Geometrie Oberstufe

Michael Kopp

25. Februar 2009

Zusammenfassung

Bei der Arbeit mit meinen Nachhilfeschülern ist mir aufgefallen, dass die Geometrie in der Oberstufe nur auf in paar wenigen Grundlagen basiert, die aber leider von vielen trotzdem nicht beherrscht werden. Hier deshalb eine kleine Einführung.

Inhaltsverzeichnis

1 Geometrische Elemente

1.1 Der Vektor und der Punkt

In der Geometrie arbeitet man mit Elementen in einem Raum $\mathbb{R}^n$ d.h. jedes Element kann exakt durch n Zahlen $x_i \in \mathbb{R}$ ausgedrück werde. Im Allgemeinen nennt man diese Elemente dann *Vektoren* und bezeichnet sie mit einem kleinen Pfeil $\vec{\ }$:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Im Prinzip ist solch ein Vektor also nur eine Ansammlung von Zahlen. Dabei ist die Reihenfolge, in der die Zahlen angegeben werden, entscheidend – $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$. Wie lang solch eine Zahlengruppe (mathematisch korrekt: „*Tupel*") ist, ist mehr oder weniger beliebig zu wählen – je nachdem, wie komplex man es haben möchte.

Beschreibt man Vorgänge und Begebenheiten aus der Natur, und denkt man dabei nur in 2 Dimensionen – also bspw. auf der Oberfläche eines Schreibtisches oder die Ausdehnung eines Platzes – so verwendet man Vektoren nach der Art $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Möchte man Probleme im Raum bearbeiten, so verwendet man Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – dabei entsprechen die einzelnen x-Werte (mathematisch korrekt: „*Komponenten*") *Höhe*, *Breite* und *Tiefe*.

Mit diesen Vektoren kann man nun einerseits Richtungen darstellen – dabei sind die einzelnen Komponenten als *Verschiebung* nach rechts–links, oben–unten bzw. vorne–hinten zu interpretieren.

Wählt man nun einen festen Punkt – den sog. Ursprung, der mit O bezeichnet wird, so kann man von diesem ausgehend alle Punkte des Raumes bzw. der Fläche mit einem Vektor erreichen. Einen Punkt P, der drei Einheiten oberhalb, vier Einheiten rechts und zwei Einheiten vor dem Ursprunt O liegt, würde man dann bspw. mit $P = (4, 2, 3)$ bezeichnen, gleichzeitig bezeichnet man den Vektor – also im Prinzip die Richtung mit $\vec{p} = (4, 2, 3)$.

Dabei muss man aber eine wichtige Unterscheidung machen: Ein Punkt ist präise im Raum gegeben, wenn ein Ursprung O definiert ist. Ein Vektor dagegen besteht nur aus einer Länge und einer Richtung – *wo* er genau ansetzt, ist aber beliebig. Ein Punkt ist deshalb als Vektor vom Ursprung aus zu interpretieren.

Der *Gegensatz* zum Vektor ist übrigens der *Skalar*. Er ist eine einfache Zahl, wie wir es gewohnt sind – also verfügt ein Skalar nicht über eine bestimmte Richtung und kann durch eine einzige Zahl geschrieben werden.

Die in der Schule übliche Unterscheidung zwischen den Schreibweisen für Punkte $P(a|b|c)$ und der für Vektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ werde ich hier nicht fortführen – jetzt wo man weiß, dass im Prinzip alles das selbe ist.

Auf den Punkt gebracht 1 *Ein Vektor in einem n-dimensionalen Raum wird durch n Zahlen ausgedrückt, die geordnet zusammengefasst werden. Ein Vektor repräsentiert eine Richtung und eine Länge, hat man zusätzlich einen Punkt O, an dem er angreifen kann, kann man mit Vektoren Punkte genau beschreiben.*

1.2 Rechenregeln für Vektoren

Für Vektoren gelten ein paar *Elementare* Rechenregeln:

Addition Die Addition zweier Vektoren: Zwei Vektoren addiert man, indem man die entsprechenden Komponenten addiert. Dabei sollte man darauf achten, dass die Vektoren die selbe Anzahl an Elementen haben.
Seinen also $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ Vektoren mit der selben Anzahl an Elementen, so gilt für die Addition:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...x_n + y_n) \tag{Vektoraddition}$$

Multiplikation mit Skalaren Einen Vektor kann man mit einem *Skalar* mulitplizieren und das Ergebnis ist ein Vektor. Das sieht dann für einen Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ und einen Skalar a so aus:

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n) \tag{Skalare Multiplikation}$$

Ein Vektor, den man mit einem Skalar multipliziert, ***behält seine Richtung*** – diese ist ja gewissermaßen durch das Verhältnis seiner einzelnen Komponenten gegenüber einander gegeben – jedoch ***ändert sich seine Länge*** . D.h. für Skalare $0 < a < 1$ wird der Vektor verkürzt, für $a > 1$ verängert. Ist der Skalar *negativ*, so ***dreht sich die Richtung des Vektors um*** .

Skalarprodukt Zusätzlich ist für Vektoren noch ein Skalarprodukt definiert. für uns ist das sog. „*kanonische Skalarprodukt*“ das einzig wichtige. Dabei werden zwei Vektoren miteinander mulitpliziert und als Ergebnis erhält man einen Skalar. Für die Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ mit der selben Anzahl an Elementen gitl so:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, ..., x_n \cdot y_n) \quad \text{(simples Skalarprodukt)}$$

Eine wichtige Eigenschaft des Skalarproduktes ist, dass ***wenn*** $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$***, dann stehtn*** $\vec{x}$ ***und*** $\vec{y}$ **senkrecht** ***aufeinander*** .

