Michael Kopp

IV

Δ in Kugelkoord.: $\Delta = \frac{1}{r} \cdot \partial_r^2 r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \underline{L}^2$

Pkt ⑧

(a) In Kugelkoord. gilt:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \partial_r^2 r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \cdot \underline{L}^2 \right) + V$$

Weil der Koordinaten Ursprung stets zwischen den beiden Massenpunkten liegt, wird $\underset{*}{r}$ = const. sein, weil die Verbindung starr ist. $\Rightarrow \partial_r^2 r = 0.$; außerdem haben wir kein Potential $\Rightarrow V = 0.$

* gilt auch für alle anderen Größen: r = const. gilt im ganzen System: $\partial_r = 0$.

$$H = +\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{\hbar^2 r^2} \underline{L}^2$$

$$I^{ij} = \int \rho \left(\delta^{ij} \underline{r} - r^i r^j \right) d\underline{r}$$

Atome sind Massenpkt. der Masse $M/2$ mit Rad. R ~ Abst. $2R$.

$$\rho = \frac{M}{2} \delta\left(\underline{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}\right) + \frac{M}{2} \delta\left(\underline{r} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}\right)$$

r: Kugelkoord.
R: Fester Rad. Abst. d. Atome: $2R$
M: Gesamtmasse des Systems

$$I^{xx} = I_\perp = \int \rho \cdot (y^2 + z^2)\, d\underline{r} = \frac{M}{2} \left[(0 + R^2) + (0 + R^2) \right] = MR^2.$$

$$I^{zz} = I_\parallel = \int \rho \cdot (x^2 + y^2)\, d\underline{r} = 0.$$

$$\mu = \left(\frac{1}{M/2} + \frac{1}{M/2} \right)^{-1} = \frac{M}{4}, \quad r = 2R$$

$$H = \frac{1}{2\mu r^2} \underline{L}^2 = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot M \cdot 4R^2} \cdot \underline{L}^2 = \frac{\underline{L}^2}{2MR^2} = \frac{\underline{L}^2}{2I_\perp}$$

(b) Es ist

$$H\Psi = E\Psi,$$

also ist der EV zu H auch einer zu E. Da

$$H = \frac{1}{2I_\perp} \cdot \underline{L}^2$$

und $\underline{L}^2 |l,m\rangle = l(l+1) |l,m\rangle$. Die $|l,m\rangle$ sind also Eigenzustände, der

$$H|l,m\rangle = E|l,m\rangle = \frac{1}{2I_\perp} \cdot \underline{L}^2 \cdot |l,m\rangle = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I_\perp} |l,m\rangle$$

$$\Rightarrow E = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I_\perp}$$

(2)

(a) Ich zeige exemplarisch, dass $[L^2, L_x] = 0$; daraus kann man analog $[L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$ bestimmen.

Dazu benötigen wir $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$, $[L_x, L_z] = -i\hbar L_y$

$$L := \underline{x} \times \underline{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

$$\text{zu } [L_x, L_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z]$$

$$= [yp_z, zp_x] - \underbrace{[yp_z, xp_z]}_{0} - \underbrace{[zp_y, zp_x]}_{0} + [zp_y, xp_z]$$

$$= yp_x \underbrace{[p_z, z]}_{-i\hbar} + xp_y \underbrace{[z, p_z]}_{i\hbar} = i\hbar (xp_y - yp_x)$$

$$= i\hbar L_z$$ ($[L_x L_z]$ analog!)

$$[L^2, L_x] = [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x]$$

$$= \underbrace{[L_x^2, L_x]}_{0} + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x]$$

$$= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z L_x] L_z$$

$$= -i\hbar \cancel{L_y L_z} - i\hbar \cancel{L_z L_y} + i\hbar \cancel{L_z L_y} + i\hbar \cancel{L_y L_z}$$

$$= 0$$

Es gilt folglich mit $[L^2, L_i] = 0 \quad i = x, y, z$:

$$[L^2, \frac{L_i^2}{2I_i}] = - [\frac{L_i^2}{2I_i}, L^2] = - \frac{L_i}{2I_i} \underbrace{[L_i, L^2]}_{0} - \frac{1}{2I_i} \underbrace{[L_i, L^2]}_{0} L_i = 0,$$

also auch $[L^2, L_i^2] = 0$, und so auch $[L^2, H] = 0$,

da H aus L_i^2 en besteht.

