Analysis IV
Uebung 02

Michael Kopp

April 27, 2010

Auf 2

Michael Koff

[2]

(a)

- $\partial/\partial\bar{z} \; z^n = 0 \Rightarrow (CR)$

$\Rightarrow \partial/\partial\bar{z} \; e^z = 0 \Rightarrow (CR)$ (da e^z Potenzreihe mit Rad. ∞ ist)

$\Rightarrow \partial/\partial\bar{z} \; \cos z, \sin z = 0 \Rightarrow (CR)$ (da $\sin z, \cos z$ „Teile" von e^z sind)

- ~~Log z~~ $\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Ln}(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$

$\partial/\partial\bar{z} \; \mathrm{Ln}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + i \operatorname{atan} y/x$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot x + i \frac{1}{2} \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2} i \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(y/x^2\right) - \frac{1}{2} \frac{1}{1+y^2/x^2} \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \mathrm{Re}: \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1/x}{1+y^2/x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}: \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y/x^2}{1+y^2/x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 0$

$\Rightarrow (CR)$

- $\partial/\partial\bar{z} \; |z|^2 = \partial/\partial\bar{z} \; z \cdot \bar{z} = z \neq 0$ falls $z \neq 0 \Rightarrow \neg(CR)$

$z^n, e^z, \sin z, \cos z$ sind diff'bar da Polynome bzw. Potenzreihe mit Rad $= +\infty$.

$\mathrm{Log}(z)$ ist lediglich im Sinne der Umkehrableitung diff'bar; Da $\mathrm{Log}(z)$ mehrere Zweige hat, handelt es sich nicht mehr um eine Funktion; Es kann damit also $|\mathrm{Log}\, z - \mathrm{Log}\, z| \neq 0$ sein; somit ist der Ableitungsbegriff hier nicht mehr sinnvoll. Wenn man aber einen Zweig wählt, kann man $\rightsquigarrow$ Diff'barkeit testen:

$\mathrm{Ln}\, z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{atan} \frac{y}{x} \qquad z = x+iy$

$\rightsquigarrow$ Für Frechetdiff'barkeit prüfe, ob alle Part. Abl. in Umgebung von Punkten in $U_R(0)$ stetig sind; mit (CR) reicht es, $\partial_y u, \partial_y v$ zu testen, $\mathrm{Ln}\, z = u + iv$:

$\partial_y u = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \partial_y v = \frac{x}{x^2+y^2}$

Außerhalb der 0 sind diese Funktionen stetig.

Für $z \neq 0$ ist Ln also diff'bar.

(b) $\rightsquigarrow$ nächste Seite ...

Ana ③

Michael Kopp

[2]
(b) $|f| = const \Leftrightarrow |f|^2 = const$

• $|f| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Rightarrow$ für $|f| = 0$ gilt Beh. offens.

• $|f| \neq 0 \Leftrightarrow |f|^2 \neq 0 \quad f = u + iv \Rightarrow |f|^2 = u^2 + v^2$.

$|f|^2 = const \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} |f|^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) u^2 + v^2 = uu_{,x} + vv_{,x} - iuu_{,y} - ivv_{,y} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} uu_{,x} + vv_{,x} = 0 \\ uu_{,y} + vv_{,y} = 0 \end{Bmatrix} \overset{(CR)}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} uu_{,x} - vu_{,y} = 0 \\ uu_{,y} + vu_{,x} = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

• OBdA $u = 0 :\Rightarrow v \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -vu_{,y} = 0 \\ vu_{,x} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_{,y} = 0 \\ u_{,x} = 0 \end{Bmatrix} \overset{(CR)}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} v_{,x} = 0 \\ v_{,y} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Alle Ableitungen von f verschw. $\Rightarrow f = const.$

• $u \neq 0, v \neq 0$:

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} uu_{,x} - vu_{,y} = 0 \\ vu_{,x}\frac{u}{v} + uu_{,y}\frac{u}{v} = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \\ 0 + \left(\frac{u^2}{v} + v\right) \cdot u_{,y} = 0 \end{Bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} uu_{,x} - vu_{,y} = 0 \\ \frac{u^2+v^2}{v} u_{,y} = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} uu_{,x} - vu_{,y} = 0 \\ u_{,y} = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \cancel{u} u_{,x} = 0 \\ u_{,y} = 0 \end{Bmatrix}$

da $u^2 + v^2 = |f|^2 \neq 0$, $v \neq 0$

$\overset{(CR)}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} v_{,y} = 0 \\ v_{,x} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Alle Abl. von f verschw.

wieder; $f = const.$

$\square$

$\boxed{4}$ $u_{,x} = v_{,y} \quad u_{,y} = -v_{,x}$

(a) $u_{,x} = 3x^2 - 3xy^2 = v_{,y} \Rightarrow v = 3yx^2 - xy^3$

$\Rightarrow f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + i(3yx^2 - xy^3)$. $\Omega = \mathbb{C}$, f ist komplex diff'bar, weil Frechetdiff'bar, da Summe von Pol., deren ~~Ablei~~ part. Abl. stetig sind.

