LAAG

3.11.08

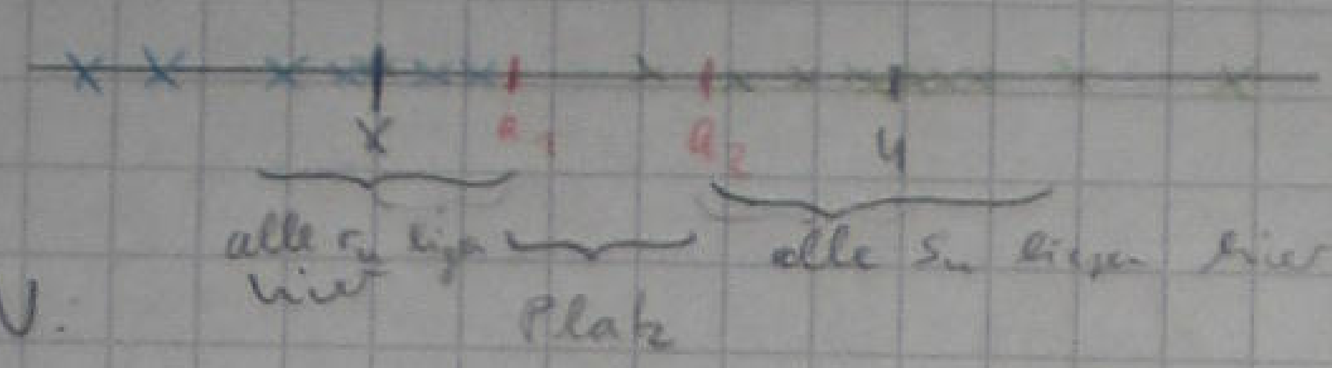
Ordnung bei $\mathbb{R}$

Def.: $<, >, \leq, \geq$

$x, y \in \mathbb{R}$, $\{r_n\} \in x$; $\{s_n\} \in y$

$$x < y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists_{\substack{a_1, a_2 \in \mathbb{Q} \\ a_1 < a_2}} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N} \quad r_n < a_1 < a_2 < s_n$$

ab $n \geq N$:



Es folgt:

$x > y \Leftrightarrow y < x$

$x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$

$x \geq y \Leftrightarrow x > y \vee x = y$

Satz:

$x, y \in \mathbb{R}$; genau einer der folgenden Fälle ist erfüllt:

- (α): $x = y$
- (β): $x < y$
- (γ): $y < x \Leftrightarrow x > y$

Beweis: $\{r_n\} \in x$; $\{s_n\} \in y$

(α): $x = y \Leftrightarrow \{r_n\} \sim \{s_n\} \Leftrightarrow |r_n - s_n| \to 0$

($\beta, \gamma \Rightarrow \neg\alpha$): $\neg(x = y) \Leftrightarrow x \neq y \Leftrightarrow r_n - s_n \not\to 0 \Leftrightarrow$

$\neg(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N(\varepsilon)} \forall_{n \geq N} |(r_n - s_n) - 0| < \varepsilon) \Leftrightarrow$

