Ana (14)

Michael Kopp

2

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \quad (A - 2\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = \lambda_4 = 3 \ (A - 3\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Kern} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Leftrightarrow$ wieder nur 1. dim.

$(A - 3\cdot\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Kern} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Wähle $(0,1,1,1)^T$; $(A - 3\mathbb{1}) \cdot (0,1,1,1)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi_1 = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_3 = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \varphi_4 = e^{3t} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

Die φ_i bilden ein Fundamentalsystem.

Durch Nachrechnen Φ mit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_4)$ erfüllt nicht $\dot{\Phi} = A\Phi \longrightarrow$ f (3)

3

$x =: y_1$, $x' =: y_2 = y_1'$

$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{y}' = A \cdot \underline{y}$

$|A - \lambda\mathbb{1}| = +\lambda(a+\lambda) + b = \lambda^2 + \lambda a + b = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \dfrac{-a}{2} \pm \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b}$

Fall 1: $a^2 > 4b$ — Knotenfall

Fall (a): $b > 0$ $\Rightarrow$ Zwei EW in $\mathbb{R}$, verschieden, < 0

Fall (b): $b = 0$ $\Rightarrow$ Zwei EW in $\mathbb{R}$, einer 0, einer < 0

Fall (c): $a \neq 0$, $b < 0$ $\Rightarrow$ Zwei EW in $\mathbb{R}$, einer > 0, einer < 0

Fall (d): $a = 0$, $b < 0$ $\Rightarrow$ Zwei EW in $\mathbb{R}$, $\pm\sqrt{|b|}$

Aperiodischer Grenzfall

Fall 2: $a^2 = 4b \Rightarrow b \geq 0$, zwei EW in $\mathbb{R}$, beide gleich

(a) $a = b = 0 \Rightarrow$ beide EW 0

(b) $a = 2\sqrt{b} \Rightarrow$ beide EW < 0

(c) $a = -2\sqrt{b} \Rightarrow$ beide EW > 0

Schwingfall

Fall 3: $a^2 < 4b \Rightarrow$ zwei EW in $\mathbb{C}$. $(b \geq 0)$

(a) $a > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda < 0$

(b) $a = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda = 0$, $\operatorname{Im}\lambda = \pm\sqrt{b}$

(c) $a < 0, b \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda > 0$, beide EW verschieden

✓

4

$\boxed{4}$

(a) $$|A - \lambda \mathbb{1}| = \left(-1 + \tfrac{3}{2}\cos^2 t - \lambda\right)\left(-1 + \tfrac{3}{2}\sin^2 t - \lambda\right) + \left(1 - \tfrac{3}{2}\sin t\cos t\right)\left(1 + \tfrac{3}{2}\sin t\cos t\right)$$

$$= 1 - \cancel{\tfrac{3}{2}\sin^2 t} + \lambda - \cancel{\tfrac{3}{2}\cos^2 t} + \cancel{\tfrac{9}{4}\cos^2 t\sin^2 t} - \cancel{\tfrac{3}{2}\lambda\cos^2 t} + \lambda - \tfrac{3}{2}\lambda\sin^2 t + \lambda^2$$

$$+ 1 \cancel{+ \tfrac{3}{2}\sin t\cos t} \cancel{- \tfrac{3}{2}\sin t\cos t} \cancel{- \tfrac{9}{4}\sin^2 t\cos^2 t}$$

$$= 2 + \lambda + \lambda^2 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2}}{2} = -\frac{1}{4} \pm i\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$$

(b) $$\underline{x} = \alpha\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x}' = \alpha'\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$A\underline{x} = \alpha\begin{pmatrix}\cos t - \frac{3}{2}\cos^3 t + \sin t - \frac{3}{2}\sin^2 t\cos t\\ \cos t + \frac{3}{2}\sin t\cos^2 t - \sin t + \frac{3}{2}\sin^3 t\end{pmatrix} = \alpha'\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos t + \sin t - \frac{3}{2}\cos t\\ \cos t - \sin t + \frac{3}{2}\sin t\end{pmatrix}\cdot\alpha = \alpha'\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

Da $\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ l.u. sind, kann man Koeffizienten vergleichen: $\alpha' = \alpha \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = D e^{\frac{1}{2}t + F}$.

D oder F, beides zugleich ist nicht sinnvoll! (Warum)

$\boxed{4}$

(c) Das $x(t)$ aus (b) ist eine Spalte von Φ, die andere ist noch unbekannt:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\alpha \cos t & f(t) \\ \alpha \sin t & g(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \det \Phi = -\alpha \cos t \cdot g - \alpha \sin t \cdot f$$

Nach Satz von Liouville gilt:

$$\frac{d}{dt} \det \Phi = \operatorname{tr} A \cdot \det \Phi = -\frac{1}{2} \det \Phi;$$

Diese DGL in $\det \Phi$ hat die Lösung

$$\det \Phi = G \cdot e^{-\frac{1}{2}t + H} = -\alpha \cos t \cdot g - \alpha \sin t \cdot f$$

$$G e^{-\frac{1}{2}t + H} = -D e^{\frac{1}{2}t + F} \cdot g \cdot \cos t - D e^{\frac{1}{2}t + F} \cdot f \cdot \sin t$$

