E10: Wechselstromwiderstände, Serienschwingkreis

Verfasser:
Michael Kopp
(Phy, BsC)

Gruppe:
4-006

Mitarbeiter:
Paul Manzel
(Phy, BsC)

Datum:
29.10.09

Betreuer:
Maurice Schlichtenmayer

Aufgabenstellung:

Bestimmung von Real- und Imaginärteil des komplexen Widerstandes eines Bauteils und der Resonanzfrequenz durch Brückenschaltungen.

Grundlagen:

In Wechselstromkreisen kann man Ströme und Spannungen mit komplexen Zahlen bzw. Funktionen darstellen, wobei in der Realität i.A. ~~da~~ nur die Realteile wirklich gemessen werden können. Bspw. beschreibt $I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$ einen sinusförmigen Stromverlauf, da $Re(I(t)) = I_0 \cos(\omega t)$ ist.

Bauteile wie Spulen und ~~Widerst~~ Kondensatoren zeigen im Gegensatz zu Widerständen frequenzabhängiges Verhalten; diese kann man sich durch imaginäre Zusätze zu den reellen Widerständen der Bauteile beschreiben; insbesondere beschreibt man mit den Imaginären Werten, wenn ein Bauteil die Phase des Stroms beeinflusst. Bspw. hat eine Spule bei Gleichstrom den Widerstand R_L und bei Wechselstrom $R_L + i\omega L$. (i.A. ist R_L vernachlässigbar).

Dank dieser komplexwertigen Widerstände (mit Z bezeichnet), kann man alle Wechselstromkreise mit

$$Z = U/I \qquad \text{bzw.} \qquad U = Z \cdot I$$

beschreiben. Für einen Strom $I = I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$ gilt bspw.

$$U = U(t) = i\omega L \cdot e^{i\omega t} = \omega L \cdot e^{i\pi/2} \cdot e^{i\omega t} = \omega L \cdot e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

Damit ist die messbare Spannung ~~U(t)=~~ $Re(U(t)) = \omega L \cos(\omega t + \pi/2)$.

Die Spannung ist um $\pi/2$ phasenverschoben worden.

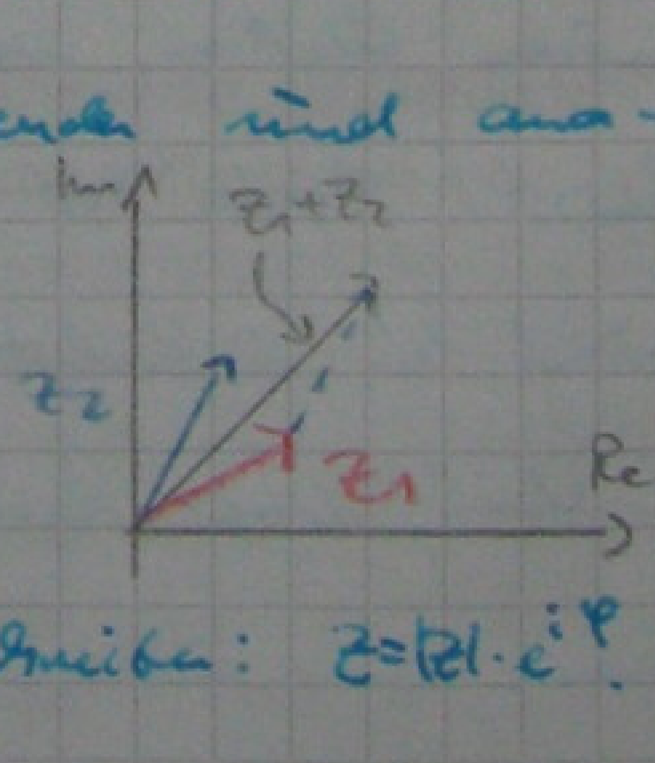
Bei einer Brückenschaltung kombiniert man (komplexe) Widerstände so, dass eine angelegte Spannung an einer best. Stelle verschwindet; dies ist nur bei einem genauen Verhältnis der Widerstände zueinander der Fall. Durch Kenntnis von 3 Widerständen ~~kann~~ kann man so den vierten bestimmen. Da dieser ~~Fr~~ frequenzabhängig ist, muss man Messungen für verschiedene Frequenzen durchführen.

