25.1.'10

- $\|\varphi \circ \psi\| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$:

$\|\varphi \circ \psi\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|\varphi(\psi(v))\|$ $\qquad w = \psi(v) \Rightarrow \hat{w} = \psi(v) / \|\psi(v)\|$

(Dies gilt für $\psi(v) \neq 0$, sonst $w = \hat{w} = 0$.)

$\|\varphi \circ \psi\| \leq \sup_{\|\hat{w}\| \leq 1} \|\varphi(\hat{w})\| \cdot \sup_{\|v\| \leq 1} \|\psi(v)\| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ □

Spezialfall:

$V = \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \max_i |x_i|$

Dann ist $\varphi \in H(V)$ geg. durch $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\varphi: x \mapsto Ax$,

$\|A\| := \|\varphi\|$.

$\|A\|$ kann durch a_{ij} angegeben werden!

Def.: exp für Matrizen

Für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ def.

$$\exp(B) := \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$$

$\exp(B)$ existiert da:

$$\Big\| \sum_{k=m}^{r} \frac{1}{k!} B^k \Big\| \underset{\text{Dreiecksungl., Homog. v. } \|\cdot\|}{\leq} \sum_{k=m}^{r} \frac{1}{k!} \|B^k\| \underset{\text{Lemma 1}}{\leq} \sum_{k=m}^{r} \frac{1}{k!} \|B\|^k - \exp(\|B\|)$$ □

Satz 1: $\exp(tA)x_0$ löst $x' = Ax$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

Dann hat $x' = Ax$ genau eine Lösung $x(t)$ mit $x_0 = x(0) = 0$

und es gilt

$$x(t) = \exp(tA)\, x_0 .$$

Insbes. ist diese ~~d~~ Lös. für alle $t \in \mathbb{R}$ erklärt.

27.1.'10 Bem.: Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist dieses $x(t)$ die Lösung, da, außerdem diff'bar und eindeutig — jedenfalls lokal.

Am

27.1.10

Folgerung 1 $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$

Die Abb.

$$\exp\ \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n};\ t \mapsto \exp(tA)$$

ist diff'bar, und es gilt

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\cdot\exp(tA)$$

Folgerung 2: $\underline{x}' = A\underline{x}$ hat genau eine Lös, für alle t def.

Es gibt genau eine Lösung des AWP, und diese „lebt" für alle $t \in \mathbb{R}$

Folgerung 3: $\underline{x}' = A\underline{x}$ hat n-dim Lösungsraum

Die Lösungen von $\underline{x}' = A\underline{x}$ bilden einen n-dim Lösungsraum (IK-VR). Zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ ist durch

$$\mathcal{L} = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n ; \varphi' = A\varphi\} \to \mathbb{K}^n;\ \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

ein Isomorphismus gegeben.

Beweis:

Sei $t_0 = 0$.

Die Abb. ist linear $\leadsto$ sie erfüllt VR-Struktur.

Zu $\underline{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ sei $\varphi_{\underline{x}_0}(t) = \exp(tA)\,\underline{x}_0$. Dann ist

$\underline{x}_0 \mapsto \varphi_{\underline{x}_0}$ linear. S_0 ist surjektiv, denn zu $\varphi \in \mathcal{L}$ ist $\varphi = \varphi_{\varphi(0)}$ und injektiv wegen Lipschitz-Stetigkeit, weil dann die Lösung eindeutig ist.

Für $t_0 \neq 0$: Schiebe Zeit $t \mapsto \tau = t - t_0$, betrachte analog $\exp((t-t_0)A)\,\underline{x}_0$ wie oben. $\square$

Bemerkung: Basis des Lösungsraum

Seien $\{e_i\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{K}^n$, dann ist

$$\exp(tA)\,\underline{e}_i = \varphi_i$$

eine Basis des Lösungsraumes. φ_i ist $i$te Spalte von $\exp(tA)$

27.1.10

Folgerung 4: $\mathcal{L} = \operatorname{span}(\{\exp(tA)\, e_i\})$

Die Spalten von $\exp(tA)$ bilden eine Basis von $\mathcal{L}$

Def. Fundamentalsysteme

Basen von $\mathcal{L}$ heißen auch Fundamentalsysteme des DGL-Systems $\underline{x}' = A\underline{x}$

Rechnen: Bestimmung von $\exp(A)$, Rechenregeln

Lemma 2: $AB = BA \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $AB = BA$ (wichtig!)

Dann gilt

$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

Beweis:

$$(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 \underset{(*)}{=} x^2 + 2xy + y^2$$

(*) gilt nur, wenn x, y kommutieren. Für $AB = BA$ gilt also $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$, dann analog zu ~~$e^{x+x}$ für~~ e^{x+y} $x, y \in \mathbb{R}$. $\square$

Für zwei Blockmatrizen $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$ gilt:

$$AA' = \begin{pmatrix} BB' & B0 + 0C' \\ 0B' + 0C & CC' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB' & 0 \\ 0 & CC' \end{pmatrix}$$

Das sieht man direkt durch einfaches Nachrechnen.

