

# M20 Das Federpendel

Vorleser

Michael Kopp  
(Phys, BSC)

Gruppe

4 - 006

Mitarbeiter

Paul Renzel  
(Phys, BSC)

Datum

3.12.09

Assistent

Thomas Bühlert

## Aufgabenstellung

Von zwei Federn und einem Gewicht wird die Federrate bestimmt - klassisch (Massen anhängen, Zeitung auf.) und über eine Schwingung. Eine Driftung wird durch Reibung gestoppt und in dem asymptotischen Verlauf der Schw. wird der Reibungskoeffizient bestimmt.

## Grundlagen

Wird ein System angelernt und führt dabei eine Rückstellkraft, die proportional zur Winkel oder Auslenkung ist und entgegen der akt. Zeigt, so zeigt so wird dieses System eine harmonische Schwingung ausführen.

Wichtig ist dabei, dass die o.g. Bed.  $\approx$  jeder Breit gelten - mindestens näherungsweise. In diesem Falle kann man für  $\omega$  wie für alle Systeme bei kleinen Auslenkungen harmonische Schwingungen vorhersagen, weil die Rücktreibenden Kräfte so zu den Anstrengungen abhängen (d.h., in einer Taylor-Ordnung proportional)

wir füllendung sind.

Treffen den System nur anziehen der trojer Kraft (nach Newton:  $m \cdot a$ ) und die Rückstellkraft nach weiteren Kräften auf, so können diese die Schwingung dämpfen (bspw. versch. Reibungskräfte), sie aber wird angenommen, wenn wir eine Kraft von außen auf das System wirkt.

Bei einer gedämpften Schwingung nimmt - im Fazit - die Amplitude mit der Zeit ab.

### Fragen

- (1) Das Hookesche Gesetz gilt nur in einem begrenzten Bereich; darüber wird die Feder weiter ausgedehnt, ist die Rückstellkraft nicht mehr proportional zur Ausdehnung oder die Verformung der Feder ist sogar inversibel: Die Feder wird zudem breiter, das man sie nicht mehr gebrauchen kann.

(2) Je schwerer die Feder, desto länger die Periode dauer.  
 Schwingt der Federpendel, dann bewegen sich mit die  
 einzelnen "Federzellen", die alle eine Phase unten,  
 und liefern damit einen Beitrag zur Trägkraft.  
 In der Rückstellkraft werden sie liegen weniger bis  
 vor nicht einfache, weil die Summe der einzelnen Rück-  
 stellkräfte der Federzellen garantiert die Rückstellkraft bilden.

(3) Die Anslösung muss klein sein!

Die Taylor - Entwicklung des Kraftgesetzes muss in  
 niedrigster Ordnung linear sein.\*

\* Das Pot.  
 also in  
 niedriger  
 Order.  
 Quadratik.  
 Der lin.  
 Term fällt  
 weg, wenn  
 man sich  
 - inem  
 hin be-  
 findet!

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega t) \\ \dot{x} &= -x_0 \omega \sin(\omega t) \\ \ddot{x} &= -x_0 \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{eins. in } m\ddot{x} + Dx = 0 : \\ -x_0 \omega^2 m \cos(\omega t) + x_0 D \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow D = m\omega^2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung ist richtig hier } \omega = (\pm) \sqrt{\frac{D}{m}}$$

(der "-" - Zweig der Wurzel macht physikalisch keinen Sinn!)

(5) Die Feder habe die Länge L. Für einen Pkt. in Entfernung  
 u von der Aufhängung ist (wgl. Beigleitsatz 1) die Geschw.:

$$v(u) = \frac{\dot{x}}{L} \cdot u$$

und damit die kin. Energie mit dem Faktor  $\frac{w_F}{L} du$ :

$$k_E \approx dT = \frac{1}{2} \frac{w_F}{L} \cdot \left( \frac{\dot{x}}{L} \cdot u \right)^2 \cdot du$$

mit Integration folgt:

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \frac{m_F}{D} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L^2 = \frac{1}{2} \frac{m_F}{D} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_F \dot{x}^2.$$

Zusammen mit  $m$  kin. Energie der Masse  $m$ :

$$T = \tilde{T}_m + \tilde{T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_F \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} (m + \frac{1}{3} m_F) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2.$$

Das Potential ist wieder (vgl. vhw. (2))  $V = \frac{1}{2} D x^2$ .

