Übung 1 – Folgen & Reihen

1 Nomenklaturen und Symbole

Symbol	Bedeutung	Beispiel
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen	$5 \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen inkl. 0	$0 \in \mathbb{N}_0$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen	$-3 \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen	$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen	$3 + 2i \in \mathbb{C}$
$\forall$	„für alle“	$\forall n : n + 1 > n$
$\exists$	„es existiert“	$\exists x : x^2 = 4$
$\iff$	„genau dann, wenn“	x gerade $\iff x \bmod 2 = 0$
$\Rightarrow$	„folgt daraus“	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$
$\in$	Element von	$3 \in \mathbb{N}$
$\notin$	nicht Element von	$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
$\{\cdot\}$	Mengenklammer	$\{1, 2, 3\}$
(a, b)	offenes Intervall	$(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \infty\}$
$[a, b]$	geschlossenes Intervall	$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
$A \setminus B$	Menge A ohne B	$\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$
$\subseteq$	Teilmenge	$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
$\|x\|$	Betrag	$\|-5\| = 5$

2 Folgen & Reihen

2.1 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf die reelen Zahlen $\mathbb{R}$. Dabei bezeichnet man a_n das n-te Glied der Folge.

Eine Folge kann *explizit* oder *rekursiv* (Folgeglied hängt von einem oder mehreren vorherigen Gliedern ab) definiert werden:

Beispiel: Folgen

Explizite Definition:

$$a_n = 2n + 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Rekursive Definition:

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Beide führen zu denselben Gliedern:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 9, \ldots$$

2.2 Reihen

Eine Reihe ist die Summe der Glieder einer Folge. Die n-te Partialsumme s_n einer Zahlenfolge ist die Summe der Glieder von a_1 bis a_n:

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Beispiel: Reihe

Nehmen wir die Folge

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Die Reihe ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Die Partialsummen sind:

$$s_1 = \tfrac{1}{2}, \quad s_2 = \tfrac{3}{4}, \quad s_3 = \tfrac{7}{8}, \quad \ldots$$

2.3 Monotonie

Monoton wachsend	$a_{n+1} \geq a_n$
Strikt monoton wachsend	$a_{n+1} > a_n$
Monoton fallend	$a_{n+1} \leq a_n$
Strikt monoton fallend	$a_{n+1} < a_n$

2.4 Beschränktheit

Eine Folge ist nach *oben* beschränkt, falls alle Glieder a_n (für alle n) unter einem bestimmten Wert liegen.

Eine Folge ist nach *unten* beschränkt, falls alle Glieder a_n (für alle n) über einem bestimmten Wert liegen.

$\Rightarrow$ Die beschränkte Folge divergiert *nicht* nach $\pm\infty$.

Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existiert, so konvergiert die Folge gegen den Grenzwert L. Man nennt die Folge dann **Konvergent**. Wenn die Folge keinen Grenzwert besitzt, heisst sie **Divergent**.

Ist der Grenzwert $L = 0$, so heißt die Folge **Nullfolge**.

2.5 Zusammenhänge

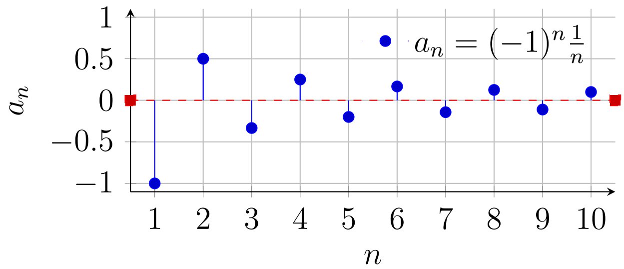
- Ist eine Folge *konvergent*, so ist sie immer auch *beschränkt*.

  Konvergent $\Rightarrow$ **Beschränkt**

- Ist eine Folge *beschränkt* und *monoton steigend/fallend*, so ist sie *konvergent*.

  Beschränkt & monoton steigend/fallend $\Rightarrow$ **Konvergent**

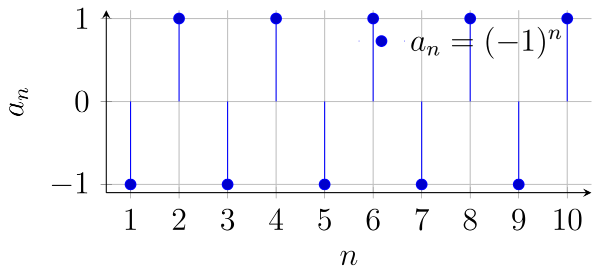
- Eine *konvergente* Folge ist *nicht* unbedingt *monoton steigend/fallend*.



- Eine nicht *beschränkte* Folge ist immer *divergent*, d.h. ihr Grenzwert ist $\pm\infty$.

  Nicht beschränkt $\Rightarrow$ **Divergent**

- Eine *divergente* Folge ist nicht unbedingt *nicht beschränkt*.



2.6 Grenzwerte von Folgen

Wenn die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ existieren, so gelten folgende Rechenregeln:

Summe	$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$
Konstanter Faktor	$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot A$
Produkt	$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$
Quotient $(B \neq 0)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$

2.6.1 Trick Brüche

Immer durch die **grösste Potenz des Nenners** teilen!

Beispiel: Bruch kürzen 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+5}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n^2}{n^3} + \frac{5}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{n} + \frac{5}{n^3}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

Beispiel: Bruch kürzen 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3+5}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n^3}{n^3} + \frac{5}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 + \frac{5}{n^3}}{2} = \frac{7+0}{2} = \frac{7}{2}$$

2.6.2 Trick Wurzeln

Wurzel-Ausdrücke so **erweitern**, dass man die dritte binomische Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ anwenden kann.

Beispiel: Wurzeln erweitern

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.7 Arithmetische Folgen & Reihen

Arithmetische Folgen:

Die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder ist konstant d.

explizit	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
rekursiv	$a_{n+1} = a_n + d$

Arithmetische Reihen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \big(a_1 + (k-1) \cdot d\big) = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Beispiel: Umformung arithmetische Reihe

$$\sum_{k=2}^{5} 3k \ = ?$$

Schwierigkeit: Wie muss man die Summe umformen, um die Formel $s_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ anwenden zu können?

$$d = 3, \quad a_1 = 6, \quad n = 4, \quad a_4 = 15$$

$$\sum_{k=2}^{5} 3k = \sum_{k=1}^{\overbrace{4}^{n}} \Big(\underbrace{6}_{a_1} + (k-1) \cdot \underbrace{3}_{d}\Big) = \frac{6+15}{2} \cdot 4 = 42$$

Spezialfall: Arithmetische Reihe der natürlichen Zahlen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.8 Geometrische Folgen & Reihen

Der Multiplikationsfaktor zwischen zwei Gliedern ist konstant q.

Geometrische Folgen:

explizit	$a_n = a_0 \cdot q^n$ bzw. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
rekursiv	$a_{n+1} = a_n \cdot q$

Geometrische Reihen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} \ = \ a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Falls $|q| < 1$, dann konvergiert auch die unendliche Reihe (weil $q^n \to 0$):

$$\boxed{s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad (|q| < 1)}$$

Beispiel: Unendlich geometrische Reihe

$$a_n = 24 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 24,\ a_2 = 12,\ a_3 = 6,\ a_4 = 3,\ \ldots,\ q = \frac{1}{2}$$

$$s_4 = 24 + 12 + 6 + 3 = 45$$

$$s_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 24 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 48$$

Weitere nützliche Summen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$