Lang

21.1.09

7. Determinanten

Was ist eine Det.? / was macht sie?

Gegeben seien n Spaltenvekt. in $\mathbb{R}^n$ (oder eine $n\times n$-Matrix)

$n=1$: (a)

$n=2$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

⋮

Wir suchen das „Volumen" bzw. die „Fläche", die die Vektoren $a_1 \dots a_n$ als Parallelogramm $(n=2)$ bzw. Parallelepipeds $(n>2)$ aufspannen.

F ordnet $a_1 \dots a_n$ dieses n-dimensionale Volumen zu. Dieses Volumen darf auch negativ sein.

$n=1$: $|F(a)| = |a|$

$n=2$ $|F(a_1, a_2)| = \|a_1\| \cdot \|a_2\| \cdot \sin\measuredangle(a_1, a_2)$

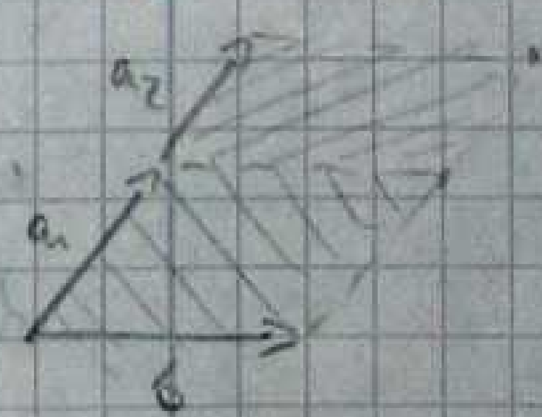
$$(F(\vec a, \vec b))^2 = (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\Big(1-\overbrace{\frac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}}^{\cos^2\varphi}\Big)$$

$$= \cancel{(a_1^2+a_2^2)(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$= (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2 = (a_1b_2-a_2b_1)^2$$

⋮ analog für höhere n – nur Formeln werden komplizierter.

Eigenschaften / Rechenregeln



Wir erwarten: $F(a_1+a_2, b) = F(a_1, b) + F(a_2, b)$

$F(a, b_1+b_2) = F(a, b_1) + F(a, b_2)$

$F(\vec 0, b) = F(a, \vec 0) = 0$ $\Rightarrow$

$$F(a+(-a), b) = 0 = \underbrace{F(a,b)}_{>0} + \underbrace{F(-a,b)}_{<0} =: -F(a,b)$$

$\Rightarrow$ Negative Flächen machen Sinn!

21.1.'09

$F(\lambda a, b) = \lambda F(a,b) = F(a, \lambda b)$ $\quad \lambda \in \mathbb{K}$

$F(a,a) = 0 \Rightarrow 0 = F(a+b, a+b) =$

$0 = \underbrace{F(a,a)}_{=0} + F(a,b) + \underbrace{F(b,b)}_{=0} + F(b,a) \Rightarrow$

$F(a,b) = -F(b,a)$

$F(a, b+\lambda a) = F(a+\mu b, b) = F(a,b)$ (Scherung)

Also zusammengefaßt:

- bilinear ($F(a,b)$ ist lin. in a bzw. b)
- schiefsymmetr. ($F(a,b) = -F(b,a)$)
- Normierung ($F\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} := 1$)

Lemma: $\det A = \det A^T$

Die Determ. ändert sich nicht wenn die Matrix transponiert wird.

