Klasse 12/13 – 1

Ganzrationale & gebrochenrationale Funktionen, Funktionsuntersuchung Abiaufgaben

- Ganzrationale Funktionen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

$$= x^n \Big(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}_{} \Big)$$

wenn x sehr groß gegen 0

$\rightarrow a_n x^n$ bleibt übrig

$\left.\begin{matrix} x \to \infty \\ x \to -\infty \end{matrix}\right\}$ $a_n x^n$ von Bedeutung

Aufgabe: 1. $x \to \pm\infty$ $\rightarrow$ Verhalten von $f(x)$?

a) $f(x) = 4 - 3x^3 + x^2 - x^5$

b) $f(x) = -3x^4 + 3x^3 - x + 1$

c) $f(x) = (1-2x)(2+5x^2)$

2. Begründe: Schaubild von ganzrat. Fkt. mit ungeradem Grad schneidet x-Achse mindestens einmal.

- Asymptoten 1. Waagerechte Asymptoten

wenn für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to a$ / $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$

ist $y = a$ die waagerechte Asymptote

Untersuche diese gebr.rat. Fkt. auf waag. As.:

a) $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ b) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$ c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$

Allgemein gilt:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \ldots}{a_n x^n + \ldots}$$

(m als höchste Hochzahl im Zähler & n als höchste Hochzahl im Nenner)

1. $n > m$

Bsp.: $f(x) = \frac{x+7}{x^3+x^2} = \frac{\frac{x}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3}} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$ $y = 0$

2. $m > n$

Bsp. $f(x) = \frac{x^4+x^3}{x+5} = \frac{\frac{x^4}{x} + \frac{x^3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{5}{x}} = \frac{\overbrace{(x^3+x^2)}^{\to\infty}}{1 + \underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}}$

$\rightarrow$ kein waag. Asymptote, $f(x)$ geht gegen ∞

3. $n = m$

Bsp.: $$f(x) = \frac{7x^2+3}{5x^2+x} = \frac{\frac{7x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \frac{7 + \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{7+0}{5+0} = \frac{7}{5}$$ $y = \frac{7}{5}$; allgemein $y = \frac{a_m}{a_n}$

Aufgaben: waag. As. ?

a) $f(x) = \frac{a}{x}$ b) $f(x) = a + \frac{b}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^2-1}{cx^2+2}$ d) $\frac{2x}{x-3} = f(x)$

2. Senkrechte Asymptoten

– nur bei gebrochenrationalen Funktionen –

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

$x \to x_0$ heißt: Annäherung an Definitionslücke

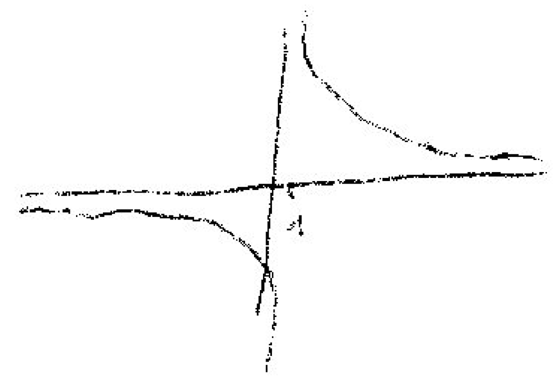
x_0 = senkrechte Asymptote

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Für $x \to 1$ und $x < 1$ gilt $f(x) \to -\infty$

Für $x \to 1$ und $x > 1$ gilt $f(x) \to \infty$

(waag. As. $y = 0$)



Aufgabe:

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{-0{,}5}{x-3}$

$h(x) = \frac{0{,}3}{(x+2)^2}$

a) Gib die maximale Definitionsmenge an

b) Untersuche das Verhalten von $f(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücke

c) Gib die Gleichungen der senkrechten Asymptote an.

