Laag Blatt 10,11 Michael Kopp

(1,2)

1 z.z.: (i) $f(x+\tilde{x}) = f(x) + f(\tilde{x})$

(ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Allgemeine Matrizenmultiplikation: $A \cdot X = R \Rightarrow r_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_{ki}$

(i) Sei $x + \tilde{x} = y$ mit $y_{ji} = x_{ji} + \tilde{x}_{ji}$

$$f(x+\tilde{x}) = f(y) = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} y_{ki} - \sum_{k=1}^{2} y_{jk} a_{ki}$$

$$f(x) + f(\tilde{x}) = \left(\sum_{k=1}^{2} a_{jk} x_{ki} - \sum_{k=1}^{2} x_{jk} a_{ki} \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{jk} \tilde{x}_{ki} - \sum_{k=1}^{2} \tilde{x}_{jk} a_{ki} \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} (a_{jk} x_{ki} + a_{jk} \tilde{x}_{ki}) \right) - \left(\sum_{k=1}^{2} (x_{jk} a_{ki} + \tilde{x}_{jk} a_{ki}) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} a_{jk} (x_{ki} + \tilde{x}_{ki}) - \sum_{k=1}^{2} (x_{jk} + \tilde{x}_{jk}) a_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{2} a_{jk} y_{ki} - \sum_{k=1}^{2} y_{jk} a_{ki} = f(x+\tilde{x})$$

(ii) $$f(\lambda x) = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} (\lambda x_{ki}) - \sum_{k=1}^{2} (\lambda x_{jk}) a_{ki}$$

$$= \lambda \left(\sum_{k=1}^{2} a_{jk} x_{ki} - \sum_{k=1}^{2} x_{jk} a_{ki} \right) = \lambda f(x)$$

2

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot e_2$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_4$$

$$f(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_2$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} \gamma & (\delta - \alpha) \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

3 $$\mathcal{B}_{\mathrm{Kern} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(43) 1

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$x_1 = -1$
$x_2 = 3$
$x_3 = -1$

$\vec{x} = (-1, 3, -1)^T$

2 $\cancel{A \cdot A = R \quad r_{ji} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} a_{ki}}$

$\cancel{\text{Da } a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \Rightarrow r_{\mu\mu} = \sum_{k=1}^{3}}$

Induktion über $\mathbb{N}$:

(IA) $n=1$: $A^1 = \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ ✓

(IV) Die Annahme sei wahr für $n=k$

(IS) z.z.: Die Annahme ist wahr für $n=k+1$:

$$A^{k+1} = A^k \cdot \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \overset{\text{nach (IV)}}{=} *$$

$$\begin{pmatrix}1&k&k+\frac{k^2+k}{2}\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&k+1&\left(2+k+k+\frac{k^2+k}{2}\right)\\0&1&k+1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Mit $2+k+k+\frac{k^2+k}{2} = \cancel{\ldots}$

$(k+1) + k+1 + \frac{k^2+k}{2} = (k+1) + \frac{2k+2+k^2+k}{2} =$

$(k+1) + \frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2}$ ✓

□

(45) 1 $\begin{pmatrix}1&2&-5\\-3&-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&0\\-3&-2&4&0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&0\\-2&0&-1&0\end{array}\right)$

Sei $x_2 := t$ $\quad -2x_1 - t = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}t$

$-\frac{1}{2}t + 2x_2 - 5t = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{11}{4}t$

$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix}-1/2\\11/4\\1\end{pmatrix} t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}-2\\11\\4\end{pmatrix} \cdot \tilde{t} \;\middle|\; \tilde{t} \in \mathbb{R} \right\}$

Laag Blatt 10,11 Michael Kopp

45 [2] Sei $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ψ bildet b_1 auf $\vec{0}$ ab, die beiden anderen jedoch nicht – Die Vektoren $f(b_2)$, $f(b_3)$ spannen $\operatorname{Img}(f)$ auf: $f(b_2) = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $f(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Img} f = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

