Phasendiagramme

Michael Kopp

Anhand der Differentialgleichung

$$x'' + ax' + bx = 0 \tag{1}$$

mit konstanten a und b sollen hier ein paar Phasendiagramme gezeichnet (und verstanden) werden. Dazu bringt man die Matrix durch die Substitutionen

$$x \mapsto x_1 \text{ und } x' \mapsto x_2 \tag{2}$$

auf Matrixform, indem man $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ setzt:

$$\vec{x'} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Um diese DGL zu lösen, bestimmt man die Nullstellen des Characteristischen Polynoms[1] $\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$; es ergibt sich mit der Mitternachtsformel:

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\,b^2}}{2} . \tag{4}$$

Wir haben also drei Große Fälle zu unterscheiden: Die Diskriminante[2] ist positiv, verschwindet oder ist negativ. Für jeden dieser Fälle gibt es noch weitere „Unterfälle“.

Wichtig für uns ist noch eine allgemeine Lösung der DGL (3): Hat man Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ zu den **zwei Eigenwerte**n λ_1 und λ_2 gefunden, so ist die Lösung:

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = A \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \cdot \vec{v}_2 + B \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \cdot \vec{v}_2 , \tag{5}$$

wobei A und B konstanten sind, die durch die Anfangsbedingungen gewählt werden müssen. Diese Konstanten A und B sind dann die einzigen Größen der Lösung, die wir bei den einzelnen Kurven variieren dürfen.

Haben wir jedoch **nur einen Eigenwert** λ, dann müssen wir neben dem Eigenvektor noch einen Hauptvektor $\vec{w}$ suchen; dieser muss aus $\text{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2$ kommen und muss linear unabhängig zu $\text{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ sein.

[1] $\mathbf{E}$ ist die Einheitsmatrix

[2] der Wurzelterm bei λ

Anschließend (wenn man $\vec{w}$ *fest* gewählt hat) erhält man aus $\vec{w}$ einen Eigenvektor $\vec{v}$, indem man $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \vec{w} = \vec{v}$ rechnet. Die Lösung erhält man dann als

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = A \cdot \exp(\lambda \cdot t) \cdot \vec{v} + B \cdot \exp(\lambda \cdot t) \cdot (\vec{w} + t \cdot \vec{v}) \ . \tag{6}$$

Wenn man nun **zwei *komplexe* Eigenwerte** erhält, so wird stets gelten, dass[3] $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$. Entsprechend auch für die beiden Eigenvektoren $\overline{\vec{v}_1} = \vec{v}_2$. Eine Lösung erhält man hier mit $\phi(t) = \Gamma \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) \cdot \vec{v}_1$, wobei Γ eine komplexe Konstante ist. Die Lösungen für das System sind nun Real- und Imaginärteil von ϕ linearkombiniert:

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = A \cdot \Re\phi + B \cdot \Im\phi \ . \tag{7}$$

Wir wollen nun die einzelnen Fälle untersuchen.

1. Positive Diskriminante ($a^2 > 4\,b$); wir erhalten stets zwei reelle Eigenwerte[4];

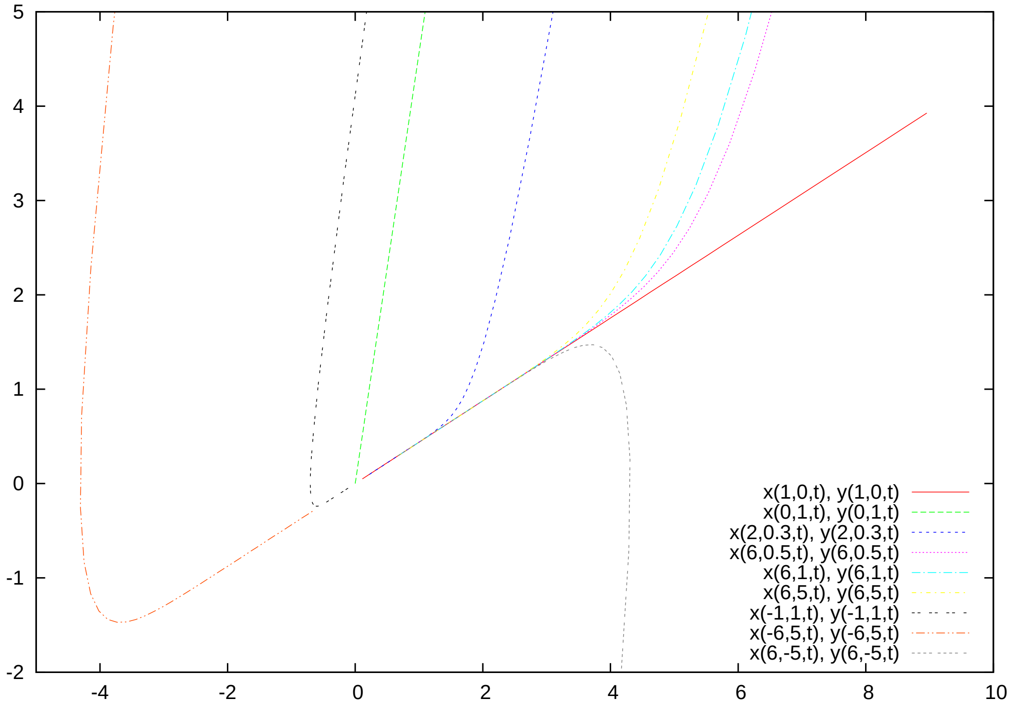
   (a) $b > 0$: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

