$\cdot$ Ist $f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in W$: $\left|\int f_1(x)\,dx\right| \leq \left|\int f_2(x)\,dx\right|$

Bew. §1, Satz 1, GW-Sätze.

19.10.09

21.10.09

Eine Idee wäre, die Regelfunkt. als Keime zu verwenden und wie wir von den Treppenfunkt. zu den Regelfunkt. gekommen sind, von den Regelfkt. zu einer neuen Klasse von Funkt. zu kommen. Weil $\mathcal{R}$ bez. komplettiert ist, findet man keine neuen Fkt.

Satz 3 : $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \int \lim\limits_{n\to\infty} f_n\,dx$ für $f_n \in CF(\mathcal{R}(W))$

Sei $f_n \in CF(\mathcal{R}(W))$ bez. $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$

- $\exists f \in \mathcal{R}(W)$ mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und
- $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n\,d\underline{x} = \int f\,d\underline{x} = \int \lim\limits_{n\to\infty} f_n\,d\underline{x}$

Bew.

- Konstruiere f: $\underline{x} \in W$; $|f_k(\underline{x}) - f_\ell(\underline{x})| \leq \|f_k - f_\ell\|_\infty \quad (*)$

  $\forall x$ ist $f_n(x) \in CF(\mathbb{R})$. Wir def. punktweise

  $f(\underline{x}) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\underline{x})$

- Z: f ist Regelfunktion, also bel. genau durch Treppenfunktion approximierbar. Für große n ist f_n nahe an f. Da man f_n durch eine Treppenfkt. approximieren kann, kann man dies auch mit f tun.

  Finde $t \in \mathcal{T}^n$ mit $\|f - t\|_\infty < \varepsilon$ in $(*)$: $\ell \to \infty$:

  $|f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2$ für k groß gen.

  Wähle $t \in \mathcal{T}^n(W)$: $\|f_n - t\|_\infty < \varepsilon/2 \Rightarrow$

  $\|f - t\|_\infty < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

- $\left|\int f\,dx - \int t\,d\underline{x}\right| \leq \int |f - t|\,d\underline{x} \leq \varepsilon \cdot \int_W d\underline{x} = \varepsilon \operatorname{vol}(W)$
- $\left|\int f_n\,dx - \int t\,d\underline{x}\right| \leq \int |f_n - t|\,dx \leq \varepsilon \cdot \int_W dx = \varepsilon \operatorname{vol}(W)$

$\Rightarrow \left|\int f\,dx - \int f_n\,dx\right| \leq \int |f - f_n|\,d\underline{x} \leq \int |f - t| + |t - f_n|\,d\underline{x}$

