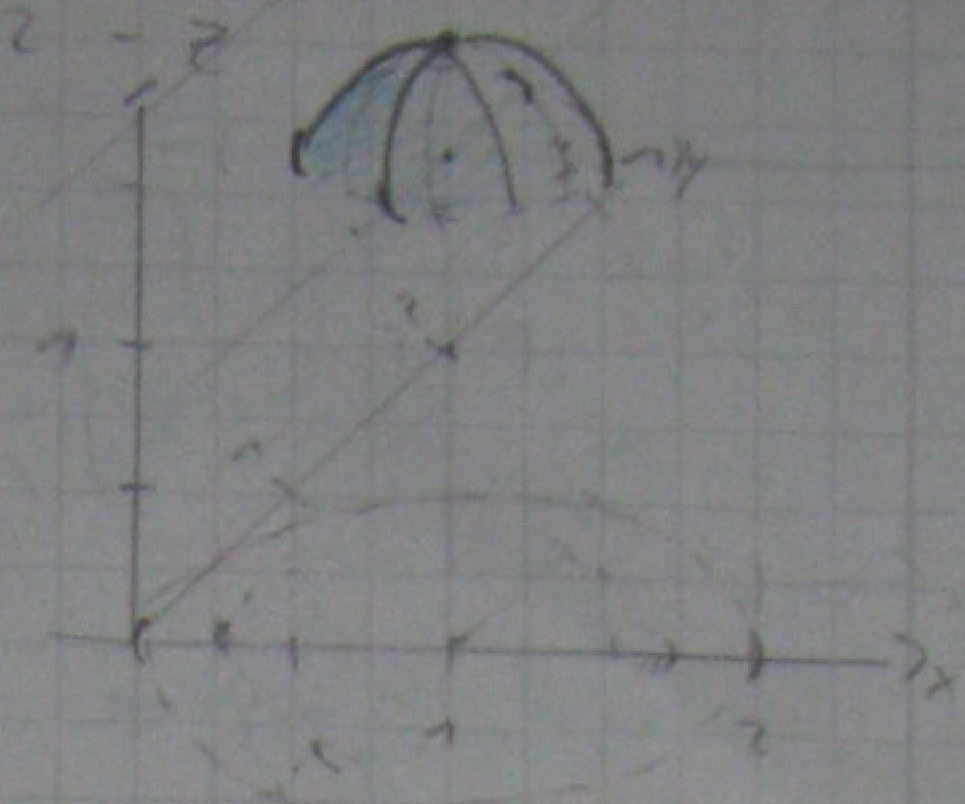
Michael Kapp

Ana ⑧



sin	
0	$\sqrt{0}/2$
30	$\sqrt{1}/2$
45	$\sqrt{2}/2$
60	$\sqrt{3}/2$
90	$\sqrt{4}/2$

II

(a) Param.:

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 + \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ 2 \sin\vartheta \end{pmatrix},$$

$$2\sin\vartheta \in [\sqrt{3}, 2] \Rightarrow \vartheta \in [60°, 90°]$$

$$\Rightarrow \vartheta \in [\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

(b) K ist genau die Fläche, die S nach unten, parallel zur xy-Ebene abschließt.

(i) „Fluss" ist $\langle \underline{F} | \nu \rangle$,

1. S: $\nu = \underline{F}_{,\varphi} \times \underline{F}_{,\vartheta} / \| \underline{F}_{,\varphi} \times \underline{F}_{,\vartheta} \|$

$$\underline{F}_{,\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos\vartheta \\ \cos\varphi \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_{,\vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \sin\vartheta \\ -\sin\varphi \sin\vartheta \\ 2\cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_{,\varphi} \times \underline{F}_{,\vartheta} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \cos^2\vartheta \\ 2\sin\varphi \cos^2\vartheta \\ \sin^2\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta + \cos^2\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \cos^2\vartheta \\ 2\sin\varphi \cos^2\vartheta \\ \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \| \underline{F}_{,\varphi} \times \underline{F}_{,\vartheta} \| = [4\cos^2\varphi \cos^4\vartheta + 4\sin^2\varphi \cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta]^{1/2}$$

$$= [4\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta]^{1/2} = [3\cos^4\vartheta + \cos^2\vartheta\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta]^{1/2} = [3\cos^4\vartheta + \cos^2\vartheta]^{1/2}$$

$$\nu = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \cos\vartheta \\ 2\sin\varphi \cos^2\vartheta \\ \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} / \cos\vartheta \sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}$$

$$\Rightarrow \langle \underline{F} | \nu \rangle = \begin{pmatrix} 1 + \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ 2\sin\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \cos\vartheta \\ 2\sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} / \sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}$$

