LAAG
30.10.08

Fischer Kap 0
Skript Kap 1

Die euklidische Ebene

Hier erklären wir für je zwei Punkte A, B den Abstand $d(A,B)$, gleichzeitig die Länge des Vektors $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$

Wenn $A = (a_1, b_1)$, $B = (a_2, b_2)$, dann: $d(A,B) = \sqrt{(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2} = |\overrightarrow{AB}|$

$\|\overrightarrow{AB}\| \equiv |\overrightarrow{AB}|$ heißt „Norm“ $\left(x = (x,y),\ \|x\| = \sqrt{x^2+y^2}\right)$

Rechenregeln für Abstand / Norm:

$d(A,B) \geq 0$	$\|x\| \geq 0$
$d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$	$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungl.
	$\|\alpha \cdot x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
metrischer Raum	normierter Vektorraum

Ein Raum heißt .., wenn die oben geschriften Eigenschaften gelten.

Punkte und Geraden

Def.: Eine Gerade in der reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ ist in Punktrichtungsform gegeben durch die Menge

$$g := \{P + \lambda \vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$ für alle Punkte P und einen Vektor $\vec{a}$

wenn $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$: $P + \lambda \vec{a} = P + \lambda \overrightarrow{PQ}$

mit $O :=$ Ursprung $(0,0)$

$$P + \lambda \vec{a} = O + \overrightarrow{OP} + \lambda (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ})$$

$= O + (1-\lambda)\overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{OQ}$ also als Zweipunktform:

$$g := \{O + \lambda \overrightarrow{OQ} + \overset{(1-\lambda)}{\mu} \overrightarrow{OP} \mid \mu \in \mathbb{R}\} \quad (\mu = 1-\lambda)$$

$g = \{$

Bsp.: 1) Gerade durch $Q = (-1,2)$, $P = (2,0)$

$$g = \{ \lambda(-1,2) + (1-\lambda)(2,0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (-\lambda + 2(1-\lambda);\ 2\lambda + 0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (-3\lambda + 2;\ 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$ → ← Parametrisierung

2) Beschreibe eine Gerade durch eine Gleichung:

$\vec{n} \cdot \vec{x} = d$

$$g = \{ (x,y) \mid ax + by = d \} \quad a,b,d \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

Werte aus obigem Bsp.: $g = \{ (x,y) \mid 2x + 3y = 4 \}$

Satz: Zu jeder Geraden existieren Zahlen $a,b,d \in \mathbb{R}$ mit

$$g = \{ (x,y) \mid ax + by = d \}$$

mit $a^2 + b^2 = 1^2$ und $d \geq 0$

Im Falle $d > 0$ ist die ~~eindeutig~~ Darstellung eindeutig → „Hesse'sche Normalform". (Für $d = 0$ gibt es zwei Möglichkeiten).

