# Analyis IV
# Uebung 07

*Michael Kopp*

June 9, 2010

1 Aus 7

Michael Wogg

(b) $\int_\gamma \frac{e^\omega}{\omega^z} d\omega = \int_\gamma e^\omega \cdot e^{-z \ln \omega} d\omega =$

$= \int_\gamma e^\omega \sum_{\xi=0}^\infty \frac{1}{\xi!} (-z \ln \omega)^\xi \underset{\uparrow}{=} \sum_{\xi=0}^\infty \frac{1}{\xi!} \int_\gamma e^\omega (-z \ln \omega)^\xi d\omega$

Potenzreihe...

Die Integrale konvergieren, weil ~~d~~ der $e^\omega$-Teil für diese $\gamma$ das Verh. $e^{+t}$, $t \in (-\infty, 1)$ hat; der Ln wächst langsamer als ~~ein~~ $\omega$, ~~so~~ $\ln^\xi$ langsamer als ein Polynom, wird also von $e^{-\omega}$ plattgeknüppelt. Die Polstelle des Ln (0) liegt „weit" (1) von $\gamma$ entfernt... Damit kann man $g$ als Potenzreihe schreiben, womit es analytisch ist.

(a) (1) $g(z) \Gamma(z) \xi^{-z} = g(z) \xi^{-z} \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy =$ $\quad \xi x = y \quad \xi dx = dy$

$g(z) \cancel{\xi^{-z}} \int_0^\infty \cancel{\xi^{z-1}} x^{z-1} e^{-\xi x} \cancel{\xi} dx \qquad x \longmapsto y.$

(2) $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^\omega}{\omega^z} d\omega \underbrace{\int_0^\infty y^{z-1} e^{-\xi y} dy}_{\text{in } \omega \text{ const.}} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \int_0^\infty \frac{e^\omega}{\omega^z} y^{z-1} e^{-\xi y} dy d\omega \ominus$

$\omega = \tau y \quad d\omega = y \, d\tau$

$\ominus \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \int_0^\infty \frac{e^{\tau y}}{\cancel{y^z}} \frac{1}{\tau^z} \cancel{y^{z-1}} e^{-\xi y} \cancel{y} dy d\tau =$

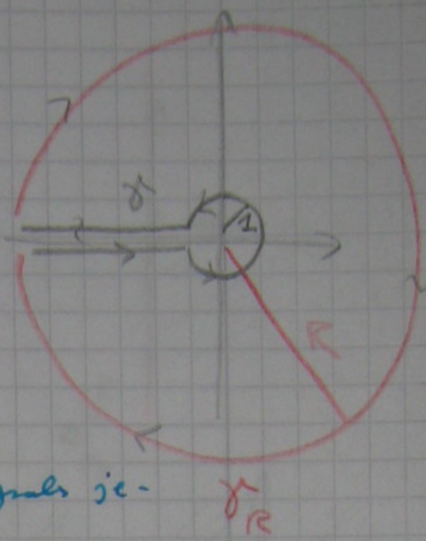
$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \int_0^\infty \frac{1}{\tau^z} e^{(\tau - \xi) y} dy d\tau \qquad \tau \longmapsto \omega.$

(3) $\int_0^\infty e^{(\omega - \xi) y} dy = \frac{1}{\omega - \xi} e^{(\omega - \xi) y} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{\omega - \xi} 1.$

Da $\operatorname{Re} \xi > \operatorname{Re} \omega$ verschw. ob. Grenze

□

$\boxed{7}$




(b) Den bisherigen Weg $\gamma$ ergänzen wir durch einen Kreis mit Rad. $R$ : $\gamma_R$, sodass $\gamma' = \gamma \cup \gamma_R$ geschlossen sind. Jetzt liegt $0 \notin \partial^{-1}\gamma'$ aber $\xi \in \partial^{-1}\gamma'$.

