Mathematische Methoden der Physik
Übung 5

Michael Kopp

16. November 2008

1 Aufgabe 2 (a) – Mehrdimensionales Integral

$$\begin{aligned}
M &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \rho = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \\
&= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy [x]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\ c = \rho \cdot c \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\ 1 \\
&= \rho \cdot c \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho \cdot c \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx b = \rho \cdot b \cdot c \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\ 1 \\
&= \rho \cdot b \cdot c \cdot [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\
&= \rho \cdot b \cdot c \cdot a
\end{aligned}$$

2 Aufgabe 2 (b) – Mehrdimensionales Integral

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz\ \rho \cdot \left(y^2 + z^2\right) = \rho \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz\ \left(y^2 + z^2\right) \\
&= \rho \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy[y^2 z + \frac{1}{3} z^3]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\ \left(y^2 c + \frac{c^3}{12}\right) \\
&= \rho \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx[\frac{1}{3} y^3 c + \frac{c^3}{12} y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\ \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{c^3 b}{12}\right) = \rho \cdot \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{c^3 b}{12}\right) \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\ 1 \\
&= \rho \cdot \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{c^3 b}{12}\right) \cdot [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\
&= \rho \cdot \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{c^3 b}{12}\right) \cdot a = \frac{ab^3 c\rho}{12} + \frac{ac^3 b\rho}{12} = \frac{ab^3 c\rho + ac^3 b\rho}{12} \\
&= \rho \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \frac{b^2 + c^2}{12}
\end{aligned}
$$

3 Aufgabe 3 – Gedämpfte Schwingung

3.1 Einsetzen der Lösung

Da $x = x_0 \cdot e^{i\omega t}$ Lösung ist, gilt:

$$x = x_0 \cdot e^{i\omega t} \tag{1}$$

$$\dot{x} = i \cdot x_0 \cdot \omega \cdot e^{i\omega t} \tag{2}$$

$$\ddot{x} = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i\omega t} \tag{3}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung $m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0$ ein, so erhält man

$$m(-x_0 \cdot \omega^2 \cdot e^{i\omega t}) + k(i \cdot x_0 \cdot \omega \cdot e^{i\omega t}) + D(x_0 \cdot e^{i\omega t}) = 0 \tag{4}$$

Durch Ausklammern (und der Vereinfachung nach (2)) ergibt sich:

$$x(-m\omega^2 + ik\omega + D) = 0 \tag{5}$$

3.2 charakteristische Gleichung

Hier gilt der *Satz vom Nullprodukt*: Gleichung (5) ist dann gelöst, wenn $x = 0$ oder wenn $-m\omega^2 + ik\omega + D = 0$. Der erste Fall ist nur dann wahr, wenn $x_0 = 0$ – dann würde der Oszillator aber garnicht schwingen. Somit muss also $-m\omega^2 + ik\omega + D = 0$.

Diese Gleichung enthält ω^2 und ω und hat als Ergebnis 0. Somit kann man zur Auflösung nach ω die *Mitternachtsformel* verwenden. Danach gilt:

$$\omega_{1,2} = \frac{-ik \pm \sqrt{-k^2 + 4Dm}}{-2m} \tag{6}$$

3.3 charakteristische Gleichung einsetzen

Setzt man die Lösung von (6) in (2) ein, so erhält man

$$x = x_0 \cdot e^{\frac{-ik \pm \sqrt{-k^2+4Dm}}{-2m} \cdot it} = x_0 \cdot e^{\frac{-k}{2m} \cdot t} \cdot e^{\mp i \frac{\sqrt{-k^2+4Dm}}{2m} \cdot t} \tag{7}$$

3.4 Interpretation

Diese Gleichung kann man nun wie folgt interpretieren: $x_0 \cdot e^{\frac{-k}{2m} \cdot t}$ ist die Amplitude der Schwingung. Sie ist abhängig von der Zeit t. D.h. es hängt von dem Faktor

$$\hat{s}_t = x_0 \cdot e^{\frac{-k}{2m} \cdot t} \tag{8}$$

ab, wie sich die Schwingung verhält. Dafür gibt es drei Möglichkeiten:

1. $x_0 \cdot e^{\frac{-k}{2m} \cdot t} > 1$
   Es handelt sich eig. um eine *angeregte* Schwingung: Die Amplitude vergrößert sich mit jeder Schwingung etwas. ($k < 0$)