$$= (2\cos\varphi\cos\vartheta + 2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + 2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + 2\sin^2\vartheta) / \sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}$$

$$= \frac{2\cos\varphi\cos\vartheta + 2}{\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}}$$

$$g_{11} = \langle \underline{F}_{,\varphi} | \underline{F}_{,\varphi} \rangle = +\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + \cos^2\varphi\cos^2\vartheta = \cos^2\vartheta$$

$$g_{12} = \langle \underline{F}_{,\varphi} | \underline{F}_{,\vartheta} \rangle = \sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta = 0 = g_{21}$$

$$g_{22} = \langle \underline{F}_{,\vartheta} | \underline{F}_{,\vartheta} \rangle = \cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta$$

$$= \sin^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta = 3\cos^2\vartheta + 1$$

$$g = \sqrt{\det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}} = \sqrt{\cos^2\vartheta\,(3\cos^2\vartheta + 1)} = \cos\vartheta\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}$$

$$\Phi_1 = \int_S \langle \underline{F} | \nu \rangle \, dO = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \langle \underline{F} | \nu \rangle \, g \, d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2\cos\varphi\cos\vartheta + 2}{\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}} \cos\vartheta\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}\, d\vartheta\, d\varphi$$

$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cancel{2\cos\varphi\cos^2\vartheta} + 2\cos\vartheta \, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi \cdot 2 \sin\vartheta \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 2\pi \cdot 2(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2\pi(2 - \sqrt{3})$$

2\. K: $\quad \underline{r} = \begin{pmatrix} 1 + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad r \in [0, \tfrac{1}{2}], \ \varphi \in [0, 2\pi]$

$\underline{r}_{,\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_{,r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ \nu = -(0, 0, 1)^T$

$g_{12} = -r\cos\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi = 0 = g_{21}$

$g_{22} = 1 \quad , \ g_{11} = r^2$

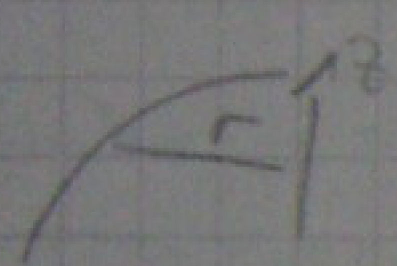
$g = \sqrt{\det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}} = \sqrt{r^2} = r$

$\langle E, \nu \rangle = \sqrt{3}$

$\Phi_2 = \int_K \langle \underline{E}, \nu \rangle \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} -\sqrt{3} \cdot r \, dr \, d\varphi = 2\pi \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \sqrt{3}/4\,\pi$

$\Rightarrow \Phi^1_{ges} = 2\pi(2 - \sqrt{3}) - 2\pi\,\sqrt{3}/8 = 2\pi\left(2 - \frac{9}{8}\sqrt{3}\right).$

(ii) Mit Satz von Gauss:



Wähle Zylinderkoord.: $\quad \underline{r} = \begin{pmatrix} 1 + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$r^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \ \Rightarrow \ r(z) = \sqrt{1 - z^2/4}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \ z \in [\sqrt{3}, 2]$

$|g| = r$

$\operatorname{div}\underline{E} = \langle \nabla | \underline{E} \rangle = 1 + 1 + 1 = 3.$

$$\begin{aligned}
\Phi^2_{ges} &= \int_{\sqrt{3}}^2 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(z)} dr \, (3r) \\
&= \int_{\sqrt{3}}^2 dz \ 2\pi \ \frac{3}{2} r^2(z) = \int_{\sqrt{3}}^2 dz \ 3\pi \left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \\
&= 3\pi\left[(2 - \sqrt{3}) - \frac{1}{12}(8 - 3\sqrt{3})\right] \\
&= 3\pi\left(2 - \sqrt{3} - 2/3 + \sqrt{3}/4\right) = 3\pi\left(4/3 - 3/4\sqrt{3}\right) = 2\pi\left(2 - 9/8\sqrt{3}\right) \\
&= \Phi^1_{ges}.
\end{aligned}$$

Q7

(a) $\underline{\nabla}(u\underline{F}) = (\underline{\nabla} u)\underline{F} + u(\underline{\nabla}\underline{F})$

$$\Rightarrow \int_G (\nabla u \cdot \underline{F})\, d\underline{x} = \int_G \underline{\nabla}(u\underline{F})\, dx - \int_G u(\underline{\nabla}\underline{F})\, dx$$

$$\parallel$$

$$\int_{\partial G} (u\underline{F}) \cdot \underline{\nu}\, do$$

Linearität von $\langle \cdot | \cdot \rangle$

$$\downarrow$$

$$(u\underline{F})\underline{\nu} = u\langle \underline{F} | \nu \rangle$$

$\square$

(b)

1. Setze $\underline{F} = \underline{\nabla} v$; v ist Potential von $\underline{F}$,

   $\operatorname{div} \underline{F} = \underline{\nabla}\underline{F} = \underline{\nabla}^2 v \underset{\uparrow}{=} \Delta v$

   Def. d. Laplace-Op.

