Übungsklausur Kl. 12/13

$\boxed{\text{I}}$

1. 1) $F(x) = \frac{3}{5}x^5 + c$ 2) $F(x) = -2x^{-1} + c$

3) $F(x) = \frac{1}{15}x^5 + x^3 - 2x + c$ ~~4x F(x)~~

4) $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^2 + 9\ln(|x|) + \frac{1}{2}x^{-2} + c$

5) $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c$

6) $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}\sin(2x+1) + c$

7) $F(x) = \ln(|x|) + c$

... wie $f(x)$ nur $F(x)$ (Stammfunktion).

2. 1) $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = 5\frac{1}{3} + 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$

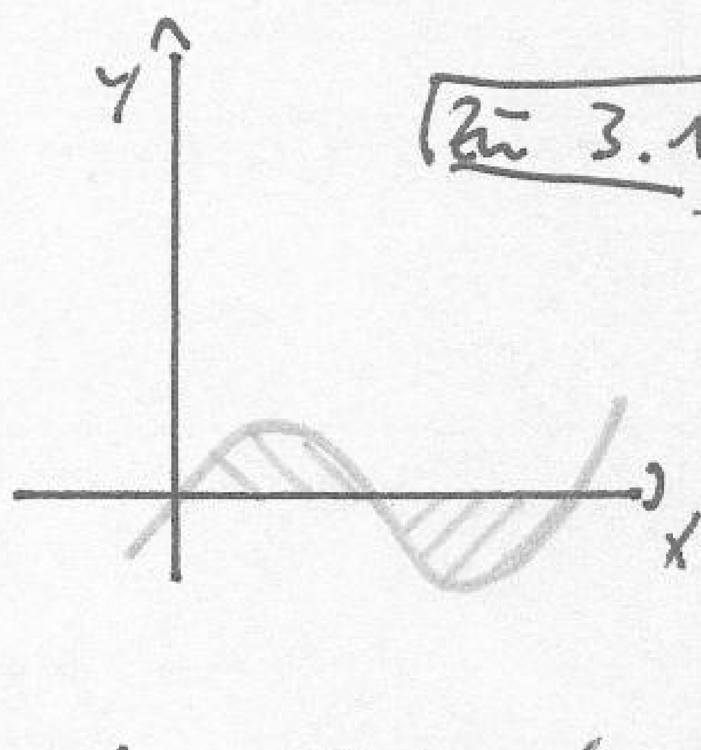
2) $F(x) = -\cos(x)$ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \left[-\cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0$

3) $F(x) = -2x^{-1}$ 1. $\int_{x \to 0}^{2} f(x)dx = \left[-2x^{-1}\right]_{x \to \infty}^{x=2} = -1 - \lim_{x \to \infty} F(x)$

$\int_{x \to 0}^{2} f(x)dx \to \infty$ da $x \to \infty$ $F(x) \to -\infty$

2. $\int_{2}^{x \to \infty} f(x)dx = \left[-2x^{-1}\right]_{x=2}^{x \to \infty} = \lim_{x \to \infty} F(x) + 1 = 0 + 1 = 1$

3. 1. Der Flächeninhalt ist immer positiv.
Im nebenstehenden Schaubild wird der Flächeninhalt aus der Summe der beiden schraffierten Flächen gebildet, das Integral aus der Differenz, weil die /// -schraffierte Fläche negativ und die \\\ -schraffierte Fläche positiv im Integral ist.



$\boxed{\text{zu 3.1}}$

$\boxed{I}$ 3

2) $f(x) = x^3 - 64x$ Nullstellen: $x_0 = 0$ $x_1 = 8$ $x_2 = -8$

$\int_{-8}^{8} f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 32x^2\right]_{-8}^{8} = -1024 + 1024 = 0$

3) $A = \left|\int_{-8}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{8} f(x)dx\right| = |0 + 1024| + |-1024 - 0| = 2048$

4) $f(x) = g(x)$ $x^3 - 64x = -8x^2 + 512$

$x^3 + 8x^2 - 64x + 512 = 0$

Durch probieren: $x_1 = 8$ $x_2 = -8$ Da $g(x) > f(x)$ für $-8 < x < 8$:

