Michael Kopp

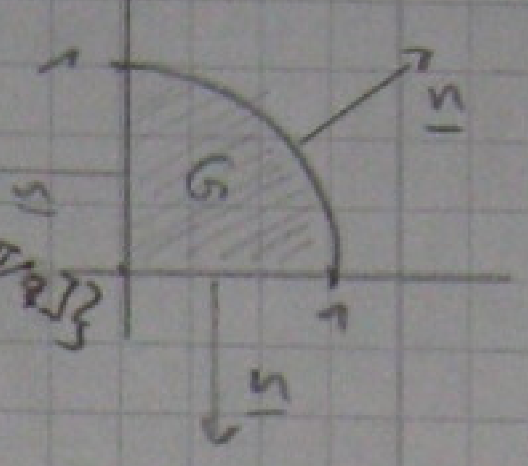
1 $\underline{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $G = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x,y>0,\ x^2+y^2<1\}$

$(x^2+y^2)^{-1} \rightsquigarrow -(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x$

- $\operatorname{div}\underline{F} = \underline{\nabla}\cdot\underline{F} = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = 0$$



- ∂G: $\{(t,0)^T,\ t\in(0,1]\} \cup \{(0,t)^T\} \cup \{\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \varphi \in [0,\pi/2]\}$

$\underline{n}_1 = (0,-1)^T$, $\underline{n}_2 = (-1,0)^T$, $\underline{n}_3 = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

$$\int_{\partial G} \langle \underline{F} | \underline{n}\rangle\, ds =$$

$$= \int_0^1 \langle \tfrac{1}{t^2}\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\rangle dt + \int_0^1 \langle \tfrac{1}{t^2}\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\rangle dt + \int_0^{\pi/2} \langle \tfrac{1}{1}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\rangle d\varphi =$$

$$= \int 0\, dt + \int 0\, dt + \int_0^{\pi/2} 1\, d\varphi$$

$= \pi/2$.

S. v. G. fordert eine offene Umgeb. von $(G \cup \partial G)$, auf der $\underline{F}$ stetig diff'bar ist.

$\underline{0}$ liegt in dieser offenen Umgeb., dort ist $\underline{F}$ jedoch nicht diff'bar, da nicht def.

2 (a) $\underline{r}$ parametrisiert Oberfl.: $r = \text{const}$, $\varphi \in [\varphi^1, \varphi^2]$, $\vartheta \in [\vartheta^1, \vartheta^2]$; $\underline{r} = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\varphi\end{pmatrix}$

$$J_{\underline{r}}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix}\partial_\varphi r_1 & \partial_\vartheta r_1\\ \partial_\varphi r_2 & \partial_\vartheta r_2 \\ \partial_\varphi r_3 & \partial_\vartheta r_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi, & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta\cos\varphi, & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & 0\end{pmatrix}$$

$$J_{\underline{r}}^T J_{\underline{r}} = r^2 \begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0\end{pmatrix}$$

$$= r^2 \Big(\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi, \quad \cancel{-\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi} \rightarrow 0, \quad \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta\sin^2\varphi \Big)$$

$$= r^2 \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2\varphi\end{pmatrix}$$

$\det(J_{\underline{r}}^T J_{\underline{r}}) = r^4\sin^2\varphi \rightsquigarrow \sqrt{\det(.)} = r^2\sin\varphi$ (*)

(*) r^2 kommt einmal von 1. Spalte, einmal von 2. Spalte von $J_{\underline{r}}^T J_{\underline{r}}$

$$A = \int_G 1 \cdot \sqrt{\det(.)}\, d(\vartheta,\varphi) = \int_{\varphi^1}^{\varphi^2}\int_{\vartheta^1}^{\vartheta^2} |r^2\sin\varphi|\, d\vartheta\, d\varphi$$

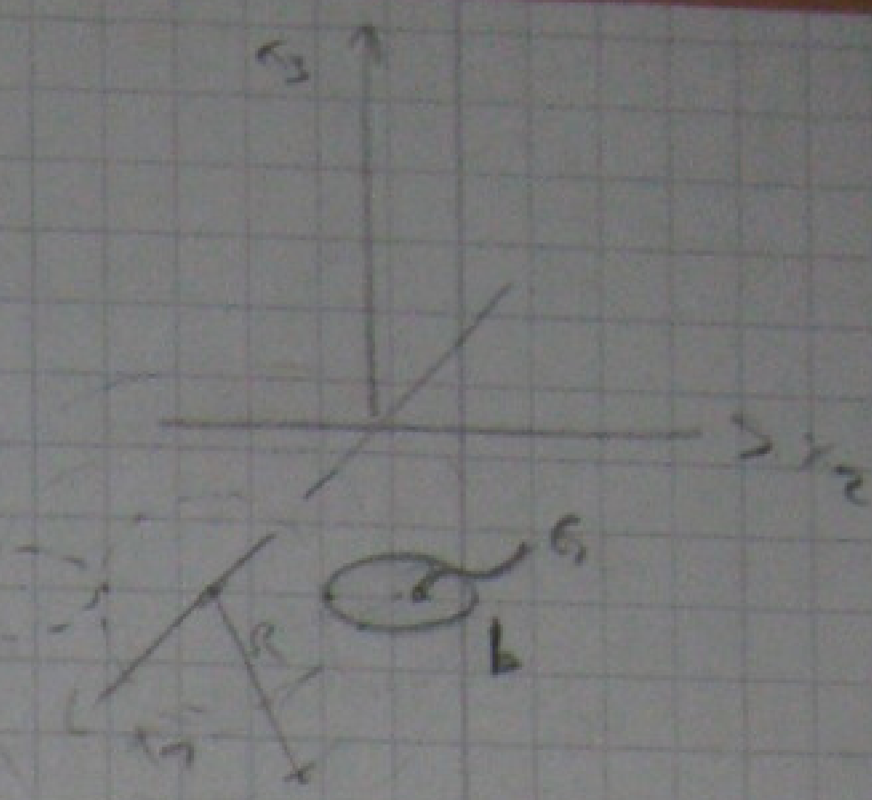
$$= r^2 \int_{\vartheta^1}^{\vartheta^2} |\cos\varphi|_{\varphi^1}^{\varphi^2}|\, d\vartheta = r^2\, |\cos\varphi^2 - \cos\varphi^1|\, |\vartheta^2 - \vartheta^1|$$