Die Lagrange ist

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} D x^2.$$

Mit dem Euler-Lagrange-fol. folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = M \ddot{x} + D x = 0.$$

Dies löst man mit dem Ansch  $x = x_0 \cdot \cos(\omega t)$  (vgl. vhw. (4)) und erhält

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{M}} = 2\pi f = 2\pi / T = \cancel{2\pi \sqrt{\frac{M}{D}}} = \cancel{2\pi \sqrt{\frac{m_F + m_F/3}{D}}} \quad \text{!}$$

Es folgt:

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{\frac{M}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_F/3}{D}} \quad \square$$

### Aufbau

Siehe nach „Homework“.

## Messwerte

• statische Methoden:

• abnehmende "dichte" [g]

0

50

100

150

200

250

300

350

400

450

500

550

600

650

700

750

800

850

900

950

1000

Abstand [cm]

dünne Feder

26,2

26,7

27,2

27,7

28,2

28,7

29,1

29,5

30

30,4

30,9

31,3

31,8

32,3

32,7

33,2

33,7

34,2

34,65

35,1

35,6

Federmaße an

dicke: 55,8 g

düne: 36,01 g

dicke Feder

31,35

23,28

25,1

27,0

28,95

30,9

32,8

34,7

36,6

38,65

Stichprobe an „50 g“-Gewicht: 49,85; 49,80; 49,57;  
49,62; 49,63; 49,85.

• Gummiausdehnung:

Masse [g]	Ausdehnung [cm]
50	12,8
100	13,8
150	15,5
200	17,7
250	20,1
300	22,9
350	24,7
400	26,5
450	28,6
400	28,1
350	26,9
300	25,4
250	23,2
200	20,2
150	17,4
100	15,1
50	13,4

• Differenzielle Metalle

Masse	Weile Feder (durch)		Kurze Feder (durch)	
	t <sub>100%dehn.</sub> [s]	t <sub>50%</sub> [s]	t <sub>100%dehn.</sub> [s]	t <sub>50%</sub> [s]
50	3,21; 3,44; 3,36; 3,34		4,00	3,82; 3,83; 3,83; 3,83; 4,10
100	4,34; 4,35; 4,29; 4,37		400	3,99; 3,98; 3,99
150	5,27; 5,14; 5,15; 5,20		450	4,20; 4,20; 4,25; 4,27; 4,27 4,26

200	5,86; 5,85; 5,87	500	4,46; 4,51; 4,43; 4,48
250	6,49; 6,56; 6,52; 6,66	550	4,70; 4,69; 4,69
300	7,12; 7,12; 7,11	600	4,86; 4,88; 4,91; 4,87
350	7,52; 7,62; 7,47; 7,64; 7,54	650	5,04; 5,16; 5,09; 5,09; 5,06
400	8,03; 8,11; 8,06; 8,09	700	5,28; 5,29; 5,29; 5,27
450	8,53; 8,53; 8,52; 8,48	750	5,46; 5,26; 5,48; 5,29; 5,40
		800	5,63; 5,56; 5,59; 5,64
		850	5,81; 5,20; 5,74; 5,85; 5,82
		900	5,91; 5,93; 5,93; 5,92
		950	6,02; 6,06; 6,06; 6,07
		1000	6,25; 6,41; 6,34; 6,30; 6,23; 6,36

### • Videoanalyse

Referenz: Abstand d. Schranken: 12,65;  $\phi$  Gew.: 3,15 cm.

→ Schrader Dämpfung: Reibf. / Stanz: 2,125 cm  
Stanzflansch: 0,415 cm

Feder / Flansch: 3,515 cm

Aufhöhe / Reibf:  $(32,7 + 12,67 - \frac{1,425}{2})$  cm

$$\Rightarrow \theta \approx 11,51^\circ \text{ or } 0,7^\circ$$

→ Stahl Dämpf.: Reibf/Haßf: 4,77 + 0,415  
Feder/Haßf: 2,48 cm

Aufh. / Haßf.:  $(35,3 + 9,49 - \frac{1,425}{2})$  cm

$$\Rightarrow \theta = 3,81^\circ \text{ or } 5,54^\circ$$

→ mittlerer Dämpf.: Reibf/Haßf:  $(3,555 + 0,849)$  cm

Feder Haßf.: 2,49 cm

Aufh. / Haßf.:  $(33,3 + 11,72 - \frac{1,425}{2})$  cm

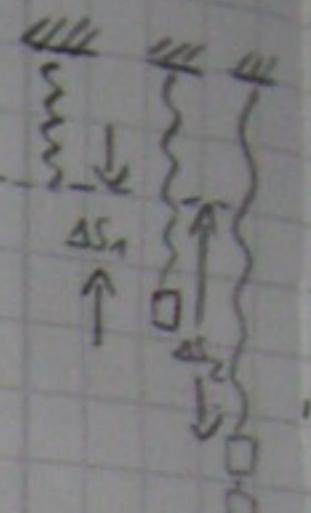
$$\Rightarrow \theta = 4,05^\circ$$

3.12.09  
T. Balo

## Auffbau / Durchführungs-

- Statistische Methode: Best. von Federhärte D:

