Gebrochen Rationale Funktionen

Michael Kopp

3. März 2009

Zusammenfassung

Was tun mit diesen komischen Funktionen, bei denen über und unter einem Strich xe stehen?

Hier ein paar Tips dazu...

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Definition 1 (Gebrochen Rationale Funktion) *Eine* ***Gebrochen Rationale Funktion*** *besteht aus einem Bruch, dessen Zähler und Nenner jeweils eine Ganzrationale Funktion darstellen. Es gilt also*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Dabei ist n der ***Zählergrad*** *und m der* ***Nennergrad***

Geborchen Rationale Funktionen stellen uns in der Analysis vor neue Herausforderungen. Es ist nicht mehr so, dass die Funktion schön sauber überall stetig und differenzierbar ist – sie hat ihre *dunklen Wesenszüge*. Wir müssen uns drauf einstellen, diese berechnen zu können, also sagen zu können, *wo* wir die Funktion nicht mehr präziese beschreiben können bzw. wo sie nicht definiert ist.

Die Techniken dienen im Großen und Ganzen daru, die Funktion in ihrem Verlauf besser verstehen zu können; wir werden Nullstellen, Extrem- und Wendestellen weiterhin bestimmen, jedoch kommen bei Gebrochen Rationalen Funktionen noch *Asymptoten* hinzu, in denen wir das Verhalten der Funktion in besonderen, *extremen* Punkten untersuchen werden – also gewissermaßen werden wir die Problemstellen der Funktion versuchen zu analysieren.

2 Verhalten für $x \to \pm\infty$

Wir wollen uns zuerst mit der Untersuchung von $f(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ beschäftigen.

Dabei gibt es Spezialfälle, die wir im Folgenden einzeln betrachen wollen. Wann welcher Spezialfall eintritt, kann man einfach dran ablesen, wie *Zähler-* und *Nennergrad* zueinander stehen. Es gilt dabei

Zählergrad $<$ Nennergrad	Nullfunktion
Zählergrad $=$ Nennergrad	Waagerechte Asymptote
Zählergrad $=$ Nennergrad $+ 1$	Schiefe Asymptote
Zählergrad $>$ Nennergrad $+ 1$	Divergenz

2.1 Waagerechte Asymptoten

Bisher haben wir schon von Asymptoten gesprochen, aber so ganz genau *definiert* haben wir den Begriff noch nicht. Dem soll hier Abhilfe geschaffen werden:

Definition 2 (Asymptote) *Eine* ***Asymptote*** *ist eine Funktion bzw. ein x bzw. y-Wert, den eine Funktion $f(x)$* anstrebt*, jedoch nicht erreicht. D.h. sie nähert sich diesem Wert beliebig nahe an, kann ihn selbst aber nicht erreichen.*

Man kann für die waagerechte Asymptote y_a sagen:

$$y_a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

Wir werden uns zuerst mit den einfachsten Asymptoten beschäftigen:

Waagerechte Asymptoten treten nur in den Bereichen $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ auf, d.h. am rechten und linken *Rand* der Funktion – nur dass dieser *Rand* aber in der Unendlichkeit liegt. Wir untersuchen also, ob die Funktion für große (bzw. stark negative) x-Werte dazu tendiert, siche einem bestimmen Punkt anzunähren. In Abb. 2-I ist ein Beispiel einer solchen Funktion gezeigt.

Tip für Profis 1 *Um zu sehen, ob eine Funktion dieses Verhalten zeigen wird, oder nicht, genügt es bereits,* Zähler- *und* Nennergrad *zu untersuchen; nur wenn*

$$\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad}$$

Wird sich eine Waagerechte Asymptote verschieden von null ergeben können.

Rein *technisch* gehen wir dabei folgendermaßen vor:

Tip für Profis 2 (Waagerechte Asymptote bestimmen)

1. *Höchste Potenz von x im* Nenner *ermitteln*
2. *Diese Potenz überall* ausklammern

   Dazu teilt man ganz einfach jeden Summanden im Zähler und im Nenner durch diese höchste Potenz, klammert Zähler und Nenner jeweils ein und schreibt die höchste Potenz davor.

