Ferromagnet

Michael Kopp

Ferromagnet I

Wir betrachten einen Ferromagnet mit der Zustandsgleichung (vgl. Abb. 1(a))

$$F(T,M) = \begin{cases} C\,(M-A)\,(M-B) & M \geq A \\ C\,\frac{(A-B)\left(M^2-A^2\right)}{2\,A} & M < A \end{cases} \tag{1}$$

wobei $A = A(T)$, $B = B(T)$ und $C = C(T)$ mit $0 < A < B$ und $C > 0$ ist.[1]

Das Magnetfeld ist

$$H = \frac{\partial F}{\partial M} = \begin{cases} C\,(M-B) + C\,(M-A) \\ C\,\frac{(A-B)\,M}{A} \end{cases} \tag{2}$$

und damit[2]

$$M = \begin{cases} \frac{H+(B+A)\,C}{2\,C} & H \leq C\,(A-B) \\ \frac{(A-B)\,C\,M}{A} & H > C\,(A-B) \end{cases}, \tag{3}$$

womit man die Legendretransformation $F(T,M) \to H(T,H)$ durchführen kann. Dazu zuerst

$$F(T,H) = \begin{cases} C\,\left(\frac{H+(B+A)\,C}{2\,C} - A\right)\,\left(\frac{H+(B+A)\,C}{2\,C} - B\right) \\ -\frac{A\,H^2+\left(-A\,B^2+2\,A^2\,B-A^3\right)\,C^2}{(2\,B-2\,A)\,C} \end{cases}. \tag{4}$$

Man erhält

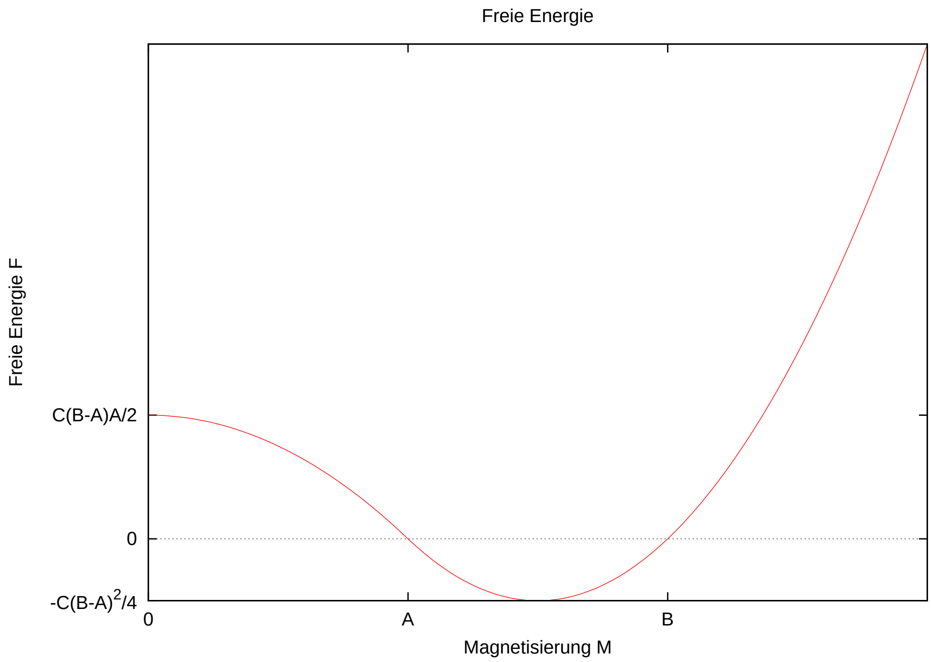
$$G(T,H) = \begin{cases} -\frac{H^2+(2\,B+2\,A)\,C\,H+\left(B^2-2\,A\,B+A^2\right)\,C^2}{4\,C} \\ \frac{A\,H^2+\left(A\,B^2-2\,A^2\,B+A^3\right)\,C^2}{(2\,B-2\,A)\,C} \end{cases}; \tag{5}$$

vgl Abb. 1(b).

