Scheinklausur im WS 08/09 zur Vorlesung: Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang	Name des Tutors
Kopp, Michael	2439093	Phys (BoS)	Qi Han

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

$\Sigma = 33$

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Mobiltelefone müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Bitte beschriften Sie alle Blätter zur Abgabe mit Ihrem Namen!
- Für die Aufgaben 7, 8 und 9 muss der Lösungsweg mitangegeben werden! Ansonsten sind die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 6 in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen.
- Insgesamt können in dieser Klausur 34 Punkte erzielt werden. Wer mindestens die Hälfte der Punkte in der Klausur hat und die Kriterien für die wöchentlichen Übungen erfüllt, erhält in jedem Fall einen Schein für die Vorlesung LAAG I.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (*2 Punkte*)

2

(a) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3, \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -2, \qquad f\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = 1$$

gilt, ja oder nein? Bitte die Antwort im Kästchen ankreuzen! Ja: ☐ Nein: ☒

(b) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},$$

ja oder nein? Ihre Antwort: Ja ☒ Nein ☐

2

Aufgabe 2 (*2 Punkte*)

(a) Definieren Sie im nachfolgenden Kästchen den Begriff der *Injektivität* für eine Abbildung $f : A \to B$ zwischen zwei Mengen A und B.

> $f: A \to B$ injektiv $\iff$ $\forall_{b, b' \in A}$: $f(b) = f(b') \Rightarrow b = b'$ ✓

(b) Definieren Sie im nachfolgenden Kästchen den Begriff der *linearen Unabhängigkeit* für eine Menge $\{v_i \mid i \in I\}$ von Vektoren in einem K-Vektorraum V, wobei I eine beliebige Indexmenge bezeichnet.

> Die Vektoren $v_i \in \{v_i \mid i \in I\}$ sind lin. unabh. $\iff$
> $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$ und es gibt keine andere Möglichkeit für die λ_i. ✓

3

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Sind die folgenden Abbildungen F *injektiv*, *surjektiv* und/oder *bijektiv*? Bitte tragen Sie in jedes(!) Kästchen JA oder NEIN als Antwort ein!

1. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^4, y^3)$. $\binom{-1}{0} \mapsto \binom{1}{0}$ $\nexists_v$ $f(v) = \binom{-1}{0}$ $\binom{1}{0} \mapsto \binom{1}{0}$

2. $F: \mathbb{Q}^n \to \mathbb{R}^n,\ A \mapsto A + V,$ für einen beliebigen festen Vektor $V \in \mathbb{R}^n$.

3. $F: G \to G,\ g \mapsto h \circ g,$ wobei $(G, \circ)$ eine Gruppe ist und h fest $\in G$.

4. $F: V \to V/ker(t),\ v \mapsto v + ker(t),$ wobei $t : V \to W$ eine lineare Abbildung mit nicht-trivialem Kern $ker(t) \neq \{0\}$ ist. $\vec{0} \in Ker(t)$

	inj.	surj.	bij.	
1.	NE	NE	NE	✓
2.	JA	NE	NE	✓
3.		NE		f.
4.	NE	JA	NE	✓

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) 4

Im Folgenden sind zwei reelle quadratische Matrizen A gegeben. Die n-te Potenz von A ist durch A^n bezeichnet. Geben Sie die jeweilige Menge $\{A^n | \, n \in \mathbb{N}\}$ von Matrizen im beistehenden Kästchen an!

(a) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $i > 2$, $i \in \mathbb{N}$ ✓

(b) $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[illegible] $A^i = A^{i+j \cdot 4}$ $i, j \in \mathbb{N}$, [illegible] ✓

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) 2

Geben Sie im Kästchen einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$, so dass $x \neq 0$ und $A \cdot x = 0$ gilt, wobei A die folgende reelle (4×3)-Matrix ist:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ und W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ist die lineare Abbildung $L : V \to W$ gegeben durch die Matrizenmultiplikation 4

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie im entsprechenden Kästchen die Matrix an, die L darstellt bezüglich der geordneten Basen: (a) $\{b_1, -b_2, b_2 - b_3\}$ und $\mathcal{C}$ bzw. (b) $\mathcal{B}$ und $\{c_2, c_3, c_4, -c_1\}$.