   Beispiel ($b = 2$, $a = -5$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; Eigenwerte: $-\frac{\sqrt{17}-5}{2}$, $\frac{\sqrt{17}+5}{2}$, Eigenvektoren: $[1, -\frac{\sqrt{17}-5}{2}]$, $[1, \frac{\sqrt{17}+5}{2}]$ – die Lösung hat dann die Gestalt

   $$A \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{17}-5}{2} \cdot t\right) \cdot [1, -\frac{\sqrt{17}-5}{2}] + B \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{17}+5}{2} \cdot t\right) \cdot [1, \frac{\sqrt{17}+5}{2}]$$

[3] $\bar{\xi}$ bezeichnet komplexe Konjugation von ξ

[4] Damit erhalten wir auch stets zwei Eigenvektoren!



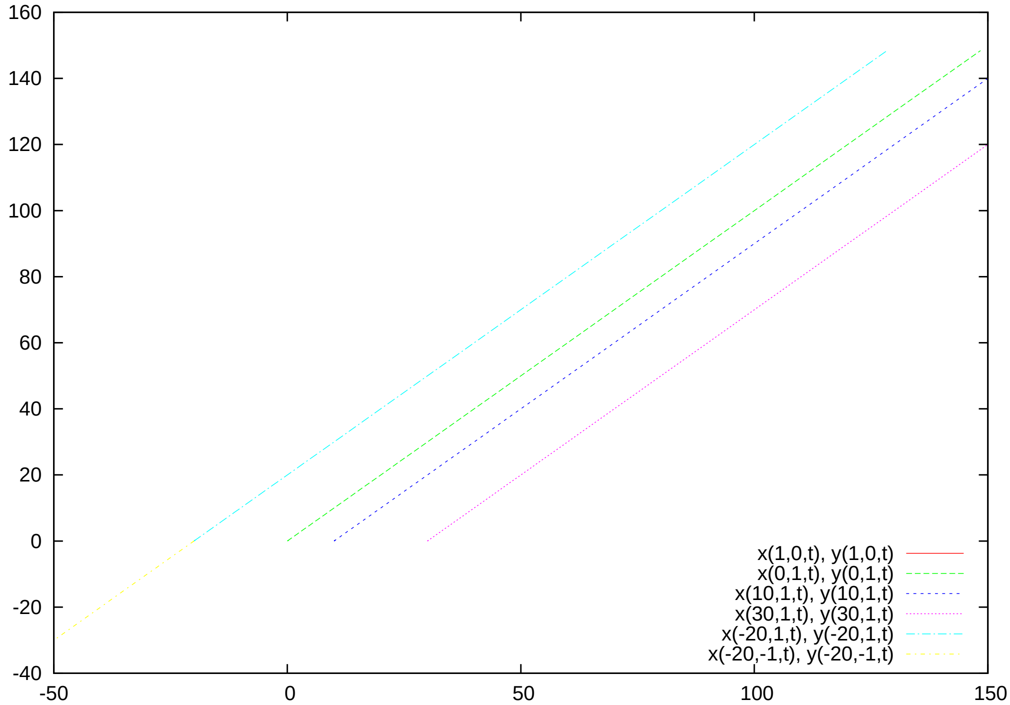
Hier sieht man:[5] Die Lösungskurven schmiegen sich für negative t an die Gerade mit $A = 1$, $B = 0$ an; dies ist die Kurve für den ersten Eigenvektor. Das ist einfach zu erklären; schließlich ist das Argument exp bei diesem Vektor negaitv – für negative t ist dieser exp also sehr groß. Das Argument des anderen exp ist dagegen positiv; für (stark) negative t verschwindet dieser exp also. Für negative t ist der Anteil des zweiten Eigenvektors an der Lösung nur klein – die Lösung schmiegt sich an den anderen Vektor. Für große t sieht man nun genau das gegensätzliche Verhalten: Die Kurve wird parallel zum zweiten Eigenvektor.

