Theo (11)

Michael Kopp

1 (a) $\mathcal{H} = \mathrm{span}(\ |+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\ ) \Rightarrow |\psi\rangle = a|+\rangle + b|0\rangle + c|-\rangle$

da $\rho_0 = 1/3\,\mathbb{1}$ sind die Zustände $|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle$ gleich verteilt. Im Strahl ρ_α / ρ_β sind also nur der $|+\rangle$-Zust. (Reiner Zust.: $\rho_\alpha = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$) bzw. der $|+\rangle, |0\rangle$ Zust. gleich wahrsch. realisiert (Gem. Zust.: $\rho_\beta = \begin{pmatrix} 1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$).

- $\mathrm{Tr}\,\rho_\alpha = 1$, $\mathrm{Tr}\,\rho_\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- $\mathrm{Tr}\,\rho_\alpha^2 = \mathrm{Tr}\,\rho = 1$, $\mathrm{Tr}\,\rho_\beta^2 = \begin{pmatrix} 1/4&0&0\\0&1/4&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 1/2 \leq 1$
- Bei $\mathrm{Tr}\,\rho^2 = 1$ ist $\rho^2 = \rho$ ein reiner Zust., bei $\mathrm{Tr}\,\rho^2 \neq \mathrm{Tr}\,\rho$ ist $\rho^2 \neq \rho$, also ein gem. Zustand.

(b) $\mathcal{H} = \mathrm{span}(|+\rangle, |-\rangle)$

$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$, $\rho_\gamma = \begin{pmatrix} 1&0\\0&0\end{pmatrix}$

Es ist $\rho_\gamma^2 = \rho_\gamma$, also $\mathrm{Tr}\,\rho_\gamma^2 = 1$, also ein reiner Zustand

(c) $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \Rightarrow \langle\psi| = \bar\alpha\langle +| + \bar\beta\langle -|$

ρ soll einen reinen Zustand beschreiben, also

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)(\bar\alpha\langle+| + \bar\beta\langle-|)$$
$$= \alpha\bar\alpha\,|+\rangle\langle+| + \beta\bar\alpha\,|-\rangle\langle+| + \bar\beta\alpha\,|+\rangle\langle-| + \beta\bar\beta\,|-\rangle\langle-|$$
$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \bar\beta\alpha \\ \beta\bar\alpha & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

Für vollst. Pol. in x-Richtung soll $\langle\sigma_x\rangle = 1$, also

$\mathrm{Tr}(\sigma_x\rho) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\alpha|^2 & \bar\beta\alpha \\ \bar\alpha\beta & |\beta|^2\end{pmatrix}\right) = \beta\bar\alpha + \bar\beta\alpha = 1$

Weil $|\psi\rangle$ normiert sein soll, muss gelten $\alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta = 1$

$(\beta-\alpha)\bar\alpha + (\alpha-\beta)\bar\beta = 0 \Rightarrow -(\alpha-\beta)\bar\alpha + (\alpha-\beta)\bar\beta = 0 \Rightarrow$

$(\bar\beta-\bar\alpha)(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \bar\alpha = \bar\beta$ oder $\alpha = \beta$, da $\bar\alpha = \bar\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

gilt dies. In Normierung eingesetzt: $2|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Es folgt $\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ als eine mögl. Darstellung.

$\langle \sigma_y \rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_y \rho) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = \frac{-i}{2} + \frac{i}{2} = 0$

(d) Für $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ gilt nun:

$\langle \sigma_z \rangle = 3/4$, $\langle \sigma_x \rangle = 1/4$

Mit dem allg. ρ von vorher gilt also:

$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta} \\ \bar{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \right) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 3/4$ (I)

$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot\cdot \right) = \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} = 1/4$ (II)

Und mit Normierungsbed.: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (III)

Weil wir in x,z-Richtungen polarisiert sein sollen, können wir verlangen: $\langle \sigma_y \rangle = 0$

$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rho \right) = -i\bar{\alpha}\beta + i\alpha\bar{\beta} = 0 \Rightarrow \bar{\alpha}\beta = \alpha\bar{\beta}$ (IV)

Mit (II) folgt: $2\bar{\alpha}\beta = 1/4 \rightarrow \bar{\alpha}\beta = 1/8$;

Mit (III − I): $2|\beta|^2 = 1/4 \Rightarrow |\beta|^2 = 1/8$,

und mit (III) weiter: $|\alpha|^2 = 1 - |\beta|^2 = 7/8$.

