

MICHAEL KOPP

Physik der Atome und Kerne

Eine Zusammenfassung

Bei Prof. Dr. Wrachtrup, 2010

19. Mai 2010
Version 0.1 α

Vorwort

Diese Zusammenfassung enthält Notizen zum Vorlesungsstoff und interessantem darüber hinaus... Ich gehe davon aus, dass man die Vorlesung Quantenmechanik I schon gehört hat – deswegen liefert dieses Script an entsprechenden Stelle nur Skizzen. Überhaupt wird nur wenig hergeleitet sondern – ganz im Sinne der Experimentalphysik – auf die Ergebnisse verwiesen.

Zur Notation: Ein \sim bedeutet, dass die Werte in der *Größenordnung* stimmen.

Inhaltsverzeichnis

1	Atomare Größen	2
1.1	Einige Hausnummern (Zahlenwerte)	2
1.2	Bestimmung atomarer Größen	2
1.3	Endliche Breite von Spektrallinien	2
2	Bor'sches Atommodell	4
2.1	Wasserstoffähnliche Spektren	6
2.2	Einführung der l -Quantenzahl im Bohr'schen Modell	6
2.3	Quantensprünge durch Stöße	7
3	Quantenmechanische Betrachtungen	8
3.1	Wasserstoffatom – Skizze	8
3.2	Kopplung mit dem Elektrischen Feld	9
3.2.1	Der Stark-Effekt	9
3.2.2	Quantentheorie des linearen Stark-Effekts	10
3.2.3	Quantentheorie des quadratischen Stark-Effekts	10
3.3	Licht-Atom Wechselwirkung	11
3.3.1	Wechselwirkung Zwei-Atom-System mit kohärentem resonanten Lichtfeld	11
4	Laser	11
4.1	Aufbau und Funktionsweise	11
4.2	Beispiel: He-Ne-Laser	12
4.3	Laserbilanz	12
4.4	Anwendung: Laserkühlung	12

1 Atomare Größen

1.1 Einige Hausnummern (Zahlenwerte)

Ein paar interessante Zahlen sind in Tab. 1 zusammengefasst.¹

Längen	
Größe des Atomkerns	$5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
Ansdehnung der Hülle	$1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
Massen	
Elektron	$9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Proton	$1.67261 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	$1.67482 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Tabelle 1: Einige atomare Größen

Um sich eine Vorstellung von **Energieskalen** zu machen, betrachtet man:²

Elektrostatische WW $E \sim -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{a_0/Z} \sim 4 \text{ eV}$

Relativistische Effekte Aus $E = \gamma mc^2$ folgt für die *kinetische Energie*: $T = (\gamma - 1)mc^2$ und für $v \ll c$ mit Taylor: $T \sim \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2}$; diese Korrekturen spielen nur bei sehr großen Energien eine Rolle.

Feinstruktur: Spin-Bahn-WW Das kreisende Elektron erzeugt ein B-Feld – nach Biot-Savart $B = \frac{\mu_0}{4\pi} Ze(\mathbf{v} \times \mathbf{r})/r^3$ und mit $\mathbf{L} = m\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ ist $\mathbf{B} = -\frac{Ze\mu_0}{4\pi r^3 m_e} \mathbf{L}$ –, das Elektron selbst hat magn. Dipolmoment $\mu \sim \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ und damit ist die Kopplungsenergie $E \sim -\mu \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_B^2}{a_0^3} \cdot Z^4$. Durch diese Z^4 -Abhängigkeit ist dies für schwere Atome sehr wichtig; Zahlen sind im Bereich 10^{-4} eV bis 10^{-1} eV .

Hyperfeinstruktur: Kern-Bahn-WW Das magnetische Moment des Kernes μ_K verhält sich wie $\mu_K/\mu_B \sim m_e/m_K$; damit ist die Kopplung wesentlich schwächer (für das H-Atom $E \sim \frac{1}{1836} \mu_B B_e$). So ergeben sich Größenordnungen 10^{-7} eV bis 10^{-4} eV .

