Laag Michael Kopp

Paul Menczel

(37) Gegeben: ▲ $F: V \to V$, $F \circ F = F$

(a) ▲ $V = U \oplus W$

▲ $F(w) = \vec{0}$

▲ $F(u) = u \quad \forall u \in U$

ZZ: U, W sind eindeutig

<u>W eindeutig:</u>

(GA) $\exists W \wedge \exists W'$

$F(W) = \vec{0} = F(W')$

Gilt $\{v \in V \mid F(v) = \vec{0}\} \overset{?}{=} \{v \in V \mid F(v) = \vec{0}\}$ ✓

$W = W'$

$\Rightarrow W$ eindeutig

<u>U eindeutig</u>

$F(v) = F(u+w) = F(u) + \underbrace{F(w)}_{\vec{0}} = F(u)$

$F(v) = F(U \oplus W) = F(U) + \underbrace{F(W)}_{\vec{0}} = U$

$\Rightarrow U$ eindeutig!

□

(2)

Bsp.: $F: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} |v_1| \\ |v_2| \\ |v_3| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$

Alternativ:

1-Dimension: $F: x \longmapsto |x|$

n-Dim.:

$F: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

(4) $f: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in V$$

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f^n: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f^{n+1}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laag 9

Michael Kopp

Paul Menzel

(39) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ gilt bereits

Zu zeigen: $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

$\lambda \in \mathbb{N}$: $f(\lambda v) = f(\underbrace{v + v + v + \dots + v}_{\lambda}) =$

$\underbrace{f(v) + f(v) + \dots + f(v)}_{\lambda} = \lambda f(v)$

$\lambda \in \mathbb{Z}$: · Neutrales Element: $f((\lambda + 0)v) = f(\lambda v) + f(0)$

$f(0)$ ist add. Neutr.

· Inv. Elem.: $f(\lambda v) + f(\mu v) = f(0)$

$(\lambda + \mu)$ ~~f(v)~~ $f(v) = f(0) \Rightarrow \lambda = (-\mu)$

$f(\lambda v) + f((-\lambda) v) = f(v)(\lambda + (-\lambda)) = 0 \cdot f(v)$

$(V, +)$ ist abel'sche Gruppe

$\Rightarrow$ auch neg. λ dürfen von f gezogen werden. (inv. Elem. ist eind.)

$\lambda \in \mathbb{Q}$:

$\lambda = \frac{p}{q}$: $f(\frac{p}{q} v) = p f(\frac{1}{q} v) = 1 \cdot p f(\frac{1}{q} v) =$

$\frac{q}{q} \cdot p \cdot f(\frac{1}{q} v) = \frac{1}{q} \cdot p f(q \cdot \frac{1}{q} v) = \frac{p}{q} \cdot f(v)$ □

Laag 9 Michael Kopp

Paul Menczel

(38)

(1) Gegenbeispiel:

$V := \mathbb{R}$, $f: x \mapsto 42x$

~~aber~~ f ist offens. linear. aber:

$f^{n_0} = 42^{n_0} x \neq 42^{m} x = f^{m}$

für alle $m > n_0$

(2) Sei $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(v) = \vec{0}$ (*)

(**) Da f lin. ist gilt: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f^n(\vec{0}) =$

$f^n\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(v)\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left(f^n \circ f^i(v)\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^{n+i}(v) =$

$\lambda_0 f^n(v) + \underbrace{\lambda_1 f^{n+1}(v)}_{\vec{0}} + \underbrace{\ldots}_{\vec{0}} + \underbrace{\lambda_n f^{n+n}}_{\vec{0}} = \vec{0}$ wegen (*)

$\lambda_i f^{n+i}(v) = \vec{0}$ da: $\lambda_i f^{n+i}(v) = \lambda_i \underbrace{f^{n+1}}_{\vec{0}} \circ \underbrace{f^{i-1}(v)}_{}$ =

$\lambda_i f^{i-1}(\vec{0}) = \vec{0}$ da f lin. $\boxtimes$

$\Rightarrow \lambda_0 = 0$

Iterativ setzt man nun bei (**) die versch.

f^{n-q} $q \in \mathbb{N}$, $q = 1, \ldots, n$ ein und erhält

$\lambda_q = 0$

$\Rightarrow$ Es existiert nur eine triviale Linearkombination für $f^i(v)$ $i = 0 \ldots n$

$\Rightarrow$ $f^i(v)$ lin. unabh. $\square$

(3) ~~Bsp~~ $\{\vec{0}\} = V \subseteq \mathbb{R}$ $f: \vec{x} \mapsto \vec{0}$

$\forall v \in V$: $n = 1$ (Trivialfall)

✓