Marcel Beyl

Die Ableitung der $e - $ *Funktion*

Aus Klasse 11 ist die Differenzierung/ Ableitung anhand des Differenzenquotienten, oder auf mit der "h-Methode" bekannt, genau diese gilt es jetzt anzuwenden, um die Ableitung der e-Funktion zu bestimmen:

f(x) = e^x

$f'(x) = \frac{\left(e^{x_0 + h} - e^{x_0}\right)}{h}$ für h gegen 0

$= \frac{\left(e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}\right)}{h} = \frac{\left(e^{x_0}\left(e^h - 1\right)\right)}{h} = \frac{e^{x_0} \cdot \left(e^h - 1\right)}{h} = e^{x0}$

$\cdot \lim_{h \to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)}{h}$

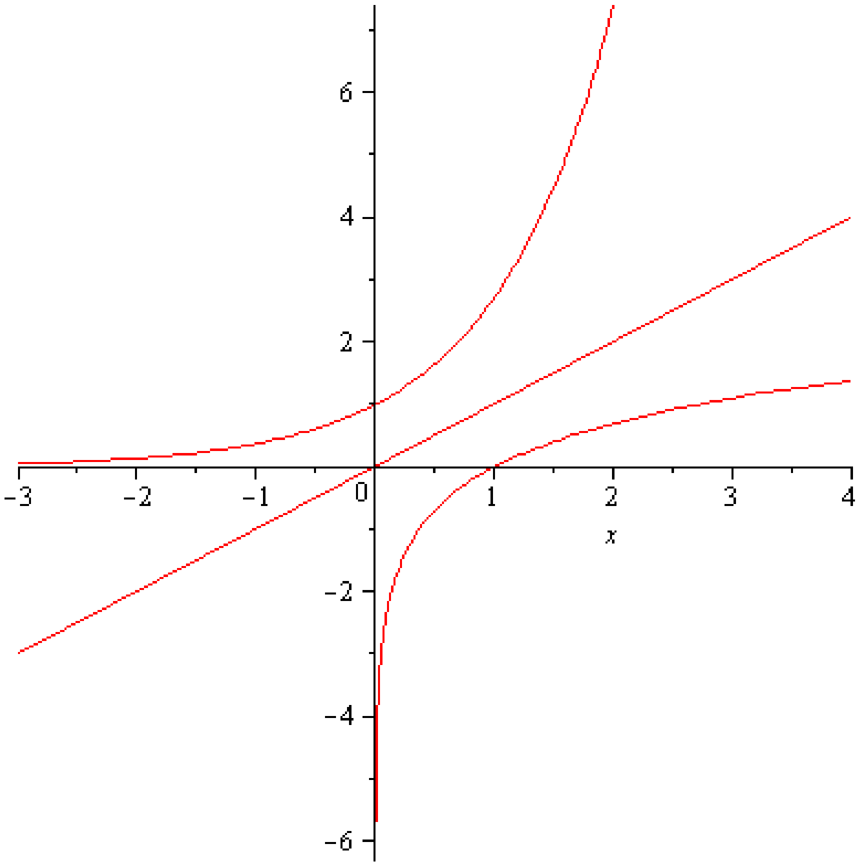
mit Satz von l'Hospital ergibt sich: $e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$

somit ist bewiesen, dass die Ableitung von e^x einfach e^x ist.
Natürlich ist dann auch die Stammfunktion der e-Funktion F(x) = $e^x + c$, wobei c aus den reellen Zahlen kommt.

Zeichnet man eine e-Funktion, eine Logarithmus-Funktion (logarithmus naturalis), sowie die Funktion y = x, so ist doch etwas beachtliches feststellbar:

$plot(\ln(x), x = -3 \,..4)$

Marcel Beyl



$plot(\exp(x), x = -3..2)$

$plot(x, x = -3..4)$

Spiegelt man die e-Funktion an y = x, so erhält man die Logarithmusfunktion, und auch andersrum. In der Mathematik sagt man dazu: Die e-Funktion ist die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion)
Aus dieser Erkenntnis kann man sich die Ableitung der Logarithmusfunktion herleiten:
$f(x) = \ln(x)$
$also\ e^{y} = x$
das heißt: $y'_{x} = \frac{1}{x'_{y}} = \frac{1}{e^{y}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

Was wir herausgefunden haben: Die Ableitung von f(x) = ln(x) ist f'(x) = $\frac{1}{x}$

Daher kommt auch die latente Wichtigkeit der Kenntnisse über Logarithmen, die man schon in der 10. Klasse erlernt, hierbei jedoch mit dem 10er-Logarithmus, welcher jetzt systematisch durch den Logarithmus zur Basis e ersetzt wird, der eigentlich "normale" Logarithmus.

