

Elektronikpraktikum

Versuch 3: Passive Netzwerke

Verfasser: Michael Kopp (Physik BSc), Paul Menczel (Physik BSc)
Assistent: ???

08. November 2010

2 Aufgabenstellung

In dem Versuch wird das Wechselstromverhalten eines Tiefpasses untersucht. Zuerst wird untersucht, für welche Frequenzbereiche die Multimeter mit ausreichend hoher Genauigkeit messen können. Dann wird an dem Tiefpass sowohl das Übertragungsverhalten, als auch das Integrier- und Differenzierverhalten bei hohen Frequenzen untersucht.

3 Grundlagen

3.1 Wechselspannungen

Um eine allgemeine Wechselspannung zu beschreiben, benötigt man grundsätzlich 4 Angaben: Die Frequenz, die Amplitude, die Phase und außerdem die genaue Form der Spannung als mathematische Funktion $U(t)$. Für physikalisch umsetzbare Spannungsformen kann man aber davon ausgehen, dass sie als Fourierreihe darstellbar sind, d.h. als Linearkombination von sinusförmigen Spannungsverläufen. Deshalb werden hier nur die Sinusspannungen genauer betrachtet.

Eine Sinusspannung mit Kreisfrequenz ω , Amplitude U_0 und Phase Φ lautet $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t - \Phi)$. Um mit den Wechselspannungen mathematisch besser umgehen zu können, bemerkt man dass man das auch schreiben kann als

$$U(t) = \Re \left(U_0 \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} \right) \quad (1)$$

wobei $\varphi = \Phi + \frac{\pi}{2}$. Die Operation \Re wird dabei oft weggelassen und implizit angenommen.

3.2 Zeigerdiagramme

Um so eine Größe zu visualisieren, kann man sogenannte Zeigerdiagramme verwenden. Dazu betrachtet man $U(t)$ zu einem festen Zeitpunkt $t = t_0$ und trägt die komplexe Zahl $U(t_0)$ in die komplexe Zahlenebene ein. Mit fortschreitender Zeit wird sich dieser Zeiger dann in der komplexen Ebene drehen. Die zu einem Zeitpunkt gemessene Spannung ist dabei immer der Realteil des komplexen Vektors. Dies ist in dem Zeigerdiagramm in Abbildung 1 veranschaulicht.

3.3 Komplexe Widerstände

Analog zu diesen komplexen Spannungen kann man auch den Strom als Realteil einer komplexen Größe beschreiben:

$$I(t) = \Re \left(I_0 \cdot e^{j(\omega t - \bar{\varphi})} \right) \quad (2)$$

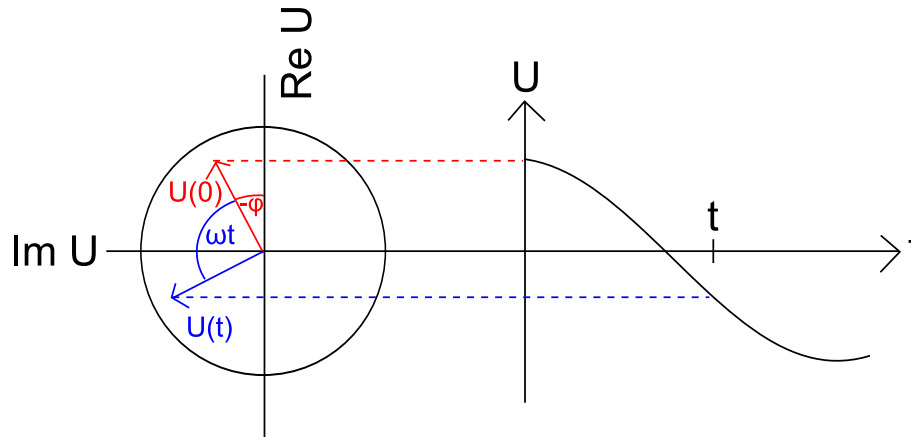


Abbildung 1: Zeigerdiagramm

Die Phase $\tilde{\varphi}$ des Stroms unterscheidet sich im Allgemeinen von der Phase der Spannung: Bei einer Kapazität hinkt die Spannung dem Strom beispielsweise $\frac{\pi}{2}$ nach. Der Quotient

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{j(\tilde{\varphi} - \varphi)} \quad (3)$$

ist also im allgemeinen tatsächlich eine komplexe Größe, sie heißt komplexer Widerstand. Bei einer Kapazität C bzw einer Induktivität L gilt zum Beispiel:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (4)$$

$$Z_L = j\omega L \quad (5)$$

An einem ohmschen Widerstand R gibt es dagegen keine Phasenverschiebung, es ist einfach $Z = R \in \mathbb{R}$. Mit den komplexen Widerständen kann man dann genauso rechnen, wie mit normalen reellen Widerständen.

