1

Theo 12

Michael Kopp

(a)

$H = H_0 + \lambda H'$ $\quad H_0 = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$ $\quad H' = Q$

$P = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P^{alt}$

$Q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X^{alt}$

$[Q, P] = i$

$H_0 |n\rangle = \underbrace{(n + 1/2)}_{\varepsilon_n} \cdot |n\rangle$ — V ONS

$H_0 = N + 1/2$, $N = a^\dagger a$, $a \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)$, $a^\dagger \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP)$

$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \lambda^1 |\psi_1\rangle + \lambda^2 |\psi_2\rangle + \lambda^3 |\psi_3\rangle$

$H|\psi\rangle = (H_0 + \lambda H')(|\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle + \lambda^3|\psi_3\rangle)$

$= H_0|\psi_0\rangle + \lambda^1(H'|\psi_0\rangle + H_0|\psi_1\rangle) + \lambda^2(H'|\psi_1\rangle + H_0|\psi_2\rangle) + \lambda^3(H'|\psi_2\rangle + H_0|\psi_3\rangle)$

$E = E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \lambda^3 E_3$

$E|\psi\rangle = E_0|\psi_0\rangle + \lambda^1(E_1|\psi_0\rangle + E_0|\psi_1\rangle) + \lambda^2(E_1|\psi_1\rangle + E_2|\psi_0\rangle + E_0|\psi_2\rangle)$
$+ \lambda^3(E_3|\psi_0\rangle + E_2|\psi_1\rangle + E_1|\psi_2\rangle + E_0|\psi_3\rangle)$

(λ^0) $H_0|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$

(λ^1) $(H_0 - E_0)|\psi_1\rangle = (E_1 - H')|\psi_0\rangle$

(λ^2) $(H_0 - E_0)|\psi_2\rangle = (E_1 - H')|\psi_1\rangle + E_2|\psi_0\rangle$

(λ^3) $(H_0 - E_0)|\psi_3\rangle = (E_1 - H')|\psi_2\rangle + E_2|\psi_1\rangle + E_3|\psi_0\rangle$

Wende $\langle\psi_0|$ auf (λ^1) an:

da E_i skalar.

$\underbrace{\langle\psi_0| H_0 - E_0}|\psi_1\rangle = \langle\psi_0|(E_1 - H')|\psi_0\rangle = E_1 - \langle\psi_0|H'|\psi_0\rangle$

$((H_0 - E_0)|\psi_0\rangle)^\dagger = 0^\dagger = 0$ da H_0, E_0 hermitesch

$\Rightarrow E_1 - \langle\psi_0|H'|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|Q|\psi_0\rangle$

$= \langle n| Q |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle n| a + a^\dagger |n\rangle = 0$ da $a^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$, $a|n\rangle \propto |n-1\rangle$

da Harmon. Osz. nicht entartet.

$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\boxed{E_1 = 0}$

Mit $E_1 = 0$:

$\cancel{(\lambda^2) \quad (H_0 - E_0)|\psi_2\rangle = (E_1 - H')|\psi_1\rangle + E_2|\psi_0\rangle}$

(λ^1) ~~Eff~~ $(H_0 - E_0)|\psi_1\rangle = -H'|\psi_0\rangle$

Da $\{|n\rangle\}$ vollst. ONS ist:

$$|\psi_1\rangle = \sum_l \alpha_l |l\rangle = \sum_l \langle l|\psi_1\rangle |l\rangle$$

Da $|\psi_0\rangle = |n\rangle$, $\langle\psi_1|\psi_0\rangle = 0$:

$$|\psi_1\rangle = \sum_{l\neq n} \langle l|\psi_1\rangle |l\rangle .$$

(λ^1) $(H_0 - E_0)\sum_{l\neq n} \langle l|\psi_1\rangle |l\rangle = -H'|\psi_0\rangle$

$$\sum_{l\neq n} \langle l|\psi_1\rangle (\varepsilon_l - E_0)|l\rangle = -Q|\psi_0\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt2}(a + a^+)|n\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt2}\left(\sqrt n\, |n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right)$$

Da $\langle l|l\rangle = 1$

$$|\psi_1\rangle = \frac{-\sqrt n |n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle}{\sqrt2 \cdot \sum_{l\neq n}(\varepsilon_l - E_0)}$$

