Analysis IV
Uebung 08

Michael Kopp

June 16, 2010

Ana (8)

Michael Kopf

Kugelschreiber leer...

[7]! $f : [-R, R] \to \mathbb{C}$

$\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \qquad \tilde{f}(x) = f\left(\frac{R}{\pi} x\right)$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\, e^{-ikx}\, dx \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_k\, e^{ikx}$$

$\shortparallel$

$f\left(\frac{R}{\pi} x\right)$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f\Big(\underbrace{\tfrac{R}{\pi} x}_{t}\Big)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \frac{\pi}{R} f(t)\, e^{-i\left(k \frac{\pi}{R}\right) t}\, dt$$

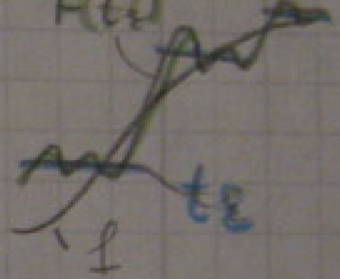
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-R}^{R} f(t)\, e^{-i \overbrace{\left(k \frac{\pi}{R}\right)}^{\lambda_k} t}\, dt}_{\tilde{\mathcal{F}}_R(\lambda_k)} \; \underbrace{\frac{\pi}{R}}_{\Delta\lambda_n}$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$$f(t) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\quad F[f](\lambda) \quad \Big)\, d\lambda$$

(a) $C_0 \subseteq L^1$ Treppenfkt $(t_\varepsilon)_\varepsilon \to f \in L^1$:

$\|t_\varepsilon - f\|_{L^1} < \varepsilon$ für $\varepsilon > N$



z.z. $\exists\, g_\ell \in C_0$ mit $\|g_\ell - t_\varepsilon\| < \varepsilon$ für $\ell > M$

Konstruiere g_ℓ via Fourierreihe

Dies ist möglich weil die Dini-Bed. gelten, weil trivialerweise $f(t_0+\tau) - f(t_0-0) \overset{?}{=} 0$ $\tau \in [-\delta, 0]$. Die Fourierreihe muss gem $\boxed{\Lambda}$ auf K konv. werden, die entstehende Fkt h_ℓ ergibt g_ℓ: $g_\ell = \mathbb{1}_K \cdot h_\ell$, wobei ℓ Partialsumme bis ℓ meint

Statt Fourierreihe von Cesàro-transformation!

Es ist jetzt:

$$\|g_\ell - f\| = \|g_\ell - t_\ell + t_\ell - f\|$$

$$\le \|g_\ell - t_\ell\| + \|t_\ell - f\| < 3\varepsilon \qquad l > M,\ \ell > N.$$

Das K ist für das f so zu wählen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dx - \int_K f\,dx = \int_{\mathbb{R}\setminus K} f\,dx < \varepsilon.$$

Das ist möglich weil die Treppenfunktionen dicht in L^1 liegen und nur auf einem kompakten Intervall definiert sind.

$\blacksquare$

b) Wie in (a)!

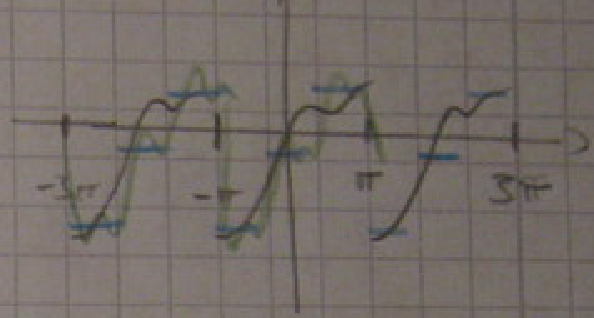
Diesmal ist das Intervall

$[-\pi, \pi]$, f wird 2π-periodisch

fortgesetzt, dito die Treppen-

funktionen. Die M-te Partialsumme ist wieder

nahe genug an f – vgl (a).



Sie muss 2π-periodisch sein, weil die Fourier-

koeffizienten mit 2π-period. Funkt. def. sind und

die Reihe aus 2π-period. Fkt besteht.

Man betrachtet nur das Intervall $[-\pi, \pi]$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} f_n(x) = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ z.z.: $\lim\limits_{x \to \infty} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$

Dies gilt nach Satz zum Vertauschen von Grenzwerten,

weil $f_n \rightrightarrows f$ glm angenommen wird.

