δ-Funktion

Michael Kopp

25. November 2008

1 Definition

Eine δ-Funktion ist eine Funktion, die bestimmte Eigenschaften erfüllt:

1. Sie muss an einer Stelle einen *Peak* haben – also an dieser Stelle ein Maximum haben, das sehr steil und schlank nach oben ragt, also

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta \to a \text{ für } x \in U_\varepsilon(x) \\ \delta \to 0 \text{ für } x \notin U_\varepsilon(x) \end{cases} \tag{Eigenschaft 1}$$

   Für $\varepsilon \to 0$ wird die ε-Umgebung um x immer schmäler, bis $U_\varepsilon(x) \to 0$. Dann gilt aber auch $a \to \infty$!

2. Die Fläche unter der Kurve muss 1 sein

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{Eigenschaft 2}$$

2 Limes

Weil für die δ-Funktion $\varepsilon \to 0$ gelten muss, kann man sie gewissermaßen als $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)$ interpretieren. D.h. Eine Funktion *strebt* für $\varepsilon \to 0$ gegen eine Funktion mit den Eigenschaften (Eigenschaft 1(und (Eigenschaft 2). Diese Funktion, die aus einem Grenzwertprozess entstanden ist, bezeichnet man dann als δ-Funktion.

Damit man die δ-Funktion nicht nur an der Stelle $x = 0$ verwenden kann, verwendet man Stattdessen die Funktion $\delta(x - a)$ – d.h. die δ-Funktion ist auf der x-Achse um a verschoben (für $a > 0$ nach rechts, für $a < 0$ nach links).

