Theo (15) Michael Kopp

1

(a) Da $\underline{A} = \underline{A}(\underline{x}) \Rightarrow [\underline{A}(\underline{x}), \underline{x}] = 0$ da $[\underline{x}, \underline{x}] = 0$.

- $[x_i, \Pi_j] = [x_i, p_j] = \frac{\hbar}{i}[x_i, \partial_j] = \frac{\hbar}{i}(x_i\partial_j - \partial_j x_i)$

$$= \frac{\hbar}{i}(x_i\partial_j - \delta_{ij} - x_i\partial_j) = -\frac{\hbar}{i}\delta_{ij} = i\hbar\delta_{ij}$$

- $[\Pi_i, \Pi_j] = [p_i - \frac{e}{c}A_i, p_j - \frac{e}{c}A_j]$

$$= \underbrace{[p_i, p_j]}_{0} - \frac{e}{c}[p_i, A_j] - \frac{e}{c}[A_i, p_j] + \frac{e^2}{c^2}\underbrace{[A_i, A_j]}_{0}$$

$$= -\frac{e\hbar}{ci}\left(\partial_i A_j - A_j\partial_i + A_i\partial_j - \partial_j A_i\right)$$

$$= -\frac{e\hbar}{ci}\left((\partial_i A_j) + \cancel{A_j\partial_i} - \cancel{A_j\partial_i} + \cancel{A_i\partial_j} - (\partial_j A_i) - \cancel{A_i\partial_j}\right)$$

$$= -\frac{e\hbar}{ci}\left(\mathrm{rot}\,\underline{A}\right)^k \varepsilon_{ijk}$$

$$= -\frac{e\hbar}{ci} B^k \varepsilon_{ijk}$$

$(\mathrm{rot}\,A)^k = \varepsilon_{ijk}\,\partial_i A_j$

~~$A_{\varepsilon_{ijk}} = \varepsilon_{ijk}$~~

- „konjugiert" macht keinen Sinn; möglicherweise war „selbst-adjungiert" gemeint:

$$\underline{\Pi}^+ = \underline{p}^+ - \frac{e}{c}\underline{A}^+ = \underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A},$$

weil $\underline{p} = \underline{p}^+$ da $\underline{p}$ Observable und $\underline{A} = \underline{A}^+$ weil $\underline{A} = \underline{A}(\underline{x})$ und $\underline{x}$ Observ.

- Zeitevolution: $\frac{\partial}{\partial t}\underline{x} =: \underline{v} = \frac{i}{\hbar}[H, \underline{x}]$

$\underline{v} = \frac{i}{2m\hbar}[\underline{\Pi}^2, \underline{x}] \Leftrightarrow v^k = \frac{i}{2m\hbar}[\underline{\Pi}^2, x^k] = \frac{i}{2m\hbar}[\Pi_i^2, x^k] \ominus$

(weil $[A, x] = 0$, da $[x_i, x_j] = 0 \Rightarrow [\underline{x}, x_i] = 0$)

$$\ominus\ \frac{i}{2m\hbar}\left(\Pi^i \underbrace{[\Pi_i, x^k]}_{= -i\hbar\delta_{ik}} + \underbrace{[\Pi^i_i, x^k]}_{= -i\hbar\delta_{ik}}\Pi^i_i\right) = \frac{-2\hbar i^2}{2m\hbar}\Pi^k \Leftrightarrow \underline{v} = +\frac{1}{m}\underline{\Pi}$$

(da $[\Pi_i, x^k] = [p_i, x^k]$)

(b) $\underline{B} = B\,\underline{e}_z \Rightarrow B^x = B^y = 0,\ B^z = B. \Rightarrow$

(*) $[\Pi_i, \Pi_z] = 0$ (da entw. $B^h = 0$ oder ε_{ijh} zwei z enth., also ~~dies~~ auch verschwindet).

