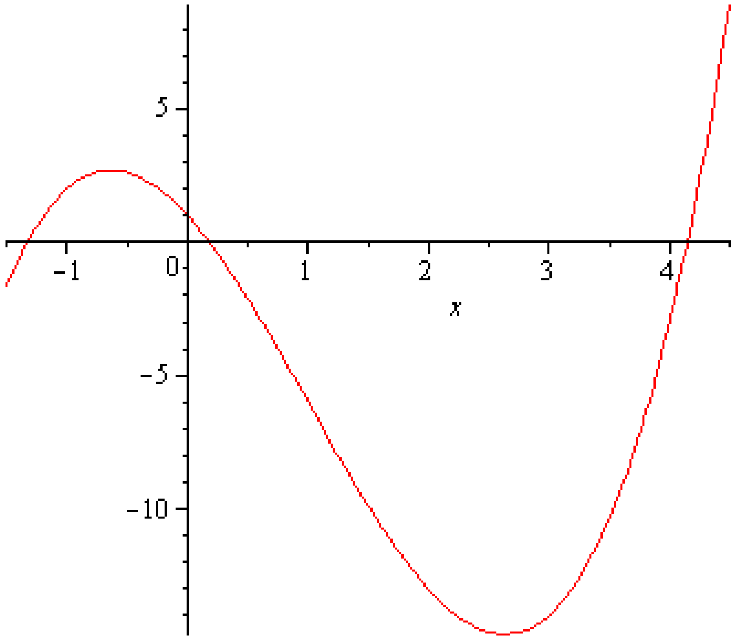
Übersichtsblatt zur Vorbereitung auf die Klausur

I Auf- und Ableitungen skizzieren

II Regeln zur Aufleitung

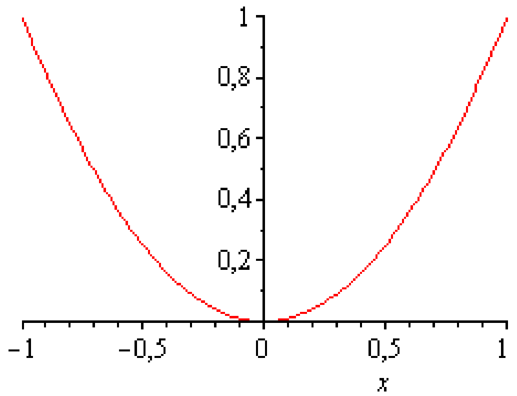
I

$plot(x^3 - 3x^2 - 5x + 1, x = -1.5..4.5)$



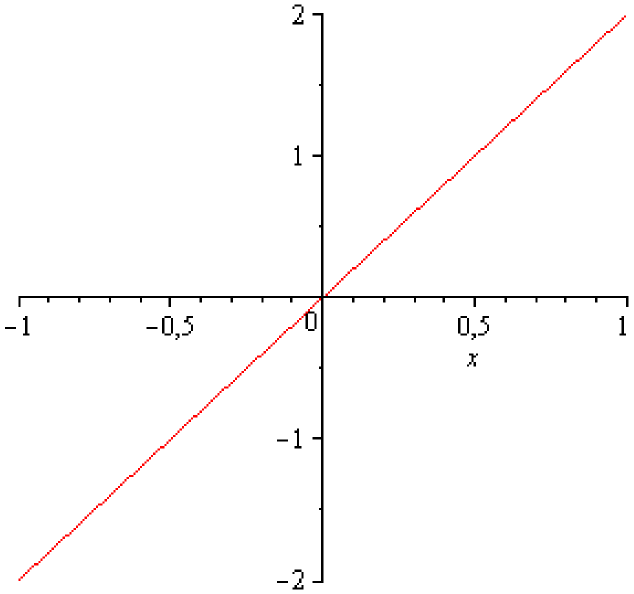
Als Beispiel wird die Funktion $f(x) = x^3-3x^2-5x+1$ herangezogen.
Die Aufgabe liegt jetzt darin, die Ableitung zu skizzieren.
Wie sich mit dem Satz von Fermat beweisen ließe, ist die Steigung in Hoch- bzw. Tiefpunkten, oder allgemeiner, in Extrempunkten, die Steigung =0. Das heißt, an diesen Stellen muss die Ableitung eine Nullstelle haben.
Etwas genauer: Hochpunkt: Wie an der Funktion zu entnehmen ist, geht die Funktion erst nach oben, dann kurz gerade aus, dann nach unten. Das heißt, die Steigung ist erst positiv, dann =0, dann negativ.
Tiefpunkt: Die Funktion geht erst nach unten (negative Steigung) und dann geht die Funktion nach oben (positive Steigung).