Der Abstand der Geraden vom Ursprung $0 = (0,0)$ ist dann genau gleich d

5.11.08 Bsp.: Gerade durch $P = (2,0)$, $Q = (-1,2)$:

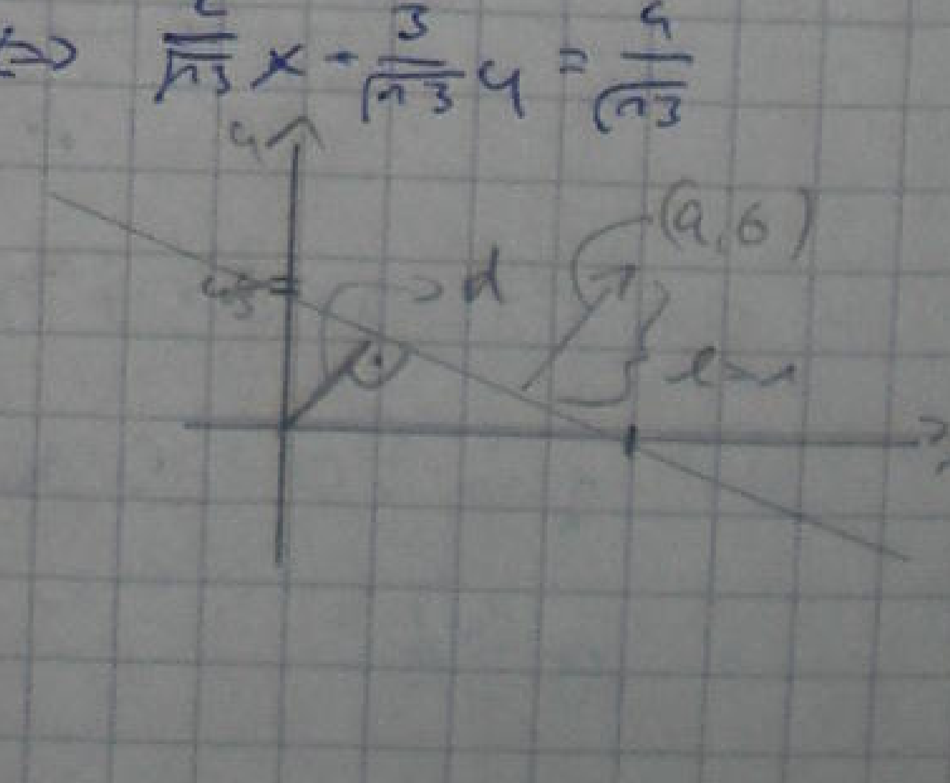
$g = \{ (x,y) \mid ax + by = d \}$ $\quad g = \{ (x,y) \mid 2x + 3y = 4 \}$

$2x + 3y = 4$: lineare Gleichung; $y = \underbrace{-\frac{2}{3}}_{\text{linearer Faktor}} x + \frac{4}{3}$: explizit

Hesse'sche Normalform: $g = \{ (x,y) \mid 2x + 3y = 4 \}$ wobei $a^2 + b^2 = 1$ und $d \geq 0$ $\quad 2x + 3y = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{13}} x + \frac{3}{\sqrt{13}} y = \frac{4}{\sqrt{13}}$

