Alternative Formeln zur Bestimmung vom Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Michael Kopp

Zusammenfassung

Diese alternativen Methoden zielt darauf ab, den Abstand $d(P,g)$ (in Abb. 1 gestrichelt) eines Punktes P (in Abb. 1 und 2 rot) zu einer Gerade g (in Abb. 1 und 2 blau) zu berechnen, *ohne* dazu eine Ebene erstellen zu müssen, wie dies bisher der Fall war.

1 Methode I – Die Skizze

In der Skizze erkennt man links unten ein dreidimensionales Koordinatensystem. Von ihm geht der Stützvektor $\vec{s}$ der Geraden g aus (in Abb. 1 grün). Er endet in S (in Abb. 1 cyan). Vom Ende des Stützvektors wiederum geht der Richtvektor $\vec{r}$ der Geraden g aus (in Abb. 1 rot). Der Punkt P (in Abb. 1 rot) hat ebenfalls einen Stützvektor $\vec{p}$ vom Koordinatenursprung aus.

Zwischen den Punkten P und S liegt ein weiterer Vektor $\vec{SP} = \vec{p} - \vec{s}$ (in Abb. 1 schwarz). Die Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{p}$ schließen den Winkel α ein. der Abstand $d(P,g)$ ist visualisiert durch die Strecke h (in Abb. 1 lila und gestrichelt) – sie steht senkrecht auf der Geraden g.

Aus technischen Gründen musste in den Skizzen auf die Vektorpfeile verzichtet werden.

2 Methode I – Formel

Um den Winkel α zu berechnen, bedient man sich der Definition der *skalaren Multiplikation* und formt diese nach α um. Die beiden verwendeten Vektoren sind dabe $\vec{s}$ und $\vec{p} - \vec{s}$. Somit ergibt sich:

$$\alpha = arccos\left(\frac{\vec{s}\cdot(\vec{p}-\vec{s})}{|\vec{s}|\cdot|\vec{p}-\vec{s}|}\right) \tag{1}$$

Nach der Definition des *sin* am rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten h, $\vec{p} - \vec{s}$ und g, aufgelöst nach h ergibt sich:

$$h = sin(\alpha)\cdot|\vec{p}-\vec{s}| \tag{2}$$

Daraus ergibt sich also durch ersetzen des Winkels α :

$$h = sin\left(arccos\left(\frac{\vec{s}\cdot(\vec{p}-\vec{s})}{|\vec{s}|\cdot|\vec{p}-\vec{s}|}\right)\right)\cdot|\vec{p}-\vec{s}| \tag{3}$$

Über den Zusammenhang

$$sin\left(arccos(x)\right) = \sqrt{1-x^2} \tag{4}$$

ergibt sich weiter:

$$h = \sqrt{1-\left(\frac{\vec{s}\cdot(\vec{p}-\vec{s})}{|\vec{s}|\cdot|\vec{p}-\vec{s}|}\right)^2}\cdot|\vec{p}-\vec{s}| \tag{5}$$

Den Quadratischen Zusammenhang bei der Berechnung des Betrages eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{6}$$

kann man bei der folgenden Vereinfachung gut verwenden. Somit ergibt sich weiter:

$$h = \sqrt{1-\frac{(s_1\cdot(p-s)_1+s_2\cdot(p-s)_2+s_3\cdot(p-s)_3)^2}{(s_1^2+s_2^2+s_3^2)\cdot((p-s)_1^2+(p-s)_2^2+(p-s)_3^2)}\cdot((p-s)_1^2+(p-s)_2^2+(p-s)_3^2)} \tag{7}$$

Die Formel sieht so natürlich unübersichtlich und sperrig aus, deswegen soll hier eine weitere Vereinfachung eingeführt werden: Der Vektor $\vec{p} - \vec{s}$ wird in Zukunft als $\vec{p} - \vec{s} = \vec{b}$ verwendet. Dann ergibt sich nämlich die Gleichung

$$h = \sqrt{1 - \frac{(s_1 \cdot b_1 + s_2 \cdot b_2 + s_3 \cdot b_3)^2}{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}} \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \qquad (8)$$

Sie ist nicht nur übersichtlicher, sonder kommt auch der Praxis beim Rechnen entgegen, weil der Vektor $\vec{b}$ schnell ausgerechnet ist.

