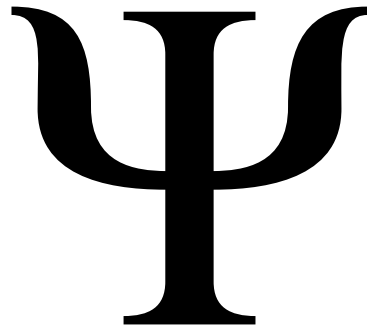


MICHAEL KOPP



Script

zur Vorlesung

---

# Experimentalphysik III

---

bei Prof. M. Dressel, Uni Stuttgart, 2010

9. November 2009  
(Version  $\alpha$  0.1)



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>ii</b>
<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>1 EM-wellen?</b>	<b>1</b>
1.1 Maxwell-Gleichungen . . . . .	1
1.1.1 Wellengleichung . . . . .	1
1.1.2 Energie und Impuls von EM-Wellen . . . . .	4
1.1.3 Fourier . . . . .	5
1.1.4 Gruppen- und Phasengeschwindigkeit . . . . .	7
1.1.5 Dispersion . . . . .	8
1.1.6 Im Elektronengas . . . . .	12
1.1.7 Brechung an ebenen Grenzflächen . . . . .	17
1.1.8 Reflektion . . . . .	25
1.1.9 Totalreflektion . . . . .	25
1.1.10 Goos-Hänchen-Effekt . . . . .	27
1.1.11 Glasfasern . . . . .	27
1.1.12 Polarisation – Brewster-Winkel . . . . .	29
<b>Index</b>	<b>30</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>30</b>
<b>2 Formelzeichen</b>	<b>33</b>



# Vorwort

Mal sehen, wie lange ich es dieses Semester durchhalte ;-)

*Michael Kopp*  
Besigheim, 9. November 2009



# Kapitel 1

## EM-wellen?

### 1.1 Maxwell-Gleichungen

#### 1.1.1 Wellengleichung

In **Materie** gelten die vier Maxwell-Gleichungen:

**Wichtig! 1 (Maxwell-Gleichungen in Materie)**

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \vec{0} \quad \text{Induktion} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{keine magn. Monopole} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j} \quad \text{el. Feld od. Strom erz. magn. Feld} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho \quad \text{Lad. erz. el. Feld} \quad (1.4)$$

Es gelten die Zusammenhänge

**Wichtig! 2 (El. und Magn. Feld in Materie)**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} \quad \text{und} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H} . \quad (1.6)$$

Wir wollen im Folgenden die *Vereinbarung* treffen, dass wir *nicht-magnetische* Materialien annehmen. Außerdem sollen keine Ströme oder Ladungen vorliegen; also

$$\mu = 1, \vec{j} = \vec{0} \text{ und } \varrho = 0 . \quad (1.7)$$

Allerdings können wir nicht  $\varepsilon = 0$  setzen.

→ Die **Permittivität**  $\varepsilon$  ist in **anisotropen Materialien** kein Skalar mehr, sondern ein Tensor  $\varepsilon$ . Darüber hinaus muss  $\varepsilon$  nicht mal linear sein, sondern kann auch

$$\varepsilon = \varepsilon = \varepsilon(\vec{E})$$

sein. In Gasen ist normalerweise  $\varepsilon \approx 1$  und in Gasen, Flüssigkeiten und kubischen (also sehr symmetrischen) Kristallen ist  $\varepsilon$  skalar. Die übrigen, nicht linearen Fälle von  $\varepsilon$  führen zu interessanten Effekten, die in der sog. *Nichtlinearen Optik* behandelt werden. ←

Mit den oben genannten Vereinfachungen erhalten wir als neue „Arbeitsgrundlage“ die Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}, \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.11)$$

Wenden wir nun  $\vec{\nabla} \times$  auf (1.8) an, erhalten wir für die linke Seite

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

und für die rechte

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \stackrel{(1.10)}{=} -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} \stackrel{(1.5)}{=} -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Es gilt also

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}. \quad (1.12)$$

Analog kommt man auch auf

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}. \quad (1.13)$$

**Wichtig! 3** Diese beiden Gl. sind Wellengleichungen der Elektromagnetischen Welle.

→ Wir werden sehen, dass

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon}} =: \frac{c_0}{n} \quad (1.14)$$

gilt. Im Vakuum ist mit  $\varepsilon = 1$   $v_{ph} = c_0$ ; damit sieht man auch, dass  $\varepsilon \leq 1$  sein muss, da sich sonst Informationen schneller als  $c_0$  ausbreiten könnten... ←

**Definition 1.1 (Brechungsindex  $n$ )** Der Brechungsindex kennzeichnet die Brechung, also die Richtungsänderung von Elektromagnetischen Wellen beim Übergang zwischen zwei Medien. Es gilt

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \frac{c_0}{c}. \quad (1.15)$$

Wir suchen nun **Lösungen** für die Wellengleichungen. Eine einfache Lösung ist eine **ebene Welle**:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \exp\left(i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)\right), \quad (1.16)$$

wobei wir mit  $\vec{k}$  den *Wellenvektor* bezeichnen. Er zeigt in Richtung der Ausbreitung und hat den Betrag

$$\|\vec{k}\| = k = \frac{2\pi}{\lambda} n. \quad (1.17)$$



Dabei brauchen wir das  $n$  hier, weil wir mit  $\lambda$  die Vakuumwellenlänge meinen. In einem Medium mit  $n \neq 1$  verändert sich die Wellenlänge logischerweise. Das  $n$  kann dabei  $n = n(\omega)$  sein.

$\vec{k}$  ist die räumliche Entsprechung von  $\omega$ : Bewegt man sich um  $\lambda/n$  weiter, so hat die Welle wieder den gleichen Phasenzustand. Dies äußert sich darin, dass das Argument des exp aus (1.16) sich um  $2\pi$  geändert hat.

**Wichtig! 4 (Dispersionsrelation)** Die D. ist allgemein ein Zusammenhang zwischen Wellenzahl  $k$  und Kreisfrequenz  $\omega$ . In der Optik gilt:

$$\boxed{k = \frac{n\omega}{c}}. \quad (1.18)$$

Die Herleitung dieser Formel ist einfach: Man setzt die Definition von  $\vec{k}$  (1.17) und die Definition von  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ) ein, und erhält

$$\frac{2\pi}{\lambda} n = n \frac{2\pi\nu}{c} \text{ also } \lambda\nu = c;$$

dies entspricht  $s/t = v$ .

→ Auch wenn Gl. (1.16) die Wellengleichung (1.12) löst, so wird sie in der Natur doch nie betrachtet werden können, weil die Natur keine komplexen Zahlen kennt. Wir müssen also entweder den Real- oder Imaginärteil von (1.16) verwenden, oder wir addieren

$$2\vec{E}' = \vec{E} + \vec{\bar{E}},$$

wobei  $\vec{\bar{E}}$  das komplex konjugierte von  $\vec{E}$  ist. ←

Wendet man auf (1.16)  $\vec{\nabla} \cdot$  an, so findet man mit den Maxwellgl.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} \stackrel{(1.9)}{=} 0.$$

→ Dies findet man aber nur bei unseren Vereinfachungen; im Allgemeinen ist nur  $\vec{D}$  senkrecht zu  $\vec{k}$ . Erst wenn die Materie, die die Welle durchläuft isotrop ist, ist die Elektromag. Welle eine Transversalwelle. ←

Wenn wir die Wellengleichung für das magnetische Feld ebenso lösen (also analog zu (1.16)), finden wir auch, dass

$$\vec{B} \perp \vec{k}$$

ist.

**Wichtig! 5** Elektrisches und Magnetisches Feld stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Betrachtet man nun oBdA<sup>1</sup>  $\vec{E}_0 = (A, 0, 0)^T$  und  $\vec{k} = (0, 0, k)$ , dann erhält man als Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = (0, -i k, 0)^T \vec{E} \stackrel{(1.8)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}.$$

<sup>1</sup>Wir haben hier eine lineare Theorie vor uns. Damit kann man eine Lösung als endliche Summe einfacherer Lösungen betrachten...

Dies kann man einfach hochintegrieren: Man erhält:

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = (0, -\frac{k}{\omega}, 0)^T \vec{E} \quad (1.19)$$

So sieht man leicht:

**Wichtig! 6** *Magnetisches und Elektrisches Feld sind senkrecht zueinander.*

Man findet statt (1.19) den Zusammenhang

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega} \left( \vec{k} \times \vec{E} \right)}, \quad (1.20)$$

wenn man mit allgemeinen Größen bei der Herleitung arbeitet.

Damit gilt für die Amplituden der Zusammenhang

$$B = \frac{k}{\omega} E \text{ oder mit (1.18): } B = \frac{n}{c} E. \quad (1.21)$$

→ In Gaußeinheiten gilt elegant:

$$E = B.$$

←

Uns bleibt, wenn wir die Ausbreitungsrichtung der Welle kennen, noch ein Freiheitsgrad für ihre Orientierung: Dies ist die **Polarisation**. Sie gibt an, in welche Ebene die E-Komponente der Welle geneigt ist. Sie kann in jede beliebige Richtung zeigen und diese Richtung kann von Zeit und Ort abhängen.<sup>2</sup>

Die Wellen decken einen großen **Frequenzbereich** ab. Wir können nur einen kleinen davon sehen; zwischen Ultraviolett mit ca 400 nm und Infrarot mit 800 nm. Beim Sehen ist die Auflösung durch die Wellenlänge beschränkt: Letztere muss kleiner sein als der minimale Abstand zwischen zwei zu beobachtenden Punkten. Kleinere Wellenlängen für mehr Details gehen mit größeren Energien einher.

### 1.1.2 Energie und Impuls von EM-Wellen

Sonnenlicht ist *warm*. Folglich müssen EM-Wellen Energie übertragen können. Wir definieren als Maße dafür:

**Definition 1.2 (Energiestrahldichte  $\vec{S}$ )**

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (1.22)$$

*Sie gibt uns die übertragene Energie pro Fläche an.*

Mit der Einheit  $[S] = 1 \text{ W/m}^2$ . Durch unsere Vereinbarungen gilt für uns:

$$\vec{S} = \vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{E} \times \vec{B} \right) = \varepsilon_0 c_0^2 \left( \vec{E} \times \vec{B} \right). \quad (1.23)$$

<sup>2</sup>Weil es sich um einen unbestimmten *Freiheitsgrad* handelt.

$\vec{S}$  zeigt also in isotropen Medien in Ausbreitungsrichtung (weil  $\vec{k} \perp \vec{E}$  und  $\vec{k} \perp \vec{B}$ ).

Weil aber  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht konstant sind, verwenden wir noch eine zeitunabhängige Definition:

**Definition 1.3 (Lichtintensität  $I$ )** Auch Energiestromdichte genannt:

Die im (zeitlichen) Mittel auf eine Einheitsfläche senkrecht zu  $\vec{k}$  transportierte Energie:

$$I = \langle \|\vec{S}\| \rangle \stackrel{(1.21)}{=} \varepsilon_0 n c_0 \cdot \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle \quad (1.24)$$

Für eine Ebene Welle gilt wegen  $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$ :

$$I^{\text{Ebene Welle}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n c_0 \cdot \|\vec{E}_0\|^2.$$

Um den Impuls einer Welle sinnvoll definieren zu können, brauchen wir noch:

**Definition 1.4 (Strahlungsdruck  $P_s$ )** auch Lichtdruck genannt:

Die Kraft, die elektromagnetische Strahlung pro Fläche auf ein Material ausübt.

Anschaulich wird dies, wenn man den Teilchencharacter des Lichts bedenkt: Ein Photon hat Masse und Geschwindigkeit und damit auch einen Impuls  $p = \frac{h}{\lambda}$ , den es an einen Körper übertragen kann. Reflektiert der Körper total, so wird der doppelte Impuls übertragen, als wenn er vollständig absorbiert: Die Photonen haben im ersten Fall nach dem „Stoß“ den Impuls  $-p$  und konnten so  $p - (-p) = 2p$  übertragen. In letzterem Fall haben sie nach dem Stoß  $p = 0$ .