$ax + by = d \Leftrightarrow (a,b)(x,y) = d$

$\|(a,b)\| = 1$



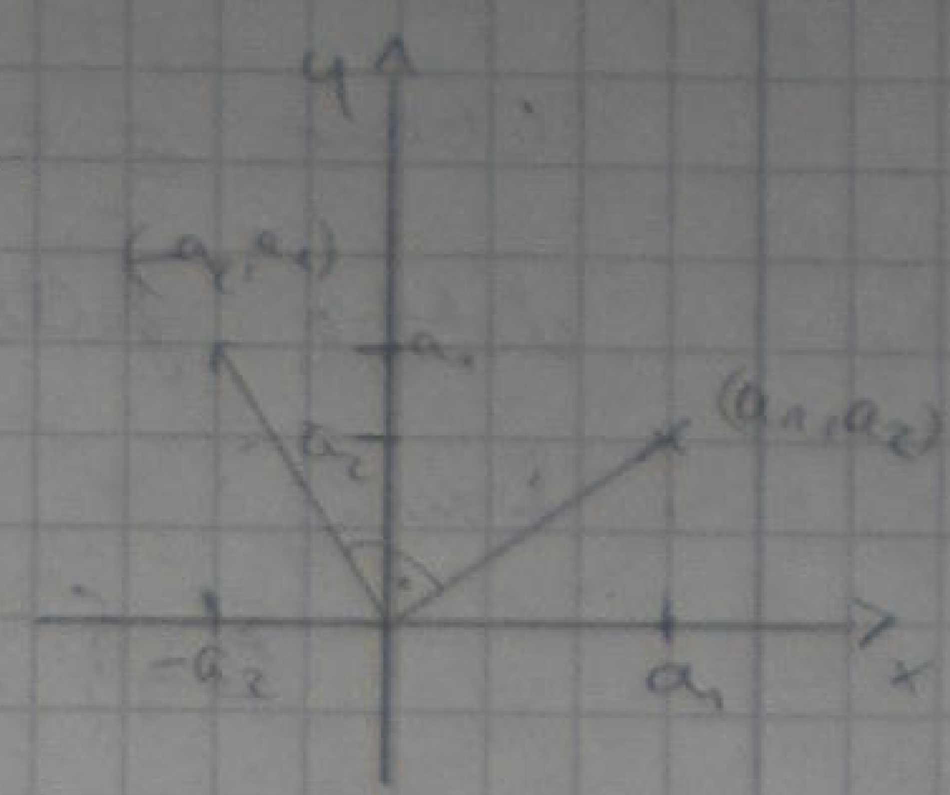
CAAG

5.11.08

Skalarprodukt (Def)

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2)$ erklärt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0})$



Rechenregeln

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (kommutativ)

$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (distributiv)

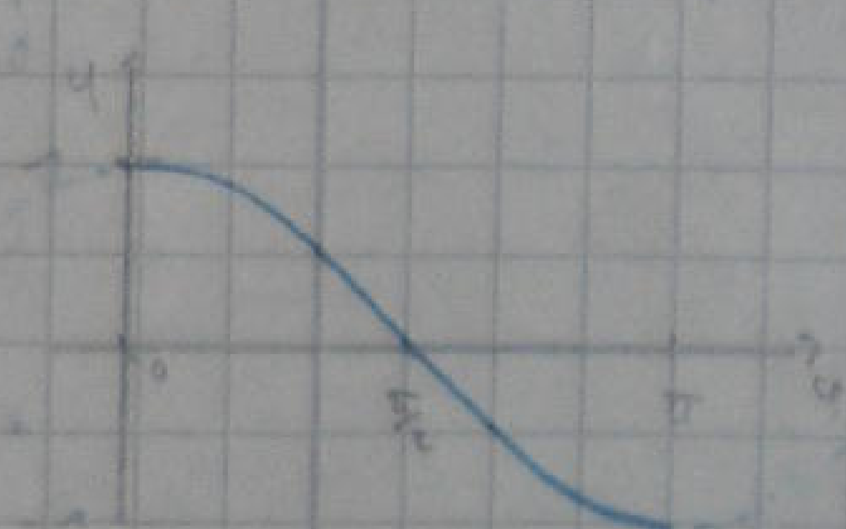
$\vec{a}(\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (assoziativ)

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 > 0$ für jedes $\vec{a} \neq \vec{0}$

Winkel (Def)

Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist erklärt durch:

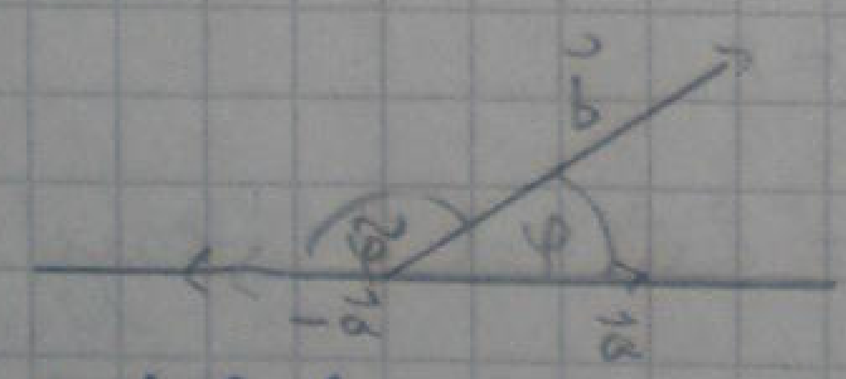
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi$$ (in diesem Bereich bijektiv)

