Übungsklausur Klasse 12 / 13

Extycion
www.extycion.de

Teil I
Integrale

1 Aufleitungen

Leite auf:

1. $f(x) = 3x^4$
2. $f(x) = 2x^{-2}$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 3x^2 - 2$
4. $f(x) = 5x^3 - 2x + 9x^{-1} - x^{-3}$
5. $f(x) = sin(3x)$
6. $f(x) = 2x^2 + cos(2x+1)$
7. $f(x) = x^{-1}$

Beende folgenden Satz: $f'(x)$ verhält sich zu $f(x)$, wie $f(x)$ zu ________. (Gib den *Namen* und das *Formelzeichen* an.

2 Integrale

Bestimme falls möglich das Integral der Funktion $f(x)$ im Intervall I (bzw. bestimme die einzelnen Integrale in den Intervallen I_n). Verwende dazu den *Hauptsatz der Integralrechnung* – gib also bei jeder Rechnung die Stammfunktion an.

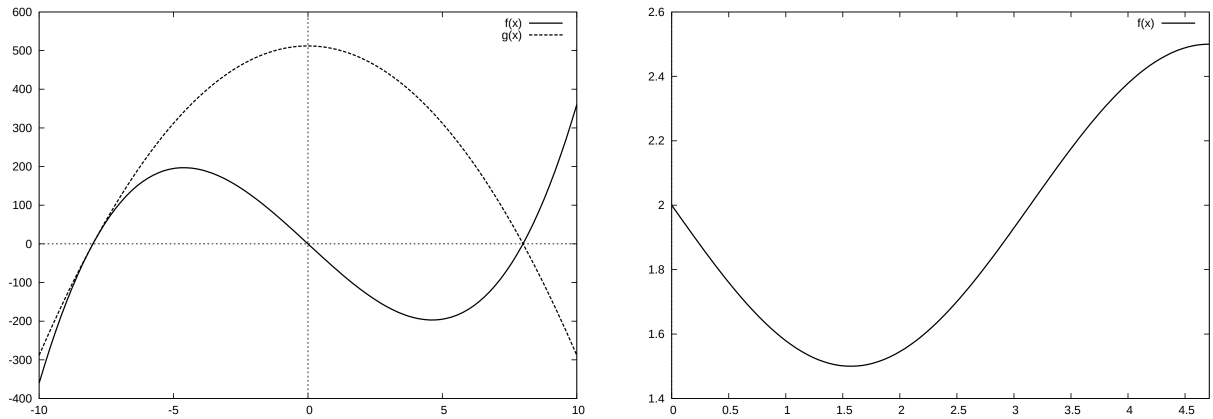
1. $f(x) = -x^2 + 4 \quad I = [-2; 2]$
2. $f(x) = sin(x) \quad I = [-\pi; \pi]$
3. $f(x) = \frac{2}{x^2} \quad I_1 =]0; 2] I_2 = [2; \infty[$

3 Flächeninhalt

1. Was ist der Unterschied zwischen dem *Flächeninhalt* A, den eine Funktion mit der x-Achse einschließt und dem *Integral* $\int$?
2. Bestimme für die Funktion $f(x) = x^3 - 64x$ das Integral zwischen den beiden äußeren Nullstellen
3. Bestimme für $f(x)$ den Flächeninhalt zwischen den beiden äußeren Nullstellen
4. Bestimme die Fläche zwischen den Funktionen $f(x)$ und $g(x) = -8x^2 + 512$ zwischen den beiden Schnittstellen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

4 Rotationskörper

Bestimme das Volumen V des Rotationskörpers der entsteht, wenn man die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}sin(x) + 2$ im Integral $I = [0; \frac{3}{2}\pi]$ um die x-Achse rotieren lässt.



(a) Graph zur Aufgabe 3　　(b) Graph zur Aufgabe 4

Abbildung 1: Schaubilder diverser Funktionen

5 Mittelwertsatz

Bestimme den Mittelwert m der Funktion $f(x) = sin(x)$ im Intervall $I = [0; \pi]$

Teil II
Wachstum

6 Gleichungen lösen – e-Funktion und ln

Löse die Gleichungen:

1. $e^x = 4$
2. $ln(x) = 5$
3. $e^{x^2-4} = 1$
4. $e^x = sin(x)$ (*Denken*, nicht rechnen!)

7 Wachstumsvorschrift bestimmen

Auf einem Konto werden 1000 Euro zu einem festen Zinssatz von jährlich $p = 3,5\%$ angelegt.

1. Bestimme die Wachstumsvorschrift für $f(t)$ für t in Jahren und f in Euro – verwende dazu die e-Funktion.
2. Ändere die Formel so ab, dass man für t Monate einsetzen kann
3. Gib die Differentialgleichung für die Wachstumsvorschrift an und zeige, warum gilt $f(x) \sim f'(x)$.

8 Wachstumsvorschrift bestimmen

Ein Baum hat eine Wuchshöhe von 20 Metern. Im Lauf seines Lebens nähert er sich dieser Marke immer weiter an, wird sie aber nie ganz erreichen. Am Anfang seines Wachstums wächst er wesentlich schneller, als am Ende.

In einer Beobachtung wird für Jedes Jahr t die Baumhöhe f gemessen. Zu Beginn der Messungen ($t = 0$ ist der Baum bereits 60 cm hoch, nach 5 Jahren hat er eine Höhe von $2,70$ Metern erreicht.

Ermittele eine Wachstumsvorschrift $f(t)$ für den Baum. Wann wird er die Hälfte seiner voraussichtlichen Wuchshöhe erreicht haben?

Teil III
Geometrie

9 Grundlagen

Berechne:

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. φ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Sind folgende Vektoren linear abhängig? $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Erkläre: Was bedeutet ein Skalarprodukt von $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

10 Schnitte

1. Die beiden Ebenen $E : -2x_1 + x_2 + x_3 = 5$ und $F : 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -6$ schneiden sich in der Geraden g. Gib eine Gleichung für g an.

2. Die Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ schneidet $E : 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 16$ in Punkt P. Bestimme P.

11 Gegenseitige Lage

1. Liegt die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E : 25x_1 + 5x_2 - 35x_3 = 195$, ist sie parallel zu E oder schneidet sie E?

2. Liegt einer der beiden Punkte $P(13|12|52)$ oder $Q(21|-12|88)$ auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$?

3. Berechne den Winkel zwischen den beiden Ebenen $E : 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ und $F : x_1 + x_2 - 5x_3 = 7$

4. Wie verhalten sich die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $i : \vec{x} = \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \\ 56 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$?

12 Umwandlungen, Skizze

1. Wandele die Ebene $E : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ in Koordinatenform um ($E* : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$)

2. Skizziere die Ebene $E : -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -6$

3. Die Punkte $A(2|1|-3,5)$, $B(6|2|0)$ und $C(3|5|3)$ liegen in einer Ebene E. Bestimme eine Ebenengleichung für diese Ebene.