↳ N hängt von ε ab

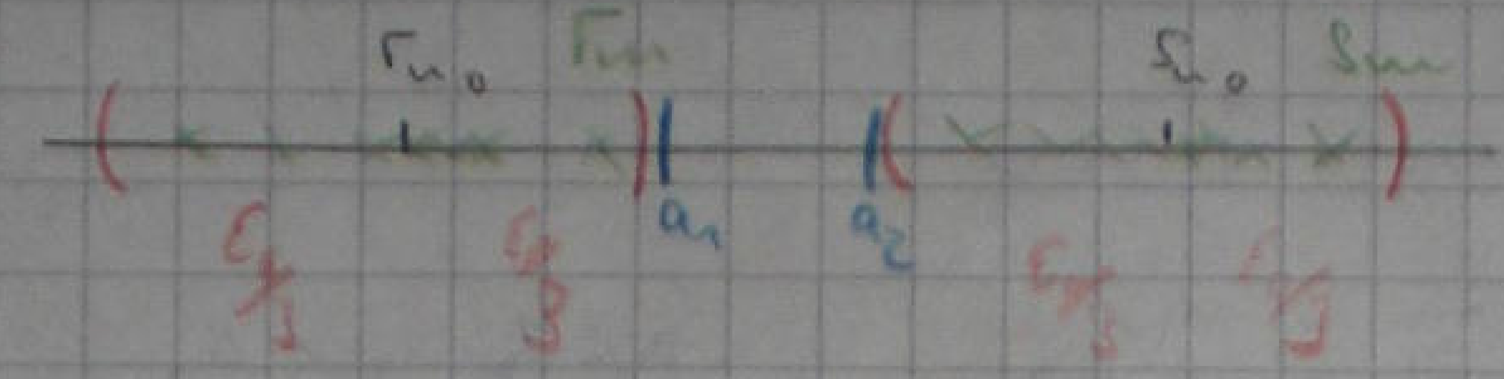
$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{N} \exists_{n \geq N} |r_n - s_n| \geq \varepsilon$

↳ es gibt für irgendein $N \in \mathbb{N}$

1. wähle dieses $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$
2. $\{r_n\}, \{s_n\} \in CF(\mathbb{Q}) \Rightarrow \exists_{N_r, N_s} \forall_{\substack{n, m \geq N_r \\ n, m \geq N_s}} \begin{matrix} |r_n - r_m| < \frac{\varepsilon_0}{3} \\ |s_n - s_m| < \frac{\varepsilon_0}{3} \end{matrix}$
3. wähle $n = n_0 \geq \max\{N_r, N_s\} \Rightarrow |r_{n_0} - s_{n_0}| \geq 0 \Rightarrow r_{n_0} \neq s_{n_0}$

ε kann beliebig klein werden

OBdA (Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit): Es gibt zwei Fälle, man kann einen wählen und der Beweis gilt ebenso für den anderen Fall.



$\Rightarrow x<y$ $\square$

5.11.08

Absolutbetrag

Beweisen mit $\{r_n\} \to x$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

- $|x| \geq 0$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

Ana
5.11.08

1.9 Das Axiomsystem der reellen Zahlen

I Algebraische Strukturen

- $\mathbb{R}$ ist ein Körper:

$"+": \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$	$"\cdot": \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x\cdot y$	
$x+y = y+x$	$x\cdot y = y\cdot x$	Kommutativ
$x+(y+z) = (x+y)+z$	$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$	Assoziativ
$\exists_{0\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ x+0 = x$	$\exists_{1\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ x\cdot 1 = x$	Neutrales Element
$\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{-x\in\mathbb{R}}\ x+(-x) = 0$	$\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \exists_{x^{-1}\in\mathbb{R}}\ x\cdot(x^{-1}) = 1$	Inverses Element

$$x(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$$ Distributiv

II Ordnungsstruktur

- $\mathbb{R}$ ist ein vollständig geordneter Körper

Auf $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation $\leq$ definiert:

(i) $x\leq y \wedge y\leq x \Rightarrow x=y$

(ii) $x\leq x$

(iii) $(x\leq y)\wedge(y\leq z) \Rightarrow (x\leq z)$

Zusätzlich für vollständige Ordnung:

(iv) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ (x\leq y)\vee(y\leq x)$ (alle x,y vergleichbar)

Verknüpfung I, II:

$$x\leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$$

$$(0\leq x)\wedge(0\leq y) \Rightarrow 0\leq x\cdot y$$

III Topologische Struktur (Intervallschachtelungsaxiom)

$$[a_n; b_n] = \{x\in\mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}: a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n] \neq \emptyset$$ (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \mathbb{R}$ hat keine Lücken

Gibt es nur bei $\mathbb{Q}$ in der Intervallschachtelung immer tiefere Ebenen [illegible] bis man auf ein „Loch" stößt $\to_x$ Bei $\mathbb{R}$ geht das nicht