Zusammenfassung 1

Die Form aus Formel 5 kann man als Grundform *dieser Methode ansehen. Für schnelles rechnen, bei dem man nur Werte in eine vorgefertigte Formel einsetzen will dient dann Formel 7 und wenn man den Vektor $\vec{p} - \vec{s}$ schon ausgerechnet hat, kann man der Übersichtlichkeit halber stattdessen auch Formel 8 verwenden.*

Zusammengefasst lautet die neue Formel:

$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{s} \cdot \vec{b}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{b}|} \right)^2} \cdot |\vec{b}|$$

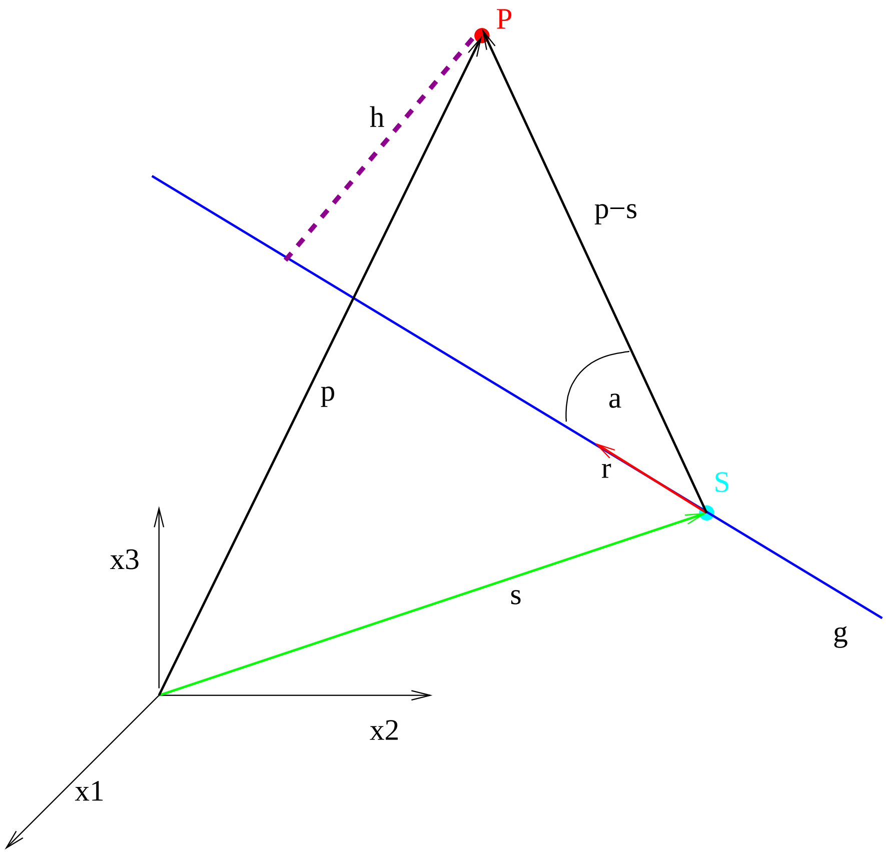

Abbildung 1: Skizze zur Verdeutlichung der alternativen Methode I

3 Methode II – die Skizze

Es ist wieder links unten ein dreidimensionales Koordinatensystem zu finden, von dem aus Stützvektoren $\vec{s}$ zum Punkt S und $\vec{p}$ zum Punkt P gehen. Die Gerade g (in Abb. 2 blau) ist definiert über Stützvektor $\vec{s}$ und Richtvektor r (in Abb. 2 rot). Zwischen den Punkten P und S liegt der Vektor $\vec{SP} = \vec{p} - \vec{s}$, der hier schon als $\vec{b}$ bezeichnet wird.

Die Normale $\vec{n_1}$ steht senkrecht auf der Ebene E_1, die $\vec{r}$ und $\vec{b}$ bilden, die Normale $\vec{n_2}$ steht senkrecht auf der Ebene E_2, die $\vec{r}$ und $\vec{n_1}$ bilden. Damit liegt $\vec{n_2}$ in der Ebene E_2 *und* ist senkrecht zu g.

