Michael Bauer und Michael Kopp

Elektrodynamik

Eine Zusammenfassung

Bei Prof. Dr. S. Dietrich, SS2010

Stand 12. Januar 2011
Version 1.0

Vorwort

Dieses sich Zusammenfassung nennende Schriftstück soll hauptsächlich eine Formelsammlung mit kleinen Erklärungen sein. Die physikalischen Herleitungen aus Versuchen, Beobachtungen und Erfahrungen oder Postulaten, welche in der Vorlesung erbracht worden sind, wurden hier nicht aufgenommen. Solches wird immer mit **Erfahrung** markiert. Auch auf Herleitungen, wie sie ausführlich in der Vorlesung gemacht, wurde – weitgehend – verzichtet. Die Kapitelnummerierung ist jedoch dieselbe, wie in der Vorlesung. Auch wurde darauf geachtet, dieselben Buchstaben für die Größen wie in der Vorlesung zu wählen. Insbesondere stehen kleine Buchstaben meist für Dichten, große Buchstaben für Größen, die keine Dichten sind, aber als Volumenintegral des zugehörigen „kleinen" Buchstaben geschrieben werden können. Teils wurde der Wortlaut aus der Vorlesung übernommen.

Bei allen hier verwendeten Volumina, Flächen und Kurven, und auch Vektorfeldern und Funktionen ist vorausgesetzt, dass sie hinreichend gutartig sind, d.h. beschränkt, orientierbar, ein- oder zweifach stetig differnzierbar usw. Jedenfalls haben die in der Vorlesungen angewandten Sätze Voraussetzungen, die erfüllt sein sollten, um diese anzuwenden. Die Orientierung eines Normalenvektors $\boldsymbol{n}$ einer Fläche $\mathscr{F}$ ist immer so gewählt, dass sie nach außen zeigt, bzw. Gradient der Funktion, die die Fläche (lokal) beschreibt, Normalenvektor und Tangentenvektor der Randkurve bilden ein rechtshändiges System (d.h. die Fläche liegt links, wenn der Normalvektor die Randkurve abfährt und nach „oben" zeigt). Auch wurde oft die Einstein'sche Summenkonvention verwendet.

Michael „$*$" Kopp, Michael „$\sim$" Bauer
Stuttgart, Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

I Elektromagnetisches Feld

1.1 Lorentzkraft, Superpositionsprinzip

Grundlegend für die Elektrodynamik ist die Kopplung von Ladungen an Felder; dieses wird gewährleistet durch die **Lorentzkraft**:[1]

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{P} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{m\boldsymbol{v}(t)}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}(t)}{c}\right)^2}}\right) \qquad (1)\\ &= \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}(t),t) = q\cdot\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(t),t)+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}(t),t)\right)\end{aligned}$$

Es wird auch die Kraftdichte $\boldsymbol{k}$ verwendet:

Definition I.1 (Kraftdichte $\boldsymbol{k}$)**.** *Die Kraftdichte gibt die Kraft von Elektromagnetischen Feldern auf ein differenziell kleines Volumen an:*

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{c}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$$

Erfahrung (Superpositionsprinzip)**.** *Feldtheorie ist linear; Felder können einfach addiert werden.*

Definition I.2 (Feld)**.** *Ladungen und Ströme erzeugen einen „Erregungszustand" im Raum, der durch die Felder $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ beschrieben wird.*

Im Grunde definiert man ein E- oder B-Feld darüber, was für Kräfte (bzw. Impulsänderungen) ein Teilchen der Ladung q gemäß (1) erfährt. In unserer Beschreibung sind die Felder auch ohne Probeladungen vorhanden.

1.2 Elektrischer Fluß

Definition I.3 (Fluß Φ eines Vektorfeldes)**.** *Der Fluß $\Phi_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{V})$ eines Vektorfeldes $\boldsymbol{V}$ durch die Fläche $\mathscr{F}$ ist:*

$$\Phi_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{V}) := \int_{\mathscr{F}}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\,f = \int_{\mathscr{F}}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{f} \qquad (2)$$

Für den *Elektischen Fluß* betrachten wir geschlossene Flächen, d.h. solche, die ein Volumen V beranden: $\mathscr{F}=\partial V$, $\partial\mathscr{F}=\partial\partial V=0$. Es ergibt sich als Fluß des $\boldsymbol{E}$-Feldes für eine gewisse Anzahl an Ladungsträgern

$$\Phi_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{E}) = \int_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{f} = 4\pi\sum_{j\ \mathrm{mit}\ \boldsymbol{r}(q_j)\in V} q_j\ ,$$

und entsprechend für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r},t)$:

$$\boxed{\int_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{f} = 4\pi\int_V\rho(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}\,V} \qquad (3)$$

Weil dieser Zusammenhang für ein beliebiges Volumen und differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{E}$ gelten soll, folgt mit dem Satz von Gauß:

[1] Hier wurde der relativistische Impuls $\gamma m\boldsymbol{v}$ verwendet!

Wichtig! 1 (Ladungen sind Quellen des E-Feldes).

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{4}$$

Bei statischen Ladungen können wir das elektromagnetische Feld schreiben als:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{j \text{ mit } \boldsymbol{r}(q_j) \in V} q_j \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \xrightarrow{\text{kontinuierlich}} \int_V \rho(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, \mathrm{d}\,\mathrm{V}'$$

Definition I.4 (Strom). *Der Strom I ist der Fluß der Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ durch die Fläche $\mathscr{F}$; $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit der Ladungsträger:*

$$I := \int_{\mathscr{F}} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d} f$$

Erfahrung. *Ladung kann weder entstehen, noch verschwinden.*

Gesamtladung in V: $Q_V(t) = \int_V \rho(\boldsymbol{r}, t) \, \mathrm{d}\,\mathrm{V}$, d.h. die *Kontinuitätsgleichung* soll gelten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{j}) = 0 \, . \tag{5}$$

und damit (für zeitunabhängiges Volumen): $-\frac{\partial}{\partial t} Q_V(t) = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\boldsymbol{r}, t) \, \mathrm{d}\,\mathrm{V} = \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{j}) \, \mathrm{d}\,\mathrm{V} = \int_{\partial V} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{f} = I$

Anwendung. *Eine Folgerung hieraus ist z.B. das Kirchhoffsche Gesetz.*

1.3 Zirkulation eines Vektorfeldes / Strom und Magnetfeld

Definition I.5 (Zirkulation). *Die Zirkulation eines Vektorfeldes $\boldsymbol{V}$ entlang einer Kurve $\mathscr{C} = \partial \mathscr{F}$ ist das Arbeitsintegral:*

$$\Gamma_{\mathscr{C}}(\boldsymbol{V}) = \int_{\partial \mathscr{F}} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{r} \tag{6}$$

Erfahrung. *Aus Beobachtungen folgt das Gesetz von Ampère bzw. Ørsted:*

$$\frac{4\pi}{c} \cdot I = \boxed{\frac{4\pi}{c} \int_{\mathscr{F}} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d} f = \int_{\partial \mathscr{F}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{r}} = \Gamma_{\mathscr{C}}(\boldsymbol{B}) \, , \tag{7}$$

sowie die Tatsache, dass es keine magnetischen Monopole gibt, bzw. magnetische Feldlinien geschlossen sind.

Wichtig! 2 (Magnetfeld ist Quellenfrei).

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{f} = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{div}(\boldsymbol{B}) = 0$$

1.4 Induktionsgesetz

Erfahrung. *Für die Spannung an einer (bewegten) Leiterschleife ergibt sich:*

$$\Gamma_{\partial\mathscr{F}_t}(\boldsymbol{E}) = \boxed{\int_{\partial\mathscr{F}_t} \boldsymbol{E}^{(e)}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_{\mathscr{F}_t} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{f}} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Phi_{\mathscr{F}_t}(\boldsymbol{B}) \tag{8}$$

Bemerkung. *Das erste Integral bescheibt dabei die gesamte elektromotorische Kraft im Leiter:*

$$\boldsymbol{E}^{(e)}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(t),t) + \frac{1}{c}\cdot \boldsymbol{v}(t)\times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}(t),t) \tag{9}$$

1.5 Maxwell'sche Gleichungen

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{f} = 4\pi\int_V \rho\,\mathrm{d}\,V \tag{MG I $\int$}$$

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{f} = 0 \tag{MG II $\int$}$$

$$\int_{\partial\mathscr{F}_t}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_{\mathscr{F}_t}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{f} \tag{MG III $\int$}$$

$$\int_{\partial\mathscr{F}} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = \frac{4\pi}{c}\int_{\mathscr{F}}\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{f} + \frac{1}{c}\int_{\mathscr{F}_t}\partial_t\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{f} \tag{MG IV $\int$}$$

In (MG IV $\int$) wurde als 2. Term die sog. *Maxwellsche Ergänzung* hinzugefügt. Sie folgt allein schon aus Konsistenzgründen, damit alle elektromagnetischen Phänomene korrekt beschrieben werden können. Möchte man das B-Feld eines Plattenkondensators berechnen, so kommt man ohne die Ergänzung auf der rechten Seite von (MG IV $\int$) auf 0, weil kein Strom $\boldsymbol{j}$ zwischen den Kondensatorplatten fließt. Berechnet man aber das B-Feld ein kleines Stückchen hinter den Platten – also um den Leiter – so ist hier $\boldsymbol{j}\neq 0$ und damit ist die rechte seite der Gl. von 0 verschieden.

Da man die Fläche $\mathscr{F}$ so wählen kann, dass $\partial\mathscr{F}$ um den Kondensatorplattenzwischenraum verläuft, die Fläche aber entweder durch den Zwischenraum oder durch den Leiter läuft, bekommt man für $\int_{\partial\mathscr{F}}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{r}$ – wie oben skizziert – zwei verschiedene Werte. Mit der Ergänzung dagegen wird das Elektrische Feld zwischen den beiden Platten „honoriert“ – dergestalt dass die Gleichung (MG IV $\int$) gilt.

Wichtig! 3. *Alle vier Maxwellgleichungen, zusammen mit der Lorentzkraft* (1), *der Newtonschen Grundgleichung* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{K}$ *und dem Gravitationsgesetz sind die Grundlage der klassischen Physik.*

Bemerkung. *Die Maxwellgleichungen enthalten „versteckte“ Eigenschaften wie das Superpositionsprinzip und die Kontinuitätsgleichung.*

Bedingungen an Grenzflächen

Wir betrachten zwei Volumina G_1 und G_2 mit einer gemeinsamen Grenzfläche [2]. Ist $\boldsymbol{n}$ die Normale für ∂G_1 an der gemeinsamen Grenzfläche, so ist $-\boldsymbol{n}$ die

[2] $\exists U : U\subset\partial G_1$ und $U\subset\partial G_2$

Normale von ∂G_2 an der gemeinsamen Grenzfläche. Auf der Grenzfläche sei eine Flächenladungsdichte σ und ein Flächenstrom $\boldsymbol{j}$.

Wir integrieren über ein Volumen V mit der Fläche $\mathscr{F}$ senkrecht zur Grenzfläche[3], dann ist[4] (für verschwindende Höhe des Volumens)

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{n} \mathscr{F} - \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n} \, |\mathscr{F}| = (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot \boldsymbol{n} \, |\mathscr{F}| \; ,$$

wobei wir das „–" den beiden Normalen $\boldsymbol{n}$ und $-\boldsymbol{n}$ der beiden Gebiete zu verdanken haben. Mit (MG I $\int$) kann man dies umschreiben zu

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = 4\pi \int_V \rho \, \mathrm{d\,V} = 4\pi \, \sigma \, |\mathscr{F}| \; .$$

Mit den beiden Gleichungen folgt, dass für $\sigma = 0$ die Komponente[5] des E-Felds *normal* zur Grenzfläche stetig ist und für $\sigma \neq 0$ sich ein Sprung um $4\pi\sigma$ beim Übergang zwischen den Grenzflächen ergibt.