Fragen:

(1) Sind die Widerstände in Reihe, kann man sie einfach addieren. Die komplexen Zahlen lassen sich als Zeiger im $\mathbb{R}^2$ darstellen $(Re(z), Im(z))^T$ und hier auch als solche addieren:

$$(Re(z_1), Im(z_1))^T + (Re(z_2), Im(z_2))^T = (Re(z_1+z_2), Im(z_1+z_2))^T.$$

Bei Parallelschaltungen muss man statt der Widerstände deren Reziprokwert – die Leitwerte – verwenden und analog rechnen.

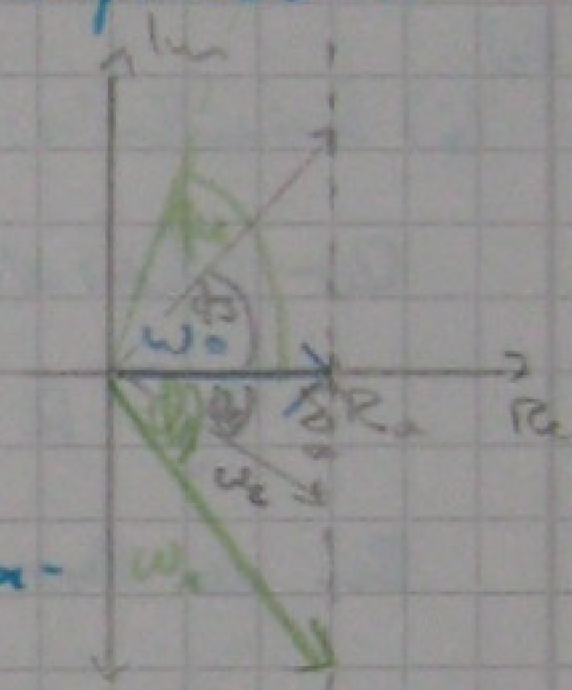


(2) Einen komplexen Widerstand kann man schreiben: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

Multipliziert man diesen mit einem Strom, dreht man den Zeiger des Stroms um φ. Es wird also ein neuer Realteil zu messen sein.

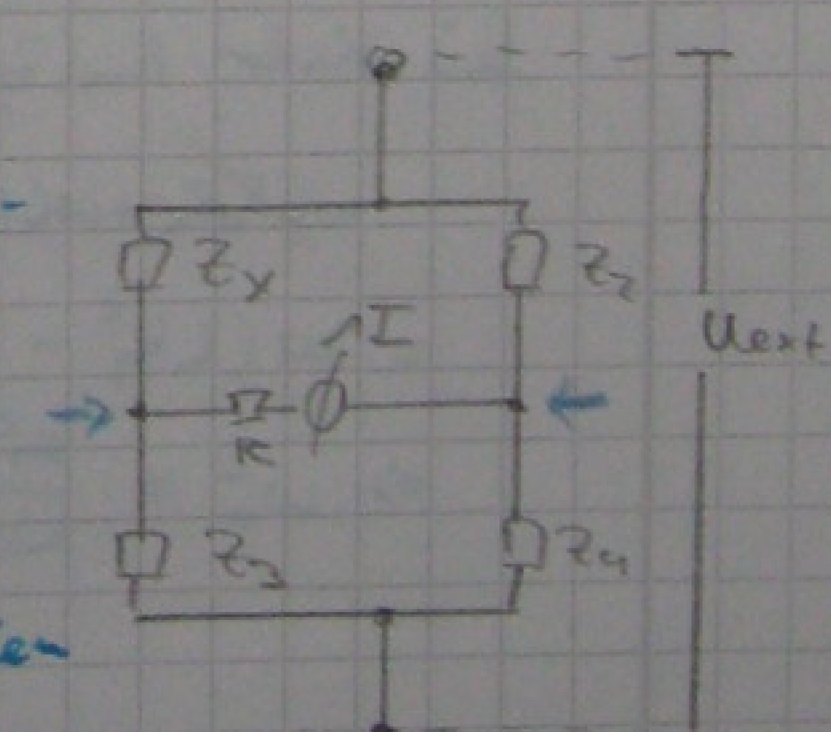
Eine Schaltung habe den komplexen Gesamtwiderstand Z_g. Bei verlustfreien Schaltungen ist $\mathrm{Re}(Z_g) = 0$, also $i\,\mathrm{Im}(Z_g) = Z_g$.
Diese Schaltung enthält nur Spulen/Kondensatoren, also $Z_g = \sum_j i\omega L_j + \sum_k \frac{1}{i\omega C_k}$ $= \sum_j i\omega L_j + \sum_k \frac{-i}{\omega C_k}$. Je größer ω wird, desto positiver wird dieser Imaginärteil. Auf die Phase hat dies jedoch keinen Einfluss; sie ist konstant bei $\phi = \pi/2$ (da $i = e^{i\pi/2}$). Was wenn $\omega \to 0$?

