Theo ④

Michael Kopp

① $[A,B] = AB - BA$

(a) $[AB,C] = ABC - CAB$ $=$

$A[B,C] + [A,C]B = A(BC-CB) + (AC-CA)B =$

$ABC - \cancel{ACB} + \cancel{ACB} - CAB$ ✓

(b) • $[x,p^2] = [x, -\hbar^2\partial_x^2] = -x\hbar^2\partial_x^2 + \hbar^2\partial_x^2 x\cdot$

$= -x\hbar^2\partial_x^2 + \hbar^2(\partial_x(1\cdot + x\partial_x\cdot))$

$= \cancel{-x\hbar^2\partial_x^2} + \hbar^2(\partial_x + \partial_x + \cancel{x\partial_x^2})$

$= +2\hbar^2\partial_x \qquad = 2i\hbar p$

• $[x^2,p^2] = [x^2, -\hbar^2\partial_x^2] = -x^2\hbar^2\partial_x^2 + \hbar^2\partial_x(\partial_x(x^2\cdot))$

$= -x^2\hbar^2\partial_x^2 + \hbar^2\partial_x(2x\cdot + x^2\partial_x\cdot)$

$= \cancel{-x^2\hbar^2\partial_x^2} + \hbar^2(2\cdot + 2x\partial_x\cdot + 2x\partial_x\cdot + \cancel{x^2\partial_x^2\cdot})$

$= 2\hbar^2(\mathbb{1} + 2x\cdot\partial_x) \qquad = 2\hbar^2 + 4xi\hbar p$

• $[xp,p^2] = [-i\hbar x\partial_x, -\hbar^2\partial_x^2] = i\hbar^3 x\partial_x(\partial_x^2\cdot) - i\hbar^3\partial_x(\partial_x(x\partial_x\cdot))$

$= i\hbar^3 x\partial_x^3 - i\hbar^3\partial_x(\partial_x + x\partial_x^2)$

$= \cancel{i\hbar^3 x\partial_x^3} - i\hbar^3(\partial_x^2 + \partial_x^2 + \cancel{x\partial_x^3}) = -2i\hbar^3\partial_x^2$

$= -2i\hbar^3\partial_x^2 \qquad = 2i\hbar p^2$

(c) $g(x) = \sum_j \frac{1}{j!}(\partial_x^j g)x^j$

$[p,g(x)] = -i\hbar\partial_x\sum_j \frac{1}{j!}(\partial_x^j g)x^j\cdot - \sum_j\frac{1}{j!}(\partial_x^j g)x^j(-i\hbar\partial_x)\cdot$

$= -i\hbar\left(\sum_j \frac{1}{j!}(\partial_x^j g)\, j x^{j-1}\cdot + \cancel{\sum_j \frac{1}{j!}(\partial_x^j g)x^j(\partial_x\cdot)} - \cancel{\sum_j\frac{1}{j!}(\partial_x^j g)x^j(\partial_x\cdot)}\right)$

Das ist Taylorreihe von $\partial_x g$! $= -i\hbar\sum_j\frac{1}{(j-1)!}(\partial_x^{j-1}(\partial_x g))x^{j-1}\cdot$

$= -i\hbar\partial_x g(x)\cdot$

$f(p) = \sum_k a_k p^k = \sum_k a_k(-i\hbar\partial_x)^k \qquad a_k = \frac{1}{k!}\partial_p^k f$

$[x,f] = x\sum_k a_k(-i\hbar)^k\partial_x^k\cdot - \overbrace{\sum_k a_k(-i\hbar)^k\partial_x^k(x\cdot)}^{x\cdot\partial_x^k\cdot + k\partial_x^{k-1}\cdot + 0}$

$= x\sum_k a_k(-i\hbar)^k\partial_x^k\cdot - x\sum_k a_k(-i\hbar)^k\partial_x^k\cdot - \sum_k a_k(-i\hbar)^k k\partial_x^{k-1}\cdot$

$= i\hbar\sum_k\frac{1}{(k-1)!}(\partial_p^{k-1}(\partial_p f))(-i\hbar)^{k-1}\partial_x^{k-1}\cdot$

$= i\hbar\,\partial_p f$

Leibniz:

$\partial_x^k(x\cdot) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l}\underbrace{(\partial_x^l x)}(\partial_x^{k-l}\cdot)$

x für $l=0$

k " $l=1$

0 sonst

[2]

(a) $\exp(-At)\, B \exp(At) = \left(\Sigma_k \frac{1}{k!} (-1)^k A^k t^k \right) B \left(\Sigma_l \frac{1}{l!} (+1)^l A^l t^l \right)$ (1)

Dies wird ausmultipliziert und nach der Ordnung von t sortiert.

