Kleine Mathetips

Michael Kopp

25. August 2008

Version 0.2

Inhaltsverzeichnis

1 Vereinfachungen mit dem TI-84+

1.1 Fit

Durch *fitten* kann man eine Funktion erstellen, die durch eine Liste von Punkten durchläuft. Man sucht also im Prinzip eine Funktion, die zu einer Reihe von Messwerten / Daten passt.

Dazu plottet man zuerst die Funktion → *Plotten* und überlegt sich, welche Funktion zwischen diesen Punkten passen könnte, also bspw. ob man sich eine Parabel zwischen all den Punkten vorstellen kann...

Nun findet man eine Auswahl von Möglichen Funktionen unter `STAT` → `CALC` :

1. egal
2. egal
3. egal
4. Gerade
5. Parabel
6. x^3-Funktion
7. x^4-Funktion
8. Gerade
9. Logarithmisch ($ln(x)$)
10. Exponentiell (e^x)
11. ??
12. Logistisch
13. Sinus

Nun wählt man die entsprechende Funktion aus, setzt hinter sie zuerst die x-Werte (Die Listen erreicht man über `2ND` und die einzelnen Zahlen), dann die y-Werte, die man anpassen muss, und dahinter die Funktion, in die gespeichert werden soll – alle drei sind durch *Datenkommas*[1] getrennt. Diese erreicht man über `VARS` → `Y-VARS` → `FUNCTION`, dann auswählen.

Nun sollte bspw. `LINREG,L1,L2,Y1` dastehen. Drückt man nun auf `ENTER`, so wird in die Funktion `Y1` reingeschrieben, wie die Punkte am besten miteinander verbunden werden können. Drückt man nun auf `GRAPH`, so kann die Funktion auch sehen.

1.2 Plotten

Zuerst gibt man die Daten für die x-Werte in eine Liste ein, dann die Daten für die y-Werte in eine zweite Liste. Die Listen erreicht man über `STAT` → `EDIT`. Will man ein komplette Liste löschen, so geht man mit dem Curser über den Listennamen (der ganz oben steht) und drückt `CLEAR`. Mit den ⇑ und ⇓ -Tasten kann man zwischen den einzelnen Einträgen, mit den ⇒ und ⇐ -Tasten zwischen den einzelnen Listen wechseln.

Nun muss man einen Plot auswählen. Dazu geht man in `2ND` + `Y=` und wählt einen der Plotplätze aus (mit `ENTER`). Diesen aktiviert man, indem man in der ersten Zeile auf `ON` stellt – so deaktiviert man ihn dann auch wieder: Man stellt hier den Schalter auf `OFF`. Eine Zeile tiefer könnte man verschiedene Plotformen auswählen – die erste dürfte eigentlich immer passen.

In der Zeile `XLIST` gibt man die Liste an, die die x-Werte enthält. Dazu wählt man `2ND` und die entsprechende Taste aus – über den Zahlentasten `1` bis `6` sind kleine blaue Listennamen angegeben. Will man bspw. die Liste `L1` auswählen, so drückt man `2ND` + `1`.

Über `GRAPH` kann man dann den Plot anzeigen. Über `ZOOM` + `9` wird der Bildschirm so ausgewählt, dass der Plot ideal in den Bildschirm passt.

Tip für Profis 1

> *Man kann den Plot auch abschalten, indem man im* `Y=` *-Menü ganz nach oben navigiert. Dort sind* `PLOT1` *bis* `PLOT3` *angezeigt. Mit dem Curser geht man über den entsprechenden eintrag und deaktiviert oder aktiviert ihn mit* `ENTER`.

1.3 Window-Kommandos

Um den Fensterausschnitt besser zu wählen, bestimmt man am besten zuerst den x-Bereich über `WINDOW` – also den Bereich, den die Funktion vermutlich einnehmen wird. Den y-Wert kann man den Rechner einstellen lassen: Über `WINDOW` + `0` stellt der Rechner automatisch den y-Bereich ein.

Will man den Fensterbereich wieder auf Standard zurücksetzen, so wählt man `WINDOW` + `6`.

[1] Das Komma auf der schwarzen Taste über den Zahlen

Will man einen kleinen Ausschnitt der Funktion genauer sehen, kann man über `WINDOW` + `1` einen Ausschnitt wählen: Dazu navigiert man mit dem Cursor über eine Ecke des Bereichs, den man sehen möchte, drückt `ENTER` , navigiert zur nächsten Ecke und drückt wieder `ENTER` . Der Bildschirm wird sofort neu eingestellt.

1.4 Solver

Will man eine Gleichung mit nur einer Variablen lösen, so löst man sie nach 0 auf (also *blabla* = 0). Im `MATH` -Menü, findet man den `SOLVER` (bei `0`). Mit der ⇑ -Taste kann man nun die Gleichung eingeben (sodass da steht `0=BLABLA`). Drückt man auf `ENTER` , so kommt man wieder in ein Menü zurück. Nun gibt man einen Schätzwert für x ein und drückt `ALPAH` + `ENTER` .