Als Anhaltspunkt:
$plot(x^2, x = -1..1)$



Und die Ableitung dazu:

$plot(2\,x, x=-1\,..1)$



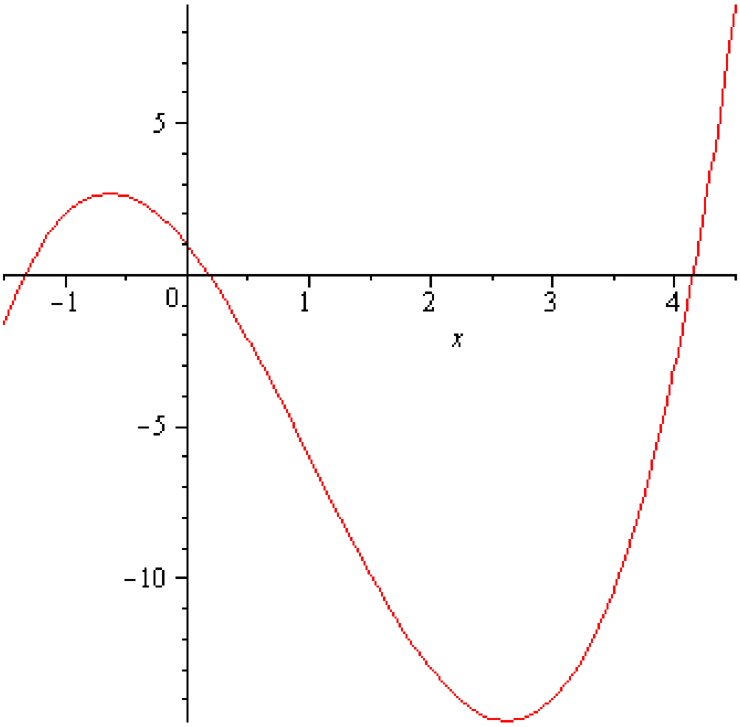
Mit Hochpunkten verläuft dies analog.

Wendepunkte:
Wendepunkte sind Punkte mit maximaler Steigung, das heißt maximal positiv, oder maximal negativ. Das heißt, abgeleiter resultieren an diesen Stellen stets Extrempunkte, da die Steigung ja e x t r e m ist.
Es gibt 2 Arten von Wendepunkten. Entweder man geht von einer Rechts- in eine Linkskurve, oder andersrum. Hierzu stellt man sich einfach vor, dass man in einem Auto sitzt, und die Strecke abfährt. Lenkt man nach rechts, ist man in einer Rechtskurve, lenkt man nach links, ist man in einer Linkskurve.
Im Beispiel vom Anfang geht man von einer Rechtskurve in eine Linkskurve über. Im Wendepunkt ist die Steigung ja maximal, da es hier nach unten geht also, maximal negativ. Skizziert man die Ableitung, ist hier also ein Tiefpunkt erforderlich.
Andersrum ist es wiederum analog.