Wichtig ist, dass das Skalarprodukt, auch wenn es eine Art Mulitplikation ist, *nicht* Assoziativ ist:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Wobei eine gewisse *Harmonie*[1] zwischen skalarer Multiplikation und dem Skalarprodukt besteht:

$$(a \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = a \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(Siehe auch Def. 1 auf S. 6.)

Kreuzprodukt Zusätzlich ist im Raum $\mathbb{R}^3$ noch das *Kreuzprodukt* definiert – es existiert wirklich nur in diesem Raum – also in drei Dimensionen. Die Eigenschaften, die es hier interessant machen, ist, dass wenn man zwei Vektoren mit dem Kreuzprodukt multipliziert, erhält man einen weiteren Vektor, der dann senkrecht auf den beiden vorhergehenden Vektoren steht. Es ist definiert wie folgt: Seinen wieder $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ Vektoren mit der selben Anzahl an Elementen, so gilt für das Kreuzprodukt:

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_1, x_2, ..., x_n) \times (y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_1 \end{pmatrix} \quad \text{(simples Kreuzprodukt)}$$

(Siehe auch: Def. 2 auf S. 6)

Länge eines Vektors Die Länge eines Vektors bezeichnet man im Allg. mit den Betragsstrichen $|\vec{x}|$. Im *kartesischen Koordinatensystem*[2] rechnet man so:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \quad \text{(Länge eines Vektors)}$$

[1] so etwas wie Assoziativität

[2] Alle Koordinatenachsen stehen senkrecht aufeinander und haben die gleichen Skalen.

Für zwei Dimensionen erkent man hier den *Satz des Pythagoras*: $\vec{c} = (a, b) \Rightarrow |\vec{c}|^2 = a^2 + b^2$

Abstand zwischen zwei Punkten Den Abstand $d(\cdot)$ zwischen zwei Punkten interpretiert man nun als die ***Länge des Vektors, der zwischen den beiden Punkten liegt*** . Also ist

$$d(\vec{p}, \vec{q}) = |\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + ... + (p_n - q_n)^2} \qquad \text{(Abstand zw. Vektoren)}$$

alternative Definitionen

Definition 1 *Skalarprodukt*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot cos(\varphi) \qquad \text{(Skalarprodukt)}$$

Dabei ist φ der Winkel *zwischen den beiden Vektoren.*

Definition 2 *Kreuzprodukt*

$$\vec{x} \times \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot sin(\varphi) \qquad \text{(Kreuzprodukt)}$$

Dabei ist φ der Winkel *zwischen den beiden Vektoren.*

1.3 Projektion

Man kann einen Vektor $\vec{x}$ auf einen Vektor $\vec{y}$ projezieren. Das bedeutet, dass man nur die Anteile von $\vec{x}$ weiterverwendet, die wirklich parallel zu $\vec{y}$ sind. Diesem Längenanteil gibt man nun die Richtung von $\vec{y}$ mit.

Mathematisch geschieht dies unter Verwendung des Skalarproduktes:

$$\underbrace{\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|}}_{\text{Länge der Projektion}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}}_{\text{Richtung}} \qquad \text{(Projektion von } \vec{x} \text{ auf } \vec{y}\text{)}$$

1.4 Linearkombination

Bei einer *Linearkombination* verwendet man die beiden oben eingeführten Operationen: die ***Addition von Vektoren und die Skalare Multiplikation*** (siehe Gl. Vektoraddition und Skalare Multiplikation).

Damit addiert man alle Vektoren beliebig oft miteinander und mulitpliziert jeden einzelnen Vektor mit beliebigen Skalaren.

Beispiel 1 *Eine mögliche Linearkombination für die Vektoren* $(1,3,2)$ *und* $(2,-3,7)$ *ist:*

$$2 \cdot (1,3,2) + (-2) \cdot (2,-3,7) = (-2,12,-10)$$

Eine andere Möglichkeit ist

$$(-1) \cdot (1,3,2) + (3) \cdot (2,-3,7) = (5,-12,19)$$

Auf den Punkt gebracht 2 *Linearkombination der Vektoren* $\vec{r}$*,* $\vec{s}$*, ...,* $\vec{z}$*:*

$$a \cdot \vec{r} + b \cdot \vec{s} + ... + q \cdot \vec{z}$$

1.5 Lineare Abhängigkeit

Vektoren werden dann als *linear abhängig* bezeichnet, wenn es ***möglich ist, einen der Vektoren als*** **Linearkombination** ***der anderen darzustellen*** .

Ist dies nicht möglich, so werden die Vektoren als *linear unabhängig* bezeichnet.

1.6 Die Gerade

Eine Gerade besteht aus einer Ansammlung von Punkten. Zwischen den einzelnen Punkten kann man mittels einem skalar multiplizierten Vektor hin und her wechseln, d.h. die Punkte liegen alle in einer ***bestimmten*** **Richtung** angeordnet. [3] Man könnte eine Gerade also eigentlich so darstellen, dass man einfach aufzählt, welche Punkte auf ihr enthalten sind. Leider ist es aber so, dass eine Gerade ***unendlich in beide Richtungen*** geht – d.h. man müsste unendlich viele Punkte aufzählen.