Analog erhält man mit (MG II $\int$)

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \; ;$$

die *Normalkomponente des B-Felds ist stetig* beim Grenzflächenübergang.

Verwendet man nun eine Leiterschleife die eine neue Fläche $\mathscr{F}$ mit Normalenvektor ν einschließt und von der eine Seite der Länge ℓ *senkrecht* zu $\boldsymbol{n}$ ist, so ist (bei verschwindender Breite der Schlaufe)

$$\int_{\partial \mathscr{F}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{n}) \, \ell = \boldsymbol{\nu} \cdot [\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)] \;\; ,$$

einfach weil $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{n}$ parallel zum Leiter der Länge ℓ liegt. Das „–" kommt daher, dass der Leiter einmal rundherum integriert wird – also die Länge einmal „vorwärts" und einmal „rückwärts". Die zweite Identität kann man mit dem ε-Tensor beweisen. Wendet man nun (MG III $\int$) an, so erhält man mit $(\boldsymbol{v} = \mathbf{0})$

$$-\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_{\mathscr{F}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} \to 0 \text{ wegen } |\mathscr{F}| \to 0 \; ,$$

dass das obige Integral verschwinden muss. Da $\boldsymbol{\nu}$ beliebig aus der Grenzfläche gewählt werden kann, folgt nun $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$ – also die *Stetigkeit der Tangentialkomponente von* $\boldsymbol{E}$.

Analog folgt mit (MG IV $\int$), dass *ohne Flächenstrom* ($\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$) *die Tangentialkomponente von* $\boldsymbol{B}$ *stetig ist und mit Strom einen Sprung um* $\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$ *macht.*

1.6 Feldgleichungen in differentieller Form

Mit Hilfe der Vektoranalysis, dem Satz von Stokes[6] lassen sich die Maxwellgleichungen als Differentialgleichungen schreiben, da diese immer für beliebiges Volumen V oder beliebige Fläche $\mathscr{F}$ gelten.[7]

[3] Auf beiden Seiten der Grenzfläche ist jeweils eine Fläche $\mathscr{F}$ senkrecht zu $\boldsymbol{n}$.

[4] $\boldsymbol{E}_2$ ist das E-Feld aus G_2

[5] Beachte: Die Komponente des Vektors $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{\nu}$-Richtung ist $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$.

[6] Satz von Stokes $\Rightarrow$ Satz von Gauß

[7] Ein Beispiel: Gilt $\int_V f(x) \, \mathrm{d}\,\mathbf{x} = \int_V g(x) \, \mathrm{d}\,\mathbf{x}$ für beliebige Volumina V, so folgt notwendig, dass die Integranden für alle Punkte gleich sind – also $f = g$.

Wichtig! 4 (Lemma von Poincaré)**.** *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet , $\boldsymbol{A} \in C^1$ ein stetig diffb. Vektorfeld , $\phi \in C^2$ Skalarfeld. Dann sind äquivalent:*

$$\exists\, \phi \textit{ mit } \boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \phi \textit{ (d.h. } \phi \textit{ ist Potential von } \boldsymbol{A}\textit{)} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \textit{ Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt .} \tag{12}$$

Hier steht *einfach zusammenhängend* dafür, dass man eine Beliebige Kurve $\mathscr{C}$ in G so stetig verformen kann – also verdellen –, sodass am Ende der Verformungen ein Punkt aus dem Weg geworden ist. Dabei ist es wichtig, dass das Gebiet *keine Löcher* hat: Hat G das Loch a, dann kann man eine Kurve $\mathscr{C}$, die rund um a herumführt *nicht* zu einem Punkt zusammenziehen, weil man immer um a herumlaufen muss, also kann man $\mathscr{C}$ maximal auf einen ε großen Kreis um a verformen.

Die *Integrabilitätsbedingungnen* bedeuten

$$\partial_i A_j = \partial_j A_i \;, \forall i \in \{x, y, z\} \;.$$

Dies ist aber im $\mathbb{R}^3$ nur eine andere Schreibweise für

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}\Big|_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \text{ für alle } \boldsymbol{r} \in G \;.$$

Man kann sich einfach merken:

Identität 1. *Ein Gradientenfeld hat keine Wirbel.*

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0 \;. \tag{13}$$

Wichtig! 5 (Lemma: d ∘ d=0)**.** *Sei $\boldsymbol{A}$ ein zweifach stetig diffb. Vektorfeld und $\boldsymbol{V}$ einmal stetig diffb. Dann gilt:*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0 \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{A} : \boldsymbol{V} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{14}$$

$\boldsymbol{A}$ ist eindeutig bis auf Addition eines Gradientenfeldes $\operatorname{grad}\phi$ *(Eichfreiheitsgrad).*

Anschaulich heißt das, dass man jedes Quellenfreie Feld als Rotation eines Vektorpotentials scheiben kann. Andersherum gilt, dass jedes Rotationsfeld quellenfrei ist.

Man kann sich einfach merken:

Identität 2. *Ein Wirbelfeld hat keine Quellen.*

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0 \;. \tag{15}$$

Bemerkung. *In der Sprache der Differentialformen: Sei ω eine diffb. k-Form. Dann gilt: Ist ω exakt, d.h. $\exists\, \eta$ mit $\mathrm{d}\,\eta = \omega$, dann ist ω geschlossen, d.h.* $\mathrm{d}\omega = 0$. *Ist η zweifach stetig diffb. dann gilt:* $(\mathrm{d} \circ \mathrm{d})(\eta) = 0$.

Wie zu Beginn dieses Kapitels beschrieben[8] folgt:

[8] vgl Fußnote 7

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{MG I}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{MG II}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{MG III}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} \tag{MG IV}$$

Bemerkung. *Die Formulierung der Maxwellgleichungen in Integralschreibweise nimmt die Topologie der Gebiete auf; d.h. die Form der Volumina, Flächen und Wege, sowie die Tatsache, dass das Verformen der geometrischen Objekte keine Veränderung bringt, z.B. in* (MG IV $\int$) *die Verformng von* $\mathscr{F}$*, oder in* (MG I $\int$)*: Ändert man* ρ*, sodass die linke Seite des Integrals gleich bleibt, so bleibt auch die rechte Seite gleich. In differentieller Form hat man nur eine Punktweise Aussage.*

Wichtig! 6 (relativistisch invariant)**.** *Die Maxwellgleichungen* (MG I) *bis* (MG IV) *sind schon relativistisch invariant formuliert.*

1.7 Energie-Impuls-Bilanz im elektromagnetischen Feld

Da geladenen Teilchen Impuls und Energie mit dem elektromagnetischen Feld austauschen, stellt sich die Frage, wie Impuls und Energie in den Feldern gespeichert sind.

Dazu betrachten wir die Gleichung für die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{P} \tag{16}$$

und betrachten die *Änderung der Kinetischen Energie* $E_{\text{kin}} = \boldsymbol{p}^2/2m$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\boldsymbol{P}^2}{2m}\right) = \frac{2\dot{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{P}}{2m} = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}\ . \tag{17}$$

1.7.1 Energiebilanz

Setzt man in (17) die Lorentzkraft aus (1) ein gilt[9]

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v} = q\cdot\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{v} = q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} \overset{\text{kontinuierlich}}{\longrightarrow} \int_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}\ , \tag{18}$$

wobei wir $q\,\boldsymbol{v}$ mit dem Strom $\boldsymbol{j}$ definiert haben. Eleganter hätte man das auch bekommen, wenn man direkt ein differenziell kleines Volumen betrachtet hätte und hier die Kraft*dichte* $\boldsymbol{k}$ aus Def. I.1 verwendet hätte.

Damit lässt sich die mechanische Energiedichte w_{mech} definieren: $\partial_t w_{\text{mech}} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$ und (18) wird zu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}E_{kin} = \int_V \partial_t w_{mech}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V} \tag{19}$$

[9] da $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{v}$ ist $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v} = 0$

Eretzt man $\boldsymbol{j}$ mit (MG IV) und verwendet

Identität 3.

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{B})$$

und hier wiederum

Identität 4.

$$\boldsymbol{E} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{E}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$$

so kommt man auf:

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = -\operatorname{div}(\frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) - \partial_t (\frac{1}{8\pi} (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)) = \partial_t w_{mech} \,. \tag{20}$$

Diese Gleichung beschreibt eine Art Energietransfer aus einem differenziellen Volumen und sie spaltet sich offensichtlich in zwei Terme auf; diese definiert man *unter Anderem* wegen dieser Gleichung folgendermaßen:

Definition I.6 (Feldenergiedichte, Energiestromdichte)**.**
Die im differenziellen Volumen in E- und B-Feld „gespeicherte“ Energie – Feldenergiedichte:

$$u_{Feld} = \frac{1}{8\pi} (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) \,,$$

Den Fluss von Energie in bzw. aus dem differenziellen Volumen – Energiestromdichte (Poynting-Vektor):

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \,.$$

Gleichung (20) wird zu einem Energiesatz für das Feld-Teilchensystem oder auch zu einer Art Kontinuitätsgleichung:

Wichtig! 7 (Energiesatz für ein Feld=Teilchensystem)**.**

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{S} + \partial_t u_{Feld} = -\partial_t w_{mech}} \tag{21}$$

Oder etwas anschaulicher in integraler Schreibweise:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \int_V u_{Feld} \,\mathrm{d}\, \mathrm{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \int_V w_{mech} \,\mathrm{d}\, \mathrm{V} + \int_{\partial V} \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\, \mathbf{f} \tag{22}$$

Die Feldenergie kann in V also nur abnehmen, wenn die mechanische Energie zunimmt oder sie in Form des Energiestromdichtefluss (Poynting-Vektor) durch ∂V entweicht.

Exkurs: reale Leiter und Ohmsches Gesetz

Experimentell folgt im Leiter: $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ und damit altbekannte Formeln wie:

$$U = R \cdot I \tag{23}$$

$$R = \frac{l}{\sigma |\mathscr{F}|} \tag{24}$$

Hier ist U eine Potentialdifferenz / Spannung, R der Widerstand, l eine Leiterlänge und σ die Leitfähigkeit (die im Allgemeinen ein Tensor ist). Dann folgt für ein homogenes $\boldsymbol{E}$-Feld die Energie W:

$$\partial_t w_{mech} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = \sigma \boldsymbol{E}^2 = \frac{l}{R|\mathscr{F}|} \left(\frac{U}{l}\right)^2 = \frac{U^2}{RV} \tag{25}$$

$$W = \partial_t w_{mech} \cdot V \cdot \Delta t = U \cdot I \cdot \Delta t \tag{26}$$

1.7.2 Impulsbilanz

Die Kraftdichte $\boldsymbol{k}$ kann man mit Hilfe der Maxwellgleichungen nur in Abhängigkeit von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ ausdrücken und erhält in Komponentenschreibweise:

$$k_\alpha = \left(\partial_\beta \left(\frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \delta_{\alpha\beta} u_{Feld}\right)\right) - \frac{1}{4\pi c} \partial_t (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_\alpha \tag{27}$$

Definition I.7 (Impulsdichte des elmag. Feldes, Maxwellscher Spannungstensor)**.**

$$\boldsymbol{p}_{Feld} = \frac{1}{4\pi c} \partial_t (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = \frac{1}{c} \boldsymbol{S} \tag{28}$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \delta_{\alpha\beta} u_{Feld}) = T_{\beta\alpha} \tag{29}$$

Der Spannungstensor angewendet auf einen Vektor $T_{\alpha\beta} n_\beta = (\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{n})_\alpha$ ist zu verstehen als Kraft/Fläche in α-Richtung auf Oberflächenelement mit Normalenvektor $\boldsymbol{n}$.