Bestimme $\langle l|\psi_1\rangle$: wende $\langle l|$ auf (λ^1) an.

$$\underbrace{\langle l|H_0 - E_0|\psi_1\rangle}_{[(H_0-E_0)|l\rangle]^+} = \langle l|-Q|\psi_0\rangle = \langle l|-\frac{1}{\sqrt2}(a+a^+)|n\rangle$$

$[(H_0-E_0)|l\rangle]^+$

$((\varepsilon_l - E_0)|l\rangle)^+$

$$= (\varepsilon_l - E_0)\langle l|\psi_1\rangle \qquad -\frac{1}{\sqrt2}\left(\sqrt n\,|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right)$$

$$\langle l|(\varepsilon_l - E_0) \Rightarrow \langle l|\psi_1\rangle = \langle l| \frac{\sqrt n |n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle}{\sqrt2\,(E_0 - \varepsilon_l)}$$

Der Term für $\langle l|\psi_1\rangle$ verschw. für nicht für $l = n-1$, $l = n+1$:

$$|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt n}{\sqrt2\,(E_0 - \varepsilon_{n-1})}|n-1\rangle + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt2\,(E_0 - \varepsilon_{n+1})}|n+1\rangle$$

Da $E_0 = \varepsilon_n$, $\varepsilon_n = n + 1/2$

$$\boxed{|\psi_1\rangle = +\sqrt{\frac{n}{2}}\,|n-1\rangle - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\,|n+1\rangle}$$

Damit ist die 1. Ordnung fertig.

(λ^2) $\quad (H_0 - E_0)|\psi_2\rangle = \cancel{\ldots} - H'|\psi_1\rangle + E_2|\psi_0\rangle$

$\langle\psi_0|$ anw.:

$$\underbrace{\langle\psi_0|H_0 - E_0)}_{0}|\psi_2\rangle = 0 = \langle\psi_0| - H'|\psi_1\rangle + E_2$$

$$E_2 = \langle\psi_0|Q|\psi_1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle n|\, a + a^+ \left(\sqrt{\frac{n}{2}}|n-1\rangle - \sqrt{\frac{n+1}{2}}|n+1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{n}\underbrace{\langle n|n\rangle}_{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n+1}\underbrace{\langle n|n\rangle}_{1}$$

$$= \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ \frac{n}{2} - \frac{n+1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} = E_2}$$

(λ^2) $\quad (H_0 - E_0)|\psi_2\rangle = \cancel{\ldots} - Q|\psi_1\rangle + \frac{1}{2}|\psi_0\rangle$

$$\cancel{= \left(\frac{n}{\sqrt{2}}|n-1\rangle + \frac{n+1}{\sqrt{2}}|n+1\rangle\right) + \frac{1}{2}|n\rangle}$$

$$\cancel{= \ldots - \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle}$$

$$= \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}|n\rangle - \frac{\sqrt{n}}{2}\sqrt{n-1}\,|n-2\rangle + \frac{\sqrt{n+1}}{2}\sqrt{n+2}\,|n+2\rangle + \frac{1}{2}|n\rangle$$

Da $\langle\psi_2|\psi_0\rangle = 0$ können wir $|\psi_2\rangle$ entwickeln:

$$|\psi_2\rangle = \sum_{q \neq n}\langle q|\psi_2\rangle|q\rangle$$

Best. $\langle q|$ via Anwendung auf (λ^2):

$$\langle q|(H_0 - E_0)|\psi_2\rangle = (E_q - E_0)\langle q|\psi_2\rangle = \langle q| \cdots \quad \text{(s.o.)}$$

$\langle q|\cdots$ verschw. nur nicht für $q = n-2$, $q = n+2$:

$$\boxed{|\psi_2\rangle = +\frac{\sqrt{n(n-1)}}{2(+2)}|n-2\rangle + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2\cdot 2}|n+2\rangle}$$

da $E_{n-2} - E_n = (n-2) - n = -2$

Damit ist die 2. Ordnung fertig.