Um sich den Schreibauwand also etwas zu reduzieren, führt man eine besondere Schreibweise ein. Man wählt dazu einen Punkt S ***(„Stützvektor“),***

[3] Beispiel: jeder Nachbarpunkt liegt auf eine bestimmte Art etwas links überhalb seines „Vorgängers“

der definitiv in der Geraden enthalten ist und verwendet seinen Vektor $\vec{s}$. Ans Ende dieses Vektors setzt man einen weitern Vektor $\vec{r}$***. Dieser bestimmt die Allgemeine Richtung*** , die zwei benachbarte Punkte zueinander haben – nicht aber den Abstand. Nun erhält man einen neuen Punkt $\vec{x}$ als Summe dieser beiden Vektoren.

So hat man noch nicht sonderlich viel gewonnen – man hat bisther nur einen Punkt auf der Geraden wesentlich komplizierter ausgedrückt als vorher. Was aber nun der Trick ist: Man verwendet nicht nur den Vektor $\vec{r}$, sondern auch Stauchungen und Streckungen seiner selbst – also man multipliziert $\vec{r}$ mit einem Skalar a (siehe Gl. Skalare Multiplikation auf S. 4).

Nun hat man schon einen zweiten Punkt erzeugt – einmal den $\vec{s} + \vec{r}$ und nun noch den $\vec{s} + a \cdot \vec{r}$. Der Trick, wie man nun vom Vektor zur Geraden übergeht, ist, dass man für a schlichtweg *alle möglichen Werte* einsetzt, die a annehmen kann. Man verlängert $\vec{r}$ also in beide Richtungen (positiv und negativ) sowohl unendlich weit, als man ihn auch unendlich klein verkürzt. Hat man wirklich *alle* Werte für a eingesetzt, so hat man eine Gerade.

Eine mögliche Schreibweise dafür ist:

$$g : \vec{x} = \vec{s} + a \cdot \vec{r} \qquad \text{(Geradengleichung)}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$.

Auf den Punkt gebracht 3 *Jeder Punkt $\vec{x}$, der mit dieser Vorschrift erzeugt werden kann, liegt auf bzw. in der Geraden g.*

1.7 Ebene

Eine *Ebene* ist im Prinzip mit einer Geraden zu vergleichen – einziger Unterschied: Eine Ebene ***dehnt sich in zwei Richtungen unendlich weit as*** und in einer dritten überhaupt nicht.

Man kann eine analoge Überlegung wie in Kap. 1.6 anstellen, dann wird man für eine Ebene die folgende Vorschrift erhalten:

$$E : \vec{x} = \vec{s} + a \cdot \vec{p} + b \cdot \vec{q} \qquad \text{(Ebenengleichung)}$$

Mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $\vec{p}, \vec{q}$ müssen in zwei verschiedene Richtungen zeigen (sie dürfen nicht direkt aufeinander liegen!) D.h. sie müssen *linear unabhängig sein.*

Hier braucht man also ***zwei Richtungsvektoren*** $\vec{p}$ und $\vec{q}$, aber wieder „nur" ***einen Stützvektor*** $\vec{s}$. Dies ist wieder logisch ersichtlich: Wir starten von einem Punkt im Raum aus, den wir mit $\vec{s}$ bezeichnen können und gehen in eine bestimmte Richtung $\vec{p}$ weiter, und zwar so weit wir wollen (die Weite erledigt a). Von diesem Punkt aus zweigen wir noch in eine andere Richtung ab und gehen von dort aus wieder beliebig weit und sind dann an unserem „*Ziel*" $\vec{x}$ angelangt.

Dass wir die Ebene nicht verlassen können, liegt daran, dass nur *zwei* Vektoren in der Länge beliebig variierbar sind. So kann ich nur in *zwei* Richtungen beliebig weit gehen, nicht aber in eine dritte, senkrecht dazu. Hätte ich drei linear unabhängige Vektoren, die alle in unterschiedliche Richtungen zeigen und beliebig skalar mulitpliziert werden, so könnte man mit der Summe dieser drei Vektoren jeden Punkt im drei dimensionalen Raum erreichen.

1.7.1 Alternative Darstellungsarten

Für Ebenen hat sich noch eine weitere Art von Darstellung etabliert – man nennt sie *Koordinatenform*. Dabei verwendet man einen Vektor $\vec{n}$, der *senkrecht* zu der zu beschreibenden Ebene steht. Möchte man nun wissen, ob ein bestimmter Punkt in dieser Ebene liegt, multipliziert man diese beiden Vektoren skalar. bekommt man als Ergebis eine Zahl b, so liegt der Punkt in der Ebene, bekommt man eine andere Zahl entsprechend nicht.

Die Allgemeine Form für eine Ebenengleichung dieser Art ist:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + ... + n_n \cdot x_n = b \qquad \text{(Koordinatenform)}$$

Möchte man eine ebene in solch einer Darstellung erzeugen, muss man also logischerweise einen Normalenvektor $\vec{n}$ finden und dann das Skalarprodukt dieses Vektors mit einem Punkt, der definitiv in der Ebene liegt, rechnen und als b bezeichnen.

1.7.2 Umwandlung

Die beiden Wege, eine Form in die andere umzuwandeln, sind nicht besonders schwierig zu erlernen und umzusetzen, dafür aber um so wichtiger.