1.2 Bestimmung atomarer Größen

to be done soon

1.3 Endliche Breite von Spektrallinien

Wichtig! 1. Eine Spektrallinie kann niemals die Breite 0 haben.

¹Quelle: Vorlesung.

²Quelle: Vorlesung

Natürliche Linienbreite Dies kommt daher, dass die emittierte Welle Anfängt und aufhört. Da sich das Spektrum als Fouriertransformierte der Wellengleichung ergibt, die Wellengleichung aber nicht mehr absolut periodisch ist reicht ein Fourierkoeffizient einfach nicht aus... Das Ergebnis ist eine (kontinuierliche) Funktion.

Modelliert man das Spektrum durch einen Hertz-Dipol mit Ladung e und Amplitude x_0 , der mit ω schwingt, so strahlt dieser die Leistung $P = \omega^4 e^2 x_0^2 / (6\pi\epsilon_0 c^3)$ ab. Die Gesamtenergie des (harmonischen) Dipoloszillators ist³ $E = mv_{max}^2 / 2 = m\omega^2 x_0^2 / 2$; damit ist nach der Zeit

$$\tau = \frac{E}{P} = \frac{m\omega^2 x_0^2 6\pi\epsilon_0 c^3}{2\omega^4 e^2 x_0^2} = \frac{3m\pi\epsilon_0 c^3}{\omega^2 e^2} \quad (1)$$

die Energie abgegeben.

Hat man einen Harmonischen Oszillator mit

$$m\ddot{x} + D\dot{x} + kx = 0$$

so folgt mit dem Ansatz $x = Ae^{\lambda t}$:

$$\lambda = -\delta \pm i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \text{ mit } \delta = \frac{D}{2m} \text{ und } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

In der Lösungsfunktion schlägt sich das dann nieder, dass man einen Sin/Cos-Term mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ hat und einen Dämpfungsterm mit $e^{-\delta t}$.

Führt man von der Schwingungsgleichung die Fouriertransformation durch, so erhält man einen Term, dessen Realteil (wenn man die Welle in komplexer Darstellung hat) *proportional*⁴

$$\Re \int_0^\infty e^{t(-\delta + i\omega_0 - i\omega)} dt = \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2}.$$

Diese Funktion⁵ hat bei $\omega = \omega_0$ ihr Maximum von $1/\delta$ und bei $\omega = \omega_0 \pm \delta$ den Wert $\frac{1}{2} 1/\delta$ – also die halbe Höhe. Damit ergibt sich eine *Halbwertsbreite* von $\Delta\omega = \delta$.

Definition 1.1 (Halbwertsbreite). *Nimmt eine Glockenkurve $f(x)$ ihr Maximum bei x' an, und den Wert $f(x')/2$ an den Stellen x_1 und x_2 , so ist $|x_1 - x'| = |x_2 - x'| =: \Delta x$ die Halbwertsbreite.*

Mit der Unschärferelation⁶ ist $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar/2$ und damit $\Delta\omega \approx 1/(2\Delta t)$. Ist $\tau = \Delta t$ die mittlere Lebensdauer folgt

$$\delta \approx \frac{1}{2\tau} \quad (2)$$

und damit für die Halbwertsbreite $2\Delta\omega = 2\delta = \frac{1}{\tau}$.

³Entweder die kinetische Energie ist maximal und die potentielle ist verschwindet oder anders herum

⁴bspw ignoriere ich hier die $1/2\pi$ der Fourierkoeffizienten und die Dipolamplitude

⁵Dies ist eine *Lorentzlinie*.