d) Zeichne die Schaubilder

Symmetrie

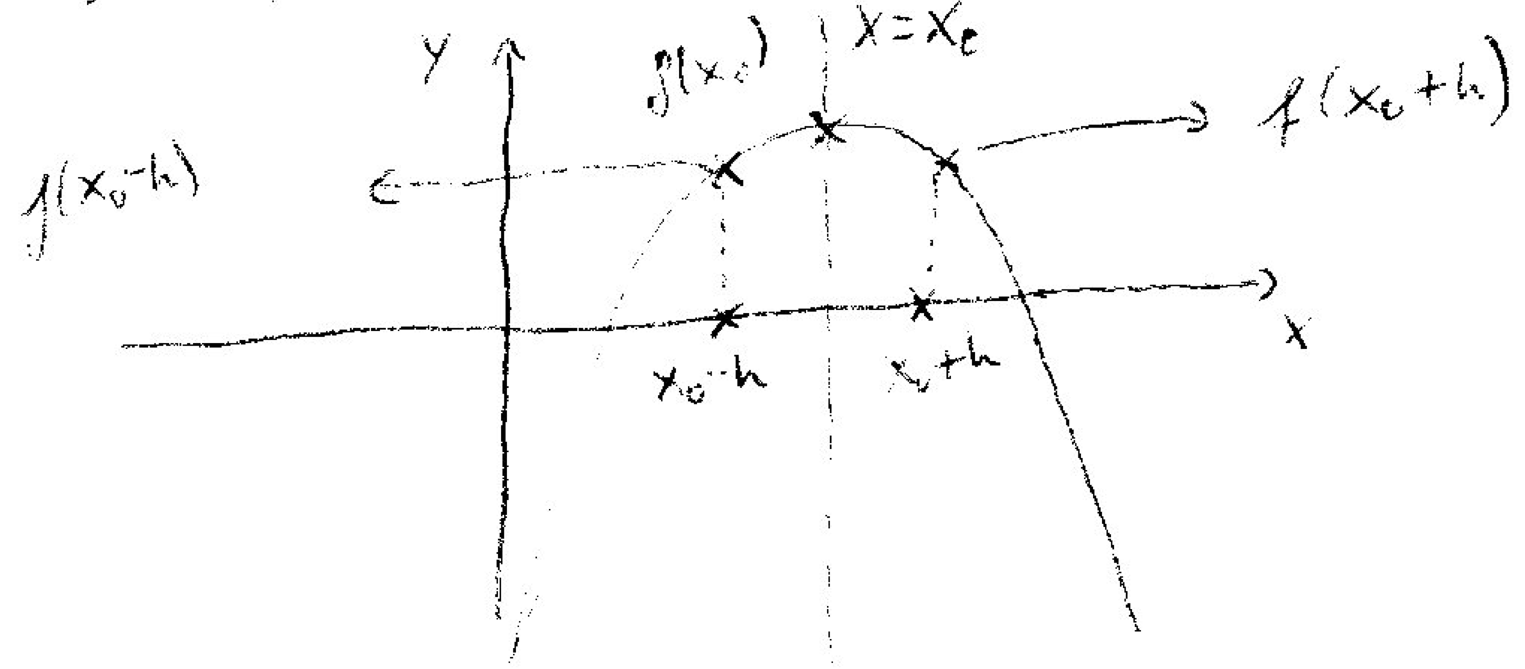
1\. Ganzrat. Fkt.: a)
- nur gerade Hochzahlen: achsensymmetrisch
- nur ungerade Hochzahlen: punktsymmetrisch

Aufgabe: Symmetrie?

a) $f(x) = -2x^6 + 3x^2$ c) $f(x) = 2 - 3x^3$ e) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 1$

b) $f(x) = 2 - 3x^4$ d) $f(x) = x^3 - x + 1$

1.b) Achsensymmetrie zu einer Geraden $x = x_0$



$f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$

ist dies erfüllt, liegt Achsensymmetrie zur $x = x_0$ vor!

