Abschlussklausur

Extycion

1 Pflichtteil (ohne GTR)

A1 ***(2 Punkte)*** Bilde die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x \cdot \cos(2x+3)$

A2 ***(2 Punkte)*** Berechne das Integral $\int_0^{e-1} \frac{1}{1+x} \,\mathrm{d}\, x$

A3 ***(3 Punkte)*** Besitmme die Lösung der Gleichung $\cos^2 x - \cos x = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$

A4 ***(4 Punkte)*** Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

1. Bestimme die Punkte des Schaubildes von f mit waagerechter Tangente
2. Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1|\frac{1}{2})$ die Normale n. Bestimme eine Gleichung von n.

A5 ***(5 Punkte)*** Die Abbildung 1 zeigt das Schaubild einer Funktion f. F ist die Stammfunktion von f.

1. Bestimme die Extrem- und Wendestellen von F (*Hinweis: Bei* -stellen *ist nur nach dem* x*-Wert gefragt.*)
2. Wo hat das Schaubild von F im Bereich $-1,5 \leq x \leq 3$ Tangenten mit *positiver* Steigung? Begründe deine Antwort knapp.
3. Das Schaubild von F geht durch den Punkt $P(-1|0)$. Skizziere das Schaubild von F *(Also von* $\mathcal{I}_a(x) = \mathcal{I}_{-1}(x)$*).*

A6 ***(3 Punkte)*** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ k \end{pmatrix}$. Bestimme k so, dass sich der Vektor $\vec{c}$ als *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt. Gibt diese Linearkombination an.

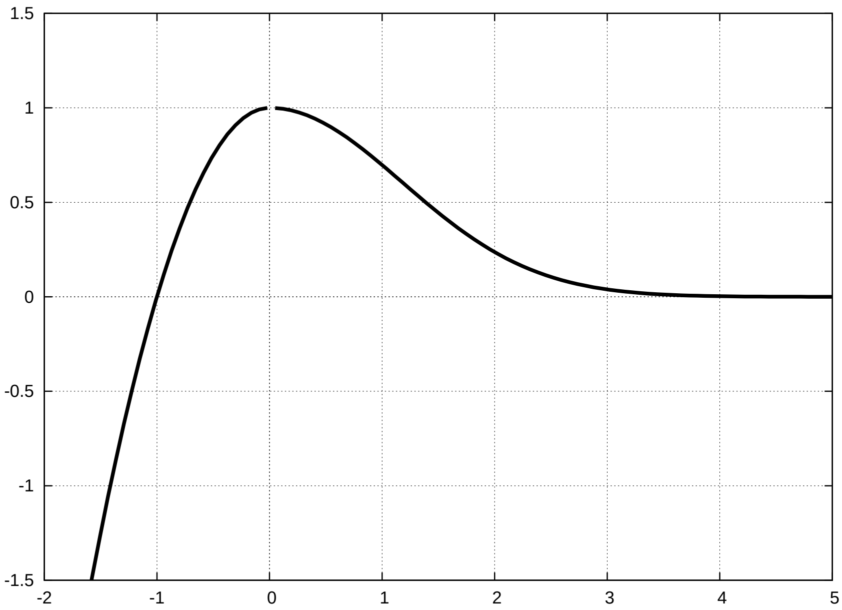


Abbildung 1: Abbildung zu Aufgabe **A5**

A7 ***(4 Punkte)*** Die Punkte $A(1|1|3)$, $B(5|-3|1)$ und $C(3|5|-1)$ liegen in einer Ebene E.

1. Bestimme eine Gleichung der Ebene E in *Koordinatenform*
2. Zeige, dass das Dreieck ABC *gleichschenklig* und *rechtwinklig* ist.

A8 ***(3 Punkte)*** Gegeben sind die Geraden g und h im Raum. Beschreibe ein Verfahren, mit dem man die gegenseitige Lage von g und h untersuchen kann.

A9 (Zusatzfrage) ***(1 Punkte)*** Benenne das Gesetz, das besagt, dass

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$$

A10 (Zusatzfrage) ***(1 Punkte)*** Wähle zwischen den folgenden beiden Aufgaben:

$$\text{Zeige } 0,\bar{9} = 1 \quad \text{oder} \quad \text{Zeige } a^0 = 1,\ a \in \mathbb{R}$$

A11 (Zusatzfrage) ***(1 Punkte)*** Kann die folgende Aussage gelten (bitte mit Erklärung):

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

2 Wahlteil – Analysis

Gegeben sei die Funktion f durch

$$f(x) = -x + 4 - \frac{5}{x+2} \text{ für } x > -2$$

mit dem Schaubild K.