(b) $u_{,x} = 2e^x \sin y = v_{,y} \Rightarrow v = -2e^x \cos y$

$u_{,y} = -2e^x \sin y = -v_{,x} \Rightarrow v = -2e^x \cos y$

$\Rightarrow f(x,y) = 2e^x \sin y + i(-2e^x \cos y)$, $\Omega = \mathbb{C}$

f diff'bar – Argumentation s.o.

(c) $u_{,x} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} = v_{,y} \Rightarrow$ Ansatz $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow v_{,y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ✓

$u_{,y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_{,x} \Rightarrow$ Erhöhtest gucken: $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow v_{,x} = +\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ ✓

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x - iy}{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

f auf seinem Def'bereich komplex diff'bar, wegen part. Abl.

(d) Genau gucken: $f(x,y) = \sqrt{(x+iy)^2 - 1}$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sqrt{(x+iy)^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\sqrt{(x+iy)^2-1} = \frac{1}{4} \frac{2(x+iy) - 2(x+iy)}{\sqrt{(x+iy)^2-1}} = 0$

$\Rightarrow$ (CR) gilt.

$\frac{\partial}{\partial z} \sqrt{(x+iy)^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+iy) + 1\, 2(x+iy)}{\sqrt{(x+iy)^2-1}} = \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}$

$\rightsquigarrow$ dies ist für $z^2 \neq 1$ diff'bar, also $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$

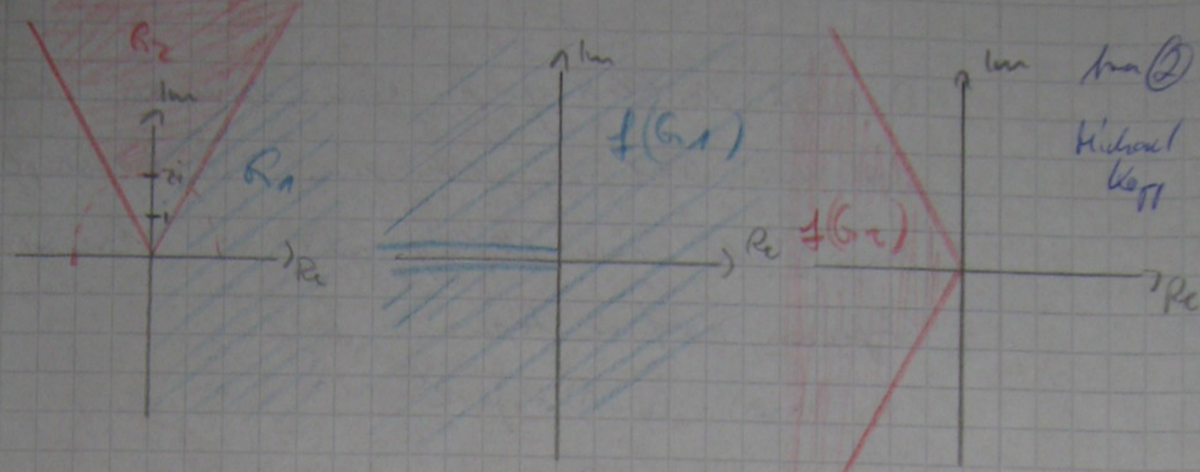
Ana (2)

Michael Kopp

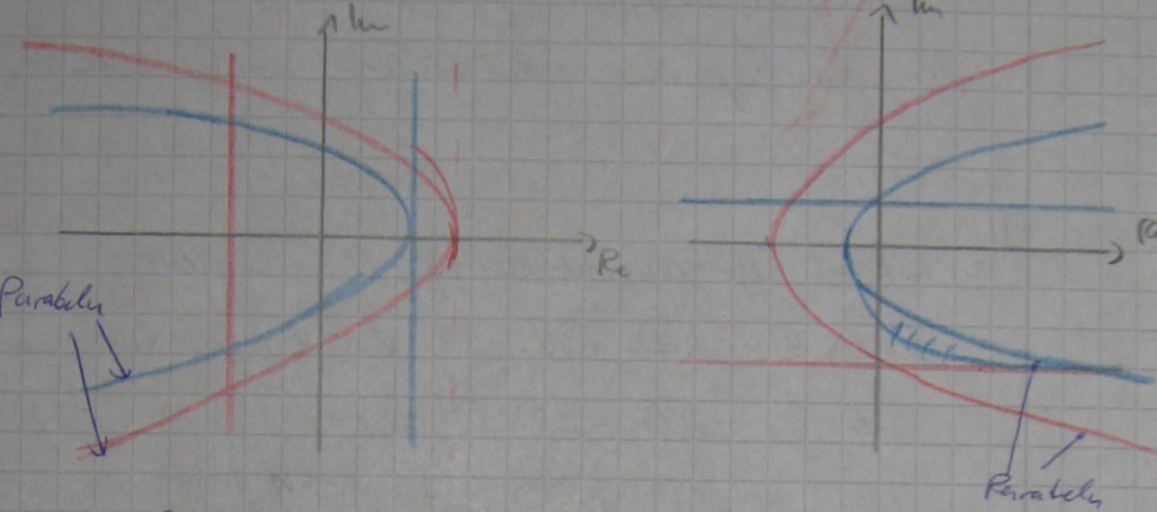
5

(a)