Ebenenform in Koordinatenform Hat man die Ebenendarstellung gegeben, so bestimmt man mit dem *Kreuzprodukt* einen Vektor $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$.

Um nun herauszufinden, wie der Faktor b aussehen muss, wählt man einfach einen beliebigen Punkt $\vec{x}$, der in der Ebene liegt und bildet das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{x} = b$.

Will man überprüfen, ob man alles richtig gemacht hat, kann man einen weiteren Vektor $\vec{y} \in E$ wählen. Wenn gilt $\vec{y} \cdot \vec{n} = b$, so hat man die Ebenengleichung aller Wahrscheinlichkeit nach richtig gewählt.[4]

Koordinatenform in Ebenenform Man wählt sich drei beliebige Punkte $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$ der Ebene E aus un bestimmt nun

$$\vec{s} = \vec{u},\ \vec{p} = \vec{u} - \vec{v},\ \vec{u} - \vec{w}$$

und schon hat man die Ebene.

Besonders einfach kann man die Punkte $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$ bestimmen, indem man in der Ebene immer zwei Komponenten von $\vec{x}$ gleich 0 setzt; dann kann man die letzte verbleibende mit $x_i = \frac{b}{n_i}$ bestimmen.

1.8 Kreise, Kugeln, unregelmäßige Körper

Unregelmäßig geformte Körper sollen hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden. Will man einen solchen Körper definieren, so ist man darauf angewiesen, eine Bildungsvorschrift zu finden, bei der eine Formel dafür sorgt, dass nur die Punkte $\vec{x}$ erzeugt werden können, die auch wirklich in bzw. auf dem Körper liegen.

So definiert man einen kreis bzw. eine Kugelhülle[5] bspw. so:

$$d(\vec{x}, \vec{m}) = r$$

mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $\vec{m}$. Wählt man also bspw. einen Punkt $\vec{y}$ außerhalb des Kreises, so erhält man $d(\vec{y}, \vec{m}) \neq r$

[4] Will man *völlig* sicher sein, so muss man wirklich *drei* Punkte testen, weil eine Ebene im dreidimensionalen Raum durch drei Punkte genau bestimmt ist.

[5] einen Kreis erhält man so, wenn man in zwei Dimensionan arbeitet, eine Kugel, wenn man in drei Dimensionen arbeitet.

2 Gegenseitige Lagen

Nun kommen wir dazu, die geometrischen Objekte, die wir soeben erzeugt haben, etwas näher zu untersuchen. *Ein* solches Kriterium ist dabei, wie die Körper sich zueinander im Raum verhalten – also ob sie friedlich nebeneinander liegen oder sich druchdringen etc.

Eine kleine Konvention muss man an dieser Stelle machen: Ein ***Objekt*** A ***liegt in einem anderen Objekt*** B***, wenn* jeder *Punkt aus*** A ***auch in*** B ***enthalten ist*** . In diesem Falle schreibt man auch

$$A \subseteq B$$

Zwei Objekte A und B sind **identisch*, wenn wirklich* jeder *Punkt von*** A ***in*** B ***liegt.*** Man schreibt dann

$$A = B$$

Dabei gilt der Zusammenhant

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$

Will man andeuten, dass sich zwei Objekte A und B im geometrischen Sinne *schneiden*, so bedeutet dass, dass sie ***mindestens einen gemeinsamen Punkt*** haben. Man schreibt in diesem Fall auch

$$A \subset B$$

Es handelt sich bei dieser Definition also gewissermaßen um eine abgeschwächte Definition von „in einem anderen Objekt liegen“ ($\subseteq$).

Eine kleine Übersicht, welche Möglichkeiten man hat, verschiedene Elemente miteinander zu vergleichen, bietet sich in Abbildung 1 an. Daran kann man sich orientieren, wenn man sich überlegt, was es denn alles für Möglichkeiten in der Geometrie gibt. Wie man sieht, sind sie für und schon etwas eingeschränkt...

2.1 Punkt – Punkt

Punkte $\vec{x}$ ***und*** $\vec{y}$ ***können entweder* identisch *sein, oder* verschieden.** Sind die Punkte gleich, schreibt man $\vec{x} = \vec{y}$, ansonsten $\vec{x} \neq \vec{y}$.

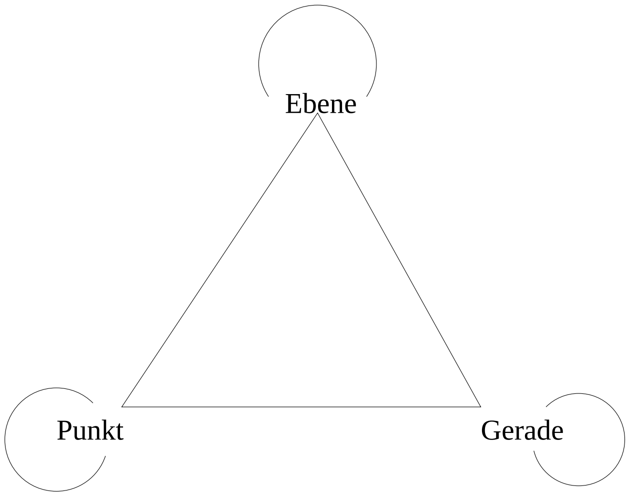

Abbildung 1: Übersicht über die drei geometrischen Elemente *Punkt*, *Gerade* und *Ebene* – die linien symbolisieren verknüpfungen zwischen zwei Objekten. Insgesamt gibt es also sechs Möglichkeiten, zwei Objekte zu vergleichen.