Den komplexen Widerstand Z kann man nun natürlich auch wieder ins Zeigerdiagramm eintragen. Um im Zeigerdiagramm Z und U zu multiplizieren, werden die Winkel der Zeiger addiert, und die Längen multipliziert. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 2 demonstriert. Mit fortschreitender

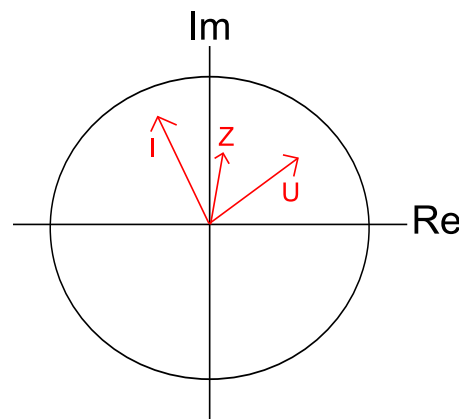


Abbildung 2: Komplexer Widerstand

Zeit würden sich die Zeiger I und U synchron weiterdrehen. Zu beachten ist, dass die Längen der Zeiger hier keine spezifische Bedeutung haben, da die Skalierung der Achsen für jede Größe anders gewählt werden muss.

3.4 Hoch- und Tiefpass

Die komplexen Widerstände von Kapazität und Induktivität hängen von der Frequenz ω ab. Durch geschickte Kombination verschiedener Bauteile kann man nun Schaltungen konstruieren, bei denen die Amplitude der Ausgangsspannung von der Frequenz abhängt. Eine Schaltung, die langsame Frequenzen unterdrückt, heißt Hochpass, eine Schaltung, die schnelle Frequenzen unterdrückt dagegen Tiefpass. Ein Tiefpass lässt sich zum Beispiel mit der Schaltung in Abbildung 3 realisieren.

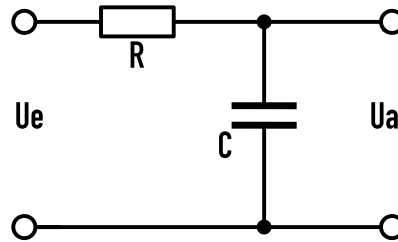


Abbildung 3: Tiefpass

Es gilt:¹

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC} . \quad (6)$$

Dies ist eine komplexe Zahl, die man in die Darstellung $z = re^{j\varphi}$ bringen kann. Den Betrag r nennt man auch die *Übertragungsfunktion*. Für Betrag und Phase erhält man:

$$r = \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \text{ und } \varphi = \arctan(-\omega RC) . \quad (7)$$

Diese beiden Funktionen wurden in Abb. 4 geplottet. Hohe Frequenzen werden von der Schaltung offensichtlich unterdrückt. Einen Hochpass erhält man, wenn man R und C in der Schaltung vertauscht.

Die Größe $\left| \frac{U_a}{U_e} \right|$ misst man üblicherweise in Dezibel. Der Dezibelwert des Pegelunterschieds ist:

$$20 \cdot \log_{10} \left| \frac{U_a}{U_e} \right| \quad (8)$$

3.5 Integrierende bzw. differenzierende Eigenschaften

Im Tiefpass nach Abb. 3 addieren sich die Spannungen an Widerstand U_R und am Kondensator $U_C = U_a$ auf zur gesamten angelegten Spannung U_e . Der Strom I im System ist auch OHM gegeben durch

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_e - U_a}{R} ,$$

gleichzeitig gilt nach Definition der Kapazität C :

$$Q = C U_C = C U_a \Rightarrow \dot{Q} = I = C \dot{U}_a .$$

Kombiniert man dies, erhält man eine inhomogene Differenzialgleichung

$$U_e = RC \dot{U}_a + U_a , \quad (9)$$

deren Lösung sich für die Zeiten, in denen sich die angelegte Spannung nicht ändert, einfach angeben lässt²:

$$U_a = U_e + D e^{-\frac{t}{RC}} , \quad (10)$$

¹Dies ist nichts anderes als Rechnung nach den bekannten Gesetzen von OHM und KIRCHHOFF, nur mit dem Komplexen Widerstand $R_C = 1/j\omega C$.