$\boxed{2}$

(a) $L_\pm = L_x \pm i L_y \qquad \left(L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \right)$

$\cancel{\text{Hi}}$ $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \qquad L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$

$$H = \frac{L_x^2}{2I_x} + \frac{L_y^2}{2I_y} + \frac{L_z^2}{2I_y} = \frac{1}{8I_x}(L_+ + L_-)^2 - \frac{1}{8I_y}(L_+ - L_-)^2 + \frac{L_z^2}{2I_z}$$

$$= \frac{1}{8I_x}\left(L_+^2 + L_+L_- + L_-L_+ + L_-^2\right) - \frac{1}{8I_y}\left(L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- - L_-L_+\right) + \frac{L_z^2}{2I_z}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y}\right)(L_+^2 + L_-^2) + \frac{1}{8I_x}(L_-L_+ + L_+L_-) + \frac{1}{8I_y}(L_+L_- + L_-L_+) + \frac{L_z^2}{2I_z}$$

$$\ominus \ \frac{1}{8}\left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y}\right)(L_+^2 + L_-^2) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y}\right)(L_-L_+ + L_+L_-) + \frac{L_z^2}{2I_z}$$

$$L_+L_- + L_-L_+ = L_+L_- + L_+L_- + [L_-, L_+] = 2L_+L_- - 2\hbar L_z$$

$$\ominus \ \frac{1}{8}\underbrace{\left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y}\right)}_{I^{\ominus}}(L_+^2 + L_-^2) + \frac{1}{8}\underbrace{\left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y}\right)}_{I^{\oplus}} \cdot 2L_+L_- - \frac{2\hbar}{8}\underbrace{\left(\frac{1}{I_x} + \frac{1}{I_y}\right)}_{I^{\oplus}} \cdot L_z + \frac{L_z^2}{2I_z}$$

$\boxed{2}$

(b) $H\,|l,m\rangle$ Dazu: • $L_+^2\,|l,m\rangle \propto c\cdot|l,m+2\rangle$

da $L_+|l,m\rangle \propto |l,m+1\rangle$, $L_+|l,m+1\rangle \propto |l,m+1+1\rangle$

• $L_-^2\,|l,m\rangle \propto |l,m-2\rangle$

• $L_+L_-\,|l,m\rangle \propto L_+|l,m-1\rangle \propto |l,m\rangle$

• $L_z\,|l,m\rangle \propto |l,m\rangle$

Lin'komb.!

(*)
$\Rightarrow H|l,m\rangle = \alpha\,|l,m-2\rangle + \beta\,|l,m+2\rangle + \gamma\,|l,m\rangle$ $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ alle m sind gerade / ungerade $\rightsquigarrow$ $H|l,m\rangle$ bleibt im selben UR $\mathcal{H}_l'$ bzw. $\mathcal{H}_l''$ (Die l bleiben gleich!)

(*) $H|l,m\rangle$ lässt sich als Linearkombination in

$$\langle\, |l,m\rangle,\ |l,m+2\rangle,\ |l,m-2\rangle \,\rangle$$

darstellen; alle diese l.u. Vektoren gehören entweder in $\mathcal{H}_l'$ oder $\mathcal{H}_l''$; je nachdem, ob m gerade oder ungerade ist.

$\boxed{2}$

(c)

1. $\mathcal{H}$ wird in $\bigoplus_l \mathcal{H}_l$ aufgespalten, weil H, U auf l keine Auswirkungen haben!
2. Weiter teilt H jeden $\mathcal{H}_l$ in $\mathcal{H}_l'$, $\mathcal{H}_l''$ auf (⤳ a.(b)).
3. Z: U teilt $\mathcal{H}_l'$ in $\mathcal{H}_{l+}'$, $\mathcal{H}_{l-}'$ auf.
   (U lässt $\mathcal{H}_l'$ invariant, da $|l,m\rangle \xmapsto{U} |l,-m\rangle \cdot (-1)^{l-m} \propto |l,-m\rangle$ und wenn m ~~gerade~~ ungerade ist, ist auch $-m$ ungerade!)

Für festes l def. Basis von $\mathcal{H}_l$ als

$$\{ |l,m\rangle \mid m = -l, \dots, l \} = \mathcal{B}_l$$

Es muss gelten $|l,m\rangle \xrightarrow{U} (-1)^{l-m} |l,-m\rangle$, also in der o.g. Basis muss gelten:

$$\binom{1}{0} \xmapsto{A_{l,m}} (-1)^{l-m} \binom{0}{1} \qquad A\text{: } 2\times 2\text{-Matrix, \& reell.}$$

$$\Rightarrow \quad A_{l,m} = (-1)^{l-m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei man die Basis disjunkt zerlegt in

$$\{|l,m\rangle, |l,-m\rangle\} \cup \{|l,m+1\rangle, |l,-m-1\rangle\} \cup \dots \cup \{|l,0\rangle\} = \tilde{\mathcal{B}}_l$$

und A die Abbildungsmatrix für jede einzelne Teilmenge ist.

Sortiert man die Basisvektoren wie in $\tilde{\mathcal{B}}_l$, erhält man als Abbildungsmatrix auf $\mathcal{H}_l$:

$$A_l = \left(\begin{array}{c|c|c} (-1)^{l-m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & (-1)^{l+m-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & \ddots \\ 0 & & \end{array} \right)$$

Diese Matrix hat Blockgestalt. Will man sie diagonalisieren, kann man die einzelnen Blöcke diagonalisieren:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ⤳ diagon.: $\left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ \lambda = -1$ als Eigenwerten

Mit Eigenvektoren $\lambda_1 \leftrightarrow \underline{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{1}{1}$, $\lambda_2 \leftrightarrow \underline{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{1}{-1}$

Damit haben wir den Operator U diagonalisiert in der

Eigenbasis $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|l,m\rangle + |l,-m\rangle\right)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|l,m\rangle - |l,-m\rangle\right)$

wobei in dieser ~~B~~ U die Matrixgestalt

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

hat.