Eine verlustbehaftete Schaltung enthält noch Ohmsche Widerstände; also ist $\mathrm{Re}(Z_g) \neq 0$: $Z_g = \sum_\alpha R_\alpha + \sum_\beta i\omega L_\beta + \sum_\gamma \frac{-i}{\omega C_\gamma}$. Der Realteil $\mathrm{Re}(Z_g)$ ist von ω unabhängig, bei kleinen Frequenzen ist der ~~Realteil~~ Imaginärteil stark negativ – und damit auch die Phase (vgl. ω_1, ϕ_1). Nähert sich ω an die Resonanzfrequenz ω_0 ($\mathrm{Im}(Z_g(\omega_0)) = 0$) wird $|\mathrm{Im}(Z_g)|$ kleiner und ~~ϕ_2~~ die Phase weniger negativ (vgl. ω_2, ϕ_2). Für Frequenzen über ω_0 wird $\mathrm{Im}(Z_g)$ positiv und wächst; ~~ebenfalls~~ (vgl. $(\omega_3 < \omega_4), (\phi_3 < \phi_4)$).
Der Betrag ist für ω_0 am kleinsten und wächst für steigendes $|\omega - \omega_0|$ (geht für $|\omega - \omega_0| \to \infty$ gegen ∞).



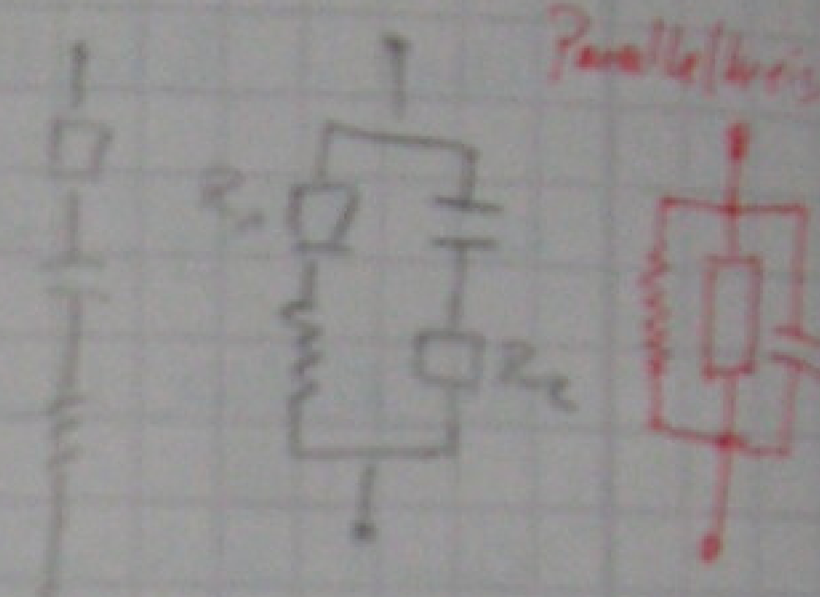
(3) Die Potentiale an den beiden mittleren Knoten (→) müssen gleich sein; dann ist kein Strom I detektierbar.
Da die Spannung U_{ext} an beiden ~~Kabeln~~ vertikalen Bahnen gleich ist, muss sie sich links und rechts identisch oberhalb und unterhalb der „Brücke" aufteilen. Dann gilt