Tip für Profis 2

Hat man eine Gleichung wie

$$4x^4 + 3x^2 + 5x = 9$$

so kann man sie auflösen, indem man die Zahl auf der rechten Seite einfach nach links holen:

$$4x^4 + 3x^2 + 5x - 9 = 0$$

Tip für Profis 3

Eine Gleichung kann so viele Nullstellen haben, wie höchste Potenz von x ist.

Bspw.: $f(x) = 3x^2 + x - 12$ hat als höchste Potenz von x eine 2 und somit kann *die Funktion* maximal *zwei Nullstellen haben – sie kann aber auch weniger haben.*

1.5 Lineare Gleichungssysteme mit Matrizen lösen

Hat man ein lineares Gleichungssystem mit mehreren Zeilen und möchte diese nich von Hand ausrechnen, so editiert man eine Matrize. Dazu muss man wissen, dass bei einer Gleichung der Form $3a + 4b + 1c = 14$ die Zahlen 3, 4, 1 und 14 als *Koeffizienten* bezeichnet werden.

Über `2ND` + x^{-1} → `EDIT` wählt man eine Matrize aus. Hat man drei Gleichungen mit jeweils vier Koeffizienten, so muss in der ersten Zeile `3x4` stehen. In die einzelnen Zeilen trägt man nun die Koeffizienten ein.

Hat man bspw. das Gleichungssystem

$$3a + 4b + 1c = 14 \tag{1}$$
$$2a + 2b - 3c = -3 \tag{2}$$
$$1a - 3b + 2c = 1 \tag{3}$$

So trägt man in die Matrize

```
3  4   1   14
2  2  -3   -3
1 -3   2    1
```

ein.

Nun muss man die Matrize nur noch auswerten. Das geschieht über `2ND` + x^{-1} → `MATH` → `RREF(` , dann die richtige Matrize auswählen, unter `2ND` + x^{-1} , dann die richtige auswählen und mit `ENTER` bestätigen, dann eine schließende Klammer `)` tippen. Auf dem Bildschirm sollte dann stehen[2]: `RREF([A])` .

Jetzt kann man lesen:

```
1 0 0 1
0 1 0 2
0 0 1 3
```

Und das bedeutet: Die einzelnen Spalten sind für die einzelnen Buchstaben (erste Spalte für a, zweite für b, dritte für c), die lezte ist für das Ergebnis. Diese Matrize bedeutet also, dass $1a + 0b + 0c = 1$, also $a = 1$. Ebenso kann man hier sehen $b = 2$ und $c = 3$.

Sonderfälle Es kann sehr selten zu sonderfällen kommen. Wenn in der letzten Zeile nur Nuller stehen, so bedeutet das, dass man die anderen Ergebnisse trotzdem verwenden kann. Es kann aber sein, dass in einer Zeile dann nicht nur eine 1 und in der letzten Spalte ein Ergebnis steht, sondern es kann sein, dass bspw. da steht `1 0 1 4` . Das würde dann bedeuten: $1a+1c = 4$. Der Rechner hat es also nicht geschafft, zu sagen, was genau a und was genau c ist – dann wird es der menschliche Rechner aber auch nicht schaffen.

Wenn dagegen in der letzten Zeile `0 0 0 1` steht, dann stimmt etwas nicht. Entweder wurden bei der Eingabe Fehler gemacht, oder das Gleichungssystem lässt sich einfach nicht lösen. In diesem Falle am besten noch mal die Matrize durchschauen...

2 Rechnen

2.1 Rechenregeln

Die wichtigsten Rechenregeln in aller Kürze:

Punkt vor Strich... Wenn mehrere Zahlen durch verschiedene Operatoren miteinander verknüpft sind, so muss man stets bevorm man einzelne Zahlen addiert, die Multiplikations- und Divisionsoperationen durchführen.
Bei $a + b \cdot c$ rechnet man also zuerst $b \cdot c$ und dann addiert man dazu a

... doch vergiss die Klammern nicht Die oben genannte Regel gilt nur, wenn die Zahlen nicht mit Klammern versehen werden. Es ist stets zuerst der Inhalt aller Klammern abzuarbeiten – dabei zuerst die inneren, dann weiter nach außen.
Bei $(a + b) \cdot c$ rechnet man zuerst $a + b$, und multipliziert dieses Ergebnis mit c

Aus Summen kürzen nur die Dummen Will man einen Bruch kürzen, so darf man dies nur tun, wenn man sowohl im Zähler[3] als auch im Nenner[4] eine Bestimmte Zahl ausklammern kann. Kürzen bedeutet nämlich eigentlich, dass man im Bruch oben und unten die gleiche Zahl ausklammert und diese beiden dann durcheinander