Die neuen Basisvektoren sind l.u., weil $|l,m\rangle$, $|l,-m\rangle$ l.u. waren (sie sind sogar ~~ON~~ orthonormal!).

$\mathcal{H}_l$ wird damit aufgespalten in

$$\mathcal{H}_{l+} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(|l,m\rangle + |l,-m\rangle) \mid m = -l, \dots, +l \right\rangle$$
$$\mathcal{H}_{l-} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(|l,m\rangle - |l,-m\rangle) \mid \text{''} \right\rangle$$

aufspannen

und wie oben gezeigt (2(b), 2(c) S. 3) werden diese Räume von H wieder in ~~[illegible]~~ je zwei UR für gerade ($\mathcal{H}''_{l\pm}$) und ungerade ($\mathcal{H}'_{l\pm}$) ~~[illegible]~~ m zerlegt.

$\square$

Es war noch zu zeigen: $[L^2, U] = 0$. Dies gilt, weil $[L^2, L_y] = 0$ und U in algebraischer Dar[st.]: $U = \sum_j \frac{1}{j!}\left(-i\pi \frac{L_z}{\hbar}\right)^j$ ist, also Terme mit L_z^j vorkommen; dann kann man schreiben

$$[L^2, L_z^j] = -[L_z^j, L^2] = -L_z^{j-1}\underbrace{[L_z, L^2]}_{0} - [L_z^{j-1}, L^2]\,L_z$$

und iterativ so weiter ...

$\boxed{2}$

(d)

Allgemeines: Die Vorfaktoren von L_+, L_-, L_z:

$$L_+ |l,m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\ |l,m+1\rangle$$
$$L_- |l,m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\ |l,m-1\rangle$$
$$L_z |l,m\rangle = m\hbar\ |l,m\rangle$$

$$L_+^2 |l,m\rangle = \hbar^2 \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\sqrt{l(l+1) - (m+1)(m+2)}\ |l,m+2\rangle$$
$$L_-^2 |l,m\rangle = \hbar^2 \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\sqrt{l(l+1) - (m-1)(m-2)}\ |l,m-2\rangle$$
$$L_z^2 |l,m\rangle = \hbar^2 m^2\ |l,m\rangle$$
$$L_+L_- |l,m\rangle = \hbar^2 \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\sqrt{l(l+1) - (m-1)m}\ |l,m\rangle$$

~~Als Eigenbasis verwende ich die aus 2c.~~
~~Da sie Eigenbasis zu L, und da $[L,H]=0$ auch EB. zu H.~~

Für H verwende ich die Bl. aus 2a.

2(d)

$\underline{\underline{l=1}}$ $\qquad l(l+1)=2$

- $H|1,1\rangle = \frac{1}{8}I^+(0+0) + \frac{1}{4}I^+\cdot 0 - \frac{1}{4}\hbar I^+ m\hbar|1,1\rangle + \frac{\hbar^2 m^2}{2I_z}|1,1\rangle$

$$= \left(\frac{\hbar^2 m^2}{2I_z} - \frac{\hbar^2 m}{4(I_x+I_y)}\right)|1,1\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{2I_z} - \frac{\hbar^2}{4(I_x+I_y)}\right)|1,1\rangle$$

- $H|1,0\rangle = \frac{1}{8}I^+(0+0) + \frac{1}{4}I^+\cdot 0 - \frac{1}{4}\hbar I^+ \underbrace{m}_{0}\hbar|1,0\rangle + \frac{\hbar^2 \overbrace{m^2}^{0}}{2I_z}|1,0\rangle$

$$= \left(\frac{\hbar^2 m^2}{2I_z} - \frac{\hbar^2 m}{4(I_x+I_y)}\right)|1,0\rangle = 0\cdot|1,0\rangle$$

- $H|1,-1\rangle = \frac{1}{8}I^+(0+0) + \frac{1}{4}I^+\, 0 - \frac{1}{4}\hbar I^+(-1)\hbar|1,-1\rangle + \frac{\hbar^2 1^2}{2I_z}|1,-1\rangle$

$$= \left(\frac{\hbar^2}{2I_z} + \frac{\hbar^2}{4(I_x+I_y)}\right)|1,-1\rangle$$

~~Dies waren die Gl. für Zustände, jetzt kommen speziell die für Eigenzustände:~~

- ~~$H(|1,1\rangle + |1,-1\rangle) = \left(\frac{\hbar^2}{2I_z} - \frac{\hbar^2}{4I^+}\right)|1,1\rangle + \left(\frac{\hbar^2}{2I_z} + \frac{\hbar^2}{4I^+}\right)|1,-1\rangle$~~

