Analysis IV
Uebung 11

Michael Kopp

July 8, 2010

[1]

(a) $f'(x) = \{f'(x)\} + [f]\,\delta(x) = \{f'(x)\}$

$$= \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases} = 2\theta(x) - 1$$

$f''(x) = 2\delta(x)$

$f'''(x) = 2\delta'(x)$ def. via $(\delta', \varphi) = -\varphi'(0)$

(b) $(f_n, \varphi) = \int_{K = \mathrm{supp}(\varphi)} \sin(nx)\,\varphi(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ wg.

Lemma von Riemann. Also $f_n \longrightarrow 0 \in \mathcal{D}$.

[2] (a) Jede $f \in \mathcal{D}'$ hat eine Stammfunktion $F \in \mathcal{D}'$, die bis auf eine Konstante eindeutig ist.

Eine Stammfunktion zu $T' = 0$ ist 0 da $0' = 0$, da bis auf Konst: $T = 0 + c \cdot 1 = c\,1$.

$1 c$ ist [illegible]

(a) Jede $f \in \mathcal{D}'$ hat eine Stammfunktion $F \in \mathcal{D}'$, die bis auf eine Konstante eindeutig ist.

Eine Stammfunktion zu $T' = 0$ ist 0 da $0' = 0$, da bis auf Konst: $T = 0 + c \cdot \mathbb{1} = c\,\mathbb{1}$.

$\mathbb{1}c$ ist eine reguläre Distr. denn $\mathbb{1}c \in L^1_{loc}$:

$$\int_I \mathbb{1}c \, dx = c \cdot |I|$$

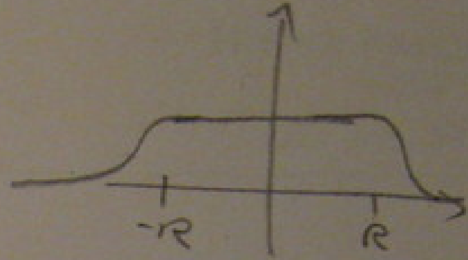
I endl. Intervall
$|I|$ Länge von I

(b) $g_c(x) := \int_c^x f(\xi)\, d\xi \qquad \tilde{g}_c{}' = f \qquad x, c \in G$

da g das Integral einer C^n-Fkt ist, ist $g \in C^{n+1}$.

l_g ist ein lin. stetiges Funktional wenn $g \in L^1_{loc}$; das ist erfüllt, da auf jedem kompakten Intervall g beschränkt ist.

$\boxed{3}$ Def. $\varrho_R(x) := \begin{cases} 1 & |x| < R \\ 0 & |x| > R + \delta \\ C^\infty\text{-glatt dazwischen} \end{cases}$ $\quad \delta > 0$



Wähle R so groß dass $G \subseteq [-R, R]$.

$\cos(nx) \cdot \varrho_R$ und $\sin(nx)\varrho_R$ $\quad n \in \mathbb{N}_0$ liegen alle in $C_0^\infty(G)$, sind also zulässige Testfunktionen.

$$\int_G f(x) \cos(nx) \varrho_R(x)\, dx = \int_G f(x) \cos(nx)\, dx \qquad (*)$$

lässt sich mit einer linearen Transformation auf

$$G \longrightarrow (-\pi, \pi) : (a,b) \ni \xi \longmapsto -\pi + \frac{\xi}{b-a}$$

transformieren. Da $f \in L^1_{loc}$ ist $f \in L^1(G)$.

$(*)$ ist damit das Bestimmungsintegral der Fourier-Koeffizienten von f.

Da nach Voraussetzung diese alle verschwinden, lässt sich mit einer linearen Transformation auf

$$G \longrightarrow (-\pi, \pi) : (a,b) \ni \xi \longmapsto -\pi + \frac{\xi}{b-a}$$

transformieren. Da $f \in L^1_{loc}$ ist $f \in L^1(G)$.
(*) ist damit das Bestimmungsintegral der Fourierkoeffizienten von f.
Da nach Voraussetzung diese alle verschwinden, und nach Fejér die Cesarosumme der Fourierreihe in L^1 gegen f konvergiert — die Summe aber immer 0 ist — muss $f = 0$ f.ü. gelten.
Wenn S nicht zusammenhängend ist, ignoriert man einzelne Punkte und betrachtet jedes der Teilintervalle S_i analog zu oben.

Für die Verallg. auf $\mathbb{R}^n$ wende SV Fubini in (*) an; die Überlegung ist analog.