Aus ⑧

Michael Wopp

[1]

(a) Die Fortsetzung von $\cos(2\pi z x)$ ist stetig in x auf R da cos stetig ist für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ und die Randwerte durch Symmetrie des Cos gleich sind.

Nach [1]:

$$\hat{f}\left(\frac{n}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underline{\cos(2\pi z x)}\, e^{-i\frac{n\pi}{1/2}x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i(2\pi z - 2\pi n)x} + e^{-i(2\pi z + 2\pi n)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{i(2\pi z - 2\pi n)}\left(e^{i(2\pi z - 2\pi n)\frac{1}{2}} - e^{-i(2\pi z - 2\pi n)\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{-i(2\pi z + 2\pi n)} \cdot \left(e^{-i(2\pi z + 2\pi n)\frac{1}{2}} - e^{i(2\pi z + 2\pi n)\frac{1}{2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{1}{z-n} \underbrace{\sin[\pi(z-n)]}_{\sin(\pi z)\underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n} - \underbrace{\cos(\pi z)\underbrace{\sin(\pi n)}_{0}}_{0}} + \frac{1}{z+n} \underbrace{\sin[\pi(z+n)]}_{\sin(\pi z)\underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n} + \underbrace{\cos(\pi z)\underbrace{\sin(\pi n)}_{0}}_{0}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sin(\pi z)(-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

Wieder nach [1]:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{1}{2\pi}\sin(\pi z)(-1)^n\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)\right\} e^{i\overbrace{2\pi n}^{\lambda_n} x} \cdot \overbrace{2\pi}^{\Delta\lambda_n}$$

□

$\square$

(b) $\cot(\pi z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$

$x = \frac{1}{z}$

$$\cos(\pi z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overbrace{(-1)^n \underbrace{e^{i\pi n}}_{(e^{i\pi})^n = (-1)^n}}^{1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \quad \Big| : \sin(\pi z) \cdot \pi$$

$$\pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-n} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+n}}_{\substack{n' = -n \\ \to \sum \frac{1}{z-n}}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-n}$$

[4]

(a) Verschiebe f sodass wir ein [illegible]- symmetrisches bekommen:

$$\tilde{f}(x) = f(x+\tfrac{1}{2}) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ -1 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tilde{c}_n^{\frac{1}{2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(x)\, e^{-i2\pi n x}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symmetrie}}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(x)\, i\sin(-2\pi n x)\, dx$$

$$= -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} dx\, i\sin(2\pi n x) + \int_{0}^{\frac{1}{2}} i\sin(2\pi n x)\, dx$$

$$= \Big\{ +i\big[\underbrace{\cos(0)}_{1} - \underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n}\big] - i\big[\underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n} - \underbrace{\cos(0)}_{1}\big] \Big\} \frac{1}{2\pi n}$$

$$= \{2i - 2(-1)^n i\} \frac{1}{2\pi n} =$$

$$= \frac{i}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$c_n^{\frac{1}{2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, e^{-i2\pi n x}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symmetrie}}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos(\overset{\text{egal}}{\pm} 2\pi n x)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}} -\cos(2\pi n x)\, dx + \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \cos(2\pi n x)\, dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} -\cos(2\pi n x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\ } \Big\{ \big[-\sin(-\tfrac{\pi n}{2}) + \sin(-\pi n)\big] + \big[\sin(\tfrac{\pi n}{2}) - \sin(-\tfrac{\pi n}{2})\big]$$

$$= \frac{i}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$c_n^{\frac{1}{2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, e^{-i2\pi n x}\, dx \underset{\text{Symmetrie}}{\overset{!}{=}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos(\overset{\text{egal}}{\pm} 2\pi n x)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}} -\cos(2\pi n x)\,dx + \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \cos(2\pi n x)\,dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} -\cos(2\pi n x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\Big\{\left[-\sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right) + \sin(-\pi n)\right] + \left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right)\right]$$
$$+ \left[-\sin(\pi n) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\Big\}$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\Big\{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \underbrace{\sin(\pi n)}_{0} + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$
$$- \underbrace{\sin(\pi n)}_{0} + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\Big\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi n} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) =$$

(b) Nach Krit. v. Dirichlet konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen f bis auf an den Sprungstellen, die dem Lebesgue-Integral aber egal sind...

Damit konvergiert sie (die F. R.) in $\|\cdot\|_{L^2}$ gegen f.

(c) $S_N(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \neq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\mathbb{Z}$. Dort: 0

Beides folgt aus Krit. v. Dirichlet.