~~$=$~~

$\underline{\underline{l=3}}$ $\quad l(l+1) = 12$

$$\bullet\ H|3,-3\rangle = \frac{1}{8}I^+\Big(\overbrace{\hbar^2\sqrt{60}}^{|3,-1\rangle} + \hbar\, 0\Big) + \frac{1}{4}I^+\cdot 0 - \frac{1}{4}\hbar I^+ \overbrace{(-3)\hbar}^{|3,-3\rangle} + \frac{9\hbar^2}{2I_z}|3,-3\rangle$$

$$\bullet\ H|3,3\rangle = \frac{1}{8}I^+\left(0 + \hbar^2\sqrt{60}\,|3,1\rangle\right) + \frac{1}{4}I^+\hbar^2 6|3,3\rangle - \frac{1}{4}\hbar I^+ 3\hbar|3,3\rangle + \frac{9\hbar^2}{2I_z}|3,3\rangle$$

$$\bullet\ H|3,-2\rangle = \frac{1}{8}I^+(0+0) + \frac{1}{4}I^+ 6\hbar^2|3,-2\rangle - \frac{1}{4}\hbar I^+\hbar(-2)|3,-2\rangle + \frac{\hbar^2 4}{2I_z}|3,-2\rangle$$

$$= \left(\frac{6\hbar^2 I^+}{4} + \frac{2\hbar^2}{I_z} + \frac{\hbar^2 I^+}{2}\right)|3,-2\rangle =$$

$$= \left(2\hbar^2 I^+ + \frac{2\hbar^2}{I_z}\right)|3,-2\rangle$$

$$\bullet\ H|3,2\rangle = \frac{1}{8}I^+(0+0) + \frac{1}{4}I^+\cdot 10\hbar^2|3,2\rangle - \frac{1}{4}\hbar\cdot I^+\cdot 2\cdot\hbar|3,2\rangle + \frac{4\cdot\hbar^2}{2I_z}|3,2\rangle$$

$$= \left(\frac{5}{2}\hbar^2 I^+ + \frac{2\hbar^2}{I_z} - \frac{\hbar^2 I^+}{2}\right)|3,2\rangle$$

$$\bullet\ H|3,-1\rangle = \frac{1}{8}I^+\left(0 + \hbar^2\sqrt{60}\,|3,-3\rangle\right) + \frac{1}{4}I^+ 10\hbar^2|3,-1\rangle - \frac{1}{4}\hbar I^+(-1)\cdot\hbar|3,-1\rangle + \frac{1^2\cdot\hbar^2}{2I_z}|3,-1\rangle$$

$$\bullet\ H|3,1\rangle = \frac{1}{8}I^+\left(\sqrt{60}\,\hbar^2|3,3\rangle + 0\right) + \frac{1}{4}I^+\cdot 0 - \frac{1}{4}\hbar\cdot I^+\cdot 1\,\hbar|3,1\rangle + \frac{1^2\hbar^2}{2I_z}|3,1\rangle$$

$$\bullet\ H|3,0\rangle = \frac{1}{8}I^+(0+0) - \frac{1}{4}I^+ 0 - 0 + 0 \quad = 0\,|3,0\rangle$$

2(1)

$\underline{\underline{l=1}}$

• Bestimmung der Eigenbasis; dazu: Hamilton in Matrixform diagonalisieren; $\langle |1,m\rangle$ wird als orthonormal angenommen.

Allg. $H \leftrightarrow (A_{ij})$ $\quad A_{ij} = \langle 1,i | H | 1,j \rangle$ $\quad\quad i,j = -1, 0, 1$.

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2I_z} + \frac{\hbar^2}{4I^+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar^2}{2I_z} - \frac{\hbar^2}{4I^+} \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ H ist diagonal, hat die EB $\{ \underbrace{|1,1\rangle}_{\frac{\hbar^2}{2I_z}+\frac{\hbar^2}{4I^+}}, \underbrace{|1,-1\rangle}_{\frac{\hbar^2}{2I_z}-\frac{\hbar^2}{4I^+}}, |1,0\rangle \}$

mit den zugeh. EW

$\underline{\underline{l=3}}$ Analog:

$$A_{ij} = \begin{array}{c} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{9\hbar^2}{2I_z} + \frac{3}{4}\hbar^2 I^+ & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} I^+\hbar^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar^2\left(I^+ + \frac{1}{I_z}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{4} I^+\hbar^2 & 0 & \frac{\hbar^2}{2I_z} + \frac{5}{2}\hbar^2 I^+ + \frac{\hbar^2}{4} I^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar^2}{2I_z} - \frac{\hbar^2 I^+}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}\,\hbar^2 I^+}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{\frac{5\hbar I^+}{2} + \frac{2\hbar^2}{I_z} - \frac{\hbar^2 I^+}{2}}^{2\hbar^2\left(I^+ + \frac{1}{I_z}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}\,\hbar^2 I^+}{4} & 0 & \frac{9\hbar^2}{2I_z} - \frac{3\hbar^2 I^+}{4} + \frac{3\hbar^2 I^+}{2} \end{pmatrix}$$