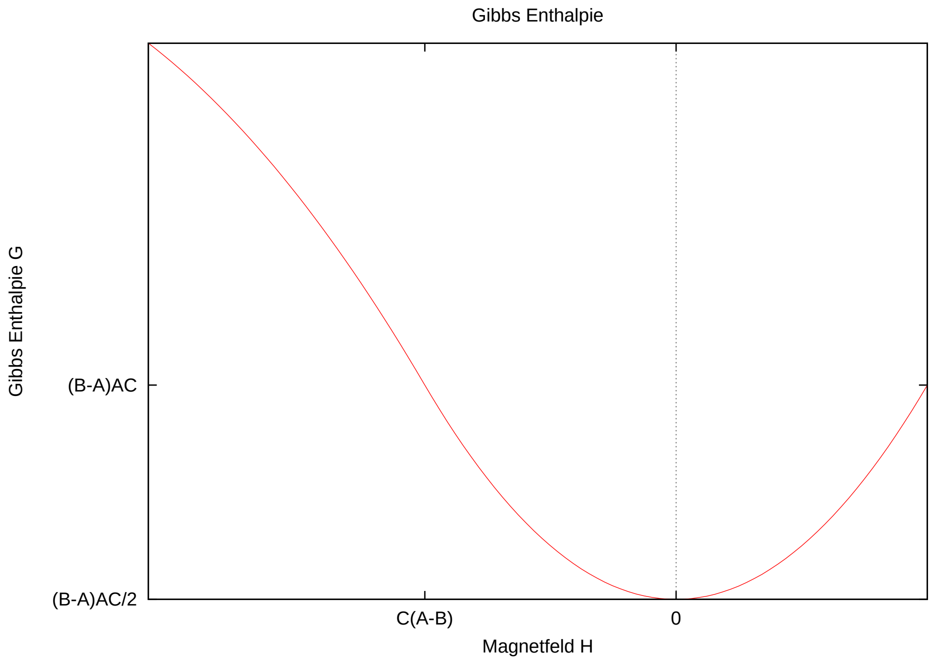
Zur Kontrolle kann man nun G an dem „Übergangspunkt“ $H = C\,(A-B)$ berechnen und erhält übereinstimmend $(B-A)\,A\,C$

[1] Ich betrachte nur den Fall $M > 0$; das System ist jedoch Symmetrisch – $F(T,M) = F(T,-M)$ – der Minusfall ist analog.

[2] Ab hier ist die Fallunterscheidung bezogen auf H wie in Gl. (3).



(a) Freie Energie



(b) Gibbs'sche Enthalpie

Abbildung 1: Ferromagnet I: (1) und (5)

Ferromagnet II

Gegeben ist die Zustandsgleichung

$$F(T, M) = \begin{cases} C\ (M - A)\ (M - B) & M \geq \frac{A+B}{2} \\ -C\,\frac{(A-B)^2}{4} & M < \frac{A+B}{2} \end{cases}\ . \tag{6}$$

Offenbar ist diese Fuktion stetig (vgl Abb. 2(b)) diff'bar, aber leider nicht für die Legendre-Transformation geeignet: Bei der Legendre-Transformation muss man $H = H(M) = \partial F/\partial M$ invertieren nach $M = M(H)$, was nur möglich ist, wenn H *monoton* ist. Dies ist hier offenbar nicht gegeben, weil für $M < \frac{A+B}{2}$ konstant $H = 0$ gilt.

Hier müssen wir also die verallgeminerte Legendre-Transformation

$$G(T, H) = \min_{M} \left(F(T, M) - H \cdot M\right)\ . \tag{7}$$

verwenden.[3] Für das Minimum muss notwendigerweise

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(F(T, M) - H \cdot M\right) = 0 \tag{8}$$

sein. Das macht natürlich nur für den Fall $M \geq \frac{A+B}{2}$ Sinn; dann folgt

$$M = M(H) = \frac{H + (B + A)\ C}{2\,C} = \frac{H}{2\,C} + \frac{A + B}{2} \quad \text{für } H \geq 0 \tag{9}$$