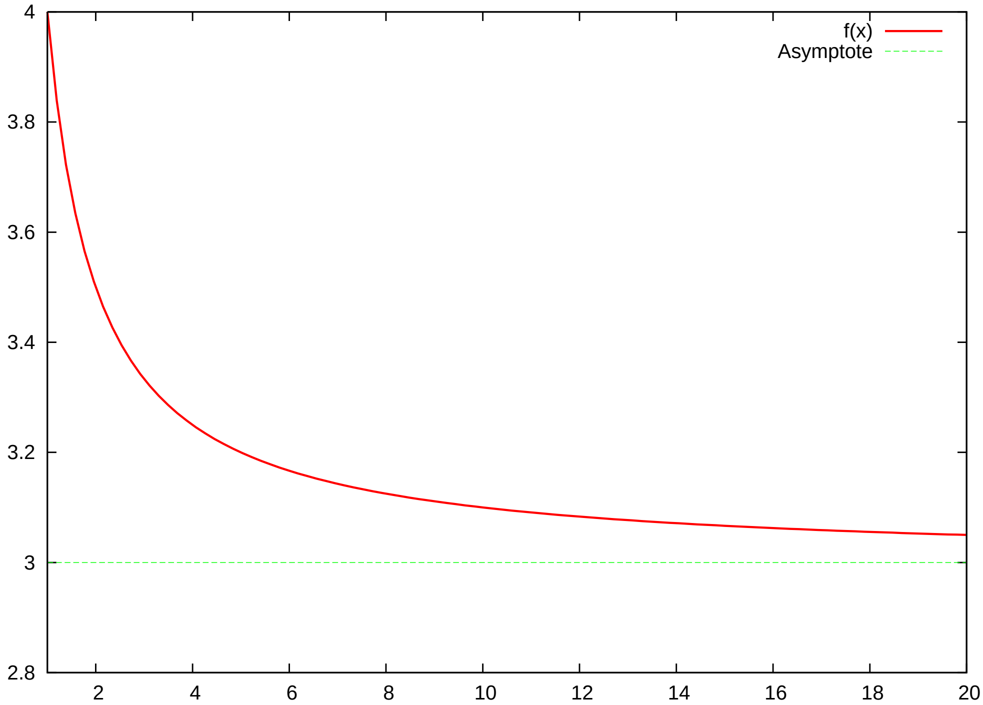


Abbildung 2-I: Hier ein Beispiel einer Funktion $f(x) = \frac{1}{x} + 4$, die gegen eine Asymptote strebt.

3. *Anschließend* kürzt *man diese Potenz*
4. *und lässt nun $x \to \infty$ bzw $x \to -\infty$ laufen. Dabei werden alle Teile der Funktion mit $\frac{a}{x^b} \to 0$. Was übrig bleibt, definiert die Waagerechte Asymptote.*

Dieses Verfahren wollen wir nun einmal durchführen:

Beispiel 1 *Sei*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 9}{7x^2 - 9x}$$

Als höchste Potenz im Nenner finden wir x^2, also klammern wir es aus:

$$f(x) = \frac{x^2(3 + \frac{2}{x} - \frac{9}{x^2})}{x^2(7 - \frac{9}{x})} = \frac{\cancel{x}^2(3 + \frac{2}{x} - \frac{9}{x^2})}{\cancel{x}^2(7 - \frac{9}{x})} = \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{9}{x^2}}{7 - \frac{9}{x}}$$

Nun lassen wir $x \to \infty$ laufen und erhalten

$$x \to \infty : f \to \frac{3 + 0 - 0}{7 - 0} = \frac{3}{7}$$

Ob wir nun $-\infty$ oder ∞ wählen, macht keinen Unterschied, weil die nicht-festen Teile des letzten Bruches ja sowieso alle gegen 0 gehen.

Damit ist die waagerechte Asymptote also

$$y_a = \frac{3}{7}$$

Es gibt auch ein alternatives Verfahren für die Bestimmung von y_a. Sie beruht darauf, dass in der Unendlichkeit im Zähler und im Nenner nur noch die höchsten Potenzen von x entscheidend sein werden – schließlich für eine sehr große Zahl x_g der Wert von bspw. x_g^4 *wesentlich* größer, also x_g^3 oder x_g^2. Diese beiden Werte sind bei *großen* Zahlen praktisch bedeutungslos.

Tip für Profis 3 (Ersatzfunktion) *Wie beachten also nur die höchste Potenz und deren Faktor und bilden daraus eine* Ersatzfunktion *$\tilde{f}(x)$. Für*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

gilt

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

In der Unendlichkeit reichte es nun, diese *Ersatzfunktion* $\tilde{f}(x)$ zu betrachten. Im Beispiel oben würde man nun also rechnen können

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 9}{7x^2 - 9x} \Rightarrow \tilde{f}(x) = \frac{3x^2}{7x^2} = \frac{3\ \cancel{x^2}}{7\ \cancel{x^2}} = \frac{3}{7}$$

2.2 Nullfunktionen

Einen Sonderfall der Waagerechten Asymptoten stellen die *Nullfunktionen* dar. Sie gehen für $x \to \pm\infty$ ganz unspektakulär gegen 0. Man kann sie einfach erkennen:

Tip für Profis 4 *Bei einer* ***Nullfunktion*** *gilt*

$$\textit{Zählergrad} < \textit{Nennergrad}$$

Man kann sich dies gut vorstellen, wenn man sich überlegt, dass für große x die Zahlen im Nenner wesentlich schneller wachsen, als im Zähler. Damit wird der Nenner also immer größer und größer als der Zähler – und bei einem Bruch bedeutet das, dass dieser kleiner und kleiner wird. Bis er eben bei 0 angelangt ist.

