mrP

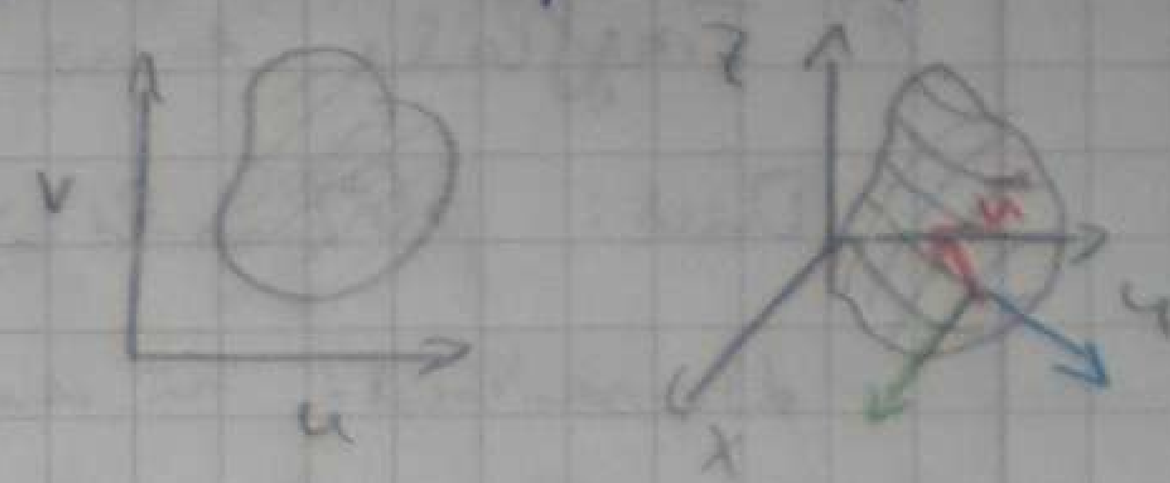
$$\int_S d\vec{S}\ \vec{A}(\vec{r}) \equiv \iint_A du\,dv\ \vec{A}(\vec{r}(u,v))\left(\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\right)$$

26.1.09

Normalenvektor:

Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Oberfläche ist definiert als

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}$$



D.h. $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Oberfläche. Die Richtung von $\vec{n}$ hängt von der Orientierung der Oberfläche ab. Normalerweise lässt man bei einer „geschlossenen Fläche" (Ball etc) $\vec{n}$ nach außen zeigen.

Für orientierbare Oberflächen definieren wir:

- $$\int_S \underbrace{d\vec{S}}_{\text{Oberflächennormale}} \cdot \underbrace{\vec{F}(\vec{r})}_{\text{Vektorfeld}} \equiv \iint_A du\,dv\ \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}_{\text{Oberfl. element}} =$$

  mit Defin. v. $\vec{n}$:

  $$= \iint_A du\,dv\ \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = I \quad \text{(Skalar)}$$

- $$\int_S d\vec{S}\ \phi(\vec{r}) \equiv \iint_A du\,dv\ \phi(\vec{r}(u,v))\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = I \quad \text{(Vektor)}$$

- $$\int_S d\vec{S} \times \vec{A}(\vec{r}) \equiv \iint_A du\,dv \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \times \vec{A}(\vec{r}(u,v)) = I \quad \text{(Vektor)}$$

Orientierbare Fläche

Die Fläche muss orientierbar sein. D.h. wenn man den $\vec{n}$ auf der Oberfläche beliebig verschiebt, geht er immer wieder in sich selbst über.