Also ist

$$\rho = \begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Theo (11)

[3]

(a) $\partial_t A_H = \partial_t U^+ A_S U = (\partial_t U^+) A_S U + U^+ \underbrace{(\partial_t A_S)}_{0 \text{ da bei Schröd. zeitunabh.}} U + U^+ A_S \partial_t U$

$\partial_t U = \partial_t e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = -\frac{i}{\hbar} H$

$U^{-1} = U(t \mapsto -t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \Rightarrow \partial_t U^+ = \partial_t U^{-1} = \frac{i}{\hbar} H U^+$

$\partial_t A_H = \frac{i}{\hbar} H \, U^+ A_S U + U^+ A_S \left(\frac{-i}{\hbar} H\right) U$

Es ist $[H, U] = 0$ da U als Potenzreihe aus Potenzen von H besteht und trivialerw. ist $[H,H]=0$ und so $[H^n, H] = 0 \Rightarrow [U, H] = 0$.

$\partial_t A_H = \frac{i}{\hbar} H \underbrace{U^+ A_S U}_{A_H} + \underbrace{U^+ A_S U}_{A_H} \frac{-i}{\hbar} H = \frac{i}{\hbar} [H, A_H]$ □

(b) Nach Def. ist $a_H(t) = U^+(t) \, a_S \, U(t)$.

Mit $H = \hbar\omega(a_S^+ a_S + 1/2)$ folgt: $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega(a_S^+ a_S + 1/2)t}$.

Weil $H^+ = H$ gilt $U^+ = U^{-1} = U^+(t) = e^{i\omega(a_S^+ a_S + 1/2)t}$.

$a_H(t) = e^{i\omega(a_S^+ a_S + \cancel{1/2})} a_S e^{-i\omega(a_S^+ a_S + \cancel{1/2})}$

Da $e^{\pm i\omega \cdot 1/2}$ skalar ist, vertauschen diese ohne Probleme mit a_S und kürzen einander. Man entw. e^A als Reihe:

$a_H(t) = \sum_{jk} \frac{1}{j!} (i\omega)^j (a_S^+ a_S)^j a_S \frac{1}{k!} (-1)^k (i\omega)^k (a_S^+ a_S)^k$

Es ist weiter $a_S (a_S^+ a_S)^k = a_S \cdot a_S^+ a_S \cdot a_S^+ a_S \cdots a_S^+ a_S$ und wegen der Assoziativität der Verkettung $= a_S a_S^+ \cdots a_S a_S^+ \cdot a_S = (a_S a_S^+)^k a_S$. Also gilt

$a_H(t) = \sum_{jk} \frac{1}{j!} (i\omega)^j (a_S^+ a_S)^j \frac{1}{k!} (-1)^k (i\omega)^k (a_S a_S^+)^k a_S$

$= e^{i\omega a_S^+ a_S} e^{-i\omega a_S a_S^+} a_S$

Wie aus Lang II bekannt, gilt für Operatoren

$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ wenn $[A,B] = 0$.

Wir berechnen dazu $[i\omega a_S^+ a_S, -i\omega a_S a_S^+] =$

$-i^2\omega^2 [a_S^+ a_S, a_S a_S^+] = -i^2\omega^2 (a^+[a, aa^+] + [a^+, aa^+]a) =$

$-i^2\omega^2 (-a^+ a \underbrace{[a^+, a]}_{-1} - \underbrace{[a, a^+]}_{1} a^+ a) = 0$

Vgl. Relationen Blatt 4 Aufg. 1!