Lemma 3: $\exp\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp B & 0 \\ 0 & \exp C \end{pmatrix}$

Für Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ gilt: $\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(B) & 0 \\ 0 & \exp(C) \end{pmatrix}$

Spezialfall:

$A = \lambda \cdot \mathbb{1}$: $\exp(A) = \exp(\lambda) \cdot \mathbb{1}$

Ana

Betrachte Basiswechsel mit $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\det T \neq 0$,

$$T^{-1} A T = B$$

27.1.'10

$$B^2 = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT) = T^{-1}A^2 T$$

$$B^k = T^{-1} A^k T$$

Lemma 4: ~~exp(A)~~ Basentransf. von $\exp(A)$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\det T \neq 0$, dann gilt

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T$$

Idee 1 Diagonalisierbare Matrizen

Ist A diag'bar, dann

$$T^{-1} A T = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$$

wobei λ_i EW zu A sind mit EV $\underline{v}_j$, wobei $T = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$.

Die $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sind eine Basis und

$$\underline{\varphi}_j(t) = e^{\lambda_j t}\underline{v}_j$$

ist Lös. zu $\underline{\varphi}' = A\underline{\varphi}$; $\{\underline{\varphi}_j\}$ ist ein Fundamentalsystem

Satz 2 $\{e^{\lambda_j t}\underline{v}_j\}$ ist Fundamentalsyst. von $\underline{x}' = A\underline{x}$ wenn A diag'bar

Hat $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ aus EV zu den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann ist durch $\{\underline{\varphi}_j(t) = e^{\lambda_j t}\underline{v}_j\}$ ein Fundamentalsystem zu $\underline{x}' = A\underline{x}$ gegeben.

Beispiel

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, also 3-fach entartet mit Eigenraum $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (also nur einen EV).

~ Möglichkeit 1: Jordan-Normalform

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\exp(T^{-1}AT) = \begin{pmatrix} \exp J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp J_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

27.1.10

$$\exp(J_\lambda) = \exp(\lambda \cdot \mathbb{1} + N)$$
$$\underset{\uparrow}{=} \exp(\lambda \mathbb{1}) \cdot \exp(N)$$
da $\lambda \mathbb{1} \propto \mathbb{1}$, $\mathbb{1} N = N \mathbb{1}$
$$= e^{\lambda} \cdot \mathbb{1} \cdot \exp(N)$$

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ (nilpotent)

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$N^r = (0)$ $(N \in \mathbb{K}^{r \times r})$

$$\exp(N) = \mathbb{1} + N + \frac{1}{2} N^2 + \dots + \frac{1}{(r-1)!} N^{r-1} + 0 + 0 + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & \cdots & 1/(r-1)! \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1/2 \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(J_\lambda) = \text{''} \quad (1 \to e^{\lambda})$$

Möglichkeit 2: Hauptraumzerlegung:

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, sei λ EW, dann heißt $v \in \mathbb{K}^n$ **Hauptvektor** zu λ, wenn es ein $s \in \mathbb{N}$ gibt mit $(A - \lambda \cdot \mathbb{1})^s \underline{v} = 0$. Das kleinste solche $s \in \mathbb{N}$ heißt Stufe von $\underline{v}$.

Eigenvekt. sind also Hauptvekt. der Stufe $s = 1$.

Fakt: Ist λ r-facher NEW von A, dann gibt es r l.u. Hauptvektoren $v_1, \dots, v_j$ zu λ mit Stufe$(\underline{v}_j) \leq j$.

Über $\mathbb{C}$ geht das für alle EW und es entsteht eine Basis aus Hauptvektoren:

$$\underbrace{v_1^{(1)}, \dots, v_{r_1}^{(1)}}_{\lambda_1}, \underbrace{v_1^{(2)}, \dots, v_{r_2}^{(2)}}_{\lambda_2}, \dots$$

Nach Transformation auf diese Basis:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|cc|} \lambda_1 & * \\ & \lambda_1 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \begin{array}{|cc|} \lambda_2 & (*) \\ & \lambda_2 \\ \hline \end{array} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ana

Beispiel

(1) Hauptraumzerl. für $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist EV, also Hauptv. d. 27. 1. 10

Stufe 1. $(A - \mathbb{1}\lambda)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist

HV d. Stufe 2, $(A - \lambda\mathbb{1})^3 = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist HV d.

Stufe 3. In „Neuer Basis" ist A unverändert $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$T = T^{-1} = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp(\mathbb{1} + (A - \mathbb{1})) \\ &= \exp(\mathbb{1}) \exp(A - \mathbb{1}) \\ &= e \cdot [\, \mathbb{1} + (A - \mathbb{1}) + \tfrac{1}{2}(A - \mathbb{1})^2 + 0 \,] \end{aligned}$$