IV Axiom von Eudoxus

- $\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet

$(y \geq 0) \wedge (x \geq 0) \Rightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} \; y \leq n \cdot x$

$\Rightarrow$ Es gibt keine größte $\mathbb{R}$

Ana

5.11.08

1.10 Die Mächtigkeit von Mengen

Zählen:

Beim Zählen von n Elementen sucht man eine Bijektion zwischen den Elementen und Elementen der Menge $\{1; 2; \dots; n\}$

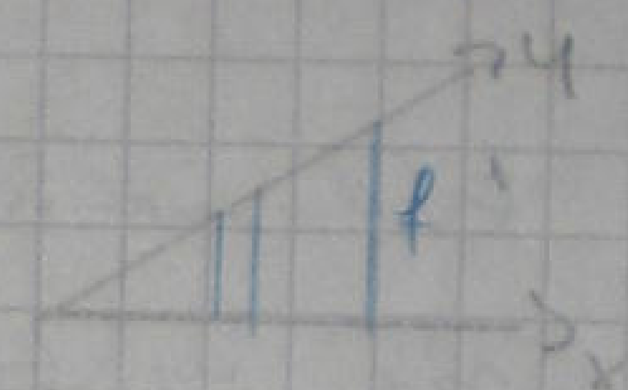
$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta$ → keine Bijektion → ≠ 3 Elemente!

$\{1; 2; 3\}$
$\updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow$
$A \quad B \quad C$

Gleichmächtige Mengen (Def)

Zwei Mengen heißen gleich ~~ge~~ mächtig, falls eine bijektive Abbildung $f: A \to B$ existiert.

$A \sim B$
↳ Äq.-rel.



X, Y gleichmächtig

Kardinalzahl / Mächtigkeit von A

$\kappa_A = \text{card}(A) = \{M \mid M \sim A\}$
↳ Äq.-Klasse → alle Mengen mit gleicher Mächtigkeit

(card(C) – Familie aller Mengen, die 4 Elemente enthalten)

$\text{card}(A) \leq \text{card}(B) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists_{B_1 \subseteq B} \; A \sim B_1$

Eigenschaften:

$\text{card}(A) \leq \text{card}(A)$ (Reflexiv)

$\underset{A \sim B'}{\text{card}(A) \leq \text{card}(B)} \wedge \underset{B \sim C'}{\text{card}(B) \leq \text{card}(C)} \Rightarrow \underset{A \sim C'}{\text{card}(A) \leq \text{card}(C)}$ (Transitiv)

Satz von Cantor und Bernstein:

$A \sim B \iff \exists_{A_1 \subseteq A} \exists_{B_1 \subseteq B} (A_1 \sim B) \wedge (B_1 \sim A)$

$\iff (\text{card}(A) \leq \text{card}(B)) \wedge (\text{card}(B) \leq \text{card}(A))$

$\iff \text{card}(A) = \text{card}(B)$ (Antisymmetrie)

⇒ Kardinalzahlen sind immer vergleichbar

(Un)Endlichkeit von Mengen

$M = \{1; 2; 3\}$ $\quad M_1 \subsetneq M: \{1; 3\}$ $\quad$ keine Bij. $M \leftrightarrow M_1$

$M = \mathbb{N}$ $\quad M_1 \subsetneq \mathbb{N}$ $\quad \{3; 4; 5; 6; \dots\}$: Bij. erhalt. $\quad$ $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$, $\vdots$

Def.:

card(A) ist <u>endlich</u> (finit) $\overset{\text{def}}{\iff} \nexists_{A_1 \subsetneq A} \; A_1 \sim A$

card(A) ist <u>unendlich</u> (transfinit) $\overset{\text{def}}{\iff} \exists_{A_1 \subsetneq A} \; A_1 \sim A$

$\mathbb{N}$ lässt sich als die Menge der endlichen Kardinalzahlen (ohne card($\emptyset$)) realisieren. D.h. die Axiome von Peano sind erfüllt.