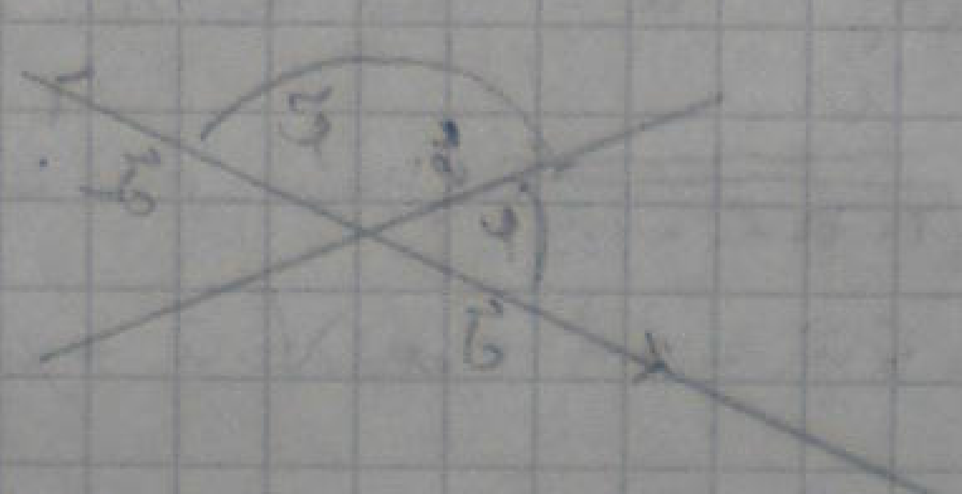


$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \qquad \varphi := \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\cos(\underbrace{\measuredangle(-\vec{a}, \vec{b})}_{\psi}) = -\cos(\underbrace{\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})}_{\varphi}) = \cos(\pi - \varphi)$

$\psi + \varphi = \pi$





Winkel zw. zwei Geraden

Zw. 2 Geraden liegen 2 Winkel: Nicht eindeutig. Deshalb:

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow$ eindeutig

Im $\mathbb{R}^3$

- Gerade: $g = \{ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ (Punktrichtungsform)
- Ebene: $E = \{ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$ falls nicht $\vec{b} = \alpha\vec{c}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Sonst: Gerade!

5.11.08

Lemma:

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_1 = d$

$E = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d \}$ mit Zahlen

$a_1, a_2, a_3, d \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ beschreibt eine

Ebene $E \in \mathbb{R}^3$. Diese Darstellung ist eindeutig falls $d > 0$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$

Dann:

$$E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{u}_0 = d \}$$ mit einem $\vec{u}$, $\|\vec{u}\| = 1$

$\vec{u}$: Einheitsnormalvektor

Beweis:

Falls $E = \{ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$ suche Vektor

$\vec{u}$ mit $\vec{b}\vec{u} = 0$, $\vec{c}\vec{u} = 0$, $\|\vec{u}\| = 1$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\left.\begin{array}{l} b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 = 0 \\ c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0 \end{array}\right\}$ 2 Gleichungen, 3 Unbekannte,
Eine $b_i, a_i \neq 0$ $\Rightarrow$ sei $\cancel{b_3 \ldots}$ $u_3 = 1$

$\left.\begin{array}{l} b_1u_1 + b_2u_2 = -b_3 \\ c_1u_1 + c_2u_2 = -c_3 \end{array}\right\}$ ist eindeutig lösbar, weil
nicht $\vec{c} = \lambda\vec{b}$, $\vec{b} = \mu\vec{c}$ (Sonst wäre E eine Gerade)

eindeutig: $\vec{u} = (u_1, u_2, 1)$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}} (u_1, u_2, 1)$ an $\|\vec{u}\| = 1$

