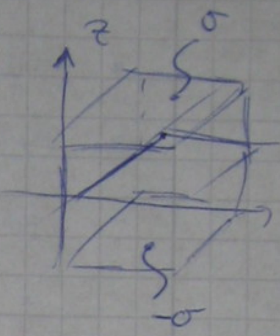
Elektrodynamik
Uebung 07

Michael Kopp

June 13, 2010

4 Trennung der Variablen



(a) Wir ~~Rules~~ raten:

$$\phi(\underline{r}) = C \cdot z \qquad , z \in \left[-\tfrac{d}{2}, \tfrac{d}{2}\right]$$

$\Delta\phi = 0$ ~~.....~~ für $z \in \left(-\tfrac{d}{2}, \tfrac{d}{2}\right)$

V.N. Randbed: $\partial_{\underline{n}}\phi = -4\pi\sigma$

Obere Platte: Dort $\underline{n} = -\underline{e}_z$ $\quad \partial_{\underline{n}}\phi = -\partial_z\phi = -C \stackrel{!}{=} -4\pi\sigma$

$\Rightarrow \quad C = 4\pi\sigma$

Kontrolle untere Platte: $\underline{n} = \underline{e}_z \quad \partial_{\underline{n}}\phi = \partial_z\phi = C = 4\pi\sigma$

(b) Aus Symmetriegründen ist

$$\phi = C\, f(r) = \phi(r,\varphi,z) \qquad \text{(Zylinderkoord.)}$$

$$\Delta\phi(r,\varphi,z) = C\,\frac{1}{r}\,\partial_r(r\,\partial_r f) = C\left(\frac{1}{r}f' + f''\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(r) = \ln r \cdot C \quad \Rightarrow f' = \frac{1}{r} \Rightarrow f'' = -\frac{1}{r^2}$$

Randbed. innen: $\partial_{\underline{n}} = \partial_{\underline{e}_r} = \partial_r$

$$\partial_r\phi\big|_{r=a} = \frac{C}{a} \stackrel{!}{=} -4\pi\sigma \quad \Rightarrow \quad C = -4\pi\sigma a$$

Randbed. außen: $\partial_{\underline{n}} = \partial_{(-\underline{e}_r)} = -\partial_r$

$$-\partial_r\phi\big|_{r=b} = \frac{C}{b} = \frac{-4\pi\sigma a}{b} \stackrel{!}{=} 4\pi\sigma\frac{a}{b} \quad ✓$$

$$\Rightarrow \quad \phi(r,\varphi,z) = -4\pi\sigma a \ln r$$

(c) Da Kugelsymmetrie:

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = C\, f(r)$$

$$\Delta\phi = C\,\frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\partial_r f) = C\,\frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2 f') = C\,\frac{1}{r^2}(2rf' + r^2 f'')$$

$$= C\left(\frac{2}{r}f' + f''\right)$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{1}{r} \Rightarrow f' = -\frac{1}{r^2} \Rightarrow f'' = 2\frac{1}{r^3}$$

Randbed. innen: $\partial_{\underline{n}} = \partial_{\underline{e}_r} = \partial_r$

$$\partial_r\phi\big|_{r=a} = -\frac{C}{a^2} \stackrel{!}{=} -4\pi(+\sigma) \Rightarrow C = +4\pi\sigma a^2$$

Randbed. außen: $\partial_{\underline{n}} = -\partial_r$

$$-\partial_r\phi\big|_{r=b} = -\frac{C}{b^2} \stackrel{!}{=} -4\pi\left(-\sigma\frac{a^2}{b^2}\right) \Rightarrow C = -4\pi\sigma a^2 \quad ✓$$

(d) Potentialdifferenzen

- $\phi(\frac{d}{2}) - \phi(-\frac{d}{2}) = 4\pi\sigma \left(\frac{d}{2} - (-\frac{d}{2})\right) = 4\pi\sigma d$ Platte

- ~~$\phi(a) - \phi(b) = -4\pi\sigma + 4\pi\sigma \frac{a}{b} = 4\pi\sigma \left(\frac{a}{b} - 1\right)$ Zylinder~~

- $\phi(a) - \phi(b) = -4\pi\sigma a \cdot \ln a - (-4\pi\sigma a \ln b) = -4\pi\sigma (\ln a - \ln b)$

  $= 4\pi\sigma \ln b/a$ Zylinder

- $\phi(a) - \phi(b) = 4\pi\sigma a^2 \frac{1}{a} - 4\pi\sigma b^2 \frac{1}{b^2} = 4\pi\sigma \left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2}\right) =$