Definition I.8 (Drehimpulsdichte)**.**

$$\boldsymbol{l}_{Feld} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_{Feld}$$

Dann gilt mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \boldsymbol{P}_{mech} = \int_V \boldsymbol{k} \,\mathrm{d}\,\mathrm{V}$ die Impulsbilanz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} (\boldsymbol{P}_{mech})_\alpha = \int_V \partial_\beta T_{\alpha\beta} \,\mathrm{d}\,\mathrm{V} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_V (\boldsymbol{p}_{Feld})_\alpha \,\mathrm{d}\,\mathrm{V} \tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} (\boldsymbol{P}_{tot})_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} (\boldsymbol{P}_{mech} + \boldsymbol{P}_{Feld})_\alpha = \int_V \partial_\beta T_{\alpha\beta} \,\mathrm{d}\,\mathrm{V} \tag{31}$$

II Statische Felder und elektromag. Wellen

2.1 Grundaufgabe der Elektro- und Magnetostatik

Im Folgenden seien ρ und $\boldsymbol{j}$ zeitunabhängig gegeben und außerhalb einer genügend großen Kugel gleich Null sein. Außerdem sollen deren Rückwirkung auf Ladungen und Stöme vernachlässigt werden. Gesucht sind nun zeitunabhängige Lösungen der Maxwellgleichungen, die hier folgendermaßen aussehen:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{32}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{33}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 \tag{34}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{35}$$

Die Gleichungen für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ sind also hier entkoppelt. Wenn die Felder dann für $r \to \infty$ so schnell wie $\frac{1}{r^2}$ klein werden,dann kann man Gleichungen (32)-(35) mit dem Fundamentalsatz der Vektoranalysis direkt lösen.

Einschub: Haupt-/Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Oben haben wir die beiden wichtigen Zusammenhänge $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ und das Poincaré'sche Lemma kennen gelernt; es folgt ein wichtiger Satz, der aufzeigt, dass das Verhalten von Rotationsfeldern und Gradientenfeldern die Untersuchung bei einem allgemeinen Feld auch betrifft:[10]

Wichtig! 8 (Fundamentalsatz der Vektoranalysis)**.** *Jedes überall definierte, stetig differenzierbare Vektorfeld* $\boldsymbol{v}$*, welches im Unendlichen hinreichend schnell abfällt lässt sich in einen* Gradiententeil

$$\boldsymbol{v}_{grad}(\boldsymbol{r}) := -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div}_{\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}'$$

und einen Rotationsteil

$$\boldsymbol{v}_{rot}(\boldsymbol{r}) := \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_{\boldsymbol{r}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot}_{\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}'$$

aufteilen (es gilt also $\boldsymbol{v}_{grad}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}_{rot}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$*).*

Ein unbekanntes, schnell abfallendes Vektorfeld ist also eindeutig über seine Quellen und Wirbel gegeben.

Anwendung (Felder in der Elektrostatik)**.** *Damit haben wir sogleich auch eine Möglichkeit, das Elektrische Potential* ϕ *einer beliebigen Ladungsverteilung oder das Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$ *einer beliebigen Stromverteilung zu ermitteln und daraus*

[10] Vergleiche hierzu das Vorwort und die Tatsache, dass hier Physiker rechnen – dann gilt der Satz für *jedes* Vektorfeld $\boldsymbol{v}$.

natürlich die Felder $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{E}$:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\phi\,, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\,. \tag{37}$$

Um dies herzuleiten, setze in den Gleichungen von Wichtig 8 die Maxwellgleichungen ein und beachte dass $\partial_t \boldsymbol{B} = \partial_t \boldsymbol{E} = 0$.[11]

2.1.1 Elektrostatik im $\mathbb{R}^3$

Gleichung (34) sagt uns, dass wir $\boldsymbol{E}$ als Gradientenfeld schreiben können. Also ergibt sich mit (32) die Poisson-Gleichung:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho$$

mit schneller als $\frac{1}{r}$ abfallendem ϕ. Das „–“ kommt daher, weil der Physiker im Allgemeinen ein Potential a definiert, dass das entsprechende Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ sich als $\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} a$ ergibt.

Weil die DGL linear ist, besteht die allgemeine Lösung aus homogener Lösung – also ϕ_{hom} was $\Delta\phi_{\text{hom}} \equiv 0$ löst – und einer partikulären Lösung ϕ_{part}, die dann die Gleichung $\Delta\phi_{\text{part}} = -4\pi\rho$ erfüllt. Die Ladungen ρ sind also eine *Inhomogenität* und die Schwierigkeit besteht darin, den Teil ϕ_{part} zu finden.

Ein Weg, um ϕ bzw. ϕ_{part} zu bestimmen ist Gleichung (36): Dabei braucht man nur brav zu integrieren und sie liefert dann das Ergebnis und die Grundaufgabe der Elektrostatik ist bewältigt.

Andererseits kann das Problem mit einer *Greensfunktion* $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ gelöst werden. Sie soll das Potential einer Einheitspunktladung bei $\boldsymbol{r}'$ (also $\rho(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$) darstellen und muss somit

$$\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{38}$$

erfüllen. Gemäß dem Superpositionsprinzip ergibt sich dann für eine beliebige Ladungsverteilung $\tilde{\rho}(\boldsymbol{r})$:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\tilde{\rho}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' \ :$$

Wir stellen die beliebige Ladungsverteilung $\tilde{\rho}$ als infinitissimale Summe von Einheitsladungen dar – also als Integral der Greens-Funktion. Rein Mathematisch ist das die *Faltung*[12][13]

$$\phi = G * \rho\,.$$

[11] wg. Elektro- und Magnetostatik

[12] weil man $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ auch als $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ schreiben kann

[13] Eine kurze Erklärung dafür ist die folgende: Ein Problem $D\phi = \rho$ ist gegeben – D ist ein Differenzialoperator, ϕ die gesuchte Funktion und ρ eine Inhomogenität. Für eine Partikulärlösung verwendet man dann, dass die Delta-Funktion δ das Neutrale Element der Faltung ist ($\delta * f = f$) und weiter dass die Faltung bzgl. einem Diff'operator D

$$D(f*g) = Df*g = f*Dg$$

erfüllt. Die Greensfunktion erfüllt nach Definition $DG = \delta$, also ist

$$\rho = \delta*\rho = DG*\rho = D(G*\rho)$$

Damit ist das Problem auch gelöst. Das checken wir nach:

$$\Delta\phi = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\tilde{\rho}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d\,V}' = -\int_{\mathbb{R}^3} 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\tilde{\rho}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d\,V}' = -4\pi\rho$$

Die Greensfunktion f"r den Laplace-Operator kann mittels Fouriertransformation bestimmt werden, oder man errät sie und prüft nach, ob das Erratene (38) erfüllt.

Idee der Laplace-Transformation ist die, dass man so die *Translationsinvarianz* einbaut. Wie allgemein in der Physik vereinfachen nämlich Symmetrien das Finden von Lösungen (beträchtlich) – und die Greens-Funktion ist gewissermaßen codierte Information über Geometrie und Symmetrie des Problems.

Über die Fouriertransformierte $\hat{G}(\boldsymbol{k})$ kann man G darstellen via

$$G(\boldsymbol{r}) = \int \frac{1}{(2\pi)^3}\hat{G}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\,k^3$$

und kann hier verwenden, dass sich ∇ im $\boldsymbol{k}$-Raum zu $(\mathrm{i}\boldsymbol{k})$ transformiert. Da δ die Darstellung

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\,k^3$$

hat, kann man Δ auf obige Darstellung von G anwenden. Nun schreibt man Gleichung (38) mit den beiden Integralen in eine Integralgleichung um und erhält die Bedingung

$$\hat{G}(\boldsymbol{k}) = \frac{4\pi}{k^2}$$

und kann diese nun in die Fourierdarstellung von G einsetzen, wodurch man erhält:

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\ . \tag{39}$$

2.1.2 Magnetostatik im $\mathbb{R}^3$

Durch den Ansatz $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ wird $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$ erfüllt. Dabei ist $\boldsymbol{A}$ aber nicht eindeutig. $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ erfüllt $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}'$ ebenfalls. Wir haben also einen Eich-Freiheitsgrad. Wir betrachten zunächst die sog. *Lorenzeichung*; d.h. $\operatorname{div}\boldsymbol{A}' = 0$. Das ist immer möglich, denn wenn $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 4\pi f(\boldsymbol{r}) \neq 0$, dann bildet man $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ sodass:

$$0 = \operatorname{div} A' = \operatorname{div} A + \Delta\chi = 4\pi f(\boldsymbol{r}) + \Delta\chi$$

Wie oben gesehen, wissen wir, dass diese Poissongleichung lösbar ist, also erhalten wir ein solches χ und damit auch das gewünschte $\boldsymbol{A}'$. Damit können wir (MG IV) schreiben als:

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} = \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}' = \operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\boldsymbol{A}'}_{=0} - \Delta\boldsymbol{A}' = -\Delta\boldsymbol{A}'$$

---

und so folgt insgesamt

$$D\phi = \rho = D(G * \rho) \text{ und daraus } \phi = G * \rho\ .$$

Damit haben wir eine vektorielle Poissongleichung, also gleich drei auf einmal. Mit der Greensfunktion kennen wir auch die Lösung:

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}'$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \operatorname{rot}_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot}_{\boldsymbol{r}}\Big(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (40)\\
&= -\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\nabla_{\boldsymbol{r}}\Big(\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (41)\\
&= \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^3}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (42)
\end{aligned}$$

Dies ist das bekannte *Biot-Savart-Gesetz*. Das Minus in der Rechnung ist leicht nachzuvollziehen, wenn man rot in ε-Darstellung schreibt und berücksichtigt, dass $\boldsymbol{j}$ hier konstant bzgl. dieser Ableitung ist.

Wichtig! 9 (Fazit)**.** *In der Elektro- und Magnetostatik können wir stets aus bekanntem ρ und $\boldsymbol{j}$ mittels (numerischer) Integration und Gradientenbildung ϕ, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{E}$ errechnen. In der Realität sind aber ρ und $\boldsymbol{j}$ nicht im ganzen $\mathbb{R}^3$ bekannt. Meist hat man* Randwertprobleme.

2.2 Multipolentwicklung in der Elektro- und Magnetostatik

karthesische Multipolentwicklung Die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordung einer Funktion $g(\boldsymbol{r}') = f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ im Punkt $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}$, lautet[14]:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') &= f(\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}'})f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|_{\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}} && (43)\\
&\quad +\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}'})^2 f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|_{\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}} + \mathrm{o}(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2) && (44)\\
&= f(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}})f(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}})^2 f(\boldsymbol{r}) + \mathrm{o}(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2) && (45)
\end{aligned}$$

und in Einstein-Notation:

$$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = f(\boldsymbol{r}) - x'_\alpha\partial_\alpha f(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}x'_\alpha x'_\beta\partial_\alpha\partial_\beta f(\boldsymbol{r}) + \mathrm{o}(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2)$$

Wir betrachten die für uns wichtige Funktion:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} &= \frac{1}{r} - x'_\alpha\partial_\alpha\frac{1}{r} + \frac{1}{2}x'_\alpha x'_\beta\partial_\alpha\partial_\beta\frac{1}{r} + \mathrm{o}(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2) && (46)\\
&= \frac{1}{r} + \frac{x'_\alpha x_\alpha}{r^3} + \frac{x'_\alpha x'_\beta}{2r^5}(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}) + \mathrm{o}(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2) && (47)\\
&= \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5}[3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2 - r^2 r'^2] + \mathrm{o}(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2) && (48)
\end{aligned}$$

[14] Das Minus vor dem zweiten Term kommt daher, dass man bei den Ableitungen eine Substitution $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' \mapsto \boldsymbol{r}$ durchführt

Das haben wir berechnet, um die Integraldarstellung der elektromagnetischen Potentiale zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (49)\\
&= \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' + \frac{1}{r^3}\int_{\mathbb{R}^3} (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')\,\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (50)\\
&\quad + \frac{1}{2r^5}\int_{\mathbb{R}^3} [3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2 - r^2 r'^2]\,\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' + \mathrm{o} && (51)\\
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (52)\\
&= \frac{1}{cr}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' + \frac{1}{cr^3}\int_{\mathbb{R}^3} (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (53)\\
&\quad + \frac{1}{2cr^5}\int_{\mathbb{R}^3} [3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2 - r^2 r'^2]\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' + \mathrm{o} && (54)
\end{aligned}$$

Die ersten drei Terme dieser Entwicklung bezeichnet man als *Mono-, Di-, und Quadrupol*.