$\leq 2\cdot\varepsilon\cdot\operatorname{vol}(W)$

$\square$

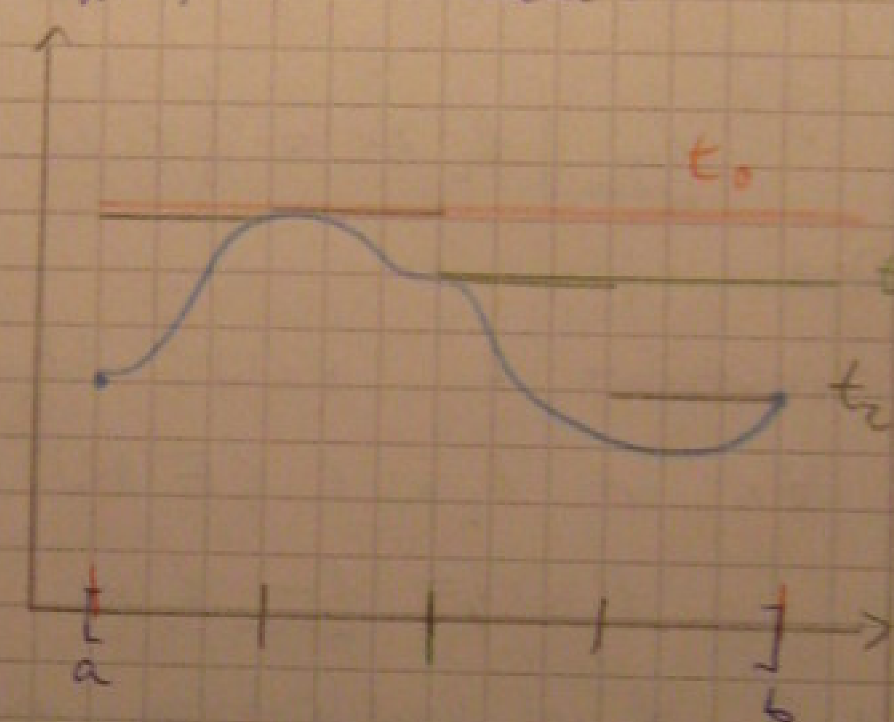
Satz 4

21.10.'09 $f, g \in \mathcal{R}(W) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{R}(W)$

Nächstes Ziel: Für stetige Fkt. (auf Intervallen) stimmen Regel- und Riemann-Integral überein.
Für Riemann-Int. wählt man Ober- und Untersumme. Man findet eine Treppenfkt., welche ständig unter der Fkt liegen und andere, welche ständig oberhalb liegen. ⇝ Damit haben wir Obersumme/Untersumme und Treppenfkt. in einem!

Stetige Fkt. auf kompakten Intervall nimmt Max. an

Man wählt als t_0 das Max von f auf $[a,b]$, für t_1 zerteilt man $[a,b]$ in der Mitte und def. für jedes Teilintervall das Maximum als $t_1(x)$.
t_n fällt monoton gegen f.



Die t_n konv. auch gleichmäßig gegen f:

- Sei $\varepsilon > 0$. Wegen glm. Stetigkeit $\exists\, \delta > 0$ (für alle x) mit

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Zu zeigen ist, dass die Treppenfkt irgendwann mit im ε-Schlauch liegt. Weil δ fest ist, kann man $[a,b]$ so lange halbieren, bis Intervalllänge $< \delta/2$. Der Wert der Treppenfkt ist dann ~~das~~ Max. auf diesem Intervall und weicht von den übrigen Werten ~~[illegible]~~ weniger als um ε ab:

$$|t_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

- Die t_n def. eine Folge von Obersummen für das Riemann-Integral und gleichzeitig eine glm. ~~konv~~ konv. Folge von Treppen-

Ana

Funktionen, die für den Regel int. taugen.

· Analog geht man für die Untersumme vor. (bzw. inferiore -f) 21.10.09

· Regel / Riemann - Int. sind für $f \in C$ gleich.

Die selbe Konstruktion lässt sich im $\mathbb{R}^n$ einführen:

Geg. sei

$$W = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Halbiere alle Kanten $[a_i, b_i]$ $\leadsto$ 2^n Teilquader. Zerlege analog jeden Teilquader in je 2^n Teilquader usw.

Nach k Schritten hat man $(2^n)^k$ Teilquader. Def. t_k durch den jew. Max. Die t_k konv. glm. mon. fallend gegen f.

<u>Hilfssatz:</u> Ist W ein kompakter Quader und f auf W stetig, ($f: W \to \mathbb{R}$), dann gibt es eine mon. fallende Folge $t_k \in \mathcal{T}^n(W)$ die Glm gegen f konv.

$$f \in C^1(W) \Rightarrow \exists\, t_k \in \mathcal{T}^n(W): \quad t_k \Downarrow, \; t_k \rightrightarrows f$$

└

Ana

21.10.09

§ 3 Sukzessive Integration

Ziel: $\int_W f(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \right) dx_{n-1} \cdots \right) dx_1$

für $W = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Beispiel

(1) $W := [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x \cdot y$ $\qquad f \in C(W, \mathbb{R})$

$$\int_W f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot \left(\int_0^1 y\, dy \right) \cdot dx =$$

$$= \int_0 x \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cancel{y} \, 1 \right) dx = \frac{1}{4}$$

Für einen Quader ist die Regel offensichtlich: links wird über 1 integriert, rechts dito. Links steht dann $vol(W)$, rechts $\prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i)$.

Dies ist offensichtlich wahr.

Wenn die Formel für Quader gilt, dann für Treppenfunktionen und nach einem GW-Prozess auch für Regelfunkt.