(b) $b = 0$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$

Beispiel ($a = 1$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Eigenwerte; 0 und 1, Eigenvektoren: $[1, 0]$ und $[1, 1]$. Die Lösung ist dann:

$$A \cdot [1, 0] + B \cdot \exp(t) \cdot [1, 1]$$

[5] Die Bezeichnungen der Diagramme: In der Legende sind in den Klammern zuerst A, dann B angegeben

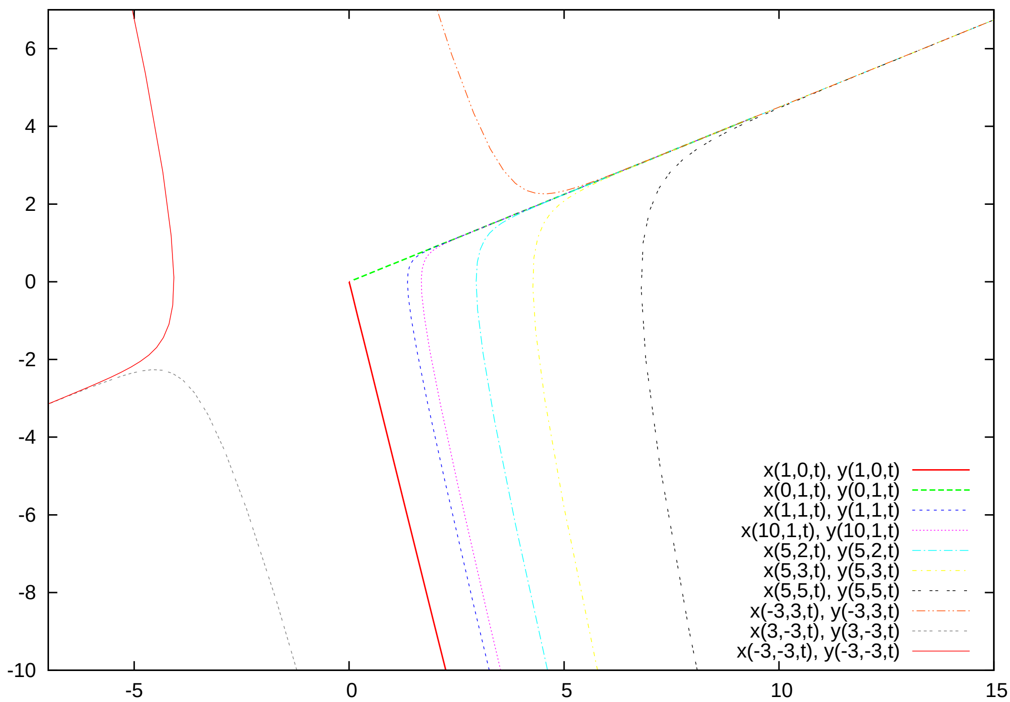


Hier ist die „Kurve“ für $A = 1$ nur ein Punkt: $(1, 0)$. Der Verlauf sonst ist recht langweilig: Der Faktor A versetzt die jeweiligen Kurven lediglich in x-Richtung...

(c) $b < 0$, $a \neq 0$: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

Beispiel ($b = -2$, $a = 4$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, Eigenwerte: $-\sqrt{6} - 2$ und $\sqrt{6} - 2$, Eigenvektoren: $[1, -\sqrt{6} - 2], [1, \sqrt{6} - 2]$. Die Lösung ist dann:

$$A \cdot \exp((-\sqrt{6} - 2) \cdot t) \cdot [1, -\sqrt{6} - 2] + B \cdot \exp((\sqrt{6} - 2) \cdot t) \cdot [1, \sqrt{6} - 2] \; .$$