[3] Da A zwei Zeilen hat, kann der Rang A max. 2 sein. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ lin. unabh. sind, ist der Spaltenrang $= 2$. Da Zeilenrang $=$ Spaltenrang $=$ Rang $A = 2$

46
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & t^2 & t \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2-t^2 & -t \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-t^2 & -t \\ 0 & 0 & 4-t^2 & 2-t \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow * \\ \Rightarrow (4-t^2)x_3 = 2-t \Rightarrow x_3 = \frac{1}{(2+t)} \\ \Rightarrow ** \end{array}$$

$* \quad 2x_2 + (2-t^2)\cdot\frac{1}{(2+t)} = -t \Rightarrow 2x_2 = -\left(t + \frac{2-t^2}{2+t}\right) =$

$-\left(\frac{2t + \cancel{t^2} + 2 - \cancel{t^2}}{2+t}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{-t-1}{2+t} =$

$** \quad x_1 + 2x_2 = -1 \Rightarrow x_1 + \frac{-2t-2}{2+t} = -1 \Rightarrow$

$x_1 = -1 + \frac{2t+2}{2+t} = \frac{-2-t}{2+t} + \frac{2t+2}{2+t} = \frac{t}{2+t}$

$\text{Lös} = \left\{ \begin{pmatrix} t/(2+t) \\ -(t+1)/(2+t) \\ 1/(2+t) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{1}{(2+t)} \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

Die Dimension der Lösungsmenge ist 1

(47) [1] U, V, W $\mathbb{R}$-VR, $f: V \to W$, $g: W \to U$ lin Abb

z: $\dim_{\mathbb{R}} \text{Bild}(g \circ f) \leq \dim_{\mathbb{R}} \text{Bild}(g)$

$\dim_{\mathbb{R}} \text{Bild}(g \circ f) \leq \dim_{\mathbb{R}} \text{Bild}(f)$

Nach dem Homomorphiesatz gilt:

$$\dim \text{Bild} f = \dim V - \text{Defekt} f = \dim f(V)$$

Da $\mathbb{N} \ni \text{Defekt} f \geq 0 \Rightarrow$

$$\dim f(V) \leq \dim V$$

$$\dim g(W) \leq \dim W$$

1) Sei $\text{Def}\, g = 0 \Rightarrow \dim g(W) = \dim W \Rightarrow$

$$\dim g(f(V)) = \dim f(V)$$

2) Sei $\text{Def}\, g \geq 1 \Rightarrow \dim g(W) < \dim W \Rightarrow$

$$\dim g(f(V)) \leq \dim f(V)$$

Die Gleichheit kommt daher, dass der $\text{Ker}(g)$ $\supseteq f(\text{Ker} f)$ sein kann. (würde die $\vec{w} \xrightarrow{g} \vec{0}$, die [illegible] $\vec{v} \xrightarrow{f} \vec{w} = 0$ hat)

3) Sei $\text{Def}\, f = 0 \Rightarrow \dim f(V) = \dim V \Rightarrow$

$\vdash$ $\text{Def}\, g = 0 \Rightarrow \dim g(W) = \dim W \Rightarrow \dim g(f(V)) = \dim W = \dim g(W)$

$\vdash$ $\text{Def}\, g \geq 1 \Rightarrow \dim g(W) \leq \dim W \Rightarrow \dim g(f(V)) \leq \dim W \leq \dim g(W)$

4) Sei $\text{Def}\, f \geq 1 \Rightarrow \dim f(V) < \dim V \Rightarrow$

$\vdash$ $\text{Def}\, g \geq 0 \Rightarrow \dim g(W) \leq \dim W \Rightarrow \dim g(\underbrace{f(V)}_{\substack{\dim < \dim V \\ f(V) \subsetneq W}}) \leq \dim g(W)$

■

[2] Den Matrizen A, B werden lin. Abb. f, g zugeordnet:

$A \mapsto g$, $B \mapsto f$, $AB \mapsto g \circ f$

Nach der Def. des Ranges ist $\text{rg}\, B = \dim f(V)$

Nach [1] gilt also $\text{rg}\, AB \leq \text{rg}\, A$, $\text{rg}\, AB \leq \text{rg}\, B$ und somit auch $\text{rg}\, AB \leq \min(\text{rg}\, A, \text{rg}\, B)$

(47) (a)

$\boxed{3}$ $A, B \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \Rightarrow rg(A+B) \leq rg\, A + rg\, B$

Gegenbeispiel für „<": ~~rg(A+B) < rg A + rg B~~

$$A, B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A+B) = rg\, A + rg\, B$$

$$0 = 0 + 0 \quad (\checkmark)$$

(44)

$\boxed{1}$ $(E_n - N)(E_n + \lambda N + \mu N^2) = E_n$

$$E_n^2 + E_n\lambda N + E_n\mu N^2 - NE_n - \lambda N^2 - \mu N^3 = E_n$$

$$\cancel{E_n} + \lambda N + \mu N^2 - N - \lambda N^2 - \mu N^3 = \cancel{E_n}$$

$$N(\lambda - 1) + N^2(\mu - \lambda) - \underbrace{\mu N^3}_{0} = 0$$

sei $\lambda = \mu = 1 \Rightarrow$

$$0 + 0 - 0 = 0 \quad \checkmark$$

$\boxed{2}$

$$E_n - N = E_n - N \quad | \cdot (E_n + N)$$

$$E_n^2 - N^2 = (E_n - N)(E_n - N) \quad | \cdot (E_n^2 + N^2)$$

$$E_n^4 - N^4 = (E_n - N)(E_n - N)(E_n^2 + N^2)$$

$$= (E_n - N)(E_n^3 + E_n N^2 - NE_n^2 - N^3)$$

$$= (E_n - N)(E_n - N + N^2 - N^3) \quad | \cdot (E_n^4 + N^4)$$

$\vdots$

$$E_n^q - N^q = (E_n - N)(E_n - N + N^2 - N^3 \ldots + N^{q-1})$$

$$E_n - 0 = \underbrace{(E_n - N)}_{X}\underbrace{(E_n - N + N^2 - N^3 + \ldots + N^{q-1})}_{X^{-1}}$$

(47)

$\boxed{3}$ (G+) $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) \Rightarrow rg(A+B) > rg\,A + rg\,B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg\,A = 3 \qquad rg\,B = 3 \qquad rg(A+B) = 3$$

$$rg\,A + rg\,B = 6 \ \lightning\ rg(A+B) = 3$$

Alternativ:

Der Rang $rg\,A$ sei $rg\,A = n$, $rg\,B$ sei $rg\,B = m$

Also hat A oBdA n l.u. Spaltenvektoren, B hat m l.u. Spaltenvektoren.

Im Extremfall sind alle Spaltenvektoren von A l.u. zu denen aus B $\Rightarrow$ Die Addition ~~dieser~~ von $A+B$ erzeugt $n+m$ l.u. Spaltenvektoren: $rg(A+B) = n+m$

Sonst (nicht Extremfall) sind r Spaltenvektoren von A schon als Lin. Komb. in B enthalten. In der Summe $A+B$ sind $n+m-r$ l.u. Spaltenvektoren

und $n+m-r - m+n = r > 0$

(b) Subtrahiert man den ersten vom letzten Spaltenvektor erhält man den Vektor $\begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}$. Multipliziert man diesen mit einem entsprechenden λ erhält man $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun kann man mit dem ersten und diesem Vektor jeden weiteren linear kombinieren: $\vec{s}_i = \vec{s}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(i-1)$ (s_i: i-ter Spaltenvektor). D.h. man hat nur zwei l.u. Spaltenvektoren $\Rightarrow$ Spaltenrang $= 2$, also Zeilenrang $=$ Spaltenrang $=$ Rang $= 2$