(a) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ✓

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ ✓

Hinweis: Es gilt $L(b_i) = \Sigma_{j=1}^4 a_{ji} c_j$ für $i = 1, 2, 3$, wobei (a_{ji}) die oben angegebene (4×3)-Matrix bezeichnet.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Man betrachte die Polynome

$$(x+1)^n = \Sigma_{k=0}^n c_k^n x^k, \qquad n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\cdots\},$$

deren Koeffizienten c_k^n in $\mathbb{Z}$ liegen. Man beachte dabei, dass $(x+1)^0 = c_0^0 = 1$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten c_k^n dieser Polynome dem Pascalschen Gesetz genügen, d.h. es gilt

$$c_k^{n-1} + c_{k-1}^{n-1} = c_k^n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \{0,1,\ldots,n\},$$

wobei $c_{-1}^{n-1} := 0$ und $c_n^{n-1} := 0$ zu setzen sind.

√ (b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung des Pascalschen Gesetzes, dass für alle Koeffizienten c_k^n, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, gilt:

$$c_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wobei $0! := 1$ und $l! := 1 \cdot \ldots \cdot l$ die Fakultät von $l \in \mathbb{N}$ bezeichnet.

√ **Aufgabe 8** (*6 Punkte*)

Man betrachte die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ mit der Addition $+$ als Verknüpfung. Auf der Menge $\mathbb{R}$ ist durch die Vorschrift

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } n \in \mathbb{Z}, \text{ so dass } x - y = 2\pi n, \qquad (\pi \text{ die Kreiszahl})$$

eine Relation $\sim$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ auf $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Die Äquivalenzklasse von $a \in \mathbb{R}$ bzgl. $\sim$ sei nun durch $[a]$ bezeichnet, und T bezeichne die Menge aller Äquivalenzklassen von $(\mathbb{R},\sim)$. Zeigen Sie, dass durch die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ: \quad T \times T &\to T, \\ ([a],[b]) &\mapsto [a] \circ [b] := [a+b], \end{aligned}$$

eine Gruppenstruktur auf T definiert ist.

(c) Berechnen Sie den Kern $p^{-1}([0])$ des Gruppenhomomorphismus $p : (\mathbb{R},+) \to (T,\circ)$, welcher $a \in \mathbb{R}$ auf seine Äquivalenzklasse $[a] \in T$ abbildet.

Aufgabe 9 (*4 Punkte*)

Es seien A, B zwei Teilmengen einer Menge Y mit Abbildungen $f_1 : A \to X$ und $f_2 : B \to X$ in eine weitere Menge X, so dass $f_1(s) = f_2(s)$ für alle $s \in A \cap B$ gilt. Beweisen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Abbildung $F : A \cup B \to X$ existiert, so dass $F|_A = f_1$ und $F|_B = f_2$ gilt.

Laag

Übungsgruppenleiterin

Michael Kopp 2439093

(2)

(a)

$$(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{n-1} x^k$$

$$(x+1)^n = (x+1)^{n-1} \cdot (x+1)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k^{n-1} x^k \right)(x+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{n-1} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{n-1} x^k =$$

$$\cancel{= \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}^{n-1} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{n-1} x^k =}$$

$$c_{-1}^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{n-1} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{n-1} x^k + c_n^{n-1} =$$

$$\sum_{k=-1}^{n-1} c_k^{n-1} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} c_k^{n-1} x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} c_{k-1}^{n-1} x^k + \sum_{k=0}^{n} c_k^{n-1} x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(c_{k-1}^{n-1} + c_k^{n-1} \right) x^k := \sum_{k=0}^{n} c_k^n x^k \Rightarrow$$

$$c_{k-1}^{n-1} + c_k^{n-1} = c_k^n$$

$\square$

3

2439033

Michael Kopp

(7)

(b) Z: $c_k^n = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ Geg.: $c_k^{n-1} + c_{k-1}^{n-1} = c_k^n$, $c_0^0 = 1$

(IA): $n = 0$ $c_0^0 = 1 = \dfrac{0!}{0!\;0!} = \dfrac{1}{1 \cdot 1} = 1$ ✓

(IV) Behauptung sei wahr für $n = i$

$$c_k^i = \frac{i!}{k!\;(i-k)!}$$

(IS) $n = i+1$

$$c_k^{i+1} = c_k^i + c_{k-1}^i$$

$$= \frac{i!}{k!\cdot(i-k)!} + \frac{i!}{(k-1)!\,(i-k+1)!}$$

$$= \frac{i!}{(k-1)!\cdot k\;(i-k)!} + \frac{i!}{(k-1)!\;(i-k)!\;(i-k+1)}$$

$$= \frac{i!\;(i-k+1)}{(k-1)!\;k\;(i-k)!\;(i-k+1)} + \frac{i!\;k}{(k-1)!\;k\;(i-k)!\;(i-k+1)}$$

$$= \frac{i!\,(i-k+1+k)}{k!\;(i-k+1)!} = \frac{(i+1)!}{k!\,((i+1)-k)!}$$

Dies ist die Formel für c_k^n für $n = i+1$ ☒

$\Rightarrow$ Beh ist wahr für alle n

3

Michael Kopp 2439093

(CL 1tam)