Also $\vec{x}\vec{u} = \vec{a}\vec{u} + \cancel{\mu}\lambda\underbrace{\vec{b}\vec{u}}_{0} + \mu\underbrace{\vec{c}\vec{u}}_{0} = \vec{a}\vec{u} = d$ (Hesse'sche Normalenform)

für $d < 0$: $\vec{u} \mapsto -\vec{u} \Rightarrow d \geq 0$

Umgekehrt: sei $\vec{x}_0 \in E$ $\quad$ beliebiger Punkt $\vec{x}\vec{u} = \vec{x}_0\vec{u} = d$

$\Rightarrow (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{u}$

also lässt sich $\vec{x} - \vec{x}_0$ schreiben als $\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ mit $\vec{b} \perp \vec{u}$, $\vec{c} \perp \vec{u}$

nicht! $\vec{b} = \alpha\vec{c}$, $\vec{c} = \tilde{\alpha}\vec{b}$ (gilt für $\alpha, \tilde{\alpha}$ $\to$ $b, c \perp \vec{u}$)

$\Rightarrow \vec{x} = x_0 + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Punktrichtungsform)

LAAG

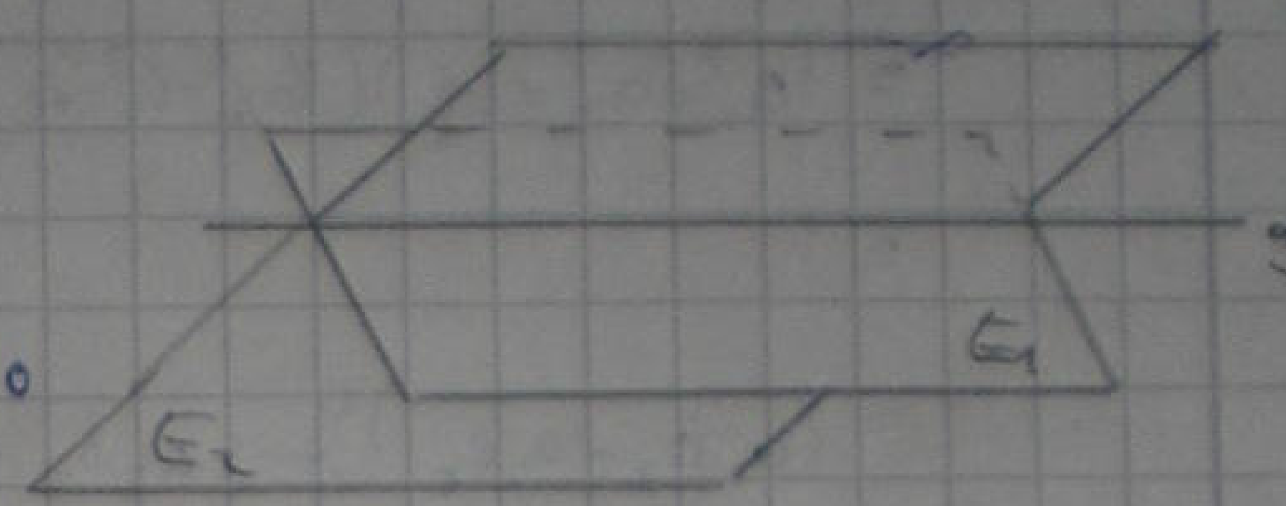
5.11.08

Gerade in $\mathbb{R}^3$

Dargestellt als Schnitt zweier Ebenen.

$$g\left\{(x_1,x_2,x_3) \,\middle|\, \begin{matrix} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=d \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=e \end{matrix}\right\}$$

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2 \neq 0, \quad b_1^2+b_2^2+b_3^2 \neq 0$$



Zwei Ebenen schneiden sich nur dann nicht, wenn sie parallel sind.

Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Für $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$

sei $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ $\qquad \times: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\vec{c}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}, \quad \vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

Rechenregeln:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ speziell $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

2) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

3) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$, $\alpha\in\mathbb{R}$

4) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}$ $\quad\lambda\in\mathbb{R}$

Beweis 4) $\quad \vec{a}=\lambda\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\lambda\vec{b}\times\vec{b}=0$

$\vec{b}=\lambda\vec{a} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{a}=0$

$$\vec{a}\times\vec{b}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a_2b_3=a_3b_2 \\ a_3b_1=a_1b_3 \\ a_1b_2=a_2b_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \vec{b}=\frac{b_2}{a_2}\vec{a} & \text{falls } a_2\neq 0 \\ \vec{a}=\frac{a_2}{b_2}\vec{b} & b_2\neq 0 \end{matrix}$$

5) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\underbrace{\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})}_{\geq 0}$

5.11.08

Beweis 5):

$$\|\vec{a}\|^2 \|b\|^2 \underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\cos^2\varphi} = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - \underbrace{\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot \cos^2\varphi}_{(\vec{a}\ \vec{b})^2}$$

$$= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$= \ldots$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2 = c_1^2+c_2^2+c_3^2$$

$$= \|a \times b\|^2$$

LAAG

6.11.08

Skript Kap 3,4
Fischer 1.4

Vektorräume

Vektorraum (Def)

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine Menge V zusammen mit einer inneren zweistelligen Verknüpfung „+": $V \times V \to V$ und einer äußeren zweistelligen Verknüpfung (skalare Multiplikation) „·" $\mathbb{R} \times V \to V$ derart, dass

„+": $(a,b) \mapsto a+b$

„·": $(\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a$

$(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe mit einem Nullelement $\vec{0} \in V$ (Nullvektor).

Für alle $w, v \in V$ ~~...~~, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

- $1 \cdot v = v$
- $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
- $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
- $\lambda(v+w) = \lambda v + \cancel{\mu}\lambda w$

Man schreibt $-v$ für das additive inverse Element: $v + (-v) = \vec{0}$

bzw. $\vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

Analog: $\mathbb{K}$-Vektorraum falls $\mathbb{K}$ ein Körper

(ZB.: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = \{0,1\}$)

Elemente von V heißen Vektoren, Elemente von $\mathbb{R}$ heißen Skalare.

Bsp.:

1) $\mathbb{R}^n = \{(x_1; \ldots; x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$

„+": $(x_1; \ldots; x_n), (y_1; \ldots; y_n) \mapsto (x_1+y_1; \ldots; x_n+y_n)$

„·“ $\lambda(x_1;\dots;x_n) \longmapsto (\lambda x_1;\dots;\lambda x_n)$

Nullelement $\vec{0} = (0;\dots;0)$

ZB: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$; $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ (trivialer Vektorraum)

2) analog K^n für beliebige Körper K

<u>Rechenregeln:</u>

- $x+y = (x_1;\dots;x_n)+(y_1;\dots;y_n) = (x_1+y_1;\dots;x_n+y_n) =$
  $(y_1+x_1;\dots;y_n+x_n) = (y_1;\dots;y_n)+(x_1;\dots;x_n) = y+x$
  (Kommutativität)
- $(x+y)+z = ((x_1+y_1)+z_1;\dots;(x_n+y_n)+z_n) =$
  $(x_1+(y_1+z_1);\dots;x_n+(y_n+z_n)) = x+(y+z)$
  (Assoziativität)
- $\lambda(\mu x) = \lambda(\mu x_1;\dots;\mu x_n) = (\lambda(\mu x_1);\dots;\lambda(\mu x_n)) =$
  $(\mu(\lambda x_1);\dots;\mu(\lambda x_n)) = \mu(\lambda x)$
  (Assoziativität)

3) <u>Raum</u> aller Polynome in einer Veränderlichen mit reellen Koeffizienten:

$$\{\underbrace{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0}_{\text{formaler Ausdruck mit einer Variablen }(x)} \mid a_0;\dots;a_n \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