Probe: $\varphi^2 = \pi$, $\varphi^1 = 0$, $\vartheta^1 = 0$, $\vartheta^2 = 2\pi$: $A = r^2 \cdot 2 \cdot 2\pi$

$= 4\pi r^2$

$\rightsquigarrow$ das ist eine Kugeloberfläche

IV (a) $c: [0,1] \longrightarrow \underset{\underset{x_1x_2-\text{Eb.}}{\subseteq}}{\mathbb{R}^2} : t \longmapsto \underline{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$



$A: [0,1] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (t,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t)\sin\varphi \\ c_2(t)\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ c wird auf eine Ebene mit φ zur x_1x_2 - Eb. projiziert.

A parametrisiert die Ebene.

$$\partial_t A = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \sin\varphi \\ c_2' \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \partial_\varphi A = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \cos\varphi \\ -c_2 \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$J_A^T J_A = \begin{pmatrix} c_1'^2 + c_2'^2 \sin^2\varphi + c_2'^2 \cos^2\varphi & c_2' \sin\varphi\, c_2 \cos\varphi - c_2' \cos\varphi\, c_2 \sin\varphi \\ & c_2^2 \cos^2\varphi + c_2^2 \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1'^2 + c_2'^2 & 0 \\ 0 & c_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\underline{c}'\|_2^2 & 0 \\ 0 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det(J_A^T J_A)} = \sqrt{\|\underline{c}'\|_2^2 \cdot c_2^2}$$

$$\Rightarrow |A|_{\text{Oberfl.}} = \int_0^1 dt \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\ 1}_{2\pi} \cdot \|c'\|_2 \cdot c_2$$

Sei $L = \int_0^1 dt\, \|c'\| = \int_c d\underline{s}$:

$$|A| = 2\pi \cdot \int_c c_2\, d\underline{s} \cdot \frac{L}{L} = 2\pi \underbrace{\frac{\int_c c_2\, d\underline{s}}{\int_c 1\, d\underline{s}}}_{S} L$$

$\square$

(b) $|A| = 2\pi \cdot \underbrace{R}_{S} \cdot \underbrace{(2\pi r)}_{L} = 4\pi^2 R r$

$\boxed{4.}$ (a) $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \supseteq U \to S^n : \underline{u} \mapsto \gamma(\underline{u})$

$\varrho : [0,R]_{=I} \longrightarrow \mathbb{R} \quad : r \longmapsto \varrho(r)$ $\quad \underline{x} = \underline{u} \oplus r$

$\varrho = \mathbb{1}\,!$ $\quad U \oplus [0,R] = V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_I \int_{K(r)} f(\underline{x})\, do\, dr = \int_I \int_U f(r\gamma(\underline{u}), \varrho(r)) \sqrt{\det(J_\gamma^T J_\gamma)}\, d\underline{u}\, dr$$

Sei $\omega : V \to K : (r\gamma(\underline{u}), \varrho(r)) \mapsto \underline{x}$

(*) $f(x)$ ist intbar, da auf dem Rand $\int f(x)\,d\underline{x}$ erhalten ☺

$$\sqrt{\det(J_\omega^T J_\omega)} = \sqrt{\left|\begin{pmatrix} \frac{\partial\gamma}{\partial\underline{u}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\varrho}{\partial r} \end{pmatrix}^T \right| \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial\gamma}{\partial\underline{u}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\varrho}{\partial r} \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \sqrt{\left|\begin{pmatrix} \frac{\partial\gamma^T}{\partial\underline{u}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\varrho^T}{\partial r} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial\gamma}{\partial\underline{u}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\varrho}{\partial r} \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \sqrt{\left|\frac{\partial\gamma^T}{\partial\underline{u}}\right| \left|\frac{\partial\gamma}{\partial\underline{u}}\right|} \; \underbrace{\sqrt{\left|\frac{\partial\varrho^T}{\partial r}\right| \left|\frac{\partial\varrho}{\partial r}\right|}}_{=1 \text{ da } \varrho = \mathbb{1}}$$

$$= \sqrt{\det(J_\gamma^T J_\gamma)}$$

Mit Zitbini:

$$= \int_{U \oplus I} f(\omega(\underline{x})) \sqrt{\det(J_\omega^T J_\omega)}\, d\underline{x} \qquad (\text{da } \underline{u} \oplus r = \underline{x})$$

Es ist $\sqrt{\det(J_\omega^T J_\omega)} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{|J_\omega^T|\,|J_\omega|} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{|J_\omega|^2}$

da J quadrat. $\qquad$ da $\det(\cdot)$ inv. unter Trasp.

$$= \int_V f(\omega(\underline{x})) \det(J_\omega)\, d\underline{x}$$

Dies ist nach Transformationsformel identisch mit dem linken Integral.

(**) vgl. „Probe"

(b) $f \equiv 1$. Nach $2^{(**)}$: $\int_{K(r)} 1\, do = 4\pi r^2 \Rightarrow$ ☺

$$\int_K 1\, d\underline{x} = \int_0^R 4\pi r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$