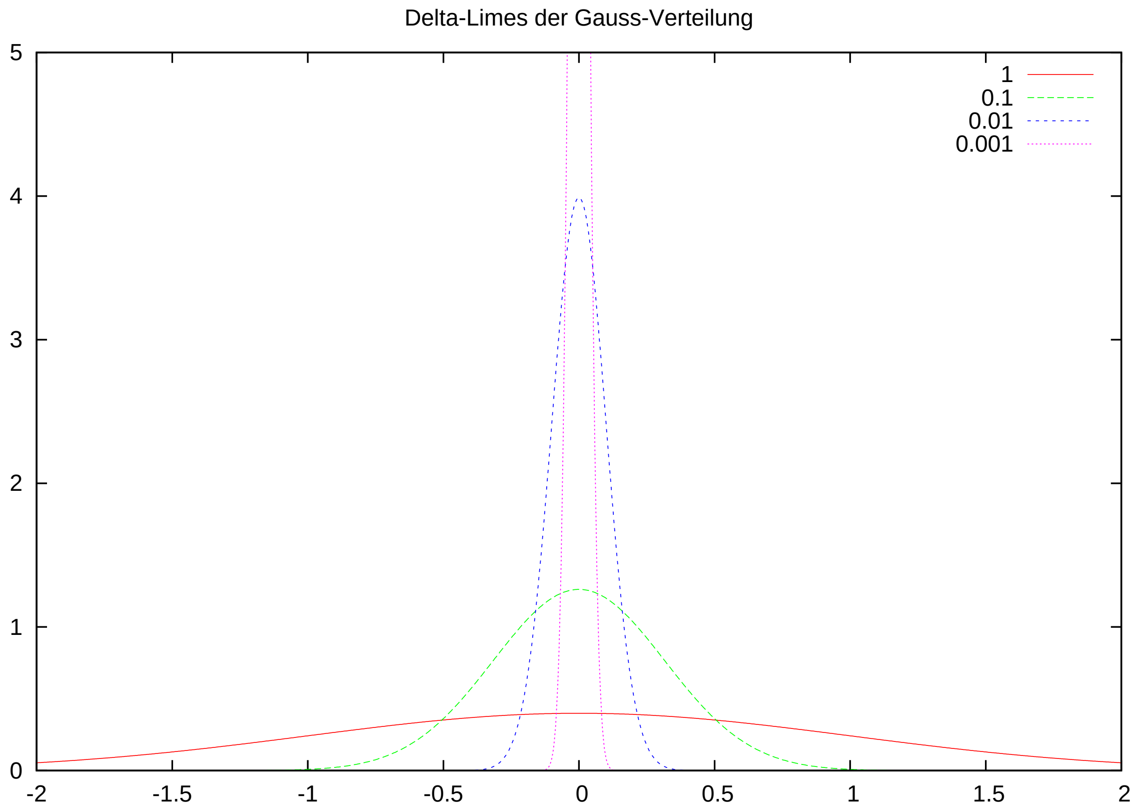

Abbildung 1: Graph der Funktion Gaußverteilung für verschiedene ε

3 Funktionen

Man kann deshalb verschiedene Funktionen $f_\varepsilon(x)$ verwenden, die für $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)$ die oben genannten Eigenschaften annehmen. Diese Funktionen bezeichnet man als *Darstellungen der δ-Funktion*. Beispiele sind (die Graphen dieser Funktionen sind unten geplottet).

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\varepsilon}} \qquad \text{(Gaußverteilung)}$$

$$\delta(x-a) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2} \qquad \text{(Lotentzkurve)}$$

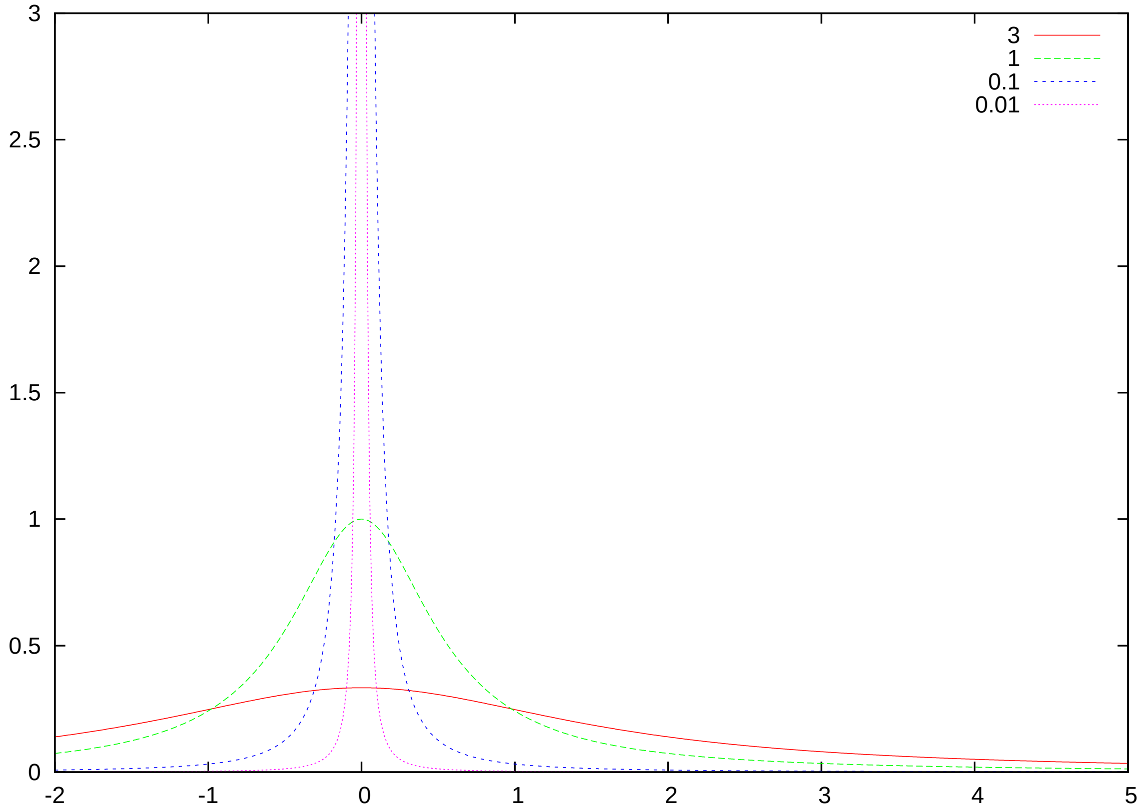

Abbildung 2: Graph der Funktion Lotentzkurve für verschiedene ε Achtung: Der Peak liegt über $x = 0$, auch wenn es in der Darstellung nicht so aussieht.