2.3 Schiefe Asymptote

Definition 3 (Schiefe Asymptote) *Eine Schiefe Asymptote ist eine Funktion*

$$y_a(x) = ax + c$$

der sich $f(x)$ in der Unendlichkeit immer nächer annährt, sie dort aber nicht berührt.

Tip für Profis 5 *Man kann leicht sehen, ob eine Funktion eine* schiefe Asymptote *hat; das hat sie nur, wenn gilt*

$$\textit{Nennergrad} + 1 = \textit{Zählergrad}$$

D.h. der Zählergrad ist um eienes höher als der Nennergrad.

Um die Gleichung von $y_a(x)$ zu bestimmen, eignet sich eine *Polynomdivision* am besten. Man dividiert hier den Zähler so lange durch den Nenner, bis man im Ergebnis $ax + b$ stehen hat. Ab dann kann man den Rest der Division einfach stehen lassen – er wird so wie so gegen 0 gehen für $x \to \infty$.

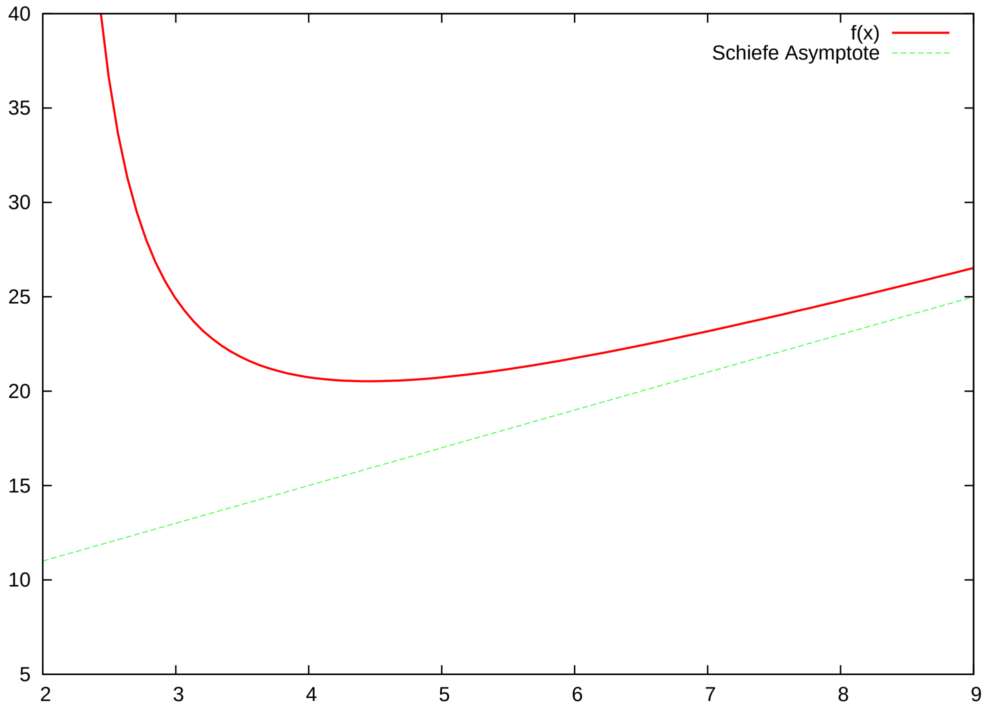


Abbildung 2-II: Plot der Funktion aus Beispiel 2

Beispiel 2 *Sei*

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 9x - 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$$

Eine Polynomdivision führt uns auf

$$(2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 9x - 3) \div (x^3 - 2x^2 + x - 2) = 2x + 7 + R$$

Wobei R ein Rest ist, dessen Nennergrad *größer als der* Zählergrad *ist – für den also gilt $x \to \infty \Rightarrow R \to 0$.*

Dann gilt

$$y_a(x) = 2x + 7$$

Diese Funktion ist in Abb.2-II dargestellt.

2.4 Divergenz

Eigentlich könnte man ohne Probleme weiterdefinieren, dass eine Funktion f, für die gilt

$$\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad} + k \quad \mathbb{N} \ni k \geq 2$$

man einfach eine Funktion k-ten Grades definiert, gegen welche f in der Unendlichkeit strebt.

Trotzdem sagt man aber, dass schiefe Asymptoten nur lineare Funktionen sind, und somit muss man sagen, dass Funktionen, die obige Gleichung gilt, schlicht *divergieren*. Man unterscheidet bei ihnen lediglich noch, ob sie für $x \to \infty$ gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ streben.