²Wir betrachten eine Rechteckspannung, das gilt also überall außer dort, wo die Spannung umgepolt wird

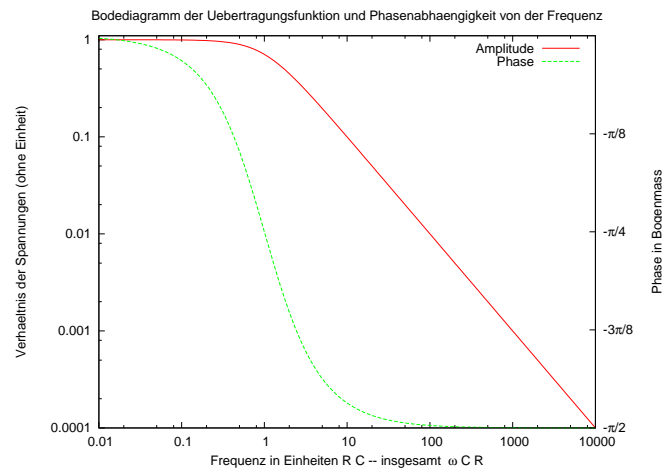


Abbildung 4: Theoriekurven nach Gl. (7)

Die Konstante D ist dabei unbestimmt. Wir erwarten also i.A. dass wenn eine Spannung U_e angelegt wird, die Ausgangsspannung auf einen bestimmten Wert $U_e + D$ springt und dann exponentiell abfällt auf der Zeitskala die durch $\tau \sim RC$ gegeben ist.

Um zu bestimmen, wie sich die Spannungen bei der Änderung von U_e verhalten, erinnern wir uns daran dass wir für große Frequenzen aus Kap. 3.4 wissen, dass U_a vernachlässigbar klein sein wird; dadurch kann man die Differenzialgleichung (9) vereinfachen zu:

$$U_e \approx RC \dot{U}_a \Rightarrow U_a \propto \int U_e dt.$$

Deshalb spricht man hier von einem integrierenden Verhalten des Tiefpasses.

Greift man die Ausgangsspannung dagegen am Widerstand ab ($U_a = U_R$), so führt $I = \frac{U_R}{R} = C \dot{U}_C$ auf die Differenzialgleichung

$$U_a = RC \dot{U}_C$$

wobei man jetzt für kleine Frequenzen sagen darf, dass der Kondensator der angelegten Spannung noch mühelos folgen kann, sodass man stattdessen

$$U_a = RC \dot{U}_e$$

annehmen kann. Das ist das differenzierende Verhalten des Hochpasses.

5 Messprinzip

5.1 Messung von Wechselspannungen

In diesem Versuchsteil werden die Frequenzbereiche gemessen, innerhalb derer die verschiedenen Messgeräte (d.h. Handmultimeter, Labormultimeter und Oszilloskop) genau genug messen. Dazu wird an dem Signalgenerator eine Sinussignal mit 5V Effektivspannung erzeugt.

Um die Ergebnisse nicht zu verfälschen sollte dabei beachtet werden, den Ausgang des Generators auf hohe Impedanz zu stellen.

Das Signal wird dann mit den verschiedenen Messgeräten abgegriffen und beobachtet, wie sich die angezeigten Spannungen in Abhängigkeit von der angelegten Frequenz verändern. Insbesondere soll herausgefunden werden, innerhalb welcher Grenzen die Abweichung des gemessenen Wertes von den 5V kleiner als 2% ist. Deshalb sollten die Messpunkte gehäuft in die Bereiche gelegt werden, bei denen eines der Messgeräte sich gerade in solch einem Umschlagsbereich befindet.

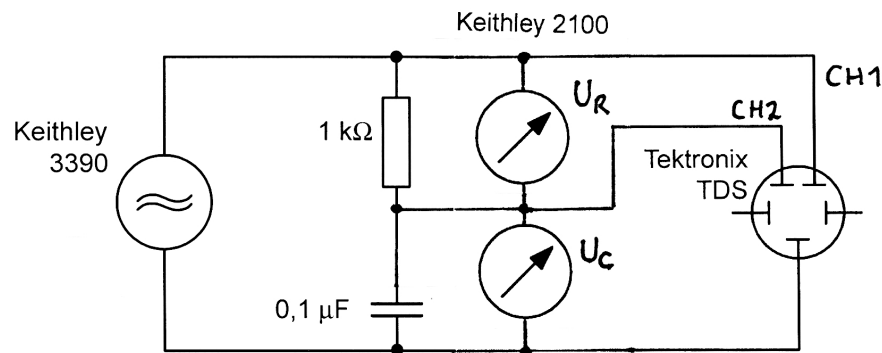


Abbildung 5: Schaltplan für die Untersuchungen am Tiefpass (Quelle: Praktikumsprotokoll)

5.2 Hoch- und Tiefpass

Jetzt wird die Schaltung gemäß Abbildung 5 aufgebaut, wobei wir zusätzlich zu den Messungen am Oszilloskop die Spannungen an Widerstand und Kondensator mit den Labor-Multimetern gemessen haben. Gemessen werden sollen in Abhängigkeit von der Frequenz die Spannungen U_R und U_C und außerdem die Phasenverschiebung der Signale U_e und U_c , die im Oszilloskop angezeigt werden. Dazu wird die Frequenz in größer werdenden Schritten zwischen 50 Hz und 100 kHz variiert (z.B. mit jeweils 3 Messwerten pro Dekade) und jeweils die an den Multimetern angezeigten Spannungen, sowie der vom Oszilloskop berechnete Zeitunterschied Δt notiert.