Für $R \to \infty$ verändert sich der Wert des Integrals jedoch nicht: $\int_{\gamma'} = \int_{\gamma}$ weil das Integral über $\gamma_R$ für $R \to \infty$ verschwindet:

$\partial^{-1}$: Umkehrung von „Rand": Eingeschl. Gebiet ☺

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{w^2(w-\xi)}\,dw\right| \overset{w=Re^{i\varphi}}{=} \left|\int_{(-\pi,\pi)} \frac{1}{R^2 e^{i2\varphi}(Re^{i\varphi}-\xi)}\, R\underbrace{|ie^{i\varphi}|}_{1}\,d\varphi\right|$$

$$\le \underset{\text{Länge}}{2\pi} \cdot \max_{\varphi} \left|\frac{R}{R^2 e^{i2\varphi}(Re^{i\varphi}-\xi)}\right|$$

Es ist $\operatorname{Re} z > 0$ : $\exists \varepsilon > 0$: $\operatorname{Re} z > \varepsilon > 0$

$$\le 2\pi \cdot \max_{\varphi} \frac{\cancel{R}}{R^2 \underbrace{|e^{i2\varphi}|}_{\text{beschr.}} \left|e^{i\varphi} - \frac{\xi}{R}\right| \cdot \cancel{R}} \longrightarrow 0 \quad R \to \infty.$$

$\xi$ ist das einzige Residuum von $\frac{1}{w^2(w-\xi)}$, es ist ein einfacher Pol, $\operatorname{Res}_\xi = \lim_{w \to \xi} \frac{w-\xi}{w^2(w-\xi)} = \frac{1}{\xi^2}$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w^2(w-\xi)}\,dw = 2\pi i \operatorname{Res}_\xi = 2\pi i \cdot \frac{1}{\xi^2}.$$

Das „−" in der Gl. aus (a) folgt, weil $\gamma'$ nicht im positiven Sinne umlaufen wird.

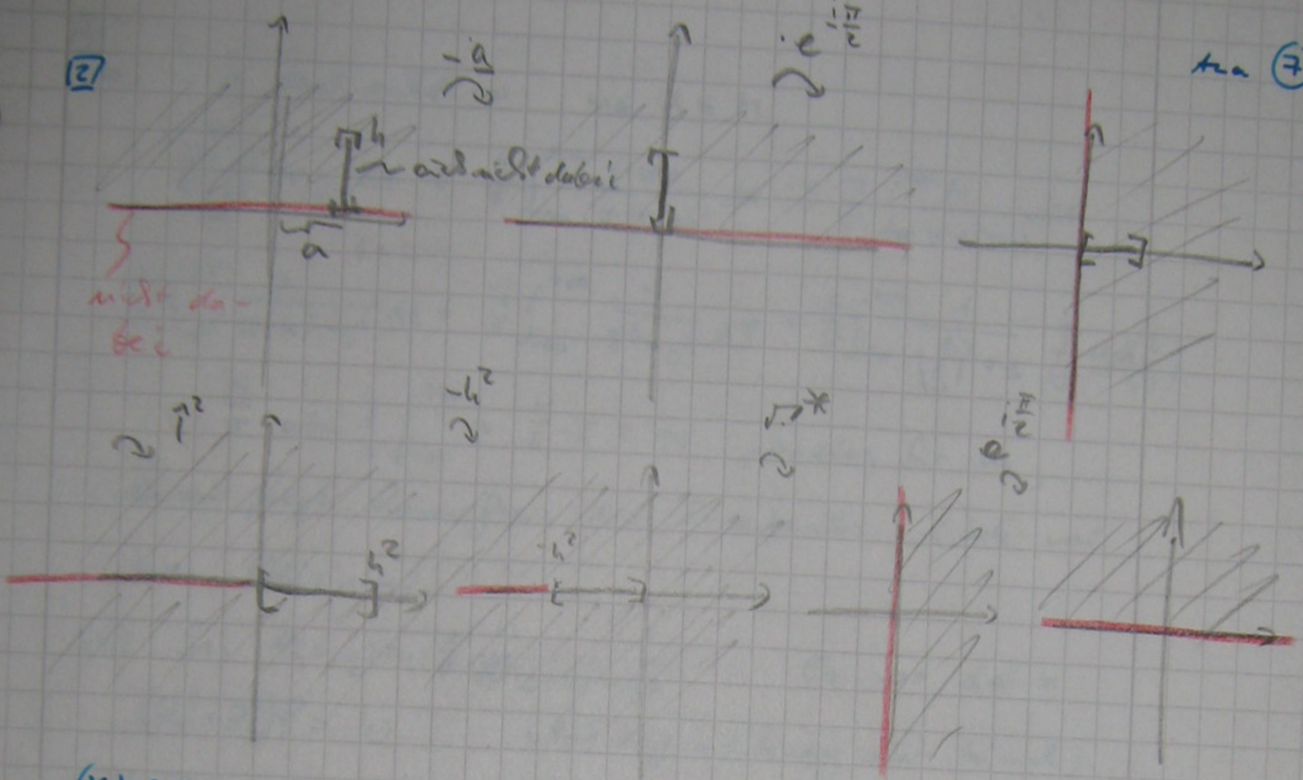
$\Rightarrow \quad g(z)\,\Gamma(z)\,\xi^{-z} = \xi^{-z}$. □