2. Aus 1.:

   $$\int_{\partial G} u\langle \nabla v | \underline{n} \rangle\, do = \int_G \langle \nabla u | \nabla v \rangle + u\Delta v\, d\underline{x}$$

   $\Rightarrow$ rechte Seite d. Gl.:

   $$\int_G \langle \nabla u | \nabla v \rangle + u\Delta v\, d\underline{x} - \int_G \langle \nabla v | \nabla u \rangle + v\Delta u\, d\underline{x} =$$

   $$\int_G u\Delta v - v\Delta u\, d\underline{x}$$, weil $\langle \cdot | \cdot \rangle$ symmetrisch.

(c)

3 $\operatorname{div} \underline{F} = (y^2 - 4y + 4z^2 + 8z + 5 + x^2 - 2x)$

$\qquad = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4z^2 + 8z + 5$

Wir suchen nach kritischen Punkten, an denen ~~dann~~ die Divergenz extremal wird:

$$\left.\begin{array}{lll} \partial_x \operatorname{div} = 2x - 2 & \overset{!}{=} 0 \\ \partial_y \operatorname{div} = 2y - 4 & \overset{!}{=} 0 \\ \partial_z \operatorname{div} = 8z + 8 & \overset{!}{=} 0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bei $\underline{a}$ liegt der einzige kritische Punkt vor. Hier ist $\operatorname{div} \underline{F}(\underline{a}) = 1 - 2 + 4 - 8 + 4 - 8 + 5 = -4$. Bei $\underline{0}$ ist $\operatorname{div} \underline{F}(\underline{0}) = 5 > -4$, ergo liegt bei $\underline{a}$ eine Senke vor. Rund um $\underline{a}$ muss wegen Stetigkeit von $\underline{F}$ die div noch negativ sein. Da wir über das Gebiet mit der minimalen Divergenz integrieren wollen, suchen wir das Gebiet, wo $\operatorname{div} < 0$. Dieses G enthält $\underline{a}$ und hat den flachen Rand $\{ \underline{x} \mid \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) = 0 \}$:

$$\underbrace{x^2 - 2x} + y^2 - 4y + 4z^2 + 8z + 5 = 0 \qquad (*)$$

$$\underbrace{(x-1)}^2 - 1 + \underbrace{(y-2)}^2 - 4 + 4\underbrace{(z+1)}^2 - 4 + 5 = 0$$

$$\xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2 = 4$$

$\rightsquigarrow$ dies ist ein abgeplattetes Ellipsoid. In ξ-η-ζ-Koord. ist $\underline{a}$ dargest. als $\underline{0}$, liegt also definitiv im Ellipsoid.

$\rightsquigarrow$ $\mathfrak{F}$ ist genau das in $(*)$ beschr. Ellipsoid:

Nach Gauß ist $\int_{\mathfrak{F}} \langle \underline{F} | \nu \rangle \, d\sigma = \int_{\text{Inhalt von } *} \operatorname{div} \underline{F} \, d\underline{x}$,

und das hintere Integral geht über alle Punkte, wo $\operatorname{div} \underline{F}$ negativ ist.

4) Wenn div $V = 0$, dann muss gelten:
Betrachten wir ein Volumen, so muss der Fluss von V auf der gesamten Oberfläche verschwinden: Fließt irgendwo „etwas" in V ein, muss „es" wo anders rausfließen.

Untersuche div V:

$$\operatorname{div} V = \operatorname{div} \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|^n} = \operatorname{div} \frac{\underline{x}}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{n/2}}$$

