Theoretische Physik 15. Juni 2009

Blatt 7

Michael Kopp

1 Gekoppeltes Pendel

Wir haben angenommen, dass die Federn direkt an den Massen m_i angreifen, da kein Abstand zwischen Federn und Kugel angegeben war...

(a) Lagrangegleichung

Die Pendel haben die Koordinaten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ mit

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \sin \alpha_i \\ L \cos \alpha_i \end{pmatrix} \text{ und damit } \dot{\vec{r}}_i = \begin{pmatrix} L \cos \alpha_i \cdot \dot{\alpha}_i \\ -L \sin \alpha_i \cdot \dot{\alpha}_i \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dann ergibt sich für die kinetische Energie (Einstein-Notation):

$$T = \frac{1}{2} m^i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) = \frac{1}{2} L^2 m^i \dot{\alpha}_i^2 \tag{2}$$

und für das Schwerepotential:

$$V_1 = -g m^i L \cos \alpha_i \tag{3}$$

und das Federpotential:

$$V_2 = \frac{1}{2} D (L \sin \alpha_1 - L \sin \alpha_2)^2 \tag{4}$$

und so für den Lagrange mit

$$L = T - V_1 - V_2$$

$$L = \frac{1}{2} m^i L^2 \dot{\alpha}_i^2 + g L m^i \cos \alpha_i - \frac{1}{2} D (L \sin \alpha_1 - L \sin \alpha_2)^2 \tag{5}$$

Wenn wir nun die Euler-Lagrange-Gleichung anwenden, erhalten wir:

(i) angewendet auf α_1:

$$m_1 L^2 \ddot{\alpha}_1 + g m_1 L \sin \alpha_1 + D L (L \sin \alpha_1 - L \sin \alpha_2) \cos \alpha_1 = 0 \tag{6}$$

(ii) und angewendet auf α_2:

$$m_2 L^2 \ddot{\alpha}_2 + g m_2 L \sin \alpha_2 - D L (L \sin \alpha_1 - L \sin \alpha_2) \cos \alpha_2 = 0 \tag{7}$$

Das eine abweichende Rechenzeichen in den Gl. (6) und (7) erklärt sich dadurch, dass in der Klammer vom Federpotential einer der beiden Terme negativ und einer positiv ist.

(b) Bewegungsgleichungen

Nun machen wir die (krasse) Näherungen:

(i) $\sin\alpha \approx \alpha$

(ii) $\cos\alpha \approx 1$

Dann erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 L^2 \ddot{\alpha}_1 + g m_1 L \alpha_1 + D L^2(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0 \qquad (8) \\ m_2 L^2 \ddot{\alpha}_2 + g m_2 L \alpha_2 + D L^2(\alpha_2 - \alpha_1) &= 0 \qquad (9) \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass wir die Reihenfolge der αs in der klammer geändert haben.

In Matrixschreibweise ist dies nun, wenn man durch L^2 und durch die entsprechenden $(-1) \cdot m_i$s kürzt:

$$\begin{pmatrix} -\frac{g}{L} - \frac{D}{m_1} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2} & \frac{D}{m_1} \\ \frac{D}{m_2} & -\frac{g}{L} - \frac{D}{m_2} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (10)$$

Dabei ist $x = L \cdot \alpha$ und damit macht es keinen Unterschied, ob man den Vektor $\vec{\alpha}$ wie in Gl. (10) oder einen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ verwendet – sie sind ja proportional und weil auf der anderen Seite der Gleichung 0 steht, dürfen wir mit Konstanten multiplizieren wie wir wollen.