$$\frac{Z_x}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}.$$



Soll Z_x eine Kapazität sein, kann man Z_3 ebenso als Kapazität wählen und Z_2, Z_4 als Ohmsche Widerstände; dann gilt:
$$\frac{i\omega C_3}{i\omega C_x} = \frac{C_3}{C_x} = \frac{Z_2}{Z_4}.$$
Soll Z_x eine Induktivität sein, so wählt man Z_2, Z_3 als Ohmsche Widerstände und Z_4 als Kapazität; dann gilt:
$$\frac{i\omega L_x}{R_3} = \frac{R_2}{1/i\omega C_4} = R_2 \cdot i\omega C_4 \Leftrightarrow \frac{L_x}{C_4} = \frac{R_2}{R_3}.$$
(Also: ja.)

naja... Parallelkreis



Serien- / Parallelkreis

(4)

(i) Serienkreis:

Der Widerstand des Systems ist
$$Z_g = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$
Bei der Resonanzfrequenz verschwindet $\mathrm{Im}(Z_g)$, also
$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

(ii) Parallelkreis:
$$Z_g = \left(\frac{1}{R_1 + i\omega L} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{i\omega C}}\right)^{-1} = \frac{(R_1R_2 + L/C) + i\left(\omega L R_2 - \frac{R_1}{\omega C}\right)}{(R_1+R_2) + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \cdot cc$$
$$= \frac{(R_1R_2 + L/C)(R_1+R_2) + \left(\omega L R_2 - \frac{R_1}{\omega C}\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + i\left(\left(\omega L R_2 - \frac{R_1}{\omega C}\right)(R_1+R_2) - (R_1R_2 + L/C)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{(R_1+R_2)^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$
Sei wieder $\mathrm{Im}(Z_g) = 0$:
$$\cancel{\omega L R_1 R_2} + \omega L R_2^2 - \frac{R_1^2}{\omega C} - \cancel{\frac{R_1 R_2}{\omega C}} - \cancel{\omega L R_1 R_2} + \cancel{\frac{R_1 R_2}{\omega C}} - \omega \frac{L^2}{C} + \frac{L}{\omega C^2} = 0$$
$$= \omega\left(L R_2^2 - L^2/C\right) - \frac{1}{\omega}\left(R_1^2/C - L/C^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{R_1^2/C - L/C^2}{L R_2^2 - L^2/C} = \frac{1/C}{L} \, \frac{R_1^2 - L/C}{R_2^2 - L/C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \sqrt{\frac{R_1^2 - L/C}{R_2^2 - L/C}}$$

Aufbau:

Es wird eine Brückenschaltung gemäß Abb. E10-4 mit den dort angegebenen Größen aufgebaut. Um eine grobe Abschätzung für die Resonanzfrequenz zu bekommen, wird der Kondensator maximal eingestellt und am Wechselstromgenerator eine Sinuswelle so lange in der Frequenz moduliert (Frequenz wird ab 200Hz gesteigert), bis die beob. Amplitude im Oszilloskop minimal wird.

Nun stellt man die Frequenz auf mehrere Werte unterhalb einer geschätzten Resonanzfrequenz und variiert jew. Kondensator und Widerstand (C_n bzw. R_n), bis die Amplitude minimal ist; es sollten mehr Messpunkte näher an der erwarteten Resonanzfrequenz liegen; insgesamt ca. 8-10.

Lässt sich die Brücke nicht mehr abgleichen, weil der Kondensator schon maximal eingestellt ist, baut man um zur Schaltung aus Abb. E10-5. Hier beginnt man bei einer hohen Frequenz, gleicht ab und vermindert die Frequenz usw. Wenn sich die Brücke nicht mehr abgleichen lässt, weil der Kondensator auf 0F eingestellt ist, ist die Messung beendet. Auch hier sollten insg. 8-10 Messpunkte genommen werden und diese dichter, je näher man sich der erwarteten Resonanzfrequenz nähert.