[n] Alle Mengen mit n Elementen

Eine endliche Menge besitzt die Kardinalzahl n, wenn sie n Elemente enthält.

Es gibt unendliche Kardinalzahlen: $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (Aleph)

7.11.08

<u>Abzählbar unendlich</u> (Def)

Eine Menge A heißt „abzählbar unendlich" wenn $A \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathrm{card}(A) = \aleph_0$ (A ist gleich mächtig wie $\mathbb{N}$).

D.h. es gibt eine bijekt. Abb.: $f: \mathbb{N} \to A$. D.h. die Elemente aus A können als Liste geschrieben werden:

$a_1, a_2, a_3, \ldots \in A \; ; \; \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{a_k\} = A$

<u>Satz:</u>

Es gibt keine kleinere, transfinite Kardinalzahl als $\aleph_0$

Beweis: Sei A eine unendliche Menge, d.h. die Kardinalzahl von A (card(A)) ist transfinit.

Wähle $a_1 \in A \Rightarrow A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, sonst hätte A nur endlich viele Elemente und wäre nicht unendlich

Wähle $a_2 \in A \setminus \{a_1\} = A \setminus \{a_1, a_2\}$

$\vdots$

$\{a_1, a_2, \ldots\} = A_1 \quad A_1 \subseteq A, \; A_1 \sim \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \sim A_1 \subseteq A \Rightarrow \mathrm{card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}(A) \quad \square$

AnA

7.11.08

höchstens abzählbar (Def):

endlich oder abzählbar unendlich.

Regeln

- Die Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen ist endlich
- Die Vereinigung abzählbar unendlich vieler abzählbar unendlicher Mengen ist abzählbar unendlich.

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots\}$ $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$ ...

$$\bigcup = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{matrix} \right\}$$

ZB: $$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{matrix} \right\}$$

$\Rightarrow \operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$

Überabzählbar (unendlich) (Def)

A ist überabzählbar (unendlich) $\Leftrightarrow \operatorname{card}(A)$ transfinit, $A \nsim \mathbb{N}$

Bsp.: $[0;1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ ist überabzählbar

Beweis: Gegenannahme: $[0;1[$ sei abzählbar:

$x_1 = 0{,}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}$ $\quad \alpha_i, \beta_i$ Ziffern $\quad$ wähle $y = 0{,}\beta_1\beta_2\beta_3 \dots$

$x_2 = 0{,}\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}$

$x_3 = 0{,}\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}$

$\vdots$

$y_1 = \{0;1;\dots;8\} \setminus \{\alpha_{11}\}$

$y_k = \{0;1;\dots;8\} \setminus \{\alpha_{kk}\}$

$\Rightarrow$ y ist nicht in $[0;1[$ enthalten.

$\Rightarrow \operatorname{card}([0;1[) > \aleph$

Kontinuumshypothese: $\aleph_0 < X < \aleph_1$ es gibt kein solches X! $\Rightarrow$ nicht beweisbar nicht widerlegbar!

$\aleph_1$

$\operatorname{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1 = \operatorname{card}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow [0;1[\times [0;1[\sim [0;1[$

Mehr $\aleph$

Mächtigkeit der Abbildungen von $\aleph_0 \to P(\aleph_0)$

Unendlich viele Unendlichkeiten

$\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(2^A) \Rightarrow \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph_1$

$\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$ $(\aleph_2 > \aleph_1) \dots$ $\quad \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$

Ana
7.11.08

1.11 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Grundlegendes (Def)

$z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

„+": $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ $\quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

„·": $z_1 z_2 = (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ $\quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot) = \mathbb{C}$ Körper

Rechenregeln:

$z_1 + z_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \overset{\text{wegen Kommutativität von } \mathbb{R}}{=} (y_1+y_2, x_1+x_2) = z_2 + z_1$

(Kommutativ)

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \overset{\text{weg. Kommutativität von } \mathbb{R}}{=} (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2)$