2.2 Punkt – Gerade

Ein Punkt** x **kann entweder auf bzw. **in einer Geraden** g ***liegen, oder*** **außerhalb** ***davon.*** Man überprüft das einfach, indem man in die Gleichung der Geraden (siehe Geradengleichung) den Punkt x einsetzt. Kommt für den Parameter a ein sinnvoller Wert $a \in \mathbb{R}$ heraus, so liegt $\vec{x}$ auf der Geraden. Man schreibt dann $\vec{x} \in g$, ansonsten $\vec{x} \notin g$.

2.3 Gerade – Gerade

Zwei Geraden g und h untereinander können eines der folgenden sein:

identisch $g = h$, also jeder Punkt aus g liegt auch in h.

parallel Die beiden Geraden haben *keinen* gemeinsamen Punkt. Jedoch sind die Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ *Linearkombinationen* (siehe Kap. 1.4) voneinander. Trifft dies zu, kann es immer noch sein, das di beiden Geraden identsich sind – dies überprft man, indem man den Stützvektor $\vec{s}_g$ in die Gleichung von h als $\vec{x}$ einsetzt und schaut, ob sich ein sinnvoller Wert für $a \in \mathbb{R}$ ergibt. Man schreibt dann $g \| h$

schneidend Die beiden Geraden stimmen nur in *einem* Punkt überein. D.h. ihre Richtungsvektoren müssen verschieden sein[6].

Schneiden sich zwei Geraden, so kann man schreiben $g \subset h$.

Man prüft, ob zwei Geraden einen Schnitt haben, indem man sie gleichsetzt. Der Hintergrund davon ist, dass beide Geraden nach $\vec{x}$ aufgelöst sind. Setzt man sie gleich, setzt man gewissermaßen voraus, dass ein bestimmer Punkt $\vec{x}_0$ existiert, für den beide Gleichungen in Ergebnis liefern. Wenn dies erfüllt ist, dann bekommt man für die beiden Parameter a_g und a_h sinnvolle Werte $a_g, a_h \in \mathbb{R}$.

Möchte man nun die *Koordinaten des Schnittpunktes* bestimmen, so setzt man einfach in die Gleichung g den gefunden Wert für a_g ein.[7]

windschief Wenn zwei Geraden ***weder parallel sind, noch sich schneiden*** , also keinen gemeinsamen Punkt haben und ihre Richtungsvektoren nicht linear abhängig sind, so sind sie *windschief.*

2.4 Gerade – Ebene

Für eine Gerade g und eine Ebene E gibt es nur drei Möglichkeiten, wie sie sich zueinander im Raum verhalten können:

Teilmenge Es kann sein, dass die Gerade g vollständig in der Ebene E liegt. D.h. ***jeder Punkt, der in g enthalten ist, ist automatisch auch in E enthalten*** [8]. Es gitl jedoch *nicht* für die Umkehrrichtung: Es gibt Punkte aus E die *nicht* in g enthalten sind.

Man schreibt dann $g \subseteq E$

Damit jeder Punkt einer Geraden auch in einer Ebene liegen muss, ist es logischerweise notwendig, dass die Gerade ***parallel*** zu der Ebene ist ($g \| E$) und logischerweise gilt auch, dass g und E gemeinsame Punkte haben – sich also auch ***schneiden*** ($g \subset E$), jedoch in ***unendlich vielen Punkten*** .

[6]Sonst wäre sie ja entweder parallel oder identisch – wären sie parallel, so hätte sie *keinen* gemeinsamen punkt, wären sie identsich, hätten sie *unendlich viele* gemeinsame Punkte.

[7]Um diesen zu überprüfen, kann man den gefundenen Wert a_h in die Gleichung von h einsetzen. Hat man richtig gerechnte, so sollten jetzt eigentlich zwei mal die gleichen Punkte $\vec{x}_g$ und $\vec{x}_h$ herauskommen.

[8]Mathematisch formal würde man das so schreiben: $\forall_P : P \in g \Rightarrow P \in E$

parallel Es kann auch gut sein, dass eine Gerade g *nur* parallel zur Ebene E ist – wenn g nicht Teilmenge von E ist (also $g \nsubseteq E$) so haben die beiden ***keinen einzigen gemeinsamen Punkte*** . (s. unten)

Man schreibt dann $g \| E$

schneidend Es kann auch sein, das die Gerade g mit der Ebene E nur ***einen einzigen gemeinsamen Punkt*** hat. In diesem Falle spricht man davon, dass g E *schneidet*.

Man schreibt also $g \subset E$

Mehr Möglichkeiten gibt es nicht – schließlich sind die von uns beobachteten Elemente bis in die Unendlichkeit ausgedehnt. D.h. wenn eine Gerade nicht zu einer Ebene parallel ist, so wird sie sie *irgendwann* schneiden – dann aber nur in diesem einen Punkt ($g \subset E$). Sind die beiden jedoch parallel ($g \| E$), so werden sich nicht im Endlichen schneiden[9]. Den dritten Fall ($g \subseteq E$) kann man gewissermaßen als *Zwitterwesen* der beiden anderen Fälle ansehen.

Schneidet eine Gerade eine Ebene ($g \subset E$), ist jedoch ***nicht Teilmenge*** der Ebene ($g \nsubseteq E$), so haben Gerade und Ebene ***genau einen gemeinsamen Punkt*** . Dieser wird *Schnittpunkt* genannt.