(8) $x \sim y :\Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{Z}} \quad x - y = 2\pi n$

(a) Reflexiv: z.z. $x \sim x \Leftrightarrow x - x = 0 = 2\pi n \Rightarrow n = 0 \in \mathbb{Z}$ ✓

Symmetr.: z.z. $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$:

$x - y = 2\pi n \quad | \cdot -1 \qquad n \in \mathbb{Z}$

$y - x = -2\pi n = 2\pi(-n) \quad (-n) \in \mathbb{Z}$ wenn

$n \in \mathbb{Z}$, da $(-n)$ das neg. inv. von n ist ✓

Transitivit.: z.z. $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$:

$x - y = 2\pi n \quad , \quad y - z = 2\pi \xi \qquad (n, \xi \in \mathbb{Z})$

$x - y = 2\pi n \; | + 2\pi(+\xi) = y - z$

$(x - y) + (y - z) = 2\pi n + 2\pi \xi$

$x - z = 2\pi(n + \xi) \qquad n + \xi \in \mathbb{Z}$

da $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Körper ✓

2

(b) $\circ_T : T \times T \to T$

$([a],[b]) \mapsto [a] \circ [b] := [a + b]$

z.z. $(T, \circ)$ ist Gruppe

1) Assoziativität $[a], [b], [c] \in T$

$[a] \circ ([b] \circ [c]) \stackrel{!}{=} ([a] \circ [b]) \circ [c] \Leftrightarrow$

$[a] \circ [b + c] = [a + (b + c)] = [a + b] \circ [c] = [(a + b) + c]$

$[(a + b) + c] = [a + (b + c)]$ ist wahr wegen

Assoziativität in $(\mathbb{R}, +)$

z.z.

2) Neutrales Element: $[0]$ da:

$[a] \circ [0] = [a+0] = [0+a] = [0] \circ [a]$

3) Inverses Elem.: $[-a]$ da

$[a] \circ [-a] = [a+(-a)] = [a-a] = [0]$

2

(c) $\rho: a \mapsto [a]$: $a \mapsto \{a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$[0] = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

~~k x∈R~~

Ker $\ni x \mapsto [0] = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$

Ker $= \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

1

Michael Kopp
2439053

(9) $A, B \subseteq Y \qquad f_1 : A \to X$

$f_2 : B \to X$

(4)

$f_1(s) = f_2(s) \quad s \in A \cap B$

Z.z.: $F : A \cup B \to X \qquad F_{|A} = f_1, \quad F_{|B} = f_2$

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in A \setminus B \\ f_1(x) = f_2(x) & x \in A \cap B \\ f_2(x) & \text{für } x \in B \setminus A \end{cases}$$

✓

F ist eindeutig: *

(GA) $\exists G \quad A \cup B \to X$ mit den oben gez. Eigensch.

- $\forall x \in A \setminus B: \quad G(x) = f_1(x) = F(x)$
- $\forall x \in A \cap B: \quad G(x) = f_1(x) = f_2(x) = F(x)$
- $\forall x \in B \setminus A: \quad G(x) = f_2(x) = F(x)$

$\Rightarrow G = F$

$F_{|A} = f_1, \quad F_{|B} = f_2$:

$\forall x \in A: \quad F(x) = f_1(x)$:

$x \in A \setminus B: \quad x \xrightarrow{F} f_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \xrightarrow{f_1} f_1(x)$

$x \in A \cap B \subseteq B: \quad x \xrightarrow{F} f_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \xrightarrow{f_2} f_1(x)$

$\Rightarrow F_{|A} = f_1 \quad \forall x \in A$

Da f_1 nur auf A definiert ist, ist $F_{|A} = f_1$.

Entsprechend für $F_{|B}$ / f_2

$\square$

* Alternativ: für jedes $x \in A \cup B$ ist klar entscheidbar, ob $x \in A$ oder $x \in B$ oder $x \in A \cap B$
Jedes $x \in A$ wird durch f_1 eindeutig zugeordnet, jedes $x \in B$ durch f_2 eindeutig und die $x \in A \cap B$ werden durch f_1 und f_2 gleich eindeutig zugeordnet. $\Rightarrow$
$\forall x \in A \cup B$ ist F eindeutig.