Es folgt also weiter:

$$a_H(t) = e^{i\omega(a_S^+ a_S - a_S a_S^+)} a_S ,$$

wobei im Exponenten ein Kommutator steht:

$$a_S^+ a_S - a_S a_S^+ = [a_S^+, a_S] = -1 \quad \text{(bekannt vom Blatt...)}$$

Damit ist die erste Relation gezeigt, die zweite folgt elegant aus dieser:

$$a_H^+ = (e^{i\omega t} a_S)^+ = e^{-i\omega t} a_S^+$$

da komplexe Skalare gedaggert werden, indem sie komplex konjugiert werden. $\square$

(c) $\tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}$ und $\tilde{Q} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, Q$ sind dimensionslose Operatoren. Mit ihnen ist $H = \hbar\omega(\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2)$. Da P, Q Observablen sind, sind auch $\tilde{P}, \tilde{Q}$ welche und damit hermitesch. Es gilt für Erzeuger/Vernichter nach Def.:

$$a^+ := \tilde{Q} - i\tilde{P} \quad ; \quad a := \tilde{Q} + i\tilde{P}$$

Im Heisenberg-Bild gilt also: (Mit (b)):

$$a_H(t) = e^{i\omega t} a_S = e^{i\omega t}(\tilde{Q}_S + i\tilde{P}_S) = \tilde{Q}_H + i\tilde{P}_H$$
$$a_H^+(t) = e^{-i\omega t} a_S^+ = e^{-i\omega t}(\tilde{Q}_S - i\tilde{P}_S) = \tilde{Q}_H - i\tilde{P}_H$$

Durch Addition der Gl. erhält man:

Mit $i = -\frac{1}{i}$,
$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$,
$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$

$$\tilde{Q}_H = \tilde{Q}_S (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\frac{1}{2} + i\tilde{P}_S(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\frac{1}{2}$$
$$= \tilde{Q}_S \cos(\omega t) - \tilde{P}_S \sin(\omega t),$$

und analog durch Subtraktion:

$$\tilde{P}_H = \frac{1}{2i}\left(\tilde{Q}_S(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) + i\tilde{P}_S(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\right)$$
$$= \tilde{Q}_S \sin(\omega t) + \tilde{P}_S \cos(\omega t)$$

(Man könnte noch $P_H = \sqrt{2\hbar m\omega}\cdot\tilde{P}_H$, $Q_H = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\tilde{Q}_H$ setzen; dies bringt keinen großen Zugewinn :-))

3

(d) $\partial_t A_H(t) = \frac{-i}{\hbar} [A_H(t), H]$

$$H_H = \hbar\omega (\tilde{P}_H^2 + \tilde{Q}_H^2)$$

$$= \hbar\omega (\tilde{Q}_S^2 \sin^2(\omega t) + \tilde{P}_S^2 \cos^2(\omega t) + \cancel{2\tilde{Q}_S\tilde{P}_S \sin(\omega t)\cos(\omega t)}$$

$$+ \tilde{Q}_S^2 \cos^2(\omega t) + \tilde{P}_S^2 \sin^2(\omega t) - \cancel{2\tilde{Q}_S\tilde{P}_S \cos(\omega t)\sin(\omega t)})$$

$$= \hbar\omega (\tilde{Q}_S^2 + \tilde{P}_S^2) \quad (\text{weil } \sin^2 + \cos^2 = 1).$$

$$= H_S \quad (\text{deshalb } H = H_H = H_S)$$

Bem.: Die Observablen A_H, A_S sollten in der Realität die selben Ergebnisse liefern; deshalb müssen die Ausdrücke in beiden Bildern analog sein.

Analog zum klassischen Fall (wo wir

$$\dot{q} = \{q, H\}, \quad \dot{p} = \{p, H\}$$

hatten, untersuchen wir jetzt also

(1) $\partial_t \tilde{P}_H = \frac{-i}{\hbar}[\tilde{P}_H, H] = -i\omega [\tilde{P}_H, \tilde{P}_H^2 + \tilde{Q}_H^2] = -i\omega [\tilde{P}_H, \tilde{Q}_H^2]$

$$\overset{\text{(·)}}{=} -2i\omega [\tilde{P}_H, \tilde{Q}_H]\tilde{Q}_H$$

Mit $[P, Q] = -i\hbar = (2\hbar m\omega \frac{2\hbar}{m\omega})^{1/2} [\tilde{P}, \tilde{Q}]$ folgt

$$[\tilde{P}_H, \tilde{Q}_H] = -\frac{i\hbar}{2\hbar} = -i/2$$

$$\overset{\text{(·)}}{=} +2i\omega \frac{i}{2} \tilde{Q}_H = -\omega \tilde{Q}_H$$

Damit: $\partial_t P_H \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} = -\omega \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Q$

$$\partial_t P_H = -m\omega^2 Q$$

klassisch entspricht dies der Rückstellkraft von einem Potential $V = \frac{1}{2} m\omega^2 Q^2$ $(Q \hat{=} x)$!