Eine Feder wird nacheinander mit dem Gewicht 50, 100, ..., 450 g (weich) bzw. ... 1000 g (hart) Feder belastet und jeweils die Dehnung bezogen auf die im-beklebte Feder bestimmt; der Quotient aus angelanger Spannung und Auflösung aus „Reihenlage“ ist proportional zur Federhärte D:  $D = \frac{\Delta F}{\Delta x} \propto \frac{\Delta x}{\Delta F}$  da  $\Delta F = g \cdot \Delta m$ .



Die dicke (weiche) Feder darf nur bis 450 g belastet werden, weil sie sonst ausbricht.

Die Federnmasse wird mit einer Waage bestimmt.

- Dynamische Methode: Best. d. Federhärte D, Federnmasse m:

Wie bei der Stat. Meth. werden die beiden Federn nacheinander mit Gewichten belastet, dann aber im Schwingungsvorstand und die Amplitudenänderung bestimmt: Pro Feder und Gewicht wird drei mal über den Mittelpunkt der Schwingungswelle bestimmen zu können.

- Hysteresis beim Grümmibad: Ein Grümmibad wird mit 50; 100; ...; 450 g belastet und jeweils die obere Dehnung zu den inneren Federbelastungen bestimmt, danach werden die Belastungen von 450 auf 400; ...; 50; 0 g reduziert.

Wichtig: Beim Abziehen der Gewichte darf die Spannung auf dem Grümmibad nicht nachlassen - also ggf. falls etwas rutschen...

- Die weile Feder wird mit dem 400g - Gewicht im Schwingen versetzt und die Bewegungen werden gefilmt, damit per Computer die Amplitude - Zeitkurve bestimmt. An der Periodendauer kann man die Federsteife D bestimmen.

- Nun wird ein Metallteil gegen das Gewicht gedrückt, sodass es an der Strecken aufgehoben wird und beim Schwingen über das Metallteil nicht ~ mit ansteigendem konstanter Reibungskoeff.

Mit der Kamera / dem Computer wird wieder das Amplituden - Zeit - Diagramm aufgenommen; dann kann man mit dem Winkel, um den das Pendel aufgehoben wurde, kann man den Reibungskoeffizienten bestimmen.

### Formeln

- Hooke'sches Gesetz:  $s \propto F: D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{g \cdot s_0}{s_0}$  (1)

- Periodendauer eines Federpendels:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_f/3}{D}}$  (2)

- Verliert die Amplitude in kontinuierlich gedämpften Schwingung von einer oberen  $\omega$  müssen mindestens max.  $\dot{x}$  entstehen  $\omega_x$ , so wird dabei die Reibungskraft  $F_R = \frac{1}{2} D \cdot \dot{x}$  (3)

- Gleitreibungskoeff bei kont. gedämpfter Schwing.:  $\mu = \frac{D \cdot \omega_x}{2 \pi g \sin \theta}$  (4)

Es ist allgemein:

D: Federsteife ; g: Gravitationskonstante ( $g = 9,80665 \text{ N/kg}$ ) ;  
m: Masse der angehängten Gewichte ; m\_F: Masse d. Föder ;  
 $\omega$ : Auslenkung bzgl. dem Anhäng. Zustand ; T: Periodendauer einer Schwingung ; FR: Reibungskoeffizient ;  
 $\alpha_x$ : n.o. ;  $F_g$ : Schwerkraft auf Feder & Gewichte ;  
 $\theta$ : Winkel, um den die Feder bzgl. der Drehachse  
ausgezogen ist.

### Auswertung

- Praktische Methode: Füllt man die Datenwerte mit in ein lin. Fükt.- or (→ Graph) wählt man in ~~aus~~  $\omega [s^{-1}] - x [m]$ -Diagramm die Steigung  $k$  dünne F.:  $0,0092857$ ; dicke F.:  $0,0377515$ . Die Berechnung ist nach (1):

$$\frac{2}{\pi} \cdot 10 = D \text{ [N/m]}$$

Also:  $D_{\text{dünne}} = 105,61 \text{ N/m}$        $D_{\text{dicke}} = 251,977 \text{ N/m}$

Berechnet man zudem nach (1) für jedes Wertepaar (45,0°) rezipr. D (s. Tabelle), so wählt man

$$D_{\text{dünne}} = (102,83 \pm 2,9611) \text{ N/m}; D_{\text{dicke}} = (25,969 \pm 0,32597) \text{ N/m}$$

wobei die  $\pm$  von der Standardabweichung der einzelnen berechneten Ds kommen.