[2] Das A kann auch ein anderer Buchstabe sein – je nachdem, welche Matrize verwendet wurde
[3] Über dem Bruchstrich
[4] Unter dem Bruchstrich

teilt
Bspw. $\frac{3a+12b}{9a+3b} = \frac{3\cdot(a+4b)}{3\cdot(3a+b)} = \frac{3}{3}\cdot\frac{a+4b}{3a+b} = 1\cdot\frac{a+4b}{3a+b}$ *Nicht* kürzen darf man bspw. $\frac{3+5}{3+b} \neq \frac{3}{3}\cdot\frac{5}{b}$

2.2 Zahlenmengen

In der Mathematik kann man Zahlen gut in *Mengen* zusammenfassen. Eine Menge ist eine Ansammlung von Zahlen. Eine Möglichkeit, solch eine Menge zu notieren, ist, alle Zahlen in geschweifte Klammern zusammenzufassen, die zu der Menge gehören (Bspw. $A = \{1, 3, 9, 27\}$). Folgt die Menge in ihren Zahlenfolgen einer gewissen Struktur, so kann man die Teile weglassen, die nicht nötig sind, um zu verstehen, was die Menge beinhaltet. Statt dieser Zahlen schreibt man dann ... (also bspw. $B = \{1, 3, 5, ..., 99\}$ – Die Menge der ungeraden Zahlen, kleiner als 100).

Will man ausdrücken, dass bestimmte Elemente *nicht* zu der Menge gehören sollen, so hängt man diese Menge mit einem
an die Menge, von der ausgeschlossen werden soll, an. (Bspw.: $B* = \{1, 3, 5, ..., 99\}\backslash\{23, 79\}$ – Die Menge der ungeraden Zahlen, kleiner als 100 und ohne 23 und 79.)

Will man ausdrücken, dass eine Zahl a ein Teil einer Menge A ist, so schreibt man $a \in A$, ist das Gegenteil der Fall, so schreibt man $a \notin A$.

Um eine Menge genauer zu definieren, schreibt man hinter eine ungenaue Definition einen „|“ und dann die zusätzliche Definition. (Bspw. ist die Menge $A = \{r\}$ nicht klar definiert, weil man nicht weiß, was man für r einsetzen darf. Will man für r bspw. nur natürliche Zahlen zulassen, so schreibt man $A = \{r | r \in \mathbb{N}\}$.

Man kann auch ein *Intervall* $I = [a; b]$ als eine Menge ansehen. Es würde der Menge $I = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq a,\ x \leq b\}$ entsprechen.

Ein paar dieser Mengen[5] sind so bedeutend, dass sie eigene Formelzeichen bekommen haben:

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ (die 0 gehört meist nicht dazu[6]) also alle Zahlen, mit denen man Gegenstände in der natürlichen Welt abzählen kann (man kann keine $-4,3$ Schafe Zählen).

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$ also alle Zahlen, die man als Brüche ganzer Zahlen darstellen kann

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ Zahlen, die man mit Wurzeln, Logarithmen etc. dastellen kann. Es können Zahlen sein mit unendlich vielen, nichtperiodischen Stellen nach dem Komma oder Zahlen wie π und e.

[5] Gewissermaßen eine Teilmenge der Menge aller Mengen
[6] Um zu Kennzeichnen, dass die 0 dazugehört, schreibt man dann $\mathbb{N}^0$

2.3 Wurzelgesetze

Man darf Wurzeln auch als Potenzen schreiben. Bspw. ist $\sqrt[4]{83} = 81^{\frac{1}{4}}$. Die $n$te Wurzel von x ($\sqrt[n]{x}$) ist also $x^{\frac{1}{n}}$. Hat man sich das verinnerlicht, dann muss man sich nämlich keine besonderen Wurzelgesetze merken, sondern kann immer sagen, dass man einfach die → *Potenzgesetze* beachten muss.

2.4 Potenzgesetze

Definition: Potenz: a^b (irgen eine Zahl hoch einer anderen Zahl – es können auch Variablen sein[7]. Bei a^b heißt a *Grundzahl* oder auch *Basis* und b heißt *Hochzahl* (oder auch *Potenz* – ist aber verwirrend).

1. Hat man zwei Potenzen, so darf man ihre Grundzahlen multiplizieren, wenn die beiden Potenzen die gleiche Hochzahl haben: $7^4 \cdot 3^4 = (7 \cdot 3)^4 = 21^4$.
2. Hat man zwei Potenzen, bei denen die Grundzahlen gleich sind und die Hochzahlen verschieden, so darf man die Potenzen einfach addieren: $4^3 \cdot 4^7 = 4^{(3+7)} = 4^{10}$
3. Wird eine Potenz potentiert, so darf man die Hochzahlen multiplizieren: $(2^4)^3 = 2^{(4 \cdot 3)} = 2^{12}$
   Achtung wegen der Klammer: 2^{4^3} bedeutet 2^{64} und ist etwas völlig anderes als $(2^4)^3$!