Dieses Verhalten lässt sich besonders einfach untersuchen, indem man die *Ersatzfunktionen* $\tilde{f}$ betrachtet; diese kann man kürzen und in die gekürzten Ergebnisse $+\infty$ bzw. $-\infty$ einsetzen.

Beispiel 3 *Sei*

$$f(x) = \frac{3x^5 + 2x^2 - 8}{x^2 + 4} \Rightarrow \tilde{f}(x) = \frac{3x^5}{x^2} = \frac{3x^3}{1} = 3x^3$$

Damit gilt also

- $x \to +\infty \Rightarrow f \to +\infty$
- $x \to -\infty \Rightarrow f \to -\infty$

3 Senkrechte Asymptoten

Wie es *waagerechte Asymptoten* gibt (siehe Def. 2), so gibte es auch *senkrechte*:

Definition 4 (Senkrechte Asymptote) *Eine* ***senkrechte Asymptote*** *ist ein x-Wert, gegen den die Funktion strebt, den sie aber nicht erreicht. Dabei strebt sie links bzw. rechts von diesem x-Wert nach $+\infty$ oder $-\infty$.*

Man kann sich bei gebrochen rationalen Funktionen einfach überlegen, wo denn eine *senkrechte Asymptote* auftauchen sollte. Dazu überlegen wir: Bei einem Bruch handel es sich ja eigentlich um eine *Division*; der Zähler wird durch den Nenner geteilt. Und nun weiß der gebildete Mathematiker, dass man nicht durch 0 teilen darf.[1] D.h. eine gebrochen rationale Funktion macht keinen Sinn, wenn unter dem Bruchstrich die 0 steht.

Man spricht in diesem Falle auch davon, dass f an dieser Stelle *nicht definiert* ist, und spricht von einer *Definitionslücke*:

Definition 5 (Definitionslücke) *Eine Definitionslücke ist ein Wert in einem Intervall, für den eine Funktion f nicht definiert ist. Gilt bspw. für die Definitionsmenge D_f einer Funktion f*

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2\}$$

so sind x_1 und x_2 die ***Definitionslücken*** *der Definitionsmenge D_f.*

Somit kann man für die senkrechten Asymptoten sagen:

Tip für Profis 6 (senkrechte Asymptote) *Nur eine* ***Nullstelle des Nenners*** *kann einen senkrechte Asymptote sein.*

Der Tip ist vorsichtig formuliert, weil es sein kann, dass es sich um eine *hebbare Definitionslücke* handelt; mehr dazu im nächsten Kapitel. Hier erstmal ein

Beispiel 4 *Sei*

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x - 3}{x^2 - 4}$$

Der Nenner der Funktion f hat offensichtlich zwei Nullstellen, weil gilt

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 2$$

Damit kann es sein, dass die Funktion bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ eine senkrechte Asymptote hat. Die Funktion ist in Abb. 3-III geplottet und wir sehen hier, dass es wirklich senkrechte Asymptoten sind.

So wie man beim Verhalten $x \to \infty$ untersuchen kann, ob sich eine Funktion gegen $+\infty$ oder $-\infty$ oder einen Wert y_a oder eine Funktion $y_a(x)$ annährt, kann man das auch bei senkrechten Asymptoten machen. Dazu setzt man

[1] *Warum* man das nicht darf, spielt für uns keine Rolle, man darf es einfach nicht!