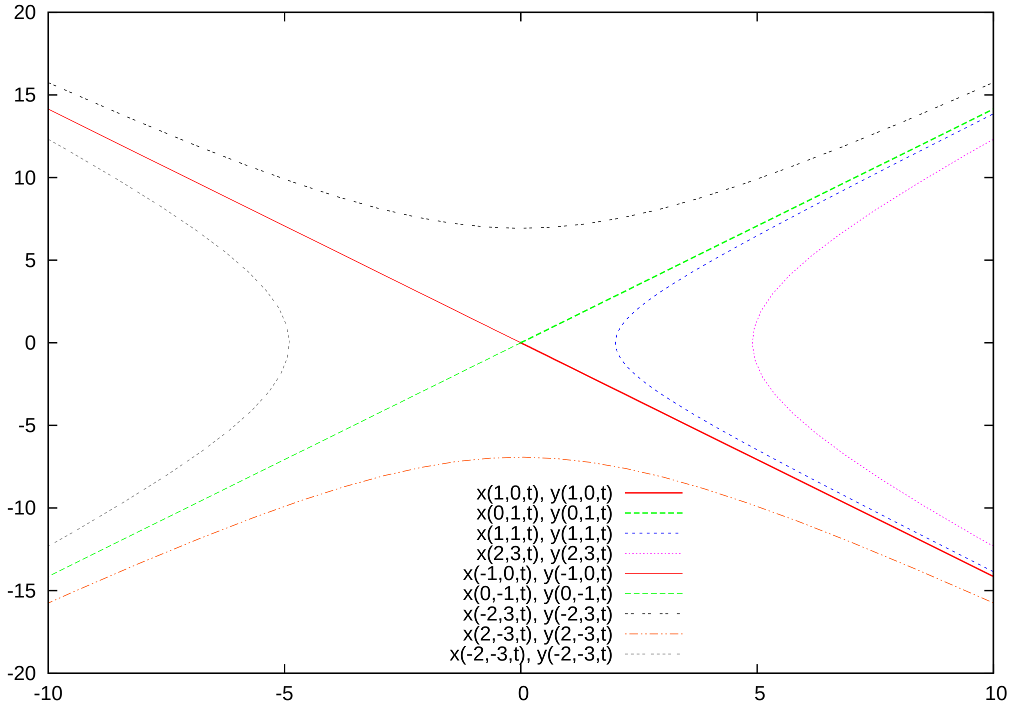


Hier sieht man erstmals die Eigenvektoren in einem anderen Winkel. Interessant ist hier, dass die Lösungskurven von außen (also aus der Richtung des Vektors von $A = 1$, $B = 0$ herkommen (also aus Richtung des ersten Eigenvektors) und für größere t sich an den zweiten Eigenvektor anschmiegen. Dies ist wieder der Verlauf, den wir erwarten, wenn wir eine analoge Diskussion über die Vorzeichen des Arguments der exp führen wie oben.

(d) $b < 0$, $a = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{|b|}$

Beispiel ($b = -2$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; Eigenwerte (wie erwartet): $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$; Eigenvektoren $[1, -\sqrt{2}]$ und $[1, \sqrt{2}]$. Die Lösung ist:

$$A \cdot \exp(-\sqrt{2} \cdot t) \cdot [1, -\sqrt{2}] + B \cdot \exp(\sqrt{2} \cdot t) \cdot [1, \sqrt{2}] \ .$$

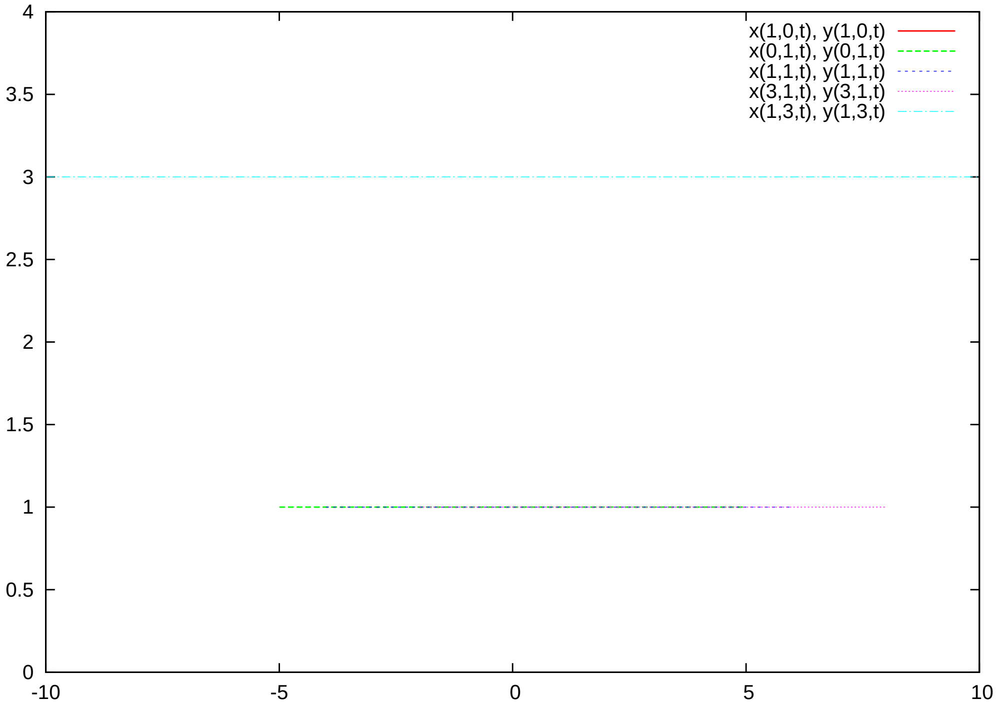


Dieses Bild haben wir erwartet ...

2. Verschwindende Diskriminante ($a^2 = 4\,b$); es folgt sofort, da $a^2 \geq 0$, dass auch $b \geq 0$ ist. In Gl (4) sieht man sofort: Wir finden stets nur zwei gleiche Eigenwerte (beide sind reell).