$g(x) - f(x) > 0$

$A = \int_{-8}^{8} \cancel{f(x)} (g(x) - f(x))$

$g(x) - f(x) = -8x^2 + 512 - x^3 + 64x$

$= -x^3 - 8x^2 + 64x + 512 = h(x)$

$H(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 32x^2 + 512x + c$

$A = [H(x)]_{-8}^{8} = 3754\frac{2}{3} + 1706\frac{2}{3} = 5461\frac{1}{3}$

4 $F(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + 2x$ $(f(x))^2 = g(x)$

$V = \pi \cdot \int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} (f(x))^2 dx$ mit GTR ergibt sich:

$V \approx 17{,}44\pi \approx 54{,}785$

5 $F(x) = -\cos(x)$ $m = \frac{\int_0^{\pi} f(x)dx}{\pi - 0} = \frac{[-\cos(x)]_0^{\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$

$\boxed{\text{II}}$

(6) 1) $e^x = 4 \quad | \ln \Rightarrow \quad x = \ln 4 \approx 1{,}386$

2) $\ln(x) = 5 \quad | e^{\wedge} \Rightarrow \quad x = e^5 \approx 148{,}413$

3) $e^{x^2-4} = 1$ da $e^0 = 1$: $x^2 - 4 = 0 \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

4) $e^x = \cos(x)$ Probieren: $x_1 = 0 \quad x_2 \approx 4{,}738$

(7) 1) $f(t) = 1000 \cdot e^{t \cdot \ln(1{,}035)}$ t: in Jahren, f in Euro

2) $f^*(t) = 1000 \cdot e^{\frac{t}{12} \cdot \ln(1{,}035)}$ t: in Monaten, f in Euro

3) $f(t) = 1000 \cdot e^{t \cdot \ln(1{,}035)}$

$f'(t) = 1000 \cdot \ln(1{,}035) \cdot e^{t \cdot \ln(1{,}035)}$

$f'(t) = f(t) \cdot \ln(1{,}035)$

da $f'(t)$ und $f(t)$ über einen konstanten Faktor $k = \ln(1{,}035)$ verknüpft sind (f' ist das $\ln(1{,}035)$-fache von f) ist $f'(t) \sim f(t)$

(8) Maximale Wuchshöhe lässt auf beschränktes Wachstum schließen.

$f(t) = S - c \cdot e^{k \cdot t}$ Aus dem Text ergibt sich (Einh. in cm)

$S = 2000 \quad f(0) = 60 \quad f(5) = 270$

$(S - c) = 60$ (Anfangsbestand): $c = 1940$

$f(t) = 2000 - 1940 \cdot e^{k \cdot t}$ Pkp. mit $f(5) = 270$

$270 = 2000 - 1940 \cdot e^{k \cdot 5} \quad | -2000 \quad | : -1940$

$0{,}892 \approx e^{k \cdot 5} \quad | \ln \Rightarrow 5k \approx -0{,}115 \quad k \approx -0{,}0229133$

$f(t) = 2000 - 1940 \cdot e^{-0{,}0229133 \cdot t}$ t: in Jahren, f in cm

---

$1000 = 2000 - 1940 \cdot e^{k \cdot t} \quad | -2000 \quad | : -1940 \quad | \ln$

$k \cdot t \approx -0{,}663 \quad t \approx 28{,}9 \Rightarrow$ Nach ca. 29 Jahren hat der Baum die Höhe von 10 m erreicht.

$\boxed{III}$

(9) 1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 2 = -12$

2)
$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - (-3)(-4) \\ (-3)2 - 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 21$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$

$|\vec{b}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{54}$

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{21}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{54}}\right) \approx 58{,}55°$

4) wenn lin. abh.: $\vec{a} = a \cdot \vec{b} \quad a \in \mathbb{R}$

$3 = -9a \qquad a = -\frac{1}{3}$
$2 = -6a \qquad a = -\frac{1}{3}$
$-1 = 3a \qquad a = -\frac{1}{3}$

Da sich ein einheitliches a finden lässt, sind die Vektoren lin. ~~unabh.~~ abhängig!

