Analysis IV
Uebung 04

Michael Kopp

May 11, 2010

Ana (4)

Michael Klopp

1 (a) Nach Def. des Arbeitsintegrals:

$$\int_\gamma f\,dz = \int_I f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt$$

Da $f,\gamma\in\mathbb{C}$ ist diese Multiplikation:

$$\int_\gamma f\,dz = \int_I (\mathrm{Re} f + i\,\mathrm{Im} f)\cdot(\mathrm{Re}\dot\gamma + i\,\mathrm{Im}\dot\gamma)\,dt =$$

$$\int_I \mathrm{Re} f\,\mathrm{Re}\dot\gamma - \mathrm{Im} f\,\mathrm{Im}\dot\gamma + i\,\mathrm{Im} f\,\mathrm{Re}\dot\gamma + i\,\mathrm{Re} f\,\mathrm{Im}\dot\gamma\;dt. \qquad (1)$$

Für das vektorielle Arbeitsintegral gilt nach Def.:

$$\int_\gamma \binom{u}{-v} d\underline{x} + i\int_\gamma\binom{v}{u}d\underline{x} = \int_I \left\langle \binom{u(\gamma(t))}{-v(\gamma(t))}, \dot\gamma(t)\right\rangle_{\mathbb{R}} + i\left\langle\binom{v(\gamma(t))}{u(\gamma(t))},\dot\gamma(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^2} dt =$$

$$\int_I \mathrm{Re} f\cdot\mathrm{Re}\dot\gamma - \mathrm{Im} f\,\mathrm{Im}\dot\gamma + i\left(\mathrm{Im} f\,\mathrm{Re}\dot\gamma + \mathrm{Re} f\,\mathrm{Im}\dot\gamma\right) dt. \qquad (2)$$

Die beiden Integrale (1) und (2) sind offensichtlich gleich. □

(b) Stokes: $\int_G d\omega = \int_{\partial G}\omega$, $\omega = u\,dx + v\,dy$.

$$\Rightarrow d\omega = u_{,y}\,dy\wedge dx + v_{,x}\,dx\wedge dy = -u_{,y}\,dx\wedge dy + v_{,x}\,dx\wedge dy$$

$$= (v_{,x} - u_{,y})\,df.$$

$$\int_\gamma\binom{u}{-v}d\underline{x} + i\int\binom{v}{u}d\underline{x} \underset{\text{Stokes}}{=} \int(-v_{,x}-u_{,y}) + i\,(u_{,x}-v_{,y})\,df \;\stackrel{*}{=}$$

Da f holomorph gelten die Cauchy-Riemann-Dgl; damit $-v_{,x}-u_{,y} = -(-u_{,y})-u_{,y} = 0$ und $u_{,x}-v_{,y} = u_{,x}-(u_{,x}) = 0$. Damit $\stackrel{*}{=}$ $\int 0\,df = 0$.

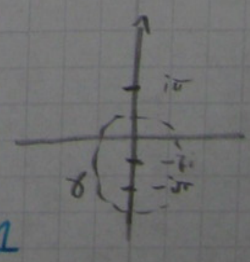
2 (a) $\oint \frac{\sin z}{z+i} = 2\pi i\,\sin(-i) = \pi\left(e^{1} - e^{-1}\right)$

(b) $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $a=0$ $\Rightarrow$

$$\oint\frac{e^z}{z^{n+1}}dz = 2\pi i\,\frac{\partial_z^n e^z}{n!}\Big|_{z=a} = 2\pi i\,\frac{e^0}{n!} = \frac{2\pi i}{n!}$$

(c) $\frac{1}{z^2+\pi^2} = \frac{C}{z+i\pi}+\frac{D}{z-i\pi} \rightsquigarrow 1 = C\cdot(z-i\pi)+D(z+i\pi)$

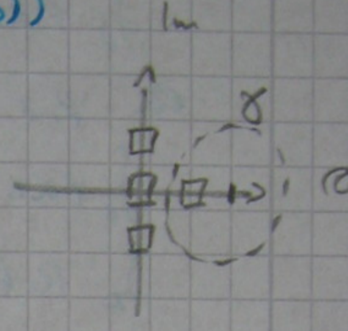
$\Rightarrow 1 = 2\pi i D$, $1 = -2\pi i C$



$$\oint\frac{1}{z^2+\pi^2}dz = \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{-1}{z+i\pi}dz}_{-n(\Gamma_1,-i\pi)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{z-i\pi}dz}_{n(\Gamma_1,i\pi)} = -1$$

(d) $\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = \frac{z^n}{(z-1)^n}$; $\oint \frac{z^n}{(z-1)^n} dz = 2\pi i \cdot \frac{\partial_z^{n-1} \; z^n}{(n-1)!}\Big|_{z=1} =$

$2\pi i \cdot \frac{n! \cdot 1}{(n-1)!} = 2\pi i \cdot n$ (~ vgl (b))



(e) $\oint \frac{\cos z / z(z^2+1)}{z-1} dz = 2\pi i \; \frac{\cos z / z(z^2+1)}{0!}\Big|_{z=1}$

$= \pi \cdot i \cdot \cos 1$.