Dies wird gelöst durch:

$$g = g(t) = -\frac{G}{D} e^{-t + H - F} \cdot \cos t$$

$$f = f(t) = -\frac{G}{D} e^{-t + H - F} \sin t$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} -D e^{t/2 + F} \cdot \cos t & -G/D \, e^{-t + H - F} \sin t \\ D e^{t/2 + F} \cdot \sin t & -G/D \, e^{-t + H - F} \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -D \cos t & -G/D \sin t \\ D \sin t & -G/D \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{t/2 + F} & 0 \\ 0 & e^{-t + H - F} \end{pmatrix}$$

Die vordere Matrix ist periodisch, weil ihre Elemente periodisch sind — das ist $P(t)$

Die hintere Matrix lässt sich schreiben als (weil sie diagonal ist):

$$\begin{pmatrix} e^{t/2 + F} & 0 \\ 0 & e^{-t + H - F} \end{pmatrix} = \exp\left[t \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \overbrace{\exp \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & H - F \end{pmatrix}}^{= \begin{pmatrix} e^{F} & 0 \\ 0 & e^{H-F} \end{pmatrix}} . \qquad = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Die hintere Matrix wird in der Aufgabe nicht verlangt, ist aber eigentlich nötig

entspricht der Eigenschaft, dass mit u, v Fund.-System auch $\alpha u, \beta v$ eines ist!

4

[2]

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (2-\lambda)^2 + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm i\sqrt{12}$

Wähle für λ positiven Zweig: $\lambda = 2 + i\sqrt{12}$:

$(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{12} & 3 \\ -4 & -i\sqrt{12} \end{pmatrix}$ Sei $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ EV; setze

$\alpha = i$: $x = \begin{pmatrix} i \\ -2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\phi = e^{t(2+i\sqrt{12})} \cdot \begin{pmatrix} i \\ -2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad (e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$\mathrm{Re}\,\phi = e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin\sqrt{12}t \\ -2\cos(\sqrt{12}t)/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}\,\phi = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos\sqrt{12}t \\ -2\sin(\sqrt{12}t)/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Lös. : $x = A \cdot \mathrm{Re}\,\phi + B \cdot \mathrm{Im}\,\phi$.

✓

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$.

$(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Kern $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\rightsquigarrow$ eindim.

Suche Hauptvektor: $(A - \lambda_1 \mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Kern $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Wähle $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $v_1 = (A - \lambda_1 \mathbb{1}) \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\varphi_1 = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$(A - \lambda_3 \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Kern $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi_3 = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lös.: $x = A \cdot \varphi_1 + B \cdot \varphi_2 + C \cdot \varphi_3$.

[1]

• $A^T = -A \overset{!}{\Rightarrow} \langle x | x \rangle = C$:

Die Adjungierte von A ist A^T: $\langle x | Ax \rangle = \langle A^T x | x \rangle$. Weil $\langle \cdot | \cdot \rangle$ symmetr.: $\langle A^T x | x \rangle = \langle x | A^T x \rangle \ominus$. Nach Voraussetzung: $\ominus\ \langle x | -Ax \rangle = -\langle x | Ax \rangle$. Also: $\langle x | Ax \rangle = -\langle x | Ax \rangle \Rightarrow \langle x | Ax \rangle = 0$. Da x Lösung der DGL: $Ax = x'$: $\langle x | x' \rangle = 0$. Da $\frac{d}{dt}\langle x | x \rangle = 2\langle x | x' \rangle$ ist $\frac{d}{dt}\langle x | x \rangle = 0$, damit ist $\langle x | x \rangle = \text{const}$. ✓

✓

1

- $\langle x | x \rangle = c \overset{!}{\Rightarrow} A^T = -A.$

Zu jedem t spannen die Lösungen $\{\varphi_i\}$ einen n-dim. Lösungsraum auf. Diesen kann man nach Gram-Schmidt orthonormieren; es gilt dann für zwei dieser orthonormierten Lösungen $\underline{u}, \underline{v}$.

$\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = 0$, ableiten liefert:

$$\langle \underline{u} | \underline{v}' \rangle + \langle \underline{u}' | \underline{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \underline{u} | A \underline{v} \rangle + \langle A \underline{u} | \underline{v} \rangle = 0$$

Da wieder A^T die adjungierte von A ist gilt:

$$\langle \underline{u} | A \underline{v} \rangle = - \langle \underline{u} | A^T \underline{v} \rangle .$$

Da diese u, v aus einer Basis stammen, und eine Lin. Abb. $f: \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ vollständig durch die Funktionswerte auf einer Basis bestimmt ist, folgt so, dass die Abb. $\alpha: \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ und $\beta: \underline{x} \mapsto -A^T\underline{x}$ identisch sind.

✓

$\square$

Rückrichtung: Sei $A^t = -A$

$$\langle \dot{x}, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$$

and.s. $\langle \dot{x}, x \rangle \overset{\text{Symm. d. Skp.}}{=} \langle x, Ax \rangle = \langle A^t x, x \rangle$

$$= - \langle Ax, x \rangle$$

$\rightarrow 2 \langle \dot{x}, x \rangle = 0 \rightarrow$ Behauptung

~~2~~

Ahh. habs gefunden

4