⁶In Exphysschreibweise

Dopplereffekt Ein weiterer Effekt ist der Dopplereffekt: Die Licht emittierenden Elektronen bewegen sich auf den Betrachter zu oder von ihm weg, dadurch wird ihr Licht ins Blaue bzw. ins Rote verschoben. Dabei verändert sich die Frequenz nach

$$\omega = \omega_0 \cdot (1 \pm v/c) . \quad (3)$$

Setzt man nun für die Geschwindigkeitsverteilung eine Boltzmann-Verteilung an, so folgt für die Besetzungsdichte von Teilchen mit der Geschwindigkeit⁷ v :

$$n(v) \, dv = N \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \cdot \exp \frac{-mv^2/2}{kT}$$

mit der Gesamtteilchenzahl N . Setzt man hier (3) nach v aufgelöst ein erhält man unter der Annahme $I(\omega) \propto n(\omega)$ die Intensitätsverteilung

$$I(\omega) \propto \exp \frac{-m \left(\frac{c\omega_0 - c\omega}{\omega_0} \right)^2}{2kT} .$$

Diese hat ihr Maximum (1) bei $\omega = \omega_0$ und nimmt 1/2 bei $\omega = \pm \frac{\omega_0 \sqrt{2 \ln(2) \cdot kmT \pm cm}}{cm}$; damit ergibt sich aus der Differenz der beiden Werte:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{c} \left(8 \ln(2) \frac{kT}{m} \right)^{1/2} . \quad (4)$$

2 Bor'sches Atommodell

Die **Bohr'sche Postulate**:

- (i) Elektronen strahlen beim Kreiseln keine Energie ab sondern nur, wenn sie eine Bahn wechseln. Die Abgabe erfolgt dann über eine Lichtwelle mit $E_n - E_{n'} - h\nu = \hbar\omega$.
- (ii) Korrespondenzprinzip: Für weit außen liegende Schalen geht die „neue“ Mechanik in die „gewohnte“ über.

Durch das zweite Postulat kann man die Energie der außen liegenden Bahnen klassisch berechnen; dazu verwendet man die Coulomb-Anziehung und setzt sie mit der Zentripetalkraft gleich:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = mr\omega^2 . \quad (5)$$

Die **Bohr-Sommerfeld-Quantisierung** stellt eine gewisse Erweiterung des eigentlichen – noch klassischeren – Bohr'schen Atommodells dar:

$$\oint p \, dq = n \cdot h \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} . \quad (6)$$

Setzt man für die Bewegung des Elektrons $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$ ein und geht von einer konstanten Geschwindigkeit aus, wobei \mathbf{v} stets tangential zur Kreisbahn auf der

⁷die mittlere Klammer ist die Normierung, der exp-Teil ist die Boltzmann-Verteilung mit der Kinetischen Energie $mv^2/2$

die Elektronen sich bewegen – also $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_\varphi$ – steht, so erhält man (für den Fall dass die Elektronen sich auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegen)

$$\oint m \mathbf{v} \, d\mathbf{q} = \int_0^{2\pi} m v \mathbf{e}_\varphi \cdot r \mathbf{e}_\varphi \, d\varphi = mvr \cdot 2\pi .$$

Setzt man dies in (6) ein, erhält man

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} = n \hbar .$$

Nun kann man noch den Drehimpuls L mit der linken Seite identifizieren und erhält als Bedingung aus der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung:

$$L = n \cdot \hbar \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} . \quad (7)$$

Aus (5) und (7) folgt nun (unter anderem)

$$E_n = \frac{1}{2} E_n^{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{-e^4 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} . \quad (8)$$

Zusammen mit dem ersten Bohr'schen Postulat kann man daraus elegant die verallgemeinerte Lymann-Formel herleiten:

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{\nu} = R \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) , \quad (9)$$

wobei R die *Rydberg-Konstante* ist mit⁸ $R = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c}$. Diese ergibt sich aus (8), wobei die Elektronenmasse m durch die relative Masser $\mu := \frac{m_e \cdot m_n}{m_e + m_n}$ ersetzt wurde.

Diese Ersetzung hat ihre Ursache darin, dass man bei der Verwendung von m die Mitbewegung des Kerns vernachlässigt – mit der Relativmasse μ jedoch nicht.⁹

Man unterscheidet die beiden Rydberg-Konstanten R und R_∞ , wobei letztere sich rechnerisch ergibt, wenn man die Kernmasse gegen ∞ laufen lässt; damit ist die Relativbewegung des Kerns ignoriert. Die Umrechnung ist damit

$$R = R_\infty \cdot \frac{\mu}{m_e} = R_\infty \cdot \frac{1}{1 + m_e/m_n} .$$

Für Wasserstoff ist diese Korrektur ≈ 0.99946 – also im vertretbaren Rahmen.