   (a) $a = b = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   „Beispiel“: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; Eigenwerte beide 0 (s.o.), Nur ein Eigenvektor: $[1, 0]$. Es ist $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{A}$ und ebenso $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2 = \mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$. Der Kern von $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2$ ist also $\mathbb{R}^2$. Wir müssen jedoch als Hauptvektor einen Vektor l.u. zu Kern$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \langle(1, 0)^T\rangle$ finden – also am einfachsten $(0, 1)^T = [0, 1]$. Wenden wir dies auf $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ an, erhalten wir $[1, 0]$, also den gewünschten Eigenvektor. Die Lösung ist (vgl (6) mit $\exp(0) = 1$):

$$A \cdot [1, 0] + B \cdot ([0, 1] + t \cdot [1, 0]) \ .$$

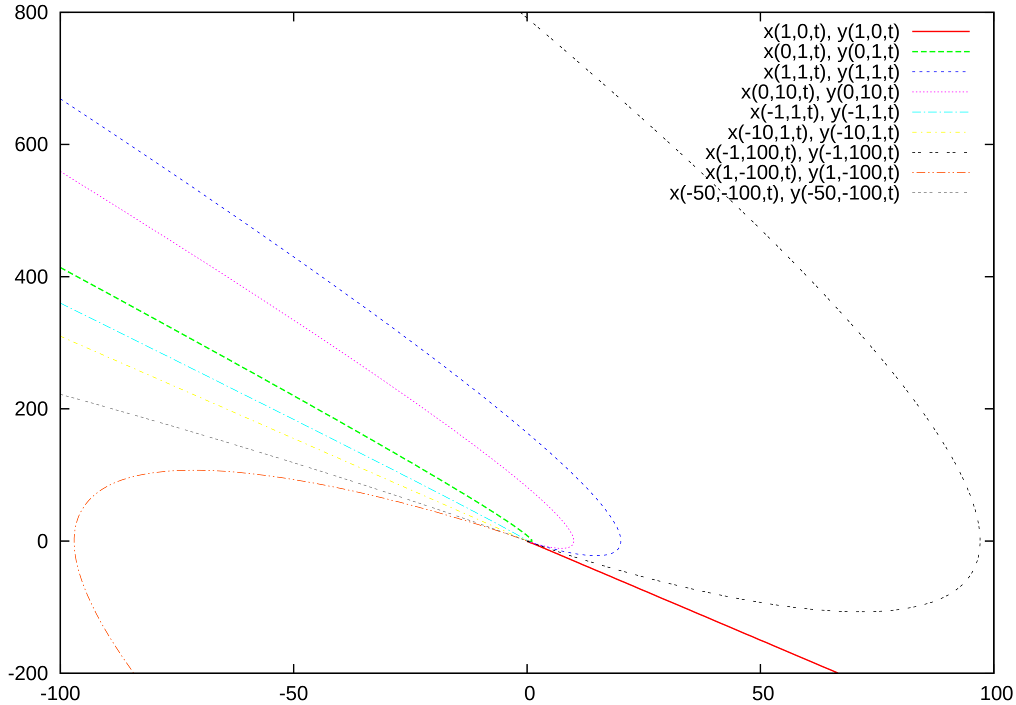


Hier ist die Linie für $A = 1$ und $B = 0$ wieder nur ein Punkt $(1, 0)$. Sonst ist das Schaubild erwartungsgemäß wenig interessant: Variationen in A verschieben die Linien lediglich in x-Richtung und Variationen in B strecken die Linien weiter in y-Richtung.

(b) $a = 2\sqrt{b}$: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

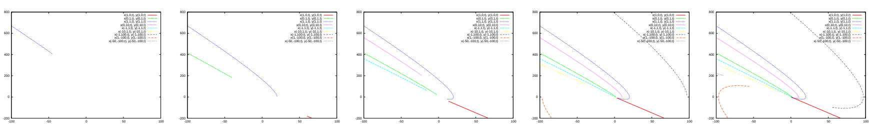
Beispiel ($b = 9$, $a = 6$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$; Eigenwert: -3. Bestimme Hauptvektor: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2 = \mathbf{0}$, also ist $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbb{R}^2$. Der Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist $[1, -3]$, ein Vektor der dazu l.u. ist, ist bspw. $[1, 0]$. Daraus ergibt sich der für uns interessante Eigenvektor $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot (1, 0)^T = [3, -9]$. Wie gewünscht (bzw. zu erwarten) ist er proportional zu dem gefundenen. Wir haben also als Lösung:

$$A \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot [3, -9] + B \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot ([1, 0] + t \cdot [3, -9]) \ .$$



Auch diese Lösungen können wir gut verstehen: Die eleganten Schleifen nach rechts unten kommen von dem „$t \cdot [3, -9]$“-Term: Dieser lenkt die Kurve nach rechts unten ab. Da er aber nur linear ist, ist er der e-Funktion gnadenlos unterlegen, die für stark positive t als „Einhüllende“ verschwindet und dabei die Lösungskurve zum Ursprung zieht. Für stark negative Terme "berwiegt der $\exp \cdot t$-Anteil der Lösung: der Vektor $t \cdot [3, -9]$ zeigt nach links oben und wir durch den exp-Teil noch weiter verstärkt – der Vektor $[3, -9]$ zeigt eigentlich nach rechts unten, wird aber von ersterem überwogen, weil hier eine große Zahl (stark negativ) (t) mit dem großen exp multipliziert wird.