Es gilt der Zusammenhang

$$P_s^{\text{absorbiert}} = \frac{I}{c} \text{ und } P_s^{\text{total reflektiert}} = 2 \frac{I}{c}. \quad (1.25)$$

◇ Sonnenlicht hat  $I \approx 1,5 \text{ W/m}^2$  und damit einen Strahlungsdruck von  $P_s \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$ . ◇

### 1.1.3 Fourier

Weil wir – wie bereits oben erwähnt – mit einer linearen Theorie arbeiten, können wir Wellen (Lösungen von DGL) linearkombinieren um weitere Wellen (Lösungen) zu erhalten. Ein mächtiges Werkzeug stellt dafür FOURIER zur Verfügung. Man kann damit eine große Klasse von Wellen als Linearkombination bzw. Integral<sup>3</sup> darstellen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt}_{\vec{E}(\vec{r}, \omega)} e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.26)$$

Hier ist schon angedeutet, dass man durch die Fourieranalyse aus einer Funktion  $\vec{E} : (\vec{r}, t) \mapsto \vec{E}(\vec{r}, t)$  im Zeit-Raum eine Funktion  $\vec{E} : (\vec{r}, \omega) \mapsto \vec{E}(\vec{r}, \omega)$  im

<sup>3</sup>In diese Sinne ist ein Integral nur die konsequente Fortsetzung einer Summe/Reihe; Man hätte (1.26) auch als Reihe schreiben können durch  $\sum_{\omega=-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}$ .

Frequenz-Raum machen kann – analog könnte man genauso gut den  $k$ -Raum betrachten – dann würde aus  $\vec{E} : (\vec{r}, t) \mapsto \vec{E}(\vec{r}, t)$  eine Funktion  $\vec{E} : (\vec{k}, t) \mapsto \vec{E}(\vec{k}, t)$ . Die Betrachtung in diesen Räumen macht dann Sinn, wenn man es mit periodischen – zeitlichen wie räumlichen<sup>4</sup> – Vorgängen zu tun hat.

◇ **Fouriertransformation** einer GAUSS-Kurve. Eine Gauss-Kurve im Frequenzraum ist definiert über

$$E(\omega) = A \cdot \exp \left( - \left( \frac{\omega - \omega_0}{\delta_\omega} \right)^2 \right).$$

Dabei gibt  $\delta_\omega$  die halbe Breite (Abstand Mitte–Rand) an, die die Kurve in der Höhe  $E = A/e$  hat.  $A$  ist die maximale Höhe der Kurve und  $\omega_0$  gibt den „ $x$ “-Wert an, bei dem sich das Max. befindet.

Die Fouriertransformation ist dann:

$$E(t) = \frac{A \delta_\omega}{2 \sqrt{\pi}} e^{i \omega_0 t} \cdot e^{-\frac{\delta_\omega^2}{4} t^2}$$

Transformiert man diese Funktion wieder zurück, erhält man die Ausgangsfunktion. ◇ Hier sieht man durch Koeffizientenvergleich, dass

$$\frac{\delta_\omega^2}{2} = \frac{1}{\delta_t^2} \text{ oder } \delta_\omega \cdot \delta_t = 2. \quad (1.27)$$

Damit hat man einen Zusammenhang zwischen den Breiten der Gauss-Kurven im  $t$ - und im  $\omega$ -Raum. Dies bedeutet aber noch mehr. Interpretiert man die Kurve als „Streuung“ von Messwerten, kann man diese Gl. gewissermaßen als *Unschärferelation* lesen; Um die Frequenz genau bestimmen zu können – also  $\delta_\omega$  klein zu machen – braucht man große  $\delta_t$  – also lange Messungen.

◇ Ein anderes Beispiel (zum **Hand-Rechnen**) ist mit  $f(t) = e^{-a t^2}$ ; dafür gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i \omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a t^2} e^{-i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t^2 + \frac{i \omega t}{a})} dt \\ &\stackrel{*}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t + \frac{i \omega}{a})^2 - \frac{\omega^2}{4a}} dt \\ &= \sqrt{\pi/a} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \end{aligned}$$

Hier sieht man schön, worauf es ankommt: Bei (\*) wird das Argument von exp quadratisch ergänzt und darunter wird das bestimmte, uneigentliche Integral von  $e^{-r^2}$  gelöst, wobei ein Faktor übrig bleibt, der die neue Variable  $\omega$  negativ quadratisch enthält. ◇

Hier sieht man, dass der Parameter  $a$ , der die Breite der Kurve angibt, vorher mit  $t^2$  multipliziert wurde, wobei jetzt dadurch geteilt wird. D.h. eine dicke Gauss-Kurve geht durch Fouriertransformation in eine dünne über.

<sup>4</sup> Beispielsweise ein Kristall: Bei Kristallanalysen rechnet man in  $k$ -Räumen.

### 1.1.4 Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Wir wollen zuerst den Unterschied zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit hervorheben. Dazu braucht man die Def.:

**Definition 1.5 (Wellenpaket)** *Dies ist ein räumlich begrenzter Bereich auf einem Wellenleiter, auf dem sich eine (merklich von 0 verschiedene) Amplitude zeigt. Dieser Bereich ist nicht fest, sonder wandert. Er kann dabei seine Breite verändern.*

Damit sich solch ein Wellenpaket bilden kann, müssen sich mehrere (Elementar)Wellen aufaddieren; wie wir im Vorangegangenen Kapitel gesehen haben, lässt sich das durch eine Fourierreihe bewerkstelligen.

Verwendet man eine Welle, die mit einer Gauss-Kurve moduliert ist, spricht man von einem *Gauss'schen Wellenpaket*; dabei multipliziert man eine Welle (bspw. Sinus) mit der Gauss-Kurve und erhält so eine Kurve, die die Gauss-Kurve als *Einhüllende* hat. Der große Vorteil von einem solchen Wellenpaket ist, dass nach Fouriertransformation die Frequenzverteilung wieder eine Gauss-Kurven-Einhüllende hat.

Wir wollen eine solche Welle verwenden. Die Funktion  $E(\omega)$  ordnet jeder Frequenz eine geeignete Amplitude zu – damit kann man steuern, welche Elementarwellen in der Überlagerung wie stark gewichtet werden sollen. Die Welle sieht also aus wie folgt:

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) \cdot \underbrace{\exp i(\omega t - k z)}_{\text{Elementarwelle}} d\omega . \quad (1.28)$$

Wir kennen aus (1.18) die *Dispersionsrelation*, welche  $k(\omega)$  beschreibt. Wir wollen dieses  $k$  nun in  $\omega$  um  $\omega_0$  entwickeln (mit neuer Variable  $\Omega$ , sodass  $\omega = \omega_0 + \Omega$ ), um die wichtigsten Abhängigkeiten  $k$ s von  $\omega$  zu untersuchen:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \Omega + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \Omega^2 + O(\omega^3) \Omega^2 , \quad (1.29)$$

oder in Kurzschreibweise:

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + k'(\omega_0) \Omega .$$

Setzt man dies in (1.28) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega_0 + \Omega) \cdot \exp i(\omega_0 t + \Omega t - k(\omega_0) z - k'(\omega_0) \Omega z) d\Omega \\ &= \exp i(\omega_0 t - k(\omega_0) z) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega_0 + \Omega) \cdot \exp i(\Omega t - k'(\omega_0) \Omega z) d\Omega \\ &= \exp(i\phi(z, t)) \cdot A(z, t) , \end{aligned} \quad (1.30)$$

also eine Welle mit Amplitude  $A$  und Phase  $\phi$ .

**Definition 1.6 (Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$ )** *Selten auch mit  $c$  bezeichnet. Damit breitet sich eine Phase – also ein bestimmter „Schwingungszustand“ – aus. Es gilt:*

$$v_{ph} = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} . \quad (1.31)$$

Stellt man sich die Welle auf dem Wellenleiter als rotierende Zeiger vor, so ist der Schwingungszustand der Winkel dieses Zeigers.

Wir betrachten nun in unserer Beispielswelle eine bestimmte Phase  $\phi_0$ ; sei also

$$\phi(z, t) \equiv \phi_0 \text{ oder } \omega_0 t - k(\omega_0) z(t) = \phi_0 \Rightarrow z(t) = -\frac{\phi_0}{k(\omega_0)} + \frac{\omega_0}{k(\omega_0)} t,$$

dann ist die eigentliche *Geschwindigkeit*, mit der sich  $\phi_0$  bewegt:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)} \stackrel{(1.18)}{=} \frac{c}{n(\omega_0)}$$

dies ist Formel (1.31) aus der Definition.

**Definition 1.7 (Dispersion)** Wenn  $v_{ph}$  wie in diesem Fall von der Frequenz bzw Wellenlänge abhängt, spricht man von Dispersion.

Auch wenn sich die einzelnen Wellen mit Phasengeschwindigkeit ausbreiten, so bedeutet das noch nichts für die Geschwindigkeit, mit der sich ein *Wellenpaket* ausbreitet; schließlich können sich die Wellen fortbewegen aber doch so moduliert sein, dass ein Maximum stets an der selben Stelle verharret, oder aber, so, dass das Maximum einer Phase vorausseilt. Man definiert deswegen:

**Definition 1.8 (Gruppengeschwindigkeit  $v_{gr}$ )** Die Geschwindigkeit mit der sich ein Wellenpaket fortbewegt. Es gilt

$$\frac{1}{v_{gr}} = \frac{1}{v_{ph}} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \text{ oder } v_{gr} = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \cdot \frac{dn}{dk}. \quad (1.32)$$

Wir betrachten nun also eine bestimmte Amplitude  $\hat{A}$  und verfolgen diese auf unserer Welle aus (1.30). Wir müssen uns dabei nur um das Argument der e-Funktion im Integral zu kümmern, nicht um die  $\Omega$ -abhängigen Terme, weil bei diesen sowieso über *alle*  $\Omega$  integriert wird (dazu klammert man im Exponenten das  $\Omega$  aus):

$$\text{Aus } \hat{A} \equiv A(z, t) \text{ folgt } t - k'(\omega_0) z(t) = \text{const}$$

und um wieder die *Geschwindigkeit* zu erhalten, mit der sich die Amplitude  $\hat{A}$  fortbewegt, löst man nach  $z$  auf und leitet ab:

$$z(t) = \frac{-\text{const}}{k'(\omega_0)} + \frac{t}{k'(\omega_0)} \text{ also } \frac{dz(t)}{dt} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}|_{\omega_0}} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega_0} \stackrel{(1.18)}{=} \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \cdot \frac{dn}{dk}.$$

Die Formel (1.32) ist dazu äquivalent.

### 1.1.5 Dispersion

Es gilt stets

$$n = n(\omega) \text{ bzw. } n = n(\lambda). \quad (1.33)$$

Die Elementarwellen, aus denen man die Wellenberge zusammensetzt, mit denen man  $v_{ph}$  bestimmt, breiten sich alle mit jeweils einer anderen Geschwindigkeit aus, weil Gl. (1.31) eine Abhängigkeit  $v_{ph}(\omega)$  angibt.

Dies ist einerseits Grundlage dafür, dass Licht bspw. in Linsen gebrochen wird, andererseits aber auch dafür, dass optische Signale in Glasfaserkabeln, die als scharfe Eck-Pulse<sup>5</sup> losgeschickt werden, nach einer Weile in „verwaschene“, glatte Kurven übergehen und so auf ihrem Weg immer wieder aufbereitet werden müssen.

Eine *Mikroskopische Erklärung* für diese Effekte kann man anhand der Bewegung von Teilchen in B- und E-Feldern geben. Eine EM-Welle richtet (elektrische) Dipole in den Atomen bzw. Molekülen neu aus oder erzeugt neue bzw. bewegt Elektronen. Es ergeben sich so schwingende Dipole.