2.2.1 Skalares Potential ϕ: Elektrostatik

Wir betrachten nun zum Beispiel das skalare Potential ϕ, mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ kann man ebenso verfahren. Zunächst der Monopol:

$$\phi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' = \frac{q_{tot}}{r}$$

Dazu berechnet man eine *Ersatzladungsverteilung*:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_1 &= -4\pi\rho_1 && (55)\\
\Delta\frac{q_{tot}}{r} &= -4\pi\rho_1 && (56)\\
-4\pi q_{tot}\delta(\boldsymbol{r}) &= -4\pi\rho_1 && (57)\\
q_{tot}\delta(\boldsymbol{r}) &= \rho_1 && (58)\\
& && (59)
\end{aligned}$$

D.h. die Monopolnäherung wäre exakt, wenn man eine Punktladung[15] hätte. Anders gesagt behandelt die Monopolentwicklung die Ladungsverteilung so, als ob es nur eine Punktladung wäre. Zur Dipolentwicklung definieren wir:

Definition II.1 (elektrisches Dipolmoment)**.**

$$\boldsymbol{P} := \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{r}'\,\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}'$$

Verglichen mit dem Massenschwerpunkt kann man $\boldsymbol{P}$ *auch als Ladungsschwerpunkt interpretieren; Der Unterschied ist, dass es keine* negative *Masse gibt.*

[15] also einen Monopol

Wichtig! 10. *Das Dipolmoment ist Abhängig von der Wahl der Koordinatensystems.* $\rho(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}'' + \boldsymbol{a}) \Rightarrow \boldsymbol{P} = \int_{\mathbb{R}^3} (\boldsymbol{r}'' + \boldsymbol{a})\ \rho(\boldsymbol{r}'' + \boldsymbol{a})\,\mathrm{d\,V}'' = \boldsymbol{P_a} + \boldsymbol{a}q_{tot}$ *Falls* $q_{tot} = 0$ *(wie z.B. bei einem Dipol) ist das Dipolmoment unabhängig vom Koordinatensystem.*

$$\begin{aligned} \phi_2(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{r^3}\int_{\mathbb{R}^3} (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')\ \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d\,V}' = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P}}{r^3} = -\boldsymbol{P}\cdot\nabla\frac{1}{r} && (60)\\ \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) &= -\nabla\phi_2(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{P}] && (61)\end{aligned}$$

Damit haben wir das elektrische Dipolfeld berechnet. Legen wir das Koordinatensystem, sodass $\boldsymbol{P}$ in z-Richtung zeigt, so ist in Kugelkoordinaten $\phi_2 \propto \frac{\cos(\theta)}{r^2}$ und man hat die für einen Dipol charakteristischen Äquipotentialflächen. Wieder berechnen wir die *Ersatzladungsverteilung*:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_2 &= -4\pi\rho_2 && (62)\\ -(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\Delta\frac{1}{r} &= -4\pi\rho_2 && (63)\\ 4\pi(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\ \delta(\boldsymbol{r}) &= -4\pi\rho_2 && (64)\\ -(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\ \delta(\boldsymbol{r}) &= \rho_2 && (65)\end{aligned}$$

Um das interpretieren zu können, wählen wir $\boldsymbol{P}$ wieder in z-Richtung und es vereinfacht sich: $\rho_2 = -(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{r}) = -P\partial_z\delta(x)\delta(y)\delta(z)$
Da wir keinen Ausdruck für die Ableitung der Delta-Distribution haben, müssen wir dies im Sinne des Diffenzenquotienten verstehen.

$$\rho_2 = -P\delta(x)\delta(y)\partial_z\delta(z) = -\delta(x)\delta(y)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{P}{\varepsilon}\delta(z-\frac{\varepsilon}{2}) - \frac{P}{\varepsilon}\delta(z+\frac{\varepsilon}{2})\right]$$

Das stellt zwei Punktladungen dar, die sich immer näher kommen, wobei derern Ladung $\frac{P}{\varepsilon}$ auch immer höher wird.

$$\begin{aligned} \phi_3(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{2r^5}\int_{\mathbb{R}^3} [3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2 - r^2r'^2]\ \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d\,V}' && (66)\\ &= \frac{1}{6r^5}\int_{\mathbb{R}^3} [9(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2 - 3r^2r'^2 - 3r^2r'^2 + 3r^2r'^2]\ \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d\,V}' && (67)\\ &= \frac{1}{6r^5}\int_{\mathbb{R}^3} [9(x_\alpha x'_\alpha x_\beta x'_\beta) - 3r'^2 x_\alpha x_\alpha - 3r^2 x'_\alpha x'_\alpha && (68)\\ &\quad + r^2r'^2\underbrace{\delta_{\alpha\alpha}}_{=3}]\ \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d\,V}' && (69)\\ &= \frac{1}{6r^5}\int_{\mathbb{R}^3} [3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}][3x'_\alpha x'_\beta - r'^2\delta_{\alpha\beta}]\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d\,V}' && (70)\\ &:= \frac{1}{6}Q_{\alpha\beta}\frac{3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}}{r^5} = \frac{1}{6}Q_{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\frac{1}{r} && (71)\end{aligned}$$

Definition II.2 (Tensor des elektrischen Quadrupolmomentes)**.**

$$Q_{\alpha\beta} := \int_{\mathbb{R}^3} [3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}] \rho(\boldsymbol{r}') \,\mathrm{d}\,\mathrm{V}'$$

Das ist die Basisdarstellung des Tensors des elektrischen Quadrupolmomentes bezüglich der karthesischen Basis. Man kann alle neun Komponenten der Tensordarstellung als Matrix auffassen.

Man sieht leicht: Spur$Q = Q_{\alpha\alpha} = 0$, also können wir (71) auch scheiben als $\phi_3(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}$.

Wichtig! 11. *Auch das Quadrupolmoment ist abhängig von der Wahl des Bezugssystems. Man kann wieder wie vorher nachrechnen, dass Q unabhängig vom Koordinatensystem sind, genau dann, wenn $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$ und $q_{tot} = 0$.*

Bemerkung. *Aus der Definition sehen wir, dass die zu Q gehörige Matrix mit 9 Einträgen symmetrisch ist, was die Freiheitsgrade auf 6 reduziert. Wir wissen bereits, dass reelle, symmetrische Matrizen diagonalisierbar sind, und wir daher nur 3 Freiheitsgrade auf der Diagonalen übrig haben. Die „verlorenen“ 3 Freiheitsgrade stecken in der Orientierung des Quadrupols. Wegen der Spurfreiheit von Q reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Matrixelemente nochmal um 1, sodass wir schließlich nur noch 2 übrig haben, in denen Information über die „Stärke“ des Quadrupols steckt.*

Wieder berechnen wir die *Ersatzladungsverteilung*:

$$\Delta\phi_3 = -4\pi\rho_3 \tag{72}$$

$$-4\pi\frac{1}{6} Q_{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\delta(\boldsymbol{r}) = -4\pi\rho_3 \tag{73}$$

$$\frac{1}{6} Q_{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\delta(\boldsymbol{r}) = \rho_3 \tag{74}$$

Diese Ladungsverteilung anschaulich zu interpretieren ist nicht einfach. Man kann zur Vereinfachung sagen, dass $q_{tot} = \sum_i q_i = 0$ und $\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{r}_i q_i = \boldsymbol{0}$ gelten soll, damit keine Mono- und Dipolmomente auftreten. Anschaulich heißt das, dass man die gleiche Anzahl positiver wie negativer Ladungen braucht und sie in gewisser weise symmetrisch angeordnet sein müssen. Im Allgemeinen sind die Lage der Ersatzladungen aber nicht eindeutig bestimmt und man braucht wenigstens 4 Ladungen. Dazu muss aber auch noch die Spurfreiheit von Q gewährleistet sein.

Anwendung. *Wir betrachten einen einfachen Fall der Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\ \delta(y)\ (q\delta(z-a) + q\delta(z+a) - 2q\delta(z))$. Alle Einträge von Q, die nicht auf der Diagonalen liegen, sind null, wegen den Deltafunktionen.*

$$Q_{xx} = \int_{\mathbb{R}^3} [3x'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)]\rho(\boldsymbol{r}') \,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' = -2qa^2 = Q_{yy} \tag{75}$$

$$Q_{zz} = \int_{\mathbb{R}^3} [3z'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)]\rho(\boldsymbol{r}') \,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' = 4qa^2 \tag{76}$$

Man sieht nun, dass Spur$Q = 0$. *Offensichtlich ist $q_{tot} = 0$ und $\boldsymbol{P} = (0, 0, 2q)$, was bedeutet, dass auch ein Dipolpotential vorhanden ist. Betrachtet* *man nur das Quadrupolpotential:*

$$\phi_3(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{1}{2r^5} \sum_\alpha Q_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 = \frac{Q_{xx}}{2r^5}(r^2 - 3z^2) = \frac{Q_{xx}}{2r^3}(1 - 3\cos^2\theta)$$

Betrachten wir nun dessen Äquipotentialflächen, so sieht man, dass für $\cos^2\theta_0 = \frac{1}{3}$, $r \to 0$ *gehen muss, damit* ϕ_3 *konstant bleibt. Die Winkel* $\theta_0 = 54,7^\circ$ *und* $125,3^\circ$ *charakterisieren damit die Form der Äquipotentialflächen.*

Insgesamt ergibt sich also:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q_{tot}}{r} + \frac{x_\alpha P_\alpha}{r^3} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} + o \tag{77}$$

sphärische Multipolentwicklung $\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha}$, wobei α der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ ist. Wir definieren $R := \max(r, r')$, $\tilde{r} := \min(r, r')$. Dann gibt es eine neue Darstellung der Greensfunktion mit den Legendre-Polynomen P_l und den Kugelflächenfunktionen Y_{lm}:

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\tilde{r}}{R})^2 - 2\frac{\tilde{r}}{R}\cos\alpha}} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{\tilde{r}}{R})^l \; P_l(\cos\alpha)) \tag{78}$$

$$= \frac{4\pi}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} (\frac{\tilde{r}}{R})^l \; Y_{lm}(\theta, \varphi) \; Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \tag{79}$$

Der * bedeutet hier komplex konjugiert und die gestrichenen Winkel beziehen sich auf die Lage von $\boldsymbol{r}'$ in Kugelkoordinaten. Auch das können wir zur Berechnung von ϕ verwenden.

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|} \, \mathrm{d}\,\mathrm{V}' \tag{80}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{r}^l}{R^{l+1}} \; Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \, \rho(\boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}\,\mathrm{V}' \tag{81}$$

Dabei muss man beachten, dass bei der Integration über r' eine Fallunterscheidung zu machen ist, weil dann R und $\tilde{r}$ die Rollen tauschen. Dazu teilt man das r'-Integral in zwei Teile auf.
In der Fernfeldnäherung kann man sich die Definition von R und $\tilde{r}$ sparen und nimmt einfach an, dass $r > r'$. Es ergibt sich dann:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^{l+1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} r'^l \; Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \, \rho(\boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}\,\mathrm{V}'}_{\text{Multipolelemente } q_{lm}}$$

Auch hier definiert man sich neue Multipolelemente q_{lm}, wobei es zu jedem l $2l+1$ unabhängige Komponenten gibt. Die Elemente mit $l = 0$ nennt man Monopol-, die mit $l = 1$ Dipol-, und die mit $l = 2$ Quadrupolelemente.