$\vec{a} = -\frac{1}{3} \vec{b}$

5) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander!

(10) E: $-2x_1 + x_2 + x_3 = 5$
F: $5x_1 + 2x_2 + x_3 = -6$ | Die Gleichungen werden als LGS behandelt.

$7x_1 + x_2 = -11$ — für x_2 wird der Parameter t eingeführt: $x_2 = t$

$7x_1 + t = -11$

$x_1 = -\frac{11}{7} - \frac{1}{7}t$ | x_1 in die Gl. 2 weiter oben einsetzen

$-11 - t + x_2 = -11 \Rightarrow x_2 = t$ | x_1, x_2 in E einsetzen

$\frac{22}{7} + \frac{2}{7}t + t + x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = \frac{13}{7} - \frac{9}{7}t$

$x_1 = -\frac{11}{7} - \frac{1}{7}t$
$x_2 = t$
$x_3 = \frac{13}{7} - \frac{9}{7}t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}t \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

III

10 2) h in E einsetzen:

$2(4+t)+4(6+2t)+6(2+3t)=16$

$8+2t+24+8t+12+18t=16$

$44 + 28t = 16$

$28t=-28 \quad t=-1 \quad$ t in h einsetzen: $\begin{pmatrix}4-1\\6-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$

$P(3|4|-1)$

11 1) Test auf Parallelität: Ist Richtungsvektor von g durch die beiden Richtungsvektoren der Ebene ausdrückbar bzw. senkrecht zum Normalenvektor ?: $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$ wenn ja. $\vec{n}=\begin{pmatrix}25\\5\\-35\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}5\\1\\-7\end{pmatrix}$

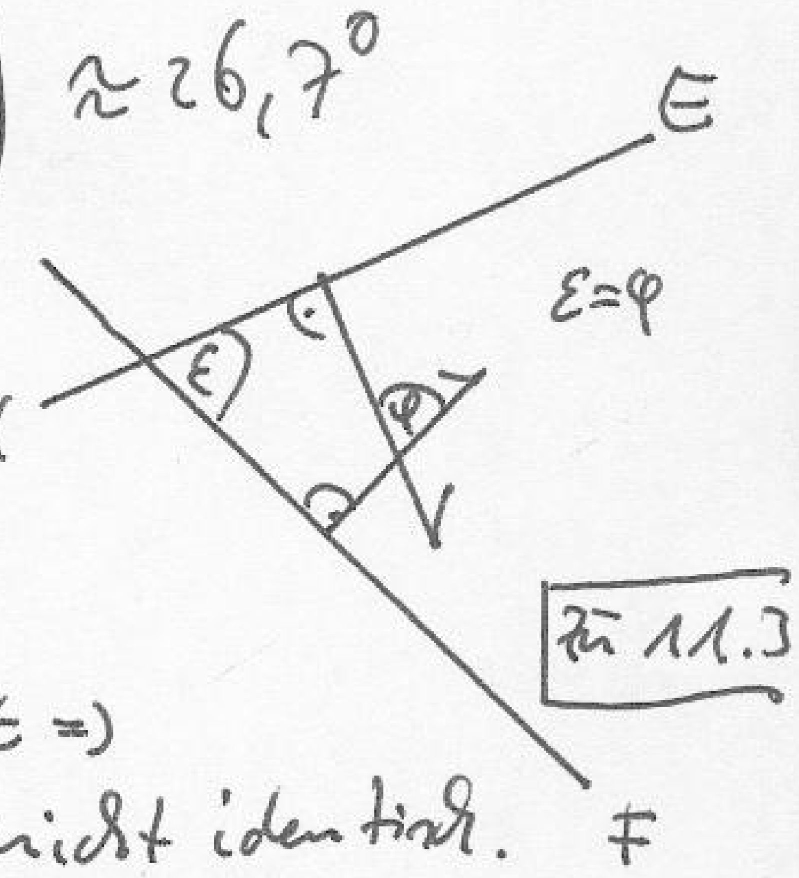
$\begin{pmatrix}5\\1\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\9\\2\end{pmatrix}=5\cdot1+9\cdot1+(-7)\cdot2=0 \Rightarrow g \parallel E$