Eine in ein Material einlaufende EM-Welle erzeugt also mit ihrem E-Feld (gemeint ist hier das E-Feld in dem Körper) eine Polarisierung  $\vec{P}$  mit

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \underbrace{(\varepsilon - 1)}_{\chi} \cdot \vec{E}_D = \eta \alpha \vec{E}_D ,$$

wobei  $\eta$  die Teilchendichte  $\eta = \frac{N}{V}$  ist (eigentlich  $n$ , dieses ist aber für die Brechzahl reserviert),  $\alpha$  die Polarisierbarkeit und  $\chi$  die elektrische Suszeptibilität. Man kann dies nun zurückführen auf „elementare“ elektrische Dipole  $\vec{p}$  mit

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\delta} = \alpha \cdot \vec{E}_D \text{ und somit } \vec{P} = \eta \vec{p} = \eta q \cdot x ,$$

wobei wir die Länge der Ladungsverschiebung aus Gewohnheit statt  $\delta$  mit  $x = x(t)$  für ihre Auslenkung aus der Ruhelage bezeichnen. Es folgt so:

$$\eta q \cdot x = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \cdot E_D \text{ mit } \varepsilon = \varepsilon(\omega), E_D = E_D(t) . \quad (1.34)$$

Das E-Feld der Welle nehmen wir sinusförmig an und  $q$  sei die Elementarladung  $e$ . Dann können wir für ein einzelnes Elektron, welches von seinem Platz durch die externe Kraft  $e \vec{E}_D$  des E-Feldes der EM-Welle ausgelenkt wird und durch eine näherungsweise lineare Kraft (dies ist in Atomen in allerallererster Näherung gegeben) zu seinem Platz zurück gezogen wird und welches von anderen Kräften im Material in der Bewegung behindert – also gedämpft – wird, die Bewegungsgleichung formulieren:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} \cdot E_0 \exp(i \omega t) . \quad (1.35)$$

Verwenden wir (1.34) nach  $x$  aufgelöst ( $x = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{1}{\eta e} E$ ) und hier eingesetzt, können wir dies umschreiben zu

$$(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{1}{\eta e} \left( \ddot{E} + \gamma \dot{E} + \omega_0^2 E \right) = -\frac{e}{m} E ,$$

und diese Formel können wir einfach nach  $\varepsilon$  auflösen:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{e^2 \eta}{m \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega} . \quad (1.36)$$

<sup>5</sup>Um einen Viereckspuls per Fourier darzustellen, braucht man unendlich viele Elementarwellen, wobei die hochfrequenten nur mit kleinerer Amplitude eingehen; bspw erzeugt

$$\frac{4a}{\pi} \sum_{k=2\mathbb{N}-1} \frac{\sin kx}{k} \text{ mit } i \in \mathbb{N}$$

einen unendlich wiederholten, alternierenden Vierecksimpuls der Höhe  $a$  und breite  $\pi$ .

Haben wir nicht nur eine Teilchensorte, sondern mehrere, dann müssen wir die Gleichung leicht anpassen; diese Lösung soll für jede Teilchensorte einzeln gelten – dann aber mit entsprechenden Werten für  $n$  und  $\gamma$  usw. und so können wir aufsummieren:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{e^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{\eta_j}{\omega_{0j}^2 - \omega_j^2 + i\gamma_j \omega_j} .$$

Dieser Term für  $\varepsilon$  ist offensichtlich komplex. Wie in (1.15) definiert, ist  $n = \sqrt{\varepsilon}$ . Bekanntermaßen gilt bspw für Gase:  $\varepsilon \approx 1$ . Wir wollen jetzt annehmen, dass es sich um ein solches Material handelt – also um ein *durchsichtiges*. Wegen  $1 = \sqrt{1}$  wird der Brechungsindex ungefähr bei 1 liegen. Betrachten wir

$$\varepsilon - 1 = n^2 - 1$$

und bilden die Taylorentwicklung für  $n$  um  $n_0 = 1$ , dann erhalten wir

$$n^2 - 1 = 2(n - 1) + (n - 1)^2 \text{ und damit } n^2 - 1 = \varepsilon - 1 \approx 2(n - 1) . \quad (1.37)$$

Lösen wir dies nach  $n$  auf und setzen für  $\varepsilon$  Gl. (1.36) ein, so erhalten wir für das komplexe  $n \approx \frac{1}{2}(\varepsilon - 1) + 1$ :

$$\Re n = 1 + \frac{e^2 \eta}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \text{ und } \Im n = \frac{e^2 \eta}{2m\varepsilon_0} \frac{-\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} . \quad (1.38)$$

Diesen beiden Teilen kann man eine physikalische Bedeutung zuordnen; dazu betrachten wir den E-Teil einer ebene EM-Welle gem. (1.16). Über die Dispersionsrelation (1.18) können wir für die Wellenzahl  $k$  setzen:

$$k = \frac{\omega}{c} \Re n + i \frac{\omega}{c} \Im n .$$

In der Wellengleichung sieht das dann aus. Zur Besseren Anschaulichkeit wurde der Exponent von  $e$  mit dem Faktor  $(-1)$  multipliziert:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \vec{E}_0 \exp i \left( -\omega t + \frac{\omega \Re n}{c} z + \frac{\omega \Im n}{c} z \right) \\ &= \underbrace{\vec{E}_0 e^{-\frac{\omega \Im n}{c} z}}_{\text{Amplitude}} \cdot \exp i \left( -\omega t + \frac{\omega \Re n}{c} z \right) . \end{aligned}$$

Hier sieht man, dass in der Amplitude kein konstanter Term mehr steht, sondern eine Exponentialfunktion, die von  $z$  abhängt und *abklingt*<sup>7</sup>. Dieses Phänomen wird auch **Extinktion** genannt:

<sup>6</sup>Physikalisch macht das keinen Unterschied: Stellt man sich  $\vec{E}$  als rotierenden Zeiger vor, so hat dieser nun lediglich seine *Drehrichtung* geändert. Weiter sollte man bedenken, dass der komplexe Ansatz lediglich eine elegante mathematische Methode ist, um die Differenzialgleichungen (1.12) und (1.13) zu lösen; hierbei macht unsere kleine Modifikation ebenfalls keinen Unterschied – es ist also kein „fauler Rechentrick“ der hier vorgeführt wird, sondern vielmehr verwenden wir hier einmal eine genauso korrekte Wellendarstellung in einer weniger gebräuchlichen Form.

<sup>7</sup>Hier muss wieder die Physik beachtet werden: Eine Welle kann durch Dämpfung Energie an die Umwelt abgeben; es ist aber sehr unwahrscheinlich, dass sie aus der Umwelt durch eine „Antidämpfung“ Energie mit dieser Rate aufnimmt; auch deshalb handelt es sich hier wirklich um eine Dämpfung



**Definition 1.9 (Extinktionskoeffizient  $\Im n = n'' = \frac{n}{k}$ )** Der Imaginärteil des Brechungsindex  $n$  beschreibt, wie stark die Amplitude einer Elektromagnetischen Welle in dem Material exponentiell fällt.

→ Wir wollen hier den Realteil  $\Re n$  mit  $\Re n = \frac{n}{k}$  bezeichnen. ←

Die beobachtbaren Effekte der Extinktion sind logischerweise eine Veränderung der Intensität. Nach (1.24) gilt für eine Welle, die die Strecke  $L$  in einem Medium mit Extinktionskoeffizient  $\frac{n}{k}$  zurückgelegt hat und die vorher die Intensität  $I_0$  hatte:

$$I_0 \propto \langle \|E_0\|^2 \rangle \text{ und } I(L) \propto \langle \|E_0\|^2 \exp(-2 \underbrace{\frac{\omega \frac{n}{k}}{c}}_{\alpha} L) \rangle \text{ also } I(L) = I_0 e^{-\alpha L} . \quad (1.39)$$

<sup>8</sup>Der Faktor  $\alpha = 4\pi \frac{n}{k} / \lambda$  wird sinnvollerweise<sup>9</sup> auch als **Extinktionskoeffizient** angegeben. Damit definiert man die **Transmission** (auch Extinktion genannt) nach LAMBERT-BEER als die Zahl  $\tau$  oder  $E_\lambda$  mit

$$\tau = E_\lambda = -\lg \frac{I(L)}{I_0} = \tilde{\alpha} \cdot c^{\text{konz}} \cdot L , \quad (1.40)$$

wobei  $\tilde{\alpha}$  dem  $\alpha$  entspricht, nur dass es für die Verwendung mit *dekadischen* Logarithmen<sup>10</sup> und den hier verwendeten Einheiten umgerechnet wird.  $c^{\text{konz}}$  ist die (molare) Konzentration des absorbierenden Stoffes in einer Flüssigkeit.

→ In diesem Script ist bei „Extinktionskoeffizient“ von  $\frac{n}{k} = \Im n$  die Rede und „Extinktion“ beschreibt den *Vorgang*, bei dem die Welle abgeschwächt wird. ←

Der Begriff „**Optische Dichte**“ ist so auch durch einen Zahlenwert definiert: Stellt man  $I(L)$  in der Form

$$I(L) = I_0 \cdot 10^{-\bar{\alpha} C L}$$

dar, dann heißt der Exponent  $\bar{\alpha} C$  „Optische Dichte“. Man sieht so: Die Optische Dichte eines Materials ist umso höher, je stärker es absorbiert.

Wir wollen nun auch verschiedene *Mechanismen der Absorption* kennen lernen. Grundgedanke ist dabei, dass in dem Materialien Teilchen sitzen, die sich von den EM-Wellen zu Schwingungen antreiben lassen – und diese Schwingungen nehmen Energie von der EM-Welle auf.

Für hohe Frequenzen (Wellenlänge im UV-Bereich) werden dabei Elektronen zu Schwingungen angeregt. Bei tieferen Frequenzen werden dann die Bindungen zwischen den Atomen angeregt und bei noch tieferen schwingen die einzelnen größeren Moleküle gegeneinander oder werden sogar in Rotation versetzt.

Jeder dieser Schwingungsvorgänge hat eine eigene charakteristische Resonanzfrequenz  $\omega_r$ . In (1.38) hatten wir das dort vorkommende  $\omega_0$  stillschweigend

<sup>8</sup>Der Faktor 2 im Exponenten kommt, weil  $I \propto \|E^2\|$  ist; also muss auch der e-Teil mit 2 potenziert werden.

<sup>9</sup>Ironie

<sup>10</sup>Es ist  $\lg(a) = \frac{\ln a}{\ln 10}$

schon als eine solche Resonanzfrequenz angesehen – vergleiche mit (1.35). Damit können wir also (1.38) zur Diskussion des Kurvenverlaufs verwenden. Siehe Abb. 1.1. Wir finden: (a)  $\Re n$  wird bei Resonanzfrequenz 1, also wird Licht hier nicht im Sinne von Brechung beeinflusst, dafür ist hier  $\Im n$  (betragsmäßig) maximal: Es wird also maximal viel Intensität absorbiert: Das Material wird maximal angeregt und die Schwingung der Teilchen kann so maximal viel Energie aus der Welle ziehen. (b) Um  $\omega_r$  ist  $\frac{d\Re n}{d\omega} < 0$ , also  $\frac{d\Re n}{d\lambda} > 0$ . Setzt man dies in (1.32) ein, so sieht man hier, dass  $v_{gr} > c$  werden kann; dies nennt man **Anormale Dispersion**. Damit hier EINSTEINS Postulat nicht verletzt wird, ist die Signalausbreitungsgeschwindigkeit nicht länger an  $v_{gr}$  gekoppelt, sondern an  $v_{ph}$ .<sup>11</sup> Im sichtbaren Bereich haben wir bei praktisch allen bekannten Medien **normale Dispersion**.

In Abb. 1.2 ist der Reale Verlauf (eines gedachten Stoffes) von  $\Re n(\omega)$  schemenhaft skizziert und es ist vermerkt, welche Prozesse an den entsprechenden Stellen zu Absorption o.ä. führen.

**Wichtig! 7** Große Änderungen von  $\Re n$  bezüglich  $\omega$  (bzw.  $\lambda$ ) sind immer mit großen Absorptionen verbunden (und anders herum).