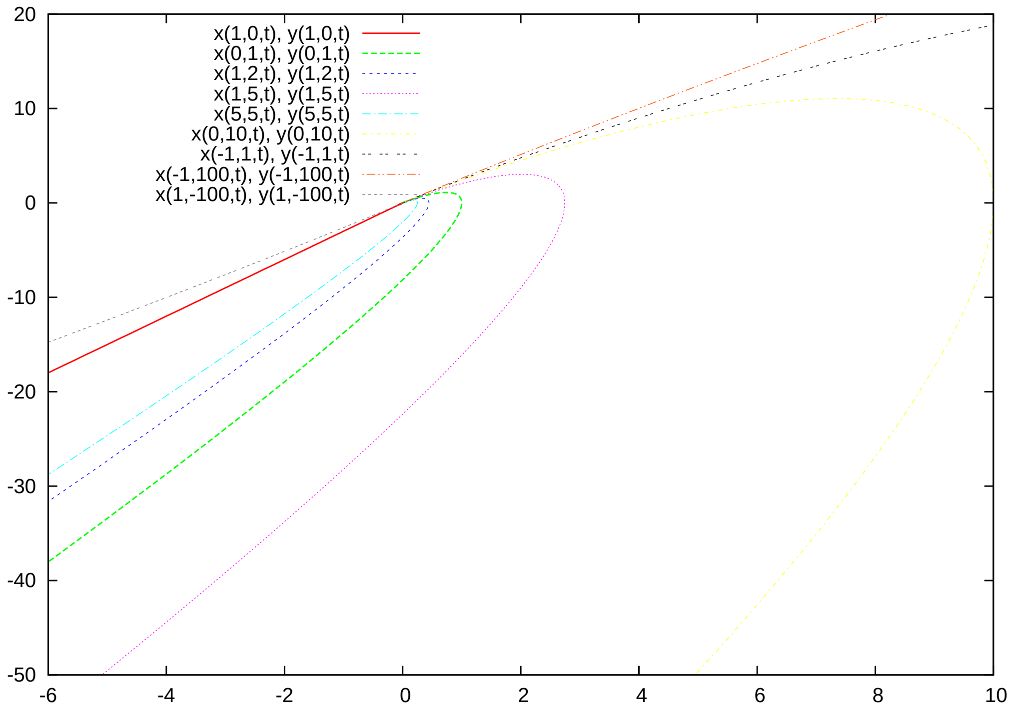
Hier ist einmal ein „Zeitverlauf“ dargestellt; von links nach rechts wächst t von -1.5 bist 1.5:



(c) $a = -2\sqrt{b}$: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Beispiel ($b = 9$, $a = -6$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$; Eigenwert: 3. Bestimme Hauptvektor: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2 = \mathbf{0}$, also ist $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbb{R}^2$. Der Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist $[1, 3]$, ein Vektor der dazu l.u. ist, ist bspw. $[1, 0]$. Daraus ergibt sich der für uns interessante Eigenvektor $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot (1, 0)^T = [-3, -9]$. Wie gewünscht (bzw. zu erwarten) ist er proportional zu dem gefundenen. Wir haben also als Lösung:

$$A \cdot \exp(3 \cdot t) \cdot [-3, -9] + B \cdot \exp(3 \cdot t) \cdot ([1, 0] + t \cdot [-3, -9]) \ .$$



Für negaitve t drängen die exp-Terme die Lösungskurve wieder zum Ursprung, sonst sieht man für stark positive t, wie der Vektor $[-3, -9]$ nach links unten hin klar überwiegt.

3. Negative Diskriminante ($a^2 < 4\,b$); es ergeben sich zwei Eigenwerte in $\mathbb{C}$, welche zueinander komplex konjugiert sind[6]. (Es ist außerdem wieder $b \geq 0$, weil $a^2 \geq 0$ ist.)