• $H_\perp \propto \Pi_x^2 + \Pi_y^2$

$$[H, H_\perp] \propto [\underline{\Pi}^2, \Pi_x^2 + \Pi_y^2] = [\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2, \Pi_x^2 + \Pi_y^2]$$

$$= \underbrace{[\Pi_x^2, \Pi_x^2]}_{0} + \underbrace{[\Pi_x^2, \Pi_y^2] + [\Pi_y^2, \Pi_x^2]}_{0} + \underbrace{[\Pi_y^2, \Pi_y^2]}_{0} + \underbrace{\underbrace{[\Pi_z^2, \Pi_x^2]}_{0} + \underbrace{[\Pi_z^2, \Pi_y^2]}_{0}}_{\text{weil } \Pi_z \text{ aufhebt } (\text{s.}(*))}$$

weil stets $[A, A] = 0$

$[\Pi_y^2, \Pi_x^2] = -[\Pi_x^2, \Pi_y^2]$

$\Rightarrow [H, H_\perp] = 0$

• $H_\parallel \propto \Pi_z^2$:

$[H, H_\parallel] \propto [\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2, \Pi_z^2] = 0$ da Π_z aufhebt. (s.(*))

$\Rightarrow [H, H_\parallel] = 0$

Für eine Größe A gilt: $i\hbar \frac{d}{dt} A = [H, A] + \frac{\partial}{\partial t} A$. Ist A also nicht expl. von t abh. (wie hier $\underline{\Pi}$), dann folgt aus $[H, A] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} A = 0$, und damit $A = \text{const.}$ $\blacksquare$

• $[\Theta_h, H] = [\Pi_h + m\omega\, \varepsilon_{zjh} x_j, \Pi_e \Pi^e] / 2m$ ~~......~~

$\stackrel{\odot}{=} \frac{1}{2m}\left([\Pi_h, \Pi_e \Pi^e] + m\omega\, \varepsilon_{zjh} [x_j, \Pi_e \Pi^e]\right)$

$(\underline{e}_z \times \underline{x})_h = e_z^i x_j \varepsilon_{ijh}$, $e_z^i = \delta_z^i$, $= \varepsilon_{zjh} x_j$

$\triangleright\ [\Pi_h, \Pi_e \Pi^e] = -[\Pi_e \Pi^e, \Pi_h] = -\Pi_e \underbrace{[\Pi^e, \Pi_h]}_{-\frac{e\hbar}{ci} B^m \varepsilon_{ehm} = -\frac{e\hbar}{ci} B\, \varepsilon_{ehz}} - [\Pi_e, \Pi_h] \Pi^e$

$= -i \frac{e\hbar}{c} B\, 2\, \varepsilon_{ehz}\, \Pi_e$

$B^m = B \cdot \delta_z^m$

$\triangleright\ [x_j, \Pi_e \Pi^e] = -[\Pi_e \Pi^e, x_j] = -\Pi_e \underbrace{[\Pi^e, x_j]}_{-i\hbar \delta_{ej}} - [\Pi_e, x_j] \Pi^e = 2 i\hbar\, \delta_{ej} \Pi^e$

$\stackrel{\odot}{=} \frac{1}{2m}\left(-i \frac{e\hbar B \cdot 2}{c} \varepsilon_{ehz} \Pi_e + m\underbrace{\omega}_{\frac{eB}{mc}} \varepsilon_{zjh} \cdot 2 i\hbar\, \delta_{ej} \Pi_e\right) =$

$\frac{i e\hbar B\, 2}{2mc} \underbrace{\left(-\varepsilon_{ehz} + \varepsilon_{zeh}\right)}_{0 \text{ da } \varepsilon_{ehz} = -\varepsilon_{ezh} = \varepsilon_{zeh}} \Pi^e = 0 \Rightarrow \Theta_h$ erhalten

$\Rightarrow \underline{\Theta}$ erhalten. $\blacksquare$

(b) [Forts.]

