7.4. Ladung im äußeren Feld

20.1.10 Die Probeladung q soll so klein sein, dass sie das äußere Feld nicht stört.

Wir wollen ein Wirkungsintegral aufstellen. Betrachte dazu die potentielle Energie einer Ladung q im statischen Potential φ: $\quad V = q \cdot \varphi$.

Wir suchen eine Lorentz-invariante Version dieses Ausdrucks. ~~Kd∫dt~~ $\cancel{q\varphi = j_\mu A^\mu}$ Dies tun wir, indem wir mithilfe der Stromdichte j^μ die Ladung an das äußere Feld koppeln:

Wirkungsintegral:

$$S = \underbrace{-mc\int ds}_{S_M} \underbrace{- \frac{1}{c^2}\int j_\mu A^\mu \, d^4x}_{S_W \text{ (Wechselw.)}}$$

Problem: das erste Integral ist nicht eichinvariant!

Dies ist der minimale Ansatz für S, der Sinn macht, und „educated guess".

Da $j^0(t,\vec{x}) = c \cdot \rho$, untersuchen wir die Ladungsdichte für ein punktförmiges Teilchen: $\rho = q \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}(t))$

$\vec{x}(t)$ ist Trajektorie des Teilchens, $\vec{x}$ das Argument von ρ:

$$j^0(t,\vec{x}) = c \cdot q \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) = q \cdot \frac{dx^0}{dt}\delta(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

$x^0 = ct$
$dx^0 = c\,dt$

Analog ist die Stromdichte:

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = q \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

$d\vec{x}/dt = \vec{v}$

Damit ist:

$$S_W = -\frac{1}{c}\int j_\mu A^\mu \, d^3x \, dt = -\frac{q}{c}\int A_\mu \frac{dx^\mu}{dt}\, dt$$

$dx_0 = c\,dt$

$$S = -\int \left(mc\,ds + \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu\right)$$ bei geg. Inertialsyst.

$$= \int \underbrace{\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v} - q\varphi\right)}_{\boxed{L \text{ (Lagrange)}}} dt$$

Für den Verallg. Impuls gilt: $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\cdot\vec{A}$ (*)

Damit kann man den Hamiltonian bauen:

20.1.'10

$$H = \vec{p}\,\vec{v} - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\varphi$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$$

Für $\vec{p}^* = \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ folgt mit (*):

$$\vec{p}^* = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \vec{p}^{*2} = \frac{m^2v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v^2 = \frac{p^{*2}}{m^2 + p^{*2}/c^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m^2}{m^2 + \frac{p^{*2}}{c^2}} \Rightarrow \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{p^{*2}c^2 + m^2c^2}$$

Damit kann man den Hamiltonian umschreiben:

$$\boxed{H = \sqrt{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 c^2 + m^2c^2} + q\varphi}$$

λ ist allg. Bahnparam.

Für eine Bew'gl. aus der invarianten Wirkung:

$$S = -\int \left(mc\, \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \frac{q}{c}\frac{dx^\mu}{d\lambda}A_\mu(x) \right) d\lambda$$

Wichtig: A hängt von x ab, damit vom durch-laufenen Weg

Mit ELG:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{mc\,\frac{dx_\mu}{d\lambda}}{\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}} + \frac{q}{c}A_\mu(x) \right) - \frac{q}{c}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} = 0$$

Sei $\lambda = \tau$, mit $u^\mu u_\mu = c^2$:

$$m\frac{du_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c}\frac{dA_\mu(x)}{d\tau} - \frac{q}{c}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} = 0$$

↳ $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ da $\frac{dx^\mu}{d\tau} = u^\mu$!

c^2 ist Ergebn. d. Wurzel im Nenner, kürzt c

Setze $\frac{dA_\mu(x)}{d\tau} = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}$ ein, dann folgt:

$$m\frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)u^\nu$$

Weil $p^\mu = c\cdot u^\mu$; $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}p^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu}$$

Diese Gl. ist offensichtlich Lorentz-invariant, außerdem

20.1.10 eichinvariant.

Im bzg. Inertialsystem:

$$p^0 = E/c\,, \quad \vec{p} = m\gamma\vec{v} \qquad , \quad u^\mu = (c\gamma, \gamma\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q\cdot\vec{E} + \frac{q}{c}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \text{(Lorentz-Kraft)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma\frac{dp^0}{dt} = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{q}{c}\cdot F^{0\nu}u_\nu = \frac{q}{c}\,\vec{E}\,\vec{v}\,\gamma$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}E = q\,\vec{E}\cdot\vec{v}$$

<u>Interpretation</u>: Bewegt sich das Teilchen aufgrund der Lorentz-Kraft, so leistet das E-Feld Arbeit mit der Leistung $q\vec{E}\vec{v}$.

Das B-Feld leistet keine Arbeit!

