Analysis IV
Uebung 03

Michael Kopp

May 4, 2010

1

(a) Für die beiden komplexen Wurzeln $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ werden verschiedene Zweige der Wurzel ~~gew~~ gewählt; dadurch ist die Umformung nicht mehr eindeutig:

$$4e^{i\pi} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}+i\pi k}\, e^{i\frac{\pi}{2}+i\pi k'} = \left(2e^{i\pi+2i\pi k}\right)^{1/2}\left(8e^{i\pi+i2\pi k'}\right)^{1/2}$$

$$= (16)^{1/2}\, e^{i\pi+i2\pi(k+k')/2} = 4\cdot e^{i\pi}\cdot e^{i\pi(k+k')}$$

Bei der Wahl der Wurzelzweige wurde $k \neq k'$ gewählt; dadurch ergibt sich auf der rechten Seite $-4\cdot(-1)^{k+k'}$.

(b) $$\int e^{i\varphi/n}\, d(e^{i\varphi}) = \int e^{i\varphi/n}\, e^{i\varphi}\cdot i\, d\varphi =$$

$$\int e^{i(1+1/n)\varphi}\, i\, d\varphi = \frac{i}{i(1+1/n)}\, e^{i(1+1/n)\varphi}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{1+1/n}\left(e^{i2\pi/n}-1\right)$$

Insbesondere ist für n Durchläufe $e^{i2\pi/n\cdot n} = e^{i2\pi} = 1$, damit verschwindet das Integral.

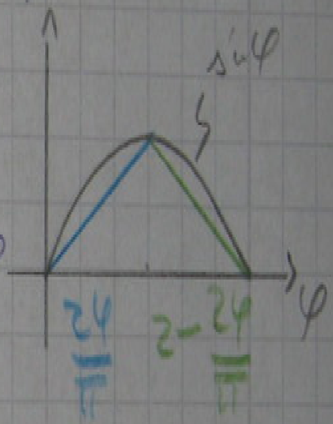
Das ist gut so, weil ~~für~~ man nach n Durchläufen wieder auf den Riemannblättern am „Ausgangspunkt" angekommen ist; auf diesen ist $z^{1/n}$ stetig bzw. besitzt eine Stammfunktion.

2 (b) $\left| \int \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \le \int \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| dz = \int \frac{|e^{iz}|}{|z|} dz \ominus$ Weg.

dem gegebenen Weg: $|z| = R$, $z = Re^{i\varphi} \Rightarrow R i e^{i\varphi} d\varphi$

$\ominus \int \frac{|e^{iRe^{i\varphi}}|}{\cancel{R}} \cancel{R}\, d\varphi$ weiter: $e^{iRe^{i\varphi}} = e^{iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$

$e^{-R\sin\varphi} \cdot e^{iR\cos\varphi} \Rightarrow |e^{iRe^{i\varphi}}| = e^{-R\sin\varphi}$.



Den $\sin\varphi$ kann man nach unten abschätzen,

vgl. dazu die Zeichnung rechts. Da $R>0$

ist damit $|e^{-R\sin\varphi}| \le e^{-R\,\theta(\varphi)}$

wobei $\theta(\varphi) = \begin{cases} 2\varphi/\pi & \varphi \in (0, \pi/2] \\ 2 - 2\varphi/\pi & \varphi \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$.

$$\int |e^{iRe^{i\varphi}}| d\varphi \le \int_0^{\pi/2} e^{-R\frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\,2(1-\frac{\varphi}{\pi})} d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{-R2} e^{-R\frac{2\varphi}{\pi}} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{-R2} e^{-R\,2(1-\varphi/\pi)} \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{-R2} (e^{-R} - 1) + \frac{\pi}{+R2} (1 - e^{-R})$$

$$= (1 - e^{-R}) \cdot \frac{\pi}{R} \quad ⓢ \qquad (+)$$

Da $R>0$ ist $e^{-R} < 1$

ⓢ $1 \cdot \pi/R = O(1/R)$

$$= (1-e^{-R}) \cdot \frac{\pi}{R} \quad ⑤ \qquad (+)$$

Da $R>0$ ~~ist~~ ist $e^{-R} < 1$ ~~[illegible]~~

$$⑤ \quad 1 \cdot \pi/R = O(1/R)$$

(a) (a) folgt aus $(+)$ da: $f(R) = (1-e^{-R})\frac{1}{R}$

erfüllt $0 \leq f(R) \leq 1$:

- $f(0)$ mit L'Hôpital: $\frac{1-e^{-R}}{R} \longrightarrow \left.\frac{e^{-R}}{1}\right|_{R=0} = 1$

- $f'(0) = \frac{\partial f}{\partial R} < 0$ für $R>0$: $\frac{\partial f}{\partial R} = e^{-R}\frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}(1-e^{-R})$;

$$?: \quad e^{-R}\frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}(1-e^{-R}) < 0 \quad | \cdot R^2$$

$$Re^{-R} - (1-e^{-R}) < 0 \Rightarrow ~~[illegible]~~$$

$$-e^{-R}(e^{R} - R - 1) < 0 \quad (\Leftarrow) \quad \text{da } e^{\cdot} \neq 0$$

$$e^{R} - R - 1 > 0$$

Dies ist wahr da ~~[illegible]~~ $e^{R} = \sum_k \frac{1}{k!} R^k = 1 + R + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{6}R^3 + \ldots$

also $e^{R} - R - 1 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{6}R^3 + \ldots$

$\Rightarrow f(R) \to +0$ für $R \to \infty$ $\qquad \square$

[3]

(a) $\int_0^1 dx\, \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{y=0} + \int_0^1 i\,dy\,(x^2+y^2)\Big|_{x=1} = \frac{1}{3} + \left(1+\frac{1}{3}\right)i$

$= 1/3 + i\,4/3 \qquad \left(\int_{\gamma_1} dz\right)$

$\int_0^1 dx\; x^2+y^2\Big|_{y=1} + \int_0^1 i\,dy\; x^2+y^2\Big|_{x=0} = 1/3\, i + 4/3 \quad \left(\int_{\gamma_2}\right.$

(b) Bogen: $\int_{\varphi\in[0,\pi]} r\cdot r e^{-i\varphi}\, d(e^{i\varphi}) = \int r^2 e^{-i\varphi} e^{i\varphi}\, i\, d\varphi$

$= \int 1\cdot i\, d\varphi = i\pi.$

Strecke: $z = \operatorname{Re} z$; $\int_{x\in[-1,1]} |x|\, x\, dx = \cancel{\frac{1}{3}x^3 \Big|\frac{1}{-1} = \frac{2}{3}}\; 0$

verschw. ex Symmetriegründen!

$\int_C |z|\bar z\, dz = i\pi$

$\boxed{4}$

- $\frac{1}{z^2+1} = \cancel{\frac{1}{z+i}} \cancel{+} \cancel{\frac{1}{z-1}}\ \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i}$

- $\frac{1}{z^2+1} = \frac{a}{z+i} + \frac{b}{z-i} \qquad | \cdot\ z^2+1$

$$1 = a(z-i) + b(z+i)$$

$$z = i \Rightarrow \quad 1 = 2ib \Rightarrow \quad b = -i/2$$

$$z = -i \Rightarrow \quad 1 = -2ia \Rightarrow \quad a = i/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2+1} = \cancel{\frac{i/2}{z+i}} \cancel{-} \cancel{\frac{i/2}{z-i}}\ \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}$$

Wenn i bzw. $-i$ umkreist werden, sammelt der jew. Bruch ($-\frac{i/2}{z-i}$ bzw. $\frac{i/2}{z+i}$) ein $\pm 2\pi i \cdot (\pm i/2)$ auf:

(1) $\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = 0$: Keiner der Partialbr. sammelt auf.

(2) $\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \cancel{\frac{i/2}{z-i}} -i/2 \cdot 2\pi i = \pi$ $\rightsquigarrow$ nur der mit

$\propto 1/z-i$ sammelt auf

(3) $\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = i/2 \cdot 2\pi i = -\pi$ $\rightsquigarrow$ analog

(4) $\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = -i/2 \cdot 2\pi i + i/2 \cdot 2\pi i = 0$ $\rightsquigarrow$ beide