(Geometrisch durch Scherung)

$$F\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$$

Beweis:

Sei $a_1 \neq 0$ $\quad F\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}a_1 & b_1 - a_1\frac{b_1}{a_1}\\ a_2 & b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1}\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ a_2 & b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1}\end{pmatrix}$

addiert man die Zeilenelem. ändert sich nichts

Linear ⇒ man kann $a_2 = 0$ erreichen.

analog $\quad = F\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1}\end{pmatrix}$ $\quad \parallel$

analog $\quad F\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1}\end{pmatrix}$

$A = A^T$

für $a_2 \neq a_1 = 0$ analog

Gruppe der Permutationen

Z.z. $(S_n, \circ)$ ist Gruppe:

$$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\}$$

~~$\sigma: S_n \to S_n$~~

$\sigma: \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ (bijektiv) $\qquad \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\circ: S_n \times S_n \to S_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots \\ \sigma_1(1) & \sigma_1(2) & \cdots \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots \\ \sigma_2(1) & \sigma_2(2) & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots \\ \sigma_1(\sigma_2(1)) & (\sigma_1(\sigma_2(2)) & \cdots \end{pmatrix}$$

i) Assoziativ:

$$\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) \stackrel{!}{=} (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$$

$$\sigma_1 \circ \begin{pmatrix} k \\ \sigma_2(\sigma_3(k)) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} k \\ \sigma_1(\sigma_2(k)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k \\ \sigma_3(k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k \\ \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(k))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(k))) \end{pmatrix} \checkmark$$

ii) neutrales Element:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

iii) inv. Elem.:

Da σ bijektiv $\Rightarrow \exists\, \sigma^{-1}$

$$\begin{pmatrix} k \\ \sigma^{-1}(k) \end{pmatrix}$$

Laag

Determinante (Def) (Einführung! – formal folgt) 21. 1. '09

V sei ein K-VR. Eine Abb.

$$F_n : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \to K$$

mit den Eigenschaften

- multilinear (in jedem Argument lin.)

$F_n(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i + \mu \hat{a}_i, \dots a_n) =$

$\lambda F(a_1 \dots a_n) + \mu F(a_1 \dots \hat{a} \dots a_n)$

- schiefsymmetr.: $F_n(a_1 \dots a_i, a_j \dots a_n) =$

$- F_n(a_1 \dots a_j, a_i \dots a_n)$

heißt eine Determinantenform

Sie ist eindeutig, bis auf einen konstanten Faktor

Normierung

$F_n(b_1, \dots, b_n) = 1$ für eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

von V

Spezialfall: $V = K^n$: $F(E_1, \dots E_n) = F\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$

Das heißt: $F_n(a_1 \dots a_n) = \mathrm{Det}(a_1 \dots a_n) = \det(a_1 \dots a_n)$

die Determinante. Sie gibt ein n-dim. Volumen

mit Vorzeichen.

Weitere Eigenschaften

$F_n(a_1 \dots a_{n-1}, b) = \underbrace{F_{n-1}(a_1 \dots a_{n-1})}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}}$ $(\|h\| = \|b\|)$

$F_n(a_1 \dots a_{n-1}, b) = F_n(a_1 \dots a_{n-1}, \tilde{b})$ ($\tilde{b}$ ist Projektion ~~auf~~ von b senkrecht zu $a_1 \dots a_{n-1}$)

21.1.09

Explizite Formel

Damit kann man eine explizite Formel bestimmen

Bsp.: $n=2$

$$F_2\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = F_2\left(a_1\binom{1}{0} + a_2\binom{0}{1},\ b_1\binom{1}{0} + b_2\binom{0}{1}\right) =$$

$$a_1 b_2 \underbrace{F_2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{1} + a_2 b_1 \underbrace{F\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{-1} + 0 + 0 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Bsp.: $n=3$

$$F_3\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2$$

$$- a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \quad \text{(Sarrus'sche Formel)}$$

$$= (a \times b)\cdot c = (b \times c)\cdot a = (c \times a)\, b$$

(Spatprodukt)

Einschub: Permutation

Eine bij. Abb. $\sigma: \{1 \dots n\} \to \{1, \dots n\}$

heißt Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots \end{pmatrix}$

Die Menge S_n aller Perm. ist eine Gruppe

und heißt symmetrische Gruppe auf n Elemente.

