Theoretische Physik 27. April 2009

Übung 1

Michael Kopp

1 Galilei Transformation

(a) Transformiert man den Vektor $\vec{r}$ aus dem System S nach S', so ergibt sich:

$$\vec{r}\,' = R\vec{r} - \vec{v}_0 t - \vec{b} \tag{1}$$

Nun kann man $\vec{v}'$ berechnen:

$$\vec{v}\,' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{r}' = R\dot{\vec{r}} - \vec{v}_0 \tag{2}$$

D.h. $\vec{v}'$ unterscheidet sich von $\vec{v}$ durch Richtung (der Vektor wurde mit R rotiert) und wurde zudem noch etwas verschoben (um $\vec{v}_o$). Da $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ ist auch $\vec{p}$ gedreht und verschoben.

Dadurch gilt auch für die Absolutbeträge $\vec{v} \neq \vec{v}'$ und damit für die kinetische Energie

$$T' = \frac{1}{2}m\|R\dot{\vec{r}} - \vec{v}_0\|^2 \neq \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}\|^2 = T \tag{3}$$

Dadurch ist der Energieerhaltungssatz aber nicht verletzt: In den Systemen S und S' ist die Summe der Energien trotzdem konstant – nur aber eben bei einem anderen Wert.

(b) Sei $r = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$. Für eine Kraft $F(r)$ gilt nun im System S:

$$F_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} f_{12}(r) \tag{4}$$

und nach Galilei-Transformation (dabei gilt: $r = r'$, weil der *Abstand* der beiden Teilchen sich nicht ändert, wenn die beiden verschoben werden oder rotieren):

$$\begin{aligned}
F'_{12} &= \frac{(R\vec{r}_1 - \vec{v}_0 t - \vec{b}) - (R\vec{r}_2 - \vec{v}_0 t - \vec{b})}{r} f_{12}(r) && (5)\\
&= \frac{R\vec{r}_1 - R\vec{r}_2}{r} f_{12}(r) && (6)\\
&= R\underbrace{\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} f_{12}(r)}_{F_{12}(r)} && (7)
\end{aligned}$$

D.h. die Kraft $\vec{F}$ wurde lediglich rotiert – ebenso wie die gegenseiteige Lage von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ rotierte.

Man könnte auch alternativ sagen, dass der *Betrag* der Kraft

$$F = -\nabla V(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) = -\nabla V(r)$$

nur vom *Abstand* r abhängig ist und dieser sich wieder nicht ändert. Die *Richtung* der Kraft ist wie in jedem guten 2-Teilchen-System auf der Verbindungsgerade zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$.

Leitet man nun noch Gl. 2 nach t ab, so ergibt sich

$$\vec{a}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{v}\,' = R\ddot{\vec{r}} \tag{8}$$

Es gilt also nach Newton in S und in S':

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \text{ und } R\vec{F} = F' = m \cdot \vec{a}\,' = m \cdot R\vec{a} \tag{9}$$

Wenn man nun an die Gleichung aus S' das inverse von R von links anmultipliziert, erhält man die Newton'sche Gleichung wie in S.

Bei der Spiegelung ergibt sich $\vec{F}' = -\vec{F}$ und $\vec{a}' = -\vec{a}$ und damit wird aus $\vec{F} = m\vec{a}$: $-\vec{F} = \vec{F}' = m\vec{a}' = -m\vec{a}'$ (was man durch -1 kürzen kann).

Bei der Zeitumkehr wird die Kraft $\vec{F}$ nicht beeinträchtigt: Sie ist von der Zeit unabhängig. Was sich ändert ist die Bewegung eines Teilchens. Hatte es sich vorher mit $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}t^2 + \dot{\vec{r}}t + \vec{r}_0$ bewegt, so bewegt es sich jetzt mit

$$\vec{r}'(t) = \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}t^2 - \dot{\vec{r}}t + \vec{r}_0$$

aber damit ist $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'$ und damit auch $\vec{F} = \vec{F}'$.

2. Gruppe der Galilei-Transformationen Sei

$$\mathcal{G} = \{g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ bijektiv } : \vec{x} \mapsto R\vec{x} - \vec{v}t - \vec{b} \mid R \in SO(3);\ \vec{v}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3\}$$

Die Elemente von $\mathcal{G}$ unterscheiden sich durch die Parameter $R, \vec{v}, \vec{b}$.

(i) Die Operation sei die Verkettung $\circ$. Da g und g' bijektiv sind, ist auch $g' \circ g = g''$ bijektiv und die Verkettung ist eindeutig. Zu zeigen: $g'' \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} x &\overset{g'\circ g}{\mapsto} R'(Rx - vt - b) - v't - b' && (10)\\ &= R'Rx - R'vt - R'b - v't - b' && (11)\\ &= \underbrace{R'R}_{R''}x - \underbrace{(R'v + v')}_{v''}t - \underbrace{R'b + b}_{b''} && (12)\end{aligned}$$

Dies Gilt, weil $R', R \in SO(3)$ sind und dies ebenfalls eine Gruppe ist (also $R' \cdot R = R'' \in SO(3)$) und weil die Matrix R quadratisch ist (und damit $f_R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Rx$), sodass nach der Multiplikation mit einem 3-D-Vektor sich wieder ein 3-D-Vektor ergibt.

(ii) Zu Zeigen: $g \circ (g' \circ g'') = (g \circ g') \circ g''$:

$$g \circ (g' \circ g'')(x) = R(R'(R''x - v''t - b'') - v't - v') - vt - b \quad (13)$$
$$(g \circ g') \circ g''(x) = R(R'(R''x - v''t - b'') - v't - v') - vt - b \quad (14)$$

Das ist deshalb so langweilig, weil die Verkettung $\circ$ assoziativ ist: Seien f, g, h verkettbare Abbildungen. Dann gilt

$f \circ (g \circ h)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g) \circ h(x)$

(iii) Das Neutrale Element g_e ist

$$g_e : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x - 0t - 0 = x$$

D.h. R ist die Einsmatrix und $v = b = 0$.

(iv) Da $R \in SO(3)$ $\exists R^{-1} \in SO(3)$. Das Neutrale Element zu g ist

$$g^{-1} : x \mapsto R^{-1}(x + vt + b)$$

Damit erfüllt $\mathcal{G}$ alle Eigenschaften einer Gruppe!

$\mathcal{G}$ ist nicht *abelsch*, da nicht kommutativ: Verschiebt man einen Vektor zuerst parallel zu seiner Ausgangslage und dreht in dann, ist der Punkt an einer anderen Stelle, als wenn man ihn zuerst dreht und dann parallel seiner Lage verschiebt:

$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dreht um $90°$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiebt in z-Richtung.

$g : \vec{x} \mapsto R\vec{x}$ und $g' : \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{b}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ soll bearbeitet werden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{g'}{\mapsto} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Und die andere Verkettungsreihenfolge:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{g'}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{g'}{\mapsto} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$