Der komplexe Logarithmus

Michael Kopp

9. November 2008

1 Darstellung einer Zahl $z \in \mathbb{C}$

Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich auf verschiedene Arten darstellen. Eine davon ist

$$z = re^{i\varphi}$$

Dabei ist r der Radius und φ der Winkel eines dazugehörigen Vektors in einem $\Im$-$\Re$-Schaubild[1].

Dieser Vektor z kann nun für verschiedene Winkel φ eigentlich identisch sein: Immer wenn φ eine volle Umdrehung ($\varphi + 2\pi \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$) zusätzlich groß ist, ändert sich der Vektor z praktisch nicht. Eine Zahl kann man deshalb in dieser Darstellung wie folgt schreiben:

$$z = re^{i\varphi + 2\pi \cdot k} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

2 Logarithmus

Wendet man den Logarithmus auf ein Produkt an, so kann man ihn auf die einzelnen Faktoren anwenden und addieren. Dieses Gesetzt nutzt man beim komplexen Logarithmus aus:

$$ln(z) = ln(re^{i\varphi + 2\pi \cdot k}) = ln(r) + ln(e^{i(\varphi + 2\pi \cdot k)}) \tag{1}$$

Nun ist der Logarithmus die Umkehrfunktion von e^x, folglich gilt $ln(e^x) = x$; in unserem Falle also:

$$ln(z) = ln(r) + ln(e^{i(\varphi+2\pi \cdot k)}) = ln(r) + i(\varphi + 2\pi \cdot k) = ln(r) + i\varphi + 2i\pi \cdot k \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Hier sieht man also, dass für einen Logarithmus ($ln(z)$) *unendlich* viele Lösungen herauskommen, die sich alle um den Faktor $2i\pi \cdot k$ unterscheiden. Also ist der Logarithmus nicht mehr eindeutig.

[1] $Im(z)$-$Re(z)$-Schaubild

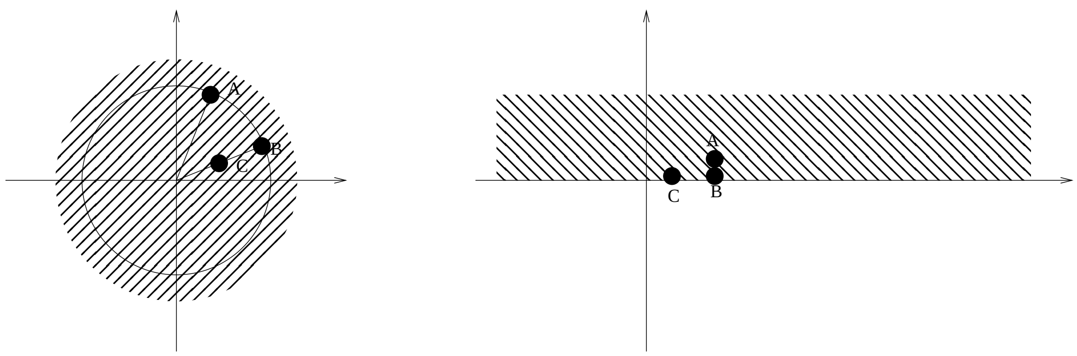

Abbildung 1: Zwei Komplexe Zahlenebenen; links: alle Komplexen Zahlen, rechts: die Schraffierten Zahlen reichen aus, um *alle* komplexen Zahlen über die e-Funktion zu erreichen. Zu der Darstellung: Die y-Achsen stellen jeweils den Imaginär-, die x-Achsen den Realteil dar. Die rechte Schraffur hat die Höhe 2π und eine unendliche Breite. Die Linke Schraffur ist unendlich in alle Richtungen.

Es reicht nun ein verschwindend kleiner Teil der Bildmenge von $ln(z)$ aus, um alle Komplexe Zahlen mittels der Umkehrfunktion von $ln(z)$ (e^x) darzustellen. Diese sind in Abb. 2 im rechten Schaubild schraffiert.