Wenn $g\in E$ (g liegt in E) gilt: $\vec{OS}\in E \Rightarrow$ Stützvektor in E einsetzen: $25(2)+5(1)-35(-4)\overset{?}{=}195 \Rightarrow$ g liegt in E

2) Püp.: P: $\left.\begin{aligned}13&=3+2t \quad t=5\\12&=2+2t \quad t=5\\52&=7+9t \quad t=5\end{aligned}\right\}$ einheitliches t $\Rightarrow P\in g$

Q: $\left.\begin{aligned}21&=3+2t \quad t=9\\-12&=2+2t \quad t=-7\\88&=7+9t \quad t=9\end{aligned}\right\}$ kein einh. t $\Rightarrow Q\notin g$

3) $\vec{n}_E=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} \quad \vec{n}_F=\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix} \qquad \varepsilon=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_E\cdot\vec{n}_F|}{|\vec{n}_E|\cdot|\vec{n}_F|}\right)\overset{?}{=}\cos^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{27}}\right)\approx 26{,}7^\circ$



4) g&h: $\vec{r}_g=a\cdot\vec{r}_h$?: $\left.\begin{aligned}2&=a\cdot(-6) \quad a=-\tfrac{1}{3}\\1&=a\cdot(-3) \quad a=-\tfrac{1}{3}\\-4&=a\cdot(12) \quad a=-\tfrac{1}{3}\end{aligned}\right\}$ einh. a $\Rightarrow$ parallel

$\vec{S}_g\in h$?: $\left.\begin{aligned}2&=-2-6t \quad t=-\tfrac{2}{3}\\2&=1-3t \quad t=-\tfrac{1}{3}\\4&=8+12t \quad t=-\tfrac{1}{3}\end{aligned}\right\}$ kein einh. t $\Rightarrow$ nicht identisch.

h&i: $\vec{r}_h=a\cdot\vec{r}_i$?: $\left.\begin{aligned}-6&=a\cdot1 \quad a=-6\\-3&=a\cdot8 \quad a=-\tfrac{3}{8}\\12&=a\cdot4 \quad a=3\end{aligned}\right\}$ kein einh. a $\Rightarrow$ nicht parallel.

$h\cap i$?: $\begin{aligned}-2\cancel{+16}-6t&=-22+1s\\1\quad-3t&=-11+8s\\8\quad+12t&=56+4s\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}-6t-1s&=-20\\-3t-8s&=-12\\+12t-4s&=48\end{aligned}$

Matrize mit GTR lösen: $\begin{pmatrix}-6&-1&-20\\-3&-8&-12\\12&-4&48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$ nicht lösbar $\Rightarrow$ kein Schnitt $\Rightarrow$ windschief

$\boxed{III}$

11) 4)

$g \,\&\, i: \quad \vec{r}_g = a \cdot \vec{r}_i \; ? :$ $\quad \begin{matrix} 2 = a \cdot 1 \\ 1 = a \cdot 8 \\ -4 = a \cdot 4 \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} a = 2 \\ a = \frac{1}{8} \\ a = -1 \end{matrix}\right\}$ kein eind. a $\Rightarrow$ nicht parallel

$g \cap i \; ? :$ $\quad \begin{matrix} 2 + 2t = -22 + 1s \\ 2 + 1t = -11 + 8s \\ 4 - 4t = 56 + 4s \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -24 \\ 1 & -8 & -13 \\ -4 & -4 & 52 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

