II
Was bringen eigentlich Integrale bzw. wie rechnet man mit ihnen?

Oft fällt es schwerer Textaufgaben zu lösen, da man zwar Stammfunktionen, etc. bilden kann, aber nicht genau weiß, was das alles bedeutet.
Eine wichtige Faustregel soll anhand der Geschwindigkeit verdeutlicht werden:
Schauen wir uns den Weg an, den man zurück legt, erhält man z.B. 20 m, das sagt uns nur, wie weit man gekommen ist.
Interessiert uns aber die Steigung in einem genauen Punkt, will man praktisch die Geschwindigkeit berechnen, das heißt, neben der Strecke wird die dafür benöitgte Zeit betrachtet. Als Einheit bekommt man nun m/s, oder auch umgeformt km/h. Hier kann man sich merken, dass normalerweise die obere Einheit auf die x-Achse, und die untere Einheit auf die y-Achse abgetragen werden. Zeichnet man ein m/s Diagramm, ist also die x-Achse die Strecke, die y-Achse die Zeit.
Interessiert uns jetzt widerum die Steigung im einzelnen Punkt bei der Geschwindigkeit, erhält man ja die Beschleunigung. Man trägt praktisch die Geschwindigkeit auf dei x-Achse ab, und die Zeit auf die y-Achse, teilt man hier erneut x-Achse durch y-Achse, erhält man $(m/s)/s = m/s^2$, die bekannte Einheit der Beschleunigung.
Würde man dies wieder ableiten, kann man jetzt wohl daraus schließen, dass sich der Nenner einfach immer um eine Potenz erhöht. Die nächste Ableitung hat also die Einheit m/s^3, etc. .
Da die Aufleitung das Gegenteil der Ableitung ist, verfährt man hier genau andersrum. Hat man die Geschwindigkeit in m/s gegeben, und möchte die Strecke wissen, leitet man die Funktion auf, das heißt, man vermindert die Hochzahl im Nenner stets um 1 --> m/s wird zu m/s^0, und da s^0 = 1 --> man erhält die Einheit Meter.

Dieses Wissen lässt sich gewinnbringend auf diverse Aufgaben anwenden.
Ich zitiere dazu eine Aufgabe aus dem Buch (Seite 90/11.)
"Für das Wachstum einer Hopfenpflanze wird folgende Modellannahme getroffen: die Wachstumsgeschwindigkeit w(t) [in cm/Tag] steigt innerhalb 40 Tagen linear von 0 auf 25. Anschließend nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit linear innerhalb 30 Tage wieder auf 0 ab. Um wie viel wächst die Pflanze insgesamt?"

Es ist also nach der Strecke gefragt, und gegeben ist die Geschwindigkeit. Was zu tun bleibt, ist das Integral zu berechnen, also den Flächeninhalt unter der Kurve. Das ist hier sogar sehr billig, wenn man die Aufgabe und das Prinzip verstanden hat. Eigentlich zeichnet man sich nur ein Dreieck auf, und berechnet den Flächeninhalt davon, wie man es in der Mittelstufe lernt (1/2 * Grundseite * Höhe), und schon hat man das gesuchte Ergebnis. Vermeintlich komplizierte Aufgaben lassen sich also oft mit relativ einfachen Mitteln lösen.

Die nächste Aufgabe bietet ein recht ähnliches Szenario. Hier handelt es sich um einen gegebenen Kohlenstoffdioxidverbrauch in ml/h, gesucht wird dann der reine Kohelnstoffdioxidverbrauch in ml, das heißt ohne "h" --> also wieder die Funktion aufleiten, Grenzen einsetzen und fertig.

Aus diesen Tatsachen lässt sich schon ahnen, wofür Integrale vor allem gebraucht werden, nämlich um Flächen unter, bzw. zwischen Kurven zu berechnen.

Dazu ist es von Nutzen Stammfunktionen bilden zu können, oder auf Aufleitungen. Etwas unangenehmere Funktionen sollen deshalb im Folgenden betrachtet werden.

Zuerst etwas äußerst wichtiges. Ist in einer Aufgabe nach der Stammfunktion gefragt (es geht also nicht um Integralrechnung mit Grenzen, etc.), ist ans Ende ein "+c" zu schreiben, vergisst man das, kann es ordentliche Punktabzüge geben.
Dies soll an einem Beispiel illustriert werden:
$f(x) = x^2$
Steht nun in der Aufgabe: Bilde DIE Stammfunktion, reicht es nicht
$F(X) = (1/3) * x^3$
zu schreiben, denn bspw. $F(X) = (1/3) * x^3 + 7$ ergibt abgeleitet eben genau $f(x) = x^2$, genau so wie $F(X) = (1/3) * x^3 + 1889283$.
Das eine Beispiel $F(X) = (1/3) * x^3$ ist ein Spezialbeispiel, nämlich wenn $c = 0$ ist.
c □ℝ, das heißt, c nimmt beliebige werte an, solange eben kein x dabei enthalten ist.