Vereinbarung: $\underline{x} = (y_1, \dots, y_{n-1}, z)^T = (\underline{y}, z)^T$

Bem. 1: $t \in \mathcal{T}^n \Rightarrow \int t(\underline{y}, z)\, dz \in \mathcal{T}^{n-1}$

Sei $t \in \mathcal{T}^n$. Dann ist durch

$$T(\underline{y}) = \int t(\underline{y}, z)\, dz$$

eine Treppenfunktion $T \in \mathcal{T}^{n-1}$ def. gegeben.

Bem. 2: $f \in \mathcal{R}(W) \Rightarrow \int f(\underline{y}, z)\, dz \in \mathcal{R}(\underline{y})$

Sei $f \in \mathcal{R}(W)$. Dann ist für jedes $\underline{y}$ (fest) durch

$$z \longmapsto f(\underline{y}, z)$$

eine Regelfkt. einer Var. gegeben.

$$F(\underline{y}) = \int f(\underline{y}, z)\, dz$$

ist Regelfkt. in $\underline{y}$.

Beweis (Bem. 2):

21.10.'09 $\exists\, t_k \in \mathcal{T}^n(W)$ mit $\|f - t_k\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Für ~~fest~~

bel. (festes) $\underline{y}$:

$$\sup_{z} |f(\underline{y}, z) - t_k(\underline{y}, z)| \leq \sup_{\underline{x}} |f(\underline{x}) - t_k(\underline{x})| = \|f - t_k\|_\infty$$

D.h. $z \mapsto f(\underline{y}, z)$ ist Regelfkt. in z. (F ist tatsächlich def.)

□

Idee: $T_k(\underline{y}) = \int t_k(\underline{y}, z)\,dz$ sind nach Bem. 1 Treppenfkt.

Z: $T_k \rightrightarrows F$:

$$|T_k(\underline{y}) - F(\underline{y})| = \left|\int t_k(\underline{y}, z)\,dz - \int f(\underline{y}, z)\,dz\right| = \left|\int (t_k(\underline{y}, z) - f(\underline{y}, z))\,dz\right|$$

$$\leq \int |t_k(\underline{y}, z) - f(\underline{y}, z)|\,dz < \varepsilon \int_{a_n}^{b_n} dz = \varepsilon\,(b_n - a_n).$$ □

Satz von Fubini für Regelintegrale

Sei W ein kompakter Quader in $\mathbb{R}^n$. Sei $f \in \mathcal{R}(W)$.

Dann ist auch $F(\underline{y}) = \int f(\underline{y}, z)\,dz$ eine Regelfunkt.

und es gilt: $(\underline{x} = (\underline{y}, z))$

$$\boxed{\int_W f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int F(\underline{y})\,d\underline{y}} \qquad (*) \int f(x,y)\,d(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\,dx\right) dy$$

Durch wiederholte Anwendung:

$$\int_W f(x_1, \dots, x_n) = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\,dx_n \cdots dx_1$$

Bew.:

(1) Zeige $(*)$ für Treppenfunkt.

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, $\quad t_Q := \begin{cases} 1, & \underline{x} \in Q \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad Q = \bigtimes_{i=1}^{n} [c_i, d_i]$

$\int t_Q\,d\underline{x} = \operatorname{vol} Q = \prod_{i=1}^{n} (c_i - d_i) \qquad \tilde{Q} = \bigtimes^{n-1} [c_i, d_i]$

$\int t_Q(\underline{y}, z)\,dz = \begin{cases} 0, & \underline{y} \notin \tilde{Q} \\ (d_n - c_n), & \underline{y} \in \tilde{Q} \end{cases} =: T(\underline{y}) \ ; \ \int T(\underline{y})\,d\underline{y} = (d_n - c_n) \operatorname{vol}(\tilde{Q})$

$= (d_n - c_n) \prod^{n-1} (c_i - d_i)$

✓

(2) $t \in T^n$ ist def. auf [illegible] $Q_1, \dots, Q_r$ bzw.

$$t(\underline{x}) = \sum_i t(Q_i)\, t_{Q_i}(\underline{x})$$ 21.10.09

Mit Lin. d. Integrals gilt $(*)$ für alle Treppenfkt.

(3) Mit Satz 2 folgt $(*)$ für alle Regelfkt.

$\square$