Das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ Die karthesische Multipolentwicklung kann man ganz analog machen. Man definiert dann:

Definition II.3 (Magnetisches Dipolmoment)**.**

$$\boldsymbol{m} := \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}'$$

Beispielsweise ergibt sich:

$$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{82}$$

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{m}] \tag{83}$$

Da ergibt sich aber ein Problem, da (83) und (61) von der Form her übereinstimmen[16], sie aber verschiedene Maxwellgleichungen erfüllen müssen. Das Problem ist darin begründet, dass es nur Näherungen sind. Verwendet man die

Identität 5.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} + 3\frac{x_\alpha x_\beta}{\|\boldsymbol{r}\|^5} - \frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$$

so ergibt sich aber bei der Berechnung von $\boldsymbol{E}_2$ und $\boldsymbol{B}_2$ ein Unterschied im Punkt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{P}] - \frac{4\pi}{3}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{P} \tag{84}$$

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{m}] + \frac{8\pi}{3}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{m} \tag{85}$$

Die Delta-Distributionen berücksichtigen den Unterschied der gemachten Näherungen. Man kann sich vorstellen, dass im elektrischen Fall zwei Ladungen unendlich nahe beieinander einen Dipol bilden; im magnetischen Falls eine unendlich kleine stromdurchflossene Leiterschleife.

2.3 Kräfte und Drehmomente auf lokalisierte Ladungs- und Stromverteilung

Kräfte Wir betrachten nun ein „kleines" Gebiet G, in das wir unseren Ursprung legen mit Ladungsverteilung ρ und Stromdichte $\boldsymbol{j}$. Von außen wirken die Felder $\boldsymbol{E}^{ext}$ und $\boldsymbol{B}^{ext}$, die statisch sind und nur langsam variieren. Wir gehen davon aus, dass ρ^{ext} und $\boldsymbol{j}^{ext}$, die zu $\boldsymbol{E}^{ext}$ und $\boldsymbol{B}^{ext}$ gehören in G = 0 sind und dass ρ und $\boldsymbol{j}$ in G nur vernachlässigbare $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Felder erzeugen. Dann können wir berechnen:

$$\boldsymbol{K} = \int_G \boldsymbol{k}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\,\mathrm{V} = \int_G \rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}^{ext}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V} + \frac{1}{c}\int_G \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}^{ext}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V} \tag{86}$$

$$= \boldsymbol{K}_{el} + \boldsymbol{K}_{mag} \tag{87}$$

[16] $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{m}$ sind konstant

Weil in G gilt: rot $\boldsymbol{E}^{ext} = \boldsymbol{0}$, div $\boldsymbol{E}^{ext} = 0$, lässt sich berechnen: $\Delta E_\alpha^{ext} = 0$. Damit fällt der „ δ-Term " in der Quadrupolentwicklung weg und wir erhalten:

$$\boldsymbol{K}_{el} = q_{tot}\boldsymbol{E}^{ext}(0) + (\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}^{ext}(0) + \frac{1}{6}(Q_{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta)\boldsymbol{E}^{ext}(0) + o \tag{88}$$

oder speziell für einen Dipol $\boldsymbol{P}$ der sich am Ort $\boldsymbol{r}_{Dipol}$ befindet:

$$\boldsymbol{K}_{el} = (\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}^{ext}|_{\boldsymbol{r}_{Dipol}} \tag{89}$$

Für das Feld $\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r}) + o$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{mag} &= \frac{1}{c}\int_G \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)\times\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (90)\\
&= \underbrace{\int_G \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{c}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}}_{=0} \times\boldsymbol{B}^{ext}(0) + \int_G \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{c}\times(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (91)\\
&= \int_G (\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{c}\times\nabla_{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (92)\\
&= -\frac{1}{c}\nabla_{\boldsymbol{r}}\times\int_G \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (93)
\end{aligned}$$

Um auf (92) zu kommen, verwendet man, dass hier lokal rot $\boldsymbol{B}^{ext} = \boldsymbol{0}$, also $\partial_\beta B_\alpha^{ext} = \partial_\alpha B_\beta^{ext}$.

Identität 6.

$$\int_G x_\alpha j_\beta\,\mathrm{d}\,\mathrm{V} = -\int_G x_\beta j_\alpha\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}$$

Wir nutzen die „bac-cab"-Regel und Identität 6, was auch auf Übungsblatt 6, Nr.1c gezeigt wurde.

$$\begin{aligned}
&\int_G \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' && (94)\\
=\;& \frac{1}{2}\left(\int_G \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' - \int_G \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}'\right) && (95)\\
=\;& -\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r})\times\underbrace{\int_G \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}'}_{=2c\boldsymbol{m}} && (96)
\end{aligned}$$

Wieder mit der „bac-cab"-Regel berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{mag} &= \nabla_{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{B}^{ext}\times\boldsymbol{m}) && (97)\\
&= (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}^{ext} - \boldsymbol{m}\underbrace{(\nabla\cdot\boldsymbol{B}^{ext})}_{=0} && (98)\\
&= (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}^{ext}|_{\boldsymbol{r}_{Dipol}} = \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}^{ext})|_{\boldsymbol{r}_{Dipol}} && (99)
\end{aligned}$$

Die letzte Identität wurde wieder wie in (92) gerechnet. Die erhaltene Form ist genauso, wie beim elektrischen Feld. Man sieht: $\boldsymbol{K}_{mag} = -\nabla U$ mit $U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}^{ext}$, was z.B. in der Atomphysik wichtig ist. Um U zu minimieren, versucht sich $\boldsymbol{m}$ also in Richtung des Magnetfeldes zu stellen.

Drehmomente

$$\boldsymbol{N} = \int_G \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d\,V} = \boldsymbol{N}_{el} + \boldsymbol{N}_{mag} \tag{100}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{el} &= \int_G \boldsymbol{r} \times (\rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^{ext}(\boldsymbol{r})) \, \mathrm{d\,V} \approx -\boldsymbol{E}^{ext}(0) \times \underbrace{\int_G \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} \, \mathrm{d\,V}}_{\boldsymbol{P}} && (101)\\
&= \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E}^{ext}|_{\boldsymbol{r}_{Dipol}} && (102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{mag} &= \frac{1}{c} \int_G \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}^{ext}(\boldsymbol{r})) \, \mathrm{d\,V} && (103)\\
&\approx \frac{1}{c} \int_G \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}^{ext}(0)) \, \mathrm{d\,V} && (104)\\
&= \frac{1}{c} \left(\int_G (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}^{ext}(0))\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d\,V} - \int_G (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}))\boldsymbol{B}^{ext}(0) \, \mathrm{d\,V} \right) && (105)\\
&= -\boldsymbol{B}^{ext}(0) \times \boldsymbol{m} - \frac{1}{c}\boldsymbol{B}^{ext}(0) \underbrace{\int_G (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})) \, \mathrm{d\,V}}_{=0} && (106)\\
&= \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}^{ext}|_{\boldsymbol{r}_{Dipol}} && (107)
\end{aligned}$$

In (106) haben wir auch Identität 6 verwendet, mit $\alpha = \beta$. Man sieht also, dass Dipole in homogenen Feldern Drehmomente, aber keine Kräfte erfahren. Inhomogene Felder üben dagegen Kräfte auf die Dipole aus.

2.4 Elektrostatik im begrenzten Raum

Wir betrachten ein durch ∂V begrenztes Gebiet V. In V können Leiter L und Ladungen q_i bzw. Ladungsverteilungen ρ liegen. Am Rand von L gilt – da innerhalb von L gelten muss $E = 0$ –

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}|_{\partial L} \text{ stetig und } \boldsymbol{E}|_{\partial L} \propto \boldsymbol{n} \, ;$$

∂L ist also eine *Äquipotentialfläche.*

Als Randbedingungen zu unserem Problem geben wir ϕ und ρ für manche Gebiete vor.

Es muss also weiterhin

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \; in \; V \tag{108}$$

gelten und je nachdem, welche Bedingungen vorgegeben sind weiter

$$\phi|_{\partial V} = f(\boldsymbol{r}) \, , \tag{109}$$

was man als *Dirichlet-Randbedingungen* bezeichnet oder

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\phi|_{\partial V} = g(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = 4\pi\sigma\ , \tag{110}$$

was *von-Neumann-Randbedingung* heißt. Für beide Bedingungen ist die Lösung ϕ eindeutig bestimmt.

2.4.1 Methode der Spiegelladung

Eine Leiteroberfläche soll eine Äquipotentialfläche sein – also $\phi|_L = 0$. Außerhalb des Volumens V, für das man eine Lösung ϕ haben möchte, kann man so viele Ladungen wie man will anbringen – und das tut man. Dabei plaziert man diese Ladungen so, dass sich die Potentiale der Ladungen außerhalb von V und die der Ladungen innerhalb an der Grenzfläche gerade auslöschen.

Die Ladungen außerhalb stören in (108) nicht weiter, weil Δ auf eine Ladung außerhalb bloß ein ρ liefert, das *außerhalb* von V definiert ist. zu dem ρ *innerhalb* V liefert dies keinene Beitrag.

Anwendung (Feld von Platte oder Kugel)**.** *Für eine* Platte *ist dies trivialerweise der Fall wenn die Ladung exakt an der Platte gespiegelt wird.*

Für kompliziertere Probleme wie bspw. eine Kugel *muss man Ladung und Ort der Ladung educated guessen (also raten) und durch die Randbedingungen genau bestimmen.*

2.4.2 Methode der Greens-Funktion

Aus der Definition (38) für die Greensfunktion folgt

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} + F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \text{ wobei } \Delta F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \textit{ innerhalb } V\ . \tag{111}$$

Das F wird so gewählt, dass die Randbedingungen befriedigt werden.

Setzt man in den Satz von Green einmal das Potential ϕ und die Greensfunktion G ein, so folgt (beachte: $\boldsymbol{n}' = -\boldsymbol{n}$)

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\,\mathrm{d\,V}' + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \phi(\boldsymbol{r}')\partial_{\boldsymbol{n}'}G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) - G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\partial_{\boldsymbol{n}'}\phi(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d\,f}'\ ; \tag{112}$$

wobei das erste Integral den Beitrag der Raumladung einbringt, das zweite den Beitrag einer Dipolschicht auf der Oberfläche und das dritte dem Beitrag einer Obeflächenladungsdichte entspricht – denn[17] $\partial_{\boldsymbol{n}'}\phi = -4\pi\sigma$.

Durch vorgabe von Dirichlet- (109) oder Von-Neumann-Randbedingungen (110) ist stets eines der Oberflächenintegrale aus (112) bestimmt; das andere kann man verschwinden lassen, indem man F aus (111) entsprechend wählt:

- Dirichlet-Randbedingungen: Wähle F – als Teil von G – so, dass $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \equiv 0$ für $\boldsymbol{r}' \in \partial V$; dann folgt aus (112):

$$\boxed{\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\,\mathrm{d\,V}' + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \phi(\boldsymbol{r}')\partial_{\boldsymbol{n}'}G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\,\mathrm{d\,f}'} \tag{113}$$

[17] Hier ist das $\boldsymbol{n}'$ jetzt genau passend, weil es *vom Leiter nach „außen“* zeigt.