Wie angegeben machen wir jetzt den Ansatz $\vec{x}_k = \vec{X}_k\, \mathrm{e}^{\omega_k t}$. Dabei ist zu beachten, dass die k verschiedene Vektoren indizieren – sie haben mit den is nichst zu tun! Setzen wir den Ansatz ein, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} -\frac{g}{L} - \frac{D}{m_1} - \omega_k^2 & \frac{D}{m_1} \\ \frac{D}{m_2} & -\frac{g}{L} - \frac{D}{m_2} - \omega_k^2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_k = \vec{0} \qquad (11)$$

Wir machen noch die **Vorüberlegung**: Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix mit Eigenwert ϱ und Eigenvektor $\vec{x}$, dann gilt

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \qquad (12)$$

und damit auch

$$(\mathbf{A} - \varrho) \cdot \vec{x} = \vec{0} \qquad (13)$$

Da man eine Matrix nicht mit einem Skalar addieren oder subtrahieren kann, muss man den Skalar mit $\mathbf{1} = \mathbf{E}$ (Einheitsmatrix) mulitplizieren:

$$(\mathbf{A} - \varrho \cdot \mathbf{E}) \cdot \vec{x} = \vec{0} \qquad (14)$$

Im Umkerhschluss bedeutet dies, dass wenn wir eine Matrix haben, die in den Diagonalelementen stets den selben Summanden $-\lambda$ hat und die mit einem Vektor multipliziert verschwindet, so handelt es sich bei dem Vektor um einen *Eigenvektor* und bei λ um einen *Eigenwert*.

In unserem Falle ist also ω_k^2 ein Eigenwert. Wie wollen den Eigenwert der Matrix noch auf eine andere Art bestimmen; dazu untersuchen wir die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{L} - \frac{D}{m_1} & \frac{D}{m_1} \\ \frac{D}{m_2} & -\frac{g}{L} - \frac{D}{m_2} \end{pmatrix}$$

auf Eigenwerte ϱ, indem wir das characteristische Polynom $\chi[\varrho]$ bestimmen:

$$\chi(\varrho) = \det(\mathbf{A} - \varrho \cdot \mathbf{E}) \equiv 0 \tag{15}$$

Wir erhalten durch (langes) Einsetzen und Ausrechnen:

$$\chi(\varrho) = \varrho^2 + \varrho \left(2\frac{g}{L} + D \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right) + \left(\frac{g^2}{L^2} + \frac{gD}{L} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right) = 0 \tag{16}$$

Dies kann man mit der Mitternachtsformel auflösen und erhält

$$\begin{aligned} \varrho &= -\frac{g}{L} - \frac{D}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{D^2 \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_2^2} \right)} && (17) \\ &= -\frac{g}{L} - \frac{D}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{D^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2} && (18) \end{aligned}$$

und damit

Lös. i): $\varrho = -\frac{g}{L}$ und damit nach unserer Vorüberlegung

$$\omega_1 = \pm \sqrt{-\frac{g}{L}} = \pm\, \mathrm{i} \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{19}$$

Gemäß der Vorüberlegung suchen wir nun die Eigenvektoren als Lösung der Bewegungsgleichung, indem wir die Eigenwerte in der Matrix einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -\frac{D}{m_1} & \frac{D}{m_1} \\ \frac{D}{m_2} & -\frac{D}{m_2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

und damit als erste Lösung:

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) \tag{21}$$

wobei ω_1 hier für den positiven Zweig aus Gl. (19) steht. Damit schwingen die beiden Pendel genau *in Phase* mit den Anfangsauslenkungen A bzw. B.

Lös. ii): $\varrho = -\frac{g}{L} - D\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$ und auch wieder die Lösung

$$\omega_2 = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{L} + D\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \tag{22}$$

Eigenvektor:

$$\begin{pmatrix} \frac{D}{m_2} & \frac{D}{m_1} \\ \frac{D}{m_2} & \frac{D}{m_1} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{m_1} \\ -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

und damit zweite Lösung:

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{m_1} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (C \sin\omega_2 t + D\cos\omega_2 t) \tag{24}$$

wobei ω_2 wieder der positive Zweig von (22) ist. Hier starten die Schwinger entgegengesetzt ausgelenkt – schwere Kugeln weniger weit – und schwingen dann gegeneinander.