Die Logarithmusgesetze sind aber immer noch die gleichen, es lohnt sich also, diese nochmals anzuführen:

- $\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$
- $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$
- $\log(u^r) = r \cdot \log(u)$ (wichtig!)

Auch eine sehr häufig benötigte Gleichheit ist $e^{lnx} = x$, welche eigentlich recht logisch ist, und an dieser Stelle als Indikator dienen soll, ob die Logarithmen soweit verstnaden wurden.

Diese Umschreibung sollte ins aktive Wissen des Lesers übergehen, denn man sollte diese Form auch selbst anwenden können, als Beispiel dazu soll die Ableitung folgender Funktion dienen:

$f(x) = 5^x$

$$\text{Mit eben genannter Gleichheit ergibt sich } f(x) = 5^x$$
$$= \left(e^{\ln(5)}\right)^x \text{ und mit den Potenzgesetzen } = e^{(\ln(5) \cdot x)},$$
$$\text{was jetzt nach der allgemeinen Regel abgeleitet werden kann :}$$

$$f'(x) = \ln(5) \cdot e^{\ln(5) \cdot x}, \text{ und nun kann man dafür natürlich auch}$$
$$= \ln(5) \cdot 5^x \text{ schreiben .}$$

Soll man die Aufleitung zu $f(x) = 5^x$ bilden, läuft dies analog ab, und könnte eine gute Übung zum selbst machen und verdeutlichen sein.

Wozu lernt man nun aber e-Funktionen, bzw. wo tauchen diese noch im Abi auf?
e-Funktionen dienen in erster Linie dazu, Wachstumsprozesse anzugeben, dies kann ganz leicht erklärt werden:
Aus der 10. Klasse kennt man das exponentielle Wachstum der Form $f(t) = c \cdot a^t$, wobei
c = f(0) der Startwert ist
a der Wachstumsfaktor
und t die Zeit

schreiben wir doch einfach mal a um zu $e^{\ln(a)}$und setzen dies in die eben genannte Formel ein:

$$f(t) = c \cdot e^{\ln(a) \cdot t}, \text{ setzt man nun noch } k = \ln(a),$$
$$\text{erhält man die allgemeine Formel } f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$$

, die Formel für das exponentielle Wachstum.

, die Formel für das exponentielle
Wachstum.

Wachstum/ Zerfall: ist k > 0, erfährt die Funktion ein Wachstum, denn ln(a) > 0 heißt, dass a größer als 1 ist. k < 0 führt demnach zu einem Zerfallsprozess.

Geht es um Wachstum, wird oft nach Verdoppelungs- und Halbwertszeit gefragt, dies noch zum Abschluss des Themas exponentielles Wachstum:
Verdoppelungszeit: $T_V = \frac{\ln(2)}{k}$
Halbwertszeit: $T_H = \frac{\ln(2)}{k}$

Jetzt überlegen wir noch, wie man die Funktion, die das exponentielle Wachstum beschreibt, ableitet:

$f(t) = c \cdot e^{kt}$
$f'(t) = k \cdot c \cdot e^{kt} = k \cdot f(t)$
Das zeigt, dass die Funktion und ihre Ableitung gewissermaßen zusammenhängen, stellt man die Funktion nach k um, ergibt sich:
$k = \frac{f'(t)}{f(t)}$, k ist eine Konstante, also sind f'(t) und f(t) proportional.
Funktionen, bei denen genau eben erkanntes zutrifft, nennt man auch Differenzialgleichungen. Wir haben also die Differenzialgleichung des exponentiellen Wachstums aufgestellt.

Schließlich gibt es noch eine weitere zentrale Wachstumsart in der Mathematik, die man ebenfalls mit e-Funktionen beschreiben kann, nämlich das beschränkte Wachstum. Beschränkt ist ein Wachstum, wenn es eine Schranke gibt, an die sich die Funktion annähert. Lässt sich eine solche Schranke finden, bezeichnet man diese mit "S". Verständlicherweise sollte sie Einklang in die Formel finden, es ergibt sich nach etwas Rumgerechne die Formel für das bescränkte Wachstum:

$f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$
leitet man diese Funktion ab, erhält man
leitet man diese Funktion ab, erhält man
$f'(t) = k \cdot c \cdot e^{-kt}$, *oder auch* $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$,
die Gleichheit ergibt sich durch einfaches Einsetzen, was mir als eine gute Übung erscheint.