(c) $\quad g(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$

Weil $g$ ist analytisch darf also keine Pole haben; hätte $\Gamma$ eine Nullstelle, hätte $g$ einen Pol ↯.

$1/\Gamma$ ist holomorph, weil $g$ holomorph ist. □

2



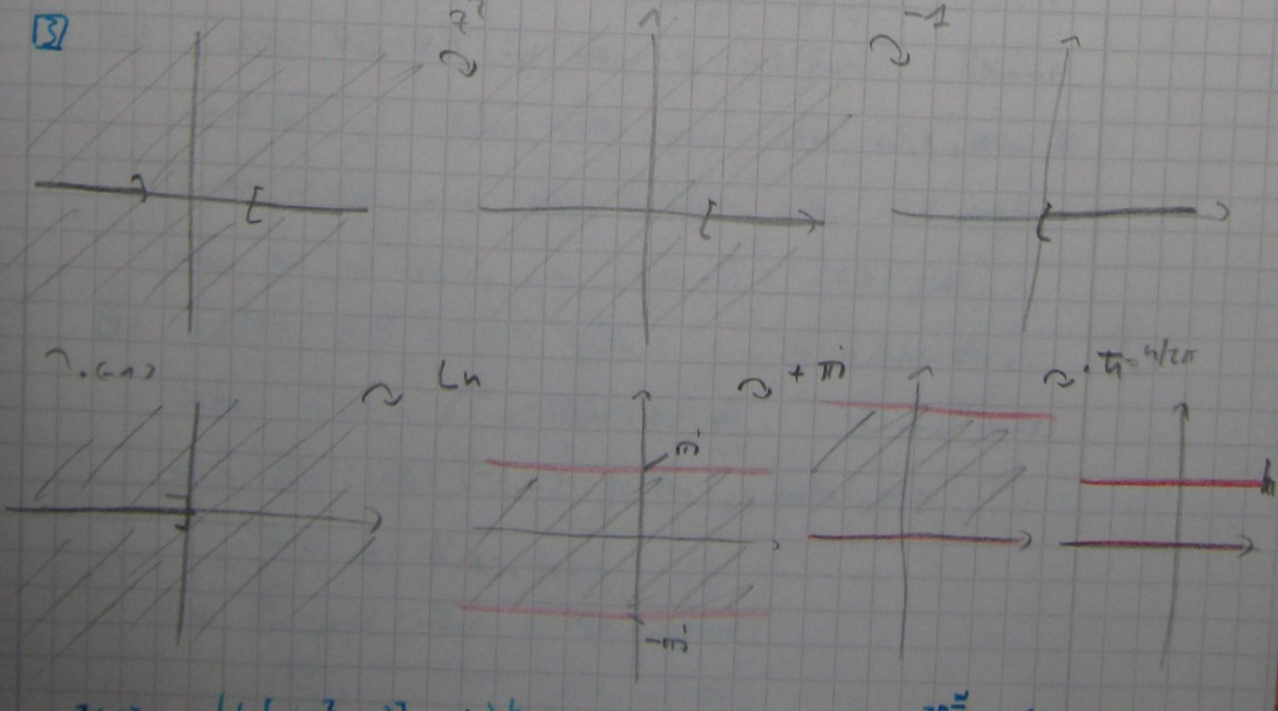

(*) Bei der Wurzel muss man den richtigen Zweig wählen.

$$z \longmapsto \sqrt{\left[(z-a)e^{-i\frac{\pi}{2}}\right]^2-h^2}\; e^{i\frac{\pi}{2}} = w \quad ; \quad z = a \pm \sqrt{w^2-h^2}$$

Die Abb. ist konform, da sie als Verkettung analytischer Funktionen analytisch ist. $\square$

Siehe beiliegenden Ausdrucke für die Bilder der Geraden.

3




$$z \longmapsto \left(\mathrm{Ln}[-(z^2-1)] + \pi i\right)\frac{h}{2\pi} = w \Rightarrow z = 1 \pm \left(e^{2\pi\frac{w}{h}}+1\right)^{1/2}$$

$h = 3$
Plot ↑

4

(a) $u$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $m \leq u \leq M$.

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{(t-x)^2+y^2}\,dt \leq \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt \leq \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{(t-x)^2+y^2}\,dt$$

$$\frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,dt \overset{\xi = t-x}{=} \frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\xi^2+y^2}\,d\xi = \frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\xi}{y}\right)^2+1}\,\frac{y}{y^2}\,y\,d\left(\frac{\xi}{y}\right)$$