Die Grund- und Hochzahlen müssen dabei keine normalen Zahlen sein – es können auch Terme (bswp. $(4 + 3x)$ ist ein Term) oder andere Gebilde sein. Normalerweise kann man mit Potenzen und Wurzeln nur arbeiten, wenn sie *multipliziert* werden. Werden zwei Potenzen bzw. Wurzeln addiert, so kann man nicht allzuviel tun – höchstens: Ausklammern → *Ausklammern.*

2.5 Logarithmengesezte

Ein Logarithmus $log_a(b) = c$ ist eine Rechenoperation, die zu einer Gegebenen Zahl b eine Zahl c liefert. Rechnet man a^c (a wird auch als *Basis* bezeichnet) so ergibt sich $a^c = b$. Der Logarithmus c von b zur Basis a ist also die Zahl, die man die Basis a hochnehmen muss, um als Ergebnis b zu erhalten.

Um nicht immer die Basis zu schreiben, gibt es für Logarithmen bestimmter Basen besondere Bezeichnungen:

Dekatischer Logarithmus – Formelzeichen[8]: $lg()$ – Basis: 10

Natürlicher Logarithmus – Formelzeichen: $ln()$ – Basis: e

Für das Rechnen mit Logarithmen gibt es nun bestimmte Regeln:

[7] Beispiel: 3^4, x^3, 3^x, a^{21}

[8] Manchmal wird statt $lg()$ auch ungenau $log()$ ohne Basis geschrieben

- $log(a \cdot b) = log(a) + log(b)$
- $log(a^b) = b \cdot log(a)$
- $log(a + b)$ können wir nicht auflösen
- $a^{log_a(b)} = b$
- $log_a(b) = \frac{log_c(b)}{log_c(a)}$

Um Logarithmen aus einer Gleichung zu entfernen, muss man auf beiden Seiten der Gleichung die Basis hoch der bisherigen Seiten der Gleichung rechnen. Also bspw.

$$log_4(7) = log_4(x) \Rightarrow 4^{log_4(7)} = 4^{log_4(x)} \Rightarrow 7 = x$$

2.6 Ausklammern

In einer Reihe von Summanden sucht man sich etwas, was immer wieder vorkommt. Bspw. ist bei $ax^2 + 3a - 4ax$ das Element, welches immer wieder da ist, das a. Dieses schreibt man dann vor die Summe und setzt sie in Klammer, wobei man aus der Summe jeweils das a entfernt. Im Beispiel sieht das so aus: $a \cdot (x^2 + 3 - 4x)$.

Man kann sich bei der Ausklammerei[9] auch immer überlegen „mit welcher Zahl muss ich jetzt das a malnehmen, damit ich auf das komme, was im ersten Term steht“ und diese Zahl dann aufschreiben. So muss man um auf ax^2 zu kommen, das a mit x^2 malnehmen, deshalb steht das innerhalb der Klammer.

Man darf auch mehrmals ausklammern. Bspw. hat man $8ax^2 + 4xa + 12a$ und kann so zuerst a ausklammern: $a(8x^2 + 4x + 12)$ und dann nochmal etwas – hier die Zahl 4: $a(4(2x^2+x+3))$. Die beiden ausgeklammerten Elemente darf man dann zusammenfassen: $4a(2x^2 + x + 3)$

Wenn man nicht genau weiß, ob man bei mehreren Zahlen etwas ausklammern darf, so kann man die → *Primfaktorzerlegung* anwenden. Um bestimmte Klammern aufzulösen, gibt es die sog. → *Binomischen Formeln* .

2.7 Binomische Formeln

Es existieren nur drei Binomische Formeln – sie alle haben damit zu tun, dass etwas in einer Klammer quadriert wird. Bei diesen Formeln handelt es sich nur um *Vereinfachungen*: Man könnte beim normalen auch gut ohne die Formeln auf das Ergebnis kommen, nur muss man eben etwas länger rechnen. Nichtsdestoweniger gibt es zahlreiche Anwendungen, bei denen diese Formeln von Bedeutung sind, wenn man sie als „Trick“ anwendet.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

[9] Die Umkehrung vom Ausklammern ist die Anwendung des *Distributivgesetzes*.

2.8 Primfaktorzerlegung

Dabei versucht man, eine Zahl in möglichst kleine, einfache Primzahlen zu zerlegen. Primzahlen sind bspw. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103

Man schaut also für jede Zahl „kann man sie durch 2, durch 3, durch 5 etc. teilen. Wenn es möglich ist, schreibt man sich diese Primzahl auf und teilt die untersuchte Zahl durch die Primzahl. Dann untersucht man das Ergebnis dieser Teilung weiter.