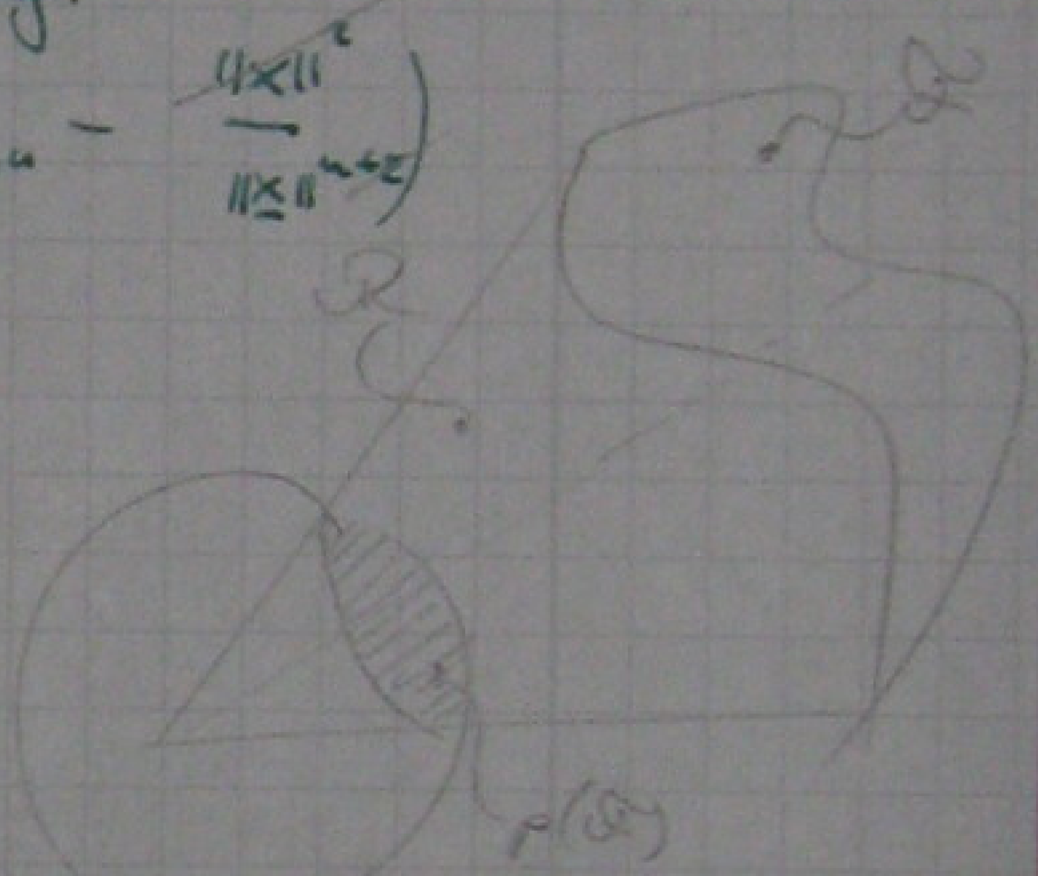
$$= \sum_i \partial_i \frac{x_i}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{n/2}}$$

$$= \sum_i \frac{1}{\|\underline{x}\|^n} - \frac{n}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} x_i \frac{x_i}{\|\underline{x}\|^{n+2}}$$

↑ innere Ableitung!

$$= \frac{n}{\|\underline{x}\|^n} - n \frac{\sum_i x_i^2}{\|\underline{x}\|^{n+2}} = n \left(\frac{1}{\|\underline{x}\|^n} - \frac{\cancel{\|\underline{x}\|^2}}{\|\underline{x}\|^{\cancel{n+2}}} \right)$$

$$= 0.$$



Integrieren wir nun also den Fluss $\langle V, \nu \rangle$ über die komplette Oberfläche

$$\mathcal{F} \cup p\mathcal{F} \cup \mathcal{R},$$

wobei $\mathcal{R}$ den Rand angibt, der von den Projektionsstrahlen erzeugt wird, so muss (wg. div $V = 0$) gelten:

$$\int_{\mathcal{F} \cup p(\mathcal{F}) \cup \mathcal{R}} \langle V, \nu \rangle \, do = 0.$$

$$= \int_{\mathcal{F}} \langle V, \nu \rangle \, do + \int_{p(\mathcal{F})} \langle V, \nu \rangle \, do + \int_{\mathcal{R}} \langle V, \nu \rangle \, do = 0$$

Wobei das letzte Integral verschwindet: V ist parallel zu den Projektionsstrahlen, also $\nu \perp V$ und damit $\langle V, \nu \rangle = 0$.
Das mittlere Integral ist über die Einheitssphäre, also $\|\underline{x}\|_2 = \|\underline{x}\|_2^n = 1$, dito $\nu = \underline{x}$, damit ist hier $\langle V, \nu \rangle = \|\underline{x}\|^2 = 1$, ergo $-\int_{\mathcal{F}} \langle V, \nu \rangle \, do = \int_{p(\mathcal{F})} 1 \, do = \left| \int_{\mathcal{F}} \langle V, \nu \rangle \, do \right|$
($\int_{p(\mathcal{F})} 1 \, do > 0$ da $1 > 0$!) $\square$