$$= \frac{M}{\pi}\,\arctan\frac{\xi}{y}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{M}{\pi}\cdot\pi = M$$ , analog für $m$,

daraus folgt Konvergenz des Integrals (Satz von zwei Polizisten).

(a') Sei $f(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{\cancel{\ }(t-x)^2+y^2}$. Es ist $\Delta f = (\partial_x^2+\partial_y^2) f = 0$ (Rechnung aufwändig aber trivial).

(a'') Für $u(x,0)$ muss man Grenzwert bilden: $u(x,0) = \lim_{y\to 0} u(x,y)$.

Ich möchte zeigen, dass $f(x,y)$ im $\lim y \to 0$ die Eigenschaften der Delta~~funkti~~ondistribution aufweist:

~~(1)~~ Setze formal $\lim_{y\to 0} f(x,y) := \tilde{f}(x)$.

(1) $\tilde{f}(x) \to 0 \quad \forall x \neq 0$ : $\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \longrightarrow \frac{1}{\pi}\frac{0}{x^2+0} = 0$ ✓

(2) $\tilde{f}(x) \to +\infty \quad x=0$ : $\frac{1}{\pi}\frac{y}{0+y^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{y}$ ✓

(3) $u(t)\cdot\tilde{f}(t-x)$ ist über $t$ int'bar : Stimmt nach (a); hier sieht man aber auch, dass $\tilde{f}$ nicht unbed. eine allg. $\delta$-Distr. ist; ich strebe also an, zu zeigen, dass dies für $u(t)$ gilt...

(4) $|u(t)\cdot\tilde{f}(t-x)| \leq g(t)$ , $g$ integrierbar.