  $= 4\pi\sigma \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$

$\boxed{2}$

$$\phi = q\left(\frac{1}{\|\underline{r}-\underline{a}\|} - \frac{R/a}{\|\underline{r} - \frac{R^2}{a^2}\underline{a}\|}\right)$$

$$\frac{r}{a} = \frac{r}{R}\frac{R}{a}$$

$$\sigma = \frac{-q}{4\pi}\,\partial_r\left(\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 2\frac{r}{a}\cos\vartheta\right]^{-1/2} - \frac{R}{a}\frac{1}{R}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 - 2\frac{r}{a}\cos\vartheta\right]^{-1/2}\right)_{|r=R}$$

$$= \frac{-q}{4\pi}\frac{1}{a}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial\left(\frac{r}{a}\right)}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta)\left(\frac{r}{a}\right)^l}_{\sum_{l=1} P_l(\cos\vartheta)\cdot l\cdot\left(\frac{R}{a}\right)^{l-1}} \cdot \underbrace{\frac{\partial\frac{r}{a}}{\partial r}}_{\frac{1}{a}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 - 2\frac{r}{R}\frac{R}{a}\cos\vartheta\right]^{-1/2}}_{\ast} \underbrace{\frac{\partial\frac{r}{R}}{\partial r}}_{1/R}\right)$$

$$\ast = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 - 2\frac{r}{R}\frac{R}{a}\cos\vartheta\right]^{-\frac{3}{2}}\left(2\left(\frac{r}{R}\right) - 2\frac{R}{a}\cos\vartheta\right)$$

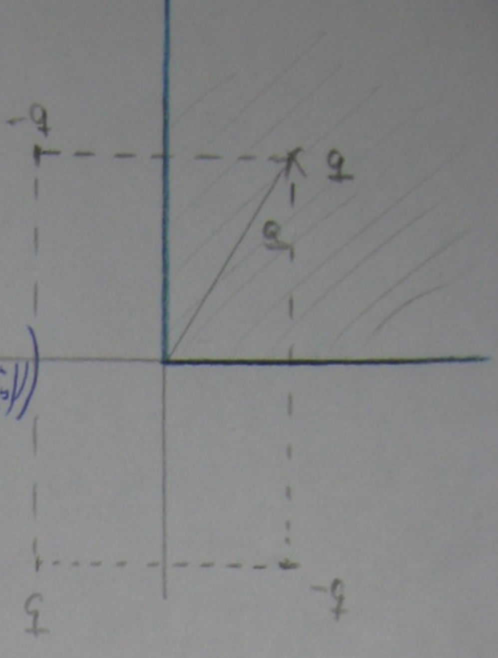
$$= \left(2\frac{R}{a}\cos\vartheta - 1\right)\sum P_l(\cos\vartheta)\cdot\left(\frac{R}{a}\right)^l$$

$$= \frac{-q}{4\pi R^2}\left(\underbrace{\frac{R^2}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty} P_l(\cos\vartheta)\, l\left(\frac{R}{a}\right)^{l-1}}_{\sum_{l=1} P_l(\cos\vartheta)\, l\left(\frac{R}{a}\right)^{l+1}} + \frac{R}{a}\underbrace{\left(1 - 2\frac{R}{a}\cos\vartheta\right)\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta)\left(\frac{R}{a}\right)^l}_{\left(1-2\left(\frac{R}{a}\right)\cos\vartheta\right)\sum_{l=0} P_l(\cos\vartheta)\left(\frac{R}{a}\right)^{l+1}}\right)$$

$$= \frac{-q}{4\pi R^2}\left(\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta)\left[l + 1 - 2\left(\frac{R}{a}\right)\cos\vartheta\right]\left(\frac{R}{a}\right)^{l+1}\right)$$

$\boxed{3}$

(a) $$\phi = \frac{q}{\|\underline{r} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}\|} - \frac{q}{\|\underline{r} - \begin{pmatrix} -a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}\|} + \frac{q}{\|\underline{r} - \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ 0 \end{pmatrix}\|} - \frac{q}{\|\underline{r} - \begin{pmatrix} a_x \\ -a_y \\ 0 \end{pmatrix}\|}$$



$$\Delta\phi = -4\pi q\left(\delta\left(\underline{r} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \delta\left(\underline{r} - \begin{pmatrix} -a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\underline{r} - \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \delta\left(\underline{r} - \begin{pmatrix} a_x \\ -a_y \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$

Innerhalb des ersten Quadranten erfüllt dieses ϕ die Bed.

