Ana 06
Michael Kopp

1 t_1^k, t_2^k seien CF in $\mathcal{T}^n$, die gegen f_1 bzw f_2 konv. (glm bzr. x). Wähle eine gemeinsame Verfeinerung $\tilde{Q}$ der ~~Stufe~~ Zerteilungen, auf denen t_1, t_2 def. sind. ~~Auf~~ Auf $\tilde{Q}$ definiere t^k als

$$t^k(x) = \min(t_1^k(x), t_2^k(x)).$$

Zu zeigen ist, dass

$$\text{z: } t^k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} g \quad \text{bzw. } \forall_{\varepsilon>0} \exists_{N(\varepsilon)\in\mathbb{N}} \forall_{k\ge N, x}: |t^k(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Es gilt

$$|t^k(x) - g(x)| = |\min(t_1^k(x), t_2^k(x)) - \min(f_1(x), f_2(x))|$$

$$(*) \quad \le |\min(t_1^k(x), t_2^k(x)) - \min(t_1^k(x), f_2(x))| + |\min(t_1^k(x), f_2(x)) - \min(f_1(x), f_2(x))|$$

Nun zerlegt man $\tilde{Q}$ in Unterquader der folgenden Eigenschaften (jew. eine Gruppe von Unterquadern):

(i) $t_1^k(x) \le t_2^k(x)$, $t_1^k(x) \le f_2(x)$ für alle x dieser Gruppe von Unterquadern. Der erste Summand aus $(*)$ ist dann
$|t_1^k(x) - t_1^k(x)| = 0 < \varepsilon$.

(ii) $f_2(x) \le t_1^k(x) \le t_2^k(x)$. Weil $t_2^k(x)$ glm bzr. x gegen f_2 konv. gibt es ein N_2, ab dem ~~stetig~~
$|f_2(x) - t_2^k(x)| < \varepsilon$. ~~Wegen~~ Der erste Summand aus $(*)$ ist hier $|t_1^k(x) - f_2(x)| \le |t_2^k(x) - f_2(x)| < \varepsilon$ ab $k \ge N_2$.

(iii) ~~Analog~~ $t_2^k(x) \le t_1^k(x) \le f_2(x)$. Analog ist für $k \ge N_2$ für den ersten Summanden von $(*)$:
$|t_2^k(x) - t_1^k(x)| \le |t_2^k(x) - f_2(x)| < \varepsilon$

(iv) $t_2^k(x) \le t_1^k$, $f_2(x) \le t_1^k(x)$. Für den 1. Sum. von $(*)$ ist wegen glm. konv. von t_2^k gegen f_2 ab $k \ge N_2$:
$|t_2^k(x) - f_2(x)| < \varepsilon$.

Analog geht man für den zweiten Summanden von $(*)$ vor. Mit $N = \max(N_1, N_2)$ erhält man das Gewünschte.

Für den zweiten Teil (mit k) geht man analog vor.

Hier ist für $\tilde{\Omega}$ def.:

$$f^k(x) = \max(f_1^k(x), f_2^k(x))$$

Und die Abschätzung (*) ist hier

$$|\max(f_1^k(x), f_2^k(x)) - \max(f_1^k(x), f_2(x))| + |\max(f_1^k(x), f_2(x)) - \max(f_1(x), f_2(x))| \overset{!}{<} \varepsilon$$

Für den 1. Summanden braucht man die Unterfallgruppen:

(i) $f_1^k \leq f_2^k,\ f_1^k \leq f_2$: $|f_2^k - f_2| < \varepsilon$ ab $k \geq N_2$

(ii) $f_2 \leq f_1^k \leq f_2^k$: $|f_2^k - f_1^k| \leq |f_2^k - f_2| < \varepsilon$ ab $k \geq N_2$

(iii) $f_2^k \leq f_1^k \leq f_2$: $|f_1 - f_2| \leq |f_2 - f_2| < \varepsilon$ "

(iv) $f_2^k \leq f_1^k,\ f_2 \leq f_1^k$: $|f_1^k - f_1^k| = 0 < \varepsilon$

Analog für 2. Summanden.

Hier gilt mit $N = \max(N_1, N_2)$ das Gewünschte.

$\boxed{2}$ ~~xxx~~ Definiere t^h über die Verfeinerung, die $Q = [0,1]^2$ in h^2 Quadrate zerlegt (Kantenlänge $\frac{1}{h}$).