Für jede Frequenz ist (neben der Frequenz) das Wertepaar Widerstand/Kondensator, für die die Brücke (bestmögl.) abgeglichen war, zu notieren.

Während der gesamten Messungen muss man das Oszilloskop stets so skalieren, dass man die Maxima/Minima der Wellen im Bildschirm hat.

Messwerte:

Bei sehr großer Kapazität (1,222 µF) ungefähr abgeglichen mit R = 1160 Ω bei 1,44 kHz.

① Frequenz f [100 Hz], Widerstand [Ω], Kapazität [nF]

2	1230	46,00
4	1090	48,77
6	1060	54,00
8	1060	64,37
10	1060	84,46
11	1060	103,21
12	1060	135,65
13	1060	211,76
13,5	1060	296,61
14	1060	461
14,45	1060	1228

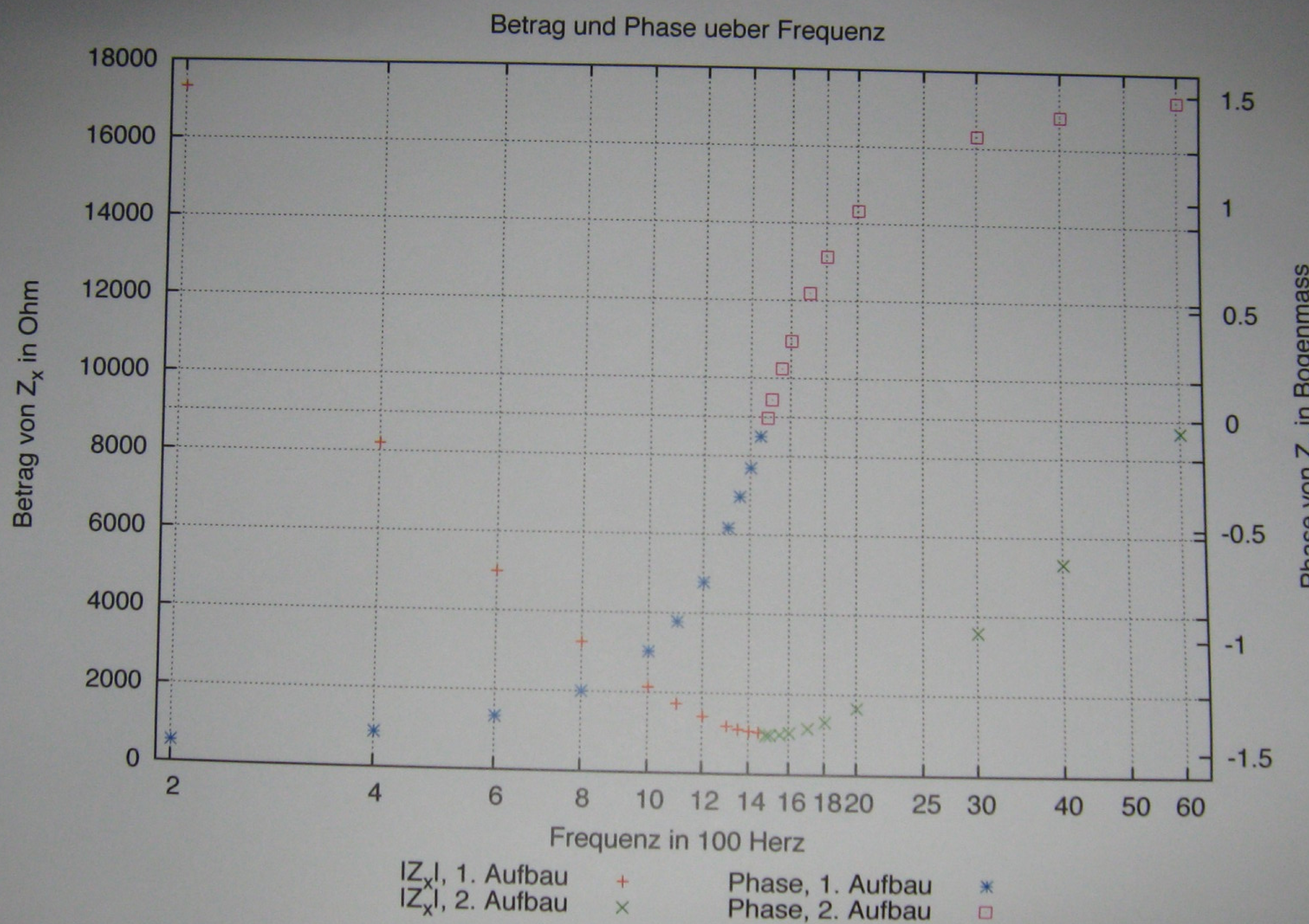
②

60	27470	10,41
40	24290	9,47
30	23290	8,13
20	22640	4,93
18	22520	3,58
17	22480	2,68
16	22370	1,63
15,5	22410	1,05
15	22380	0,40
14,08	22380	0,00

$R_2 = R_3 = R_4 = 4{,}7\,k\Omega$.

Frequenz (100Hz)	Widerstand*	Kapazität (nF)	Realteil*	Imaginärteil*	Betrag*	Phase
2,00	1230,00	46,00	1230,00	-17299,45	17343,12	-1,50
4,00	1090,00	48,77	1090,00	-8158,44	8230,94	-1,44
6,00	1060,00	54,00	1060,00	-4912,19	5025,26	-1,36
8,00	1060,00	64,37	1060,00	-3090,63	3267,35	-1,24
10,00	1060,00	84,46	1060,00	-1884,38	2162,06	-1,06
11,00	1060,00	103,21	1060,00	-1401,86	1757,50	-0,92
12,00	1060,00	135,65	1060,00	-977,73	1442,07	-0,75
13,00	1060,00	211,76	1060,00	-578,14	1207,41	-0,50
13,50	1060,00	296,61	1060,00	-397,47	1132,07	-0,36
14,00	1060,00	461,00	1060,00	-246,60	1088,31	-0,23
14,45	1060,00	1222,00	1060,00	-90,13	1063,83	-0,08
60,00	27470,00	10,41	804,15	8669,17	8706,39	1,48
40,00	24290,00	9,47	909,43	5257,58	5335,65	1,40
30,00	23290,00	8,33	948,48	3468,50	3595,85	1,30