Nun könne wir jede Lösung für das System als Linearkombinationen der Lösungen aus (21) und (24) darstellen:

$$\vec{x} = \mu \cdot \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{x}_2 \tag{25}$$

(c) Sonderfall

Wir haben die Bewegungsgleichung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (C\sin\omega_2 t + D\cos\omega_2 t) \tag{26}$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\vec{x}(0) = \vec{0} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

folgt, da die Sinusterme verschwinden und die Cosinusterme 1 ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot D \equiv \vec{0} \tag{28}$$

Und wegen der linearen Unabhängigkeit der beiden Vektoren folgt

$$B = D = 0$$

Unsere Bewegungsgleichung vereinfacht sich um die Cosinusterme und wir können ableiten:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A\omega_1 \cos \omega_1 t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot C\omega_2 \cos \omega_2 t \tag{29}$$

und die Anfangsbedingung aus (27) einsetzen:

$$\dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A\omega_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot C\omega_2 \equiv \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Damit folgt

$$2 \cdot A\omega_1 = v_0 \;\Rightarrow\; A = \frac{v_0}{2 \cdot \omega_1}$$

und damit

$$C = \frac{v_0}{2 \cdot \omega_2}$$

Unser Schwingung hat also die Form:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{v_0}{2 \cdot \omega_1} \sin \omega_1 t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{v_0}{2 \cdot \omega_2} \sin \omega_2 t \tag{31}$$

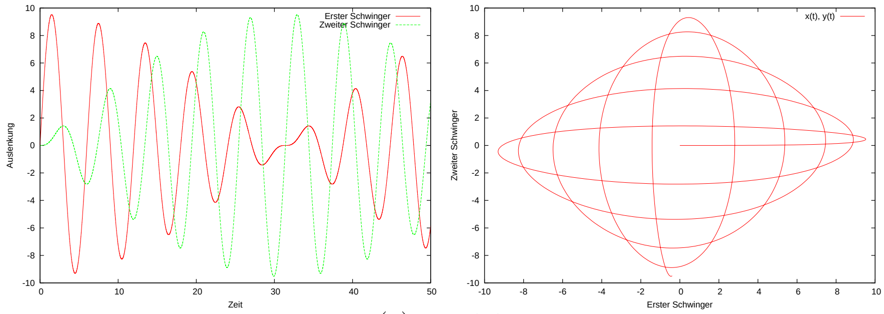
Leider kann man hier keine Additionstheoreme anwenden, weil $\omega_1 \neq \omega_2$ und damit vor Sinus und Cosinus verschiedene Faktoren stehen.

Graphisch aufgearbeitet ist das in Abb. 1; hier ist q das Verhältnis

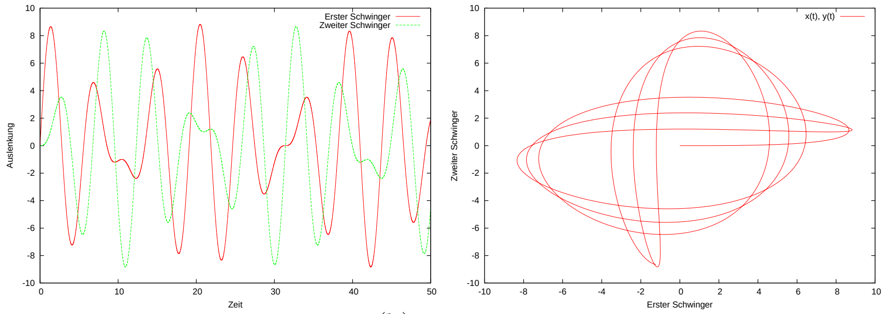
$$q = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

und man sieht, dass wenn die beiden Frequenzen nahe aneinander liegen, sich eine schöne Schwebung ergibt, bei der die Energie abwechselnd zwischen den Schwingern hin und her geschoben wird.