In transparenten Materialien ist  $\Re n > \Im n$ ; die Absorption ist weniger ausgeprägt.

Diese Peaks sind recht scharf (also relativ genau einer bestimmten Frequenz zuzuordnen). Die Struktur der Peaks ist eine Art Charakterisierung des entsprechenden Materials und kann damit zur **Identifikation** desselben dienen: Die Absorption wird in Abhängigkeit der Wellenlänge getestet.

### 1.1.6 Im Elektronengas

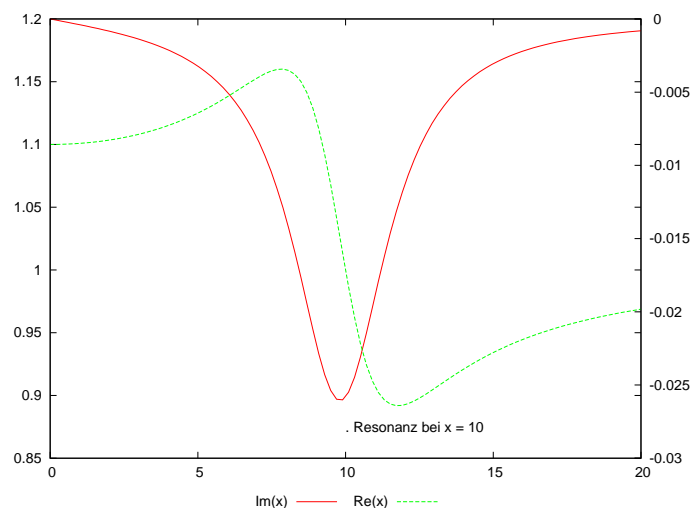
Im vorangehenden Kapitel hatten die Elektronen feste Plätze in den Molekülen, um die sie Schwingungen ausführen konnten. Wir wollen nun untersuchen, was passiert, wenn wir ein Metall betrachten – in diesem können sich die Elektronen schließlich (zumindest ein guter Teil der Elektronen) quasi<sup>12</sup> frei bewegen. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem *Elektronengas*, weil die Elektronen in ihrer Geschwindigkeitsverteilung der Boltzmann-Verteilung gehorchen, eben wie die Teilchen eines idealen Gases das tun. Die Elektronen stoßen und streuen untereinander wenig, sondern hauptsächlich mit den Atomrümpfen.

Die Näherung freier, unabhängiger Elektronen ist für ideale Metalle gut erfüllt – jedoch folgen die Elektronen hier der Boltzmann-Verteilung nicht. Dagegen gilt die Boltzmann-Verteilung für einige bestimmte Metalle wie dotierte Halbleiter und Halbmetalle (was nichts für die freien Elektronen heißt ...).

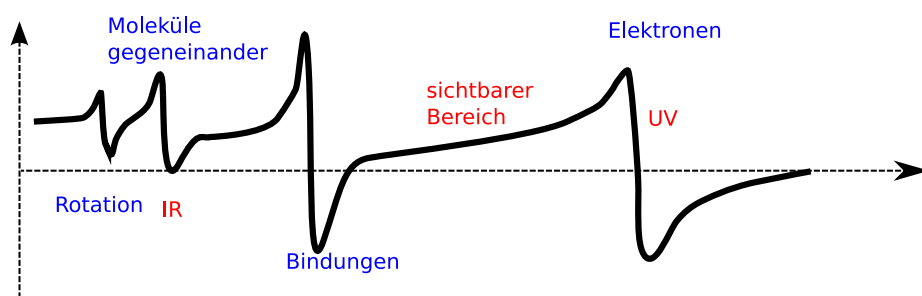
**Wichtig! 8** Unsere Näherungen sind für Metalle möglicherweise weniger geeignet – dafür aber für Plasmen.

<sup>11</sup>Lt. Wikipedia („Dispersion“, Englisch) ist es sogar gelungen, Gase zu erzeugen, in der die Gruppengeschwindigkeit nicht nur größer als die Lichtgeschwindigkeit ist, sondern negativ. In diesen Fällen kann es so aussehen, als würde ein Lichtpuls das Medium verlassen, bevor er es betreten hatte. Trotzdem bewegt sich ein Signal auch in solchen Fällen mit (weniger als) der Lichtgeschwindigkeit.

<sup>12</sup>Sie erfahren vergleichsweise wenig Störungen.



**Abbildung 1.1:** Verlauf von  $\Re n$  und  $\Im n$  im Modell aus (1.38) –  $\omega_0 = 10$ . Achtung: Der Imaginärteil ist auf der rechten  $y$ -Achse abgetragen, der Realteil auf der linken.



**Abbildung 1.2:** Brechzahl gegen Frequenz aufgetragen:  $\Re n(\omega)$  gegen  $\omega$  (Modell). In blau: Was absorbiert hier besonders, in rot: Welche Wellen das sind.

**Definition 1.10 (Plasma)** *Ein Gas, welches zu großen Teilen aus freien Ladungsträgern (Ionen, Elektronen) besteht; die Summe der Ladungen verschwindet. „Plasma“ wird auch als „4. Aggregatzustand“ bezeichnet.*

Durch ein angelegtes E-Feld werden die Elektronen sofort durch die Coulombkraft

$$F = e E = m a \equiv \text{const}$$

beschleunigt,<sup>13</sup> gleichzeitig aber durch Stöße mit Atomrümpfen wieder abgebremst: Es stellt sich eine Gleichgewichtsverteilung der Geschwindigkeiten ein. Die mittlere Geschwindigkeit (auch „Driftgeschwindigkeit“ genannt), bzw. der mittlere Impuls der Elektronen  $\langle p \rangle$  ist (in unserem Modell) wegen  $F \propto E$  auch proportional zu  $E$ :

$$\langle p \rangle \propto E .$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich der Mittlere Impuls  $\langle p \rangle$  ändert, wenn man das konstante E-Feld anlegt. Mit  $\tau$  bezeichnet man die mittlere Stoßzeit (auch „Relaxationszeit“ genannt: Dies ist die Dauer, die zwischen zwei Stößen von Elektronen gegen einen Atomrumpf liegt).

Stößt das Teilchen gegen einen Atomrumpf, so geht sein Impuls in irgendeine Richtung: Jede ist gleichberechtigt. Betrachtet man also viele Stöße, so wird sich als Mittelimpuls nach einem Stoß (wenn man Vektoradditionen zugrunde legt)  $\langle p \rangle = 0$  ergeben – wir wollen unsere Untersuchung ja auf das Gros der Elektronen beziehen.

Während der Zeit  $\tau$  bewegt sich nun das Elektron gleichmäßig beschleunigt. Damit gilt wegen

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = F = e E \text{ auch: } \frac{d}{dt} \langle p \rangle \cdot \tau = e E \cdot \tau ,$$

und weil der Anfangsimpuls verschwindet, ist der Impuls nach  $\tau$ :

$$\langle p \rangle = e E \tau . \quad (1.41)$$

→ Eine *elegantere*<sup>14</sup> Herleitung für (1.41) ist die folgende: Wir betrachten  $\langle p(t) \rangle$  zu den beiden Zeiten  $t = t_0$  und  $t = t_0 + dt$ . Für den Zeitpunkt  $t_0 + dt$  gehen wir davon aus, dass der Anteil  $(1 - dt/\tau)$  (das  $\tau$  ist das selbe wie oben) der Elektronen noch nicht gestoßen hat. Da die Elektronen, die kürzlich gestoßen haben, keine einheitliche Richtung haben, haben sie in der Summe keinen großen Impuls; sie dürfen bei der Berechnung von  $\langle p(t_0 + dt) \rangle$  weggelassen werden.

Bei den noch nicht gestoßenen Elektronen addiert sich zum Impuls  $\langle p(t_0) \rangle$  noch die Größe  $e E dt$  – s.o.. Damit hat man also:

$$\langle p(t_0 + dt) \rangle = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \cdot (\langle p(t_0) \rangle + e E dt) .$$

<sup>13</sup>Eigentlich kann ein E-Feld nicht in Metalle eindringen, eben wegen der beweglichkeit der Elektronen, die sich sofort so verschieben lassen, dass sie das angelegte E-Feld ausgleichen. Hier betrachten wir aber einen Mikroskopischen Fall; uns interessiert ebendiese Auslenkung der Elektronen. Die hier betrachteten Effekte gelten somit nur für den Rand des Metalles.

<sup>14</sup>Trotzdem nicht taufrische

Dies kann man auflösen, wenn man  $p(t_0 + dt) = p(t_0) + \dot{p}(t_0) dt$  setzt, die Klammer auflöst,  $dt$  kürzt und weitere Terme mit  $dt$  vernachlässigt. Es ergibt sich dann:

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = e E - \frac{1}{\tau}\langle p \rangle . \quad (1.42)$$

Weil sich ein Gleichgewicht zwischen Beschleunigen und Abbremsen durch Kollision mit Kernen einstellt, soll gelten:  $\langle p \rangle = 0$ , und daraus folgt (1.41).  $\leftarrow$

Bekanntermaßen genügt die **Stromdichte**  $j$  der Relation

$$\vec{j} = \varrho \vec{v} = e \eta \vec{v} \text{ bzw. } j = e \eta v . \quad (1.43)$$

Hier ist  $\eta$  wieder die Teilchendichte, um Verwechselungen mit der Brechzahl  $n$  zu vermeiden. Setzen wir hier (1.41) ein, erhalten wir

$$j = e \eta \frac{p}{m} = \frac{\eta e^2 E \tau}{m} \quad (1.44)$$

und so auch die Leitfähigkeit  $\sigma$ , die Definiert ist über

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.45)$$

zu (um Verwechselungen zu vermeiden nennen wir diese reelle Leitfähigkeit  $\bar{\sigma}$ ):

$$\bar{\sigma} = \frac{j}{E} = \frac{\eta e \cdot p}{m} = \frac{\eta e^2 \tau}{m} . \quad (1.46)$$

Wir wollen nun ein sich zeitlich änderndes E-Feld der Bauart

$$E = E_0 \exp i \omega t$$

betrachten. Wegen  $p \propto E$  folgt so für den Impuls der Elektronen:

$$p = p_0 \exp i \omega t \text{ und somit } \dot{p} = i \omega p .$$

Setzt man dies in (1.42) ein, kann man nach  $p$  auflösen und erhält:

$$\dot{p} = i \omega p = e E - \frac{1}{\tau} p \Rightarrow p = \frac{e E}{i \omega + 1/\tau} . \quad (1.47)$$

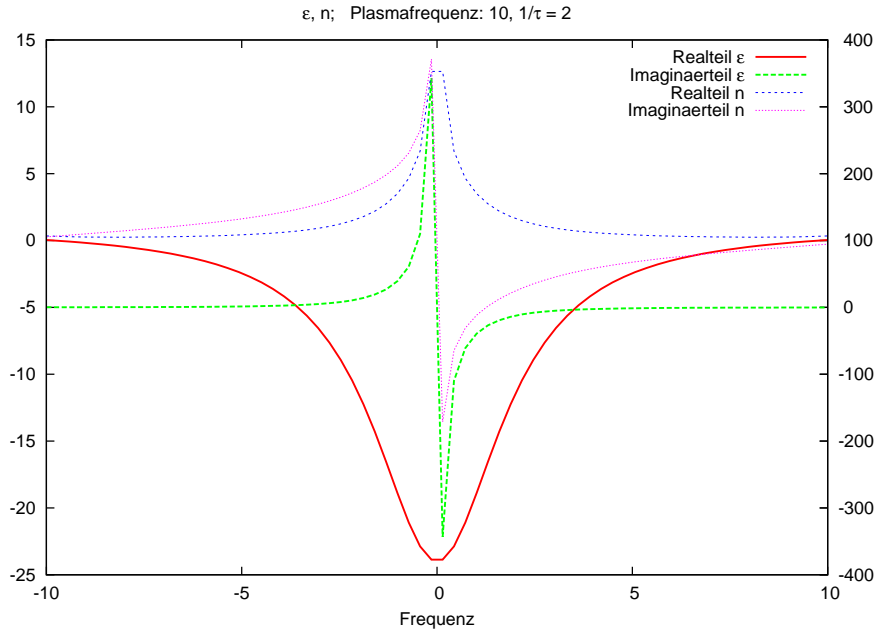
Setzt man dies nun wieder in die Gleichungen für die Stromdichte  $j$  und die Leitfähigkeit  $\sigma$  ein, so erhält man schnell

$$j = \frac{e \eta p}{m} \Rightarrow \sigma = \frac{e^2 \eta E}{(i \omega + 1/\tau) m E} \stackrel{\cdot \tau}{=} \frac{e^2 \eta \tau}{(1 + i \omega \tau) m} \stackrel{(1.46)}{=} \boxed{\frac{\bar{\sigma}}{1 + i \omega \tau} = \sigma} . \quad (1.48)$$

