Ana (13)

Ana (13)

Michael Lepp

[1] (a) $y' = A + By + Cy^2$ $\quad$ φ ist Lös., $y = \omega + \varphi$

$$y' = \omega' + \varphi' = \omega' + A + B\varphi + B\varphi^2$$

$$\omega' + \cancel{A} + \cancel{B\varphi} + \cancel{C\varphi^2} = \cancel{A} + B\omega + \cancel{B\varphi} + C\omega^2 + C2\omega\varphi + \cancel{C\varphi^2}$$

$$\omega' = (B + 2C\varphi)\,\omega + C\omega^2$$

Bernoulli mit $\alpha = 2$. Subst.: $z := \frac{1}{\omega}$

$$z' = -\frac{1}{\omega^2}\,\omega' \Leftrightarrow \omega' = -z'\omega^2$$

$$z' = -(B + 2C\varphi)\,z - C$$

Lin. inhom. DGL. 1. Ordnung; Lös. mit Satz 3

$$\phi = \exp\left(\int_{x_0}^{x} -(B + 2C\varphi)\,d\xi\right) \qquad (B = B(\xi),\ C = C(\xi),\ \varphi = \varphi(\xi))$$

Allg. Lös für z: (Siehe Satz 3)

$$z = \alpha\phi + \int_{x_0}^{x} \frac{-C}{\phi}\,d\xi \cdot \phi$$

Rücksubst. zu y:

$$y = \omega + \varphi = \frac{1}{z} + \varphi$$

Allg. Lös. für y: (Nach Satz 2 sind das alle)

$$y = \frac{1}{\alpha\phi + \int_{x_0}^{x} \frac{-C}{\phi}\,d\xi \cdot \phi} + \varphi$$

Im Grenzfall $\alpha \to \infty$ erhalten wir wieder die alte Lös. $y = \varphi$.

(b) $y' = -x^5 + \frac{1}{x}y + x^3 \cdot y^2$

Durch Ausprobieren findet man: $\varphi = x$: $\varphi' = 1$

$$\varphi' = 1 = -x^5 + 1 + x^5 = 1 \quad \checkmark$$

$$\phi = \exp\left(\int_{x_0}^{x} -\frac{1}{x} - 2x^4\,d\xi\right) = \exp\left(-\ln x + \ln x_0 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{5}x_0^5\right)$$

$$= \frac{1}{x}\,e^{-\frac{2}{5}x^5} \cdot x_0\,e^{\frac{2}{5}x_0^5}$$

$$z = \alpha\phi + \int_{x_0}^{x} -\xi^3 \cdot \xi \cdot e^{\frac{2}{5}\xi^5}\,d\xi \;\frac{1}{x_0 e^{2/5 x_0^5}}\,\phi$$

$$= \alpha\phi - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} 2\xi^4\,e^{2/5\,\xi^5}\,d\xi \;\underbrace{\frac{1}{x_0\,e^{2/5\,x_0^5}}}\,\phi \qquad \left(2\xi^4 e^{2/5\,\xi^5}\right) = \left(e^{2/5\,\xi^5}\right)'$$

$$z = \alpha\phi - \frac{1}{2}\left(e^{2/5 x^5} - e^{2/5 x_0^5}\right) \frac{1}{x_0 e^{2/5 x_0^5}} \phi$$

$$= \alpha\phi - \left(\frac{1}{2x_0} e^{2/5(x^5 - x_0^5)} - \frac{1}{2x_0}\right)\phi$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x} e^{-2/5 x^5} \cdot x_0 e^{2/5 x_0^5} \left(x_0\alpha - \frac{1}{2x_0} e^{2/5(x^5-x_0^5)} + \frac{1}{2x_0}\right)} + x$$

$$= \frac{x \; e^{2/5(x^5 - x_0^5)}}{\alpha x_0 - \frac{1}{2} e^{2/5(x^5-x_0^5)} + \frac{1}{2}} + x$$

$$y(x_0) = \frac{x_0}{\alpha x_0 + 1/2} + x_0 = \frac{1}{\alpha + x_0/2} + x_0 = y_0$$

$$\alpha = \frac{1}{y_0 - x_0} - \frac{x_0}{2}$$

In y einsetzen; Nenner muss $\neq 0$ sein:

1. $x_0 \neq y_0$ gilt nur für $x_0 = 0 = y_0$

2. $$\frac{x_0}{y_0 - x_0} - \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2} e^{2/5(x^5 - x_0^5)} + \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\hat{x} = \sqrt[5]{\frac{5}{2} \ln\left(-2\left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x_0}{y_0 - x_0}\right)\right) + x_0^5}$$

$\Rightarrow$ Ein max. Intervall ist also

$$[x_0, \hat{x})$$

wenn $\hat{x}$ existiert; dies ist insbesondere nicht der Fall, wenn

$$1 + \frac{2x_0}{y_0 - x_0} - x_0 \leq 0$$

$$y_0 < x_0: \quad 2x_0 \geq (x_0 - 1)(y_0 - x_0) = y_0 x_0 - x_0^2 - y_0 + x_0$$

$\boxed{2}$

(a) Wähle $\varphi_0 = x$ $\quad$ (φ_0 erfüllt $\varphi_0(0) = 0$)

$$\varphi_1(x) = \int_0^x 1 - \varphi_0^2\,dt = \int_0^x 1 - t^2\,dt = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x 1 - \varphi_1^2(t)\,dt = \int_0^x 1 - (\cancel{t} - \frac{1}{3}t^3)^2\,dt = \int_0^x 1 - t^2 - \frac{1}{9}t^6 + \frac{2}{3}t^4\,dt$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x 1 - \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7\right)^2 dt = \int_0^x 1 - t^2 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{29}{45}t^6 + \frac{31}{315}t^8$$

$$- \frac{134}{4725}t^{10} + \frac{4}{945}t^{12} - \frac{1}{1296}t^{14}\,dt$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{29}{315}x^7 + \frac{31}{2835}x^9 - \frac{134}{51975}x^{11} + \frac{1}{4212}x^{13} - \frac{1}{19448}x^{15}$$

(b) $v' = 1 - v^2$ $\qquad$ Trennung der Var

$$x = \int \frac{dv}{1-v^2} = \operatorname{atanh}(v) + c$$

$v = \tanh(x - c)$ $\quad$ Anfangsbed.: $\tanh(0 - c) = 0 \Rightarrow c = 0.$

(c) $|\varphi_3(3) - \varphi(3)| \approx 38{,}91.$

Es gilt, da wir eine Kontraktion anwenden:

$$\|\varphi_k - \varphi\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|\varphi_0 - \varphi_1\| \qquad (*)$$

Mit den Werten aus (a), (b) können wir q bestimmen:

(Numerisch): $\quad q \leq 0{,}856$ $\qquad$ (für $\sup_{t\in[0,3]} |\varphi_0(t) - \varphi_1(t)| = 9$)

Mit $(*)$ kann man auflösen, wie groß k sein muss, dass

$\|\varphi_k - \varphi\| \leq 10^{-3}$: $\quad k \geq \dfrac{\ln[(1-q)\,10^{-3}/9]}{\ln q}$, also $k \geq 72$

Bem.: Wir dürfen davon ausgehen, dass wir es mit einer Kontraktion zu tun haben, weil $1 - t^2$ stetig und damit lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

4 $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ (Bem.: $x = t$!)