Δt ist dabei der Zeitunterschied zwischen den Nulldurchgängen der beiden sichtbaren Signale, der später über $\Delta\varphi = 2\pi f \cdot \Delta t$ in die gesuchte Phasendifferenz umgerechnet werden kann.

Die gleiche Messung (bis auf die Messung von Δt) wird danach auch noch einmal automatisiert in LabView durchgeführt. Dabei können dann noch mehr Messwerte genauer aufgenommen werden.

5.3 Integrier- und Differenzierverhalten

In dem letzten Versuchsteil wird nun noch beobachtet, wie sich die aufgebaute Schaltung verhält, wenn man eine nicht sinusförmige Spannung anlegt. Dazu wird an dem Frequenzgenerator ein Rechtecksignal erzeugt und auf dem Oszilloskop werden wieder U_e und U_C beobachtet.

Auch soll studiert werden, wie sich die Signale bei unterschiedlichen Frequenzen verhalten. Dazu werden verschiedene Frequenzen zwischen 100 Hz bis 100 kHz erzeugt und jeweils mittels LabView das am Oszilloskop zu sehende Bild (bzw. die zugehörigen Datenpunkte) gespeichert.

Das Gleiche wird dann wiederholt mit den Spannungen U_e und U_R . Der geschickteste Weg, um U_R statt U_C am Oszilloskop zu beobachten, ist, in der Schaltung einfach den Widerstand mit der Kapazität zu vertauschen.

6 Messwerte

Siehe Anhang

7 Auswertung

7.1 Messung von Wechselspannungen

Es haben sich für die Messgeräte folgende Obergrenzen für die möglichen Frequenzen ergeben:

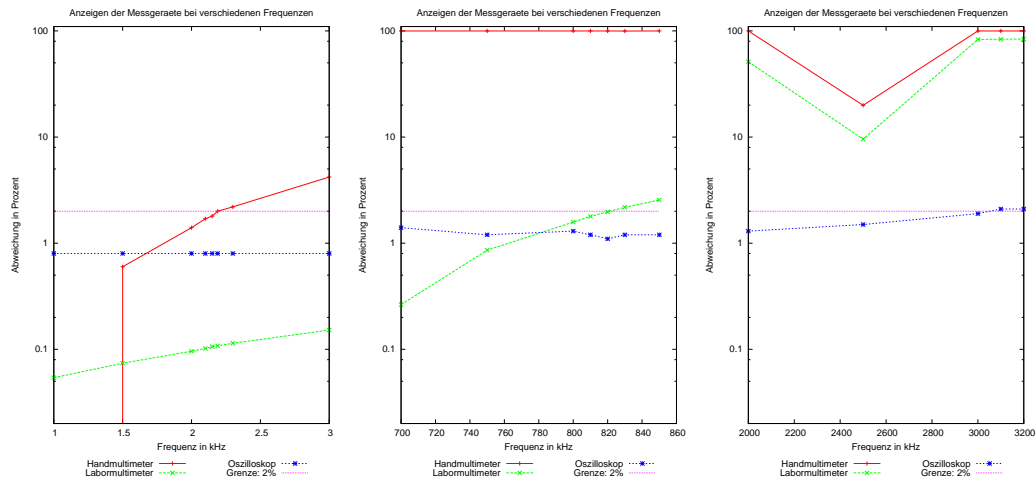


Abbildung 6: Prozentuale Abweichungen der Messgeräte. Die Abweichung p wurde berechnet via $p = \frac{|u-5|}{5}100$, wobei u die in Volt gemessene Spannung (beim Sollwert 5) ist.

- Handmultimeter: $f_c \approx 2186\text{Hz}$
- Labormultimeter: $f_c \approx 821.3\text{kHz}$
- Oszilloskop: $f_c \approx 3051\text{kHz}$

Diese Werte wurden aus Abb. 6 bestimmt.

7.2 Hoch- und Tiefpass

In den Plots in Abbildungen 7 und 8 wurden die manuell gemessenen Werte aufgetragen. Bei den Spannungen wurde eine doppelt logarithmische Skala (Bode-Diagramm) verwendet, das Winkel-Diagramm ist nur einfach logarithmisch. In beiden Diagrammen ist außerdem eine Theoriekurve nach Formel (7) mit den gegebenen Werten $U_e = 5\text{V}$, $R = 1\text{k}\Omega$ und $C = 0.1\mu\text{F}$ eingezeichnet. Hierbei ist zu beachten, dass diese Angaben logischerweise mit Fehlern behaftet sind: Bei dem Widerstand war eine Genauigkeit von $\pm 5\%$ angegeben, bei dem Kondensator keine. Es ist also durchaus verständlich, dass die Kurve von den Messwerten derart abweicht.