Wende wieder $\langle\psi_0|$ auf (λ^3) an:

$$(\lambda^3)\quad (H_0-E_0)|\psi_3\rangle = -Q|\psi_2\rangle - \tfrac{1}{2}|\psi_1\rangle + E_3|\psi_0\rangle \qquad \Big\}\ \langle\psi_0|$$

$$0 = -\langle\psi_0|Q|\psi_2\rangle + 0 + E_3$$

$$E_3 = \langle\psi_0|Q|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\psi_0|\,(a+a^\dagger)\,|\ \frac{\sqrt{n(n-1)}}{4}|n-2\rangle + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{4}|n+2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle n|\sum_{i=-3}^{3}\xi_i\,|n+i\rangle$$ (die Vek. sind proportional zu $|n-3\rangle, \dots, |n+3\rangle$)

$$\boxed{E_3 = 0}$$

$$(\lambda^3)\quad (H_0-E_0)|\psi_3\rangle = -Q|\psi_2\rangle - \tfrac{1}{2}|\psi_1\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \sum_{s\neq n}\langle s|\psi_3\rangle\,|s\rangle$$, $\langle s|$ auf (λ^3) anw.:

$$\underbrace{\langle s|H_0-E_0|\psi_3\rangle}_{E_s-E_0} = \langle s|\Big\{-\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger)\Big\{\frac{\sqrt{n(n-1)}}{4}|n-2\rangle + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{4}|n+2\rangle\Big\} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}|n-1\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{2}}|n+1\rangle\Big\}$$

$$= \langle s|\Big\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{4}|n-3\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{4}|n+1\rangle$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{n(n-1)}}{4}|n-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}{4}|n+3\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}|n-1\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{2}}|n+1\rangle\Big\}$$

Die $\langle s|$ verschw.

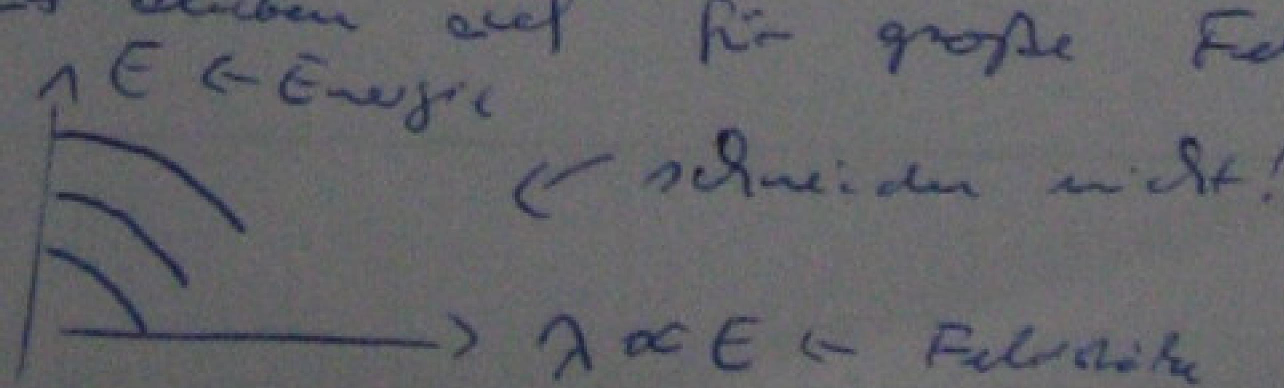
$$\Rightarrow\ \boxed{|\psi_3\rangle = +\sqrt{\frac{n}{2}}\Big(\frac{n+1}{4}+\frac{1}{2}\Big)|n-1\rangle - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\Big(\frac{n+2}{4}-1\Big)|n+1\rangle + \frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{\sqrt{2}\cdot 12}|n-3\rangle - \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\sqrt{2}\cdot 12}|n+3\rangle}$$

Damit ist die Lsg. 3. Ordnung fertig.

$\Rightarrow$ für kleine E-Felder ist

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \lambda|\psi_1\rangle + \lambda^2|\psi_2\rangle + \lambda^3|\psi_3\rangle.$$

Die Energieniveaus bleiben auch für große Feldstärken nicht entartet;



(b) Bei der exakten Lösung hat man nach einer Entwicklung in 1. Ordnung die selben Terme wie bei uns.

In der exakten Lösung ist ~~jedoch~~ jedoch der ~~der~~ zweite Entwicklungsterm $\alpha(u)$, was wir ausgeschlossen haben, da bei uns

$$\langle \psi_0 | \psi_\nu \rangle = 0 \qquad \forall \nu > 0$$

gelten soll.