Verwendet man $m_n = m_{\text{Proton}} + m_{\text{Neutron}}$, so erhält man R für *Deuterium*. Um die R zu unterscheiden schreibt man $R_H = R$ für Wasserstoff, R_D für Deuterium usw.

⁸Quelle: Wikipedia

⁹Es lässt sich in Strenge zeigen, dass man diese Ersetzung vornehmen kann; dazu führt man die oben skizzierte Rechnung in relativkoordinaten wie man sie aus dem Kepler-Problem kennt durch; dann sieht man, dass man m durch μ ersetzen darf.

2.1 Wasserstoffähnliche Spektren

Die oben durchgeführte Rechnung gilt für das Wasserstoffatom; trotzdem kann man sie auch auf Systeme mit einem Elektron – den sog. WASSERSTOFFÄHNLICHEN SYSTEMEN – anwenden.

Die bedeutendsten Unterschiede ergeben sich in der Kernladungszahl Z , welche die Coulomb-Anziehung variieren

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}, \quad (10)$$

wobei die Kernmasse keinen zu großen Effekt bewirkt¹⁰, da die Effektive Masse des Elektrons μ davon nur wenig abhängt. Die Kernladungszahl geht dagegen mit Z^2 in R ein:

$$R(\mu, Z) = \frac{\mu Z^2 e^4}{8\epsilon_0 h^3 c}. \quad (11)$$

Für den Bahnradius kann man aus (5) (durch (10) modifiziert) und (7) die Gleichung

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 \mu} \cdot n^2 \quad (12)$$

ableiten.

Anwendung (Myonen Atome). *Myonen Atome haben anstatt eines Elektrons ein Myon in der Umlaufbahn. Dieses ist ca. 207 mal so schwer wie ein Elektron. Setzt man Werte für Elektronen und Myonen eines wasserstoffähnlichen Systems ($Z = 1, m_n = m_p$) in (12) ein, so erhält man*

$$\begin{aligned} r_1(e^-) &\approx 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m} \\ r_1(\mu) &\approx 2.84 \cdot 10^{-13} \text{ m} ; \end{aligned}$$

die Myon-Atome haben also eine wesentlich kleinere Ausdehnung. Vergleicht man dies mit Tab. 1, so sieht man dass das um zwei Größenordnungen kleiner als ein gewöhnliches Atom ist und schon fast in den Bereich der Ausdehnung des Kerns geht.

2.2 Einführung der l -Quantenzahl im Bohr'schen Modell

Aus dem Bohr'schen Modell war bisher nur n -Quantenzahl bekannt mit der E_n , r_n etc bestimmt werden konnten. In Experimenten konnte man jedoch sehen, dass jede einzelne dieser Spektrallinien etwas unscharf waren – unscharf deshalb, weil statt einer einzigen sich viele feine Linien nebeneinander zeigten.

SOMMERFELD nahm nun an, dass die Elektronen sich im Bohr'schen Keplerproblem nicht unbedingt auf Kreisen bewegen müssen – so wie sich die Planeten auf ihren Bahnen auch auf Ellipsen bewegen können. Die alte Quantenzahl n bestimmte so die „Hauptachse“ der Ellipse, die kleine Hauptachse wurde durch k bestimmt, wobei k so gewählt werden muss, dass der Drehimpuls $k \cdot \hbar$ ist.

Die Energie E_n der Bewegung hängt nur von der Hauptachse a_n ab, die verschiedenen Bahnformen sind charakterisiert durch die Kleine Halbachse $b_{n,k}$.