(3)

(a) Ges.: $H = -\frac{\hbar^2 p^2}{2m} + V = -\frac{\hbar^2 p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$= H_x + H_y + H_z$

SG.: $H\tilde{\Psi} = E\tilde{\Psi}$ $\quad \tilde{\Psi} = \Psi(r)\,\chi(t)$

$= -i\hbar\partial_t\tilde{\Psi} = \Psi(r)\cdot(-i\hbar\,\partial_t\chi(t)) = E\cdot\Psi(r)\cdot\chi(t)$

$\Rightarrow \chi(t) = e^{iEt/\hbar}$

$\Rightarrow \hat{H}\Psi = E\Psi$

Ansatz $\Psi = \Psi_x(x)\,\Psi_y(y)\cdot\Psi_z(z)$

$H\Psi = (H_x + H_y + H_z)\Psi \stackrel{!}{=} \Psi_y\Psi_z H_x\Psi_x + \Psi_x\Psi_z H_y\Psi_y + \Psi_x\Psi_y H_z\Psi_z = E\cdot\Psi$

Bekannt: $H_x\Psi_x = E_x\Psi_x$ gilt für harmon. Osz.

$\stackrel{!}{=} E_x\Psi + E_y\Psi + E_z\Psi = E\Psi$

$\Rightarrow E = (E_x + E_y + E_z)$

Nach Bohr Sommerfeld: $E_x = (n_x + \frac{1}{2})\omega\hbar$ $\qquad n_i = 0, 1, \ldots, N$

$\Rightarrow E = (\underbrace{n_x + n_y + n_z}_{N} + \frac{3}{2})\omega\hbar$

D_N: Anzahl von Kombinationen der n_i, da $\sum_i n_i = N$

$D_N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

N	D_N
0	1
	+2
1	3
	+3
2	6
	+4
3	10
	+5
4	15
$\vdots$	$\vdots$

(b) $\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$

$\Leftrightarrow H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right) - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$

$[H, L^2] = 0$ da $[\partial_r, \underline{L}^2] = 0$ da $\underline{L}$ Abh. op. und φ, ϑ ist:

$\underline{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2 + \frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta)\right]$

Dito $[H, L_z] = 0$ da $L_z = \frac{\hbar}{i}\partial_\varphi$

(c) $\hat{H}\Psi = E\Psi \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right)\cdot\frac{\chi_l(r)}{r}\,Y - \frac{\chi_l(r)}{r}\,\underbrace{\frac{\underline{L}^2 Y}{2mr^2}} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\frac{\chi_l(r)}{r}Y = E\frac{\chi_l}{r}Y$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right)\frac{\chi_l(r)}{r} = \frac{\chi_l(r)}{r}\,\frac{\hbar^2\,l(l+1)}{2mr^2} + \frac{m\omega^2 r}{2}\chi_l(r) + E\frac{\chi_l(r)}{r} \quad \frac{\hbar^2(l(l+1))}{2mr^2}\,Y$

$$\partial_r^2 (x r^{-1}) = \partial_r \partial_r (x r^{-1}) = \partial_r \left[(\partial_r x) \cdot r^{-1} - x r^{-2} \right]$$

$$= (\partial_r^2 x) r^{-1} - (\partial_r x) r^{-2} - \partial_r x \, r^{-2} + 2 x r^{-3}$$

$$\frac{2}{r} \partial_r (x r^{-1}) = \frac{2}{r} \left[(\partial_r x) r^{-1} - x r^{-2} \right] = \frac{2 (\partial_r x)}{r^2} - \frac{2x}{r^3}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_r^2 x_\ell(r)}{r} = \frac{x_\ell(r)}{r} \left(\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} + \frac{m^2\omega^2 r^2}{2} + E \right)$$

(1) $\underline{\underline{r \to \infty}}$:

$$\cancel{-\frac{\hbar^2}{2m}} \left[\partial_r^2 - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] x_\ell = 0$$

Ansatz: $x_\ell = A \cdot e^{-Br^2/2}$ $\qquad \partial_r x_\ell = -AB \, r \, e^{-Br^2/2}$

$$\partial_r^2 x_\ell = -AB \, e^{-Br^2/2} + AB^2 r^2 e^{-Br^2/2}$$

$$\left[-B2 + B^2 4 r^2 - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad B^2 = + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \Rightarrow B = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$B = \Big| -\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{m\omega}{\hbar} \qquad E = + \frac{1}{2} \hbar\omega$$

$\underline{\underline{r \to 0}}$

Nur Teil mit $1/r$ betr., da dieser divergiert

$$\cancel{-\frac{\hbar^2}{2m}} \left[\partial_r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] x_\ell = 0$$

Ansatz: $x = r^{\ell+1}$ $\qquad \partial_r x = (\ell+1) r^{\ell}$

$$\partial_r^2 x = \ell(\ell+1) r^{\ell+1} / r^2$$

(d)

Potenzreihenansatz mit Betrachtung $r \to \infty$:

DGL für $r \to \infty$ ist: (Nur wirklich divergente Terme betr.)

$$\left[\partial_r^2 - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} r^2\right] \chi_l = 0$$

Lösungen sind

$$\chi_l = e^{-Ar^2/2}$$

$$\partial_r^2 \chi_l = \partial_r(\partial_r \chi_l) = \partial_r\left(-Ar\, e^{-Ar^2/2}\right) = A^2 r^2 e^{-Ar^2/2} - A\, e^{-Ar^2/2}$$

$$\Rightarrow A^2 r^2 \cancel{e^{-Ar^2/2}} - \underbrace{A\cancel{e^{-Ar^2/2}}}_{\text{nicht entscheidend, da } r \text{ groß.}} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 \cancel{e^{-Ar^2/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \Rightarrow A = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$e^{-Ar^2/2}$ ist die „Grenzlösung" für $r \to \infty$.

Wir verwenden sie als „Einhüllende" der eigentlichen Lösung: $\chi_l(r) = e^{-Ar^2/2} \cdot \mathcal{X}(r)$

Setzt man dies in die richtige DGL

$$\left[\partial_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \overset{(*)\; A^2}{\frac{m^2\omega^2 r^2}{\hbar^2}} + E\right] \chi_l = 0$$

ein, erhält man für $\mathcal{X}$ die folgende Rel.:

$$\cancel{\partial_r^2(\chi_l) = \partial_r(\partial_r \chi_l) = \partial_r\left[\partial_r\left(e^{-Ar^2/2}\mathcal{X}(r)\right)\right] = \partial_r\left[-Ar\, e^{-Ar^2/2}\mathcal{X}(r) + e^{-Ar^2/2}(\partial_r \mathcal{X}(r))\right]}$$

$$\cancel{= -A\, e^{-Ar^2/2}\mathcal{X}(r) + \underbrace{A^2 r^2 e^{-Ar^2/2}\mathcal{X}}_{\text{hebt sich}} - Ar\, e^{-Ar^2/2}(\partial_r \mathcal{X}(r)) - A r^2 e^{-Ar^2/2}(\partial_r \mathcal{X}) + e^{-Ar^2/2}(\partial_r^2 \mathcal{X})}$$

~~⇒ nach Kürzen von~~ $\cancel{e^{-Ar^2/2}}$

$$\cancel{-A\mathcal{X} - Ar\,\partial_r\mathcal{X}} - (Ar + A^2r^2)\partial_r \mathcal{X}$$

$$\partial_r^2(\chi_l) = \Big[\underbrace{A^2 r^2 \mathcal{X}}_{\text{hebt sich mit } (*)} - 2Ar\,(\partial_r \mathcal{X}) - A\mathcal{X} + (\partial_r^2 \mathcal{X})\Big] \cdot \cancel{e^{-Ar^2/2}}$$

$$\Rightarrow \partial_r^2 \mathcal{X} - 2Ar\,\partial_r \mathcal{X} + \left[-A - \frac{l(l+1)}{r^2} + E\right]\mathcal{X} = 0 \qquad (\diamond)$$

Da in Physik alle Funktionen ~~...~~ in Potenzreihe entwickelbar sind, wähle ich den Ansatz:

$$\chi(r) = r^\kappa \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i r^i \qquad \text{mit best. } \kappa \text{ und } \alpha_0 \neq 0!$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3$$

~~...~~ Davon bilde ich Abl. und setze sie in $(\diamond)$ ein:

$$\partial_r^2 \chi = \partial_r(\partial_r \chi) = \partial_r\Big[\kappa r^{\kappa-1}\Sigma + r^\kappa \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i\,\alpha_i\, r^{i-1}}_{\Sigma'}\Big]$$

$$= \kappa(\kappa-1) r^{\kappa-2}\Sigma + \kappa r^{\kappa-1}\Sigma' + \kappa r^{\kappa-1}\Sigma' + r^\kappa \overbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\alpha_i r^{i-2}}^{\Sigma''}$$

Σ': $\alpha_1 + 2\alpha_2 r + 3\alpha_3 r^2 \ldots$

Σ'': $2\alpha_2 + 6\alpha_3 r + \ldots$

$$(\star)\quad \kappa(\kappa-1) r^{\kappa-2}\Sigma + 2\kappa r^{\kappa-1}\Sigma' + r^\kappa \Sigma'' - 2\lambda r\left(\kappa r^{\kappa-1}\Sigma + r^\kappa \Sigma'\right) + \left[-\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2} + \varepsilon\right] r^\kappa \Sigma = 0$$

Die niedrigste Potenz von r ist $(\kappa-2)$.

Betrachte alle Terme in $r^{\kappa-2}$. (Nur Koeff.)