Anzahl d. Elemente: $|S_n| = n!$

Explizit: n $\quad = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots \end{pmatrix}$

$\sigma \in S_n$: a_{ij}

für jedes (feste) i nimmt j jede Zahl $\{1, \dots, n\}$ an

mit $\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ gerade} \\ -1 & \sigma \text{ ungerade} \end{cases} = (-1)^{\#\text{Transpositionen}}$

↑ Vertauschungen

Dies ist die Definition für Det. i. bel. Körper!

Det. einer 3x3 - Matrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Es gibt 6 Permutationen

				sign.
${}^1\sigma =$	1	2	3	1
${}^2\sigma =$	1	3	2	−1
${}^3\sigma =$	2	1	3	−1
${}^4\sigma =$	2	3	1	1
${}^5\sigma =$	3	1	2	1
${}^6\sigma =$	3	2	1	−1

$$\det A = + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \sum_{\sigma \in E} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tauschungen: 0 (gerade) => „+"
1 (ungerade) => „−"
1 => „−"
2 => „+"

Ω: „Auswahlmatrix": Grundlage ist A. Wo in Ω eine 1 steht, wird das entspr. Elem. aus A gewählt.
Bei mehreren 1en in Ω werden die Elem. aus A multipliz.
Mit ⊔ sind die Tauschungen eingetragen: Die entspr. Spalten muss man tauschen, um auf $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{id}$ zu kommen.

Laag

Beweis: 21. 1.'09

$E_1 \dots E_n$: Standardbasen $\vec{a}_i$: Spaltenvekt.

$$\mathrm{Det}(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) = \mathrm{Det}\left(\sum_{j_1} a_{1j} E_{j_1} \dots \sum_{j} a\, E_j\right)$$

$$= \sum_{j_1 \dots j_n} a_{j_1 1} \cdot \dots \cdot a_{j_n 1}\ \mathrm{Det}(E_{j_1} \dots E_{j_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma_n} \cdot \mathrm{sign}(\sigma)$$

$$\det(a_1, \dots, a_n) = \det\left(\sum_{j_1} a_{1j_1} E_{j_1}, \sum_{j_2} a_{1 j_2} E_{j_2}, \dots, \sum_{j_n} a_{n j_n} E_{j_n}\right) =$$

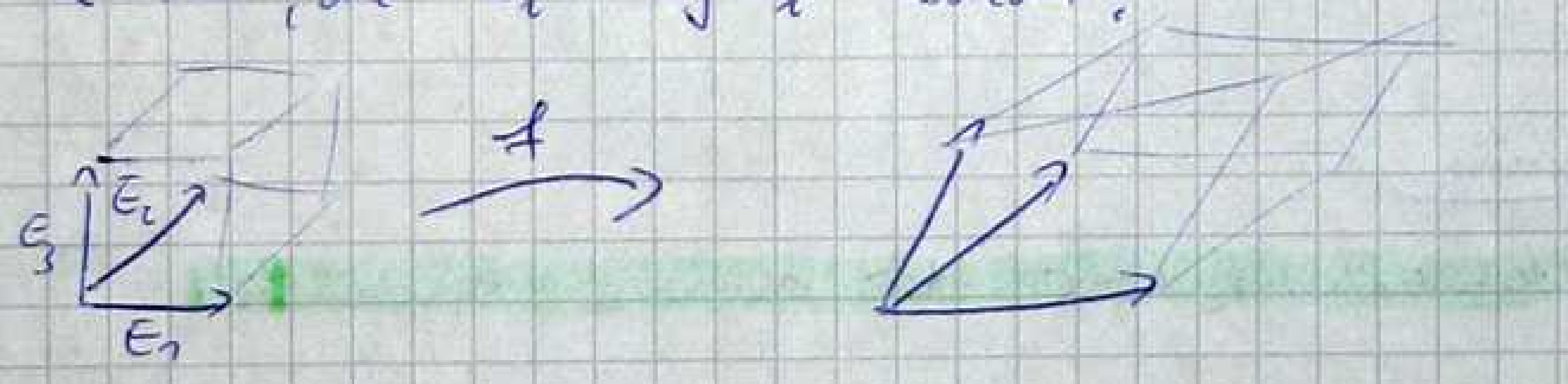
$$\sum_{j_1 \dots j_n} a_{1 j_1} \cdot \dots \cdot a_{n j_n} \cdot \det(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) =$$

$$\sum_{j_1 \dots j_n} a_{1 j_1} \cdot \dots \cdot a_{n j_n} \cdot \mathrm{sign}(\sigma)$$