- Von-Neumann-Randbedingungen:
  Wähle F so, dass für $\boldsymbol{r} \in \partial V \quad \partial_{\boldsymbol{n}'} G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = \frac{4\pi}{|\partial V|}$ gilt; dann folgt

$$\boxed{\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\,\mathrm{d\,V'} - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\partial_{\boldsymbol{n}'}\phi(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d\,f'} + \langle\phi\rangle_{\partial V}} \tag{114}$$

  Hier ist $\langle\phi\rangle_{\partial V} = \int_{\partial V} \frac{\phi(\boldsymbol{r}')}{|\partial V|}\,\mathrm{d\,f}$ – das Mittel von ϕ über die Oberfläche – eine Konstante im Potential; hat also keine Auswirkungen auf $\boldsymbol{E}$.

F hat die physikalische Bedeutung, dass es sich um das Potential am Ort $\boldsymbol{r}$ einer außerhalb von V liegend Ladung handelt, die gerade so gewählt ist, dass sie zusammen mit dem Potential der Ladung 1 bei $\boldsymbol{r}'$ (provided by der Greens-Funktion) auf der Oberfläche ∂V die geforderten Randbedingungen erfüllt.

Im Prinzip ist das wieder die Spiegelungemethode nur mathematischer verpackt. Der Weg, *wie* man auf die Greens-Funktion kommt, ist nähmlich auch – neben Raten[18] – unter Anderem von der Einheitsladung bei $\boldsymbol{r}'$ eine Spiegelung vorzunehmen und so G zu erhalten.

2.5 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Im Vakuum ist $\rho(\boldsymbol{r}, t) = 0$ und $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$. Die Maxwellgleichungen vereinfachen sich:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \tag{115}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{116}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{B} \tag{117}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{E} \tag{118}$$

Wenden wir die Rotation auf die 3. oder 4. Gleichung an, und benutzen

Identität 7.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A}$$

so erhalten wir die 6

Wichtig! 12. *Wellengleichungen*

$$\Box\psi := (\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)\psi = 0 \tag{119}$$

mit $\psi \in \{E_i, B_i\}; i \in \{x, y, z\}$

[18] Educated guess!

Wir können sie mit dem Ansatz der ebenen Welle lösen: $\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = |\psi_0| e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t-\varphi_0)}$, $\psi_0 \in \mathbb{C}$;$\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Durch einsetzen findet man die Dispersionsrelation für das Vakuum: $\omega = \pm c|\boldsymbol{k}|$. Wie schon aus der Experimentalphysik bekannt ist $|\boldsymbol{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ und $\nu\lambda = c$.
Durch fouriertransformation der Maxwellgleichungen findet man, dass $|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B}|$ und $\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$
Bilden wir die Fouriertransformierte $FT[\psi](\boldsymbol{k},t) = \int \psi(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\,r^3$ und die Rücktransformierte $\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int FT[\psi](\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\,k^3$, so können wir das auch in die Wellengleichung einsetzen.

$$0 = \Box\psi = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \underbrace{(-\boldsymbol{k}^2 - \frac{1}{c}\partial_t^2)FT[\psi](\boldsymbol{k},t)}_{=0}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\,k^3 \tag{120}$$

Wir erhalten eine neue Differentialgleichung zweiter Ordnung in t. Die allgemeine Lösung davon lautet: $FT[\psi](\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{2}[a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega t} + b(\boldsymbol{k})e^{i\omega t}]$ mit $\omega = \omega(\boldsymbol{k}) = c|\boldsymbol{k}|$. Für die Lösungen muss gelten: $\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi^*(\boldsymbol{r},t)$ und damit $FT[\psi]^*(\boldsymbol{k},t) = FT[\psi](-\boldsymbol{k},t)$. Das liefert für die Koeffizienten a und b: $a^*(\boldsymbol{k}) = b(-\boldsymbol{k})$; $b^*(\boldsymbol{k}) = a(-\boldsymbol{k})$; $\Rightarrow b(\boldsymbol{k}) = a^*(-\boldsymbol{k})$.

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}\,k^3}{(2\pi)^3}\left(e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{1}{2}a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega t} + \underbrace{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{1}{2}\overbrace{a^*(-\boldsymbol{k})}^{b(\boldsymbol{k})}e^{i\omega t}}_{\boldsymbol{k}\to-\boldsymbol{k}}\right) && (121)\\
&= \int \frac{\mathrm{d}\,k^3}{(2\pi)^3}\left(e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{1}{2}a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega t} + e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{1}{2}a^*(\boldsymbol{k})e^{i\omega t}\right) && (122)\\
&= \int \frac{\mathrm{d}\,k^3}{(2\pi)^3}\Re\left(e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}a(\boldsymbol{k})\right) && (123)\\
&= \Re\int \frac{\mathrm{d}\,k^3}{(2\pi)^3}\left(a(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k})t)}\right) && (124)
\end{aligned}$$

Man sieht also, dass alles Lösungen der Wellengleichung superpositionen von ebenen Wellen mit der Dispersionsrelation $\omega = c|\boldsymbol{k}|$ sind.

2.6 Die elektromagnetischen Potentiale

In der elektrostatik haben wir bereits die Potentiale ϕ und $\boldsymbol{A}$ kennengelernt, welche die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ beschreiben. Das versucht man nun für zeitabhängige Verteilungen $\rho(\boldsymbol{r},t)$ und $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ zu verallgemeinern.
Wir berachten zu nächst die homogenen [19] Maxwellgleichungen. Aus (MG II) folgt, dass es ein gewisses $\boldsymbol{A}$ gibt mit $\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Das können wir in (MG III) einsetzen und erhalten $\operatorname{rot}(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{A}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Das heisst wiederum, das für $\boldsymbol{F}$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist und damit ein Potential ϕ existiert mit $-\nabla\phi = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{A}$. Also sind $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ gegeben durch:

Wichtig! 13. *homogene Maxwellgleichungen*

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A};\quad \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{A} \tag{Pot}$$

[19] d.h. diejenigen, in denen ρ und $\boldsymbol{j}$ nicht vorkommen

Jetzt betrachenten wir die inhomogenen[20] Maxwellgleichungen. Die neue Darstellung für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ können wir jetzt in (MG I) und (MG IV) einsetzen:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho = -\Delta\phi - \frac{1}{c}\partial_t\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{125}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{126}$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}}_{\nabla(\nabla\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}} + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\phi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{127}$$

$$-\Box\boldsymbol{A} + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{128}$$

Wichtig! 14. *Inhomogene Maxwellgleichungen*

$$\begin{aligned} -4\pi\rho &= \Delta\phi + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\cdot\boldsymbol{A} \\ -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} &= \Box\boldsymbol{A} - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi) \end{aligned} \tag{IMG}$$

Bemerkung. (Pot) *und* (IMG) *sind invariant unter Eichtransformationen:*

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda;\ \phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t\Lambda$$

für beliebiges Skalarpotential Λ, was einfach nachzurechnen ist. Man halt also eine Freiheit in der Wahl von $\boldsymbol{A}$ und ϕ, was man ausnutzt um (IMG) *zu vereinfachen.*

Lorenzeichung Es soll gelten: $\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi = 0$. (IMG) vereinfacht sich zu:

Wichtig! 15. *Inhomogene Maxwellgleichungen unter Lorenzeichung* [a]

$$-4\pi\rho = \Box\phi \tag{129}$$

$$-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} = \Box\boldsymbol{A} \tag{130}$$

[a] Lorentzkraft und Lorentzeichung mit tz, Lorenzeichung mit z, denn diese sind nach unterschiedlichen Herren benannt.

Der Vorteil ist die gleichförmigkeit der obigen 4 Gleichungen, was eine lorenzinvariante Formulierung ermöglicht.

Coulombeichung Es soll gelten: $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$. (IMG) vereinfacht sich zu:

Wichtig! 16. *Inhomogene Maxwellgleichungen unter Coulombeichung*

$$-4\pi\rho = \Delta\phi \tag{131}$$

$$\frac{1}{c}\partial_t\nabla\phi - \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} := -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^\perp = \Box\boldsymbol{A} \tag{132}$$

[20] d.h. diejenigen, in denen ρ und $\boldsymbol{j}$ vorkommen

Man hat oben die *transversale Stromdichte* $\boldsymbol{j}^{\perp} = \boldsymbol{j} - \frac{1}{4\pi}\partial_t \nabla\phi$ definiert[21] . Nur bei der Coulombeichung ist der Vorteil, dass man wie schon in Kapitel 2.1 gesehen $\phi(\boldsymbol{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} \,\mathrm{d}\,V'$ mit Hilfe der Greensfunktion für den $\mathbb{R}^3$ berechnen kann. Dadurch wird dann auch die linke Seite von (132) bekannt. Wir haben nun in Eichungen die Problemstellung $\Box\Psi(\boldsymbol{r}, t) = -4\pi f(\boldsymbol{r}, t)$ mit gegebenem $f(\boldsymbol{r}, t)$. Wir brauchen also noch eine Greensfunktion für den D'Alembertoperator.

Greensfunktion im $\mathbb{R}^4$ Wir wollen G finden mit:

$$\Box G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(t - t')$$

Dann können wir die Lösung der (IMG) berechnen mit:

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \Psi_{hom}(\boldsymbol{r}, t) + \int_{\mathbb{R}^4} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') f(\boldsymbol{r}, t) \,\mathrm{d}\, r^{3'} \,\mathrm{d}\, t'$$

Ψ_{hom} ist eine Lösung der homogenen MG[22] $\Box\Psi_{hom} = 0$. Die explizite Rechung ist etwas langwieriger. Man kann zunächst oBdA $\boldsymbol{r}' = 0$ und $t' = 0$ setzen, fouriertransformiert die obige Differentialgleichung, kann nach $FT[G]$ auflösen und muss rücktransformieren. Dabei erhält man Integrale über Funktionen, die reelle Polstellen haben. Um diese zu berechnen, betrachtet man alles in der Distributionentheorie. Man Regularisiert [23], d.h. man verschiebt die Pole in die Komplexe Ebene und lässt sie später im Limes gegen einen reellen Pol gehen. Das regularisierte Integral kann man dann mit dem Residuensatz berechnen. Man hat aber die Wahl die Pole nach oben oder unten ins Komplexe zu verschieben [24].Dann kann man einfach wieder $\boldsymbol{r}$ durch $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ und t durch $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ ersetzen. Je nachdem erhält man:

Wichtig! 17. *retardierte Greensfunktion*

$$G_{ret}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') = \frac{\delta(t - t' - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Sie beschreibt eine zur Zeit t' von $\boldsymbol{r}'$ mit Lichtgeschwindigkeit auslaufende Kugelwelle.

Wichtig! 18. *avanvierte Greensfunktion*

$$G_{ret}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') = \frac{\delta(t - t' + \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Sie beschreibt eine *rückwärts* laufende Kugelwelle, die in einem *Blitz* verschwindet.

Durch Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung sieht man, dass beide Greensfunktionen Lösungen sind. Jedoch muss man aus Kausalitätsgründen die retardierte Grennsfunktion auswählen, denn nur diese berücksichtigt

[21] Man rechnet leicht $\operatorname{div} \boldsymbol{j}^{\perp} = 0$, was fouriertransformiert heisst: $\boldsymbol{k} \cdot FT[\boldsymbol{j}^{\perp}] = 0$, also $j^{\perp}$ senkrecht auf dem Wellenvektor steht. Daher *transversal*.

[22] also wie im Vakuum

[23] Dass man das darf lernt man z.B. in Höherer Analysis, als Theoretischer Physiker darf man das aber auch „mogeln" nennen.

[24] was beides mathematisch korrekt ist

Ursache und Wirkung. Bei der avancierten Greensfunktion würde die Lösung davon abhängen, was in Zukunft an der Quelle passiert, was logisch keinen Sinn macht.

Somit haben wir eine allgemeine Lösung für die Maxwellgleichungen mit Lorenzeichung. Die *Zeit-Integration* über eine δ-Funktion können wir leicht ausführen:

Wichtig! 19.