Man sieht, dass die Diagramme grob den erwarteten Verläufen entsprechen: Wird die Spannung bei U_R abgetragen, entspricht das einen Hochpass, wird sie bei U_C abgetragen ist es ein Tiefpass. Die Phase geht für $f \rightarrow \infty$ gegen $\frac{\pi}{2}$. Allerdings gibt es doch einen großen Unterschied zwischen den theoretisch erwarteten und den tatsächlichen Kurvenverläufen. Das ist bei den von LabView automatisch aufgenommenen Messwerten natürlich besser, deshalb werden im Folgenden vorrangig diese betrachtet.

7.3 Komplexer Widerstand X_C

Den Strom I in der Reihenschaltung können wir am Widerstand über das OHMSche Gesetz $I = \frac{U}{R}$ bestimmen. Auch für den Kondensator gilt definitionsgemäß³ derselbe Zusammenhang $I = \frac{U_C}{X_C}$ sodass man folgern kann, dass

$$X_C = R \frac{U_C}{U_R} \quad (11)$$

³Wir verwenden in diesem Abschnitt die Widerstände nur betragsmäßig.

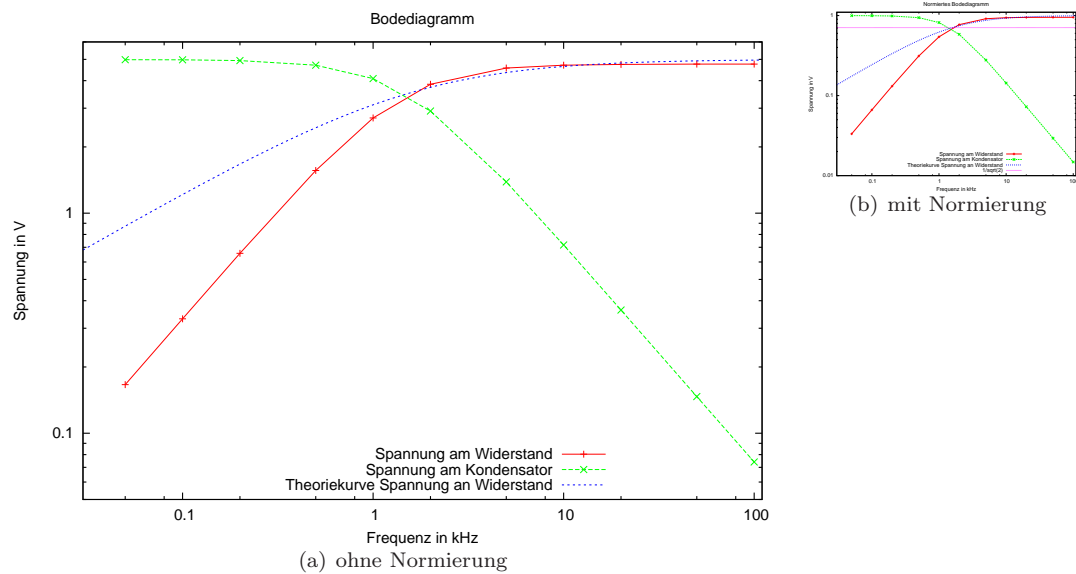


Abbildung 7: Manuell ausgemessenes Bodediagramm mit Theoriekurve

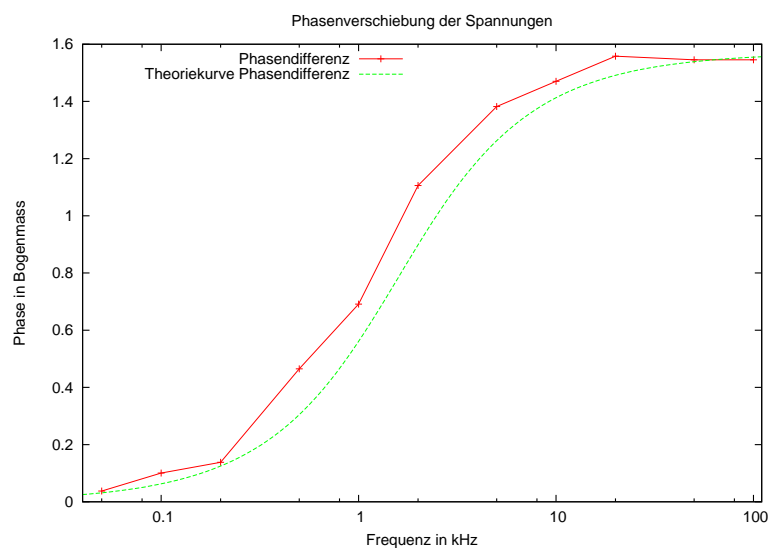


Abbildung 8: Manuell ausgemessene Phasendifferenz des Tiefpasses mit Theoriekurve