Die DgL wird zu $y_2' + 2y_2 + y_1 = xe^{-x}$

Zus. mit $y_2 = y_1'$:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \quad y_2 \\ y_2' &= -y_1 \quad -2y_2 \quad + xe^{-x} \end{aligned}\right| \Rightarrow \underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\underline{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-x} \end{pmatrix}$$

Lösen durch $\underline{y} = EV \cdot e^{+EW \cdot x}$

Best. dazu Eigenwerte:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \mathbb{1} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$$

Nur ein EW! Wähle EV:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist EV}$$

Leider ist der einzige ER eindimensional; wir müssen auf Haupträume ausweichen:

$(A - \lambda\mathbb{1})^2 = \mathbb{0}$ also $(A - \lambda\mathbb{1})^2 \underline{v}_2 = 0$ für bel. $\underline{v}_2$.

Wähle $\underline{v}_2 \notin \ker(A - \lambda\mathbb{1})$, also bspw. $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es ist $\underline{v}_1 = (A - \lambda\mathbb{1}) \cdot \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} +1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die Jordanbasis: $\mathcal{B}_J = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ mit Transformationsmatrix $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Um T zu invertieren: $\det T = 2 \cdot 2 = 4$, $(\operatorname{adj} T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, damit: $T^{-1} = \operatorname{adj} T / \det T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{-1}(2) =: \mathcal{J}$$

Um $\exp(tA)$ für homogene Lösung zu bestimmen, verw.:

$$tA = T t\mathcal{J} T^{-1} \Rightarrow \exp(tA) = \exp(Tt\mathcal{J}T^{-1}) = T\exp(t\mathcal{J})T^{-1}$$

$$\exp(t\mathcal{J}) = \exp\left(\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} = \ldots =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Damit haben wir den homogenen Teil der Lösung gefunden; für bel. Konstanten C, D gilt:

$$\underline{y}_{homo} = \exp(tA)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Wir suchen eine Partikulärlösung der DGL direkt mit dem Ansatz $\varphi = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}$

(dies ist ein Ansatz, der der Inhomogenität ähnelt, dessen Konstanten bestimmt werden müssen):

Setzt man $\varphi'' + 2\varphi' + \varphi = x e^{-x}$ ein, kann man auflösen: (mit e^{-x} kürzen, nach Potenzen von x sortieren)

$$x(6A) + 2B = x$$

$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{6}, \; B = 0, \quad C, D$ bel., also oBdA $C = D = 0$.

Eine Partikulärlösung ist also

$$\underline{y}_{part} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$$

Insgesamt haben wir die Lösung

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} x^3 e^{-x} \\ \frac{1}{2} x^2 e^{-x} - \frac{1}{6} x^3 e^{-x} \end{pmatrix},$$

für die eindim. DGL auf dem Blatt gilt die erste Zeile:

$$y = [(1+x)C + x \cdot D] e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}.$$

(b) Es ist $\underline{Y}_0 = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$$y = x e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}.$$

$\boxed{3}$

(a) Die i,j-te Komponente einer Matrix M erhält man durch $e_i^T \cdot M \cdot e_j$ (e_i: Einheitsvekt.). Dabei kann man den Betrag von Me_j durch $\|M\|$ abschätzen, weil e_j gerade ein Vektor mit $\|e_j\|=1$ ist, also $\|Me_j\| \le \|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|$. Ebenso kann man die lineare Abbildung $e_i^T \cdot$ abschätzen durch die Norm des Vektors auf den sie wirkt, weil $e_i^T \cdot$ ja genau eine Komponente davon „herauspickt", welche logischerw. $\le$ dem maximalen Element des Vektors ist. Also:

$$|e_i^T \cdot M \cdot e_j| \le \|M\| . \qquad (e)$$

Wir wollen für eine Komponente zeigen, dass die Cauchybed. für Konvergenz $\sum_{k=0}^N a_k A^k \to f(A)$ erfüllt sind; mit (e) ist es hinreichend die CB für die Matrizen zu zeigen; betrachte zuerst Konvergenz der Reihe (also ob $f(A)$ existiert.):

$$\|\sum a_k A^k\| \underset{\Delta\text{-Ugl}}{\le} \sum \|a_k A^k\| \underset{\text{Homogenität}}{=} \sum |a_k| \, \|A^k\|$$