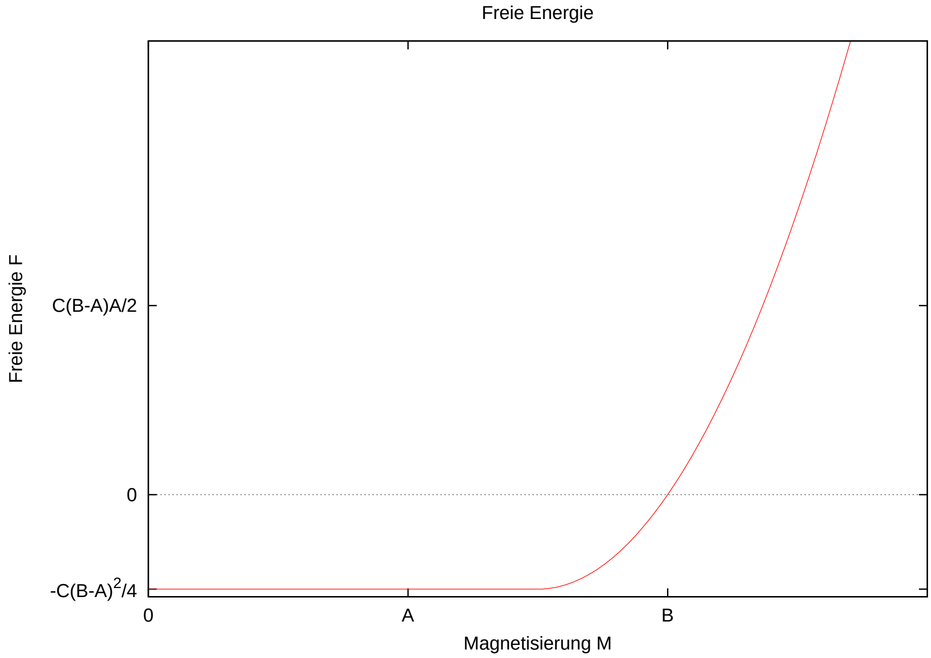
und entsprechend bekommt man für $H < 0$ dass $M = 0$ sein soll – damit wächst die zu minimierende Funktion in (8) am wenigsten an.

Setzt man so diese $M = M(H)$ ein, erhält man

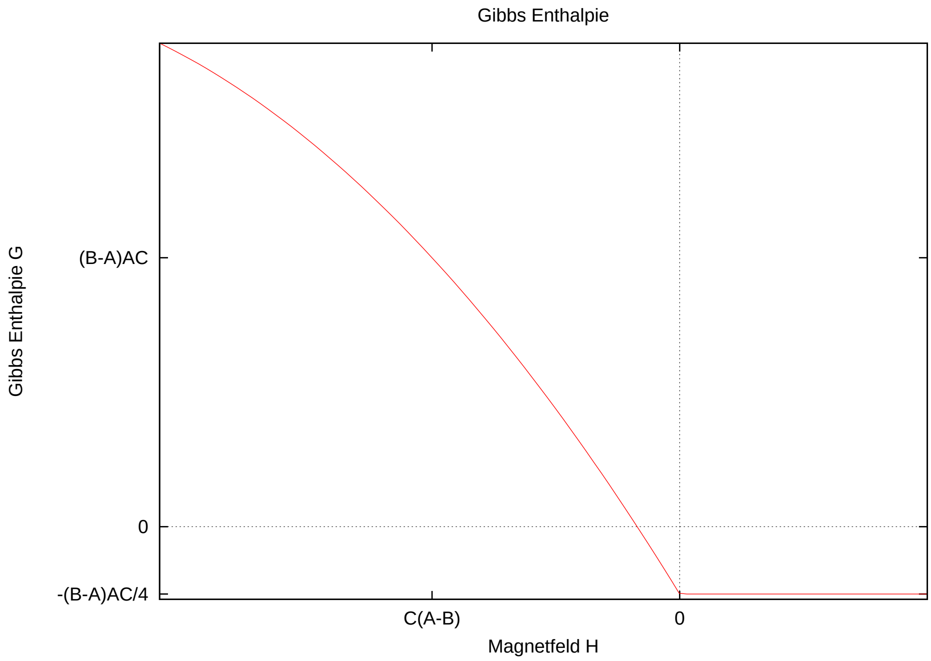
$$G(T, H) = \begin{cases} -\frac{H^2 + (2\,B + 2\,A)\,C\,H}{4\,C} - \frac{(A-B)^2\,C}{4} & H \geq 0 \\ -\frac{(A-B)^2\,C}{4} & H < 0 \end{cases}\ ; \tag{10}$$

vgl dazu Abb. 2(b).

[3] M ist hier rechts eine Variable, keine Funktion. Erst durch die Minimierung wird aus dem M ein $M = M(H)$.



(a) Freie Energie



(b) Gibbs'sche Enthalpie

Abbildung 2: Ferromagnet II: (6) und (10)