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \Psi_{hom}(\boldsymbol{r},t) + \int_{\mathbb{R}^4} G_{ret}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}\,r^{3'}\,\mathrm{d}\,t' \tag{133}$$

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \phi(\boldsymbol{r},t)_{hom} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' \tag{134}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)_{hom} + \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}\,\mathrm{d}\,\mathrm{V}' \tag{135}$$

Da die Greensfunktion eine Kugelwelle darstellt, ist die Lösung eine aufsummation von Kugelwellen, die mit einer Funktion f gewichtet werden. Wir prüfen druch einsetzen in die Lorenzeichung nocheinmal nach: Der inhomogene Teil für sich löst die Forderung der Lorenzeichung schon[25]. Man muss also darauf achten, dass der homogene Teil für sich schon die Lorenzeichung erfüllt.

[25] wegen der Kontinuitätsgleichung

III Spezielle Relativitätstheorie

3.1 Begriff der Raum-Zeit: historische Evolution

Aristoteles geht zunächst von der Existenz eines ausgezeichneten Inertialsystems aus. Raum und Zeit sind unabhängig und die Begriffe *gleichzeitig* und *gleichortig* sind Projektionen auf die Zeit- oder Raumachse. Alle Ereignisse sind „absolut“.
Für Galilei sind alle gleichförmig[26] gegeneinander bewegten Bezugssysteme gleichberechtige Inertialsysteme. Zeit- und Raumkoordinaten kann man mit der Galileitransformation[27] umrechnen. *Gleichortig* hängt als davon ab, aus welchem Inertialsystem man ein Ereignis betrachtet. *Gleichzeitig* ist aber noch ein absoluter Begriff. Diese Vorstellung entspricht unserer Wahrnehmung im Alltag am besten.
Man stellt jedoch fest, dass die Maxwellgleichungen nicht invariant unter Galileitransformation sind. Ein zunächst angenommener *Äther* als Medium zur Ausbreitung von elmag. Wellen[28]würde wieder für das aristotelische Weltbild sprechen, da er ein absolutes Bezugssystem darstellen würde. Experimente[29] widersprachen aber dem Äther. Zur Lösung diese Problems stellte Einstein zunächst die Forderungen auf, die Sinn machten:

Wichtig! 20 (Forderungen an eine sinnvolle (Relativitäts-)Theorie)**.**

- *Existenz von Inertialsystemen: Kräftefreie Teilchen bewegen sich gleichförmig und geradlinig.*
- *Ein gleichförmig gegenüber einem anderen Inertialsystem bewegtes System ist auch ein Inertialsystem.*
- *Eine Transformation* [a] *zwischen zwei Inertialsystemen soll alle Naturgesetze* kovariant [b] *lassen.*

[a]später Lorentztransformation
[b]d.h. invariant in ihrer Form

Bemerkung. *Die Galileitransformation kann also nicht unsere gewünschte Transformation sein, da sie die Maxwellgleichungen nicht forminvariant lässt.*

[26]d.h. unbeschleunigt
[27]Das ist eine Transformation, die aus räumlicher oder zeitlicher Verschiebung, Drehung oder *Boost* (also eine gleichförmige Bewegung) besteht.
[28]auch im Vakuum
[29]z.B. Michelson-Morley

3.2 Lorentztransformation

Wichtig! 21 (weitere Anforderungen an die Transformation)**.**

- *Homogenität von Raum und Zeit (es gibt keine ausgezeichneten Punkte)*
- *Isotropie des Raumes (es gibt keine ausgezeichnete Raumrichtung, die Zeit „fließt“ aber nur in eine Richtung)*
- *Gruppeneigenschaften (für die Menge der Transformationen mit der Hintereinanderausführung):*
  - *Abgeschlossenheit (die Hintereinanderausfürung zweier Transformationen ist wieder eine Transformation)*
  - *Assoziativität (Klammersetzen bei mehr als zwei Transformationen ist unerheblich)*
  - *Existenz eines neutralen Elements*
  - *Existenz eines inversen Elements*
- *Im Grenzwert für kleine Geschwindigkeiten soll die Transformation gegen die Galileitransformation gehen.*

Um jetzt die Lorentztransformation herzuleiten, benutzt man zunächst die *Standardkonfiguration*, was bedeutet, dass man zwei Inertialsysteme mit paralellen Achsen betrachtet, die sich mit Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zueinander bewegen. Es lässt sich zeigen, dass dieser Fall die Allgemeinheit nicht beschränkt, weil man ihn ohne Schwierigkeiten auf den Fall nichtparalleler Koordinatensysteme und beliebiger Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ übertragen kann. In einem Inertialsystem bezeichnet man die Koordinaten ohne, in dem anderen mit „Strich“.
Bei der Herleitung der Transformation aus obigen Forderungen taucht ein wichtiger Transformationsfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V_0^2}}}$$

auf. V_0 ist dabei eine noch nicht bekannte, aber konstante Geschwindigkeit[30].
Man findet:

$$x' = \gamma(x - vt);\ y' = y;\ z' = z;\ t' = \gamma(t - \frac{v}{V_0^2}x)$$

in Standardkonfiguration.
Wird in ein weiteres Inertialsystem, das mit zwei „Strichen“ gekennzeichnet wird, transferiert, findet man einen Term für Geschwindigkeitsaddition:

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{V_0^2}}$$

Man sieht leicht, dass dabei V_0 nicht überschritten werden kann, es also eine Grenzgeschwindigkeit darstellt, die in allen Inertialsystemen gleich ist. Aus

[30]Dass es sich um eine Geschwindigkeit handelt, ist ein reines Einheiten-Argument.

Einsteins Postulat, dass auch der Lichtkegel[31] Lorentzinvariant sein soll, folgt, dass die Grenzgeschwindigkeit V_0 gerade die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist.[32] Außerdem ergibt sich für Koordinatendifferenzen zwischen zwei Ereignissen der Lorentzinvatiante Raum-Zeit-Abstand:

$$\begin{aligned}(\Delta S)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 &(136)\\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2 &(137)\end{aligned}$$

Um eine vektorielle Transformation für beliebige Richtungen zu erhalten, konstruiert man eine Formel, in der nur der Anteil der Geschwindigkeit in Richtung des zu transformierenden Vektors berücksichtigt wird:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{v^2} - \gamma\boldsymbol{v}t;\ t' = \gamma(t - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c^2})$$

Bemerkung. *Die obige Transformation nennt man auch* Lorentzboost. *Um aber wirklich eine Gruppe zu erhalten, muss man um die* Abgeschlossenheit *zu erfüllen, auch die Raumdrehungen mit hinzu nehmen.*[33] *Nimmt man noch räumliche und zeitliche Translationen hinzu, erhält man die Poincarégruppe und mit Zeit- und Raumspiegelungen die* vollständige Poincarégruppe.

3.3 Raumzeitgeometrie

Längenkontraktion Aus der Transformation $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$ lässt sich das Prinzip der Längenkontraktion herleiten. Man betrachtet in Standardkonfiguration aus dem ungestrichenen System einen vorbeifliegenden Stab der Länge $L_0 = \Delta x'$[34]. Er erscheint dann in ungestrichenen Koordinaten mit der Länge $L = \Delta x$. Wir setzen $\Delta t = 0$, weil wir wenn wir Längen messen wollen schließlich gleichzeitig[35] das Maßband an Anfang und Ende der zu messenden Strecke legen müssen; täte man dies nicht, so würde sich der Stab ja neben dem Maßband bewegen und schon bei kleinen Geschwindigkeiten eine Verzerrung der Messunge bewirken.[36] Eingesetzt erhalten wir also:

$$L_0 = \gamma L$$

Da $\gamma > 1$, ist $L_0 > L$, also erscheint der Stab verkürzt.

[31] Für den Lichtkegel gilt: $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = c|t - t_0|$

[32] Man kann die Herleitung der Lorentztransformation auch mit zwei andern – äquivalenten Postulaten durchführen: (1.) Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt – die Gesetze der Physik haben in jedem die selbe form; (2.) Licht breitet sich im Vakuum mit Geschw. c aus; unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle. Offenbar ist die angesprochene Folgerung hier ein Postulat...

[33] Seien g und h zwei Lorentzboosts und g^{-1},h^{-1} deren Rücktransformationen, so ist mit Hintereinanderausfuhrung $\circ$ die Transformation $g \circ h \circ g^{-1} h^{-1}$ kein Boost mehr, sondern eine räumliche Drehung

[34] in seinem Ruhesystem, also dem mit gestrichenen Koordinaten, gemessen

[35] und fast alle vermeintlichen *Paradoxien* der SRT haben genau hier, bei der *Gleichzeitigkeit* ihren Knackpunkt

[36] Beispiel: Misst man die Länge eines fahrenden Autos und notiert im Abstand von $\Delta t = 1$ Sek wo Anfang und Ende (des Autos) sind, so bekommt man bei einer Autogeschwindigkeit von $v = 3.6m/s$ eine Längenabweichung von $\pm 3.6m$.

Zeitdilatation Wieder in Standardkonfiguration fliegt ein System mit Geschwindigkeit v vorbei, in dem ein genormter Vorgang abläuft. Das sei zum Beispiel ein Lichtpuls der eine Strecke l durchläuft, die aber senkrecht zur Bewegungsgeschwindigkeit des System liege, sodass diese nicht von der Längenkontraktion betroffen ist. Für den mitbewegten Beobachter ist die Zeit die der Lichtpuls benötigt $T_0 = \frac{l}{c}$. Für den relativ zur *Lichtuhr* ruhenden Beobachter muss das Licht außerdem die Strecke $s = vT$ zusätzlich zurücklegen. Dabei ist T die Zeit, die der Vorgang für den ruhenden Beobachter dauert. s ist dabei rechtwinklich zu l und damit ergibt sich als Gesamtstrecke $d = \sqrt{l^2 + s^2}$ und $T = \frac{d}{c}$. Man berechnet dann:

$$\begin{aligned} s = vT &= \sqrt{d^2 - l^2} && (138)\\ &= \sqrt{c^2T^2 - c^2T_0^2} && (139)\\ v^2T^2 &= c^2(T^2 - T_0^2) && (140)\\ T_0 &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}T = \frac{T}{\gamma} && (141) \end{aligned}$$

Da $\gamma > 1$, ist $T_0 < T$, also schein die Zeit im bewegten System langsamer zu laufen.