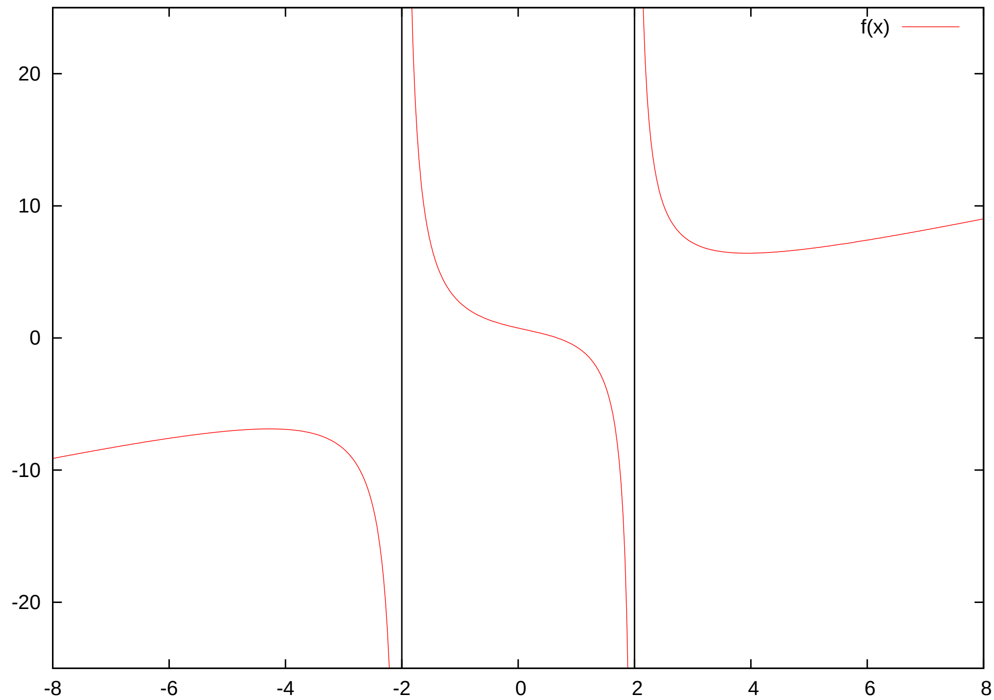


Abbildung 3-III: Die Funktion aus Beispiel 4

Zahlen, die kleiner als die Nullstellen des Nenners sind, in die Funktion ein und schaut sich an, wie sie sich verhält, anschließend Zahlen, die größer sind. Man schaut also, wie sich die Funktion links (kleiner Zahlen) und rechts (größere Zahlen) von den Nullstellen verhält.

Beispiel 5 (Verhalten um die Nullstelle) *Wir wollen die Funktion aus Beispiel 4 untersuchen. Zuerst schauen wir uns die Nullstelle $x_1 = -2$ an.*

Wählen wir eine Zahl, die kleiner *als x_1 ist, also bspw. $-2,001$ und setzten sie in f ein, so wird f sehr* klein, *geht also gegen $-\infty$, weil der Nenner positiv ist ($(-2,001)^2 > 4$) und der Zähler negativ: Hier darf man $x_1 = -2$ ohne Probleme einsetzen und erhält $-8 - 8 - 3 = -19$.*

Nun wählen wir eine Zahl, die größer *ist, also x_1, also bspw. $-1,999$. Für den Nenner ergibt sich nun eine negative Zahl (weil $(-1,999)^2 < 4$) und für den Zähler weiterhin die -19, und damit ist f positiv – strebt also gegen $+\infty$.*

Behandelt man $x_2 = 2$ entsprechend, so strebt f links *davon gegen $-\infty$ und rechts davon gegen $+\infty$.*

Aufschreiben kann man das so:

- *Für* $x \to -2$ *und* $x < -2$ *geht* $f \to -\infty$
- *Für* $x \to -2$ *und* $x > -2$ *geht* $f \to +\infty$
- *Für* $x \to 2$ *und* $x < 2$ *geht* $f \to -\infty$
- *Für* $x \to 2$ *und* $x > 2$ *geht* $f \to +\infty$

4 Hebbare Definitionslücke

In Definition 5 haben wir gesehen, was eine *Definitionslücke* ist. Nun kann es vorkommen, dass eine solche Lücke eigentlich gar keine ist...

Das bedeutet dann, dass die Funktion f an der besagten Stelle x_0 wirklich *nicht definiert* ist, also dass man den Wert $f(x_0)$ *nicht berechnen* kann. Das ist aber nichts weiter als ein formales Hindernis; Nähert man sich der Stelle x_0 von links und von rechts an, so ergibt sich von beiden Seiten der selbe Grenzwert von f, es gilt also

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

[2] So könnte man eine Funktion $\hat{f}$ erstellen, die die gleichen Eigenschaften wie f hat, nur dass sie an x_0 definiert ist; nämlich dass hier der lim von oben verwendet wird.

Rein mathematisch formal sind diese beiden Funktionen f und $\hat{f}$ aber *verschieden.*

Tip für Profis 7 (Rechnerisch bestimmen) *Um eine hebbare Definitionslücke zu untersuchen, schaut man einfach, ob die* Nullstelle des Nenners *auch eine* ***Nullstelle des Zählers*** *ist. Wenn ja, so liegt an der Stelle eine hebbare Definitionslücke vor.*

Tip für Profis 8 (im GTR) *Zeichnet man sich eine Funktion f mit hebbarer Definitionslücke im Taschenrechner, so wird man hier bei den Definitionslücken mit dem* `trace`*-Befehl oder dem* `value`*-Befehl nur den* ***x****-Wert*

[2]Dabei bedeutet das kleine "+", dass man sich von *rechts* annährt und das kleine "−" entsprechend, dass man sich von *links* annährt.

lesen können; beim `y`*-Wert steht nur da* `Y =` *und dann ein leerer Fleck. Für den Taschenrechner ist an dieser Stelle die Funktion also nicht definiert.*

Tip für Profis 9 *im Schaubild Möchte man betonen, dass eine Funktion an einer Stelle eine Definitionslücke hat, so zeichnet man sie zuerst in aller Seelenruhe ein und anschließend umkringelt man den Punkt, an dem die Definitionslücke liegt, oder man setzt ihn in Eckige Klammern [ ].*

Hebbare Definitionslücken herausdividieren Um eine Funktion $\hat{f}$ zu erzeugen, von der oben gesprochen wurde, muss man die Nullstellen des Nenners aus dem Zähler dividieren. Das geht auf zwei Arten:

1. Polynomdivision

   Man Macht Polynomdivison einzeln von Zähler und Nenner mit $(x-x_0)$ (wobei x_0 die Nullstelle des Nenners ist. Wenn beide Polynomdivisionen jeweils eine ganzrationale Funktion ergeben, so nimmt man diese Terme als Zähler bzw. Nenner von $\hat{f}$.

