Hausaufgabe 13

Michael Kopp

3. November 2008

Nr. 2

Es sind die Relationen

$$\sim: \ (a,b) \sim (a',b') :\Leftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b \tag{1}$$

und

$$\bullet: \ [(a,b)] \bullet [(a',b')] := [(a \cdot a', b \cdot b')] \tag{2}$$

gegeben.

Ich nehme vier Tupel, von denen jeweils zwei in Relation zueinander stehen:

$$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \tag{3}$$

$$(a',b') \sim (c',d') \Rightarrow a' \cdot d' = b' \cdot c' \tag{4}$$

Es ist zu zeigen, dass

$$[(a,b) \bullet (a',b')] = [(c,d) \bullet (c',d')] \tag{5}$$

Wenn dies nämlich zutrifft, so ist • wohldefiniert (egal auf welche Tupel man • anwendet – es wird immer gleich gerechnet).

Nach 2 ist für 5 folgender Ausdruck äquivalent:

$$[(a \cdot a', b \cdot b')] = [(c \cdot c', d \cdot d')] \tag{6}$$

Über die Definition 1 kann man nun die beiden Äquivalenzklassen vergleichen. Sie sind dann gleich, wenn die einzelnen Tupel in Relation ($\sim$) stehen – also wenn nach 1 gilt:

$$a \cdot a' \ \cdot \ d \cdot d' = b \cdot b' \ \cdot \ c \cdot c' \tag{7}$$

$$aa' \cdot dd' = bb' \cdot cc' \tag{8}$$

Dies kann man umformen nach

$$ad \cdot a'd' = bc \cdot b'c' \tag{9}$$

Nun kann man Formel 3 verwenden ($ad = bc := x$), so ergibt sich

$$x \cdot a'd' = x \cdot b'c' \tag{10}$$

Und mit Formel 4 verwendet ($a'd' = b'c' := y$) ergibt sich:

$$x \cdot y = x \cdot y \tag{11}$$

Und dies ist wahr.
$\square$

Nr. 3

$$L:\ \mathcal{A} \to \mathbb{Q}:\ p = (a,b) \mapsto \frac{b}{a};\ q = (c,d) \mapsto \frac{d}{c} \tag{12}$$

$$L(p \bullet q) = L((ac, bd)) = \frac{bd}{ac} \tag{13}$$

$$L(p) = L((a,b)) = \frac{b}{a} \tag{14}$$

$$L(q) = L((c,d)) = \frac{d}{c} \tag{15}$$

$$L(p) \cdot L(q) = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac} = L(p \bullet q) \tag{16}$$

$$L^{-1}:\ \mathbb{Q} \to \mathcal{A}:\ \frac{b}{a} \mapsto (a,b) \tag{17}$$

$$L^{-1}:\ \mathbb{Z} \to \mathcal{A}:\ \frac{b}{a} \mapsto (a,b) \mid b = z \cdot a \tag{18}$$

Die Einschränkung für L^{-1} ist, dass nur Ganze Zahlen auf (a,b) abgebildet werden dürfen. Ganze Zahlen $\frac{b}{a} = \tilde{z} \in \mathbb{Z}$ sind solche, bei denen b ein Vielfaches von a ist: $b = z \cdot a$. Daraus ergibt sich:

$$L^{-1}:\ \mathbb{Z} \to \mathcal{A}:\ \frac{b}{a} \mapsto (a,b) \mid (a,b) \sim (\tilde{b}, 1) \tag{19}$$

Nr. 4

$$\sharp : \ (a,b)\sharp(c,d) \ :\Leftrightarrow \ (ac, bc+ad) \tag{20}$$

Denn so gilt:

$$L((a,b)\sharp(c,d)) = L((ac, bc+ad)) = \frac{bc+ad}{ac} \tag{21}$$

$$L((a,b)) = \frac{b}{a} \tag{22}$$

$$L((c,d)) = \frac{d}{c} \tag{23}$$

$$L((a,b)) + L((c,d)) = \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc+ad}{ac} \tag{24}$$