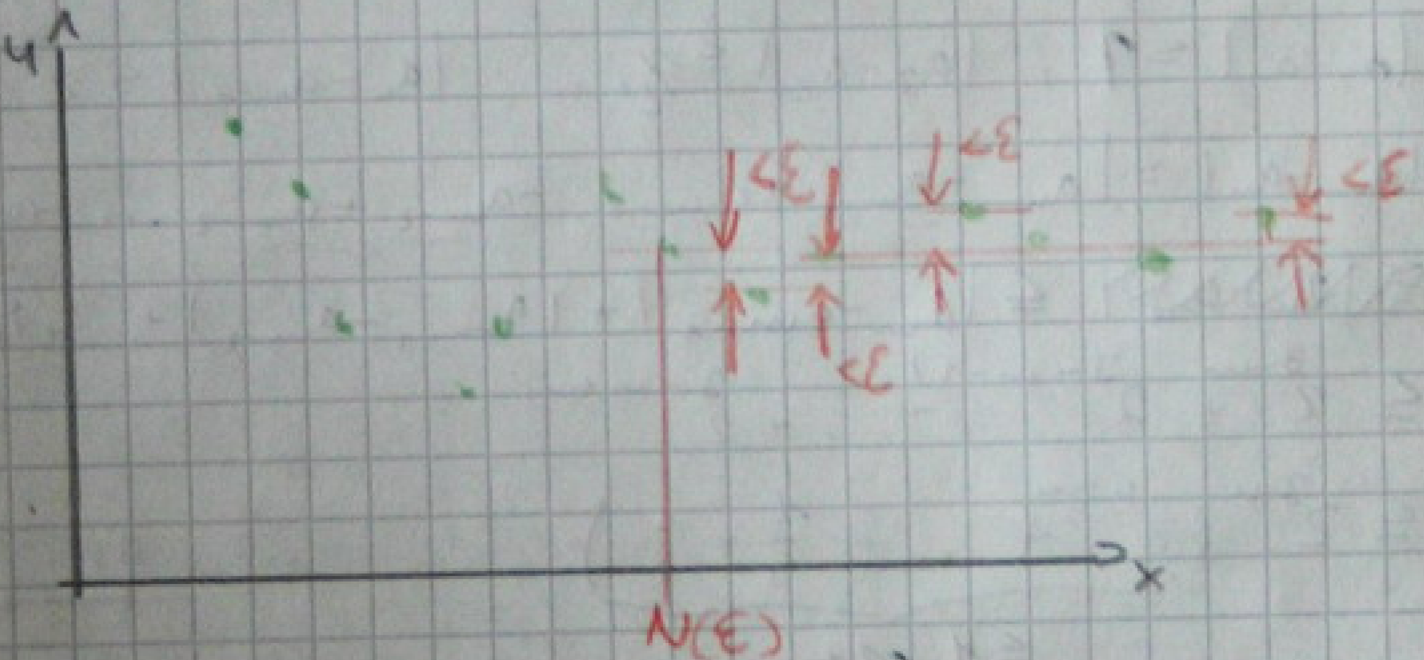
Ana

27.10.08

$|(r_n - a) + (s_n - b)| \le |r_n - a| + |s_n + b| < \varepsilon$ $\square$

Cauchy-Folge

Def: Eine Folge $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen $r_n \in \mathbb{Q}$ heißt Cauchy-Folge (Grundamental-folge) $\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N(\varepsilon)\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\ge N(\varepsilon)}\ |a_n - a_m| < \varepsilon$



Man schreibt $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{Q})$ Menge der Cauchy-Folgen

Satz:

Sei $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Rationaler Zahlen $r_n \in \mathbb{Q}$, welche gegen $a \in \mathbb{Q}$ konvergiert, dann gilt $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{Q})$

Beweis:

$\sphericalangle\ \varepsilon > 0,\ a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$\exists \tilde{N}(\frac{\varepsilon}{2})\ \forall_{\tilde{n} \ge \tilde{N}(\frac{\varepsilon}{2})}\ |a_{\tilde{n}} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle zwei beliebige nat. Zahlen $n, m \ge N(\varepsilon) := \tilde{N}(\frac{\varepsilon}{2})$

$|a_n - a_m| = |a_n - a - a_m + a| = |(a_n - a) - (a_m - a)|$ Δ-Ungl. $\quad |a-b| = |b-a| \le |b+a|$

$\cancel{\le |a_n - a| + |a_m - a| =} = |(a_n - a) + (-a_m + a)| \le$

$|a_n - a| + |-a_m + a| = |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\square$

Also: Konvergenz $\Rightarrow$ CF

$\boxed{\text{Aber}}$: Nicht jede Folge $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{Q})$ besitzt einen Grenzwert!