Möchte man untersuchen, ob eine Gerade g in einer Ebene E enthalten ist, so genügt es, zwei beliebige Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in g$ zu testen, ob sie in E liegen. Wenn ja, so ist g in E enthalten ($g \subseteq E$), wenn nicht, so eben nicht...

Man kann dies alternativ tun, indem man den *Richtungsvektor* $\vec{r}$ der Geraden g verwendet und schaut, ob er von den Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{p}$, die die Ebene E aufspannen, gebildet werden kann, also ob gilt $a \cdot \vec{s} + b \cdot \vec{p} = \vec{r}$. Dann ist der Richtungsvektor $\vec{r}$ von $\vec{p}, \vec{s}$ *linear abängig* und die Gerade liegt in der Ebene.

2.5 Ebene – Ebene

Für zwei Ebenen E und F sieht die Sache ähnlich einfach aus, wie für eine Gerade und eine Ebene. Auch für zwei Ebenen gibt es dir folgenden Möglichkeiten:

parallel Die beiden Ebebnen schneiden sich *nie* – haben also ***keinen gemeinsamen Punkt*** .

[9] Nur im *Unendlichen*: Es gibt einen mathematishen Formalismus, demnach sich parallele Objekte in der *Unendlichkeit* schneiden – mit solch einer Definition können wir aber nicht allzu viel anfangen, deshalb hier die möglicherweise etwas komplizierte Formulierung.

Man schreibt dann $E \| F$

schneidend Die beiden Ebenen können sich schneiden. Es ist dann so, dass die Punkte, die in beiden Ebenen enthalten sind, eine *Spurgerade* bilden; ***alle Schnittpunkte liegen also auf dieser Geraden*** .

Man kann dann schreiben $E \supseteq g \subseteq F$

identisch Schließlich können zwei Ebenen auch so liegen, dass ***jeder Punkt der einen Ebene in der anderen enthalten*** ist; dann sind sie *identisch.*

Man schreibt dann $E = F$.

Um die Lage zweier Ebenen E und F zu untersuchen, kann man verschiedene Methoden verwenden. Die Einfachste ist dabei, dass man den *Normalenvektor* $\vec{n}$ der Koordinatenform (Koordinatenform) der Ebene verwendet: Ist $\vec{n}_E$ von $\vec{n}_F$ *linear unabhängig* (also zeigen die beiden in die gleiche Richtung, so sind die Ebenen zumindest *parallel.* Um herauszufinden, ob sie *identisch* sind, braucht man nur einen beliebigen Punkt $\vec{x} \in E$ der einen Ebene zu nehmen und in die Andere einzusetzen. Ist dieser Punkt $\vec{x}$ in der anderen Ebene enthalten ($\vec{x} \in F$), so sind die beiden Ebenen *identisch.*

Sind die beiden Normalenvektoren dagegen *linear unabhängig* (als *nicht parallel*), so schneiden sich die Ebenen automatisch und bilden die Spurgerade.

2.6 Ebene – Punkt

Bei einer Ebene E und einem Punkt $\vec{x}$ hat man ziemlich beschränkte Möglichkeiten:

enthalten Die Ebene kann den Punkt enthalten – man schreibt $\vec{x} \in E$ oder

nicht enthalten sie kann den Punkt *nicht* enthalten – man schreibt $\vec{\notin} E$

Die Prüfung, welcher der beiden Fälle zutrifft, ist tivial; man setzt $\vec{x}$ mit seinen Koordinaten in die Ebenengleichung ein und wenn man ein warhes Ergebnis erhält, so ist $\vec{x} \in E$ sonst eben $\vec{x} \notin E$.

3 Schnitte

3.1 Gerade – Gerade

Zwei Geraden g und h schneiden sich genau dann, wenn sie einen gemeinsamen Punkt $\vec{x}_0$ haben. Für diesen gemeinsamen Punkt müssen die beiden Geradengleichungen also beide eine sinnvolle Lösung haben. Da bei all unseren verwendeten Methoden die Darstellung eines Punktes *eindeutig* ist, können wir also in g und in h beide male eine eindeutige Darstellung für $\vec{x}_0$ erhalten.

Man berechnet die Schnittpunkte zweier Geraden, indem man ein *lineares Gleichungssystem* aufstellt. Grundlage hierfür ist, dass man zwei Geradengleichungen gleichsetzt. Jede der Geradengleichungen kann man bei n Dimensionen in n Zeilen aufteilen. Schneidet man bspw. zwei Geraden im 3-D-Raum, hat man drei Zeilen und zwei Unbekannte (a_g und a_H).

Beispiel Ein konkretes Beispiel hier:

$$g = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + a_g \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \text{ und } h = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + a_h \cdot \begin{pmatrix}4\\10\\6\end{pmatrix}$$

Dies fürht auf die lineare Gleichung

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot a_g &= 3 + 4 \cdot a_h \\ 2 + 2 \cdot a_g &= 1 + 10 \cdot a_h \\ 5 + 1 \cdot a_g &= 4 + 6 \cdot a_h \end{aligned}$$

Löst man dieses System auf, so erhält man $a_g = 2$ und $a_h = \frac{1}{2}$ und als Schnittpunkt $\vec{x} = (5, 6, 7)$. Den Schnittpunkt bezeichnet man oft mit $S(5|6|7)$.