Die Rechnungen wurden also unter anderen Voraussetzungen geführt...

$\boxed{2}$, $H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon^1 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix}$

$H = H_0 + \lambda\, \underline{e}\underline{\sigma}$ für $\underline{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\underline{e}\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} =: H'$

$E^\nu = \varepsilon_0^\nu + \lambda \varepsilon_1^\nu + \lambda^2 \varepsilon_2^\nu + \dots$ | $\mathcal{H} = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$|\psi^\nu\rangle = |\psi_0^\nu\rangle + \lambda |\psi_1^\nu\rangle + \lambda^2 |\psi_2^\nu\rangle + \dots$

unterer Index ist Ordnung der Entw.

(λ^0) $H_0 |\psi_0\rangle = \varepsilon_0 |\psi_0\rangle$

(λ^1) $(H_0 - \varepsilon_0)|\psi_1\rangle = (\varepsilon_1 - \underline{e}\underline{\sigma})|\psi_0\rangle$

(λ^2) $(H_0 - \varepsilon_0)|\psi_2\rangle = (\varepsilon_1 - \underline{e}\underline{\sigma})|\psi_1\rangle + \varepsilon_2 |\psi_0\rangle$

(a) $\epsilon^1 \neq \epsilon^2$: H_0 nicht entartet.

- Niveau ϵ^1:

e_1 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zu H_0: $H_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \varepsilon_0^1 = \epsilon^1$, $|\psi_0^1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Für ε_1^1: wende $\langle \psi_0 | = (1\ 0)$ auf (λ^1) an:

$\langle \psi_0 | H_0 - \varepsilon_0^1 | \psi_1 \rangle = 0 = \varepsilon_1^1 - (1\ 0) \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \varepsilon_1^1 - z \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1^1 = z}$

$\rightarrow$ Für $|\psi_1^1\rangle$: $|\psi_1^1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\langle \psi_0^1 | \psi_1^1 \rangle = 0 \Rightarrow (1\ 0)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow |\psi_1^1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Wende $(0\ 1)$ auf (λ^1) an:

$(0\ 1)(H_0 - \varepsilon_0^1)\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = (0\ 1)(\varepsilon_1^1 - \underline{e}\underline{\sigma})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x+iy$

$\beta \epsilon^2 - \beta \varepsilon_0^1 \overset{"}{=} x+iy \Rightarrow \beta = \frac{x+iy}{\epsilon^2 - \varepsilon_0^1}$

$\Rightarrow \boxed{|\psi_1^1\rangle = \frac{x+iy}{\epsilon^2 - \epsilon^1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\rightarrow$ ~~Für ε_2^1 ...~~ in (λ^2) einsetzen: $\frac{x+iy}{\epsilon^2 - \epsilon^1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(λ^2) $\left[\begin{pmatrix} \epsilon^1 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \epsilon^1 & 0 \\ 0 & \epsilon^1 \end{pmatrix} \right] |\psi_2^1\rangle = \left[\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \right] |\psi_1^1\rangle + \varepsilon_2^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Damit $\langle \psi_0^1 | \psi_2^1 \rangle = 0$ gilt, muss $|\psi_2^1\rangle = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ mit $\gamma = 0$ sein: (s.o. hier steht)

(λ^2) $(\epsilon^2 - \epsilon^1) \cdot \delta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x+iy}{\epsilon^2 - \epsilon^1} \left(2z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-x+iy)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \varepsilon_2^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dies ist eine 2-dim. Vektorgleichung, mit der wir bequem δ, ε_2^1 bestimmen können (Komponenten sind je eine Gl.):

$\delta = \frac{(x+iy)\,2z}{(\epsilon^2 - \epsilon^1)^2}$ $\varepsilon_2^1 = \frac{x^2 + y^2}{\epsilon^2 - \epsilon^1}$

Damit ist die Lösung in 2. Ordnung bestimmt:

$$E^1(\lambda) = E^1 + \lambda \cdot z + \lambda^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{E^2-E^1}$$

$$|\psi^1(\lambda)\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda \frac{x+iy}{E^2-E^1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda^2 \frac{(x+iy)\cdot 2z}{(E^2-E^1)^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- Niveau E^2:

Die Rechnungen sind analog. Es ist $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |\psi_0^2\rangle$ der EV. zum EW E^2: $H_0|\psi_0^2\rangle = E^2|\psi_0^2\rangle = \varepsilon_0^2|\psi_0^2\rangle$.

$$\varepsilon_1^2 = (0\ 1)\begin{pmatrix}z & x-iy\\ x+iy & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -z$$

$$|\psi_1^2\rangle = \begin{pmatrix}\beta^1\\0\end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \frac{(1\,0)(\varepsilon_1^2 - \ldots)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{(1\,0)(H_0-\varepsilon_0^2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} = \frac{-x+iy}{E^1-E^2}$$

$$|\psi_2^2\rangle = \begin{pmatrix}\delta^1\\0\end{pmatrix}$$

$$(\lambda^2)\quad \left[\begin{pmatrix}E^1 & 0\\0 & E^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}E^2 & 0\\0 & E^2\end{pmatrix}\right]\cdot\delta^1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{-x+iy}{E^1-E^2}\left(-2z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-x-iy)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + \varepsilon_2^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Damit folgt: $\delta^1 = \frac{(x-iy)\,2z}{(E^1-E^2)^2}$ $\quad \varepsilon_2^2 = \frac{x^2+y^2}{E^2-E^1}$

$$E^2(\lambda) = E^2 - \lambda z + \lambda^2 \frac{x^2+y^2}{E^2-E^1}$$

$$|\psi^2(\lambda)\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda\left(\frac{-x+iy}{E^1-E^2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda^2 \frac{(x-iy)\cdot 2z}{(E^1-E^2)^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

(b)

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \qquad H' = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$

H' diagonalisieren:

$$\begin{vmatrix} z-\mu & x-iy \\ x+iy & -z-\mu \end{vmatrix} = -(z-\mu)(z+\mu) - (x-iy)(x+iy)$$

$$= -z^2+\mu^2 - x^2-y^2 = 0 \Rightarrow \mu^2 = x^2+y^2+z^2 = e^2$$

$\Rightarrow \mu = \pm e$ sind Eigenwerte.

$$\begin{pmatrix} z-e & x-iy \\ x+iy & -z-e \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix}(z-e)\alpha + (x-iy)\beta = 0 \\ (x+iy)\alpha - (z+e)\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{(x+iy)\alpha}{z+e}\end{matrix}$$

$$\cancel{(z+e)}(z-e)\alpha + \frac{(x-iy)(x+iy)\alpha}{\cancel{z+e}} = 0 \Leftrightarrow (z^2-e^2)\alpha + (x^2+y^2)\alpha = 0$$

$$(\underbrace{z^2+x^2+y^2-e^2}_{0})\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \alpha \text{ beliebig.}$$

Suche normierte EV: $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$: $\quad |\alpha|^2 + \left|\frac{x+iy}{z+e}\alpha\right|^2 = 1$

$$|\alpha|^2 + \frac{x^2+y^2}{(z+e)^2}|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow \left(1+\frac{x^2+y^2}{z+e}\right)|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{(z+e)^2}} = \frac{(z+e)^2}{(z+e)^2+x^2+y^2}$$

$$|\beta|^2 = 1-|\alpha|^2 = 1 - \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{(z+e)^2}}$$

$\mu = e \quad \alpha = 1$: $\qquad -(z-e) = (x-iy)\beta \Rightarrow \beta = \frac{e-z}{x-iy} = \frac{x+iy}{z+e}$

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x+iy}{z+e}\end{pmatrix} \quad \|\tilde{v}_1\|^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{(z+e)^2} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x+iy}{z+e}\end{pmatrix} \Big/ \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{(z+e)^2}}$$

$\mu = -e \qquad \begin{matrix}(z+e)\alpha + (x-iy)\beta = 0 \\ (x+iy)\alpha + (e-z)\beta = 0\end{matrix} \qquad \beta = 1: \quad \alpha = \frac{z-e}{x+iy} = \frac{-x+iy}{z+e}$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-x+iy}{z+e} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|\tilde{v}_2\|^2 = \frac{x^2+y^2}{(z+e)^2} + 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-x+iy}{z+e} \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{(z+e)^2}} \quad (-x+iy)(-x-iy)$$

$$x^2-(iy)^2 = x^2+y^2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} z+e \\ x+iy \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{2e^2+2ez} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -x+iy \\ z+e \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{2e^2+2ez}$$

In Eigenbasis (v_1, v_2) ist H:

$$\tilde{H}_v = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

$(\lambda^1) \quad (H_0 - \varepsilon_0)|\psi_1\rangle = (\varepsilon_1 - H_v')|\psi_0\rangle \overset{\langle\psi_0|}{\rightsquigarrow} \quad 0 = \varepsilon_1 \cdot 1 - \langle\psi_0|H_v'|\psi_0\rangle$

(b) [Forts.]