Determinante als Volumenvermögen 23. 1.'09

~~det~~ $\det \mathfrak{M}_f$ ist die Volumenvermögen der lin. Abb.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die E_i auf a_i abbildet:



Vol = 1 $\mathrm{Vol} = \mathrm{Det}\, \mathfrak{M}_f$

$= (a_1 \times a_2) \cdot a_3$ (Spatprod.)

Rechenregeln für Determ.:

1) $\det(a_1 \dots a_{j-1}\ b_j + c_j\ a_{j+1} \dots a_n) =$

$\det(a_1 \dots b_j \dots a_n) + \det(a_1 \dots c_j \dots a_n)$ V_1

2) $\det(a_1 \dots a_{j-1}\ \lambda a_j\ a_{j+1} \dots a_n) =$

$\lambda \det(a_1 \dots a_j \dots a_n)$

23.1.'09

3) $\det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) =$
$-\det(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$ $\quad i \neq j$

(Schiefsymmetrie)

<u>Es folgt:</u>

$$\det\Big(a_1 \dots \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j \dots a_n\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det(a_1 \dots c_j \dots a_n)$$

<u>Beispiel:</u>

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 0 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 0 - 0 = 3 + 8 - 9 = 2$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Es handelt sich um einen anderen Einheitswürfel, bei dem zum „Normalen" 2 Spalten vertauscht sind.

<u>Folgerung</u>

1) $\det(a_1 \dots a_n) \neq 0 \iff a_1 \dots a_n$ lin. unabh.

2)

<u>Beweis:</u>

„⇒" (Gegenteil): $a_1 \dots a_n$ l.a. $\Rightarrow a_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i$

$\Rightarrow \det(a_1 \dots a_j \dots a_n) = \det\big(a_1 \dots \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i \dots a_n\big) =$

$\sum_{i \neq j} \lambda_i \det(a_1 \dots a_i \dots a_i \dots a_n) \overset{*}{=} 0$

i-te Stelle $\quad$ j-te Stelle (2 gleiche Vektoren → spannen kein Volumen, sondern „Fläche" auf.)

* Man kann zwei Spalten (a_i, a_i) vertauschen, ohne dass sich det ändert. D.h. Es gilt $-\det = \det \iff \det = 0$

„⇐" $a_1 \dots a_n$ l.u. $\Rightarrow \exists\, A^{-1} = (a_1 \dots a_n)^{-1} \Rightarrow$

$$1 = \det E = \underbrace{\det(A \cdot A^{-1}) = \underset{\neq 0}{\det A} \cdot \underset{\neq 0}{\det A^{-1}}}_{\text{bisher nicht gezeigt...}} = 1$$

z.z. $\det(a_1 \dots b_j + c_j \dots a_n) = \det(a_1 \dots b_j \dots a_n) + \det(a_1 \dots c_j \dots a_n)$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i,\sigma(i)} (b_j + c_j) \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \left\{ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i,\sigma(i)} b_j \right) + \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i,\sigma(i)} c_j \right) \right\}$$

- sign ausmultipl.
- Summe auseinander ziehen □

z.z. $\det(a_1 \dots \lambda a_j \dots a_n) = \lambda \det(a_1 \dots a_j \dots a_n)$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i \, \lambda a_j$$