2. $x_0 \cdot e^{\frac{-k}{2m} \cdot t} < 1$
   Die Schwingung wird wirklich gedämpft: Je Schwingung verkleinert sich die Amplitude ein Stück ($k > 0$)

3. $x_0 \cdot e^{\frac{-k}{2m} \cdot t} = 1$
   Die Schwingung ist harmonisch, dann wäre $k = 0$ und somit $\omega = \omega_0 = \frac{\sqrt{4Dm}}{2m} = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Der Teil $s_t = e^{\mp i \frac{\sqrt{-k^2+4Dm}}{2m} \cdot t}$ ist der Schwingungszustand der Schwingung. Man kann ihn umschreiben:

$$s_t = e^{i\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \cdot t} = \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \cdot t\right) + i \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \cdot t\right) \tag{9}$$

Es handelt sich bei der Schwingung also insgesamt um eine sinusförmige Schwingung (nach (9)), deren Aplitude mit der Zeit abnimmt – je nachdem, wie die Parameter k, m gewählt sind (nach (8)).

Die Kreisfrequenz ω der Schwingung berechnet sich letzten Endes nach

$$\omega_s = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \tag{10}$$

ω hängt also mit $\sqrt{D}$ zusammen. In Abb. 1 ist ein beispielhaftes Schaubild für $\omega(D)$ zu sehen.

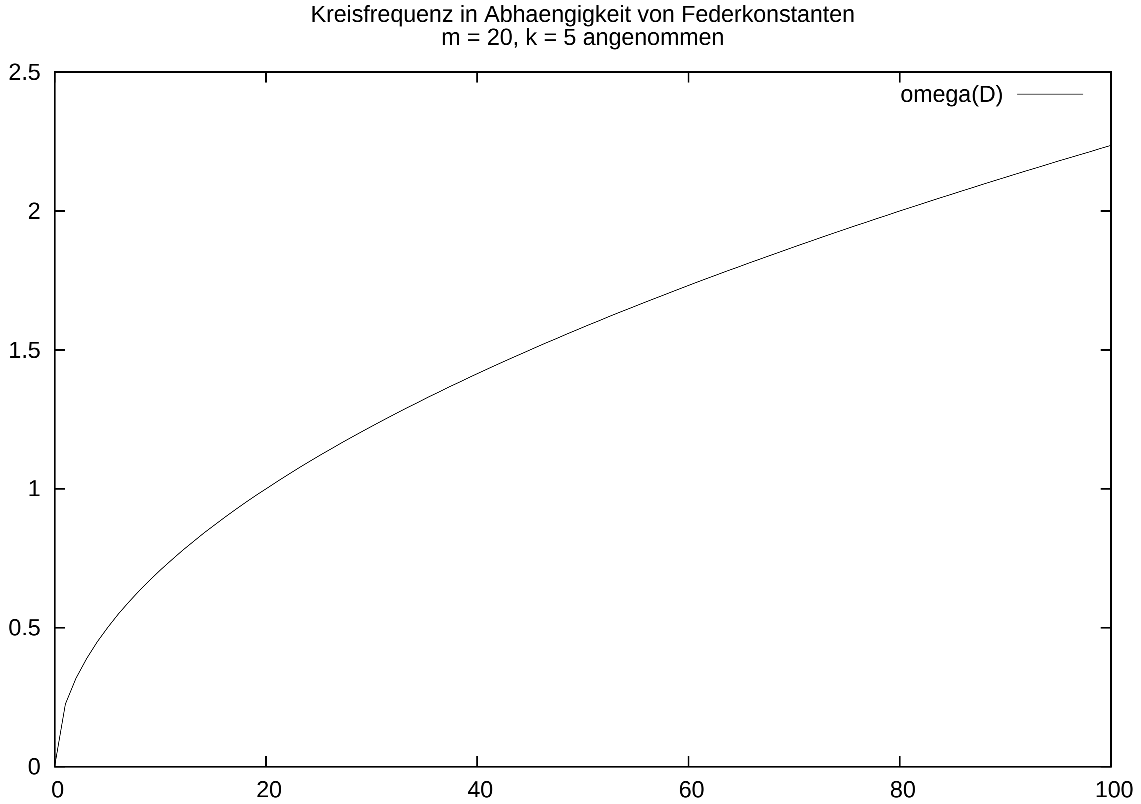

Abbildung 1: Ein Plot für die Kreisfrequenz ω in Abhängigkeit von der Federkonstanten D. Dabei wurden Masse m und Dämpfung k willkürlich gewählt – es soll eine *qualitative* Betrachtung möglich sein.