Die Werte auf den einzelnen Quadern sind dann:

$$f^{ij} = f\left(\frac{1}{h} \cdot i,\ \frac{1}{h} \cdot j\right) \qquad i,j = 1, \dots, h$$

Die ~~Vol~~ Volumina dieser „Unterquader" sind stets

$$vol^{ij} = V^h = \frac{1}{h^2}$$

Das Integral ist dann

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)\, d(x,y) = \lim_{h \to \infty} \sum_{i,j=0}^{h} f^{ij} \cdot V^h$$

$$= \lim_{h \to \infty} \sum_{i,j=0}^{h} \frac{1}{h} i \cdot \frac{1}{h} j \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to \infty} \frac{1}{h^4} \left(\sum_{i=0}^{h} i \right) \left(\sum_{j=0}^{h} j \right)$$

$$= \lim_{h \to \infty} \frac{1}{h^4} \cdot \left(\frac{h(h+1)}{2} \right)^2$$

$$= \lim_{h \to \infty} \frac{1}{h^4} \cdot \left(\frac{h^4}{4} + \frac{4h^3}{4} + \frac{h^2}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

Wir suchen das Quadrat, auf dem f die größte Steigung hat. ~~Q hat~~ Da $f \in C^\infty$ können wir die schwache Abl. über die partiellen bilden $f_s' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (y, x)$.

In Q ist die betragsmäßig größte Steigung $\| f_s' |_{(1,1)^T} \| = \|(1,1)\| = \sqrt{2}$. Für das Quadrat in der $(1,1)$-Ecke gilt (mit HS d. Diff-r.):

$$| t^h(xy) - f(xy) | \leq \underbrace{\sqrt{2}}_{\max_{x \in \text{Quadrat}} \|f_s'(x)\|} \cdot \cancel{\dots} \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{maximal Diagonale!}} \underbrace{\frac{1}{h}}_{\text{Kantenlänge}}$$

~~Die Betrag~~ Der Betrag der Steigung ist in allen anderen Quadraten kleiner, damit gilt hier diese Ugl. ebenfalls.

Wähle also für bel. $\varepsilon > 0$ $\quad N = N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \underbrace{5}_{\text{Sicherheit}}$

$\Rightarrow$ Gleichm. Konvergenz ~~$\forall$~~ $\forall x$: $t^h(xy) \rightrightarrows f(xy)$

Schöner: Da $f \in C^\infty$ ist $f_S'(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x)$.

Damit ist $\|f_S'\|_2 \big|_{(x,y)} = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}$.

Für jeden einzelnen Quader der Kantenlänge $\frac{1}{k}$ ist der längste mögliche Weg $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{k}$. Damit gilt für alle x, y aus $[0,1]^2$:

$$|f(x,y) - t^k(x,y)| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{2}{k}.$$

Für bel. $\varepsilon > 0$ sei $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Mit $N = N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon} + 1\right]$ gilt die Bed. für glm. Konvergenz.

$\boxed{3}$

(a) (GA): $\exists\, \underline{x} \in Q$: $f(\underline{x}) \neq 0$. (OBdA $f(\underline{x}) \geq 0$)

Weil f stetig ist, gibt es einen ~~[illegible]~~ δ-Umgeb.

$$U_\delta(\underline{x}) \quad \text{mit} \quad f(x) \geq \varepsilon \text{ für } x \in U_\delta(\underline{x})$$

In dieser liegt ein Quader Ω mit ~~Kantenlänge~~ halber Diagonalen δ, also mit Kantenlänge d mit

$$\sqrt{n\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \delta \quad \left(\text{also } d = \frac{1}{\sqrt{n}} 4 \delta^2\right).$$

Dann ist $\int_\Omega f \, dx \neq 0$ ↯

(b) Da $f(x) \geq 0$ ist $\int_Q f \, dx \geq 0$ (da $f \geq 0$, vol ≥ 0)

(GA): Sei $f(\underline{x}) = \varepsilon \neq 0$ $(\varepsilon > 0)$ für ein $\underline{x} \in Q$,

dann folgt wie oben: $\int_Q f \, dx > 0$ ↯

4. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} f(\frac{a}{q}) = \frac{1}{q}, & \frac{a}{q} \text{ gekürzter Bruch} \\ f(x) = 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$

Definiere t_k als

$$t_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x = \frac{a}{q} \text{ und } q \leq k, \text{ x vollst. gekürzt.} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Z: $t_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ (glm. bez. x). $\Leftrightarrow \| t_k - f \|_\infty \to 0$

$$\| t_k - f \|_\infty = \sup_x | t_k(x) - f(x) | = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\square$

Dies gilt, weil für größere k weitere Punkte hinzukommen, für die $f(x)$ und $t_k(x)$ übereinstimmen. D.h. für t_k sind die gekürzten Brüche mit Nenner $\leq k$ ~~definiert~~ gleich wie in f, die mit Nenner $k+1$ und größer noch nicht. D.h. diese Funktionswerte weichen bei t_k und f voneinander ab und zwar um max. $f(x) = \frac{1}{k+1}$.

Damit ist f eine Regelfunktion und damit regelintbar.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} t_k(x)\,dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{l(k)} t_k(Q_i) \cdot vol(Q_i)$$

$$= 0$$

Dies liegt daran, dass $t_k(Q_i) \neq 0$ nur für die Punkte Q_i und hierfür $vol(Q_i) = 0$ ~~oder~~ und für $vol(Q_i) \neq 0$ ist $t(Q_i) = 0$.