Beispiel 1

Untersucht man also bspw. die Zahl 60*, so zerlegt man:*

60 *geht durch* 2*, also* 2 *notieren,* $60 \div 2 = 30$. 30 *geht durch* 2 *also* $30 \div 2 = 15$. 15 *geht durch* 3 *also* $15 \div 3 = 5$. 5 *ist selber eine Primzahl, lässt sich also nicht weiter teilen. Die* Primfaktoren *der Zahl* 60 *sind also:* $\{2; 2; 3; 5\}$.

Die Primfaktorzerlegung kann man nun auch wirklich verwenden: Will man für zwei Zahlen wissen, welche gemeinsamen Teiler sie haben, macht man mit beiden die Primfaktorzerlegung und vergleicht dann, welche Primzahlen die beiden Zahlen gemeinsam haben. Diese gemeinsamen Primzahlen multipliziert man dann miteinander und kommt auf die Zahl, die man aus beiden Zahlen ausklammern kann.

Beispiel 2

Untersucht man bspw. die Zahlen 90 *und* 315 *so erhält man die Primfaktoren* $\{2; 3; 3; 5\}$ *und* $\{3; 3; 5; 7\}$. *Hier sind also die Zahlen* $3; 3; 5$ *bei beiden vorhanden, die Zahl* $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$ *ist also Teiler der beiden Zahlen* ($2 \cdot 45 = 90$ *bzw.* $7 \cdot 45 = 315$).

2.9 Lösen einer Gleichung

Um eine Gleichung zu lösen, kann man meistens nach diesem Schema vorgehen.[10] Ziel der Rechnerei ist dabei immer, dass man am Ende für die Variable eine Zahl dastehen hat. Man versucht also immer zu sortieren: Variablen auf die eine Seite, Zahlen auf die andere.

1. Zuerst sortiert man nur mit $+$ und $-$
2. Dann mit $\cdot$ und $\div$
   In bzw. nach den Zwischenschritten versucht man immer, so weit wie möglich zu vereinfachen, auszuklammern etc.
3. Wenn es noch nötig ist, rechnet man dann mit
   - Potenzen (alles hoch irgendwas nehmen → um Wuzeln los zu werden)

[10] Das funktioniert nur, wenn man *eine* Gleichung mit *einer* Variablen hat. Hat man mehrere Variablen, dann kann man die Gleichung entweder nach einer Variablen auflösen[11] oder man hat noch weitere Gleichungen, mit denen man die Gleichung zu einem *linearen Gleichungssystem* zusammenfassen kann.

- Wurzeln (aus beiden Seiten die Wurzeln ziehen → um Hochzahlen los zu werden)
- etc.

Es gibt dabei aber ein paar Möglichkeiten, die man beachten sollte:

Ausklammern Schauen, ob man nicht x ausklammern kann

Gleichung mit 0 Steht auf einer Seite des = nur eine 0, so darf man in der Gleichung hemmungslos durch alles Teilen – $0 \div irgendwas$ ist ja immernoch 0.

Substituieren Wenn man eine Gleichung mit x^4 und x^2 hat, ersetzt man $x^2 = a$ und damit auch $x^4 = a^2$, dann rechnet man die Gleichung mit a weiter – kann also die Mitternachtsformel anwenden – und muss am Schluss wieder zurückrechnen[12]

Binomische Formeln Die Binomischen Formeln anwenden

2.10 Bestimmung des Parabelscheitelpunktes

Liegt eine Funktion mit
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
vor, so geht man zur Bestimmung des Scheitelpunkte folgendermaßen vor:

1. c weglassen: Das c ist für unsere weiteren Rechnungen zuerst nicht entscheidend; wir lassen es weg und untersuchen $ax^2 + bx$.
2. Die beiden Nullstellen von ax^2+bx werden gesucht. Den Term kann man umformen:
$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$
Nach dem → *Satz vom Nullprodukt* ist nun $x_1 = 0$ und $ax_2+b = 0$. Für x_2 ergibt sich so: $x_2 = \frac{-b}{a}$
3. Nun sucht man den Mittelpunkt x_m zwischen den beiden Nullstellen x_1 und x_2: $x_m = \frac{x_2-x_1}{2} = x_m$
4. Der Mittelpunkt x_m ist der x-Wert des Scheitelpunktes. Den y-Wert erhält man, indem man x_m in die Funktion $f(x)$ einsetzt. *Vorsicht:* Hier ist c wieder wichtig – also nicht weglassen!