20,00	22640,00	4,93	975,71	1368,52	1680,73	0,95
18,00	22520,00	3,58	980,91	894,40	1327,45	0,74
17,00	22480,00	2,68	982,65	632,35	1168,53	0,57
16,00	22370,00	1,63	987,48	361,98	1051,74	0,35
15,50	22410,00	1,05	985,72	225,89	1011,27	0,23
15,00	22380,00	0,40	987,04	83,28	990,55	0,08
14,80	22380,00	0,00	987,04	0,00	987,04	0,00

Größen mit * sind in Ohm angegeben



Betrag und Phase ueber Frequenz
Betrag von Z_x in Ohm
Phase von Z_x in Bogenmass
Frequenz in 100 Herz
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
25
30
40
50
60
$|Z_x|$, 1. Aufbau
$|Z_x|$, 2. Aufbau
Phase, 1. Aufbau
Phase, 2. Aufbau

Formeln:

- Abgleichbed. für erste Schaltung:

$$\frac{Z_x}{R} = \frac{R_n + \frac{-i}{\omega C_n}}{R} \Rightarrow \operatorname{Im}(Z_x) = -\frac{1}{\omega C_n} \qquad (1a)$$

$$\operatorname{Re}(Z_x) = R_n \qquad (1b)$$

- Abgleichbed. für zweite Schaltung:

$$\frac{Z_x}{R} = \frac{R}{\frac{1}{\frac{1}{R_n} + i\omega C_n}} = \left(\frac{1}{R_n} + i\omega C_n\right)\cdot R$$

$$\Rightarrow Z_x = R^2/R_n + i R^2 \omega C_n \Rightarrow \operatorname{Re}(Z_x) = R^2/R_n \qquad (2a)$$

$$\operatorname{Im}(Z_x) = R^2 \omega C_n \qquad (2b)$$

- Betrag einer komplexen Zahl:

$$\xi \in \mathbb{C}: \ \xi = (a + ib) \quad (a, b \in \mathbb{R}) \ : \ |\xi| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (3)$$

- Phase einer komplexen Zahl:

$$\phi(\xi) = \arctan(b/a) \qquad (4)$$

- Es sind: Z_x: zu bestimmender komplexer Widerstand des Serienschwingkreises, R_n, C_n: einstellbarer Widerstand bzw. Kondensator, ω: Kreis-Frequenz ($\omega = 2\pi f$), R: Ohm'sche Widerstände: $R = R_2 = R_3 = R_4$.