• Dynamische Methode: Die einzelnen Werte aus den wiederholten Messungen für eine best. Kante werden gemittelt und diese Mittelwerte in ein Diagramm eingezeichnet (obl. abw. als Fehlerbalken), und (C) aufgeführt ( $\rightarrow$  Balkendiagramm).

Dies liefert:

$$D_{\text{dimm}} = 102,615 \text{ N/mm} ; \quad D_{\text{dick}} = 25,480 \text{ N/mm},$$

außerdem die Fehler messen:

$$w_F^{\text{dimm}} = 53,84 \text{ g} ; \quad w_P^{\text{dick}} = 62,37 \text{ g}.$$

Diese Werte für die Fehleleistung resultieren aus den obige  
2. Art bestimmten Werten加上其相对误差:

$$\text{dimm: } 0,210\% ; \quad \text{dick: } 1,32\%.$$

Zu den oben Werten (siehe Aufgaben) passen sie weniger  
gut (rel. Fehler):

$$\text{dimm: } 2,32\% ; \quad \text{dick: } 1,95\%.$$

Ich verwende im Folgenden für die D das arithmetische  
Mittel der best. Ds:

$$D_{\text{dimm}} := 103,685 \text{ N/mm} ; \quad D_{\text{dick}} := 25,80 \text{ N/mm}.$$

• Brünnenscher Balken:

Die Skizze zeigt: Bei kleinen Belastungen ist der Balken  
weniger leicht verformbar, dehnt sich dann bei mittleren  
Belastungen ( $\sim 250 \text{ g}$ ) am leichtesten und wird für große  
Belastungen wieder fester. Außerdem zeigt er eine  
Hyperbole-Verzweigung: Auf dem "Rückweg" ( $\rightarrow$  wenn Gewichte  
abgenommen werden) ist nicht er einen sehr ähnlichen  
Verlauf, ist aber stets etwas leichter dehbar.

Eine mögliche Erklärung für den nicht-linearen Verlauf könnte liegen in dem oben besprochenen Aufbau von Brünni ergeben: bei entspanntem Zustand liegen lange Kettenmoleküle of einem Knäuel vor. Um diesen Knäuel einzuspannen, ist vergleichsweise viel Energie nötig (flache Linie). Sodann sind die Kettensteine horizontal gedreht, lassen sie sich leichter auf (stile Linie), aber irgendwann spannen feste Doppelböden zwischen den Kettenmolekülen, sodass diese nicht mehr bewegen lassen (steile Linie). Möglicherweise müssen die Doppelböden für eine weitere Dehnung nicht gebrochen werden, oder es müssen mit der weiteren Dehnung die Kettenmoleküle angezogen (und dann ist wieder große Van-der-Waals-Kräfte) kovalente Bindungen gegenübereinander bewegen: Je weniger verbreitert die Kettenmoleküle sind, desto höher ist dies (dito steile Linie).

Die Hystereseeigenschaft könnte man dadurch erklären, dass bei der Brünni-Verformung Spannung + Wärmeenergie umgesetzt und abgegeben wird. Diese Energie führt später, die Kettensteine adaptiert nach zurück  $\rightarrow$  die Rücklinie liegt über der ersten. Ein Indiz dafür ist, dass die Differenz zwischen Rück- und Rücklinie etwa proportional zur Steigung der Kurven ist (bei flachen Brünni sorgt fehlende Spannungsänderung für weniger stark abweichende Abhängigkeit).

• Die oben best. Federmassen weichen von den obrekt  
genannten Massen ab (relativ):

dünne: 49,5 % ; dick: 20,7 % .

Die Abw. sind ziemlich großzügig. Es sie hängen mit  
Teil davon zusammen dass, dass die Statik des Schu-  
bildes, auf dem sie bestimmt wurden nicht korrekt waren  
im Sinne von dass: die Maßgr. Gewichte nicht die  
angegebenen Massen hatten: Ein 50-g-Gewicht wog  
im Mittel nur  $(49,717 \pm 0,1705)$  g.

Weit präziserer schlägt sich aber wieder bei den  
dicken Föder wieder, dass diese in der Mitte in zwei  
kleineren zusammengelebt war. Laut Herleitung  
von (2) (vgl. Frage (5)) soll die lin. Massendicke  
der Feder eig. konstant sein, dann ist von (2) anwenden  
dürfen, was hier offensichtlich nicht der Fall ist.