Skalare Multiplikation: „·“: $\lambda(a_nx^n+\dots+a_1x^1+a_0) := (\lambda a_n)x^n + \dots + (\lambda a_1)x^1 + (\lambda a_0)$

Addition: „+“: $(a_nx^n+\dots+a_1x^1+a_0)+(b_mx^m+\dots+b_1x^1+b_0) =$ für $n \geq m$:

$(a_nx^n+\dots+a_0)+(0x^n+0x^{n-1}+\dots+0x^{m+1}+b_mx^m+\dots+b_0) =$

$\hat{=} b_n \quad \hat{=} b_{n-1}$

$(a_n+b_n)x^n+\dots+(a_0+b_0)$ (Koeffizientenweise Addition)

Konvention: $0x^n+\dots+0x^{m+1}+b_mx^m+\dots+b_0$

4) Die Menge aller Abbildungen einer Menge M in den $\mathbb{R}^n$:

$V = \{ f: M \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ ist Abbildung} \}$

mit „+": $(f+g)(m) := f(m) + g(m)$

„·": $(\lambda f)(m) := \lambda f(m)$

für $M = \mathbb{N}$: Menge aller Folgen $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $x_k \in \mathbb{R}$

für $n=1$: „ reellen Folgen

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} + \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_k + y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
$\lambda\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\lambda x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ } auch für konvergente Zahlenfolgen

5) Raum aller Kräfte, die an einem festen Punkt angreifen:

6)

$V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Abbildung} \}$

„+": $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

„·": $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$

auch für differenzierbare, integrierbare Funktionen.

Lemma: In einem K-Vektorraum V gilt stets

$0x = \vec{0}$, $x \in V$ beliebig

$\vec{0}\lambda = \vec{0}$

$a + x = b$ ist für jedes $a, b \in V$ eindeutig lösbar

durch $x = b - a = b + (-a)$

Beweis: 1) $0x = (1-1)x = 1x - 1x = 1x + (-x) = \vec{0}$

2) $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} \quad | -\lambda\vec{0} \Rightarrow \vec{0} = \lambda\vec{0}$

Teilmengen von Vektoren: $A \subseteq V$

$a, b \in A \Rightarrow a + b \in A$, $\lambda\vec{a} \in A$

Skalare Vielfache (Def?)

Für $v \in V$ heißt $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Menge der skalaren Vielfachen von v. Anschaulich: Gerade.

$\Rightarrow$ Erweitert man $A \subseteq V$ um $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, so gilt:

$\lambda a \Rightarrow a \in A$ für ~~$\lambda \in V$~~ $a \in A$

Linear abhängig: (Def)

Zwei Vektoren $a, b \in V$ heißen linear abhängig, wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (bzw $\in K$) gibt (nicht beide $= 0$), so dass $\lambda a + \mu b = \vec{0}$. Andernfalls heißen a, b linear unabhängig

$\lambda a + \mu b = \vec{0}$

$\lambda a = -\mu b$

$a = -\frac{\mu}{\lambda} b$

Linearkombination (Def)

Für $A \subseteq V$, $A \neq \emptyset$ heißt ein Ausdruck $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda_i \in K$) und $a_i \in A$ eine Linearkombination ($n \in \mathbb{N}$ endlich) (A kann unendl. sein) (die Summe darf nicht unendl. sein)

Die Menge aller Linearkombinationen von A heißt Spann von A. Geschrieben $\operatorname{span}(A)$ oder $\langle A \rangle$

Lin

Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt linear abhängig, wenn es eine nichttriviale Linearkombination von A gibt, (d.h. wenn nicht alle $\lambda_i = 0$) die gleich dem Nullvektor ist.

Andernfalls heißt A linear unabhängig

lin. unabh.: $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

lin. abh.: $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq \vec{0}$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\lambda} \left[-(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1}) \right]$

$\Rightarrow a_n \in \langle \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \rangle$