4 Methode II – die Herleitung

Den Vektor $\vec{n_1}$ erhält man, indem man auf die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{b}$ das Kreuzprodukt anwendet:

$$\vec{n_1} = \vec{r} \times \vec{b} \tag{9}$$

Auf diesen Vektor $\vec{n_1}$ wendet man nun zusammen mit Vektor $\vec{r}$ erneut das Kreuzprodukt an und erhält daraus den Vektor $\vec{n_2}$.

$$\vec{n_2} = \vec{r} \times \vec{n_1} \tag{10}$$

Rechnet man dieses doppelte Kreuzprodukt aus, so kommt man für den Vektor $\vec{n_2}$ auf folgende Formel:

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} b_1(r_3^2 + r_2^2) - r_1(r_3b_3 + r_2b_2) \\ b_2(r_1^2 + r_3^2) - r_2(r_1b_1 + r_3b_3) \\ b_3(r_2^2 + r_1^2) - r_3(r_2b_2 + r_1b_1) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Auf den ersten Blick sieht diese Formel sperrig aus und für eine Anwendung nicht geeignet. Füllt man sie jedoch mit Zahlen, so ist das Rechnen damit nicht viel schwieriger, als das Rechnen mit dem Kreuzprodukt. Zudem ist die Formel auch wesentlich leichter zu merken, als man auf den ersten Blick denken würde. Die Indizes der einzelnen Anteile der Vektoren wiederholen sich nach einem einfachen, strikten Muster:

b	r^2	r^2	r	rb	rb
1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1

Die Indizes sind von oben nach unten aufsteigend angeordnet. In der ersten „Spalte“ beginnt diese Aufzählung in Zeile 1, in der zweiten Spalte in Zeile 2, in der dritten Spalte in Zeile 3 und in der vierten Spalte wieder in Zeile 1 ...

Hat man erst diesen Vektor $\vec{n_2}$ berechnet, muss man ihn normieren:

$$\vec{n_{2,0}} = \frac{1}{|\vec{n_2}|} \cdot \begin{pmatrix} n_{2,1} \\ n_{2,2} \\ n_{2,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n_{2,1}^2 + n_{2,2}^2 + n_{2,3}^2}} \cdot \begin{pmatrix} n_{2,1} \\ n_{2,2} \\ n_{2,3} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Um nun endgültig den Abstand $d(R, g)$ bestimmen zu können, bildet man lediglich den Betrag des Scalarprodukts von $\vec{n_{2,0}}$ und $\vec{b}$:

$$d = \left| \vec{n_{2,0}} \cdot \vec{b} \right| = |\vec{n_{2,0}} \cdot (\vec{p} - \vec{s})| \tag{13}$$

Zusammenfassung 2

Hat man sich erst einmal an die Methode gewöhnt, den Vektor $\vec{n_2}$ nach Formel 11 zu berechnen, so ist diese Methode schnell durchzuführen und es fällt das lästige Aufstellen der Ebenengleichung weg.