$$\Delta\phi = -4\pi\rho = -4\pi q\,\delta(\underline{r} - \underline{a});$$

Dito die Randbed. $\phi|_{\partial L} = 0$ da

$$\cancel{\phi|_{x=0,y>0} = \frac{q}{\|\cdots\|} - \frac{q}{\|\cdots\|} + \frac{q}{\|\cdots\|} - \frac{q}{\|\cdots\|} = 0}$$

$$\phi|_{y=0,x>0} = \frac{q}{\left\|\begin{pmatrix} x-a_x \\ -a_y \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} - \frac{q}{\left\|\begin{pmatrix} x+a_x \\ -a_y \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} + \frac{q}{\left\|\begin{pmatrix} x+a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} - \frac{q}{\left\|\begin{pmatrix} x-a_x \\ 0+a_y \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} \quad \text{da } \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} |a| \\ |b| \\ |c| \end{pmatrix}\right\|$$

$\phi|_{x=0,y>0} = \ldots$ analog.

Die Lösung ist also $\phi_{\text{endgültig}} = \begin{cases} \phi & \underline{r} \in \{x>0, y>0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

σ links: $\partial_{\underline{n}} = \partial_x \qquad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\partial_x\phi|_{x=0}$

$$\cancel{\sigma = -\frac{q}{4\pi}\partial_x\left([a_x^2+(y-a_y)^2+z^2]^{-1/2} - [a_x^2+(y+a_y)^2+z^2]^{-1/2} + [a_x^2+(y-a_y)^2+z^2]^{-1/2} - [a_x^2+(y+a_y)^2+z^2]^{-1/2}\right)}$$

$$\sigma = \frac{-q}{4\pi}\left\{\partial_x\left(\underbrace{[(x-a_x)^2+(y-a_y)^2+z^2]^{-1/2} - [(x+a_x)^2+(y-a_y)^2+z^2]^{-1/2}} + \underbrace{[(x+a_x)^2+(y+a_y)^2+z^2]^{-1/2} - [(x-a_x)^2+(y+a_y)^2+z^2]^{-1/2}}\right)\right.$$

$$= \frac{-q}{4\pi}\left(\frac{+(a_x-0)+(0+a_x)}{(a_x^2+(y-a_y)^2+z^2)^{3/2}} + \frac{-(0+a_x)+(0-a_x)}{(a_x^2+(y+a_y)^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{-q}{4\pi}\left(\frac{2a_x}{(a_x^2+(y-a_y)^2+z^2)^{3/2}} + \frac{-2a_x}{(a_x^2+(y+a_y)^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$\boxed{3}$

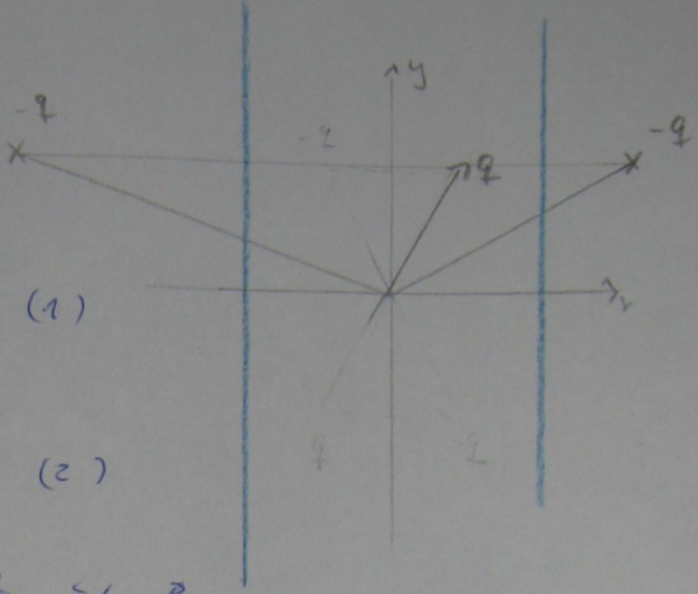
(b) Wg. Symmetrie ist nur x-Komponente entscheidend.

Spiegelung an $x=a$-Achse:

$$\xi \mapsto 2a - \xi\,, \quad q \mapsto -q \qquad (1)$$

Spiegelung an $x=-a$ Achse:

$$\xi \mapsto 2(-a) - \xi\,, \quad q \mapsto -q \qquad (2)$$



Eine Ladung q bei $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ kann unter Beachtung der Symmetrie ~~...~~ nach $\underline{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ verschoben werden (bzw. das Koordinatensystem angepasst).