2. *Satz von* VIETA

   Nach diesem ist es möglich, jede ganzrationale Funktion g mit den Nullstellen x_0, x_1, x_2, ... zu schreiben als

   $$g(x) = a \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots$$

   mit einem Vorfaktor a. Wenn man Zähler und Nenner so schreibt, kann man Hebbare Definitionslücken einfach herauskürzen, weil oben und unten im Bruch der gleiche Term in einer Multiplikation enthalten ist.

Beispiel 6 (Hebbare Definitionslücken bestimmen) *Sei*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 12}{x^2 - 4}$$

Wir untersuchen die Nullstelle des Nenners $x_0 = -2$, ob sie eine hebbare Definitionslücke ist.

Polynomdivisionen von Zähler und Nenner ergeben

$$\begin{aligned} (2x^2 + 6x + 12) \div (x + 2) = &\quad 3x + 6 \\ (x^2 - 4) \div (x + 2) = &\quad x - 2 \end{aligned}$$

Damit hat man also

$$\hat{f}(x) = \frac{2x+6}{x-2}$$

Alternativ hätten wir auch mit dem Satz von VIETA *die Funktion f umschreiben können:*

$$f(x) = \frac{3 \cdot (x+2) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+2)}$$

Und hier hätte man offensichtlich durch $(x+2)$ kürzen können.

Tip für Profis 10 (Binomische Fromeln) *Im Pflichtteil ist es oft so, dass man durch die Anwendung von Binomischen Formeln auf Terme kommt, in denen man die Hebbaren Definitionslücken einfach herauskürzen kann.*

In Beispiel 6 hätte man so im Zähler die erste und im Nenner die Dritte binomische Formel anwenden können, und erhalten:

$$f(x) = \frac{3(x+2)^2}{(x-2) \cdot (x+2)}$$

Bei der man wieder leicht durch $(x+2)$ hätte kürzen können.

5 Symmetrien

5.1 Gerade und ungerade Funktionen

Definition 6 *Man bezeichnet eine Funktion als* ***gerade****, wenn sie nur* gerade *Potenzen von x enthält; also bsp. $f(x) = 4x^4 + 2x^2 + 9$ und entsprechend als* ***ungerade****, wenn sie nur ungerade Potenzen von x enthält; also bspw $f(x) = 4x^3 + 9x$.*

Vorsicht: "$+c$", also eine Konstante, die addiert wird, schreibt man auch als $+c \cdot x^0$ und 0 ist eine gerade Zahl. Die Funktion $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$ ist also damit *nicht ungerade.*

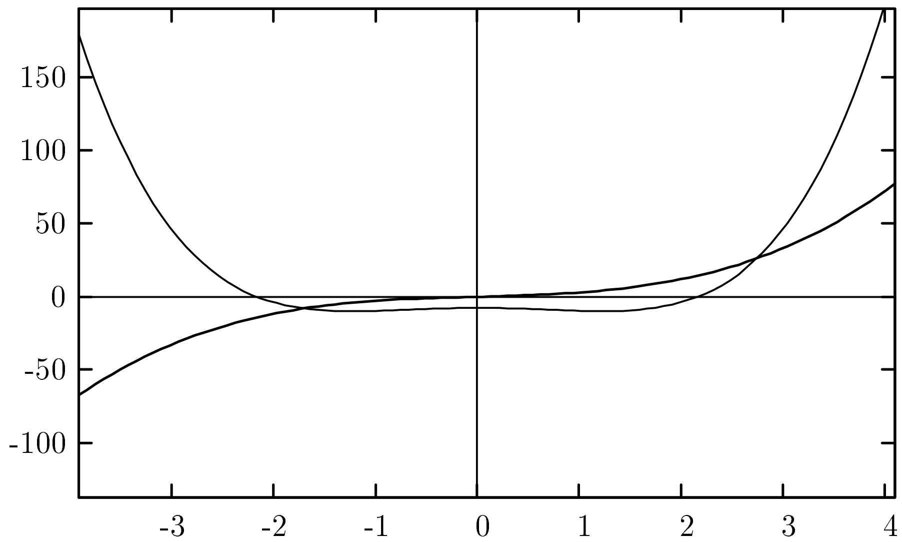
Dabei gilt, dass eine *gerade* Funktion spiegelsymmetrisch zur y-Achse ist:

$$f(-x) = f(x)$$

und eine *ungerade* punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f(-x) = -f(x)$$

Man kann alternativ auch diese beiden Rechnungen durchführen; wenn eine davon sich als richtig erweist (für alle x), so ist die entsprechende Symmetrie auch bewiesen.