Wähle $\langle \cdot | \psi_0 \rangle = \underline{v}_i$: Da H'_v diagonal, $\underline{v}_i$ normiert:

$$\langle \psi_0 | H'_v | \psi_0 \rangle \leftrightarrow \langle v_i | H'_v | v_i \rangle = \mu_i = \varepsilon_1$$

Also für $\underline{v}_1$: $\varepsilon_1 = e$ für $\underline{v}_2$: $\varepsilon_1 = -e$.

$\Rightarrow$ Die Entartung ist in 1. Ordnung aufgehoben:

$$E = E_1 \pm \lambda e$$

(c)

(c) ~~Im Diagonalgestalt:~~ $\cancel{(\lambda=1) \quad H_\lambda = \begin{pmatrix} E+e\lambda & 0 \\ 0 & E-e\lambda \end{pmatrix}}$

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_1 + \lambda z & \lambda(x-iy) \\ \lambda(x+iy) & E_2 - \lambda z \end{pmatrix}$$

Suche Eigenwerte / Vektoren:

$$\begin{vmatrix} E_1 + \lambda z - \mu & \lambda(x-iy) \\ \lambda(x+iy) & E_2 - \lambda z - \mu \end{vmatrix} = (E_1 + \lambda z - \mu)(E_2 - \lambda z - \mu) - \lambda^2(x^2+y^2) = 0$$

$$E_1E_2 - \lambda E_1 z - \mu E_1 + \lambda E_2 z - \lambda^2 z^2 \overbrace{\cancel{-\mu\lambda z}}^{-E_2\mu + \cancel{\lambda\mu z}} + \mu^2 - \lambda^2(x^2+y^2) = 0$$

$$1 \cdot \mu^2 + (-E_1 - E_2)\mu + (E_1E_2 - \lambda E_1 z + \lambda E_2 z - \lambda^2 z^2 - \lambda^2(x^2+y^2)) = 0$$

$$(E_1E_2 - \lambda z(E_1 - E_2) - \lambda^2 e^2)$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2 \pm \sqrt{E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2 - 4(E_1E_2 + 4\lambda z(E_1-E_2) + 4\lambda^2 e^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2 \pm \sqrt{\underbrace{E_1^2 - 2E_1E_2 + E_2^2}_{(E_1+E_2)^2} + 4\lambda z(E_1 - E_2) + 4\lambda^2 e^2}\right)$$

Die μ_i entsprechen den exakten Lösungen für die Energie.

Taylor in λ in 2. Ordnung liefert

$$\mu_1 \approx E_2 - z \cdot \lambda + \frac{y^2+x^2}{E_2 - E_1} \cdot \lambda^2 + \ldots$$ die Lösung

dies sind genau die Terme unserer Entwicklung aus (a).

Setzt man $E_1 = E_2$, so ergibt die ~~Entwicklung~~ Umrechnung

$$\mu_x \simeq E + e \cdot \lambda + \underline{\underline{0}}$$ Dies ist exakt!

Als Eigenvektoren findet man (unnormiert):

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \cancel{2\lambda}\ 1 - z\lambda\ (x+iy) \\ \sqrt{(E_2 - E_1)^2 + 4\lambda z(E_1 - E_2) + 4\lambda^2 e^2} + (E_2 - E_1) - 2\lambda z \end{pmatrix}$$

$\underline{v}_2$ = gleich mit $-\sqrt{\ldots}$ statt $+\sqrt{\ }$.

In λ entwickelt: („y"-Komponente):

$$\underline{v}_1 \approx \left(\frac{x+iy}{E_2 - E_1}\lambda + \frac{2z(x+iy)}{(E_2-E_1)^2}\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)\right)\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\text{konstant, nicht etw.}} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Dies sind wieder genau die Koeff. aus (a)!