   (a) $a > 0$: $\Re\lambda < 0$

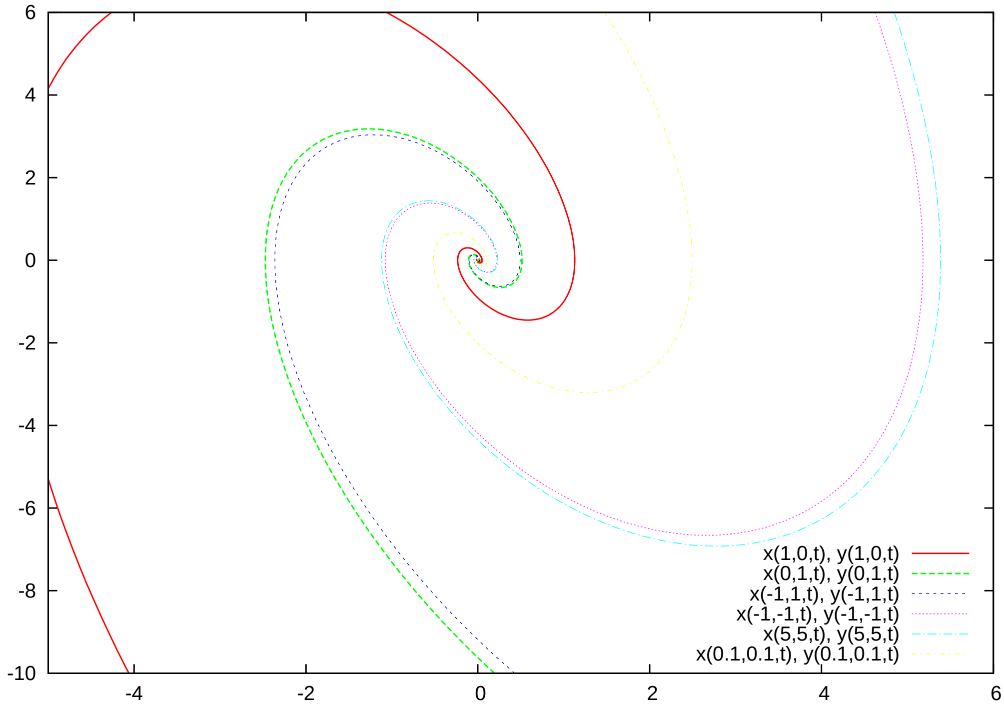
[6] Das kommt daher, dass der Imaginärteil der Eigenwerte einzig von dem Wurzelterm aus Gl. (4) stammt – und dieser ist nun mal mit „±“ versehen, was genau die komplexe Konjugation ausmacht.

Beispiel ($a = 2,\ b = 5$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$; Eigenwerte: $-1 \pm \mathrm{i}\ 2$ (wie erwartet komplex konjugiert); Eigenvektoren: $[1, -1 \pm \mathrm{i}\ 2]$. Nach den Überlegungen bei (7) ist mit

$$\phi = \Gamma \cdot \exp((-1 + \mathrm{i}\ 2) \cdot t) \cdot [1, -1 + \mathrm{i}\ 2]$$

die Lösung:

$$\begin{gathered} A \cdot \exp(-t) \cdot [\cos(2\,t), -\cos(2\,t) - 2\sin(2\,t)] \\ +B \cdot \exp(-t) \cdot [\sin(2\,t), -\sin(2\,t) + 2\cos(2\,t)]\ . \end{gathered}$$

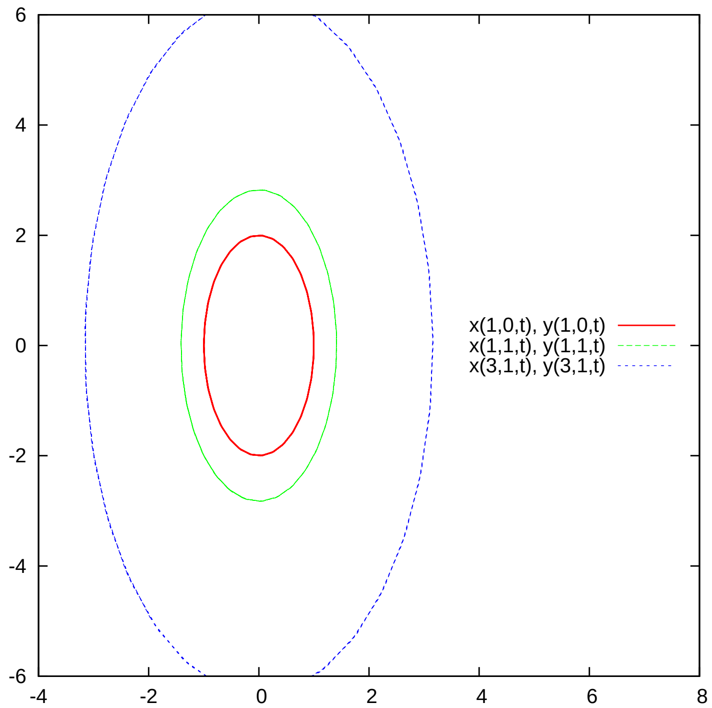


Die Spiralform ergibt sich hier aus dem Vektorteil – auch wenn man den exp-Teil weglassen würde, würden sich trotzdem Spiralen bilden...

(b) $a = 0$: $\Re\lambda = 0$, $\Im\lambda = \pm\sqrt{b}$.