$r^{\kappa-2}$ nicht darstellbar...

$$\kappa(\kappa-1)\alpha_0 + 2\kappa \cdot 0 + 0 - 2\lambda r(0 + 0) + [0 - l(l+1)\alpha_0 + 0] = 0$$

Da $\alpha_0 \neq 0$ teile dadurch!

$$\kappa(\kappa-1) - l(l+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\kappa = l+1}$$

In $(\star)$ betrachten wir nun Terme mit Potenz von r: $\kappa - 1 = l$:

$$\kappa(\kappa-1)\alpha_1 + 2\kappa\alpha_1 + 0 - (\ldots\alpha_0) + [0 - l(l+1)\alpha_1 + 0] = 0$$

$$[\underbrace{\kappa(\kappa-1)}_{\text{[illegible]}} + 2\kappa - l(l+1)]\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \text{da } \kappa \neq 0.$$

In $(\star)$ betr. allg. Glied d. Potenz $\kappa + q$:

$$\Big[(q+s+2)(q+s+1) - \underbrace{l(l+1)}_{}\Big]\alpha_{q+2} + \Big[-2\lambda(q+\kappa) - \lambda + \varepsilon\Big]\alpha_q$$

„verschieben" wegen r^2 in dem Bruchstrich!

wg. $\kappa = l+1$ folgt die Rekursion:

$$(q+2)(q+2l+3)\alpha_{q+2} = [(2q+2l+3)\lambda - \varepsilon]\alpha_q$$

Mit bekannten α_0, α_1 kann man alle Koeff. bestimmen! (→ $\alpha_i = 0$ für i ungerade)

Damit die Potenzreihe beim k-ten Term abbricht, muss gelten: $a_{q+2} = 0 \Rightarrow$

$$(2q + 2l + 3) \cdot \underbrace{A_4}_{\frac{m\omega}{\hbar}} = \varepsilon \Rightarrow 2(\underbrace{q+l}_{N} + \tfrac{3}{2})\frac{m\omega}{\hbar} = E/2$$

Dies definiert Energie & Entartung! da $q, l \in \mathbb{N}$.

$N = 0$ für $D_N = 1$

$N = 1$ $D_N = 2$

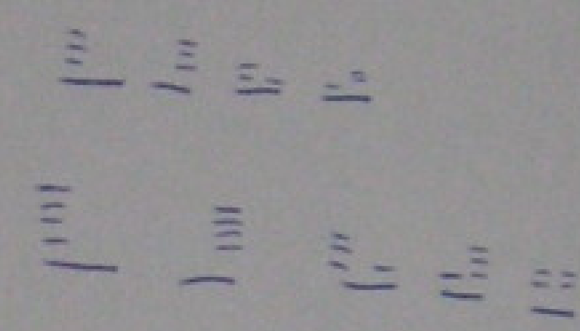
$N = 2$ $D_N = 3$

$N = 3$ $D_N = \cancel{4}4$

$N = 4$ $D_N = 5$

$\vdots$

$D_N = \underline{\underline{N+1}}$



2d – Matrix diagonalisieren ...

Die Matrix fuer H ist A; sie ist diagonalisiert via:

```
Maxima 5.13.0 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.8 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
```

```
(%i1) A :
      matrix([9/(2*Iz)+(3*(1/Iy+1/Ix))/4,0,(sqrt(15)*(1/Iy+1/Ix))/4,0,0,0],[0,2*(1/Iz+1/Iy+1/Ix),(
      (1/Iy+1/Ix)/4,0,(sqrt(15)*(1/Iy+1/Ix))/4],[0,0,0,0,2/Iz+2*(1/Iy+1/Ix),0],[0,0,0,(sqrt(15)*(
```

(%o1)

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{2\,\mathrm{Iz}}+\frac{3\left(\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right)}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}\left(\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right)}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{1}{\mathrm{Iz}}+\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{15}\left(\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right)}{4} & 0 & \frac{1}{2\,\mathrm{Iz}}+\frac{11\left(\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right)}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\,\mathrm{Iz}}-\frac{\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}\left(\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right)}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\mathrm{Iz}}+2\left(\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}\left(\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right)}{4} & 0 & \frac{9}{2\,\mathrm{Iz}}+\frac{3\left(\frac{1}{\mathrm{Iy}}+\frac{1}{\mathrm{Ix}}\right)}{4} \end{pmatrix}$$

```
(%i2) eigenvalues(A);
```

(%o2)

$$\left[\left[-\frac{\sqrt{\left(19\,\mathrm{Iy}^2+38\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}+19\,\mathrm{Ix}^2\right)\mathrm{Iz}^2+\left(32\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2+32\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\right)\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+\left(-\mathrm{Iy}-\mathrm{Ix}\right)\mathrm{Iz}-10\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{4\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}},\right.\right.$$

$$\frac{\sqrt{\left(19\,\mathrm{Iy}^2+38\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}+19\,\mathrm{Ix}^2\right)\mathrm{Iz}^2+\left(32\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2+32\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\right)\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+\left(\mathrm{Iy}+\mathrm{Ix}\right)\mathrm{Iz}+10\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{4\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}},-$$

$$\frac{\sqrt{\left(31\,\mathrm{Iy}^2+62\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}+31\,\mathrm{Ix}^2\right)\mathrm{Iz}^2+\left(-64\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2-64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\right)\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+\left(-7\,\mathrm{Iy}-7\,\mathrm{Ix}\right)\mathrm{Iz}-10\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{4\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}},$$

$$\frac{\sqrt{\left(31\,\mathrm{Iy}^2+62\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}+31\,\mathrm{Ix}^2\right)\mathrm{Iz}^2+\left(-64\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2-64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\right)\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+\left(7\,\mathrm{Iy}+7\,\mathrm{Ix}\right)\mathrm{Iz}+10\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{4\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}},$$

$$\left.\left.\frac{\mathrm{Ix}\left(2\,\mathrm{Iz}+2\,\mathrm{Iy}\right)+2\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}}{\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}}\right],[1,1,1,1,2]\right]$$

```
(%i3) eigenvectors(A);
```