gilt. In Abb. 9 ist dieser Quotient gegen die Frequenz aufgetragen. In der Abbildung sieht man eindeutig eine Gerade (vergleiche die Ausgleichsgerade) mit negativer Steigung $-m$ ($m > 0$). Durch die doppeltlogarithmische Auftragung bedeutet dies

$$\log X_C = -m \log \omega \Rightarrow \log X_C = m \log \frac{1}{\omega} \Rightarrow \boxed{X_C \propto \frac{1}{\omega}}.$$

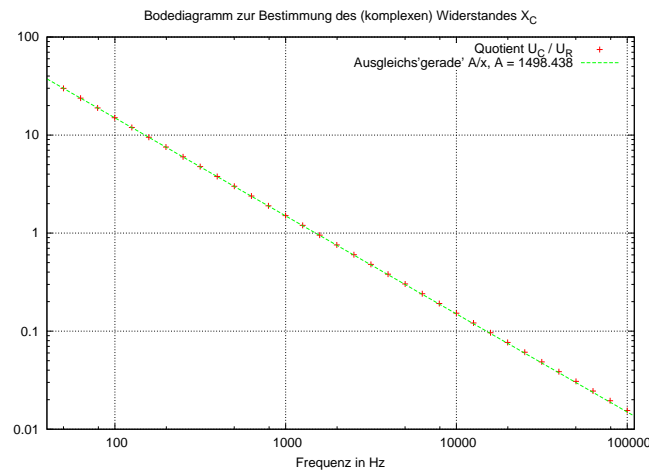


Abbildung 9: Quotient U_C/U_R doppelt logarithmisch aufgetragen.

7.4 3dB-Grenzfrequenz

Zur bestimmung der 3dB-Grenzfrequenz liest man die Frequenz ab, bei der der Quotient U_a/U_e auf $1/\sqrt{2}$ abgefallen ist. In dem Diagramm der manuell aufgenommenen Messwerte (Abb. 7) bestimmt man hier

$$f_{3\text{dB}}^M = 1586\text{Hz}$$

und aus dem Diagramm aus Abb. 10, welches mit Messwerten aus LabView erstellt wurde, findet man

$$f_{3\text{dB}}^L = 1441\text{Hz}.$$

Hier ist dem zweiten Wert definitiv der Vorzug zu geben. Wie man in Abb. 10 sehen kann, ist die Fitkurve hier perfekt an den Messwerten.

Verwendet man $f_{3\text{dB}}^L$, so findet man hier aus Abb. 8 die *Grenzphase*

$$\varphi_{3\text{dB}}^L \approx 0.689331 \approx \frac{11}{50}\pi = 39.6^\circ$$

7.5 Integrier- und Differenzierverhalten

In den Abbildungen 11 und 12 befinden sich die Plots, die mit LabView von dem Oszilloskop gespeichert wurden. Man sieht:

- Der Tiefpass integriert die Eingangsfrequenz, wenn die Eingangsfrequenz genügend hoch ist. Bei kleinen Frequenzen erhält man am Ausgang des Tiefpasses wieder ungefähr das Eingangssignal.

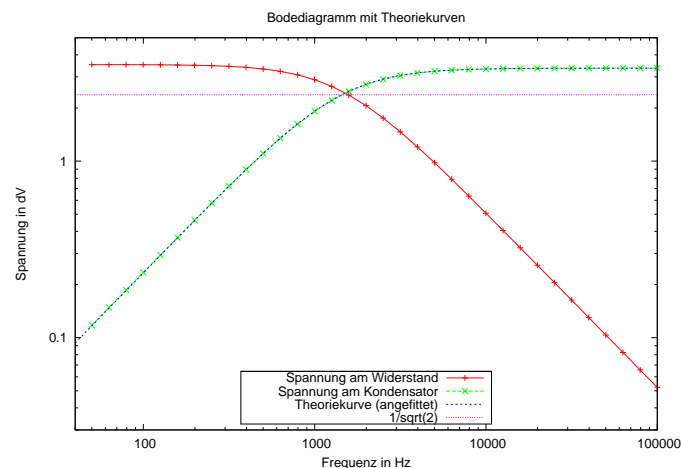


Abbildung 10: Mit LabView ausgemessenes Bodediagramm des Tiefpasses

- Der Hochpass differenziert die Eingangsfrequenz, wenn diese nicht zu hoch ist. Bei zu hohen Frequenzen kommt der Hochpass nicht mehr hinterher, und das Ausgangssignal wird dem Eingangssignal ähnlich.