Gegenbeispiel:

2D) Möbiusband

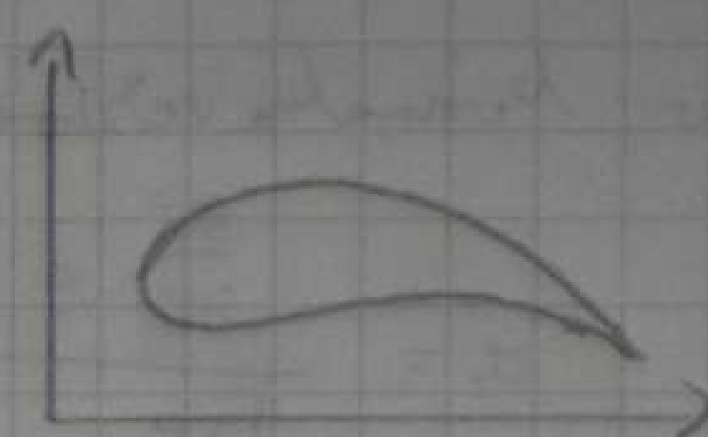
26.1.'09

4D) Klein'sche Flasche.

Im $\mathbb{R}^3$ ist immer Eben, wo keinen (Stützen) einer Oberfläche ist.

Bsp.:

1) Tragfläche eines Flugzeugs

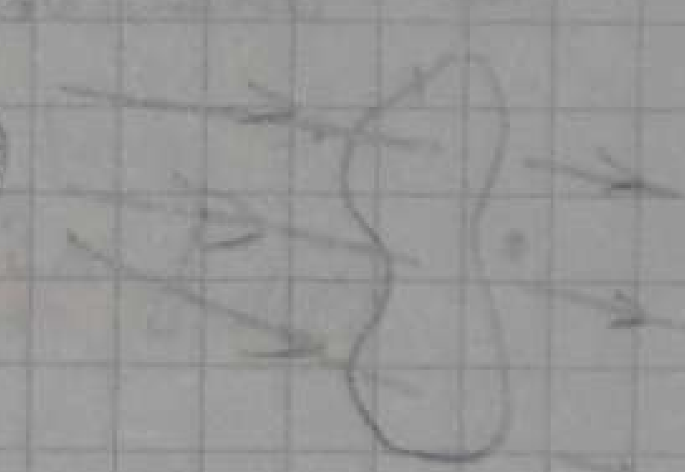


Druck: $p(\vec{r})$, wirkt auf eine Fläche dS, senkrecht zu dieser Oberfl. ($\Rightarrow$ Vektor ist nötig)

$$\vec{F} = -\int_S d\vec{S} \cdot p(\vec{r})$$

Man verwendet die Fläche dS, weil $p \cdot A = F$. Um F eine Richtung zu geben, verwendet man den $\vec{n}$ (Betrag ändert sich nicht – nur Richtung)

2) Energiefluss durch eine offene Fläche S (Energ. fluss: $\vec{A}(\vec{r})$)



$$\frac{dE}{dt} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

7.2 Ableitungsoperatoren

Gradient (Def)

Ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ ordnet jedem Punkt im Raum $\vec{r}$ eine Zahl zu. Der Gradient von $\phi(\vec{r})$ ist

$$\nabla \phi(\vec{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

↳ Einh. Vektoren

Und damit ein <u>Vektorfeld</u>. Man kann ∇ auch als Vektor schreiben: $(\nabla : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \nabla \phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dabei heißt ∇ „Nabla" (LaTeX: \nabla)

Anschaulich ist ∇ die Änderung von ϕ in die verschiedenen Raumrichtungen. Die „Pfeile" von $\nabla \phi(\vec{r})$ zeigen dorthin, wo die Werte $\phi(\vec{r})$ größer werden.

Bsp:

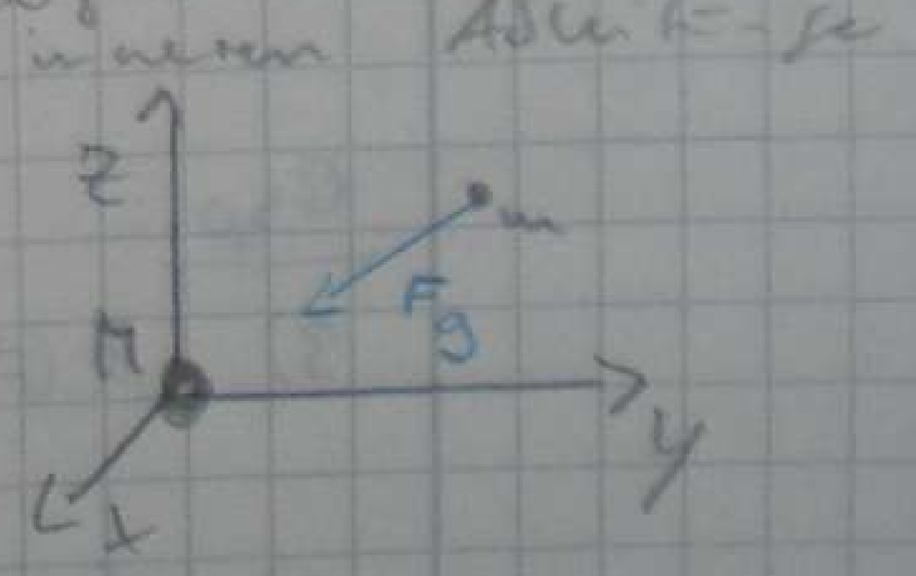
1) $\phi(x,y,z) = xyz \Rightarrow \nabla \phi = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

2) $\phi(x,y,z) = -M \cdot m \cdot G \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

x-Teil Abl. ist für alle gleich.

ergibt mich → aus dem inneren Ableitungen

$$\nabla \phi = -F_G = +M m G \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



(Vektor mit Betrag $|\nabla \phi| = MmG \frac{1}{r^2}$ und Richtung von m nach M)

26. 1. '09

Anschaulich:

Sei $\phi(\vec r(s))$ eine einfache Kurve $\phi(\vec r(s)) = \vec r_0 + s\vec a$,

Dann lässt sich das Verhalten von ϕ um $\vec r_0$ mit dem Gradienten beschreiben:

$$\frac{d}{ds}\phi(\vec r(s))\Big|_{s=0} = \nabla\phi(\vec r(s))\cdot\vec a$$

Das ist die Richtungsableitung.

Die Gleichung $\phi(\vec r) = \text{const.}$ bestimmt eine Fläche im $\mathbb{R}^3$: Alle x, y, z lassen sich durch einen einzigen Parameter ausdrücken. Der Gradient steht senkrecht auf dieser Fläche.

Divergenz (Def)

Die Divergenz div ordnet jedem Vektorfeld $\vec A(\vec r)$ ein Skalarfeld zu:

$$\text{div}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\text{div}: \vec A(\vec r) \longmapsto \vec\nabla\cdot\vec A(\vec r) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{mit } \vec A(\vec r) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \text{ und } \vec\nabla = \nabla$$

Bsp.:

3) $\vec A(\vec r) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div}\,\vec A(\vec r) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 1+1+1 = 3$

4) $\vec A(\vec r) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div}\,A(\vec r) = 0+0+0 = 0$

Bemerkung: Man darf $\nabla\cdot\vec A$ schreiben, weil: (skal. mult.)

$$\nabla\cdot A = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec e_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec e_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec e_z\right]\cdot\left[A_x\vec e_x + A_y\vec e_y + A_z\vec e_z\right]$$

$\vec e_a\cdot\vec e_b = \delta_{ab}\,\vec e_a$ (versch. e multipliziert = 0; gleiche e)

MMP

Anschaulich:

26.1.05

Bestimmt „Generation vom Fluss" $\longrightarrow$ „Quellterm"

Bsp. · Gravitation: Massenverteilung

· E-Feld: Ladungen

Man kann sagen: div richtet an, wie viele Feldlinien „rein" und wie viele „raus" gehen...

Laplace-Operator (Def)

Eine Kombination von ~~Rotation~~ Divergenz und Gradient ordnet jedem Skalarfeld ein Skalarfeld zu:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \nabla \cdot \nabla \cdot \phi(\vec{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi$$

Also kann man sagen:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$