¹⁰Wenn die Protonenmasse verdoppelt wird, ändert sich der Faktor $1/(1 - m_e/m_n)$ nur in der vierten Nachkommastelle

Die Nebenquantenzahl k wurde durch die Bahndrehimpulsquantenzahl l mit $l = k - 1$ ersetzt; es gilt der Zusammenhang mit dem Drehimpuls:

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{l \cdot (l + 1)} \cdot \hbar. \quad (13)$$

Für die l -Quantenzahlen haben sich folgende Trivialnamen eingebürgert:

Quantenzahl l	0	1	2	3	4	5
Drehimpuls $ \mathbf{L} $	0	$\sqrt{2}\hbar$	$\sqrt{6}\hbar$	$\sqrt{12}\hbar$	$\sqrt{20}\hbar$	$\sqrt{30}\hbar$
Name	s	p	d	f	g	h

Für die eigentliche Entartung verantwortlich – also weswegen verschiedene Spektrallinien beobachtet werden, obwohl die Bahnen auch als Ellipsen die selbe Energie haben – sind *relativistische Effekte*: In Kernnähe sind die Elektronen schneller als „außen“ – sie scheinen schwerer zu sein, beschreiben also einen kleineren Radius. Je näher das Elektron dem Radius kommt, desto stärker ist dieser Effekt; deshalb sind die feinen Linien für ein n leicht verschieden.

2.3 Quantensprünge durch Stöße

Elektronen können ihre kinetische Energie ungequantelt durch Stoßvorgänge an Atome übergeben, die daraufhin angeregt werden.

Nachgewiesen wurde das beim Versuch von LENARD und dem FRANK-HERTZ-Versuch.

Lenard-Versuch Es werden Elektronen beschleunigt und in eine Gas-Probe geschickt, dann aber wieder abgebremst. Die Abbremsung ist stärker als die Beschleunigung. Elektronen schaffen es damit nicht bis zur gegenüberliegenden, negativ geladenen Platte. Schafft es allerdings ein Elektron ein Gasteilchen zu ionisieren, so wird dieses Positive Ion an die negative Platte gezogen und es fließt ein Strom.

Man beobachtet, dass dieser Strom erst fließt, wenn die Beschleunigungsspannung eine gewisse Mindestspannung überschreitet. (Dieses Beschleunigungspotential bezeichnet man dann auch als *Ionisationspotential*.)

Frank-Hertz-Versuch Hier ist der Aufbau ähnlich, nur dass die Bremsspannung nicht so hoch ist: Elektronen können im Normalfall an die gegenüberliegende Platte gelangen. Erreicht die Beschleunigungsspannung einen charakteristischen Wert U_r , so fällt jedoch plötzlich der Strom an der gegenüberliegenden Platte, der die auftreffenden Elektronen anzeigt, stark ab; ebenso bei $2 \cdot U_r$, $3 \cdot U_r$, ... Dies liegt daran, dass die Elektronen bei einem unelastischen Stoß die „Energie“ U_r an ein Gasteilchen abgeben können um dieses anzuregen; haben sie genug kinetische Energie, können sie mehrmals stoßen. Der Strom steigt also so lange wie die Elektronen noch $E_{kin} < n \cdot eU_r$ mit $n \in \mathbb{N}$ haben.

Die so bestimmte Spannung U_r findet man wieder wenn man sich die optischen Spektren des Gases anschaut – doch gibt es noch weitere Energien, die *nicht* im Optischen Spektrum auftauchen. Es gibt also Anregungszustände, auf die ein Stoß das Atom bringen kann, ein Photon jedoch nicht. Das liegt daran, dass

es für optische Übergänge besondere **Auswahlregeln** gibt, welche Übergänge erlaubt sind und welche nicht; die Auswahlregeln für die Anregung durch Stöße sind verschieden von diesen „optischen“ Auswahlregeln.

Weiter interessant: Die kinetische Energie ist nicht gequantelt: Auch wenn die Elektronen eine größere Energie haben als die Anregungsenergie, so können sie doch anregen. Bei Anregung durch Lichtquanten ist jedoch *genau* der Energiebetrag nötig.

3 Quantenmechanische Betrachtungen

3.1 Wasserstoffatom – Skizze

Um die Schrödingergleichung¹¹ des mit dem Wasserstoffatom verbundenen Hamilton

$$H = \frac{p_e^2}{2m_e} + \frac{p_n^2}{2m_n} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (14)$$

zu lösen geht man in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten über, separiert Radial- und Winkelteil ab ($\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \chi(\vartheta, \varphi)$) und löst den Radialteil mit der Polynommethode, wobei der Winkelanteil die Kugelflächenfunktionen sind.