~~λ ist konst. Fakt →~~

Da · ist kommutativ ist, daß man λ vor π und vor sign ziehen. Weil λ ein konst. Fakt ist, daß man λ vor Σ ziehen □

z.z. $\det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n)^{*} = -\det(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n)^{**}$

Damit ist rechts* und links** die σ ineinander überführen kann, muss man „eine Spalte" bei σ tauschen → das VZ ändert sich!

$$\Delta(\underbrace{a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + a_{31}b_3}_{\xi_1},\ \underbrace{a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{32}b_3}_{\xi_2},\ \underbrace{a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3}_{\xi_3})$$

$$= a_{11}\,\Delta(b_1, \xi_2, \xi_3) + a_{21}\,\Delta(b_2, \xi_2, \xi_3) + a_{31}\,\Delta(b_3, \xi_2, \xi_3)$$

$$= \underbrace{a_{11}a_{12}\,\Delta(b_1, b_1, \xi_3)}_{0} + a_{11}a_{22}\,\Delta(b_1, b_2, \xi_3) + a_{11}a_{32}\,\Delta(b_1, b_3, \xi_3)$$

$$+ a_{21}a_{12}\,\Delta(b_2, b_1, \xi_3) + \underbrace{a_{22}a_{12}\,\Delta(b_2, b_2, \xi_3)}_{0} + a_{21}a_{32}\,\Delta(b_2, b_3, \xi_3)$$

$$+ a_{31}a_{12}\,\Delta(b_3, b_1, \xi_3) + a_{32}a_{22}\,\Delta(b_3, b_2, \xi_3) + \underbrace{a_{31}a_{32}\,\Delta(b_3, b_3, \xi_3)}_{0}$$

$$= \underbrace{a_{11}a_{22}a_{13}\,\Delta(b_1, b_2, b_1)}_{0} + \underbrace{a_{11}a_{22}a_{23}\,\Delta(b_1, b_2, b_2)}_{0} + a_{11}a_{22}a_{33}\,\Delta(b_1, b_2, b_3)$$

$$+ \underbrace{a_{11}a_{32}a_{13}\,\Delta(b_1, b_3, b_1)}_{0} + a_{11}a_{32}a_{23}\,\Delta(b_1, b_3, b_2) + \underbrace{a_{11}a_{32}a_{33}\,\Delta(b_1, b_3, b_3)}_{0}$$

$$+ \underbrace{a_{21}a_{12}a_{13}\,\Delta(b_2, b_1, b_1)}_{0} + \quad 0 \quad a_{21}a_{12}a_{33}\,\Delta(b_2, b_1, b_3)$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13}\,\Delta(b_2, b_3, b_1) + \quad 0$$

$$+ a_{32}a_{23}a_{13}\,\Delta(b_3, b_1, b_2)$$

$$+ a_{31}a_{23}a_{13}\,\Delta(b_3, b_2, b_1)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_3} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$$

Det
Laag

23.1.'09

Determinantenform (Def) (Formal)

$\Delta: V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ mit den Eigensch.

a) multilinear: $\Delta(a_1 \ldots, \lambda a_i + \mu \tilde{a}_i, \ldots a_n) =$

$\lambda \Delta(a_1 \ldots a_i \ldots a_n) + \mu \Delta(a_1 \ldots \tilde{a}_i \ldots a_n)$

b) schiefsymmetr.: $\Delta(a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n) =$

$-\Delta(a_1 \ldots a_j \ldots a_i \ldots a_n)$

Die Menge $\{\Delta\}$ bildet einen 1-dim $\mathbb{K}$-VR.