Tip für Profis 4

Verkürzt kann man also sagen, die Koordinaten des Scheitels sind:
$$\left(\frac{-b}{2a} \mid f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

[12] Wenn am Ende steht $a = 4$, so ist ja $x^2 = 4$; die Lösung ist also $x_1 = 2; x_2 = -2$

2.11 Mitternachtsformel

Die Mitternachtsformel dient dazu, quadratische Gleichungen zu lösen – also gleichungen, in denen die Höchste Potenz von x zwei ist. Die Gleichung muss dazu in die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gebracht werden, wobei $a \neq 0$. Dann gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dabei unterscheidet man zwischen drei Fällen. In allen drei ist die *Determinante D* entscheidend. Die Determinante ist die Zahl unter der Wurzel überhalb des Bruchstriches ($D = b^2 - 4ac$):

1. $D = 0$ Die Gleichung hat *genau eine* Lösung.
2. $D > 0$ Die Gleichung hat *zwei* Lösungen
3. $D < 0$ Die Gleichung hat *keine* Lösung

2.12 Satz vom Nullprodukt

"Ein Produkt ist immer dann null, wenn einer der Faktoren null ist."

Besonders interessant wird dieser Satz, wenn man Nullstellen berechnen will. Hierzu klammert man das x aus. Hat man x ausgeklammert, so kann entweder $x = 0$ sein, oder der Inhalt der Klammer muss null ergeben, damit man eine Nullstelle hat.

Beispiel 3

Bspw. können wir für die Funktion $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x$ keine Nullstelle bestimmen, weil es keine Mitternachtsformel für x^3 gibt. Deswegen klammert man x aus: $f(x) = x(3x^2 + 2x + 2)$. Für eine Nullstelle ist also entweder $x_1 = 0$ oder $3x^2 + 2x + 2 = 0$. Und den zweiten Fall können wir mit der Mitternachtsformel lösen.

2.13 Satz von Vieta

Der Satz von Vieta besagt, dass man jede beliebige Funktion $f(x)$ mit den Nullstellen $x_0, x_1, x_2 ...$ umschreiben kann[13] zu $g(x) = a \cdot (x - x_0) \cdot (c - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ....$

Für eine quadratische Gleichung ergibt sich darüber hinaus noch ein kleiner Nebeneffekt: Für die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ ergibt sich:
$b = -(x_1 - x_2)$
$c = x_1 \cdot x_2$

Der Satz von Vieta bildet die Grundlage für die → *Polynomdivision* .

[13] Wobei man das a bestimme muss

2.14 Ungleichungen

Ungleichungen kann man eingentlich wie ganz normale Gleichungen behandeln ($\rightarrow$ *Lösen einer Gleichung*). Ein paar Kleinigkeiten sind wichtig dabei:

1. wenn man mit einer negativen Zahl malnimmt oder teilt (also wenn hinter dem Term steht „$|\cdot(-2)$“, dann muss man das Ungleichheitszeichen *umdrehen*. wenn man nur etwas addiert oder abzieht, dann muss das nicht geschehen.

2. wenn man mit x malnimmt oder teilt, so muss man genau hinschreiben, dass x in dem Fall von jetzt an nur noch positive Werte annehmen darf (dann muss man das Zeichen nicht drehen) oder es darf nur noch negative Werte annehmen (dann muss man das Ungleichheitszeichen wieder drehen). Am Ende der Rechnung muss man dann überprüfen, ob das Ergebnis überhaupt sein kann. Wenn man herausbekommt, dass $x \geq 3$ ist, man aber vorher gesagt hat, dass x immer kleiner als null ist, dann kann das Ergebnis nicht richtig sein...

3. Man darf nicht wie gewohnt eine Lösungsmenge angeben. Wenn das Ergebnis einer Ungleichung lautet $x \geq 3$ darf man nicht schreiben $L = \{3\}$ oder $L \geq \{3\}$, sonder muss schreiben $L = \{[3; \infty[\}$

2.15 Lineare Gleichungssysteme lösen

Um lineare Gleichungssysteme zu lösen, gibt es zwei wichtige Ansätze:

1. Das Gaus'sche Eliminationsverfahren
   Dabei versucht man in jeder „Runde“, eine Variable rauszuschmeißen, indem man die einzelnen Zeilen voneinander abzieht oder addiert, wobei man sie vorher so durchmultipliziert hat, dass die gleiche Variable untereinander den gleichen Wert hat (also dass bspw. oben $4c$ und unten $4c$ stehen und durch subtraktion der beiden Zeilen voneinander fällt das c weg.
   Zu beachten ist bei diesem Verfahren, dass man pro „Runde“ eine Gleichung „unbrauchbar“ macht. Das bedeutet, wenn man drei Gleichungen hat, so muss man ein Gleichung auswählen. Dann muss man die beiden anderen Gleichungen jeweils von dieser einen Gleichung abziehen bzw. dazuzählen, dadurch wird sie unbrauchbar und man kann sie in der nächsten „Runde“ nicht weiter verwenden. In der nächsten „Runde“ sollten die Gleichungen, die noch nicht verbraucht sind, *weniger* Variablen haben, als die, die schon verbraucht sind. In der Mathematik schreibt man trotzdem bei der Rechnerei die verbrauchten Zeilen immernoch hin...