Als Lösungen¹² findet man:

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) ,$$

wobei der Radialteil beschrieben wird durch

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]}} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) ,$$

wobei $\rho = \frac{2r}{na_0}$ mit dem Bohr-Radius a_0 und $L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$ die *zugeordneten Laguerre-Polynome* sind und $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ die oben angesprochenen Kugelflächenfunktionen.

Kugelflächenfunktionen Die Kugelflächenfunktionen sind definiert über ihre Eigenschaft, Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators L (bzw. \mathbf{L}) zu sein:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 \cdot Y_{lm} &\propto l(l+1) \cdot Y_{lm} \\ L_z \cdot Y_{lm} &\propto m \cdot Y_{lm} . \end{aligned}$$

Eine Allgemeine Formel ist

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot e^{im\varphi} \cdot (\sin \vartheta)^m \cdot \frac{d^{l+m}}{d(\cos \vartheta)^{l+m}} (\sin \vartheta)^{2l} .$$

Die ersten sind in Tab. 2 zu finden.

Wichtige Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen sind

- Orthonormalität

¹¹ $H\psi = E\psi$

¹²Quelle: Wikipedia: „Wasserstoffatom“

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
$m = -3$				$\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \vartheta e^{-3i\varphi}$
$m = -2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi}$	$\sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta e^{-2i\varphi}$
$m = -1$		$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi}$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\varphi}$	$\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \vartheta (5 \cos^2 \vartheta - 1) e^{-i\varphi}$
$m = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)$
$m = 1$		$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi}$	$-\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \vartheta (5 \cos^2 \vartheta - 1) e^{i\varphi}$
$m = 2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}$	$\sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta e^{2i\varphi}$
$m = 3$				$-\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \vartheta e^{3i\varphi}$

Tabelle 2: Die ersten Kugelflächenfunktionen – Quelle: Wikipedia

- Parität: Für $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ gilt $r \mapsto r, \vartheta \mapsto \pi - \vartheta, \varphi \mapsto \pi + \varphi$. Die Kugelflächenfunktionen verhalten sich dann: $Y_{lm}(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^l \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$.
- Konjugiertheit: Durch komplexes Konjugieren wird die m -Zahl gekehrt und die Funktion bekommt Parität $(-1)^m$: $[Y_{l,m}]^* = (-1)^m \cdot Y_{l,-m}$.

Zugeordnete Laguerre-Polynome Die Zugeordneten Laguerre-Polynome¹³ erhält man über die *Rodrigues-Formel*:

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) ;$$

die ersten lauten:

$$L_0^k(x) = 1$$

$$L_1^k(x) = -x + k + 1$$

$$L_2^k(x) = \frac{1}{2} [x^2 - 2(k+2)x + (k+1)(k+2)]$$

$$L_3^k(x) = \frac{1}{6} [-x^3 + 3(k+3)x^2 - 3(k+2)(k+3)x + (k+1)(k+2)(k+3)] .$$

3.2 Kopplung mit dem Elektrischen Feld

3.2.1 Der Stark-Effekt

Erfahrung. Die Spektrallinien von Atomen in einem elektrischen Feld spalten sich auf.

¹³Die zugeordneten Laguerre-Polynome hängen mit den gewöhnlichen Laguerre-Polynomen über

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x)$$

zusammen; es gilt die *Rodrigues-Formel*

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) .$$

Im Wasserstoffatom und wasserstoffähnlichen Systemen ist diese Aufspaltung für Terme mit $l \neq 0$ proportional zu $\|\mathbf{E}\| = E$. Dieser *lineare* Stark-Effekt kommt dann vor, wenn die l -Entartung¹⁴ nicht aufgehoben ist.

Ist die l -Entartung dagegen schon ohne das E-Feld aufgehoben, so ist die Verschiebung und Aufspaltung der Terme proportional zu E^2 ; der *quadratische Stark-Effekt*.