1. ***(5 Punkte)*** Skizziere K für $-2 < x < 8$
Berechne den Inhalt der von K und der x-Achse eingeschlossenen Fläche
Berechne die maximale Ausdehnung dieser Fläche in x- und in y-Richtung

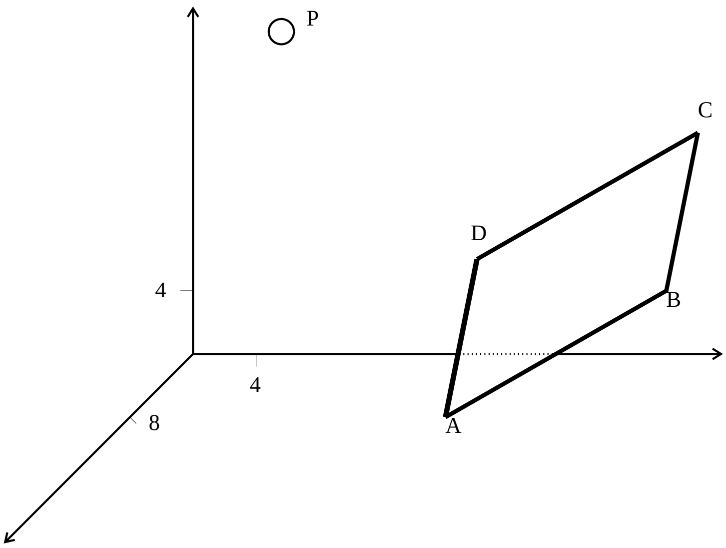
2. ***(4 Punkte)*** Gib die Gleichung der Asymptoten von K an. K schließt mit den beiden Koordinatenachsen und der schiefen Asymptote eine Fläche ein. Berechne deren Inhalt.

3. ***(5 Punkte)*** Im Kurvenpunkt $B_1(-\frac{1}{2}|\frac{7}{6})$ wird eine Tangente an K gelegt. Sie schneidet die y-Achse im Punkt C. Bestimme die Koordinaten von C. Von C aus gibt es eine zweite Tangente an K. Bestimme eine Gleichung dieser Tangente und die Koordinaten ihres Berührpunktes B_2.

4. ***(4 Punkte)*** In das Flächenstück zwischen K und der x-Achse soll ein Trapez mit parallel zur y-Achse liegender Grundseite und der Höhe 2 einbeschrieben werden. Bestimme die Endpunkte desjenigen Trapezes, welches den größten Inhalt hat. *Hinweis: Ein Trapez hat zwei parallele Seiten; diese sollen bei x_t und $x_t + 2$ liegen, x_t ist zu bestimmen.*

3 Wahlteil – Analytische Geometrie

Eine rechteckige Leinwand wird von einem Scheinwerfer angestrahlt, der einen Lichtkegel erzeugt. Die Punkte $A(8|20|0)$, $B(-4|26|0)$, $C(-2|30|12)$ und D bilden die Ecken der Leinwand. Der Scheinwerfer befindet sich im Punkt $P(-9|1|16)$ (Koordinaten in Metern).



1. ***(6 Punkte)*** Bestimme die Koordinaten des Punkte D *(Tipp: Leinwand ist* rechteckig*)*.
Gib eine Gleichung der Ebene an, in der sich die Leinwand befindet.
Wie weit ist der Scheinwerfer von der Leinwand entfernt? *(Tipp: Abstand Punkt–Ebene mit* HESSE*'scher Normalenform:* $d = |(\vec{x} - \vec{s}) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}|$*)*
Zeige, dass die Leinwand in ihrem Mittelpunkt vom Scheinwerfer orthogonal angestrahlt wird *(die Lichtstrahlen treffen unter* $90°$ *auf)*.

2. ***(6 Punkte)*** Die von dem Scheinwerfer vollständig beleuchtete Leinwand wirft einen Schatten in die x_1x_2-Ebene *(Tipp: hier ist* $x_3 = 0$*)*. Bestimme die Eckpunkte des Schattens.
Untersuche, was für eine Figur der Schatten bildet
Welchen Öffnungswinkel muss der Lichtkegel mindestens haben, damit die gesamte Leinwand beleuchtet wird *(Tipp: Der Winkel muss so groß sein, dass die gesamte Fläche beleuchtet wird – also die beiden am weitesten entfernten Punkte... welche sind das?)*

3. ***(4 Punkte)*** Der Öffnungswinkel betrage nun $36°$. Der Scheinwerfer wird von P aus orthogonal zur Leinwand so weit bewegt, bis sein gesamtes Licht vollständig auf die Leinwand trifft. Bestimme die Koordinaten der neuen Scheinwerferposition P'. *(Tipp: Kein Licht darf mehr über die Leinwand herausreichen – muss also innerhalb der kleinsten Abstände auf der Leinwand auf diese fallen; also muss der Durchmesser des Lichtkegels* kleiner *sein. Welcher ist das? GTR verwenden, nicht runden.)*