Das ist genau das, was in Abschnitt 3.5 vorausgesagt wurde.

8 Fehlerrechnung

In Abb. 7 sieht man eine starke Abweichung zwischen Theoriekurve und Messwerten für kleine Frequenzen $\sim 100\text{Hz}$. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass durch die Logarithmische Scala hier ein Fehler von $\sim 0.3\text{V}$ stark vergrößert wird. Wir vermuten, dass diese Abweichung aus den Abweichungen von Kapazität und Widerstand resultieren.

Die Messmethode können wir ausschließen, weil wir später mit LabView die selben Messgeräte verwendet hatten, wobei man in Abb. 10 sieht, wie perfekt hier die Messwerte auf der Theoriekurve liegen, wobei hier die Parameter für Produkt RC und Amplitude der Spannung U_e angefittet wurden.

Ebenso können wir ausschließen, dass es sich um Probleme beim Einstellen oder Ablesen der Geräte oder Fehlfunktionen der Geräte (oder auch Fehlanpassung etc.) handelt.

9 Zusammenfassung

Wir konnten in diesem Versuch das frequenzabhängige Verhalten passiver Netze beobachten, insbesondere die namensgebenden Eigenschaften von Hoch- und Tiefpass. Mit vorzüglicher Genauigkeit konnten wir die aus der Theorie komplexer Widerstände zu erwartenden Abhängigkeiten der Ein- und Ausgabespannungen und Phasenverschiebung derselben an Hoch- und Tiefpass verifizieren. Des weiteren konnten wir das differenzierende bzw. integrierende Verhalten von Tief- respektive Hochpass qualitativ beobachten.

Ein Nebeneffekt des Praktikums ist außerdem ein Zuwachs in unseren Fähigkeiten im Umgang mit LabView sowie im Rechnen mit komplexen Widerständen.

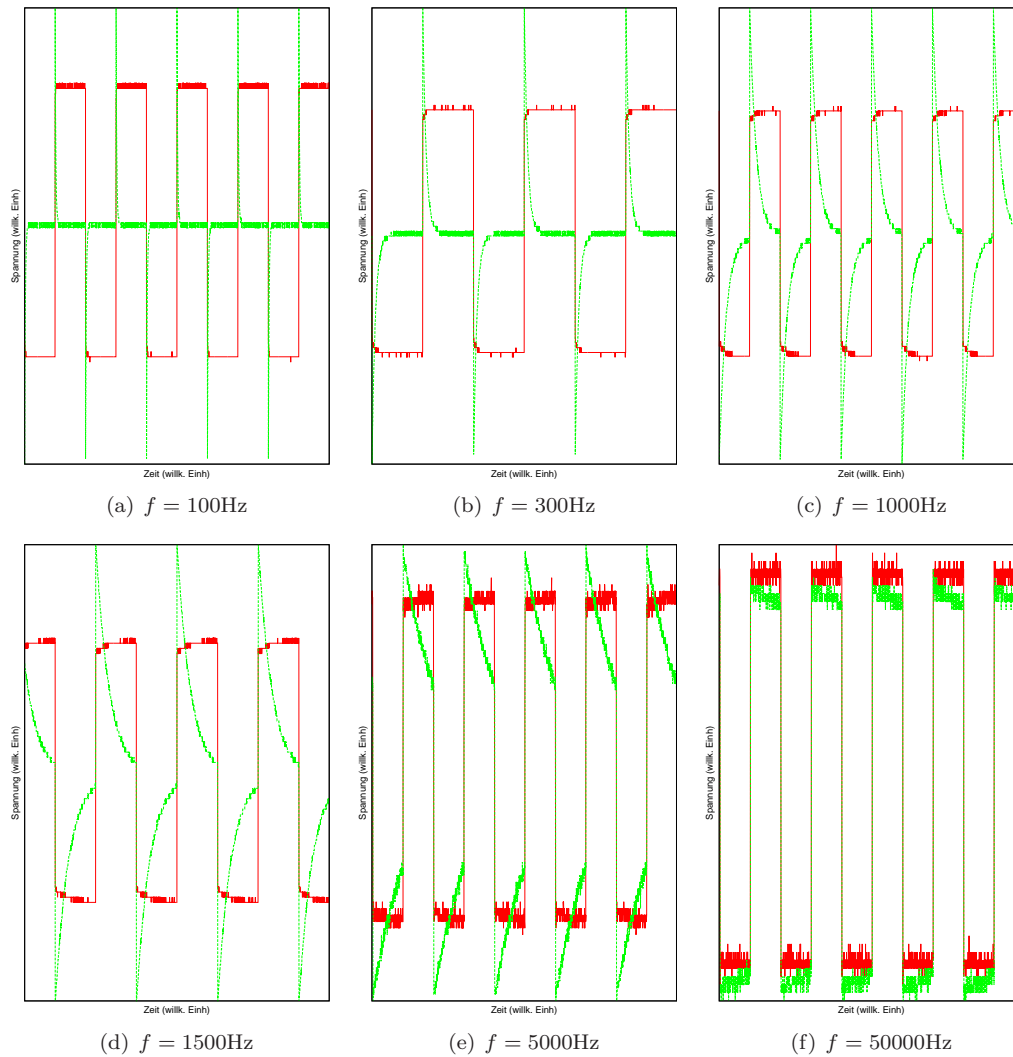


Abbildung 11: Vom Oszilloskop aufgenommene Bilder des Differenzierverhaltens für verschiedene Frequenzen