Dieser ist anschaulich erklärbar, weil in einem Atom ein elektrisches Dipolmoment $\mathbf{p} = \alpha \cdot \mathbf{E}$ induziert wird (α ist die Polarisierbarkeit¹⁵) und dieses wiederum ein Wechselwirkungspotential¹⁶ $V \propto \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = \alpha \cdot E^2 \propto E^2$ hat.

Der lineare Stark-Effekt ist dagegen nur quantentheoretisch zu verstehen.

3.2.2 Quantentheorie des linearen Stark-Effekts

3.2.3 Quantentheorie des quadratischen Stark-Effekts

Der Hamiltonoperator H^0 des Atoms wird durch das E-Feld gestört; diese Störung macht sich als Term H^S bemerkbar, der sich aus dem Wechselwirkungspotential zwischen Dipol $e\mathbf{r}$ und dem E-Feld¹⁷ \mathcal{E} ergibt:

$$H = H^0 + H^S = H^0 + (-e\mathbf{r} \cdot \mathcal{E}) =: H^0 + \lambda H_1, \quad (15)$$

wobei λ proportional zu $\mathcal{E} = \|\mathcal{E}\|$ ist; damit können wir nun Störungstheorie machen. Wichtig ist dabei, dass beim quadratischen Stark-Effekt die Atome *nicht entartet* sind; dadurch wird die Störungsrechnung „menschlich“. Wir entwickeln eine Lösung ψ von $H\psi = E\psi$ als Potenzreihe in λ

$$\psi = \psi_0 + \lambda^1 \psi_1 + \lambda^2 \psi_2 + \dots \quad \text{und} \quad E = E_0 + \lambda^1 E_1 + \lambda^2 E_2 + \dots,$$

und setzen dies in (15) ein. Dabei gilt zu beachten, dass ψ_0 eine ungestörte Lösung sein muss: $\psi_0 = \phi_n^0$ (für ein bestimmtes n und $H^0 \phi_n^0 = E_n^0 \phi_n^0$). Setzt man dies in (15) ein dann erhält man eine Polynomgleichung in λ , deren Koeffizienten man vergleichen kann – also erhält man für jede Ordnung von λ eine Gl. Auf diese wendet man $\langle \psi_0 |$ an, und kann mit der Bedingung¹⁸ $\langle \psi_0 | \psi_i \rangle = \delta_{i0}$ weiter vereinfachen. Um E_i zu erhalten, wendet man $\langle \psi_0 |$ auf die Gleichung von λ^i an:

$$E_i = \langle \psi_0 | H^S | \psi_{i-1} \rangle.$$

Um ψ_i zu erhalten, entwickelt man es in¹⁹ $\{\phi_l^0\}_{l \neq n}$ und wendet $\langle \phi_l |$ an:

$$\langle \psi_l | \psi_1 \rangle = \frac{\langle \psi_l | H^S | \psi_0 \rangle}{E_l - E_n}$$

¹⁴Mehrere Zustände mit der selben n , aber verschiedenen l -Quantenzahlen haben die selbe Energie

¹⁵Bei großen Atomen (oder großem n) ist der Effekt besonders gut bemerkbar, da diese einfacher polarisierbar sind.

¹⁶ $V = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{E} = \frac{1}{2} \alpha E^2$

¹⁷Die Schreibweise dient das E-Feld von der Energie E abzugrenzen

¹⁸Diese darf man annehmen, weil man die Gleichungen auf der Linken Seite stets nach $(H^0 - E^0)|\psi_i\rangle = \dots$ auflösen kann und hier eine Addition von ψ_0 keine Veränderung bringt.

¹⁹die n -te Komponente kommt nicht mit, weil $\langle \psi_0 | \psi_i \rangle = \delta_{i0}$

3.3 Licht-Atom Wechselwirkung

3.3.1 Wechselwirkung Zwei-Atom-System mit kohärentem resonanten Lichtfeld

Wir modellieren unser Atom als System mit nur zwei Zuständen. D.h. wir nehmen an, dass alle weiteren Zustände durch das betrachtete Lichtfeld nicht angeregt werden können.