Aufg. ④

Michael Wapp

$\boxed{3}$ Fall I: Das Maximum liegt auf dem Rand ... ok...

Fall II: Das Maximum liegt im Gebiet im Pkt. a. Da G offen ist, kann man um a eine Umgebung $U_R(a)$ legen. Hier ist $|f(a)|$ maximal, weil $U_R(a) \subseteq G$. Und vom Maximumsprinzip folgt dann, dass alle Punkte in $U_R(a)$ den Funktionswert wie $f(a)$ annehmen. Einen bel. Randpunkt von $U_R(a)$ nimmt man als nächsten Punkt: Um ihn muss f auch wieder den Wert $f(a)$ annehmen. Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, kann man $\bar{\Omega}$ mit endlich vielen dieser Umgebungen überdecken, die nach dem Maximumsprinzip den selben Funktionswert haben. Damit liegt auch in diesem Fall das Maximum auf dem Rand.

$\square$

$\boxed{4}$ (a) $R = 1/\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 1/\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+1/k} = 1/\frac{1}{4} = 4$

$\Rightarrow f: K_4(2i+4) \to \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ Potenzreihe für f verwendbar.

(b) Bilde n-te Ableitung von f:

$$\partial_z^n f\Big|_{z=4} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1} (z-z_0)^{k-n} \frac{k!}{(k-n)!}\Bigg|_{z=4} = \sum_{k'=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k'+n+1} (z-z_0)^{k'} \frac{(k'+n)!}{k'!}\Bigg|_{z}$$

Da $z_0 = 2i+4$ ist $z - z_0 = 4 - 2i - 4 = -2i$.

Berechnet man die ersten Abl. bei $z=4$ gilt:

$$\partial_z^0 f(4) = \sum_{k'=0}^{\infty} -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{k'} (-2i)^{k'} \cdot 1$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k \underset{\text{geom. Reihe}}{=} -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-i/2} = \frac{1}{2i-4}$$

$$\partial_z^1 f(4) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k+2} (-2i)^k \frac{(k+1)!}{k!} = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{\infty} \partial_{i/2} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1}$$

$\sum_{k=0}^{k=0} \left(\frac{i}{2}\right)^k$

$$= \frac{1}{16}\, \partial_{i/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{16}\, \partial_{i/2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{k} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{16}\, \partial_{i/2} \left(\frac{1}{1-i/2} - 1 \right) = \frac{1}{16}\, \partial_{i/2} \left(\frac{i/2}{1-i/2} \right) = \frac{1}{16}\, \frac{1}{(1-i/2)^2}$$

$$= + \frac{1}{12 - 16i}$$

Man kann erkennen, dass es sich hier um die Funktion $f(z) = \frac{1}{2i-z}$ handelt ($\rightarrow$ vgl. mit ∂_z^0; bzw. $\partial_z^1 \frac{1}{2i-z}\big|_{z=4} = \frac{1}{12-16i}$).

Der n-te Taylorkoeffizient $c_n = f^{(n)}(4)/n!$ ist dann:

$$\partial_z^1 f = \frac{1}{(2i-z)^2},\ \partial_z^2 f = 2 \cdot \frac{1}{(2i-z)^3},\ \dots,\ \partial_z^n f = n!\, \frac{1}{(2i-z)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{(2i-z)^{n+1}} .$$

Damit ist der Konvradius um $z=4$: $\left(|2i-4| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} \right)$

$$R = 1 / \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{20} .$$

$$f(4+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2i-4)^{n+1}} \cdot h^k \qquad |h| \le \sqrt{20}$$

(c) $$f(0+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^{n+1}} \cdot h^k \qquad |h| \le 2$$

Konv'rad.

$$R = 1 / \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k}} = 2$$

(d) f ist außerhalb von $z = 2i$ auf $\mathbb{C}$ analytisch da Komposition analytischer Funktionen:

$$f: \mathbb{C} \setminus \{2i\} \longrightarrow \mathbb{C}: z \longmapsto \frac{1}{2i-z} .$$