**Wichtig! 9** Die Leitfähigkeit  $\sigma$  ist eine komplexe Größe.

Nun kann man noch über die Suszeptibilität die Dielektrizitätszahl  $\varepsilon$  bestimmen. Dazu verwendet man die aus Kap. 1.1.5 bekannte Formel

$$P = \eta e x = \frac{\eta e p}{i \omega m} = \varepsilon_0 \underbrace{(\varepsilon - 1)}_x E ,$$



**Abbildung 1.3:**  $\varepsilon(\omega)$  und  $n(\omega)$  nach Gl. (1.50). Achtung:  $\Im \varepsilon$  ist auf der  $y - 2$ -Achse aufgetragen!

wobei  $x$  die Auslenkung der Elektronen ist; die Identität oben gilt wegen

$$m\dot{x} = p \Rightarrow mx = \frac{p}{i\omega}.$$

Setzt man für  $p$  den Ausdruck (1.47) ein, kann man  $E$  kürzen und findet so

$$\chi = \varepsilon - 1 = \frac{\eta e^2}{m \varepsilon_0 (-\omega^2 + i\omega/\tau)} =: -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i/\tau)} \text{ mit } \omega_p = \sqrt{\frac{\eta e^2}{m \varepsilon_0}}. \quad (1.49)$$

Hier haben wir mit  $\omega_p$  die Plasmafrequenz eingeführt (s.u.). Wir können nach  $\varepsilon$  auflösen und erhalten:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i/\tau)}}. \quad (1.50)$$

Siehe dazu Abb. 1.3. Hier sind auch negative Frequenzen aufgetragen, was eigentlich keinen Sinn macht. Das liegt daran, dass in unserer Herleitung in Kap. 1.1.5 schon eine Näherung gemacht wurde, dass wir uns um einen bestimmten Bereich  $\omega_0$  bewegen – im Falle von Abb. 1.3 ist  $\omega_0 = 0$ . Vergleiche für den Kurvenverlauf auch Abb. 1.2.

Legt man an ein Plasma ein wechselndes E-Feld (bspw. EM-Welle) an, so schwingen die Elektronen wg. niedriger Trägheit schnell hin und her, die Ionen dagegen langsam. Es verschieben sich also permanent die negativen gegen die positiven Ladungen um die Strecke  $x$ . Damit erfahren die Elektronen eine Coulombkraft, die sie zu den Ionen zieht.

Die Stärke dieser Kraft kann man dadurch annähern, dass man sich die Ränder des Plasmas anschaut: Durch die Ladungsverschiebung „positiv gegen negativ“ stellt sich hier die Polarisierung  $P = \eta e x$  ein, welche ein Inneres E-Feld der Stärke<sup>15</sup>

$$E_i = \frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{\eta e}{\varepsilon_0} x \text{ und damit } F_i = e E_i = \frac{\eta e^2}{\varepsilon_0} x$$

erzeugt.

Die Bewegung der Elektronen lässt sich damit beschreiben durch

$$m \ddot{x} = -F_i = -e E_i = \underbrace{\frac{\eta e^2}{\varepsilon_0}}_{m \omega_p^2} x .$$

**Definition 1.11 (Plasmafrequenz  $\omega_p$ )** Die Frequenz, mit der in einem Plasma die negativen Ladungen gegenüber den positiven (harmonisch) schwingen. Nach (1.49) gilt:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\eta e^2}{m \varepsilon_0}}$$

Gl (1.49) ist für uns deshalb von Bedeutung, weil man hier einen Ausdruck für das komplexe  $\varepsilon(\omega)$  bekommt und so wegen  $\varepsilon = n^2$  auch einen Ausdruck für den Brechungsindex.

Man sieht hier, dass sich (1.50) für  $1/\tau \ll \omega_p^2$  (was in Realität für Metalle gegeben ist) für  $\omega$ s nahe an  $\omega_p$  vereinfachen lässt zu

$$\varepsilon = 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 . \quad (1.51)$$

Vergleiche dazu Abb. 1.6; hier sieht man bei  $1/\tau$  (oder zumindest in der Nähe) einen Wendepunkt; vorher und nachher verhält sich die Kurve verschieden...

### 1.1.7 Brechung an ebenen Grenzflächen

Um das Verhalten von EM-Wellen an Grenzflächen zu untersuchen, benötigen wir die Maxwellgleichungen in Materie – in der Integralform. Wir nehmen hierzu an, dass wir uns in einem isotropen Medium befinden ( $\varepsilon$  und  $\mu$  sind skalar) und erhalten so mit den Sätzen von GAUSS und STOKES aus den Gl. (1.1) bis (1.4)

<sup>15</sup>Vergleiche dazu

$$E_D = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} :$$

Hier ist  $E_0$  das angelegte E-Feld,  $E_D$  das, was man in der Materie „wahrnimmt“ und die Differenz  $P/\varepsilon_0$  wird durch diese Polarisierung beigesteuert.

mit den Definitionen (1.5) und (1.6):

$$\oint (\varepsilon \vec{E}) d\vec{A} = 0 \quad (\text{f1.4})$$

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (\text{f1.2})$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{A} \quad (\text{f1.1})$$

$$\oint \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}\right) d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int \varepsilon \vec{E} d\vec{A}. \quad (\text{f1.3})$$

Wir wollen nun eine Grenzfläche untersuchen, auf die eine EM-Welle trifft. Dazu zerlegen wir von der EM-Welle E- und B-Feld in je eine Komponente  $\vec{E}_s$ , die *senkrecht zur Grenzfläche* steht und eine Komponente  $\vec{E}_p$ , die *parallel zur Grenzfläche* ist. Da wir eine lineare Theorie vorliegen haben, müssen die Maxwellgleichungen für die Komponenten gelten. Es gilt dabei zu beachten, dass die Grenzfläche dadurch charakterisiert ist, dass auf ihren beiden Seiten verschiedene  $\varepsilon$  und  $\mu$  „herrschen“.

Wir untersuchen nun die *Senkrechtkomponente*  $\vec{E}_s$  an der Grenzfläche. Dazu wollen wir (f1.4) verwenden. Das  $\oint$  bedeutet, dass wir uns ein Volumen suchen müssen, über dessen – geschlossene – Oberfläche wir integrieren wollen. Wir wählen dazu ein kastenförmiges Volumen, welches Parallel der Grenzfläche auf beiden seiten das volumen  $\mathcal{A}$  hat und senkrecht zur Grenzfläche die Länge  $\ell$ . Integrieren wir nun über  $d\vec{A}$ , erhalten wir über den Flächen  $\mathcal{A}$  endliche Integrale, weil hier

$$d\vec{A} \parallel \varepsilon \vec{E}_s \Rightarrow \varepsilon \vec{E}_s \cdot d\vec{A} = \varepsilon E_s dA.$$

**Wichtig! 10** Dies dürfen wir nur folgern, weil  $\varepsilon$  als (linearer) Skalar angenommen wird. In Anisotropen Medien ist  $\varepsilon \vec{E} \nparallel \vec{E}$ .

An den „Seitenflächen“ dagegen gilt

$$\vec{A} \perp \varepsilon \vec{E}_s \Rightarrow \varepsilon \vec{E}_s \cdot d\vec{A} = 0.$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\int_{\mathcal{A}} \varepsilon^1 E_s^1 dA + \int_{\mathcal{A}} \varepsilon^2 (-E_s^2) dA \stackrel{(\text{f1.4})}{=} 0 \Rightarrow \varepsilon^1 E_s^1 = \varepsilon^2 E_s^2 \quad (\text{1.52})$$

wobei die hochgestellten Indices für die entsprechende Seite der Grenzfläche stehen.

**Wichtig! 11**  $(\varepsilon \vec{E}_s)$  ist an der Grenzfläche stetig.

Genau analog kann man mit Gl. (f1.2) argumentieren:

**Wichtig! 12**  $\vec{B}_s$  ist an der Grenzfläche stetig.

Nun wollen wir das Verhalten der *Parall-Komponenten* untersuchen – wieder am Beispiel des E-Felds. Dazu betrachten wir Gl. (f1.1). Wir wissen bereits aus



1.1.1, dass E- und B-Feld (und in unserem Falle also auch D- und H-Feld) senkrecht jeweils aufeinander und beide senkrecht zur Ausbreitungsrichtung liegen. Da unsere EM-Welle die Grenzfläche *durchqueren* soll, brauchen wir in dieser Konstruktion folglich einen Wellenvektor  $\vec{k}$ , welcher senkrecht auf der Grenzfläche steht. Damit können wir auch folgern, dass  $\vec{E}_p$  und das zugehörige  $\vec{B}_p$  bzw.  $\frac{1}{\mu}\vec{B}_p$  beide parallel der Grenzfläche liegen.

Wir untersuchen nun als Integrationsweg den geschlossenen rechteckigen Weg um  $\vec{E}_p$ , welcher auf zwei Seiten parallel zu  $\vec{E}_p$  liegt und auf den beiden anderen senkrecht zu  $\vec{E}_p$  liegt. Weil der Normalenvektor dieser Fläche Senkrecht auf der Fläche, damit senkrecht zur Grenzfläche und damit senkrecht auf  $\frac{1}{\mu}\vec{B}_p$  liegt, verschwindet in ( $\int 1.1$ ) der rechte Teil des Integrals. Auf der linken Seite verschwinden die beiden Komponenten des Wegintegrals, bei dem senkrecht zu  $\vec{E}_p$  integriert wird wegen

$$d\vec{s} \perp \vec{E}_p \Rightarrow \vec{E}_p \cdot d\vec{s} = 0$$

und dafür gilt für die parallelen Wegstücke

$$d\vec{s} \parallel \vec{E}_p \Rightarrow \vec{E}_p \cdot d\vec{s} = E_p ds.$$

Weil der Integrationsweg in der Grenzfläche liegt, ist er in beiden Medien (also auf beiden Seiten der Grenzfläche) gleich groß und damit folgt

$$\int_s E_p^1 ds = \int_s E_p^2 ds \Rightarrow E_p^1 = E_p^2. \quad (1.53)$$

Und mit anderen Worten:

**Wichtig! 13**  $\vec{E}_p$  ist an der Grenzfläche stetig.

Analog kann man wieder für  $(\frac{1}{\mu}\vec{B}_p)$  folgern und erhält so

**Wichtig! 14**  $(\frac{1}{\mu}\vec{B}_p)$  ist an der Grenzfläche stetig.

Man kann dies zusammenfassen:

**Wichtig! 15** Die Tangentialkomponente von E- und H-Feld und die Normalkomponente von D- und B-Feld sind stetig.

→ **Merkhilfe:** D und B sind runde Buchstaben wie „o“ in Normalkomponente; E und H haben keine Rundungen – wie „T“ in Tangentialkomponente.  
←

Nachdem wir diese Grundlagen gelegt haben, ist die eigentliche *Untersuchung von EM-Wellen an Grenzflächen* einfacher. Läuft eine Welle auf eine Grenzfläche ein, so bildet sie zusammen mit dem Lot zur Grenzfläche am Auftreffpunkt eine Ebene, die sog. „Einfallsebene“.