Beispiel ($b = 4$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$; Eigenwerte (wie erwartet): ± 2 i, Eigenvektoren $[1, \pm 2\ \mathrm{i}]$. Mit $\phi = \Gamma \cdot \exp(2\ \mathrm{i} \cdot t) \cdot [1, 2\ \mathrm{i}]$ ist die Lösung:

$$A \cdot [\cos(2\,t), -2\sin(2\,t)] + B \cdot [\sin(2\,t), 2\cos(2\,t)]\ .$$



Diesen Verlauf konnte man sich wieder denken, weil der Vektor einen Kreis parametrisiert, bis auf die „2" im y-Teil – dadurch wird der Kreis verdellt. A und B gehen gleichermaßen in den Radius der Ellipse ein, weswegen die Formen auch symmetrisch unter Vertauschung von A und B sind.

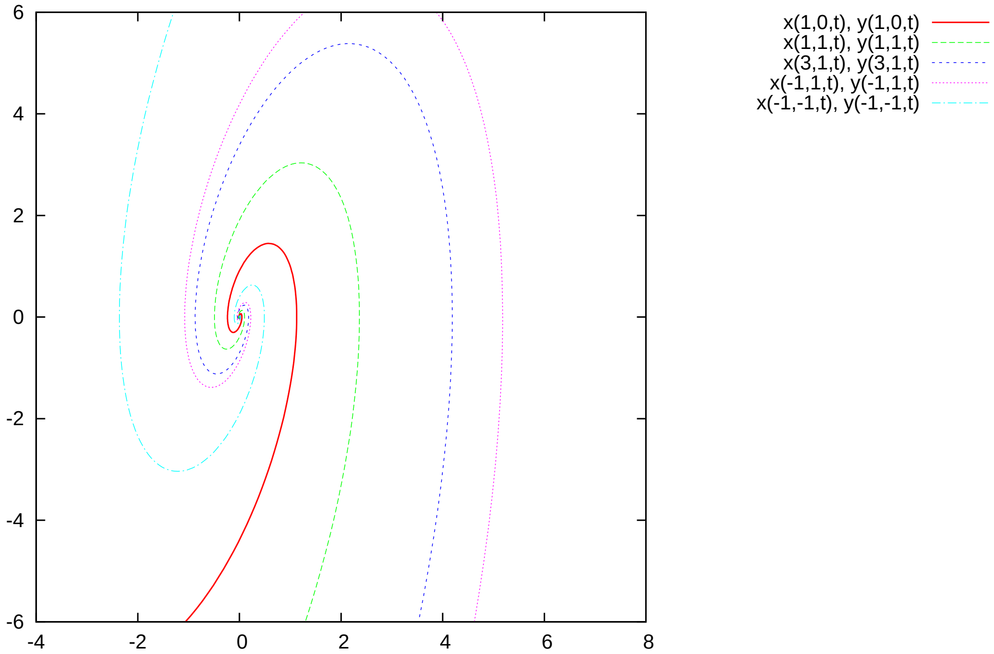
Bemerkung: Dies ist das Phasendiagramm eines *harmonischen Oszillators*!

(c) $a < 0,\ b \neq 0$: [7] $\Re\lambda > 0$.

Beispiel ($a = -2,\ b = 3$): $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; Eigenwerte: $1 \pm \mathrm{i}\,\sqrt{2}$, Eigenvektoren: $[1, 1 \pm \mathrm{i}\,\sqrt{2}]$. Mit $\phi = \Gamma \cdot \exp((1 + \mathrm{i}\,\sqrt{2}) \cdot t) \cdot [1, 1 + \mathrm{i}\,\sqrt{2}]$ folgt als Lösung:

$$A \cdot \exp(t) \cdot [\cos(2\,t), \cos(2\,t) - 2\sin(2\,t)] + B \cdot \exp(t) \cdot [\sin(2\,t), \sin(2\,t) + 2\cos(2\,t)]\ .$$

[7] Den Fall $a < 0$, $b = 0$ müssen wir nicht untersuchen, weil aus $a < 0$ folgt, dass $a^2 > 0$ und damit $b > 0$.



Für stark negative t sieht man hier wieder, wie die exp-Terme die Lösungen zum Ursprung drücken, sonst sieht man eigentlich nur die Analogie vorvorigen Fall.

Die hier betrachteten Diagramme kann man sich als **Phasenraumtrajektorien** physikalischer Systeme vorstellen: Nach der Substitution in (2) kann man x_1 als eindimensionalen *Ort* des Teilchens und x_2 als *Geschwindigkeit* des Teilchens Interpretieren. Der Paramter t gibt dann die Zeitentwicklung an. Wenn die Kurven sich dem Ursprung nähren, so kann man dies also interpretieren, als würde das System bei $x = 0$ zur Ruhe ($x' = 0$) kommen.