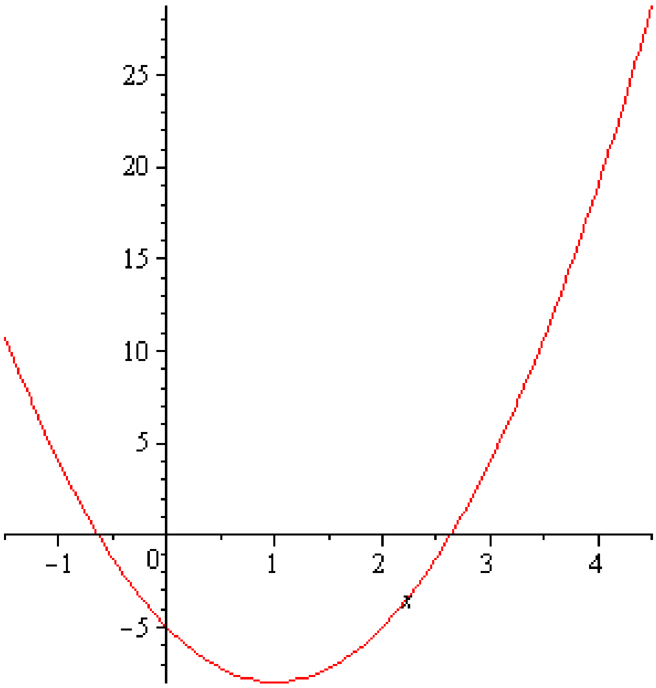
Ansonsten gibt es keine charakteristischen Punkte mehr für das Skizzieren von Ableitungen.

Wichtig ist, dass es völlig egal ist, ob die Funktion an sich eine Nullstelle hat, oder nicht. Das wird aber später beim Skizzieren von Aufleitungen interessanter.
Der Vollständigkeithalber noch die skizzierte Ableitung der Funktion.
Die Funktion lautet:

$plot(x^3 - 3x^2 - 5x + 1, x = -1.5..4.5)$



$plot(3x^2 - 6x - 5, x = -1.5..4.5)$

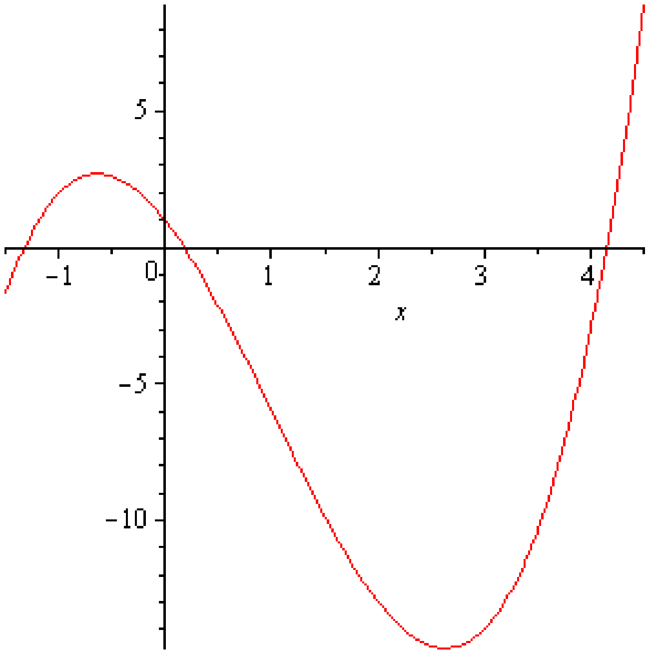


Zur Wiederholung:
Die Ableitungsfunktion: Die Ableitung gibt immer die Steigung in einen bestimmten Punkt an!

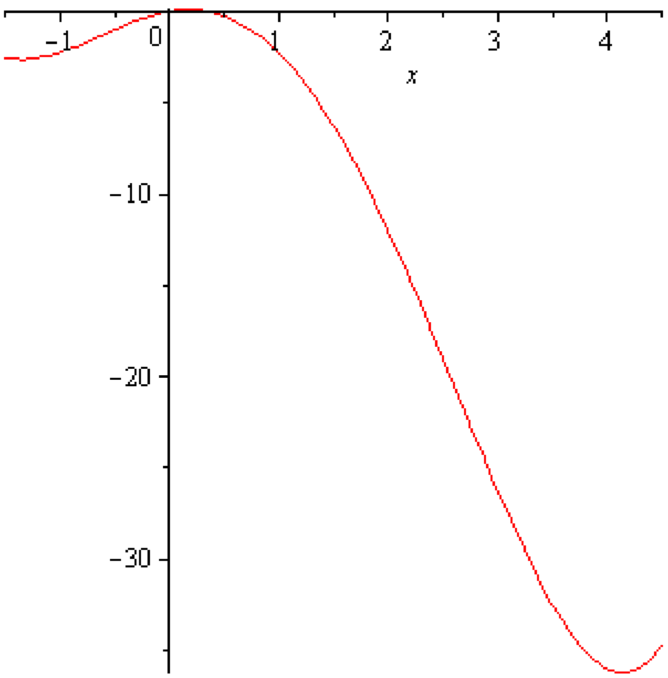
Zum Skizzierung von Aufleitungen
Eigentlich kann man den Text jetzt von unten nach oben lesen, dann passt auch alles. Aber nochmal etwas ausführlicher:
Hat man Extrempunkte in der Ableitungsfunktion, und soll diese aufleiten, erhält man also einen Wendepunkt.
Nullstellen werden zu Hoch-/Tiefpunkten.