$= z_2 \cdot z_1$ (Kommutativität)

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ } ~~Distributivität~~ Assoziativ

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ Distributiv

Verifikation von Körpereigenschaften:

Neutrales Element: $(0,0)$ für „+"; $(1,1)$ für „·"

Inverses Element: $-z = (-x, -y)$ für „+"; $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

für „·", $z \neq (0,0)$

Beleg: $z \cdot z^{-1} =$

Weitere Operatoren:

- $z_1 - z_2 = ((x_1 - x_2), (y_1 - y_2)) = z_1 + (-z_2)$
- $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} =$

Die $\mathbb{R}$ sind isomorph zur Teilmenge $(x,0) \in \mathbb{C}$

<u>Spezialfall:</u> $z_i = (x_i, 0)$

- $z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2, 0)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2, 0)$
- $\frac{z_1}{z_2} = (\frac{x_1}{x_2}, 0)$

$\mathbb{R} \longrightarrow \{(x,0) \in \mathbb{C}\}$ bijektiv (Isomorphismus zw. $\mathbb{R}$ und $\{(x,0) \in \mathbb{C}\}$)

„+", „−", „·", „÷" von $\mathbb{R}$ anwendbar.

<u>Schreibweise</u>

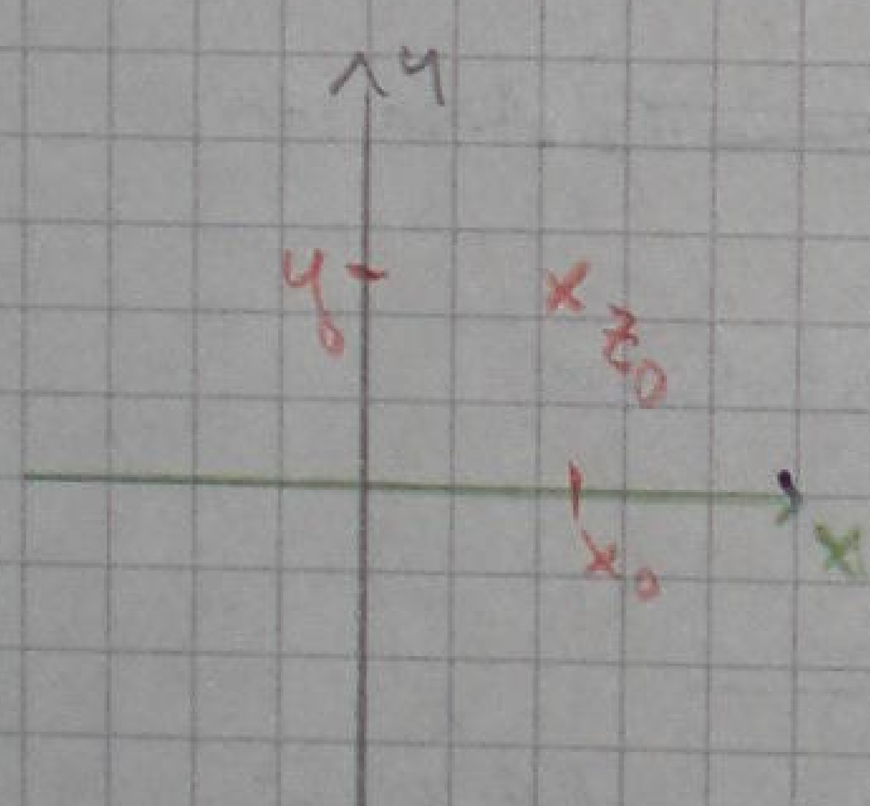
$(x,0) \mathrel{\hat{=}} x, \quad x \in \mathbb{R}$

$(0,1) \mathrel{\hat{=}} i$

$i \cdot i \mathrel{\hat{=}} (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \mathrel{\hat{=}} -1$

$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) =$

$x + iy$



Realteil $x_0 = Re(z_0)$

Imaginärteil $y_0 = Im(z_0)$