Der weiteren kann die Aufhängung (die ja gezeigt  
wird, aber nicht mitbewegt) einen Teil zum Fehler  
beitragen.

Es voraussetzt im Folgenden die ~~richtige~~ Richtigkeit des ante-  
metrischen Mittel der Werte:  $m_F^{\text{dünne}} = 44,925$  g;  $m_F^{\text{dick}} = 61,585$  g.

• Die Schwingung

• bis zur Videoanalyse der eingedämpften Schwingung erjährt  
sie eine Periodendauer von

$$T = 0,8063 \text{ s.} \quad (*)$$

• Für eine rd. nach gedämpfte Schwingung ( $\theta = 0,7^\circ$ ), wählt  
man aus dem Schubild:  $\Delta x = 1,73 \text{ cm} / 50 = 0,0346 \text{ cm}$ ,  
lange Marke

Zum Hn.  
aber  $\Delta x = 0,569 \text{ cm} / 18 = 0,0316 \text{ cm}$ .

W. verwendet beide Werte j. es folgt mit Formel (4):

$$\mu = \frac{25,809 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 0,0346 \text{ cm} / 100}{2 \cdot (400 + 61,585) / 1000 \log_10 \frac{9,11 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{0,07^\circ}} = 0,0807$$

d. h.  $\mu = 0,0737$ .

Für die mittle gedämpfte Schwingung ( $\theta = 4,05^\circ$ ), ergibt sich aus den Schätzten

$$\Delta x = 0,403 \text{ cm}$$

und damit

$$\mu = 0,163.$$

Bei der starken Dämpfung ( $\theta = 5,54^\circ$ ) ist

$$\Delta x = 0,498 \text{ cm}$$

und damit

$$\mu = 0,147.$$

Die Werte für  $\mu$  bei <sup>starker</sup> gedämpften Schwingungen liegen nah beieinander, der  $\mu$  Wert von ungedämpften System ist jedoch nur etwa die Hälfte.

Als nächsten vier Werten ergibt sich im Mittel:

$$\mu = \underline{0,1161} \pm \underline{0,0293}.$$

(\*) Es folgt eine Fehlerhälfte (nach Formel (2)) von  $\Delta \mu = 25,532 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ .

Vom Ergebnis aus der statischen Methode weicht dies um  $1,762\%$

ab, von der dynamischen Methode um nur  $0,2232\%$ .

Es bedarf ist, dass bei dieser Methode in den Schätz-

bilien die Partikel nicht mit Geschwindigkeit  
aktiviert werden können; wir können  
nur auswählen, dass es einzelne Punkte  
sind, die sich bei höherer Distanz entgegnet.

Bei unserer Dämpfung lassen wir Gav. ~~von~~  
den Luftwiderstand außer Acht: Dies wäre  
einen Beitrag proportional zur Geschwind. bei.  
Außerdem „kippt“ das Gewicht über die reibende  
Stange: Es kann also nicht davon abgehen,  
dass die berechnete Normalkraft eine willkürliche  
wirkende Normalkraft ist; diese Beziehungen ent-  
halten oft im Schwingen der Dämpfung.

### Fehlerreduzierung:

Bei allen Größen, von den diese macht, werden bereits  
Mittelwerte und Standardabweichungen angegeben.

Bei der Videotranskription kommt man für  $D_{\text{diss}}$  insgesamt auf:

$$D_{\text{diss}} = (25,741 \pm 0,233) \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$$

Sieht nach den Mitteln und Fehlerbalken.

## Rückanalyse:

- Die Federn lösen sich

$$D_{\text{durch}} = (103,87 \pm 1,364) \mu\text{m} ; D_{\text{durch}} = (25,29 \pm 0,233) \text{ mm}$$

- Als Federnmasse verwandten wir den Brüel mit der Wiegen- und in dynamischen Schallode: Damit fließt ein, dass die realen Federn keine konstante Dichte haben:

$$m_{\text{durch}} = (44,93 \pm 8,975) \text{ g} ; m_{\text{durch}} = (67,59 \pm 5,785) \text{ g}.$$

- Der Gleitreibungskoeffizient Stahl - Stahl erhalten wir:  
 $\mu = (0,116 \pm 0,0394)$ .

Der Literaturwert\* für hierfür beträgt (trocken):

$$\mu = 0,03; \dots; 0,09;$$

der höchste Wert (0,09) weicht von unserem Wert folg. um 28,9% ab.

\* Hanke, Dietmar; Simon, Günter:  
Physik - Gleichungen und  
Tabellen. Fachbuchverlag  
Leipzig 2005<sup>14</sup>

ET 16.12.09  
T. Schulte