Setze $\hat{g}(x) = e^{1/x}$ ~~[illegible]~~. Dies (4) muss nur für $\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$ gelten, setze also

$$g = \hat{g}\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}.$$

Das Integral über $g$ konvergiert:

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x)\,dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^{1-1}\cdot e^{-(-1/x)}\,dx = \Gamma\left(\varepsilon, -\frac{1}{x}\right)$$

Dies ist die in vollst. ~~Pes~~ $\Gamma$-Funktion, die für

$\varepsilon > 0$ (✓) und $-\frac{1}{x} > -\infty$ (✓ da $x \geq \varepsilon$)

konvergiert. ✓

Damit folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, \Psi(t-x)\, dt = U(x). \qquad \square$$

(b) Ich bilde die vier Gebiete auf die Reelle Achse $\cup \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ ab:

- $\overline{(-\infty+0i)(a+0i)} \longmapsto \overline{(-\infty+0i),(-h+0i)}$

  Das kann man sehen, indem man die Strecke parametrisiert: $t \mapsto t+0i$, $t \in (-\infty, a)$

  $f \longmapsto i\left([-i(t-a)]^2 - h^2\right)^{1/2} \in \mathbb{R}$

beachte hier: $z = a - \varepsilon + it$, $t \in (0,h)$, $\varepsilon > 0$, klein

- analog $\overline{(a+0i),(a+hi)} \longmapsto \overline{(-h+0i),(0+0i)}$
- Aus Symmetriegründen (Spiegelung an Achse $\operatorname{Re} z = a$) kann man so auch die anderen Bereiche abbilden.

Es ergeben sich so die Randbedingungen:

$\tilde{u}(z) = 0 \quad z \in (-\infty, -h) \cup (+h, +\infty)$

$\tilde{u}(z) = -1 \quad z \in (-h, 0)$

$\tilde{u}(z) = 1 \quad z \in (0, h)$

Mit Formel 1 kann man jetzt die Lösung des Dirichlet-problems $\Delta u = 0$ mit den oben angeg. Randbed. bestimmen, da obige $\tilde{u} = \tilde{u}(x,0) = \tilde{U}$ sind:

alle $x,y$ sind $\tilde{x},\tilde{y}$

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{y}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-h} + \int_{h}^{+\infty}\right) \frac{0}{(t-x)^2+y^2}\, dt + \frac{y}{\pi}\int_{-h}^{0} \frac{-1}{(t-x)^2+y^2}\, dt$$

$$+ \frac{y}{\pi}\int_0^h \frac{1}{(t+x)^2+y^2}\, dt \underset{\text{s.o.}}{\overset{?}{=}} -\frac{1}{\pi}\arctan\frac{s}{y}\Big|_{\frac{-h-x}{y}}^{\frac{-x}{y}} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{s}{y}\Big|_{-\frac{x}{y}}^{\frac{h-x}{y}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{-h-x}{y} - \arctan\frac{-x}{y} + \arctan\frac{h-x}{y} - \arctan\frac{-x}{y}\right)$$

erfüllt $\Delta = 0$ !

$\boxed{4}$ (5) – Forts –

$$\tilde u(\tilde x, \tilde y) = \left( -\operatorname{atan} \frac{\tilde x + 4}{\tilde y} - \operatorname{atan} \frac{\tilde x - 4}{\tilde y} + 2 \operatorname{atan} \frac{\tilde x}{\tilde y} \right) / \pi$$

$\tan(-x) = -\tan x$

Die Lösung muss jetzt auf den ursprünglichen Bereich zurückgeholt werden:

$$\cancel{\tilde x + i\tilde y \longmapsto x + iy = a \pm [(\tilde x + i\tilde y)^2 - b^2]^{1/2}}$$

$$\cancel{u(x,y) = -\operatorname{atan}}$$

$$u(z) = \tilde u \circ f(z) \qquad f \text{ ist die Abb. aus } \boxed{2}.$$

$$= \tilde u(\tilde x(x,y), \tilde y(x,y))$$

$$= \tilde u\left( \mathrm{Re}\left[ ([(z-a)(-i)]^2 - b^2)^{-1/2} i \right], \mathrm{Im}\left[ ([(z-a)(-i)]^2 - b^2)^{-1/2} i \right] \right)$$

der Ausdruck wird … lästig …