Wichtig ist: Dies macht nur Aussagen über den Wellenvektor  $\vec{k}$ ! Wo und wie  $\vec{E}$  liegt, müssen wir in getrennten Fällen untersuchen:

**$\sigma$ -Fall**  $\vec{E}$  steht senkrecht auf der Einfallsebene und somit liegt  $\vec{B}$  in der Einfallsebene.

**$\pi$ -Fall**  $\vec{E}$  liegt in der Einfallsebene und folglich  $\vec{B}$  senkrecht zur Einfallsebene.

→ Mit hochgestellten Indices sollen die einfallende, die transmittierte und die reflektierte Welle gekennzeichnet werden. ←

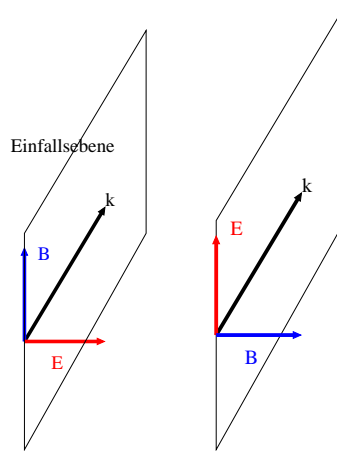


Abbildung 1.4: Links:  $\sigma$ -Fall, rechts:  $\pi$ -Fall

#### 1.1.7.1 Frequenz

Doch zuerst wollen wir uns allgemein anschauen, was mit der Frequenz beim Grenzflächenübergang passiert. Dazu nehmen wir an, dass  $\vec{E}$  parallel zur Grenzfläche steht.<sup>16</sup> Dazu setzen wir den Energieerhaltungssatz an: Die Welle  $\vec{E}^e$  wird eigentlich nur „aufgeteilt“ in  $\vec{E}^t$  und  $\vec{E}^r$ ; also muss gelten:

$$\vec{E}^e = \vec{E}^t + \vec{E}^r . \quad (1.54)$$

Nun setzen wir hierfür eine Wellengleichung wie (1.16) ein, und erhalten:

$$E_0^e \exp i(\vec{k}^e \vec{r} - \omega^e t) = E_0^t \exp i(\vec{k}^t \vec{r} - \omega^t t) + E_0^r \exp i(\vec{k}^r \vec{r} - \omega^r t) . \quad (1.55)$$

Damit dies an allen Zeiten und allen Orten gleichermaßen erfüllt ist, müssen die Argumente des exp sich „gleichphasig“ verhalten; also

$$\vec{k}^e \vec{r} - \omega^e t = \vec{k}^t \vec{r} - \omega^t t = \vec{k}^r \vec{r} - \omega^r t .$$

Da dies für alle Zeiten und alle Orte Gelten muss, findet man für  $\vec{r} = \vec{0}$  und beliebiges  $t$  den allgemein gültigen Zusammenhang:

**Wichtig! 16** Beim Grenzflächenübergang ändert sich die Frequenz nicht:

$$\boxed{\omega^e = \omega^t = \omega^r =: \omega} . \quad (1.56)$$

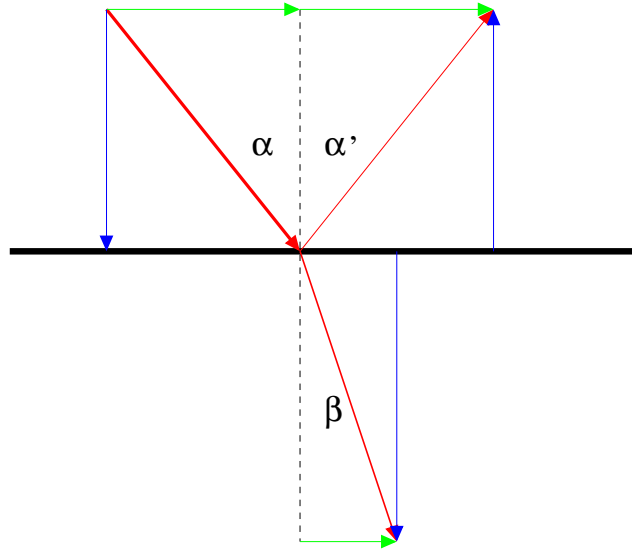
#### 1.1.7.2 Brechungsgesetz

Weil  $\vec{k}$  nach Definition in der Brechungsebene liegt, kann man  $\vec{k}$  stets zerlegen in

$$\vec{k} = \vec{k}_s + \vec{k}_p = s \vec{e}_s + p \vec{e}_p = \vec{p} + \vec{s} .$$

Im weiteren seien  $\vec{e}_s$  und  $\vec{e}_p$  normiert.

<sup>16</sup> Dann wissen wir, dass  $\vec{E}$  beim Übergang stetig ist.



**Abbildung 1.5:** EM-Welle beim Übergang an einer Grenzfläche:  $\vec{k}$  ist rot,  $\vec{k}_p$  ist grün und  $\vec{k}_s$  ist blau.

Beschreibt man eine einlaufende Welle nach (1.16), so kann man  $\vec{r}$  getrost auch als Linearkombination

$$\vec{r} = \vec{p} + \vec{s}$$

schreiben, weil wenn  $\vec{r}$  mit  $\vec{k}$  skalar multipliziert wird, sowieso nur diese Terme überleben. Indem wir also alle Punkte innerhalb der Brechungsebene betrachten (also alle aus  $\text{span}(\vec{p}, \vec{s})$ ), untersuchen wir auch alle anderen Punkte, weil diese in der Darstellung von  $\vec{E}$  eine Entsprechung finden.<sup>17</sup> Außerdem betrachten wir nur den Räumlichen Teil, weil wir den Zeitabhängigen Teil ( $\exp(-i\omega t)$ ) „ausklammern“ können und kürzen können.

Für die Komponenten  $E_p$  (für die Stetigkeit an der Grenzfläche gilt) folgt so bei  $\vec{s} = \vec{0}$  (mit  $\vec{p} = p\vec{e}_p$ )

$$E^e \exp ipk_p^e + E^r \exp ipk_p^r = E^t \exp ipk_p^t,$$

und damit diese Gleichung wieder für alle  $p$  gilt, müssen die Argumente von  $\exp$  wieder gleich sein; es folgt so

$$k_p^e = k_p^r = k_p^t. \quad (1.57)$$

Aus Abb. 1.5 ist ersichtlich, dass (wegen  $\|\vec{k}\| := 1$ ) der Zusammenhang

$$\vec{k} = \vec{k}_p \sin \alpha + \vec{k}_s \cos \alpha \quad (1.58)$$

<sup>17</sup>Sei  $\vec{r} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{s} + \gamma\vec{u}$  mit  $\vec{u} \neq \text{span}(\vec{p}, \vec{s})$ , dann ist

$$\langle \vec{k} | \vec{r} \rangle = \langle \vec{k}_s | \vec{r} \rangle + \langle \vec{k}_p | \vec{r} \rangle = \langle \vec{k}_s | \beta\vec{s} \rangle + \langle \vec{k}_p | \alpha\vec{p} \rangle$$

gilt, und so folgt mit der Dispersionsrelation (1.18) und (1.56):

$$\boxed{\frac{n^e \omega}{c} \sin \alpha = \frac{n^r \omega}{c} \sin \alpha' = \frac{n^t \omega}{c} \sin \beta} \quad (1.59)$$

**Wichtig! 17 (Snelliussches Brechungsgesetz)** *Einfalls- und Ausfallswinkel sind identisch.*

*Für die Brechung in ein anderes Medium gilt mit den Lotwinkeln  $\theta^i$  und den Brechungsindices  $n^i$ :*

$$n^i \sin \theta^i = n^j \sin \theta^j$$

*Mit diesem Zusammenhang kann man nur dann die Brechungswinkel bestimmen, wenn die  $n^i$  (weitgehend) reell sind!*

### 1.1.7.3 $\sigma$ -Fall

Das E-Feld steht senkrecht auf der Einfallsebene – und ist damit stets *parallel zur Grenzfläche* ( $\vec{E} = \vec{E}_p$ ), das B-Feld liegt in der Einfallsebene. Aus unseren Untersuchungen mit den Maxwell-Gleichungen wissen wir, dass  $\vec{E}_p = \vec{E}$  an der Grenzfläche stetig ist. Es gilt hier also einfach

$$E^e + E^r = E^t. \quad (1.60)$$

Um  $\vec{B}$  zu betrachten, verwenden wir (1.20) und (1.56). Weil von  $\vec{B}$  nur der Teil senkrecht zur Grenzfläche stetig ist, müssen wir dem anderen Teil Beachtung schenken; es gilt

$$B_p^e + B_p^r = B_p^t \Rightarrow (\vec{k}^e \times \vec{E}^e)_p + (\vec{k}^r \times \vec{E}^r)_p = (\vec{k}^t \times \vec{E}^t)_p.$$

Für diese Parallelkomponenten müssen wir, weil  $\vec{E}$  senkrecht dazu stehen soll, nur die Komponenten von  $\vec{k}$  normal zur Grenzfläche betrachten:

$$(\vec{k}^e \times \vec{E}^e)_p = k_s^e \cdot E_p^e = B_p^e;$$

diese drei Vektoren bilden ein orthogonales Dreiein. Es folgt so (wegen  $\vec{E}_p = \vec{E}$ )

$$k_s^e \cdot E^e + k_s^r \cdot E^r = k_s^t \cdot E^t.$$

Setzt man nun noch  $k_s^e = -k_s^r$  – also Einfallswinkel = Ausfallswinkel<sup>18</sup> –, dann erhält man

$$E^e - E^r = \frac{k_s^t}{k_s^e} E^t. \quad (1.61)$$

Zusammen mit (1.60) erhält man ein Gleichungssystem, welches man auflösen kann:

$$E^t = \frac{2}{1 + k_s^t/k_s^e} E^e \text{ und } E^r = \frac{1 - k_s^t/k_s^e}{1 + k_s^t/k_s^e} E^e. \quad (1.62)$$

Setzt man  $a = k_s^t/k_s^e$ , so kann man  $a$  mit (1.59) zu

$$a = \frac{k_s^t}{k_s^e} = \frac{n^t \cos \theta^t}{n^e \cos \theta^e}$$

<sup>18</sup> Diese Relation bekommt man aus der Dispersionsrelation (1.18) für Einfallende und Reflektierte Strahlen:  $\omega$ ,  $c$  und  $n$  sind hier lt. (1.56) gleich, also auch  $k = \|\vec{k}\|$ . Anschaulich folgt so aus 1.5 dass einzig  $k_s$  sein Vorzeichen ändert.

vereinfachen, wobei wir  $\alpha =: \theta^e$  und  $\beta =: \theta^t$  gesetzt haben; Wichtig ist hier, dass (1.59) für die *parallelkomponenten* von  $\vec{k}$  eine Aussage macht; man muss diese deshalb gemäß (1.58) anpassen.

Wir erhalten so mit dem Winkeladditionstheorem

$$\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi = \sin(\phi + \psi)$$

aus Gl. (1.62) die Größen:<sup>19</sup>

**Definition 1.12 (Transmissionskoeffizient  $\tau_\sigma$ )** *Gibt den Anteil des gebrochenen E-Feldes nach Brechung am E-Feld vor der Brechung an:  $E^t = \tau_\sigma E^e$ . Es gilt*

$$\tau_\sigma = \frac{2 \sin \theta^t \cos \theta^e}{\sin(\theta^e + \theta^t)}. \quad (1.63)$$

**Definition 1.13 (Reflexionskoeffizient  $\rho_\sigma$ )** *Gibt den Anteil des E-Feldes nach Reflexion am E-Feld vor der Brechung an:  $E^r = \rho_\sigma E^e$ . Es gilt*

$$\rho_\sigma = \frac{1 - a}{1 + a} = -\frac{\sin(\theta^e - \theta^t)}{\sin(\theta^e + \theta^t)} \quad (1.64)$$

Diese beiden Gleichungen werden FRESNELSche Formeln genannt.

**Wichtig! 18**  $\tau_\sigma$  und  $\rho_\sigma$  sind komplexe Größen – sie beschreiben auch das Phasenverhalten eine EM-Welle am Grenzflächenübergang: Ein negatives  $\rho_\sigma$  bedeutet einen Phasensprung von  $180^\circ$ .