Bsp.: Überprüfe, ob $f(x) = x^2 - 2x$ zur Geraden $g: x = 1$ symmetrisch ist.

$\rightarrow$ $f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$

$f(1-h) = f(1+h)$

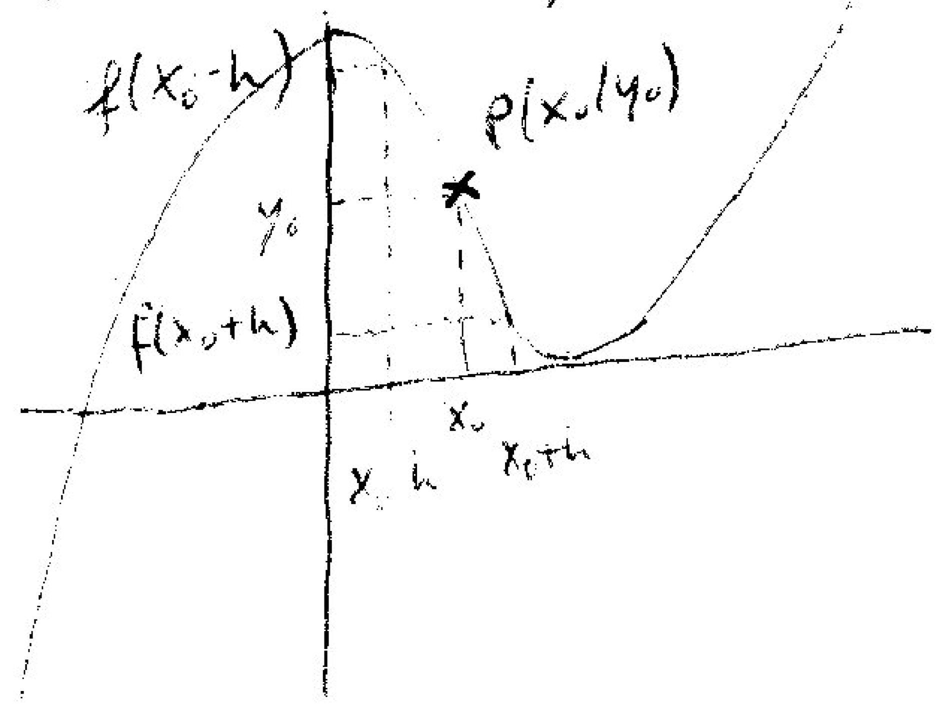
$(1-h)^2 - 2\cdot(1-h) = (1+h)^2 - 2\cdot(1+h)$

$1 - 2h + h^2 - 2 - 2h = 1 + 2h + h^2 - 2 - 2h$

$-1 + h^2 = -1 + h^2$

$\rightarrow$ Ja, ist achsensymm. zu g

1\. c) Punktsymmetrie zu einem Punkt $P(x_0/y_0)$



$f(x_0 - h) - y_0 = y_0 - f(x_0 + h) \quad | + y_0;\ + f(x_0+h)$

$f(x_0 - h) + f(x_0 + h) = 2y_0$

$y_0 = \frac{1}{2}\cdot\left[f(x_0-h) + f(x_0+h)\right]$

Bsp.: Zeige, dass das Schaubild von f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$ punktsymmetrisch zum Punkt $P(1/-2)$ ist.

$(1-h)^2\,(1-h)$
$(1-2h+h^2)(1-h)$
$1 - h - 2h + 2h^2$
$+ h^2 - h^3$
$-h^3 + 3h^2 - 3h + 1$
$(1+h)^2\,(1+h)$
$(1+2h+h^2)(1+h)$
$1 + h + 2h + 2h^2 + h^2 + h^3$
$h^3 + 3h^2 + 3h + 1$

$-2 = \frac{1}{2}\cdot\left[f(1-h) + f(1+h)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\left((1-h)^3 - 3(1-h)^2\right) + \left((1+h)^3 - 3(1+h)^2\right)\right]$