7.5 Eichinvarianz & Ladungserhaltung

SRT

20.1.'10

$$S_w = -\frac{1}{c^2}\int j_\mu A^\mu \, d^4x$$

Wir nehmen eine Eichtransformation vor:

$$A_\mu \mapsto \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \phi$$

Die Wirkung ändert sich zu:

$$\tilde{S}_w = S_w - \frac{1}{c^2}\int \left(\cancel{\partial_\mu} j^\mu \partial_\mu \phi\right) d^4x$$

Die Ladungserhaltung ist $\partial_\mu j^\mu = 0$, damit kann man ∂_μ vor das j^μ ziehen, weil $\partial_\mu(j^\mu\phi) = (\partial_\mu\phi) j^\mu$.

$$\tilde{S}_w - S_w = -\frac{1}{c^2}\int \underbrace{\partial_\mu\left(j^\mu\phi\right)}_{\text{totale Vierdivergenz}} d^4x = \tilde{S}_w - S_w = 0$$

Wirkung ist eichinvariant

Mit dem Satz von Gauß kann man das Integral umschreiben als Randintegral über $j^\mu\phi$. ~~Das~~ $j^\mu\phi$ wissen wir jedoch, dass es auf dem Rand verschwindet, weil unsere Variation genau so gewählt ist.

Speziell für die Ladung gilt:

$$S_w = -\int \frac{q}{c}\frac{dx^\mu}{d\lambda} A_\mu(x)\, d\lambda \quad \text{, damit}$$

$$\tilde{S}_w - S_w = -\int \frac{q}{c}\underbrace{\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu}}_{d\phi/d\lambda} d\lambda = -\frac{q}{c}\Big(\underbrace{\phi(x(\lambda_E)) - \phi(x(\lambda_A))}_{0}\Big)$$

Man sieht also:

Die Ladungserhaltung und die Eichinvarianz der Wirkung sind sehr eng verknüpft.

7.6 Wirkungsintegral der Felder und Feldgleichungen

Bisher hatten wir die Maxwell-Gl. nur „hingeschrieben"!
Jetzt wollen wir sie selbst herleiten. Dazu allgemein:

ϕ beschreibt ein Feld, wobei $\phi_k(t,\vec{x})$ ($k=1,2,3,\dots$) seine Komponenten sind.

Vgl:	Teilchen	Felder
Generalisierte Koord.	$q_i(t)$	$\phi_k(t,\vec{x})$
Unabh. Var.	$i,\ t$	$k,\ t,\ \vec{x}$ ← Int. über Raum
Lagrange-Fkt	$L=\sum_i L_i(q_i,\dot{q}_i)$	$L=\int \mathcal{L}(\phi_k,\partial_\mu\phi_k)\,d^3x$ ← Lagrange-Dichte
Wirkung	$S=\int L\,dt$	$S=\int L\,dt$ ← Int. über Zeit zusätzlich

Jedes Teilchen befindet sich zu festen t an einem Punkt. Ein Feld muss stetig überall def. sein. Als gen. Koord. muss man dann die Komponenten verwenden.

Für ein elektromag. Feld:

$$\phi_k \longrightarrow A^\mu \qquad \partial^\mu\phi_k \longrightarrow \partial^\mu A^\nu \quad \text{bzw.}\ F^{\mu\nu}$$

Für relativistische Feldtheorie:

$$S=\int \mathcal{L}\,d^3x\,dt = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\,d^4x$$

Da d^4x Lorentz-invariant ist, muss $\mathcal{L}$ ebenso L.i. sein;
$\mathcal{L}$ ist Skalar.

Mit dem Hamiltonschen Prinzip $\delta S=0$ gilt:
Relativ zu der Form, die ϕ tatsächlich annimmt, variieren wir ϕ an jedem Ort, zu jeder Zeit ein wenig (infinitesimal) und die Wirkung soll stationär sein; wir „wackeln" an jeder Stelle/Zeit am Feld.

$$\delta S = \frac{1}{c}\int d^4x \left(\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\,\delta\phi_k(x^\mu) + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)}\,\delta(\partial_\mu \phi_k(x^\mu))\right)$$

Weil die [illegible] Abl. ∂_μ eine lokale Änderung beschreibt,

δ eine lokale Variation, vertauschen δ, ∂_μ :

$$\delta(\partial_\mu \phi_k) = \partial_\mu(\delta\phi_k)$$

Mit partieller Integration folgt:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int d^4x \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)}\right)\delta\phi_k \overset{\text{sei}}{\equiv} 0$$

wobei die Randterme verschwinden, weil hier nicht variiert werden soll.

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} = 0}$$

Dies ist die ELG für Feldgleichungen („Feldgleichungen“)

Wir suchen eine Lagrangedichte ~~L~~ $\mathcal{L}$ für das elektromagn. Feld, welche Lorentz-inv. ist. ~~[illegible]~~