MMP

Anschaulich:

Bestimmt „Generation vom Fluss" → „Quellterm" 26.1.09

Bsp.: Gravitation: Massenverteilung

- E-Feld: Ladungen

Man kann sagen: div richtet, wie viel Feldlinien „rein" und wie viele „raus" gehen.

Laplace-Operator (Def)

Eine Kombination von ~~\[illegible\]~~ Divergenz und Gradient ordnet jedem Skalarfeld ein Skalarfeld zu:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \nabla \cdot \nabla \cdot \phi(\vec{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi$$

Also kann man sagen:

$$\Delta = \cancel{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] = \nabla^2$$

28.1.09

Bsp.: („Motivation" (!!)) ⇒ alle Operatoren

1) $\nabla \vec{E} = 4 \cdot \pi \cdot \rho$, ~~rot~~ $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$

$\nabla \vec{B} = 0$ $\qquad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{I}$

⇒ Elektrodynamik

2) Quantenmechanik: Beschr. eines H-Atoms

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{e^2}{|\vec{r}|}\right]\Psi(\vec{r},t)$$

28.1.09

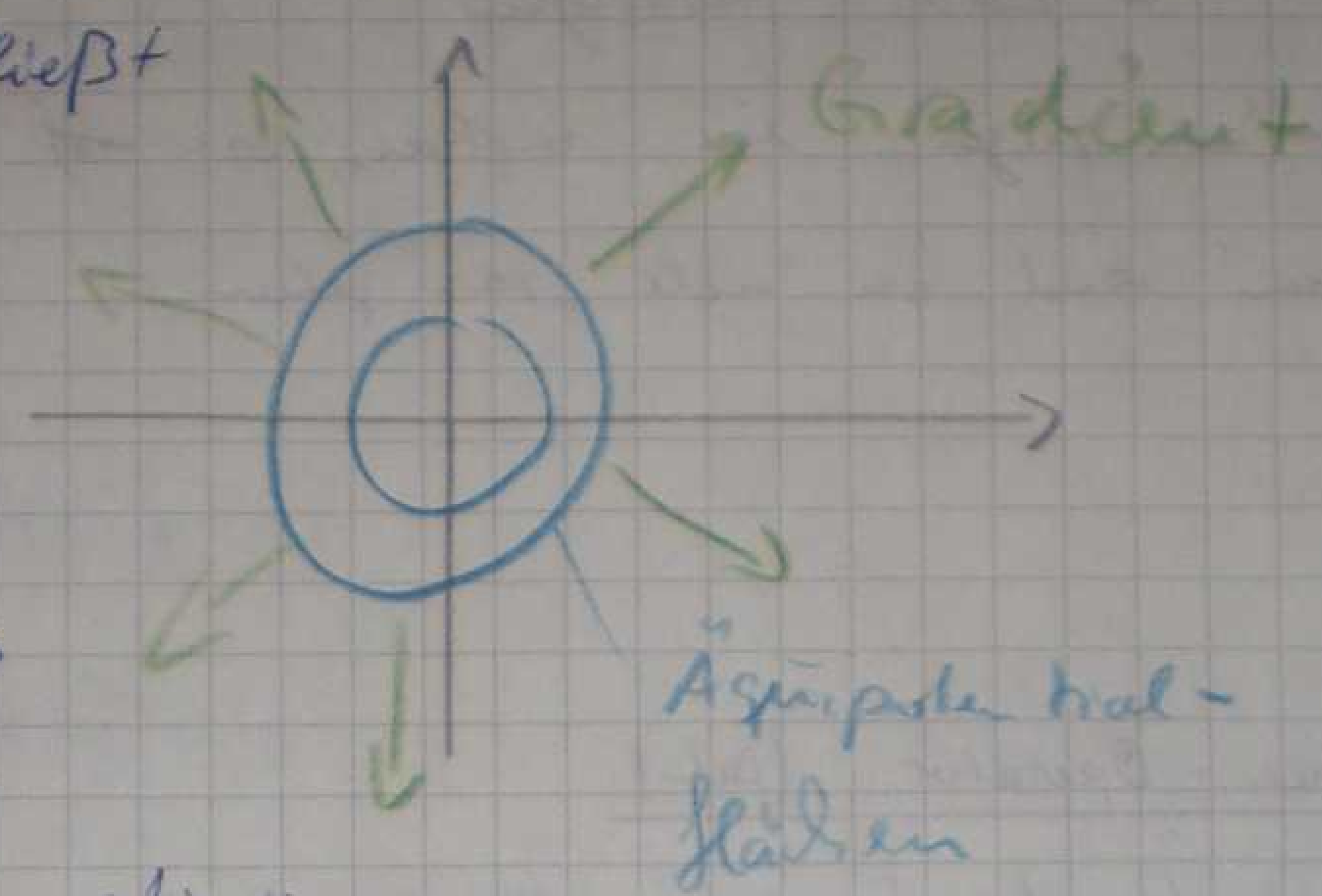
Der Gradient ist senkrecht auf den Stellen, wo das Feld „[illegible]“ ist!