Der Hamilton des Systems setzt sich zusammen aus dem für das Atom H^0 und einem Störfaktor H^S . Das E-Feld des Lichts ist

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) .$$

Wir nehmen weiter an, dass das Atom sich bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ befindet.

Die Lichtwellenlänge ($\sim 10^{-6}$ m) ist sehr groß im Vergleich zum Atom ($\sim 10^{-10}$ m) – damit darf man die Ortsabhängigkeit von \mathcal{E} getrost vernachlässigen, außerdem sei o.B.d.A. $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 \cdot \mathbf{e}_z$.

Für die Lichtwelle ist das Atom ein Dipol; das Potential der Wechselwirkung ist $V^S = -\mathbf{p} \cdot \mathcal{E}$ und $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$; damit

$$V^S = H^S = -ez\mathcal{E}_0 \cos(\omega t) . \quad (16)$$

4 Laser

Wichtige Eigenschaften des Lasers:²⁰ (a) hohe Kohärenzlänge (~ 300000 km) – damit hohe zeitliche Kohärenz (b) starke Bündelung des Lichts (c) hohe Strahlungsintensität (d) es ist möglich, Lichtimpulse bis $\sim 10^{-13}$ s zu erzeugen.

4.1 Aufbau und Funktionsweise

Atome eines aktiven Mediums werden durch Photonen ($E_1 \rightarrow E_2$) angeregt („Pumpen“). Diese relaxieren (zufällig) durch *Spontane Emission* ($E_2 \rightarrow E_1$) und strahlen ein Photon aus. Diese Photonen regen andere Atome durch *Stimulierte Emission* an, Photonen mit genau den selben Eigenschaften (gleiche Frequenz, Amplitude, Richtung) abzugeben.

Um eine Verstärkung dieser Photonenlawine zu erhalten, sind an zwei Seiten des aktiven Materials Spiegel angebracht – einer davon halbdurchlässig. Durch diese Spiegel können sich in dem Laser nur stehende Wellen mit bestimmten Wellenlängen ($k \cdot \lambda/2 = L$ mit $k \in \mathbb{N}$, L : Abstand der Spiegel) aufhalten. Außerdem werden diejenigen Photonen, die nicht parallel zur Normalen der beiden Spiegel stehen, nicht mehr reflektiert und entweichen.

Damit nun ständig Photonen durch stimulierte Emission abgegeben werden können, muss das Niveau E_2 ständig stärker besetzt sein, als E_1 ; dann ist Emission häufiger als Absorption – schließlich sollen die einmal freigesetzten Photonen nicht gleich wieder absorbiert werden.

Die Photonen, mit denen diese ständige Anregung erfolgen soll, sollten aber nicht direkt den gewünschten Energiebetrag mitbringen, weil sie sonst selbst Emissionen induzieren. Da das Pumpen von der Seite geschieht, wären diese Photonen nicht mehr auf der gespiegelten Linie zwischen den beiden Spiegeln –

²⁰Zahlen aus Haken Wolf

würden also keinen großen Beitrag liefern. Stattdessen bringen die frisch eingebrachten Photonen das System auf eine Energie E_3 ($E_1 < E_2 < E_3$); von dort regt sich das System *schnell* ab auf E_2 und ist so bereit für induzierte Emission.

4.2 Beispiel: He-Ne-Laser

Zwischen zwei Elektroden findet eine Gasentladung statt. Diese Elektronen regen durch Stoß Helium auf 20.61 oder 19.82eV an. Die He-Atome stoßen gegen Neon und regen dieses vom Grundzustand auf ähnliche Energien an (20.66 bzw. 19.78eV) und von dort relaxiert das Neon unter Aussendung von Licht auf verschiedene Niveaus (induzierte Emission), wodurch Licht mit $\lambda \in \{3391.2, 1152.3, 632.8\}$ nm frei wird; Neon hat danach mindestens noch 18.7 eV, die es durch Stöße wieder abgibt.

4.3 Laserbilanz

4.4 Anwendung: Laserkühlung