Beh: Für den Koeffizienten der n-ten Ordnung gilt

$$\propto \underbrace{[[[B,A],A],\ldots,A]}_{n} \qquad (*)$$

(Die Vermutung ergibt sich, wenn man dies explizit für 1,2,3,... Ordn. durchrechnet.)

Durch (langwieriges(?)) Überlegen bekommt man für den n-ten Koeffizienten die Darst. (prop. dazu!)

$$\Sigma_{l=0}^{n} \binom{n}{l} A^l B A^{n-l} (-1)^l$$

Für Induktion (für (*)) wende $[A, \cdot]$ darauf an:

$$[A, \Sigma_{l=0}^{n} \binom{n}{l} A^l B A^{n-l} (-1)^l] =$$

$$= \Sigma_{l=0}^{n} \binom{n}{l} A^{l+1} B A^{n-l} (-1)^l + \Sigma_{l=0}^{n} \binom{n}{l} A^l B A^{n-l+1} (-1)^{l-1}$$

$$= \Sigma_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} A^l B A^{n-l+1} (-1)^{l-1} + \Sigma_{l=0}^{n} \binom{n}{l} A^l B A^{n-l+1} (-1)^{l-1}$$

$$= \binom{n}{n} \cdot A^{n+1} B A^0 (-1)^n + \Sigma_{l=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right)}_{\binom{n+1}{l}} A^l B A^{n-l+1} (-1)^{l-1} + \binom{n}{0} A^0 B A^{n+1} (-1)^{-1}$$

$$= \Sigma_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} A^l B A^{n+1-k} (-1)^k$$

⇝ Die Koeff. sind also (*) darst'bar.

Betrachte erste Koeff: (ausmult. von (1)):

$$e^{-At} B e^{At} = B - t[A,B] + \frac{1}{2} \underbrace{(BA^2 - 2ABA + A^2 B)}_{} t^2$$

$$BA \cdot A - AB \cdot A - A \cdot BA + A \cdot AB$$

$$= [B,A] A - A [B,A]$$

$$= [[B,A],A] = 0 \text{ nach Voraus.}$$

⇝ alle Koeff für höhere Koeff verschw. nach Induktion ebenfalls.

□

$\boxed{2}$ (b)

$$W = e^{-At}\, e^{(A+B)t} \qquad (2)$$

$$\dot W = -A\, e^{-At}\, e^{(A+B)t} + e^{-At}(A+B)\, e^{(A+B)t}$$

$\underbrace{e^{At}\, e^{-At}}_{\mathbb{1}}$ einfügen …

$$= -A \underbrace{e^{-At}\, e^{(A+B)t}}_{W} + \underbrace{e^{-At}(A+B)e^{At}}_{(A+B) - t[A,A+B]} \cdot \underbrace{e^{-At}\, e^{(A+B)t}}_{W}$$

laut (a).

$$= (\cancel{-A} + \cancel{A} + B - t[A,B])\, W$$

Bem: Wegen Multilinearität ist $[A, A+B] = [A,B]$ da $[A,A] = 0$.

⇝ DGL mit konst. Koeff.

Lösung:

$$W = C \cdot e^{Bt - \frac{1}{2}t^2 [A,B]} \qquad (3)$$

Koeffvgl mit (2) bei $t=0$ liefert $C = \mathbb{1}$

Setze (2) = (3) bei $t = 0$

$$e^{-A}\, e^{(A+B)} = e^{B - \frac{1}{2}[A,B]}$$

$$= e^{B} \cdot e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \qquad | e^{A} \cdot \qquad (**)$$

$$e^{(A+B)} = e^{A}\, e^{B}\, e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

Gl. (**) stimmt nur, weil $[B, \frac{1}{2}[A,B]] = 0$

nach Voraussetzung: Es gilt

$$e^{U} \cdot e^{V} = e^{U+V} \Leftrightarrow [U,V] = 0.$$