3.2 Gerade – Ebene

Hat man getestet, dass eine Gerade g nicht vollständig in einer Ebene E liegt (also $g \not\subseteq E$), sondern diese in einem Punkt $\vec{x}_0$ schneidet – und auch nur dort ($g \subset E$ bzw $g \ni \vec{x}_0 \in E$), so kann man den Schnittpunkt $\vec{x}_0$ berechnen.

Dabei ist es entscheidend, welche Koordinatenform für die Ebene verwendet wurde.

3.2.1 Ebenengleichung

Siehe Ebenengleichung auf S. 8.

Hier muss man die beiden Gleichungen gleichsetzen. D.h. man hat linkd des "=" die Gleichung der Ebene und rechts die Gleichung der Geraden. Hintergrund hierfür ist, dass beide male der Punkt $\vec{x}_0$ Element des Objekts ist und man somit sowohl mit Gerade als auch mit Ebene den Punkt $\vec{x}_0$ eindeutig ausdrücken kann.

Anschließend bildet man mit den einzelnen Komponenten jeweils eine eigene Gleichung und kann hier ein lineares Gleichungssystem lösen, weil durch die Ebene zwei Unbekannte und durch die Gerade eine weitere Unbekannte hinzukommt, man aber (im dreidimensionalen Raum) für jeden Vektor drei Komponenten und damit drei separate Gleichungen für ein Lineares Gleichungssystem hat.

$$\vec{s}' + a \cdot \vec{r}' = \vec{x}_0 = \vec{s} + a \cdot \vec{p} + b \cdot \vec{q}$$

Führt zum Linearen Geichungssystem:

$$\begin{aligned} s_1' + a \cdot r_1' &= s_1 + a \cdot p_1 + b \cdot q_1 \\ s_2' + a \cdot r_2' &= s_2 + a \cdot p_2 + b \cdot q_2 \\ s_3' + a \cdot r_3' &= s_3 + a \cdot p_3 + b \cdot q_3 \end{aligned}$$

und dieses ist lösbar.

Dabei muss man eigentlich nicht einmal das komplette Gleichungssystem lösen; es reicht völlig, wenn man den Wert von a ermittelt hat; dann kann man a in die Gleichung von g einsetzen und erhält so den Schnittpunkt.

3.2.2 Koordinatenform

Siehe Gl. Koordinatenform auf Seite 9.

In der Koordinatenform tauchen ja x_1, x_2 und x_3 auf. Diese drei Terme ersetzt man nun mit den jeweiligen Komponenten der Gleichung der Geraden:

$$g : \vec{x} = \vec{s} + a \cdot \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + a \cdot r_1 \\ s_2 + a \cdot r_2 \\ s_3 + a \cdot r_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}\cdot\vec{x} = n_1\cdot x_1 + n_2\cdot x_2 + n_3\cdot x_3 = b = n_1\cdot(x_1 + a\cdot r_1) + n_2\cdot(x_2 + a\cdot r_2) + n_3\cdot(s_3 + a\cdot r_3) = b$

Bei dieser Gleichung gilt es nun nur noch, a zu bestimmen. Setzt man anschließend a in die Geradengleichung g ein, so erhält man den Schnittpunkt.

3.3 Ebene – Ebene

Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so ist es die beste Mögichkeit, die beiden in Form der Ebenengleichung (siehe Ebenengleichung auf S. 8) vorzuliegen zu haben. Tun sie das nicht, muss man entsprechend umformen.

4 Abstände

Es ist wichtig, im Kopf zu behalten, dass man zwischen zwei Objekten nicht irgendeinen Abstand misst, sondern stets ***den kleinst möglichen Abstand*** !

Bei allen gezeigten Rechenmethoden empfiehlt es sich, zuallererst zu überprüfen, ob die beiden Objekt sich nicht schneiden oder sogar eines vollständig in einem anderen enthalten ist; dann wäre der Abstand $d = 0$.

4.1 Punkt – Punkt

Der Abstand d zwischen zwei Punkten $\vec{x}$ und $\vec{y}$ lässt sich ***nach* PYTHAGORAS** berechnen mit

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \qquad \text{(Abstand)}$$

4.2 Punkt – Gerade

Es gibt zwei Mögilchkeiten zur Berechnung des Abstandes d zwischen der Geraden g und einem Punkt $\vec{x}_0$; eine anschauliche und eine etwas Formellastigere, dafür aber auch schnellere. Erstere ist also geeignet für Menschen, die Mehrarbeit nicht scheuen und dafür das Ergebnis bildlicher verstehen können, letztere für Leute, die Formeln gut behalten können und schnell ans Ziel kommen wollen:

4.2.1 Hilfsebenenmethode

Man erstellt eine Hilfsebene, die senkrecht zu g steht und durch den Punkt $\vec{x}_0$ geht. Dazu verwendet man am besten die Koordinatendarstellung (s. Koordinatenform auf S. 9). Hierbei kann man nämlich den Normalenvektor $\vec{n}$ als Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden g verwenden und kann ganz einfach b berechnen – durch $b = \vec{n} \cdot \vec{x}_0$.

Nun hat man eine Ebene E erstellt, die den Punkt $\vec{x}_0$ enthält. Anschließend bestimmt man den *Schnittpunkt* $\vec{y}_0$ von E mit g (siehe Kap. 3.2.2 auf S. 17) und anschließend noch den Abstand $d(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ wie in Kap. 4.1.