Steht in der Aufgabe aber "Bilde EINE Stammfuktion", würde hier $F(X) = (1/3) * x^3$ genügen, denn diese Stammfunktion ist ja e i n e , also eine Möglichkeit.

Jetzt speziell zu etwas schwereren Aufleitungen.
Aufgabe: Leite $(2x + 5)^3$ auf.
Hierzu gibt es jetzt eine Regel, die des öfteren nicht all zu bekannt ist. Diese steth im Buch auf Seite 84 im Kasten hinter (Lineare Verkettung):
$f(x) = u\ (rx + s)$ □$F(x) = (1/r)\ U\ (rx + s)$

Das heißt, leiten zunächst das Äußere auf, dazu kann man sich bei Problemen vorstellen, in der Klammer stünde nur x, ohne irgendwas drum rum, hier ginge die Aufleitung:
(1/4) (x)^4, dann setzen wir einfach für x wieder den gesamten Klammerinhalt ein □(1/4) (2x + 5)^4 somit haben wir die "äußere Aufleitung". Das reicht aber noch nicht vollkommen. Wir müssen vor die Klammer auf noch 1/(die Zahl, die vor x steht) schreiben, in diesem Fall also 1/2
□(1/2) * (1/4) (2x + 5)^4 = (1/8)*(2x + 5)^4 +c
und nun hat man die gesamte Aufleitung.

Es bietet sich an, dies an einigen Beispielen zu üben:
- $(5x + 7)^2$
- $(3x + 1)$
- $(4x + 13)^3$
- $\cos(2x)$
- $\sin(4x)$
- $\cos(3x + 5)$
- $\sin((2k-1)*x)$

etc.

Die anderen Aufleitungsregeln dürften soweit klar sein.
Noch etwa wichtiges: Bisher ist es anhand des Schulstoffes nicht möglich "Mal-Rechnungen" und "Geteilt-Rechnungen" in denen mehrere x vorkommen aufzuleiten.
Beispiel:

$f(x) = \sin(x) \cdot x$

so etwas kann man natürlich aufleiten, nur lernt man in der Schule normalerweise nicht die nötigen Mittel dazu, auch wenn diese sehr einfach zu beschaffen sind. (vgl. Partielle Integration) (Bei Interesse, an mich wenden)

anders dagegen kann man

$f(x) = \sin(x) + x$

aufleiten, hier leitet man einfach sin(x) auf und addiert dies zur Aufleitung von x (Regel 2 auf Seite 84).

Was aber, wenn suggeriert wird, dass man solche Funktionen, die eben als nicht aufleitbar deklariert wurden, aufleiten solle?
Dazu bitte im Buch Seite 86/ 11. und 12. betrachten.

Aufgabe 11: Man soll überprüfen, ob die angeführten Aussageb stimmen, wie aber, wenn man die Funktion nicht aufleiten kann?
□Man kann ja einfach die angegebene potentiell Stammfunktion ableiten, und das Ergebnis mit der Funktion überprüfen, so umgeht man den Weg der Aufleitung.

Aufgabe 12: Hier sollte man sich an die Regeln des Bruchrechnens erinnern.
□$f(x) = \frac{(x^2 + 2x)}{x^4} = \frac{(x^2)}{x^4} + \frac{(2x)}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$
den letzten Ausdruck kann man nun mit bekannten Aufleitungsregeln aufleiten. Analog bei b) - d)

Oft kommen Aufgaben à la "Bestimme eine Stammfunktion von f mit $f(x) = (2x + 1)^3$, die an der Stelle 1 den Funktionswert 4 annimmt, vor.
Das ist eine interessante Aufgabe um zu erkennen, dass das "+c" doch ab und zu auch nützlich sein kann. Denn leitet man die Funktion auf, und macht die Punktprobe, setzt also für x=1 und für y=4 ein, merkt man, da stimmt noch was nicht, wenn man eben das "+c" vergessen hat. Man muss also ein "c" finden, damit die Aussage erfüllt ist. Diese Aufgabe soll vom Leser durchgerechnet werden. (Wenn c = -6,125 rauskommt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis stimmt, relativ hoch.)

Noch können aber nicht alle gewünschten Flächen so einfach berechnet werden. Dazu eine Aufgabe im Buch auf Seite 104 (Aufgabe 3).
Hier sollen Flächen berechnet werden, die nicht auf Anhieb zu erschließen sind. Nehmen wir beispielsweise Figur 3.
Wie soll man die Fläche berechnen?
Mein Vorschlag (es gibt mehrere Möglichkeiten):

Das gesamte Quadrat hat ja den Flächeninhalt 16 (auf x-Achse von 0 bis 4, auf y-Achse von 0 bis 4), bestimmt man nun das Integral unter der Funktion von $\sqrt{8}$ bis 4 und addiert dies zum Rechteck, das auf der x-Achse von 0 bis $\sqrt{8}$, und auf der y-Achse von 0 bis 2 geht, hat man von diesen 16, alles Nichteingefärbte berechnet.

□16 - (berechnete Fläche) = eingefärbte, gesuchte Fläche