Betrachtet man das Licht *in umgekehrter Richtung*, dann folgt einfach

$$\tilde{a} = \frac{1}{a}, \quad \tilde{\rho}_\sigma = -\rho_\sigma \text{ und } \tilde{\tau}_\sigma = a \tau_\sigma; \quad (1.65)$$

es gilt dann

$$\tau_\sigma \cdot \tilde{\tau}_\sigma = 1 - \rho_\sigma^2. \quad (1.66)$$

#### 1.1.7.4 $\pi$ -Fall

Hier ist das B-Feld senkrecht zur Einfallsebene und somit stets parallel zur Grenzfläche – also  $B = B_p$ . Leider ist  $B_p$  beim Grenzübergang nicht stetig, dafür aber  $\frac{1}{\mu} B_p$ .

Da wir aber eigentlich das E-Feld untersuchen wollen, müssen wir etwas rechnen: Verwenden wir für B- und E-Feld (eigentlich D-Feld – also  $\varepsilon E$ -Feld) eine Welle nach (1.16), so erhalten wir mit den Maxwellgleichungen (speziell (1.10))

$$\mathbf{i} \vec{k} \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{i} \omega \varepsilon \vec{E}. \quad (1.67)$$

<sup>19</sup>Dafür muss man noch (1.59) verwenden: Dann kann man  $a$  schreiben als

$$a = \frac{\tan \theta^e}{\tan \theta^t}$$

Von der Tangentialkomponente des E-Felds wissen wir, dass sie beim Grenzübergang stetig ist. Wir können also<sup>20</sup> am Übergang  $\vec{E}_p$  ausrechnen, indem wir statt  $\vec{k}$  einfach  $\vec{k}_s$  verwenden:<sup>21</sup>

$$\mathbf{i} \vec{k}_s \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{i} \omega \varepsilon \vec{E}_p .$$

Für die Parallelkomponenten der einzelnen E-Felder erhalten wir so (mit (1.15) und wegen  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ ):

$$k_s B = \frac{n^2}{c^2} \omega E_p \Rightarrow E_p = \frac{k_s c^2}{\omega n^2} B \text{ oder } B = \frac{\omega n^2}{k_s c^2} E_p .$$

Für uns ist jedoch die Betrachtung von ganz  $\vec{E}$  entscheidend – wir verwenden deshalb (1.21) für die Beträge von B- und E-Feld.

Mit unseren Stetigkeitsbedingungen Für das  $H = \frac{1}{\mu} B$ -Feld

$$\frac{1}{\mu^e} B^e + \frac{1}{\mu^r} B^r = \frac{1}{\mu^t} B^t$$

folgt wegen  $\mu^e = \mu^r$  und nach Kürzen

$$\frac{n^{e2}}{k_s^e} E^e + \frac{n^{r2}}{k_s^r} E^r = \frac{\mu^e n^{t2}}{\mu^t k_s^t} E^t .$$

Wir wollen nun annehmen, dass die Materialien, die wir betrachten, nur wenig Magnetisierbar sind – und wenn, dann ähnlich stark. So dürfen wir den Quotienten  $\mu^e/\mu^t \approx 1$  setzen. Mit  $k_s^e = -k_s^r$  (vgl. Fußnote 18) und  $n^e = n^r$  kann man einen Koeffizientenvergleich mit der Stetigkeitsbedingung der E-Felder, hergeleitet aus der für B-Felder

$$n^e E^e + n^r E^r = n^t E^t \text{ oder } E^e + E^r = \frac{n^t}{n^e} E^t$$

mit

$$E^e - E^r = \frac{n^{t2} k_s^e}{k_s^t n^{e2}} E^t = \frac{n^t k_s^e}{k_s^t n^e} \frac{n^t}{n^e} E^t$$

machen, und erhält so analog zu den Rechnungen aus (1.62) die Fresnelbeziehungen für den  $\pi$ -Fall. Es gilt dann:

$$\tau_\pi = \frac{2 \sin \theta^t \cos \theta^e}{\sin(\theta^e + \theta^t) \cos(\theta^e - \theta^t)} \text{ und } \rho_\pi = \frac{\tan(\theta^e - \theta^t)}{\tan(\theta^e + \theta^t)} . \quad (1.68)$$

Analog findet man auch wieder die Zusammenhänge (1.65) und (1.66).

→ Bei senkrechtem Lichteinfall findet man noch interessante Zusammenhänge. Hier stimmen  $\pi$ - und  $\sigma$ -Fall überein; man kann dann  $a = n^t/n^e = 1/b$  setzen, wobei  $b = (n^e/n^t)^2 a$  ist. Es folgt so  $\rho_\pi = -\rho_\sigma$  bzw.  $\tau_\pi = \tau_\sigma$ . ←

<sup>20</sup>Mit der selben Argumentation wie in Kap. 1.1.7.2

<sup>21</sup>Wir kennen aus (1.21) den Zusammenhang aus den Amplituden von B- und E-Feld, die hier aufgeführte Gleichung entspricht (1.21) in Vektorschreibweise.

### 1.1.8 Reflexion

Möchte man die **Reflexion** eines Metalls bestimmen, benötigt man dafür die Gleichungen

$$r = \frac{1-n}{1+n} \text{ und } R = |r|^2. \quad (1.69)$$

$r$  heißt hier **Reflektionskoeffizient**<sup>22</sup> und

**Definition 1.14 (Reflektivität  $R$ )** Sie ist definiert als der Quotient

$$R := \frac{\langle \vec{S}^r \rangle}{\langle \vec{S}^e \rangle} = \frac{\|\vec{E}^r\|^2}{\|\vec{E}^e\|^2} \quad (1.70)$$

und gibt damit die relative Intensität der reflektierten Welle an.

Analog ist definiert:  $\rightarrow$  **Transmission  $T$**  als Quotient

$$T := \frac{\langle \vec{S}^t \rangle}{\langle \vec{S}^e \rangle} = \frac{\|\vec{E}^t\|^2}{\|\vec{E}^e\|^2} \quad (1.71)$$

$\leftarrow$

Setzt man hier für die Brechzahl  $n$  ein  $\varepsilon^2$  aus Gl. (1.51) ein, erhält man den Verlauf aus Abb. 1.6. Man sieht im einzelnen:

- Für  $\omega < \omega_p$  ist  $\varepsilon < 0$  und damit  $n$  rein Imaginär. Stellt man sich Zähler und Nenner von  $r$  als Vektoren in der Komplexen Ebene vor, so sind diese in  $\Re$ -Richtung gleich lang (nämlich 1) und in  $\Im$ -Richtung ebenso; einmal  $n$  nach rechts, einmal  $n$  nach links. Da  $|a/b| = |a|/|b|$  gilt, ist hier generell  $r = 1$ . Dies ist dadurch bedingt, dass wir für  $\varepsilon$  eine Näherung verwendet haben. Der Verlauf mit und ohne Näherung ist in 1.6 eingezeichnet.
- Für  $\omega > \omega_p$  ist  $\varepsilon$  rein reell und damit unterscheiden sich Zähler und Nenner von  $r$ . Da der Nenner größer ist als der Zähler, geht  $r$  gegen 0 und damit auch  $R$ .

**Wichtig! 19** Für  $\omega < \omega_p$  spiegelt ein Metall glänzend, für  $\omega > \omega_p$  kann man hindurchschauen.

◇ Diesen Effekt bemerkt man daran, dass Langwellenradio an der Ionosphäre reflektiert wird und so noch in weiter Ferne empfangbar ist. Kurzwellenradio hat eine größere Frequenz, welche überhalb von  $\omega_p \approx 2\pi \cdot 10^7 \text{ Hz}$  liegt, weswegen es die Ionosphäre ungehindert durchdringen kann. ◇

### 1.1.9 Totalreflektion

Beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium (also  $n^e > n^t$ ) versagt das Snelliussche Brechungsgesetz (1.59) ab einem bestimmten Winkel: Wenn  $\sin \theta^t = 1$  erreicht ist, und man den Einfallswinkel  $\theta^e$  weiter erhöht, vergrößert sich  $\sin \theta^e$  weiter – aber  $\sin \theta^t$  kann nicht weiter wachsen.

Ab diesem Punkt nämlich tritt **Totalreflektion** ein:

<sup>22</sup>Er wurde vorher mit  $\rho$  bezeichnet, als ein Teil der Welle nicht reflektiert wurde, sondern gebrochen wurde – hier wird nichts gebrochen, höchstens absorbiert.

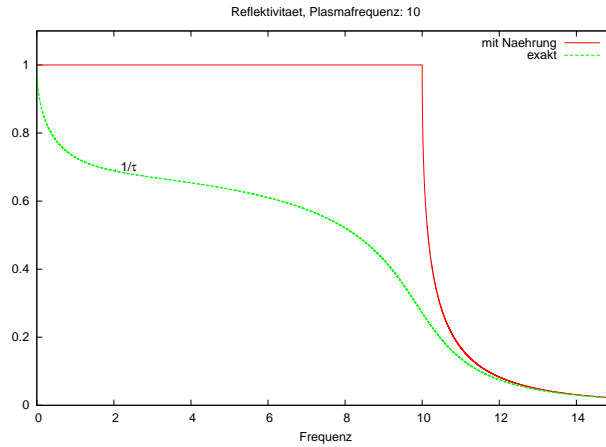


Abbildung 1.6: Reflektivität eines Metalles

**Definition 1.15 (Totalreflexion, Kritischer Winkel  $\theta_T$ )** Es wird kein Licht mehr gebrochen, nur noch reflektiert und absorbiert. Es gilt hier

$$\theta_T = \theta^{e,max} = \arcsin \frac{n^t}{n^e} \quad \text{bei } n^t < n^e. \quad (1.72)$$

Der Winkel  $\theta_T$  wird auch Kritischer Winkel genannt.

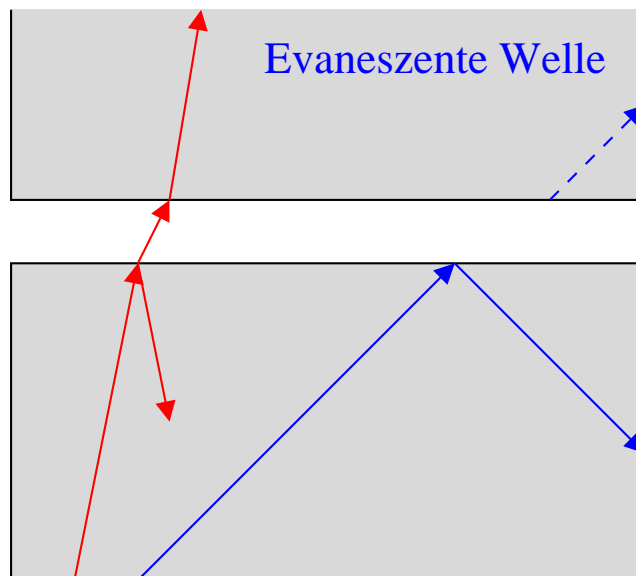
Legt man zwei Gläser dicht genug aneinander, so kann ein Lichtstrahl, der in dem einen Glas mit einem so flachen Winkel auftrifft, dass er eigentlich total reflektiert werden sollte, trotzdem noch in dem zweiten Glas nachgewiesen werden. (Zur Illustration siehe Abb. 1.7.) Diese Welle, die nach dem klassischen Verständnis nicht existieren sollte, bezeichnet man als **Evaneszente Welle**, den Effekt als *Evaneszenz*. Die Intensität Evaneszenter Wellen sinkt außerhalb „ihres“ Mediums exponentiell mit der Entfernung ab. Eine Erklärung, warum es solche Wellen geben *muss* ist, dass E- und B-Feld (bzw. H- und D-Feld) der Welle an der Grenzfläche stetig sein müssen: Sie können an diesem Punkt nicht einfach verschwinden. (Siehe Dazu Kap. 1.1.7.)