Satz: (C.) Δ eindeutig

Eine Det'form ist bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt: $\Delta, \tilde{\Delta} \Rightarrow \tilde{\Delta} = \lambda \Delta$

Beweis:

$\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ sei feste Basis von V

$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \Delta\left(\sum_{j_1} a_{j_1 1} \vec{b}_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n} a_{j_n n} \vec{b}_{j_n}\right) \overset{a)}{=}$

$\sum_{j_1 \ldots j_n} a_{j_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{j_n n} \, \Delta(b_1, \ldots, b_n)$ Dieses Δ ist oft 0, genau dann, wenn ein Basiselement b_i doppelt vorkommt. D.h. nur wenn alle b_i genau einmal Argument von Δ sind, ist $\Delta = \{-1; 1\}$. Das tritt genau dann ein, wenn die j_i eine Permutation sind. So schreibt man statt j_i wieder $\sigma(i)$ und es gilt:

$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \cdot \Delta(b_1 \ldots b_n)$

$= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \cdot \operatorname{sign}(\sigma)}_{C}$

Analog: $\tilde{\Delta}(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}}_{\tilde{C}} \cdot \tilde{\Delta}(b_1 \ldots b_n)$

$\lambda = \frac{\tilde{\Delta}(\mathcal{B})}{\Delta(\mathcal{B})}$

Also $\Delta = C \cdot \Delta(\mathcal{B}) = \tilde{C}\, \tilde{\Delta}(\mathcal{B}) = \tilde{\Delta} \Rightarrow$ BW $\blacksquare$

$\tilde{\Delta} = \lambda \cdot \Delta$ $\lambda = 1 \Rightarrow \tilde{\Delta} = \Delta$

Determinante – alternative Definition

25.1.'09

Sei Δ eine Det'form $(\Delta \neq 0)$, so ist $(n = \dim_K V)$

$\frac{\Delta(\vec{a}_i)}{\Delta(\vec{e}_i)_{=1}} =$ wegen Normierung

$$\det A = \Delta(\vec{a}_i)$$ mit Spaltenvektoren $\vec{a}_i$, A quadratisch, $i = 1, \dots, n$

Außerdem kann man die Determinante einer Funktion $f: V \to V$ (lin.) eindeut. bestimmen:

$$\det f = \frac{\Delta(f(x_i))}{\Delta(x_i)} \quad i = 1, \dots, n, \; x_i \in V$$

Satz:

$$\det f = \det \mathfrak{M}_f(\mathcal{B}, \mathcal{B})$$

Beweis:

Sei $y_i \in V$, $f(y_i) = x_i = \mathfrak{M}_f \, y_i$

$$\det f = \Delta(f(y_i)) \div \Delta(y_i) = \frac{\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)} \, \Delta(a_i)}{\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)} \, \Delta(b_i)} = \frac{\det \mathfrak{M}_f}{1}$$

Folgerung:

$$\det \mathrm{id} = 1$$

Satz: Determinante einer Funkt. / unabh. von Basis bei versch. Basen gleich /

$f: V \to V$ lin. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V, $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$

$A_1 = \mathfrak{M}_f(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$, $A_2 = \mathfrak{M}_f(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$

$$\det A_1 = \det A_2$$

(Determ. ist von Basis unabh.)

Beweis:

$$\mathfrak{M}_f(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \underbrace{\mathfrak{M}_{id}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)}_{=P} \cdot \underbrace{\mathfrak{M}_f(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)}_{=A_2} \cdot \underbrace{\mathfrak{M}_{id}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)}_{=P^{-1}}$$

$$\det \mathfrak{M}_f(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \det(A_1) \overset{!}{=} \det(A_2) = \det \mathfrak{M}_f(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$$

$$\det(P \cdot A_2 \cdot P^{-1}) = \det P \cdot \det A_2 \cdot \det P^{-1} = \underbrace{\det P \cdot \det P^{-1}}_{1} \cdot \det A_2 \quad \blacksquare$$

$$\det f = \frac{\Delta(\vec{f}(\vec{x}_i))}{\Delta(\vec{x}_i)} = \frac{\Delta(M_f \cdot \vec{x}_i)}{\Delta(\vec{x}_i)}$$

