii) $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|\underline{r}\|^6 + a^6}\, dV$ $\quad \underline{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \|\underline{r}\| = r$ $\quad r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0,\pi]$

$\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \; \frac{r^2 \sin\vartheta}{r^6+a^6} = 2\pi \cdot 2 \int_0^\infty dr \; \frac{r^2}{r^6+a^6}$ $\qquad \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = -\cos\vartheta\big|_0^\pi = -(-1-1) = 2$

$(r^3 = \phi) \Rightarrow d\phi = 3r^2 dr \quad \Big\} = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty d\phi \; \frac{1}{\phi^2 + a^6}$

$q = \phi / a^3 \Rightarrow dq = \frac{1}{a^3} d\phi \quad \Big\} = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{a^3}\frac{1}{a^6} \int_0^\infty dq \; \frac{1}{q^2+1}$

$= \frac{4\pi}{3a^9} \operatorname{atan} q \big|_0^\infty = \frac{4\pi}{3a^9} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{3a^9}$,



(iii) $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\kappa\|\underline{r}\|} e^{-i\underline{q}\,\underline{r}}}{\|\underline{r}\|}\, dV$ $\quad \underline{r}$ wie oben. $\qquad \underline{q}\,\underline{r} = qr\cos\vartheta$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dr \; \frac{e^{-\kappa r}\, e^{-i\underline{q}\,\underline{r}}}{r}\, r^2 \sin\vartheta$

⇒ das Koordinatensystem kann stets so gedreht werden, dass seine z-Richtung nach $\hat{\underline{q}}$ weist;

$\underline{q}\,\underline{r} = qr\cos\vartheta$

$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dr \; \frac{e^{-\kappa r - iqr\cos\vartheta}}{\cancel{r}}\, r \sin\vartheta$

$= 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dr \sin\vartheta \; \underset{u}{r} \; \underset{v'}{e}^{-\underbrace{(\kappa + iq\cos\vartheta)}_{\rho} r}$ $\qquad$ part. Int.:

$= 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \left(\underbrace{-r \frac{1}{\rho} e^{-\rho r}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty dr \; \frac{1}{\rho}\, e^{-\rho r} \right) \sin\vartheta$

$= -2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \left(\frac{1}{\rho^2} e^{-\rho r} \right)\Big|_0^\infty = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \; \frac{\sin\vartheta}{(\kappa + iq\cos\vartheta)^2}$

$= -2\pi \frac{1}{iq} \frac{1}{\kappa + iq\cos\vartheta}\Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = -\frac{2\pi}{iq}\left(\frac{1}{\kappa - iq} - \frac{1}{\kappa + iq} \right)$ $\qquad \kappa, q \in \mathbb{R}$

$= -\frac{2\pi}{\cancel{iq}} \frac{\cancel{iq}(-2)}{\kappa^2 + q^2} = \frac{4\pi}{\kappa^2 + q^2}$

[2]

(a) $\hookrightarrow \frac{\infty}{\infty} \to$ L'Hôpital

(i') • $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{\pi n^2 x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ für $x \neq 0$

• $\lim_{n\to\infty} n \cdot e^0 = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$ für $x=0$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} n e^{-\pi n^2 x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} n e^{-\pi x^2 n^2} dx$ $\pi n^2 x^2 = \phi \rightsquigarrow x = \sqrt{\phi/\pi n^2}$, $2\pi n^2 x\,dx = d\phi$ $= 2 \cdot \int_0^{+\infty} n \cdot \frac{1}{2\pi n^2 x} e^{-\phi} d\phi$

$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \phi^{-1/2} e^{-\phi} d\phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(1/2) = 1$ ✓

(i'') • $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi((nx)^2+1)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi n 2 x^2} = 0$ für $x \neq 0$

• $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} = +\infty$ für $x = 0$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\pi((nx)^2+1)} dx \underset{nx=y}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{y^2+1} dy = 2/\pi \operatorname{atan} y \Big|_0^{+\infty}$ ✓

$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$.

(i''') • Skizze $\rightsquigarrow$ Ausdruck

• Für große n wird $\delta_n(x)$ spitzer und schmäler.

• Die Lebesgue-int'bare Funktion $f_n(x) = n e^{-\pi n^2 |x|}$ ist oberhalb zu $x^2 \cdot \delta_{1,n}(x) \rightsquigarrow x^2 \cdot \delta_{1,n}$ ist int'bar.
Die Funktion $f(x) = 2\bar{e}^{\pi|x|}$ ist obere Schranke und selbst integrierbar. $\Rightarrow$ Eigensch. (3) erfüllt.
Beweis (Schranke): $(x>0)$

$2\bar{e}^{\pi x} \geq x^2 n e^{-\pi x^2 n^2} \Leftrightarrow 2 \geq x^2 n e^{-\pi(n^2x^2+x)} =: r$

rechte Seite Ableiten liefert $-p \cdot r$ mit $p = 2\pi n^3 x^3 + \phi\pi n x^2 - 2nx$.
Die Abl. erst ist negativ für $t_> (\sqrt{\pi(16n^2+\pi)'}-\pi)/4\pi n^2$; dies geht für $n\to\infty$ gegen $x=0$. Innerhalb $(-x_0, x_0)$ ist f def. größer. □

• Für $n=1$ ist $g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{(x^2+1)} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+1/x^2}$ nicht integrierbar: für $x\to\infty$ geht $g(x) \to 1/\pi \neq 0$. Da g stets positiv ist, divergiert das Integral $\Rightarrow$ Eig. (3) nicht erfüllt.