5.2 Symmetrien zu beliebigen Achsen und Punkten

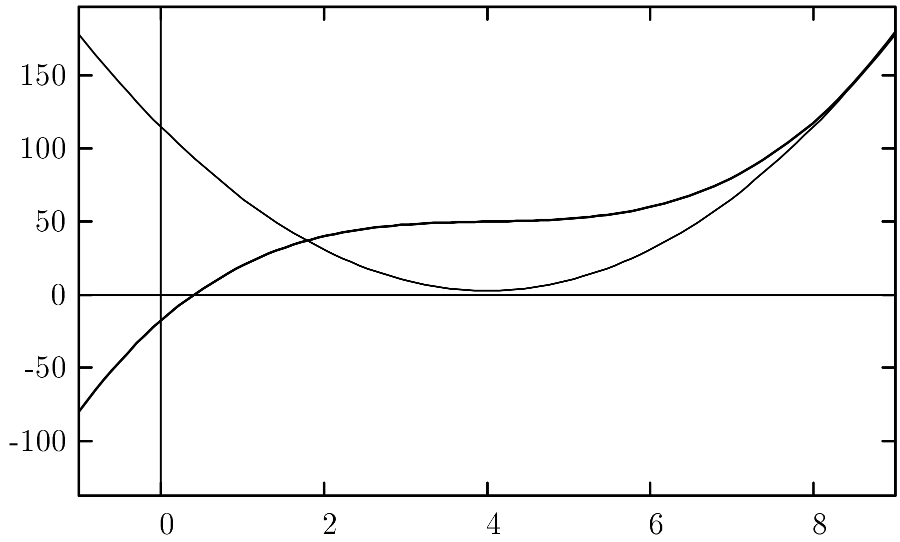
Nun kann es aber auch sein, dass eine Funktion symmetrisch zu eine Achse ist, die zur y-Achse nur *parallel* ist – aber nicht mit dieser *identisch* ist. Eine solche Achse beschreibt man durch x_0.

Man spricht davon, dass $f(x)$ zu x_0 achsensymmetsich ist, wenn gilt

$$f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$$

Entsprechend kann $f(x)$ zu einem Punkt $P(x_0|y_0)$ punktsymmetrisch sein, obwohl dieser vom Ursprung verschieden ist. Dann muss gelten:

$$f(x_0 - x) - y_0 = -f(x_0 + x) - y_0$$



Die gerade Funktion ist symmetrisch zu $x_0 = 4$ und die ungerade zu $P(4|50)$.

5.3 Rechnerei

Meistens ist in der Aufgabenstellung sowieso "nur" gefragt, ob eine gegebene Funktion zu einer bestimmten Achse bzw. zu einem Punkt symmetrisch ist. Dann braucht man einfach nur die oben genannten Werte einzusetzen und durch diverse Umformereien zu zeigen, dass die Gleichungen oben wirklich stimmen.

Auch bei der Symmetrie an beliebeigen Achsen und Punkten gilt weiter, dass man vorher schauen sollte, ob man eine gerade oder eine ungerade Funktion vorliegen hat. Die hier gezeigten Formeln sind nur der Mathematische *Beweis*, dass die Funktionen wirklich symmetrisch sind.

Beispiel 7 *Wir wollen zeigen, dass die Funktion*

$$f(x) = \frac{(x-2)^4 - 2(x-2)^2 - 9}{(x-2)^2 - 2}$$

Achsensymmetrisch zur Achse $x_0 = 2$ ist; also dass gilt:

$$f(2-x) = f(2+x)$$

Dazu setzen wir statt x in $f(x)$ einfach $(2-x)$ bzw. $(2+x)$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{((2-x)-2)^4-2((2-x)-2)^2-9}{((2-x)-2)^2-2} &= \frac{((2+x)-2)^4-2((2+x)-2)^2-9}{((2+x)-2)^2-2} \\
\frac{(-x)^4-2(-x)^2-9}{(-x)^2-2} &= \frac{x^4-2x^2-9}{x^2-2} \\
\frac{(x)^4-2(x)^2-9}{(x)^2-2} &= \frac{x^4-2x^2-9}{x^2-2}
\end{aligned}$$

Die letzter Zeile erhält man, weil es bei positiven Potenzen keinen Unterschied macht, ob man $-a$ oder a potenziert.

In Abb. 5-IV ist f geplottet.