(i)



(ii)



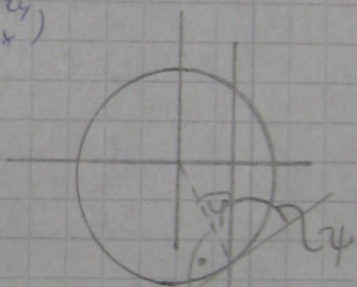
$z^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$, $x = \mathrm{Re}\, z$; $y = \mathrm{Im}\, z$

(iii) $f: \binom{x}{y} \longmapsto \binom{x^2-y^2}{2xy}$; $f_{,x} = \binom{2x}{2y}$ $f_{,y} = \binom{-2y}{2x}$

$(g_{ij}) = 4\cdot(x^2+y^2)\cdot \mathbb{1} \propto \mathbb{1}$ ⇒ konform.

Vgl. 466. ; $\sin\varphi = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \varphi = \pi/4$

Schnittwinkel $\psi = \pi/2 - \varphi = \pi/4$.



(b) $z = x+iy$ $u = a+ib$ $v = c+id$

Die Gleichung $|z-u| = \lambda|z-v|$ wird quadriert, damit man die Beträge besser berechnen kann:

$|z-u|^2 = (x+iy-a-ib)(x-iy-a+ib) =$

$= x^2 + \cancel{ixy} - ax + \cancel{ixb} - \cancel{ixy} + y^2 - \cancel{iay} - by - ax + \cancel{iay} + a^2 - \cancel{iab} - \cancel{ixb} - by + \cancel{iab} + b^2$

$= x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

$|z-v|^2 \overset{\text{analog}}{=} x^2+y^2 - 2cx - 2dy + c^2 + d^2$

$\Rightarrow (1-\lambda^2)\cdot(x^2+y^2) + (-2a + 2\lambda c)x + (-2b + 2\lambda d)y = \lambda(c^2+d^2) - a^2 - b^2$

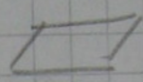
Dies ist die Gleichung für einen verallgemeinerten Kreis; lässt man $\lambda=1$ zu, hat man eine Geradengleichung. Man könnte diese Gleichung noch durch Quadratischen Ergänzen auf die Form

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\mu\cdot R^2$$

bringen ($\alpha,\beta,\mu,R\in\mathbb{R}$, $\mu>0$, alle konst.), was eine Kreisgleichung um den Punkt $\alpha+i\beta$ bedeutet.

$\boxed{1}$

(a) ($\alpha\in\mathbb{Z}$): Die Abb ist eindeutig. Nur ein Blatt.

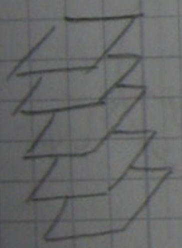


($\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$): $\alpha=n+s/v$ mit $s,v\in\mathbb{Z}, v\neq 0, s<v, n\in\mathbb{Z}$.

Für $z=re^{i\varphi}=re^{i\varphi+i2\pi k}$ folgt:

$$z^\alpha=r^\alpha\cdot e^{i\varphi\alpha+i2\pi k\alpha}=z^\alpha\cdot\underbrace{e^{i2\pi k n}}_{1}\,\underbrace{e^{i\frac{2\pi k}{v}\cdot s}}_{(*)}$$

(*) wird niemals 1 da $s<v$. Für (*) braucht man v Blätter, ($k=u\cdot v$ $u\in\mathbb{Z}$) weil man für $k=0$, $k=v$ die selbe Zahl erhält, für die anderen k jedoch nicht $\Rightarrow$ Dies sind die verschiedenen Zweige von $f(z)=z^\alpha$. Die Multiplikation vom Argument mit s stört nicht, da diese Abb. eindeutig ist, und s also keine „Umdrehungen" erzeugen kann da $s<v$.



($\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) $z^\alpha=z^\alpha\cdot e^{i2\pi k\alpha}$: Es gibt keine ganze Zahl k, sodass $k\cdot\alpha$ wieder in $\mathbb{Z}$ ~~liegen~~ liegt. Jedes $k\in\mathbb{Z}$ induziert damit einen eigenen Zweig von $f(z)=z^\alpha$; damit braucht man abzählbar viele Blätter.

(b) Vgl. Skizze