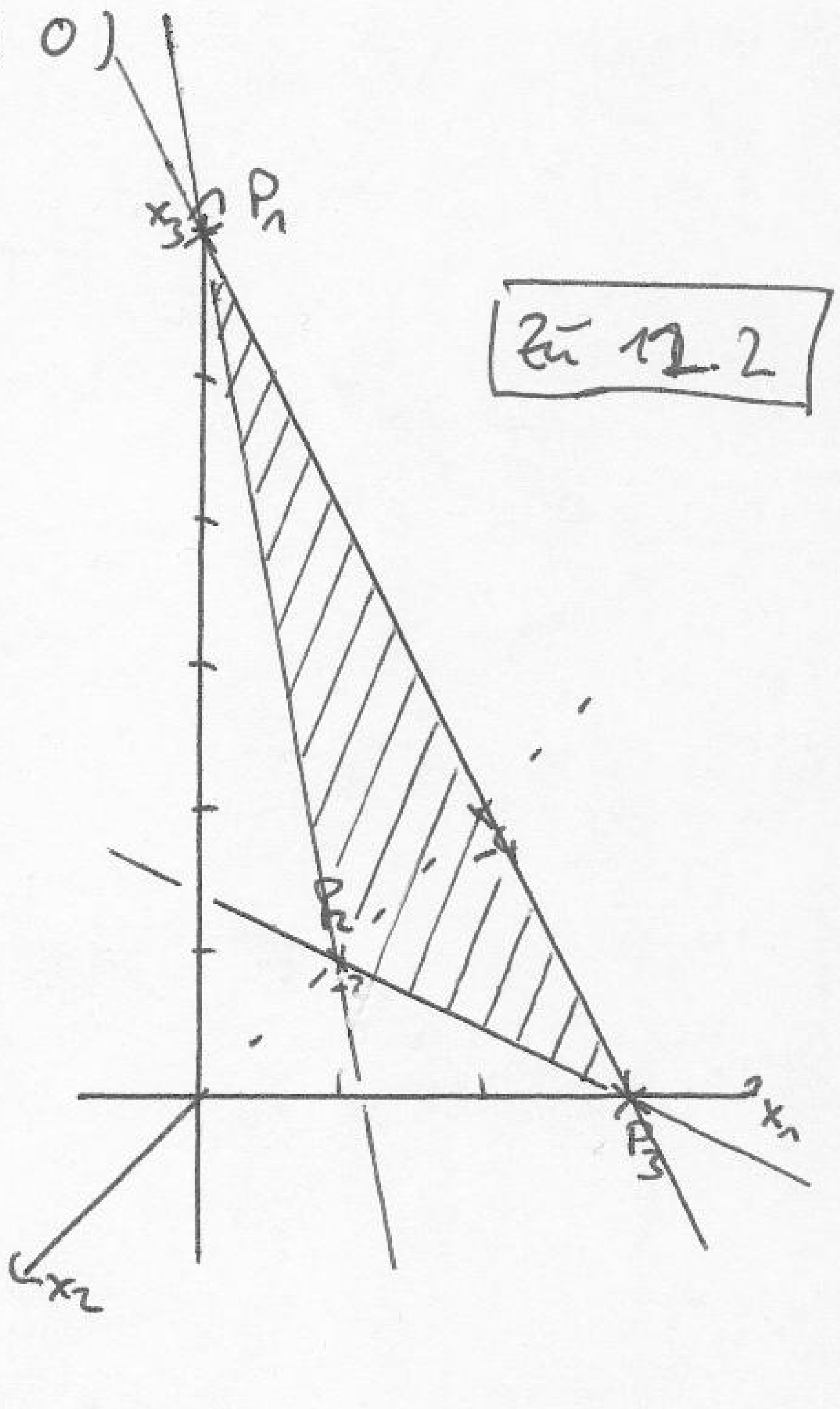
keine Lösung $\Rightarrow$ kein Schnitt $\Rightarrow$ windschief

12)

1) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_E = s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad E: 2x_1 - 1x_2 - 1x_3 = b$

Püp mit $\vec{s}$: $2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = -5 \qquad E: 2x_1 - x_2 - x_3 = -5$

2) $P_1(0|0|6) \quad P_2(0|-2|0) \quad P_3(3|0|0)$



3) $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3,5 \end{pmatrix} \quad r_2 = \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6,5 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3,5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6,5 \end{pmatrix}$

Alternativ:

$E: 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 12$