Folge $\in CF$ mit Grenzwert $\notin \mathbb{Q}$:

$a_0 = 1 \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad , n \in \mathbb{N}$

$a_n \geq 1 \quad \left(\frac{1}{a_n} \leq 1 \quad \frac{1}{a_n} + 1 \geq 1 \right) \Rightarrow a_{n+1} \cdot a_n = a_n + 1 \geq 2$

$a_n \leq 2 \quad (a_{n+1} \cdot a_n \leq 4)$

$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{a_n} + 1\right) - \left(\frac{1}{a_{n-1}} + 1\right) = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n \cdot a_{n-1}}$

$|a_{n+1} - a_n| = \frac{|a_{n-1} - a_n|}{a_n \cdot a_{n-1}} \leq \frac{1}{2} |a_{n-1} - a_n|$

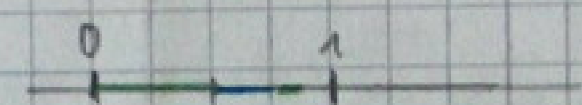
für $n = 1, 2, ..$ $\quad |a_2 - a_1| = 1 \; ; \; |a_3 - a_2| \leq 1/2 ; \ldots ; |a_n - a_{n-1}| \leq 2^{3-n}$

für m, n beliebig, $m > n$ $\quad |a_m - a_n| = |a_m \underbrace{- a_{m-1} + a_{m-1}}_{0} \underbrace{- a_{m-2} + a_{m-2}}_{0} \ldots \underbrace{- a_{n+1} + a_{n+1}}_{0} - a_n|$

$\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n|$

$\leq 2^{3-m} + 2^{3-(m-1)} + \ldots + 2^{3-(n+1)}$

$\leq 2^{3-n} \underbrace{\left(2^{n-m} + \ldots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)}_{\leq 1}$ (Geometrische Summe)



$|a_m - a_n| \leq 8/2^n \quad m > n \geq N(\varepsilon)$

Grenzwert: $a_{n+1} \to a$ (angenommen es existiert $a \in \mathbb{Q}$):

$\frac{1}{a_n} + 1 \to a$

Rationale Zahlen sind eig. dicht: zw. 2 rat. Zahlen liegt immer eine rat. Zahl

$a = \frac{1}{a} + 1 \Rightarrow a - 1 = 1/a \Rightarrow a^2 - a = 1 \Rightarrow$

$a^2 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$

Diese Folge hat keinen rationalen Grenzwert!

↳ Hier habe wir ein Loch

Satz: (Irrationale Zahlen):

Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 5$.

Beweis: Gebe es $a \in \mathbb{Q}$ $a = \frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{N}$, teilerfremd

$\frac{p^2}{q^2} = 5 \Rightarrow p^2 = 5q^2 \Rightarrow$ (p^2 durch 5 teilbar) $5 | p^2 \Rightarrow 5 | p \Rightarrow p = 5t$

$\frac{25t^2}{q^2} = 5 \Rightarrow 25t^2 = 5q^2 \Rightarrow 5t^2 = q^2 \Rightarrow 5 | q^2 \Rightarrow 5 | q$

↯ da $5|p$, $5|q$ aber p, q eig. teilerfremd

Ana

31.10.08

1.7 Die reellen Zahlen

2 Folgen $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen reelle Zahlen

$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation

$\mathbb{R} = CF(\mathbb{Q})/\sim$

$CF(\mathbb{Q}) \to$ alle Folgen, die gegen etw. streben

$\sim \to$ Zwei Folgen sind äquivalent, wenn sie gegen den selben Grenzwert gehen

$\mathbb{R} \to$ Äquivalenzklassen

Cauchy-Folgen $\{r_n\}, \{s_n\}$

$\to$ streben gegen eine Zahl

<u>Einordnung</u>: $\mathbb{N} \subseteq \underset{n}{\mathbb{Z}} \subseteq \underset{\frac{n}{1}}{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \frac{n}{1} \to (n,1)$

$n \in \mathbb{Z}$ ist nicht genau in $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ enthält Brüche zweier Zahlen.

$n \in \mathbb{Z} \;\hat{=}\; (n,1) \in \mathbb{Q}$

$q \in \mathbb{R}$ findet sich in $\mathbb{Q}$ als Grenzwert von $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to q$

$0,\overline{9} = 1$

$0,999 \to 1$

$\Leftrightarrow$ beides unendl. Folgen mit Grenzwert 1