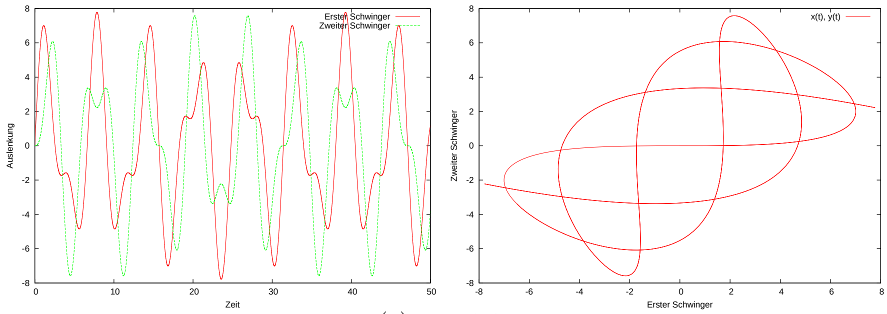
Je weiter die Schwingungsdifferenz auseinandergeht (aus Gl. (22) sieht man, dass dies für *härtere* Federn der Fall ist), desto phasengleicher schwingen die beiden Schwinger: Wenn in den rechten Diagrammen eine Gerade entsteht, so bedeutet dies, dass die beiden Schwinger perfekt in Phase Schwingen; die *Steigung* der Gerade sagt aus, in welchem Verhältnis die Amplituden zueinander stehen. Das macht auch Sinn: Wenn die Federhärte immer weiter zunimmt, ist die Schwingung fast, wie wenn eine feste Verbindung zwischen den Schwingern ist – und diese Bedingung würde dafür sorgen, dass die beiden Schwinger perfekt gleichphasig schwingen.



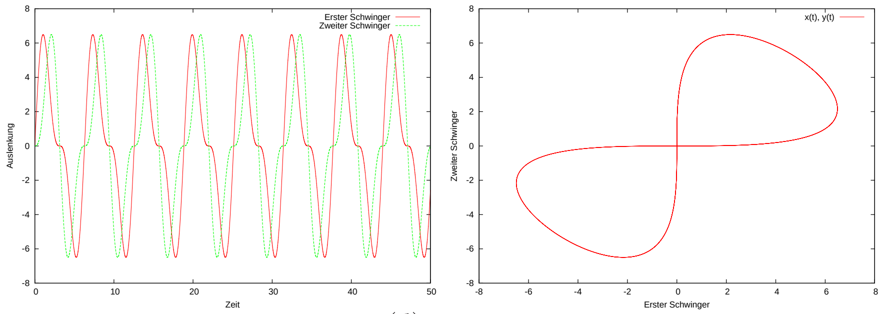
(a) $q = 1.1$



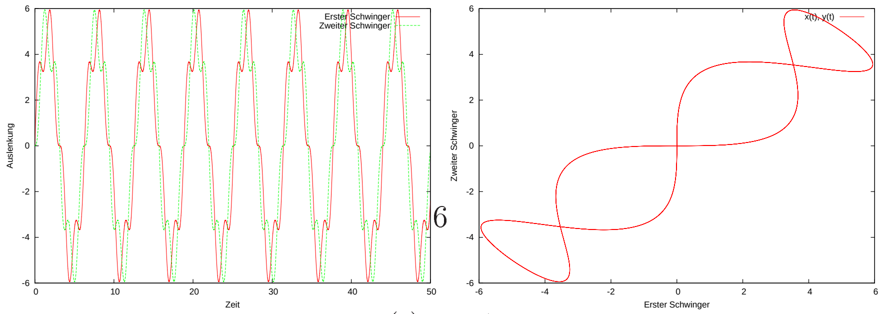
(b) $q = 1.3$



(c) $q = 1.8$



(d) $q = 2$



(e) $q = 4$

Abbildung 1: Schwingungen