Bemerkung. *Zeitdilatation und Längenkontraktion sind reziproke Relationen zwischen zwei relativ zueinander bewegten gleichen Uhren, bzw. Maßstäben. Myonen, die durch kosmische Strahlung in der oberen Atmosphäre entstehen, können klassisch nicht bis zur Erdoberfläche gelangen, weil sie zu schnell zerfallen. Warum sie es aber doch tun, kann je nach Beobachter, mit Zeitdilatation oder Längenkontraktion erklärt werden. Für die Myonen ist die Strecke relativistisch verkürzt, da die Erde auf sie zu fliegt. Für den Beobachter auf der Erde läuft die Zeit im Myonen-System langsamer, da es bewegt ist.*

Eigenzeit In Gleichung (136) können wir zum differentiellen Abstand übergehen:

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\,S)^2 &= (\mathrm{d}\,x)^2 + (\mathrm{d}\,y)^2 + (\mathrm{d}\,z)^2 - c^2(\mathrm{d}\,t)^2 && (142)\\ &= (\mathrm{d}\,\boldsymbol{r})^2 - c^2(\mathrm{d}\,t)^2 && (143)\\ &= ((\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t})^2 - c^2)(\mathrm{d}\,t)^2 && (144)\\ &= (\boldsymbol{v}^2 - c^2)(\mathrm{d}\,t)^2 && (145) \end{aligned}$$

Dieser Raumzeitabstand ist aber in jedem Inertialsystem gleich:

$$(\mathrm{d}\,S)^2 = (\boldsymbol{v}^2 - c^2)(\mathrm{d}\,t)^2 = (\boldsymbol{v}'^2 - c^2)(\mathrm{d}\,t')^2$$

Wir können auch ein *momentanes Ruhesystem* wählen mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ und definieren dann $t' = \tau$, was wir dann *Eigenzeit* nennen. Dann gilt:

$$\mathrm{d}\,\tau = \sqrt{\frac{(\mathrm{d}\,S)^2}{-c^2}} = \sqrt{\frac{(\boldsymbol{v}^2 - c^2)(\mathrm{d}\,t)^2}{-c^2}} = \frac{\mathrm{d}\,t}{\gamma(t)}$$

Definition III.1 (Eigenzeit).

$$\mathrm{d}\,\tau := \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}\,\mathrm{d}\,t$$

Um die in einem Inertialsystem verstrichene Zeit zu berechnen, verwenden wir folgendes: Wegen $\gamma > 1$ können wir eine Abschätzung machen:

$$\tau_B - \tau_A = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \mathrm{d}\,\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}\,\mathrm{d}\,t < \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}\,t = t_B - t_A$$

Anwendung. *Wollen wir z.B. das Zwillingsparadoxon berechnen, so müssen wir erst* $\mathbf{v}(t)$ *bestimmen*[37]*. Dann können wir das Integral über* $\mathrm{d}\,t$ *berechnen und erhalten die für das bewegte System verstrichene Zeit.*

3.4 Vierertensoren

In der vierdimensionalen Raumzeit ist es sinnvoll mit *Vierervektoren* zu arbeiten, d.h. Vektoren mit vier Komponenten (und einer gewissen Metrik). Diese können beispielsweise Ereignisse beschreiben. Dann ist die erste Komponente $x^0 = ct$ Information über die Zeit, die letzten drei Komponenten $x^i, i = 1, 2, 3$ sind wie gewohnt die Raumkoordinaten. Man kann aber auch Energie und Impuls im einem Vierervektor zusammenfassen. Alle Vierervektoren müssen aber mit der Lorentztransformation transformiert werden. Man schreibt dann $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ In diesem Zusammenhang benutzt man meist die sog. *Einsteinnotation* d.h. über zwei gleiche Indices wird summiert. Man schreibt dann leicht die Poincarétransformation:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

a^μ beschreibt die Raum- und Zeittranslation. Lorentzboost, Spiegelungen und Drehungen stecken in Λ^μ_ν, welche als Einträge einer 4×4-Matrix aufgefasst werden.
Für die Differentiale und Ableitungen gilt per Kettenregel:

$$\mathrm{d}\,x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}\,x^\nu := \Lambda^\mu_\nu\,\mathrm{d}\,x^\nu$$

$$\mathrm{d}\,x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\,\mathrm{d}\,x'^\nu := \bar{\Lambda}^\mu_\nu\,\mathrm{d}\,x'^\nu$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} := \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} := \bar{\Lambda}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

Hier sieht man: $\Lambda^\mu_\nu \bar{\Lambda}^\nu_\kappa = \delta^\mu_\kappa$: Das ist die *Komponenten-Formulierung*, dass ein Element der Lorentzgruppe auf sein inverses angewandt die Einheit gibt: $\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \mathbf{1}$. Dann lässt sich über deren Transformationseigenschaften gewisse Größen definieren:

[37] falls noch nicht bekannt, wenn z.B. das Inertialsystem beschleunigt

Definition III.2 (Skalar). *Ein Skalar ist eine Größe, die invariant unter Transformation ist.*

$$\phi(x^\mu) = \phi(x'^\nu)$$

Bemerkung. *Dabei sollte man sich in Erinnerung führen, dass für bspw. die Massendichte ρ gilt*

$$\rho(x^\mu) = \rho(x^\mu(x'^\nu)) =: \rho(x'^\nu).$$

Die Formulierungen in der Physik sind hier etwas lax – die Funktion *ρ wird sowohl für die Abbildung „Koordinaten $\mapsto$ Massendichte" als auch „Transformierte Koordinaten $\mapsto$ Massendichte" verwendet, obwohl die beiden Funktionen eigentlich* verschieden *sind!*

Eigentlich müsste man eine Funktion $\tilde{\rho}$ punktweise via

$$\tilde{\rho}(x'^\nu) := \rho(x^\mu(x'^\nu))$$

definieren – der faule Physiker setzt aber eben $\tilde{\rho} \equiv \rho \ldots$

Definition III.3 (kontravarianter Vektor). *Ein kontravarianter Vektor A^μ transformiert wie $\mathrm{d}\, x^\mu$.*

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$$

Der Index steht oben. Man schreibt: $A^\mu \in \mathbb{V}^1$. $\mathbb{V}^1$ ist hier die Vierdimensionale Raumzeit.

Definition III.4 (kovarianter Vektor). *Ein kovarianter Vektor A_μ transformiert wie $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.*

$$A'_\mu = \bar{\Lambda}^\nu_\mu A_\nu$$

Der Index steht unten. Man schreibt: $A_\mu \in \mathbb{V}_1$. Das ist der Dualraum zu $\mathbb{V}^1$ [a].

[a] Das ist die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{V}^1$ in die reellen Zahlen.

Anwendung. *Man sieht dann: $A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu_\nu \bar{\Lambda}^\lambda_\mu A^\nu B_\lambda = \delta^\lambda_\nu A^\nu B_\lambda = A^\nu B_\nu$, also ist $A^\nu B_\nu$ ein Skalar.*

Definition III.5 (Tensor). *Ein (n,m)-Tensor $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_m} \in \mathbb{V}^n_m$ transformiert wie $\mathrm{d}\, x^{\alpha_1} \cdots \mathrm{d}\, x^{\alpha_n} \partial_{\beta_1} \cdots \partial_{\beta_m}$. Der Übersichtlichkeit halber nur z.B. $T^{\alpha\beta}_\gamma \in \mathbb{V}^2_1$*

$$T'^{\alpha\beta}_\gamma = \Lambda^\alpha_\kappa \Lambda^\beta_\lambda \bar{\Lambda}^\mu_\gamma T^{\kappa\lambda}_\mu$$

Mathematisch Exakt Der Mathematiker würde sagen ein Tensor $T \in \mathbb{V}^n_m$ ist eine multilineare Abbildung[38] vom Raum $\underbrace{\mathbb{V}_1 \times \cdots \times \mathbb{V}_1}_{n-mal} \times \underbrace{\mathbb{V}^1 \times \cdots \times \mathbb{V}^1}_{m-mal} \neq \mathbb{V}^n_m$ in den Grundkörper, also hier die reellen Zahlen. Damit ist ein Tensor Element des Raumes $\underbrace{\mathbb{V}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}^1}_{n-mal} \otimes \underbrace{\mathbb{V}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}_1}_{m-mal} := \mathbb{V}^n_m$. Dabei ist $\otimes$ das sog. *Tensorprodukt*. Im endlichdimensionalen ist das Tensorprodukt der Vektorraum, der vom Kreuzprodukt der Basen der anfänglichen Vektorräume aufgespannt wird. Der Ausdruck $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_m}$ sind lediglich die Komponenten oder Einträge des Tensors in einer Basisdarstellung (meist die karthesische Standardbasis), also auch nur reelle Zahlen. Physiker meinen mit *Tensor* meist dessen Komponenten.

[38] also einzeln linear in jedem seiner Argumente

Metrik In der SRT wird die Metrik durch eine symmetrische Bilinearform $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ dargestellt. Sie soll erfüllen, dass $g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\,x^\nu\,\mathrm{d}\,x^\mu := \mathrm{d}\,s^2$ unter Lorentztransformation invariant, also ein Skalar, ist. $g_{\mu\nu}$ ist also ein (0,2) Tensor.In

Vektor-Schreibeweise übersetzt ist diese Bilinearform Γ auf dem Minkowski-Raum definiert als $\Gamma(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \boldsymbol{u}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{v}$, wobei $\mathbf{g} = (g_{\mu\nu})$ die Matrix der Bilinearform ist. Eine „Metrik" (leider ist ds Konstrukt nicht poitiv definit, was eigentlich für eine Metrik wichtig wäre) ist dann δ auf dem Minkowski-Raum; mit ihr kann man die *Raumzeitabstände* zwischen zwei Ereignissen $\boldsymbol{u} = (u^\alpha)$ und $\boldsymbol{v} = (v^\beta)$ bestimmen via $\delta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \Gamma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$. Für eine Metrik muss

gelten: $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ – das ist mathemathisch äquivalent dazu, dass die Metrik δ genau dann 0 liefert, wenn die beiden Ereignisse identisch sind.[39] Damit ist die Matrix $g_{\mu\nu}$ dann auch invertierbar: $(g_{\mu\nu})^{-1} = (g^{\mu\nu})$. Für den Minkowskiraum nimmt man einen invarianten Lichtkegel an und erhält daraus und den oben zusammengetragenen Eigenschaften eine Mögliche Form für $g_{\mu\nu}$ als [40]

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man muss also darauf achten, welche der beiden Konventionen gewählt wurden, wenn man Formeln / Rechnungen nachvollzieht.

Definition III.6 (raum- und zeitartige Vektoren)**.** *Wenn mit diesem* $\mathbf{g}$ *eine Minkowskilänge negativ ist, so spricht man von einem* zeitartigen *Vektor; ist sie positiv, von einem* raumartigen *Vektor.*

Wichtig! 22. *Dies ist jedoch nur eine Mögliche Wahl der* $g_{\mu\nu}$*; man könnte genausogut auch stattdessen* $g'_{\mu\nu} := -g_{\mu\nu}$ *verwenden. Dann sind auch* raum- *und* zeit*artige Vektoren gerade entgegengesetzt definiert.*

Die Lorentztransformation in x-Richtung kann in Matrixschreibweise einfach dargestellt werden[41]:

$$(\Lambda_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[39] Der Kern muss trivial sein...

[40] Würde man das Skalarprodukt für den Euklidschen $\mathbb{R}^3$ wollen, mit einer unter *Galileitransformation* invarianten Metrik, dann wäre $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

[41] $\beta = \frac{v}{c}$

klassisch	relativistisch
$\boldsymbol{p} = 0$	$p^\mu = mu^\mu = 0$
$\frac{1}{2}mv^2$	γmc^2
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\tau}p^\mu = F^\mu$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\frac{1}{2}mv^2) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\gamma mc^2) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$

Tabelle 1: Vergleich der mechanischen Größen

3.5 Relativistische Mechanik

Weltlinien sind Kurven im vierdimensionalen Minkowskiraum. Sie werden nach der Eigenzeit parametrisiert: $x^\nu(\tau)$. Der Tangentialvektor ist dann:
$u^\nu := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\tau}x^\nu(\tau) = \gamma(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}x^\nu(t)|_{t=t(\tau)}$. Weil x^ν ein Vierervektor und $\mathrm{d}\,\tau$ ein Skalar ist, muss u^ν auch ein Vierervektor sein. Sei $x^\nu = (ct, \boldsymbol{r}(t))$, dann ist $u^\nu = \gamma(c, \boldsymbol{v}(t))$; man berechnet $u_\nu u^\nu = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \gamma^2(-c^2 + v^2) = -c^2$ und sieht, dass die *Minkowskilänge* des Tangentialvektors konstant ist. Aus der Differentialgeometrie weiß man dann, dass der Kurvenparameter τ proportional zur Bogenlänge ist, als differentialgeometrisch eine praktische Größe.

Man möchte also die Newtonsche Mechanik so verallgemeinern, dass man im Limes für kleine Geschwindigkeiten die klassische Mechanik erhält. In Tabelle 1 sind die wichtigsten Größen gegenüber gestellt.
Vor allem die Formel $E_{kin} = \gamma mc^2$ ist bemerkenswert, denn für $v \to 0$ geht γ gegen 1 und man erhält die so berühmte Formel $E = mc^2$.