$$\bullet\ [\Theta_i,\Theta_j] = [\Pi_i + m\omega\,\varepsilon_{zli}\,x_l\,,\ \Pi_j + m\omega\,\varepsilon_{zmj}\,x_m]$$

$$= \underbrace{[\Pi_i,\Pi_j]}_{-\frac{e\hbar}{ci}\varepsilon_{ijk}B^k} + \underbrace{[\Pi_i, m\omega\,\varepsilon_{zmj}\,x_m]}_{-m\omega\,\varepsilon_{zmj}\,i\hbar\,\delta_{im}} + \underbrace{[m\omega\,\varepsilon_{zli}\,x_l,\Pi_j]}_{+m\omega\,\varepsilon_{zli}\,i\hbar\,\delta_{lj}} + m^2\omega^2\underbrace{[\varepsilon_{zli}x_l,\varepsilon_{zmj}x_m]}_{0}$$

$$B^k = B\cdot\delta^k_z$$

$$= +i\frac{e\hbar B}{c}\varepsilon_{ijz} - i\frac{eB}{c}\hbar\,\varepsilon_{zij} + i\frac{eB}{m}\hbar\,\varepsilon_{zji}$$

$$= i\frac{e\hbar B}{c}\Big(\underbrace{\varepsilon_{ijz}}_{\varepsilon_{ijz}} - \underbrace{\varepsilon_{zij}}_{=-\varepsilon_{ijz}} + \underbrace{\varepsilon_{zji}}_{=-\varepsilon_{ijz}}\Big) = -i\frac{e\hbar B}{c}\varepsilon_{ijz} = \frac{m\omega\hbar}{i}\varepsilon_{ijz}$$

$$\bullet\ [\Theta_i,\Pi_j] = [\Pi_i + m\omega\,\varepsilon_{zli}\,x_l\,,\ \Pi_j]$$

$$= \underbrace{[\Pi_i,\Pi_j]}_{i\frac{e\hbar}{c}B\varepsilon_{ijz}} + m\omega\,\varepsilon_{zli}\underbrace{[x_l,\Pi_j]}_{i\hbar\delta_{lj}} = i\,m\omega\hbar\big(\varepsilon_{ijz} + \underbrace{\varepsilon_{zji}}_{=-\varepsilon_{ijz}}\big) = 0$$

$$\bullet\ aa^\dagger = \frac{1}{2m\omega\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y)(\Pi_x - i\Pi_y)$$

$$= \frac{1}{2m\omega\hbar}\Big(\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + i\underbrace{[\Pi_y,\Pi_x]}_{-\frac{e\hbar}{ci}B\underbrace{\varepsilon_{yxz}}_{-1}}\Big) = \frac{1}{2m\omega\hbar}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + m\omega\hbar\right)$$

$$= \frac{1}{\omega\hbar}\left(H_L + \omega\hbar/2\right)$$

$\Rightarrow$

falsche Aufg. :-)

(c) $a := (\Pi_x + i\Pi_y)/\sqrt{2\hbar m\omega}$ $\qquad$ $b := (\Theta_x - i\Theta_y)/\sqrt{2\hbar m\omega}$

$\cancel{[a, a^+] = [\Pi_x}$

$$(2\hbar m\omega)[a^+, a] = [\Pi_x - i\Pi_y, \Pi_x + i\Pi_y]$$
$$= \underbrace{[\Pi_x, \Pi_x]}_{0} + i[\Pi_x, \Pi_y] - i[\Pi_y, \Pi_x] + \underbrace{[\Pi_y, \Pi_y]}_{0} = 2i[\Pi_x, \Pi_y]$$
$$= -2i \frac{e\hbar}{c} B \underbrace{\varepsilon_{xyz}}_{1} = -2m\omega\hbar$$

$$\Rightarrow [a, a^+] = +1$$

$$[b^+, b] \cdot (2m\omega\hbar) = [\Theta_x + i\Theta_y, \Theta_x - i\Theta_y]$$
$$= \underbrace{[\Theta_x, \Theta_x]}_{0} - i[\Theta_x, \Theta_y] + i[\Theta_y, \Theta_x] + \underbrace{[\Theta_y, \Theta_y]}_{0} = -2i[\Theta_x, \Theta_y]$$
$$= -2i \frac{m\omega\hbar}{1} \varepsilon_{xyz} = -2m\omega\hbar$$

$$\Rightarrow [b, b^+] = 1$$

$$H = \Pi^2/2m = (\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2)/2m = H_\perp + H_\parallel$$