Jetzt kann man anhand dieses Wissens versuchen, die Funktion von vorher aufzuleiten, zeichnerisch eben.

$plot(x^3 - 3\,x^2 - 5\,x + 1, x = -1.5\,..4.5)$



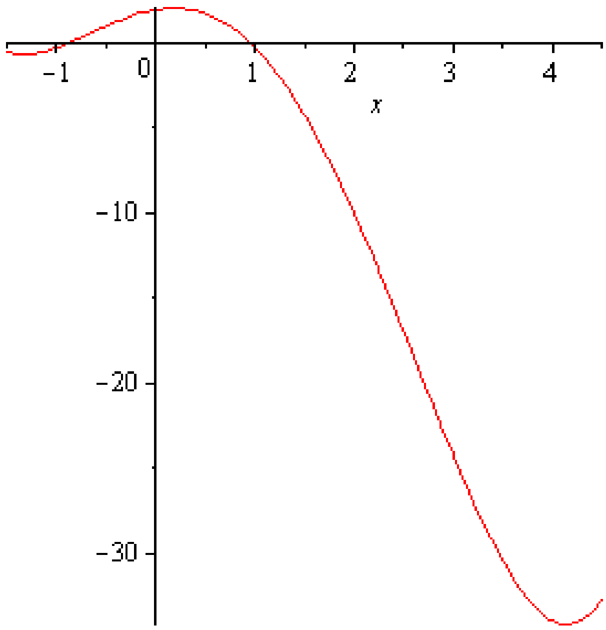
$plot\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x, x = -1.5\,..4.5\right)$



Nochmal das Wichtige:
Man erkennt bei etwa -1.5 noch den Teifpunkt, Tiefpunkt, weil hier in der Ableitungsfunktion eine Nullstelle ist.
Bei etwa -0.5 ist ein Wendepunkt, die in der Ableitung ein Extremwert ist. (Zur Erinnerung: Wendepunkte sind Punkte maximaler Steigung)
Bei etwa 0,25 ist ein Hochpunkt, da in der Ableitung eine Nullstelle ist. Und schließlich haben wir noch einen Tiefpunkt, da wir hier wirder eine Nullstelle in der Ableitung haben.

Ganz wichtig: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten die Aufleitung/ Stammfunktion zu skizzieren, aber nur eine Möglichkeit die Ableitung zu skizzieren. Denn die Aufleitung erhält den Summanden "c". Bei der Ableitung der Stammfunktion fällt nämlich dieses "c" wieder raus, es wirkt sich also nicht auf die ursprüngliche Funktion aus.
Also wäre als Lösungsvorschlag zur Aufleitung genau so richtig die Funktion:

$$plot\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 2, x = -1.5..4.5\right)$$



Der Verlauf der Funktion bleibt also gleich, nur ist sie in y-Achsenrichtung etwas verschoben.

Nochmals tabellarisch:

Ableitungsskizzen:

Funktion: Hochpunkt Tiefpunkt Wendepunkt (von Rechts- zu Linkskurve) Wendepunkt (von Links- zu Rechtskurve)

Ableitung: Nullstelle (von + zu -) Nullstelle (von - zu +) Tiefpunkt Hochpunkt

Aufleitungsskizzen:

Funktion: Hochpunkt Tiefpunkt Nullstelle (+ zu -) Nullstelle (von - zu +)

Aufleitung: Wendepunkt (Links- zu Rechtskurve) Wendepunkt (Rechts- zu Linkskurve) Hochpunkt Tiefpunkt

So kann man, ohne zu überlegen, eine Funktion in jeglichen Formen skizzieren.