<u>Bsp.</u> (für Laplace OP.)

3) $\phi(\vec{r}) = x^2+y^2+z^2 \qquad \nabla\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$\Delta\phi\vec{r} = \mathrm{div}(\nabla\phi(\vec{r})) = \nabla\nabla\phi(\vec{r}) = 2+2+2 = 6$

Das Feld fließt nach außen hin weg... D.h. im Ursprung muss eine Quelle liegen, die ständig „neues Feld“ erzeugt.



4) $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{div}(\vec{A}(\vec{r})) = 0$

Das Feld fließt friedlich im Kreis – die div. ist 0, also fließt kein Feld „weg“

$\Rightarrow$ Motivation für Rotation:

Rotation (Def)

Die Rotation ist definiert für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ mittels $\mathrm{rot}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{rot}(\vec{A}(\vec{r})) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) =$$

$$\vec{e}_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \vec{e}_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \vec{e}_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) =$$

$$\Big(\partial_y A_z - \partial_z A_y$$

MMP

28.1.'08

Bsp.

ii) $rot(\vec{A}) = rot\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\partial_x x - \partial_y(-y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

Dieser Vektor steht senkrecht auf der Rotationsebene.

iii) Rotation verschwindet, weil hier ja keine Rotation vorliegt...

Bemerkung:

Für jedes Skalarfeld gilt:

$$rot\left[\nabla\phi(\vec{r})\right] = 0$$

Beweis:

$$rot\,\nabla\phi = rot\begin{pmatrix}\partial_x\phi\\\partial_y\phi\\\partial_z\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y\partial_z\phi - \partial_z\partial_y\phi\\\partial_z\partial_x\phi - \partial_x\partial_z\phi\\\partial_x\partial_y\phi - \partial_y\partial_x\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Vertauscht man die partiellen Ableitungen, so stehen rechts & links vom „–" das selbe.

Bemerkung:

Für jedes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt:

$$div(rot(\vec{A}(\vec{r}))) = 0$$

Beweis:

Analog & trivial...

Bemerkung: Produktregeln

$$div[\phi(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})] = (\nabla\phi)\cdot\vec{A} + \phi\cdot div(\vec{A})$$

$$rot(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\times\vec{A} + \phi\cdot rot(\vec{A})$$

$$div(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot rot(\vec{A}) - \vec{A}\cdot rot(\vec{B})$$

$$rot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot div(\vec{B}) - \vec{B}\,div(\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$rot(rot\,\vec{A}) = \nabla(div(\vec{A})) - \Delta\vec{A}$$

Beweis: Trivial: Definitionen & Produktregel

Bem.: Zshg Fourier – Diff'operatoren

$$\widehat{\frac{d}{dx} f(x)} = i\xi \hat{f}(\xi)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \xrightarrow{F.T.} i\xi \hat{f}(\xi)$$

Analog:

- $\nabla \phi(\vec{r}) \xrightarrow{F.T.} i\vec{\xi} \cdot \hat{\phi}(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} i\xi_x \hat{\phi} \\ i\xi_y \hat{\phi} \\ i\xi_z \hat{\phi} \end{pmatrix}$ (xyz im Index!)

- $\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \xrightarrow{F.T.} i\vec{\xi} \cdot \hat{\vec{A}}(\vec{\xi}) = i\xi_x \hat{A}_x(\vec{\xi}) + i\xi_y \hat{A}_y(\vec{\xi}) + i\xi_z \hat{A}_z(\vec{\xi})$

- $\mathrm{rot}\,(\vec{A}(\vec{r})) \xrightarrow{F.T.} i\vec{\xi} \times \hat{\vec{A}}(\vec{\xi})$

- $\Delta \phi(\vec{r}) \xrightarrow{F.T.} -|\vec{\xi}|^2 \hat{\phi}(\vec{\xi})$

Durch die Fourier-Transformation kann man komplexe Ableitungen in einfachere Funktionen umwandeln.

Bsp.: $[-\Delta + m^2]\, \phi(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \xrightarrow{F.T.} (\xi^2 + m^2)\, \hat{\phi}(\vec{\xi}) = 1$