$\vec{x}_i \in V$

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$$

$$M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_f = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\frac{\Delta(M_f \cdot \vec{x}_i)}{\Delta(x_i)} = \frac{\sum_{\sigma \in S_n} \cancel{\prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}} \cdot \Delta(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)}{\sum_{\sigma \in S_n} \cancel{\prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}} \, \Delta(b_1 \dots b_n)}$$

$$= \frac{\Delta M(a_1 \dots a_n)}{\Delta(b_1 \dots b_n)} = \frac{\det M_f}{\pm 1}$$

wg Normierung

$$\Rightarrow \det f = \det M_f$$

Laag

23.1.'09

Folgerung: Verkettung / Matrizenmultiplikation & Determin.

(1) $\det(g \circ f) = \det g \cdot \det f$

(2) $\det(B \cdot A) = \det B \cdot \det A$

Beweis:

(1) $\det(g \circ f) = \dfrac{\Delta(g \circ f(x_i))}{\Delta(x_i)} = \dfrac{\det g \cdot \Delta(f(x_i))}{\Delta(x_i)} = \dfrac{\det g \cdot \det f \cdot \Delta(x_i)}{\Delta(x_i)}$

$= \det g \cdot \det f$

(2) $B = \mathfrak{M}_g$, $A = \mathfrak{M}_f$, (1)

Folgerung Inverse

(1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ (wenn A invertierbar)

(2) $\det(BAB^{-1}) = \det A$

Beweis:

(1) $1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1$

Weil $\det A \neq 0$ $\det A \cdot \dfrac{1}{\det A} = 1$

(2) $\det(BAB^{-1}) = \det B \cdot \det A \cdot \det B^{-1} = \det B \cdot \det B^{-1} \cdot \det A =$

$\det B \cdot \dfrac{1}{\det B} \cdot \det A = 1 \cdot \det A = \det A$

Satz Transponierte

$$\det A^T = \det A$$

Beweis:

Da σ bij. Abb $\Rightarrow \exists\, \sigma^{-1}$, $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i)\,i} = \det A^T$

wahr, da $a_{i\,\sigma(i)} = a_{\sigma^{-1}(i),\,i}$ $\quad i \underset{\sigma^{-1}}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} j$

Satz: Eigenschaften der Determinante (Zusammenfas.)

$\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} : \quad A \mapsto \det A$ ist

(1) multiplikativ:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

(2) bewahrt die Eins:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist neutr. Elem. von } (M_n(\mathbb{K}), \cdot)\right)$$

(3) surjektiv

$$\forall_{d \in \mathbb{K}} \exists_{A \in M_n(\mathbb{K})} : \det A = d$$

(4) invariant unter Transponierung

$$\det A = \det A^T$$

(5) jede lineare Abb. hat eine ~~Det~~ eindeutige Determinante. Diese ist invariant unter Basenwahl, also ändert sich bei versch. Basen nicht

$$\det f = \det \mathfrak{M}_f(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \det \mathfrak{M}_f(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) \qquad \forall_{f \text{ lin.}\ f: V \to V}$$

Berechnung von Determinanten nach Laplace

- Entwicklung nach der j-ten Spalte: (für ein festes j)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

- Entwicklung nach der i-ten Zeile (für ein festes i):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

mit

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1} & & & & & \\ a_{i+1} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Einträge der i-ten Zeile fehlen, ebenso die der j-ten Spalte

Diese $((n-1)\times(n-1))$-Matrix heißt auch Kofaktor von A.

<u>Beweis</u> (j-te Spalte – analog i-te Zeile)

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma: i\mapsto j}} \operatorname{sgn}(\sigma)\,(a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)})$$

j fest! ⇒ Es wird jede σ genau einmal erreicht.

τ ist eine besondere Permutation, die dafür sorgt, dass:

$$a_{1\sigma(1)} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Die i-te Zeile wird nach links gebracht ⇒ $(i-1)$ Tauschungen nötig
Die j-te Spalte wird nach oben gebracht ⇒ $(j-1)$ Tauschungen nötig

$(i-1)+(j-1)$ Tauschungen nötig

$$a_{ij} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

fest

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau\in S_{n-1}} (-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{sgn}(\sigma)\,(a_{2,\tau(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau(n)})$$

$\tau(1) = j$ ist immer wahr...