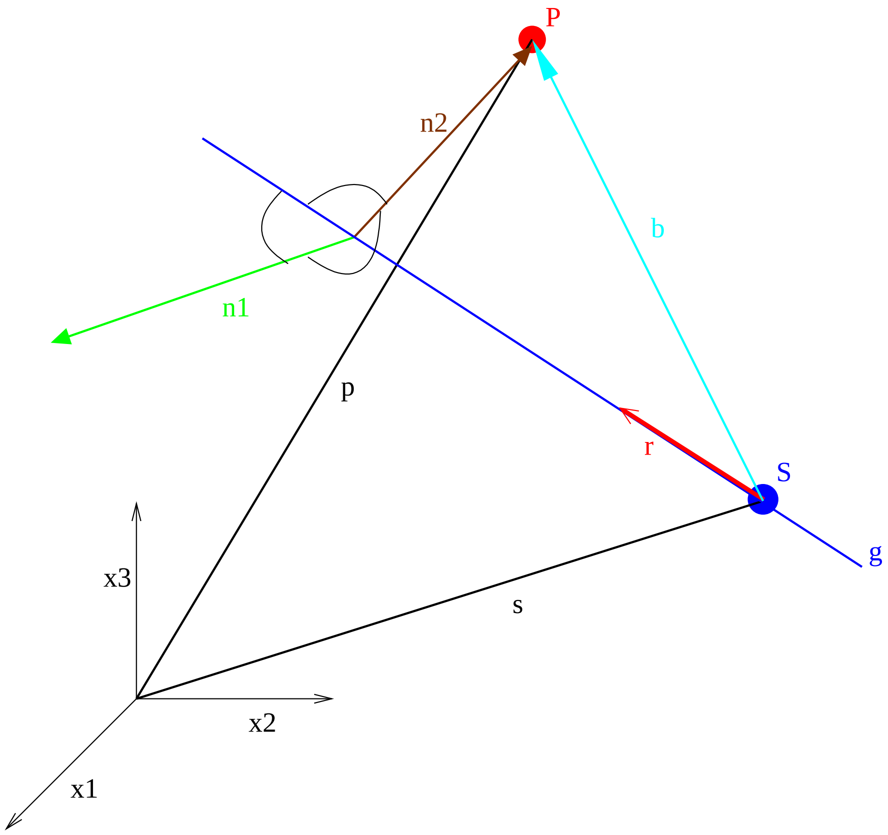

Abbildung 2: Skizze zur Verdeutlichung von Methode II – die eingezeichneten Winkel sind alle rechtwinklig!

5 Methode III – Herleitung

Es gibt noch eine weitere, noch einfachere Methode. Als Skizze dazu kann man Abb. 2 auf S. 4 verwenden. Dabei bestimmt man den Normalenvektor $\vec{n_2}$ direkt aus dem Richtvektor $\vec{r}$ der Geraden g und dem Vektor $\vec{b}$ zwischen dem Stützpunkt S der Geraden g und dem Punkt P ($\vec{b} = \vec{SP}$).

Die Annahme dazu ist denkbar einfach: Der Normalenvektor $\vec{n_2}$ muss senkrecht auf der Geraden g stehen. Somit gilt

$$\vec{r} \cdot \vec{n_2} = 0 \tag{14}$$

Gleichzeitig kann man den Normalenvektor aber auch als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{b}$ betrachten:

$$\vec{n_2} = \vec{b} + s \cdot \vec{r} \tag{15}$$

Diese beiden Gleichungen (14 und 15) kann man nun einheitlich nach $\vec{n_2}$ auflösen und gleichsetzen. Daraus ergibt sich:

$$\left[\vec{b} + s \cdot \vec{r}\right] \cdot \vec{r} = 0 \tag{16}$$

Da bei Skalarmultiplikation das *Distributivgesetz*[1] gilt, kann man Gleichung 16 danach weiter auflösen und erhält so:

$$\vec{b} \cdot \vec{r} + s \cdot \vec{r} \cdot \vec{r} = (b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3) + s \cdot (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = 0 \tag{17}$$

Diese Gleichung kann man nun nach s auflösen:

$$s = \frac{-\vec{b} \cdot \vec{r}}{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \frac{-b_1 r_1 - b_2 r_2 - b_3 r_3}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \tag{18}$$

Nun braucht man nur noch das s aus Gleichung 18 in Gleichung 15 einzusetzen und erhält daraus den Normalenvektor $\vec{n_2}$:

$$\vec{n_2} = \vec{b} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{\vec{r} \cdot \vec{r}} \cdot \vec{r} \tag{19}$$

Hier darf man – auch wenn das noch so verlockend aussehen mag – nicht kürzen! Es handelt sich um *Skalarmultiplikationen*; somit würde man versuchen, aus Summen zu kürzen.

Dieser Normalenvektor steht senkrecht auf der Geraden g und zeigt zum Punkt P. Bestimmt man nun also die Länge (den Betrag) des Vektors $\vec{n_2}$, so hat man den Abstand des Punktes P zur Geraden g bestimmt:

$$d(g, P) = \sqrt{n_{2,1}^2 + n_{2,3}^2 + n_{2,3}^2} \tag{20}$$

Nun kann man noch aus rein akademischen Interesse den Punkt F auf der Geraden g bestimmen, der dem Punkt P am nächsten ist:

$$\vec{OF} = \vec{OP} - \vec{n_2} \tag{21}$$

Zusammenfassung 3

Diese Methode besteht hauptsächlich darin, Skalarprodukte zu bilden – eine relativ fehlerunanfälige Rechenoperation. Ein weiterer Vortei davon ist, dass man den „Fußpunkt“ leicht bestimmen kann, an dem der Normalenvektor ansetzt.

[1] $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$