Dieser Effekt entspricht dem quantenmechanischen *Tunneleffekt*: Das Photon darf sich in dem Bereich zwischen den beiden Gläsern eigentlich nicht aufhalten, doch selbst hier hat es eine endliche Amplitude  $\psi$ , sodass es – mit geringer Wahrscheinlichkeit – auch hier sein darf.

◇ Eine anwendung des Effekts ist, dass anstatt eines zweiten Glases eine Probe an das Glas gelegt wird: Licht, welches man durch das Glas schickt, wird so zu einem gewissen Teil an der Probe absorbiert und somit kann man ein *Absorptionsspektrum* messen.

Des weiteren verwendet man in der Interne-Totalreflektions-Fluoreszenz-Mikroskopie Evaneszente Wellen, um eine Probe zu Fluoreszenz anzuregen. Das Problem in Zellmikroskopie ist, dass wenn man die Zelle mit einem klassischen (Licht)Mikroskop anregt, viele Teilchen in der Umgebung auch fluorisieren und so das Signal, welches man eigentlich beobachten möchte, „überstrahlt“ wird. Wichtig ist, dass die Effekte Evaneszenter Wellen lediglich in einem Abstand von bis zu einem Drittel der Wellenlänge spürbar sind. Dadurch werden nur wenig zur Fluores-





**Abbildung 1.7:** *Evaneszente Welle bei kleinem Spalt: Der rote Strahl wird reflektiert und gebrochen, der blaue liegt eigentlich schon über dem Winkel  $\theta_T$  für Totalreflektion. Trotzdem setzt sich die Welle in dem (sehr) nahem Medium oben fort.*

zenz fähige Moleküle angeregt.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die Datenleitung in *Glasfaserkabeln*! Diese sind optisch dichter als die Umgebung und so werden die Lichtimpulse hier ständig hin und her geworfen und können die Faser nicht verlassen. ◇

### 1.1.10 Goos-Hänchen-Effekt

Wir haben hier bisher Reflektion nur als Phänomen der Grenzschicht – als unendlich dünne Schicht – wahrgenommen. Dem ist aber eigentlich nicht so: Auch wenn Licht reflektiert wird, so dringt es doch in das reflektierende Medium eine kleine Strecke ein – und wird auch hier zurückgeworfen.

Der Goos-Hänchen Effekt beschreibt dies bei Totalreflektion: Wenn ein Lichtstrahl unter dem Winkel von Totalreflektion zurückgeworfen wird, so liegt der eigentliche Reflektionspunkt geringfügig (um  $\lambda/2\pi$ ) *hinter* der Grenzfläche – also schon im optisch dünneren Medium.

Der Abstand auf der Grenzfläche zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl wird als *Goos-Hänchen-Shift* bezeichnet. Siehe auch Abb. 1.8.

### 1.1.11 Glasfasern

#### 1.1.11.1 Aufbau

Eine Glasfaser besteht aus einem nur wenige Mykrometer breiten Kern, der durch einen dicken Mantel umgeben ist. Der Kern ist optisch dichter als der Mantel, damit die Lichtsignale an der „Phasen“grenze reflektiert werden.

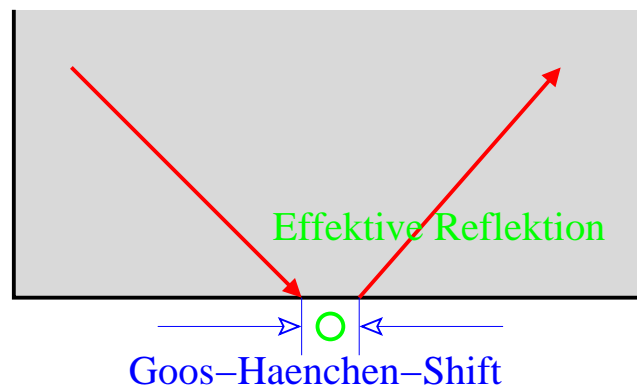


Abbildung 1.8: Goos-Hänchen-Effekt

#### 1.1.11.2 Herstellung

Der Prozess gliedert sich in zwei Teil: Zuerst verwendet man ein *Glasgas*: Ein Gas aus reaktiven Teilchen, welche sich an einer bestehenden Oberfläche abscheiden. In dieses Gas wird eine dünne Faser – der Kern – eingebracht, und der Mantel scheidet sich selbst darauf ab. Der Vorteil dieser Technik ist die Reinheit, mit der man die Stoffe aufbringen kann.

Das entstehende Produkt ist eine sog. „Präform“. Sie wird nun erhitzt und sorgfältig in die Länge gezogen. Dabei werden Kern und Mantel gestreckt und aus der dicken Präform werden kleine, feine Glasfasern.

#### 1.1.11.3 Betrieb

Um Signale einzukoppeln, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Auf einem Chip werden kleine Fasern sehr nahe aneinander gebracht. Dort treten nun Evaneszente Wellen von der einen Faser zur anderen über. Auf diese Weise kann man verschaltungen konstruieren.
- Laserlicht am Ende einstrahlen: Laserlicht wird gebündelt und auf das offene Ende der Faser gestrahlt. Durch das Bündeln haben die Lichtstrahlen einen Winkel zur Glasfaseroberfläche, der später dafür sorgt, dass dort Totalreflektion stattfindet.
- Per Prisma: Das Glasfasersignal wird durch einen „Glasbaustein“ geleitet. Auf dem Glasbaustein sitzt ein Prisma. Hier kann man einen Laser senkrecht auf die Prismenseitenfläche strahlen (wird nicht gebrochen) und der Strahl gelangt in den Glasbaustein, wo er totalreflektiert wird und sich zu den anderen Lichtimpulsen gesellt.

Die Optimale Wellenlänge für den Betrieb liegt bei  $\lambda_{\text{Glasfaser}} \approx 1.5 \mu\text{m}$ : Bei kleineren Wellenlängen ist die Absorption wegen der Rayleighschen Streuung hoch, bei größeren Wellenlängen kommt man in den Infrarot-Bereich. Hier regt man schon die Atome des Leiters (thermisch) an, was zu hohen Verlusten an Intensität führt.

Um einen möglichst hohe Datenrate zu bekommen, schickt man Lichtimpulse vieler verschiedener Wellenlängen durch eine Glasfaser – man bezeichnet dies als „Multiplexing“.

#### 1.1.11.4 Dispersion

Die Strahlen werden unterschiedlich oft reflektiert. Wir betrachten einen Leiter der Länge  $L$ . Im Idealfall ist die Übertragungsdauer

$$t^{\text{ideal}} = \frac{n^k}{c} L ,$$

wobei  $n^k$  die Brechzahl des Kerns ist, und im längsten Fall

$$t^{\text{max}} = \frac{n^k}{c} L \frac{1}{\cos \phi^{\text{max}}} ,$$

wobei  $\phi^{\text{max}}$  der größte Winkel (gemessen zur Mantelfläche) ist, unter dem noch totalreflektion stattfindet. (Diese Relation folgt daraus, dass wenn der Strahl den Winkel  $\phi^{\text{max}}$  hat, die Strecke, die er in einer Zeiteinheit in Richtung Glasfaser durchläuft, nur noch der  $\cos \phi^{\text{max}}$ -te Teil ist, den ein Strahl in der selben Zeiteinheit unter  $\phi = 0$  benötigt.)

Der Unterschied zwischen den Beiden Zeiten ist

$$\Delta t = \frac{1}{\cos \phi^{\text{max}}} - 1 .$$

Dies ist für kleine  $\phi^{\text{max}}$  noch relativ klein.

Wenn die Dauer eines Impulses  $\delta t$  ist, dann muss man, um vernünftig Daten übertragen zu können,

$$\delta t > \Delta t$$

machen. Für hohe Datendichten ist also ein kleines  $\phi^{\text{max}}$  interessant.

◇ Für  $\delta t = 1 \text{ ns}$  findet man bei Werten für aktuelle Glasfasern  $L \approx 14 \text{ m}$ , bis das Signal durch Dispersion nicht mehr „lesbar“ ist. In richtigen Leitungen müssen die Impulse also länger dauern. ◇

#### 1.1.11.5 Leitung und Moden

Löst man die Wellengleichungen mit Randbedingungen für Glasfasern, so findet man als Lösungen Wellen, die sich nicht nur über den Kern, sondern auch stark über den Rand ausbreiten. Im Kern oszillieren sie und im Rand fallen sie exponentiell ab.

Macht man die Glasfaser entsprechend klein (also mit einem Durchmesser  $d \approx \lambda^{\text{Glasfaser}}$ ), dann erhält man „Mono-Mode“-Fasern: Hier „passt“ nur eine Wellenlänge rein und somit hat man hier nur wenig Dispersion.

#### 1.1.12 Polarisation – Brewster-Winkel

Fällt Licht unter dem Winkel  $\theta_B$  auf eine Grenzfläche, so steht der reflektierte Strahl genau senkrecht auf dem gebrochenen (transmittierten) Strahl; es gilt dann

$$\theta^r + \theta^t = \frac{\pi}{2} ,$$

woraus mit (1.59) und wegen  $\sin \theta^t = \sin(\pi/2 - \theta^r) = \cos \theta^r$

$$\frac{\sin \theta^r}{\cos \theta^r} = \frac{n^t}{n^e} \text{ oder } \theta_B = \arctan \frac{n^t}{n^e}. \quad (1.73)$$

folgt.

**Definition 1.16 (BREWSTER-Winkel  $\theta_B$ )** Wird Licht mit dem Lotwinkel  $\theta_B$  eingestrahlt, so wird der Anteil mit Polarisation parallel zur Einfallsebene nicht reflektiert sondern komplett gebrochen. Das entstehende Licht ist somit vollständig linear polarisiert.

Dies liegt daran, dass man sich die Brechung so vorstellen kann, dass die Lichtwelle die Teilchen der Grenzfläche in Schwingungen versetzt und der so entstehende Dipol eine neue Welle abstrahlt. Nun ist bekannt, dass ein Dipol in seine Schwingungsrichtung selbst keine Wellen abstrahlen kann. Trifft linear in der Einfallsebene polarisiertes Licht nun unter dem Brewster-Winkel ein, so würde der „Dipol“ (nach den Snelliusschen Gesetzen) genau parallel zum reflektierten Lichtstrahl liegen – und in dieser Richtung kann der „Dipol“ ja keine Welle abstrahlen.

Sobald polarisiertes Licht mit senkrechter Polarisationsrichtung im Lichtstrahl vorhanden ist, wird dieses „wie gewohnt“ reflektiert und gebrochen. Man kann aber jeden einfallenden Strahl in die die beiden senkrecht aufeinander stehenden Polarisationsrichtungen zerlegen und so erhält man stets polarisiertes Licht.

◇ Eine Anwendung dafür ist die **Ellipsometrie**: linear polarisiertes Licht bestimmter Polarisation wird unter einem bestimmten Winkel auf die Probe gebracht. Von dem reflektierten Licht werden Intensität und Polarisation gemessen. Aus diesen Daten kann man auf den komplexen Brechungsindex bzw.  $\varepsilon$  schließen.<sup>23</sup> Bei Mehrfachbrechungen kann man zudem noch auf die Schichtdicke schließen – dies wird unter einem Einfallswinkel um  $\theta_B$  durchgeführt. ◇

---

<sup>23</sup> Man legt zwei Freiheitsgrade bei den Messungen fest – dies entspricht  $\Im n$  und  $\Re n$ .

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Plot von $\Im n$ und $\Re n$ (1.38)	13
1.2	Brechzahl gegen Frequenz	13
1.3	$\varepsilon(\omega)$ und $n(\omega)$	16
1.4	$\sigma$ - und $\pi$ -Fall	20
1.5	Welle beim Übergang	21
1.6	Reflektivität eines Metalles	26
1.7	Evaneszente Welle bei kleinem Spalt	27
1.8	Goos-Hänchen-Effekt	28



## Kapitel 2

# Formelzeichen

33

Zeichen	Name	Einheit	Definition	Wichtig
---------	------	---------	------------	---------