(%o4) $\Bigg[\Big[\big[-\dfrac{\sqrt{\left(19\,\mathrm{Iy}^2+38\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}+19\,\mathrm{Ix}^2\right)\mathrm{Iz}^2+\left(32\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2+32\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\right)\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+(-\mathrm{Iy}-\mathrm{Ix})\,\mathrm{Iz}-10\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{4\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}},$

$\dfrac{\sqrt{\left(19\,\mathrm{Iy}^2+38\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}+19\,\mathrm{Ix}^2\right)\mathrm{Iz}^2+\left(32\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2+32\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\right)\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+(\mathrm{Iy}+\mathrm{Ix})\,\mathrm{Iz}+10\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{4\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}},-$

$\dfrac{\sqrt{\left(31\,\mathrm{Iy}^2+62\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}+31\,\mathrm{Ix}^2\right)\mathrm{Iz}^2+\left(-64\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2-64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\right)\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+(-7\,\mathrm{Iy}-7\,\mathrm{Ix})\,\mathrm{Iz}-10\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{4\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}},$

$\dfrac{\sqrt{\left(31\,\mathrm{Iy}^2+62\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}+31\,\mathrm{Ix}^2\right)\mathrm{Iz}^2+\left(-64\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2-64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\right)\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+(7\,\mathrm{Iy}+7\,\mathrm{Ix})\,\mathrm{Iz}+10\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{4\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}},$

$\dfrac{\mathrm{Ix}\,(2\,\mathrm{Iz}+2\,\mathrm{Iy})+2\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}}{\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}}\big],[1,1,1,1,2]\Big],\Big[\big[0,0,0,1,0,$

$-\dfrac{\sqrt{19\,\mathrm{Iy}^2\,\mathrm{Iz}^2+38\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}^2+19\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iz}^2+32\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2\,\mathrm{Iz}+32\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+(2\,\mathrm{Iy}+2\,\mathrm{Ix})\,\mathrm{Iz}+8\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{\left(\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\mathrm{Iy}+\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\mathrm{Ix}\right)\mathrm{Iz}}\big],$

$\big[0,0,0,1,0,$

$\dfrac{\sqrt{19\,\mathrm{Iy}^2\,\mathrm{Iz}^2+38\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}^2+19\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iz}^2+32\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2\,\mathrm{Iz}+32\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+(2\,\mathrm{Iy}+2\,\mathrm{Ix})\,\mathrm{Iz}+8\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}}{\left(\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\mathrm{Iy}+\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\mathrm{Ix}\right)\mathrm{Iz}}\big],$

$\big[1,0,-$

$\dfrac{\left(\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\mathrm{Iy}+\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\mathrm{Ix}\right)\mathrm{Iz}}{\sqrt{31\,\mathrm{Iy}^2\,\mathrm{Iz}^2+62\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}^2+31\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iz}^2-64\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2\,\mathrm{Iz}-64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+(4\,\mathrm{Iy}+4\,\mathrm{Ix})\,\mathrm{Iz}-8\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}},$

$0,0,0\big],\big[1,0,-$

$\dfrac{\left(\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\mathrm{Iy}+\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\mathrm{Ix}\right)\mathrm{Iz}}{-\sqrt{31\,\mathrm{Iy}^2\,\mathrm{Iz}^2+62\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}^2+31\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iz}^2-64\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}^2\,\mathrm{Iz}-64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}\,\mathrm{Iz}+64\,\mathrm{Ix}^2\,\mathrm{Iy}^2}+(4\,\mathrm{Iy}+4\,\mathrm{Ix})\,\mathrm{Iz}-8\,\mathrm{Ix}\,\mathrm{Iy}},$

$0,0,0\big],[0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0]\Big]\Bigg]$

(%i5)

Die Matrix nimmt in dieser Basis Diagonalgestalt an...

Bemerkung: Die Hier aufgefuehrten Eigenvektoren sind lediglich die Koeffizienten, mit der die $|3, m\rangle$ dargestellt werden; bspw. wird ein Vektor $[a, b, c, d, e, f]$ von oben dem Ket-Vektor

$$a\,|3,-1\rangle+b\,|3,-2\rangle+c\,|3,-1\rangle+d\,|3,1\rangle+e\,|3,2\rangle+f\,|3,3\rangle$$

zugeordnet ...