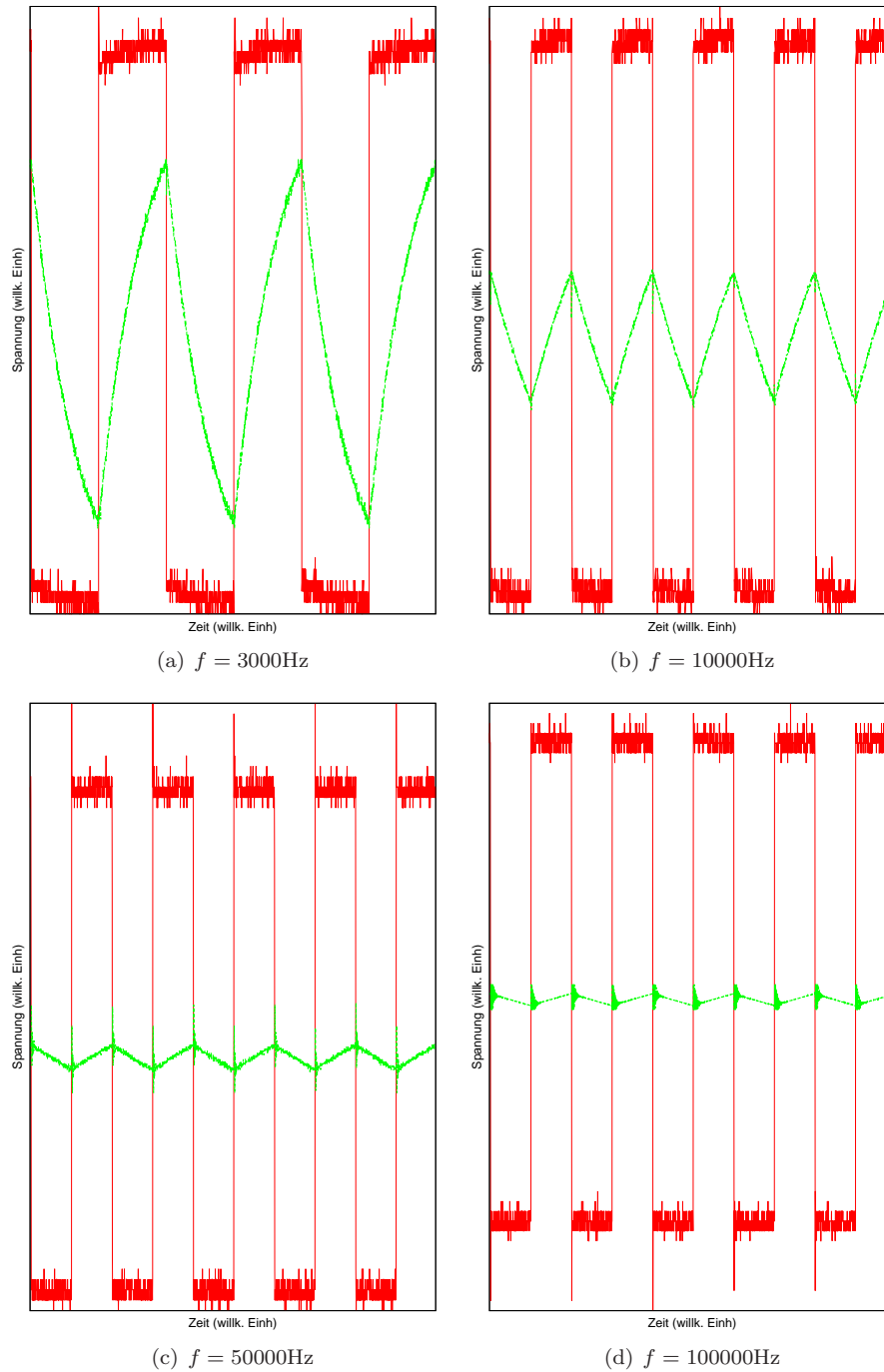


Abbildung 12: Vom Oszilloskop aufgenommene Bilder des Integrierverhaltens für verschiedene Frequenzen