4.2.2 Direkte Methode

Wir wählen $\vec{d}$ als Vektor, der senkrecht auf der Geraden steht und der von der Geraden genau auf den Punkt $\vec{x}_0$ zeigt.

Nun muss $\vec{d}$ senkrecht auf der Geraden g stehen; also auch senkrecht auf deren Richtungsvektor:

$$\vec{d} \cdot \vec{r} = 0$$

Weiter kann man den Vektor $\vec{d}$ aber auch als Linearkombnation diverser anderer Vektoren betrachten. Den *Aufpunkt* von $\vec{d}$, also der Punkt auf g, wo $\vec{d}$ ansetzt, liegt – wie gesagt – auf g und ist somit in der Gleichung ausgedrückt durch $\vec{s} + a \cdot \vec{r}$.

Wir können also den Vektor $\vec{d}$ ausdrücken, indem wir von diesem Aufpunkt den Vektor $\vec{x}_0$ abziehen. Wer sich erinnert: Durch die Subtraktion zweier Vektoren erzeugt man einen neuen Vektor, der genau die Verbindungslinie der beiden Subtrahenten ist. Es gilt also:

$$\vec{x}_0 - (\vec{s} + a \cdot \vec{r}) = \vec{d} = \vec{x}_0 - \vec{s} - a \cdot \vec{r} \qquad (*)$$

Dies können wir nun in die oben gefundene Gleichung einsetzen:

$$(\vec{x}_0 - (\vec{s} + a \cdot \vec{r})) \cdot \vec{r} = 0$$

Durch diverse Umformungen und den Zusammenhang $\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2$ gelangt man zu

$$a = \frac{(\vec{s} - \vec{x}_0) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

Dies kann man nun in die Gleichung $*$ einsetzen, und erhält

$$d = |\vec{d}| = \left| \vec{x}_0 - \vec{s} - \frac{(\vec{s} - \vec{x}_0) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \cdot \vec{r} \right|$$

Hier darf man die beiden $\vec{r}$ *nicht zusammenfassen*, weil das Skalarprodukt leider *nicht assoziativ* ist. (Sonst würde sich auch 0 ergeben – und das wäre kein besonders guter allgemeiner Abstand).

4.3 Gerade – Gerade

Wir betrachten den Abstand zwischen den Geraden g und h. Dabei unterscheidet man zwischen zwei verschiedenen Fällen:

Die beiden Geraden sind parallel Man sucht sich auf einer der Geraden (bspw g) einen beliebigen Punkt aus und berechnet mit einer Methode aus Kap. 4.2 den Abstand zu diesem Punkt.

Die beiden Geraden sind *nicht* parallel Man kann hier den Vektor $\vec{d'}$ recht einfach bestimmen; als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\vec{d} = \vec{r} \times \vec{r'}$$

Er steht senkrecht auf den beiden Geraden. Man normiert ihn – d.h. man teilt ihn durch seine Länge und erhält

$$\vec{d_0} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$$

Nun brauchen wir noch einen beliebigen Vektor, zwischen zwei Geraden – dazu wählt man am besten $\vec{a} = \vec{s} - \vec{s'}$ und projiziert diesen Vektor auf $\vec{d_0}$; damit erhält man den Anteil des Vektors zwischen den beiden Geraden, der genau in Richtung der kürzesten Verbindung zwischen den Geraden liegt. Solch eine Projektion realisiert man mit dem Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{d_0} = d$$

Vergleicht man dies mit der Aussage in Kap. 1.3 auf S. 6, so wird man merken, dass hier der Term fehlt, der die Richtung des Vektors bestimmt – aber diese ist uns ja auch egal. Wir unteressieren uns nur für den Abstand zwsichen den beiden Objekten.

4.4 Ebene – Punkt

Den Abstand zwischen einer Ebene E und einem Punkt $\vec{x}_0$ bestimmt man ähnlich wie den zwischen Punkt und Geraden.

Dazu braucht man einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht – er heißt $\vec{n}$. Ein Zweiter Vektor ist $\vec{a}$; er geht von irgendwo in der Ebene $\vec{x} \in E$ nach $\vec{x}_0$. Man konstruiert ihn am einfachsten mit

$$\vec{a} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

Anschließend projiziert man diesen Vektor $\vec{a}$ wieder auf den normierten Normalenvektor $\vec{n}_0$ (er ensteht mit $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$:

$$d = \vec{a} \cdot \vec{n}_0$$

4.5 Gerade – Ebene

Um den Abstand zwischen einer Geraden g und einer Ebene zu bestimmen, prüft man zuerst, ob die Gerade parallel oder nicht parallel zur Ebene ist.

Ist sie parallel, so wählt man einen beliebigen Punkt $\vec{x}_0 \in g$ aus und bestimmt den Abstand Punkt – Ebene wie in Kap. 4.4.

Ist g dagegen nicht parallel zu E, so wird g die Ebene E zwangsläufig irgendwann einmal schneiden. In diesem Falle ist der Abstand also $d = 0$.

4.6 Ebene – Ebene

Auch beim Abstand Ebene E zu Ebene F braucht man nur zu überprüfen, ob $E \| F$.

Wenn sie *parallel* sind, so kann wählt man wieder einen beliebigen Punkt in E und bestimmt wie in Kap. 4.4 diesen Abstand.

Wenn die beiden jedoch *nicht parallel* sind, so schneiden sie sich wieder zwangsläufig und somit ist der Abstand hier $d = 0$.