Die Ladung muss jetzt an beiden Platten abwechselnd gespiegelt werden: Spiegelt man sie nur an einer Platte, bekommt man die gew. Randbed. an der entsprechenden Platte jedoch nicht an der anderen; dafür ist eine weitere Spiegelung an der anderen Platte nötig, wodurch man aber die Randbed. an der ersten Platte nicht mehr befriedigt. ...

(a) $\begin{pmatrix} \xi \\ q \end{pmatrix} \xmapsto{(1)} \begin{pmatrix} 2a-\xi \\ -q \end{pmatrix} \xmapsto{(2)} \begin{pmatrix} -4a+\xi \\ +q \end{pmatrix} \xmapsto{(1)} \begin{pmatrix} 6a-\xi \\ -q \end{pmatrix} \xmapsto{(2)} \begin{pmatrix} -8a+\xi \\ +q \end{pmatrix} \xmapsto{(1)} \dots$

(b) $\begin{pmatrix} \xi \\ q \end{pmatrix} \xmapsto{(2)} \begin{pmatrix} -2a-\xi \\ -q \end{pmatrix} \xmapsto{(1)} \begin{pmatrix} 4a+\xi \\ +q \end{pmatrix} \xmapsto{(2)} \begin{pmatrix} -6a-\xi \\ -q \end{pmatrix} \xmapsto{(1)} \begin{pmatrix} 8a+\xi \\ +q \end{pmatrix} \xmapsto{(2)} \dots$

Damit ergibt sich die Ladungsverteilung

$$\rho(x) = q\,\delta(x-\xi) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l q \Big(\delta(x - [-2la(-1)^l + (-1)^l \xi]) + \delta(x - [2la(-1)^l + (-1)^l \xi]) \Big). \qquad (*)$$

Das Potential

$$\phi(x) = \frac{q}{\|\underline{r} - \xi \underline{e}_x\|} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l q \left(\frac{1}{\|\underline{r} - [-2la(-1)^l + (-1)^l \xi]\underline{e}_x\|} + \frac{1}{\|\underline{r} - [2la(-1)^l + (-1)^l \xi]\underline{e}_x\|} \right)$$

Erfüllt für $-a < x < a$ die Bed.

$$\Delta\phi = -q\,\delta(\underline{r} - \xi \underline{e}_x)\,,$$

weil alle weiteren δ in $(*)$ Argumente haben mit $\delta(x-\omega), |\omega| > a$ da ~~...~~ $|\xi| < a$, und die Randbed. $\phi|_{x=a} = \phi|_{x=-a} = 0$.

~~Verschiebe den Aufbau um a, dann liegt die $-a$-Platte bei 0~~

Die Bed. $\phi_{x=a} = \phi_{x=-a} = 0$ ist erfüllt, weil wenn man überall $x=a$ setzt, fallen sich jeweils zwei aufeinander-folgende Terme einer der beiden Brüche in der Summe weg, weil sie dann den selben Nenner aber ~~ver~~ verschiedene Vorzeichen in q haben; der Term $\frac{q}{\|\underline{r}-\xi\underline{e}_x\|}\Big|_{x=a}$ wird vom ersten des ersten Bruchs der Summe weggekillt.

Oberflächenladungsdichte: Rechn. für $x=a$:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\partial_n \phi = \frac{1}{4\pi}\partial_x \phi \qquad \text{da } \partial_{\underline{n}} = -\partial_x .$$

Nun ist $\partial_x \frac{1}{\|\underline{r}-\alpha\underline{e}_x\|} = \frac{-(x-\alpha)}{\|\underline{r}-\alpha\underline{e}_x\|^3} = \frac{\alpha - x}{\|\underline{r}-\underline{e}_x\alpha\|^3}$

Bei zwei aufeinanderfolgenden Termen bekommt man im ~~Zähler~~ Nenner wieder den selben, im Zähler $(-1)\cdot$ den vorhergehenden. Da gleichzeitig das Vorzeichen in q wechselt, summieren sich die Terme auf:

$$\sigma = \frac{-q}{4\pi}\left(2\frac{\xi - a}{\left\|\begin{pmatrix}\xi-a\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\|^3} + 2\frac{\xi+3a}{\left\|\begin{pmatrix}\xi+3a\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\|} + 2\frac{\xi-5a}{\left\|\begin{pmatrix}\xi-5a\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\|} + 2\frac{\xi+7a}{\left\|\begin{pmatrix}\xi+7a\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\|} + \dots \right)$$