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} \underbrace{\sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau) \left(a_{2,\tau(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} \right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \qquad \blacksquare$$

Bsp.:

1)
$$\left| \begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & & & \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 4 \\ & & & & & 0 & 1 & 7 \\ & & 0 & & & 3 & 2 & 1 \end{array} \right| = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-4) \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

berechenbar mit Regel v. Sarrus

$$\begin{array}{c|c} & j \rightarrow \\ \hline i \downarrow & \left|\begin{array}{cccccccc} 0&0&0&0&6&&& \\ 0&2&0&0&0&&0& \\ 0&0&4&0&0&&& \\ 1&0&0&0&0&&& \\ 0&0&0&4&0&&& \\ &&&&&2&1&4 \\ &&0&&&0&1&7 \\ &&&&&3&2&1 \end{array}\right| \end{array} = \underbrace{(-1)}_{1} \left|\begin{array}{cccccccc} 6&0&0&0&0&&& \\ 0&2&0&0&0&&0& \\ 0&0&4&0&0&&& \\ 0&0&0&1&0&&& \\ 0&0&0&0&4&&& \\ &&&&&2&1&4 \\ &&0&&&0&1&7 \\ &&&&&3&2&1 \end{array}\right| =$$

Es waren zwei Vert. nötig

$$6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \left|\begin{array}{ccc} 2&1&4 \\ 0&1&7 \\ 3&2&1 \end{array}\right|$$

<u>Weil:</u>

- Entwicklung nach 1. Zeile ($i = 1$, fest!)

$$\det A = \sum_{j=1}^{8} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det(A_{1j}) =$$

$$\begin{cases} j = 5: & (-1)^{6} \cdot a_{15} \cdot \det(A_{15}) = 6 \det(A_{15}) \\ j \neq 5: & a_{1j} = 0 \Rightarrow \quad = 0 \end{cases}$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} \cancel{0\,0\,0\,0\,6} &&&& \\ 0&2&0&0&\cancel{0}&&0& \\ 0&0&4&0&\cancel{0}&&& \\ 1&0&0&0&\cancel{0}&&& \\ 0&0&0&4&\cancel{0}&2&1&4 \\ &&&&&0&1&7 \\ &&0&&&3&2&1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1. \\ 2. \\ 3. \\ \vdots \\ \\ \\ 7.\ \text{Zeile} \end{array} = \begin{pmatrix} 0&2&0&0&&& \\ 0&0&4&0&&0& \\ 1&0&0&0&&& \\ 0&0&4&0&&& \\ &&&&2&1&4 \\ &&&&0&1&7 \\ &&0&&3&2&1 \end{pmatrix}$$

$\det A_{15}$: Entw. nach 1. Zeile:

$$\det A_{15} = \sum_{j=1}^{7} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det A$$

$$= \left.\begin{cases} j = 2 & a_{12} = 2 \ \ldots \\ j \neq 2 & a_{1j} = 0 \ \ldots \end{cases}\right\} = 2 \cdot \det (A_{15})_{12}$$

positiv, weil i ist ja eig. $= 2$, wenn man von A ausgeht.

$$(A_{15})_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{0\,2\,0\,0} &&&&& \\ 0&\cancel{0}&4&0&&0& \\ 1&\cancel{0}&0&0&&& \\ 0&\cancel{0}&4&0&&& \\ &&&&2&1&4 \\ &&&&0&1&7 \\ &0&&&3&2&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&4&0&&& \\ 1&0&0&&0& \\ 0&4&0&&& \\ &&&2&1&4 \\ &0&&0&1&7 \\ &&&3&2&1 \end{pmatrix}$$

usw.