2. Das Auflöse- und Einsetzverfahren
   Es ist besonders dann hilfreich, wenn man nur zwei Gleichungen mit je zwei Variablen hat. Dann kann man eine der Gleichungen nach einer der Variablen auflösen (hat man die Variablen a und b, dann löst man eine der Gleichungen nach a auf, sodass da steht $a = blabla$. Dann setzt man diese a bzw. dieses $blabla$ in die zweite Gleichung ein. Hier steht jetzt nur noch eine Variable und diese Gleichung kann man dann lösen ($\rightarrow$ *Lösen einer Gleichung*)

3 Geometrie

3.1 Winkelzusammenhänge

Es gibt drei grundlegende Winkelfunktionen, die definiert sind über die Längenverhältnisse in einem Gleichschenkligen Dreieck (→ *Abb. 2*). Die Verhältnise zwischen den beiden Seiten hängt im gleichschenkligen Dreieck nur von den beiden anderen Winkeln ab ($\alpha, \beta \neq 90^o$). Die Drei Verhältnise haben besondere Namen bekommen:

Sinus $sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$

Cosinus $cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$

Tangens $tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$

Diese drei Winkelfunktionen hängen auf zwei bestimmte Arten zusammen. Am wichtigsten ist dabei:

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

Der zweite Zusammenhang ist:

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Tip für Profis 5

$sin^2(\alpha)$ bedeutet das gleiche wie $(sin(\alpha))^2$ – es ist nur weniger Schreibarbeit.

Einheitskreis Um diese Zusammenhänge besser überblicken zu können, verwendet man den *Einheitskreis* (→ *Abb. 1*). Das ist ein Kreis, der per Definition den Radius 1 hat. Sein Zentrum liegt im Ursprung eines Koordinatensystems. Nun wird von diesem Ursprung aus ein Dreieck aufgebaut, welches zur x-Achse des Koordinatensystems den Winkel α hat. Nun kann man einfach den Sinuns bzw. Cosinus an den Längen auf den Achsen ablesen: Auf der x-Achse findet sich der Cosinus, auf der y-Achse der Sinus – beide male sind die jeweiligen Abschnitte gemeint, die das Dreieck bilden.

Interessant ist dabei auch, dass der Winkel α in diesem Einheitskreis nicht auf 90^o limitiert ist. Auch wenn es nicht möglich ist, ein rechtwinkliges dreiek mit $\alpha \geq 90^o$ zu konstruieren, kann man hier die dazugehörigen Sinus- und Cosinuswerte ablesen – jetzt muss man aber aufpassen und auch beachten, dass auch die Werte für Sinus- und Cosinus *negativ* werden dürfen. Man muss eben die Pfeilrichtungen auf den Achsen beachten.

3.2 Satz von Pythagoras

Er dient dazu, Strecken in eienm rechtwinkligen Dreieck auszurechnen. In Worten lautet er:

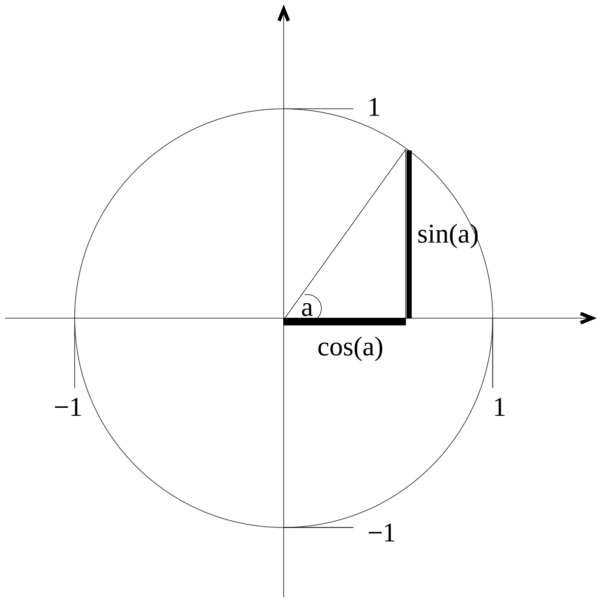

Abbildung 1: Ein Einzeitskreis (Der Winkel α ist aus technischen Gründen nur mit a bezeichnet)

Das Quadrat über der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist so groß, wie die Summer der Quadrate über den beiden Katheten.