$$\underset{\|\psi\circ\varphi\| \le \|\psi\|\cdot\|\varphi\|}{\le} \sum |a_k| \cdot \|A\|^k \le \sum |a_k| \cdot |\xi|^k ,$$

wobei ξ eine Zahl zwischen $\|A\| \le \xi < R$ ist. Für die Potenzreihe $\sum a_k \xi^k$ wissen wir, dass sie (da $|\xi| < R$) absolut konvergiert, damit konv. die Matrizen-Potenzreihe. Mit

$$\|f(A) - \sum_{k=0}^N a_k A^k\| = \|\sum_{k=0}^\infty a_k A^k - \sum_{k=0}^N a_k A^k\|$$

$$= \|\sum_{k=N+1}^\infty a_k A^k\| = \|\lim_{M\to\infty} \sum_{k=N+1}^M a_k A^k\|$$

$$\underset{\|\cdot\| \text{ stetig}}{=} \lim_{M\to\infty} \|\sum_{k=N+1}^M a_k A^k\| \underset{\text{s.o.}}{\le} \lim_{M\to\infty} \sum_{k=N+1}^M |a_k| \|A\|^k$$

$$\le \lim_{M\to\infty} \sum_{k=N+1}^M |a_k| |\xi|^k$$

Weil die Potenzreihe mit ξ absolut konvergiert ist

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\hat N\in\mathbb{N}}\ \forall_{M,N\geq\hat N}:\ \sum_{k=N+1}^{M} |a_k|\,|\xi|^k < \varepsilon$$

und damit gilt diese Bed. auch für $\|f(A)-\sum a_k A^k\|$,

also $\quad \|f(A)-\sum a_k A^k\| \longrightarrow 0.$ $\square$

Die gewünschte Fehlerabschätzung ist gleich mit bewiesen.

(b)

1. Nach Cauchy-Hadamard gilt für den Konv'rad.

$$R = \left(\overline{\lim_k} \sqrt[k]{|a_k|}\right)^{-1} = \left(\overline{\lim} \sqrt[k]{1/k}\right)^{-1} = 1$$

Denn:

Statt $k^{1/k}$ untersuche ich $\ln k^{1/k} = \frac{1}{k}\cdot \ln k$.

Dies geht für $k\to\infty$ gegen 0, weil $\ln k$ langsamer wächst als k: Es ist $e^{\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^{3/2}+\mathcal{O}(x^2)$, also $x\leq e^{\sqrt{x}}$. Da $\ln$ monoton: $\ln x\leq\sqrt{x}$. So folgt $\frac{1}{k}\ln k\leq\frac{1}{k}\sqrt{k} = 1/\sqrt{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Da $\ln$ stetig ist, gilt $\lim_{k\to\infty}\ln(k^{1/k}) = \ln(\lim_{k\to\infty}k^{1/k}) = 0$, damit $\lim_{k\to\infty}k^{1/k} = 1$ da $\ln 1 = 0$ und da $\ln$ als Umkehrfunkt. von $\exp$ eindeutig ist (für $x>0$). $\square$

Damit: $\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}B^k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\frac{1}{k}|\,\|B\|^k < \infty$ da $\|B\| < R = 1$ ist. $\square$

2. Dito: $R = (\overline{\lim}\sqrt[k]{1})^{-1} = 1$, $\|\sum_{k=0}^{\infty}B^k\|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\|B\|^k$ konv. da $\|B\|<R=1$. $\square$

3. Wende $(\mathbb{1}-B)$ an: $\sum_{k=0}^{\infty}B^k - B^{k+1} \stackrel{!}{=} \mathbb{1}$ $\quad (k+1=l)$

$\sum_{k=0}^{\infty}B^k - \sum_{l=1}^{\infty}B^l = \mathbb{1}$ $\square$

4. Die Reihe entspr. der Taylorentw. von $\ln(1+x)$ $(x<1)$; siehe außerdem Aufg. (c).