(2) $\partial_t \tilde{Q}_H = \frac{-i}{\hbar}[\tilde{Q}_H, H] = -i\omega [\tilde{Q}_H, \tilde{P}_H^2] = -i\omega \, 2\underbrace{[\tilde{Q}_H, \tilde{P}_H]}_{i/2} \tilde{P}_H$

$$= +\omega \tilde{P}_H$$

$$\partial_t Q_H \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} = \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P$$

$$\partial_t Q_H = \frac{\omega}{m\omega} P_H = \frac{1}{m} \cdot P_H$$

klassisch entspricht dies der Def. des Impulses

$$v = \frac{1}{m} p \Rightarrow p = mv.$$

3.

(c) $\langle Q_H(t)\rangle = \langle \Psi_H | Q_H(t) | \Psi_H\rangle = \alpha \langle \Psi_H | \tilde{Q}_H(t) | \Psi_H\rangle$

mit $\alpha = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$

$\tilde{Q}$ ergibt sich durch Add/Subtr. aus (c)!

Da $\tilde{Q}_H = (a_H + a_H^+)/2$ gilt mit a_H, a_H^+ von (b):

$$\langle \tilde{Q}_H(t)\rangle = (\langle 1| + \langle 2|)\tilde{Q}_H(|1\rangle + |2\rangle)$$

$$= \langle 1|\tilde{Q}_H|1\rangle + \langle 1|\tilde{Q}_H|2\rangle + \langle 2|\tilde{Q}_H|1\rangle + \langle 2|\tilde{Q}_H|2\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle 1|a_S|1\rangle e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\langle 1|a_S^+|1\rangle e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}\langle 1|a_S|2\rangle e^{i\omega t}$$

$$+ \frac{1}{2}\langle 1|a_S^+|2\rangle e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}\langle 2|a_S|1\rangle e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\langle 2|a_S^+|1\rangle e^{-i\omega t} +$$

$$+ \frac{1}{2}\langle 2|a_S|2\rangle e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\langle 2|a_S^+|2\rangle e^{-i\omega t}$$

Weil $a_S|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a_S^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ gilt

$$\langle \tilde{Q}_H(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{i\omega t}\left(\langle 1|0\rangle + \sqrt{2}\langle 1|1\rangle + \langle 2|1\rangle + \sqrt{2}\langle 2|1\rangle\right)$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\left(\sqrt{2}\langle 1|2\rangle + \sqrt{3}\langle 1|3\rangle + \sqrt{2}\langle 2|2\rangle + \sqrt{3}\langle 2|3\rangle\right)$$

Da ich die Vektoren als orthonormiert annehme, folgt weiter

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \sqrt{2}\cos(\omega t)$$

$$\langle Q_H\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\cdot\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

$$\langle P_H\rangle = \langle \Psi_H | P_H | \Psi_H\rangle = \beta\langle \Psi_H | \tilde{P}_H | \Psi_H\rangle, \quad \beta = \sqrt{2\hbar m\omega},$$

$$\tilde{P}_H = \frac{a_H - a_H^+}{2i}$$

$$\langle \tilde{P}_H\rangle = \frac{1}{2i}\left(\langle 1|a_H|1\rangle - \langle 1|a_H^+|1\rangle + \langle 1|a_H|2\rangle - \langle 1|a_H^+|2\rangle + \langle 2|a_H|1\rangle\right.$$

$$\left. - \langle 2|a_H^+|1\rangle + \langle 2|a_H|2\rangle - \langle 2|a_H^+|2\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}\left(\langle 1|0\rangle + \sqrt{2}\langle 1|1\rangle + \langle 2|0\rangle + \sqrt{2}\langle 2|1\rangle\right)\right.$$

$$\left. - e^{-i\omega t}\left(\sqrt{2}\cancel{\langle 1|2\rangle} + \sqrt{3}\langle 1|3\rangle + \sqrt{2}\langle 2|2\rangle + \cancel{\sqrt{3}\langle 2|3\rangle}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin(\omega t)$$

$$\langle P_H(t)\rangle = \sqrt{2\hbar m\omega}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t).$$