Auswertung:

- Für alle Daten (Messwerte siehe ~~Tab~~ eingeklebte Tabelle.
- Beispielrechnungen:

1. Aufbau, $f = 600\,\text{Hz}$: $\operatorname{Re}(Z_x) = 1060\,\Omega$, $\operatorname{Im}(Z_x) = -\frac{1}{2\pi\, 600\,\frac{1}{s} \cdot 54 \cdot 10^{-9}\,\frac{As}{V}}$ $\approx -4912{,}19\,\text{V/A} = -4912{,}19\,\Omega$. $|Z_x| = (1060^2\,\Omega^2 + 4912{,}19^2\,\Omega^2)^{1/2}$ $\approx 5025{,}26\,\Omega$. $\phi(Z_x) = \arctan\left(\frac{-4912{,}19\,\cancel{\Omega}}{1060\,\cancel{\Omega}}\right) \approx -1{,}36 \mathrel{\hat{=}} -77{,}82^\circ$.

2. Aufbau, $f = 1700\,\text{Hz}$: $\operatorname{Re}(Z_x) = \frac{4700^2\,\Omega^{\cancel{2}}}{22480\,\cancel{\Omega}} \approx 982{,}65\,\Omega$. $\operatorname{Im}(Z_x) =$ $4700^2\,\Omega^{\cancel{2}} \cdot 1700\,\frac{1}{s} \cdot 2\pi \cdot 2{,}68 \cdot 10^{-3}\,\cancel{\Omega^{-1}} \approx 632{,}35\,\Omega$. $|Z_x| = (982{,}65^2\,\Omega^2 +$ $632{,}35^2\,\Omega^2)^{1/2} \approx 1168{,}53\,\Omega$. $\phi(Z_x) = \arctan\left(\frac{632{,}35\,\cancel{\Omega}}{982{,}65\,\cancel{\Omega}}\right) \approx 0{,}571 \mathrel{\hat{=}} 32{,}76^\circ$.

In der beiliegenden Graphik sieht man, dass der Betrag des Serienschwingkreises für eine best. Frequenz minimal wird; gleichzeitig handelt es sich dabei um den Punkt, wo die Phase verschwindet. Diese ~~fr~~ Frequenz ist also die Resonanzfrequenz; sie ergibt sich aus dem Schaubild zu

$\underline{2\pi\omega_r \approx 1{,}48\,\mathrm{kHz}.} = f_r$

Möchte man zusätzlich L und C des Serienschwingkreises wissen, so kann man den Imaginärteil als Funktion

$$\mathrm{Im}(Z_x(\omega)) = i\omega L - \frac{1}{\omega C}$$

darstellen und diese an die Daten anfitten. Es ergeben sich mit gnuplot:

~~L = 0,2482559~~ ~~C = 4,546 \cdot 10^{-8}~~

$L = 0{,}2482\,\mathrm{H}$ $C = 4{,}546 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{F}$.

Als Kontrolle kann man ω_r nach Aufg. 4 nachrechnen und erhält damit: $\underline{f_r = \cancel{1{,}498\,\mathrm{kHz}}}$ 1,498 kHz