(ii) Allg. Fall: $\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f \cdot \delta_n dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]\setminus(-s,s)} f \cdot \delta_n dx + \int_{-s}^{s} f \cdot \delta_n dx$

$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]\setminus(-s,s)} f \cdot \delta_n dx = \int f \cdot \lim_{n\to\infty} \delta_n dx = \int f \cdot 0\, dx = 0$ $(\to \int_a^b = 0$ für $0 \notin [a,b])$

Da f stetig $\min_{x\in(-s,s)} f(x) \underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_{-s}^{s} \delta_n dx} \leq \lim_{n\to\infty} \int_{-s}^{s} f \cdot \delta_n dx \leq \max_{x\in(-s,s)} f(x) \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_{-s}^{s} \delta_n dx}_{1}$

für $s\to 0$: $\min f \to f(0) \leftarrow \max f$ 1 Mit S. v. 2 Poliz. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-s}^{s} f \delta_n dx \longrightarrow f(0)$.

Theo 1

$\boxed{2}$ (b)

(i) $\int_a^b f(x)\,\theta'(x-y)\,dx = f(x)\cdot\theta(x-y)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,\theta(x-y)\,dx \ominus$

- Sei $y \in (a,b)$ oBdA $a<y<b$:

  $\ominus\ f(b) - 0 - \int_y^b f'(x)\,dx = f(b) - (f(b) - f(y)) = f(y)$ ✓

- Sei $y \notin [a,b]$ oBdA

  (+) $y<a<b$ $\ominus\ f(b) - f(a) - \int_a^b f'(x)\,dx = 0$ ✓

  (-) $a<b<y$ $\ominus\ 0 - 0 - \int_0^0 f'(x)\,dx = 0$ ✓

(ii) $\int_a^b \delta(h(x))\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} \delta(\phi)\,\frac{1}{h'(x)}\,d\phi = \sum_k^* \frac{1}{h'(x_k)}$

$h(x)=\phi \quad h'(x)dx = d\phi$

$\sum_k^*$ berücksichtigt nur die x_k mit $x_k \in (a,b)$.

$\int_a^b \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|h'(x_k)|}\,dx = \sum_k^* \frac{1}{|h'(x_k)|}$

δ wählt nur die x_k mit $x_k \in [a,b]$ aus!

(iii) $\int_a^b f(x)\cdot\delta'(x)\,dx = \underbrace{f(x)\cdot\delta(x)\Big|_a^b}_{0} - \int f'(x)\cdot\delta(x)\,dx = \begin{cases} -f'(0) \\ 0 \end{cases}$

$\overset{!}{=}$ ✓ $\int_b^b -f'(x)\cdot\delta(x)\,dx = \begin{cases} -f'(0) \\ 0 \end{cases}$

(iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k)\,e^{ikx}\,dk \quad , \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\,e^{-ikx}\,dx$

$\left.\begin{matrix} f(0) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \int f(x)\,\delta(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k)\,e^{ikx}\,dk \cdot \delta(x)\,dx \ominus$

(+) Integrationsreihenfolge vertauschen; e^{ikx} sym. in k, x

$\ominus\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint \hat{f}(k)\,e^{ikx}\,\delta(x)\,dx\,dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k)\,dk = $

$\frac{1}{2\pi} \int\int f(x)\,e^{-ikx}\,dx\,dk \overset{(+)}{=} \int f(x) \underbrace{\left(\int \frac{1}{2\pi} e^{-ikx}\,dk\right)}_{\Delta} dx$

Δ erfüllt die Eigensch. der δ-Funktion!

$\square$

$\boxed{2}$ (c)

Kugelkoord.:

$$\delta^3_k(\underline{r} - \underline{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin\vartheta_0} \cdot \delta(r - r_0)\,\delta(\vartheta - \vartheta_0)\,\delta(\varphi - \varphi_0)$$

dabei sind $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ die Koordinaten von $\underline{r}_0$. Die Darstellungen für die δ-„Funktionen" sind die selben wie bisher.

($\Leftarrow$ der Bruch $1/r_0^2 \sin\vartheta_0$ kürzt sich gerade mit dem Jacobian $J = r^2 \sin\vartheta$ an der Stelle $\underline{r}_0$)

Zylinderkoord.:

$$\delta^3_z(\underline{r} - \underline{r}_0) = \frac{1}{r_0}\,\delta(r - r_0)\,\delta(\varphi - \varphi_0)\,\delta(z - z_0)$$

Darauf kommt man über den Ansatz

$$\delta^3_k = \gamma \cdot \delta^3$$

wobei $\gamma = \gamma(r, \varphi, \vartheta)$ ist und zu best. ist.