$-2 = \frac{1}{2}\left[\left(-h^3 + 3h^2 - 3h + 1 - 3 + 6h - 3h^2\right) + \left(h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 3 - 6h - 3h^2\right)\right]$

$-2 = \frac{1}{2}(-4)$

$-2 = -2$ qed

Symmetrie bei gebrochenrationalen Funktionen

1. Mglk. Im Zähler nur gerade HZ (Hochzahlen) & Im Nenner nur ungerade HZ /

Im Zähler nur ungerade HZ & Im Nenner nur gerade HZ

→ Punktsymmetrie zum Ursprung

2. Mglk. Allgemein nur gerade HZ / Allgemein nur ungerade HZ

→ Achsensymmetrie zur y-Achse

3. Mglk. Vermischt

→ keine Symmetrie

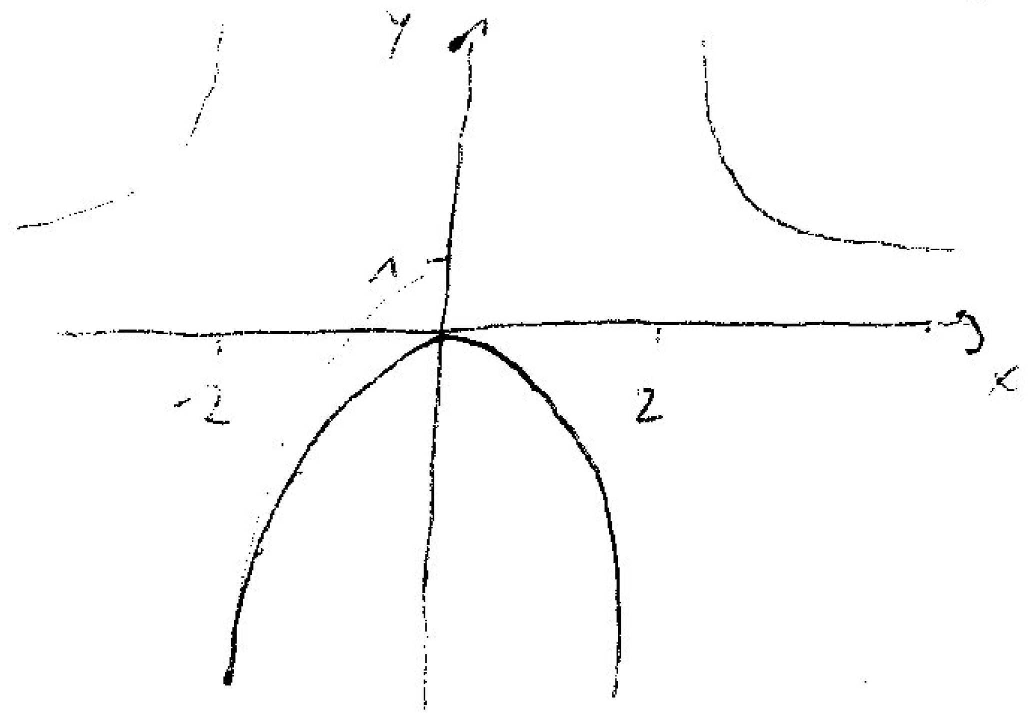
- Anhand einiger Bedingungen eine Funktion aufstellen

1. G.b Funktion an, die die Bedingung erfüllt:

a) Für $x \to 0$ $(x > 0)$ gilt $f(x) \to -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

b) Für $x \to 1$ $(x > 1$ und $x < 1)$ gilt $f(x) \to \infty$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$

- Anhand eines Schaubildes Funktionsgl. aufstellen



- $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ $\Big\}$ $f(x) = \frac{}{(x+2)(x-2)}$

