Aufgabe 2: Fourierzerlegung

Michael Kopp

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < \pi \\ -2 & -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wurde Fourierzerlegt. Aus Symmetriegründen fallen alle Cosinusterme weg und für die Sinusterme gilt

$$a_n = \frac{4}{\pi\, n}(1 - (-1)^n) \ .$$

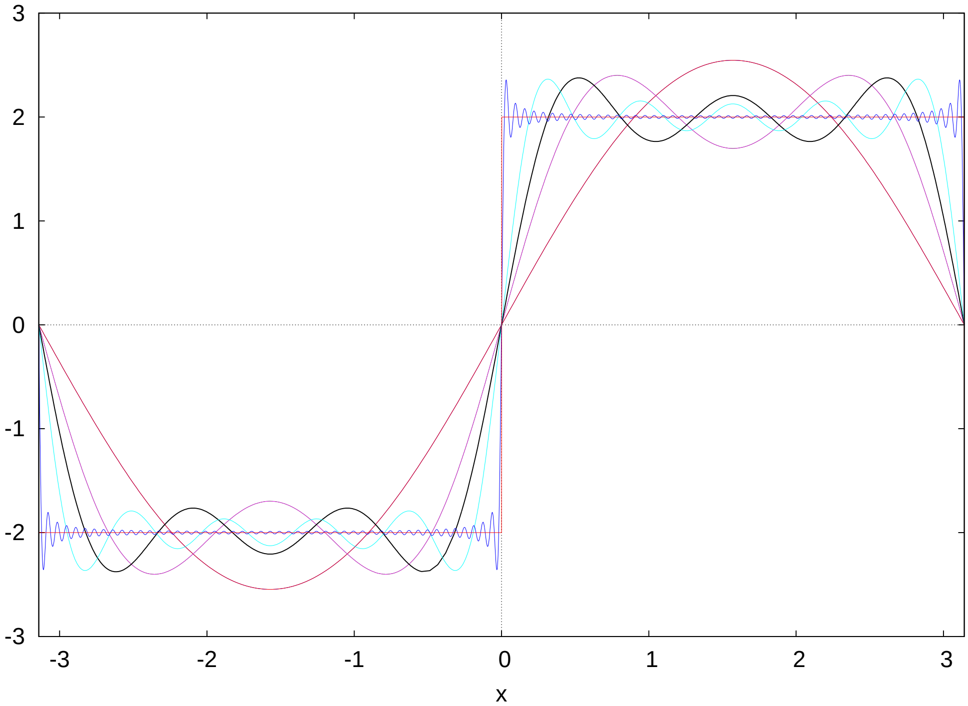
In Abb. 1(a) wurden die Partialsummen der Fourierreihe $S_1, ..., S_5, S_{10}$ und S_{100} geplottet mit

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k sin(k\, x)$$

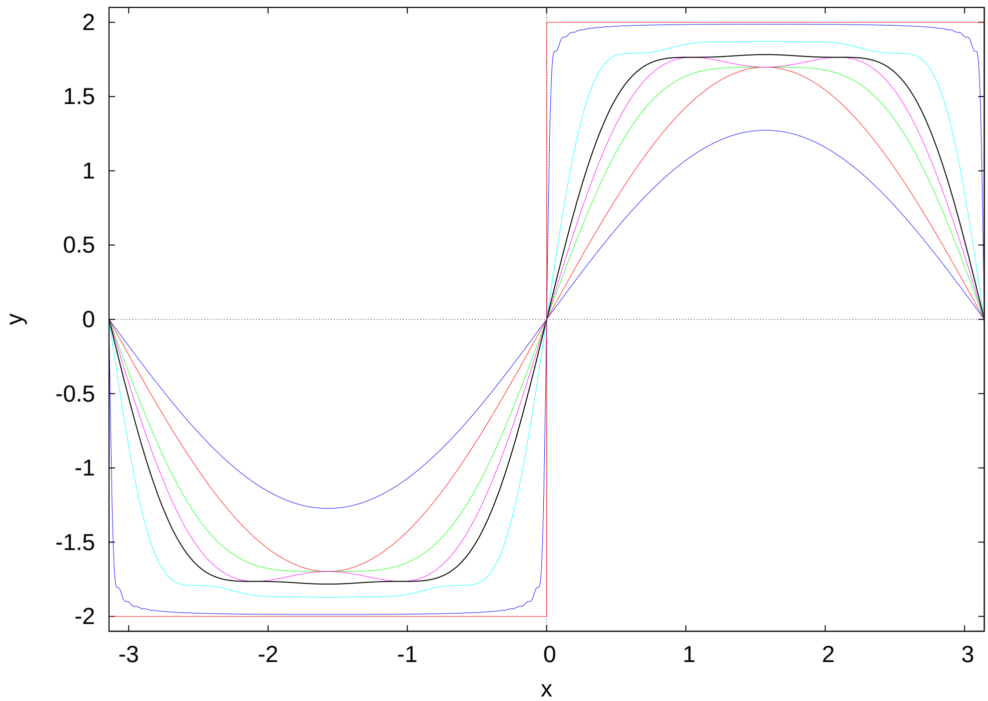
und in Abb. 1(b) die Cesaro-Summen $\sigma_2, ..., \sigma_6, \sigma_{10}$ und σ_{100} gemäß

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k \ .$$

Wie man sieht konvergieren die S_n so, dass an den Kanten stets hohe Überhänge bleiben. Diese fehlen bei den σ_n, dafür scheinen diese langsamer gegen f zu konvergieren. Natürlich ist diese subjektive Characterisierung der Tatsache geschuldet, dass S_n in einer Integralnorm und σ_n gleichmäßig bzgl. x konvergiert.



(a) Partialsumme der Fourierreihe



(b) Cesaro-Partialsumme der Fourierreihe

Abbildung 1: Approximation von $f(x)$