Tip für Profis 11 *Alternativ hätte man auch einfach*

1. *sagen können, dass es sich um eine* gerade Funktion *handelt (s. Definition 6)*
2. *die Funktion f um 2 nach links verschieben können, um dann die Symmetrien an der y-Achse zu bestimmen.*

6 Skizzieren

Man kann sagen, dass wir diese ganzen Funktionsuntersuchungen eigentlich nur machen, damit wir die Funktion ohne Taschenrechner gut skizzieren können.

Um eine Vollständiege Skizze anfertigen zu können, geht man am besten folgendermaßen vor:

1. Nullstellen bestimmen und Nullstellen gleich einzeichnen
2. Hoch- und Tief- bestimmen und einzeichnen
3. Wendepunkte bestimmen und einzeichnen
4. Verhalten gegern $\pm\infty$ untersuchen und Asymptoten einzeichnen

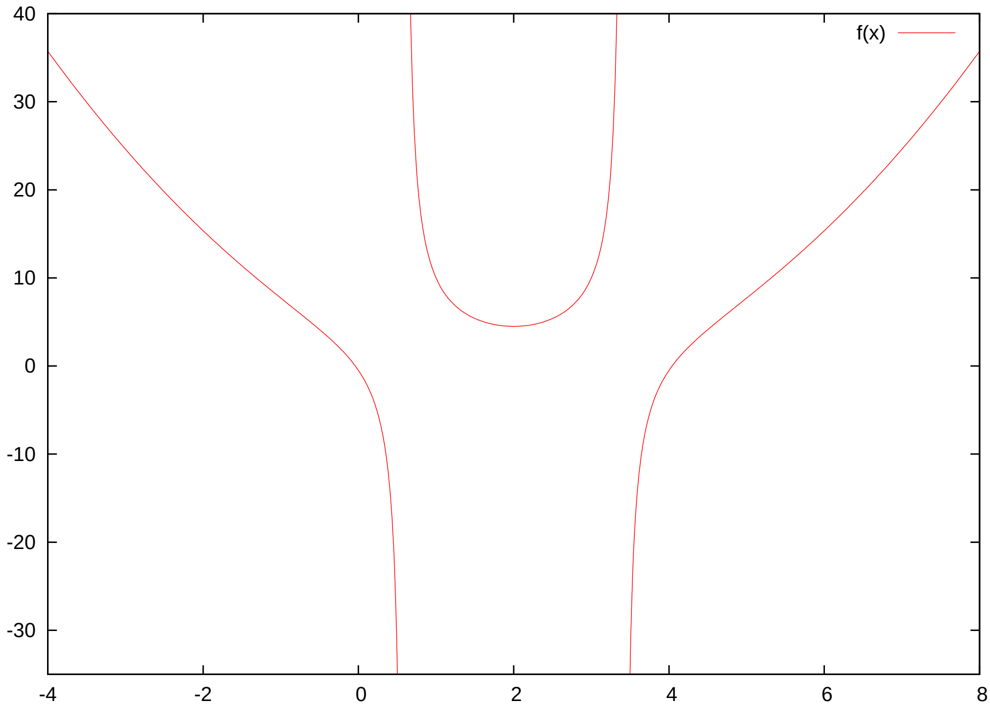


Abbildung 5-IV: Plot der Funktion aus Beispiel 7

5. Definitionslücken bestimmen und untersuchen, welche eine senkrechte Asymptote ergibt, anschließend diese einzeichnen und untersuchen, wie die Funktion links und rechts davon jeweils aussieht.

6. mit Schwung die Funktion durch die Markierten Punkte zeichnen und darauf achten, dass man alle ermittelten Eigenschaften auch zeichnet.

7 Funktionsterm aus Skizze erstellen

Diese Disziplin ist etwas schwerer. Es geht darum, wenn man einen Graphen gegeben hat, aus diesem eine Zuordnungsvorschrift herzuleiten. Der *genaue* Verlauf der Funktion ist dabei häufig nicht entscheidend, sondern nur, dass man die erkennbaren Eigenschaften wie Asymptoten und Hochpunkte etc. bestimmt.

Man kann dabei folgendermaßen vorgehen:

1. man schaut sich am besten zuerst an, wie die Funktion sich für $x \to \pm\infty$

verhält und kann daraus mithilfe der Tabelle in Kap. 2 bestimmen, wie *Zähler-* und *Nennergrad* sich zueinander verhalten.

2. Nun bestimmt man die senkrechten Asymptoten x_0, x_1, ... und mit dem *Satz von* VIETA bildet man den Nenner mit $n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots$.

3. Entsprechend bildet man den Zähler aus den Nullstellen der Funktion.

4. Die weitern festgestellten Eigenschaften kann man nun erhalten, indem man den bisher schon bestehenden Term mit diversen Faktoren *multipliziert* oder andere *addiert*.