- $$aa^+ = \frac{1}{2m\omega\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y)(\Pi_x - i\Pi_y)$$
$$= \frac{1}{2m\omega\hbar}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + i[\Pi_y, \Pi_x]\right) = \frac{1}{2m\omega\hbar}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + m\omega\hbar\right)$$
$$= \frac{1}{\omega\hbar}(H_\perp + \omega\hbar/2)$$

$$\Rightarrow H_\perp = \omega\hbar\, aa^+ - \omega\hbar/2 = \omega\hbar(\underbrace{aa^+}_{\overset{!!}{N}} - 1/2)$$

- Aus (*) (in (b)) ist bekannt, dass Π_z mit Π_x, Π_y vertauscht, also auch Π_z^2 mit Π_x^2 und Π_y^2, und da a, a^+ über Π_x^2, Π_y^2 def. sind, ist $[\Pi_z^2, a] = [\Pi_z^2, a^+] = 0$.

Wählt man $\underline{A} = -\frac{1}{2}\underline{x} \times \underline{B}$, so hat $\underline{A}$ wg. $\underline{B} \parallel \underline{e}_z$ keine z-Komponente. Es ist dann nach Def. von $\underline{\Pi}$: $\Pi_z = p_z$.
Wir dürfen $\underline{A}$ so wählen, weil $\underline{\nabla} \times (-\frac{1}{2}\underline{x} \times \underline{B}) = \underline{B}$ ist.

(c)

P_z hat also als Observable Eigenvektoren, welche eine ~~Erzeugendensystem~~ orthogonale Basis von $\mathcal{H}$ sind.

Weil $P_z = \Pi_z$, gehören die Eigenvektoren von Π_z^2 auch

und $[\Pi_i^2, \Pi_z^2] = 0$

zu $(aa^+ - 1/2)$.

Der Operator $\hat{P}_z$ hat die Eigenwerte $P_z = \hbar k_z =: \hbar \xi$, damit ist laut $\hat{P}_z^2$ die Eigenwerte $(\hbar \xi)^2 = \hbar^2 \xi^2$ (‡) und so ergibt sich für den Hamiltonian:

- $$H = H_\perp + H_\parallel = (aa^+ - 1/2)\hbar\omega + P_z^2/2m$$

und $$H|n,k\rangle = (n - 1/2)\hbar\omega + \hbar^2 \xi^2/2m,$$

wobei $aa^+ =: N$ der Numberoperator des Harmonischen Oszillators ist.

- Die Entartung von E_n ist zweifach:

Für jedes n gibt es zwei ξ, ξ' und $\tilde{\xi}$ mit $\xi' = -\tilde{\xi}$ wobei $E(n,\xi') = E(n,\tilde{\xi})$.

(‡): Freies Teilchen: $\psi(x) = e^{ik_x x}$ k_z in z-Richtung

freies Teilchen: $\psi(z) = e^{ikz}$ $\Rightarrow P_z^2 = -\hbar^2 \partial_z^2$

$$P_z^2 \psi(z) = -\hbar^2 \partial_x^2 e^{ikz} = -\hbar^2 i^2 k^2 e^{ikz} = \hbar^2 k^2 \psi(z)$$

(d) $\underline{A} = Bx\, \underline{e}_y$

$$\Pi_x = p_x$$
$$\Pi_y = p_y - m\omega x$$
$$\Pi_z = p_z$$

$$(\mathrm{rot}\, \underline{A}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = B\, \underline{e}_z$$

$$\underline{\Pi}^2 = p_x^2 + p_z^2 + p_y^2 + m^2\omega^2 x^2 - m\omega(p_y x + x p_y)$$

$$= \cancel{\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x\right)^2} - \hbar^2 \Delta + m^2\omega^2 x^2 - 2m\omega \frac{\hbar}{i}(x \partial_y)$$

$\partial_y x = 0$

$\partial_y (x \cdot) =$

$\underbrace{(\partial_y x)}_{0} \cdot + x \partial_y \cdot)$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + i\omega\hbar\, x \partial_y$$

Die DGL $(H/2m - E)\psi = 0$ ist praktisch

nicht lösbar