- $y = 1$ → $f(x) = \frac{}{(x+2)(x-2)} + 1$

- $P(0|0)$ → $0 = \frac{c}{(0+2)(0-2)} + 1$

$c = 4$

→ $f(x) = 1 + \frac{4}{(x+2)(x-2)}$

Schiefe Asymptoten / Näherungskurven

1. Fall: Zählergrad = Nennergrad + 1 $(m > n)$

Bsp.: $f(x) = \frac{x^2 + 1{,}5x}{2x - 1}$, andere Weise, Fkt. darzustellen:

$(x^2 + 1{,}5x) : (2x - 1) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2x-1}$

Asymptoten bei $x \to \infty$ erst wichtig. hier geht $\frac{1}{2x-1}$ gegen Null, also ist die schiefe Asymptote $y = \frac{1}{2}x + 1$

2. Fall: Zählergrad > Nennergrad + 1

Bsp.: $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x}$ → $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x}$

→ Näherungskurve (≈ schiefe Asymptote): $y = x^2 + 1$

Mathe Klasse 12/13 - 5

Die Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$ → gilt, wenn im Zähler & im Nenner ein x vorkommt

Bsp. $f(x) = \frac{2x}{1-x}$

→ $u(x) = 2x$ $\quad u'(x) = 2$

$v(x) = 1-x$ $\quad v'(x) = -1$

$$f'(x) = \frac{2(1-x) - 2x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2-2x+2x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Aufgabe: Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$ für $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+2)^2}$$

$u(x) = -2x$ $\quad u'(x) = -2$

$v(x) = (x^2+2)^2$ $\quad v'(x) = 4x(x^2+2)$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+2)^{\cancel{2}} + 8x^2(x^2+2)}{(x^2+2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^2 - 4 + 8x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{6x^2-4}{(x^2+2)^3}$$

Funktionen skizzieren

$$f(x) = \frac{10(x-2)}{x^2}$$

Allgemeine Schritte: | hier

1. Senkrechte Asymptote + VZW? | $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, ohne VZW, $x \to 0$ $\quad x > 0$ & $x < 0$ → $f(x) \to -\infty$

2. Symmetrie | keine Symmetrie

3. Waag. As. | $y = 0$

4. NS (Zähler = 0 setzen, für x_1 darf Nenner nicht 0 sein) | $x_1 = 2$, $N(2|0)$

5. Extremstellen
TP: $f'(x_0) = 0$ $\quad f''(x_0) > 0$
HP: $f'(x_0) = 0$ $\quad f''(x_0) < 0$

$f'(x) = 10 \cdot \frac{-x+4}{x^3}$ $\quad x_2 = 4$

$f''(x) = 20 \cdot \frac{x-6}{x^4}$ $\quad f''(4) = -\frac{5}{32} < 0$ → HP

$H(4|\frac{5}{4})$

6. Wendestelle
$f''(x_0) = 0$ $\quad f'''(x_0) \neq 0$ / VZW bei $f''(x_0)$

$x_3 = 6$; VZW bei $f''(6)$ [$x \to 6$ $x > 6$ und $x \to 6$ $x < 6$)

Mathe Klasse 12/13 – 6

Ortslinie, Funktionsuntersuchung ...

Aufgabe Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{8x - 4t}{x^2}$. Ihr Graph sei K_t

a) Zeichne mit GTR K_t zu $t = 1; 1,5; 2; 2,5; 3$

b) Führe Funktionsuntersuchung durch (D_f, Symmetrie, Asymptoten, NS, Ableitung, Extremstellen, Wendestellen) $H_t\left(\frac{3}{4}t \,/\, \frac{128}{27t^2}\right)$

c) Wie lautet die Gleichung der Ortslinie C der Hochpunkte von K_t? Zeichne C.

d) Es sei N der Schnittpunkt von K_2 mit der x-Achse und $P(u/v)$ mit $u > 1$ ein Punkt auf K_2. Die Punkte N, P und Q $(u/0)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt des Dreiecks extremal?

Aufgabe: Abi 2006 / Analysis I 1 (Wahlteil) (rotes Stark-Buch)