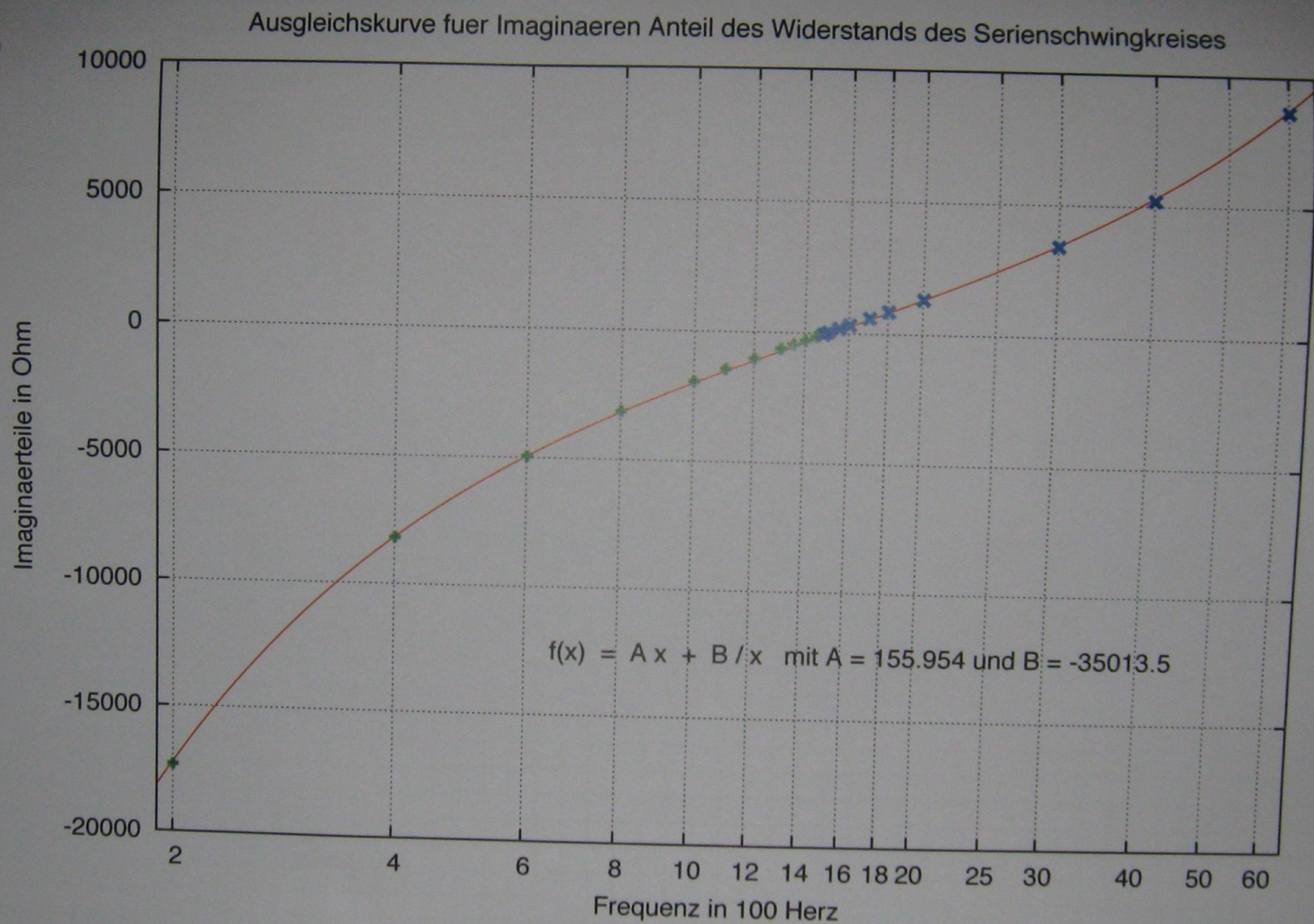
Dieser Wert ist vermutlich ~~f~~ sogar exakter als der von oben, weil hier kein ~~Aug~~ Augenmaß nötig ist und weil auch sicherlich alle Messpunkte in die Berechnung eingehen, ~~also~~ also Fehler besser ausgeglichen werden.

<u>Zusammenfassung:</u>

Unser Serienschwingkreis hatte die Bauteile:

Spule mit $L = 0{,}2482\,\mathrm{H}$, Kondensator mit $C = 0{,}4546\,\mu\mathrm{F}$ und Widerstand mit $R = 1{,}060\,\mathrm{k}\Omega$,

und eine Resonanzfrequenz f_r zwischen 1,48 kHz und 1,498 kHz.



Sehr gut! E.T. 9.11.09