Als Formel bedeutet dies: Sind a und b die Katheten eines Rechtwinkligen Dreiecks und c die Hypothenuse, so gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3.3 Dreiecke

Fläche Für die Fläche eines Dreiecks gilt immer:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

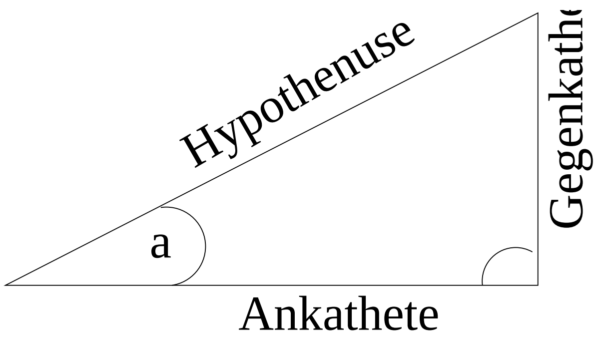

Abbildung 2: rechtwinkliges Dreieck (Der Winkel α ist aus technischen Gründen nur mit a bezeichnet)

Dabei ist g die Grundseite und h die Höhe. Dabei ist egal, welche der drei Seiten die Grundseite ist – es ist nur wichtig, dass die Höhe *senkrecht* zur Grundseite steht. Es darf dann auch gerne sein, dass die Dritte Ecke gar nicht über der Grundseite, sondern etwas entfernt, ist.

Die lange Seite in eienm *rechtwinkligen* Dreieck wird als „Hypotenuse“ bezeichnet, die beiden kurzen Seiten als „Katheten“

Kongruenzbedingungen

SSS Drei Seiten

SWS Zwei Seiten und der Winkel zwischen diesen

SsW Lange Seite, kürzere Seite und ein Winkel der nicht zwischen diesen Seiten liegt

3.4 Rechtecke

Ein Rechteck hat vier rechte Winkel, die gegenüberliegenden Seiten sind gleich lang und parallel.

Fläche Für die Fläche eines Rechtecks gilt

$$A = a \cdot b$$

3.5 Trapez

Ein Trapez hat zwei parallele Seiten, die nicht gleich lang sind und zwei Seiten, die nicht parallel sind und nicht gleich lang sein müssen. Zwischen den beiden parallelen Seiten wird die Höhe h so gemessen, dass sie senkrecht zu den beiden steht.

Fläche Für die Fläche gilt:

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

wobei a und b die parallelen Seiten sind.

3.6 Parallelogramm

Alle gegenüberliegenden Seiten sind parallel, sie müssen aber nicht gleich lang sein.

Fläche Für die Fläche gilt:

$$A = a \cdot h$$

dabei ist h die Strecke, senkrecht zwischen zwei gegenüberliegenden parallelen Seiten und a die Länge dieser Parallelen Seite.

3.7 Raute

Eine Raute ist ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten.

Fläche Für die Fläche gilt nicht nur das gleiche wie für das → *Parallelogramm* , sondern auch

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

wobei d_1 und d_2 die Diagonalen der Raute sind.

3.8 Kreis

Oberfläche Für eine Kreisoberfläche gilt:

$$O = \pi \cdot r^2$$

wobei r der Radius ist.

Umfang Für den Umfang eines Kreises gilt:

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

3.9 Quader

Ein Quader ist ein Körper, der an allen Acht Ecken in alle Richtungen rechte Winkel hat – alle 12 Kanten stoßen mit rechten Winkeln aneinander. Wenn alle drei Seiten gleich lang sind, heißt der Quader *Würfel*.

Oberfläche Für die Oberfläche gilt:

$$O = 2ab + 2bc + 2ac$$

Volumen Für das Volumen gilt:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

3.10 Kegel

Ein Kegel hat eine Grundfläche, die entweder kreisförmig oder eckig ist.

Volumen Das Volumen errechnet sich mit

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

dabei ist G die Oberfläche der Grundseite. Sie muss mit den oben stehenden Formeln errechnet werden. h ist die Höhe, wie die Spitze über der Grundfläche ist. Wie beim → *Dreieck* ist dabei nicht entscheidend, dass die Spitze auch wirklich über der Grundfläche ist, sondern dass der Abstand zur Spitze senkrecht zur Grundfläche gemessen wird.

Oberfläche Beim Kegel unterscheidet man zwischen Oberfläche und Mantelfläche. Bei der Oberfläche zählt alles dazu – also die Wände des Kegels und der Boden. Bei der Mantelfläche dagegen ist nur der Teil entscheidend, der *nicht* auf dem Boden liegt – also nur die Wand. Besteht die Wandfläche aus Dreiecken, so muss man sie mit den oben stehenden Formeln ausrechnen.

3.11 Zylinder, Prisma

Zylinder bzw. Prismen sind Objekte, die überall die gleiche Querschnittsfläche haben – also nicht dünner oder dicker werden. Dabei sind Zylinkder von der Grundform her rund, während Prismen eckig sind.

Volumen Das Volumen eines Zylinders bzw. eines Prismas berechnet sich so:

$$V = G \cdot h$$

dabei ist G wieder die Oberfläche der Grundfläche, wärend h die Höhe zwischen den beiden parallelen Flächen oben und unten ist. Und wieder ist es nicht entscheidend, dass die beiden Grundflächen direkt übereinander sind, sondern wieder nur, dass der Abstand zwischen ihnen auf einer Strecke gemessen wurde, die senkrecht (rechtwinklig) zu den beiden parallelen Flächen ist.