Die Ausdehnung der schraffierten Fläche nach rechts und links ist der $ln(r)$-Teil der Gleichung – hier muss jede Zahl aus $\mathbb{R}$ enthalten sein, weil $Im(ln) = \mathbb{R}$. Gilt für zwei Vektoren z_1, z_2:

1. $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 \neq \varphi_2$ so liegen die Bildpunkte im rechten Schaubild *senkrecht* übereinander. (A,B in Abb. 2)

2. $r_1 \neq r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ so liegen die Bildpunkte im rechten Schaubild *waagerecht* nebeneinander. (B,C in Abb. 3)

3 Unstetigkeit

Will man nun für alle Zahlen $x \in \mathbb{C}$ aus der linken Ebene den Logarithmus bilden und einem Punkt in der rechten Ebene zuordnen, so wid man feststellen, dass für Zahlen z mit bestimmten Werten ein „*Sprung*“ in der Zuordnung vorgeht: Überschreitet man mit einem rotierenden Vektor z den Winkel $\varphi = 0$, so werden vorher[2] die Bilder der Punkte im rechten Schaubild immer weiter nach oben wandern, dann, wenn $\varphi = 0$ gerade überschritten wird, „*springen*“ die Bildpunkte im rechten Schaubild wieder nach unten zurück. In Abb. 3 ist dieser Sprung zwischen dem 5. und dem 1. Punkt.

Dieser „*Sprung*“ ist davon abhängig, wo man seinen Streifen wählt – man könnte jeden beliebigen waagerechten Streifen der höhe $2i\pi$ wählen. Man wählt einen solchen Streifen,

[2] Ich gehe von einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn aus.

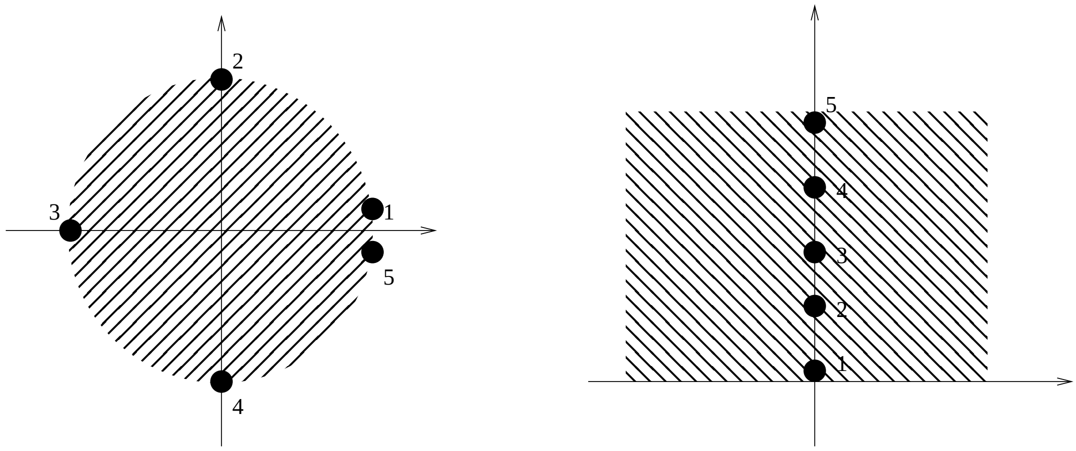

Abbildung 2: Zuordnung mehrerer Punkte mit dem gleichen Radius aber verschiedenen Winkeln – ein „*Sprung*“ passiert von Punkt 5 nach Punkt 1 Zu der Darstellung: Die y-Achsen stellen jeweils den Imaginär-, die x-Achsen den Realteil dar. Die rechte Schraffur hat die Höhe 2π und eine unendliche Breite. Die Linke Schraffur ist unendlich in alle Richtungen. Die Zugehörigen Vektoren zu den Punkten der linken Abbildung haben alle die Länge 1, die Punkte in der Rechten ebene haben als Koordinaten $1(0, \to 0);\ 2(0; \frac{\pi}{4};\ 3(0; \frac{\pi}{2});\ 4(0; \frac{3\pi}{4});\ 5(0, \to 2\pi)$

da man bei eingeschränktem Bildbereich quasi eine bijektive Abbildung von den beiden Wertemengen ineinander erhält bzw. erhalten kann.