

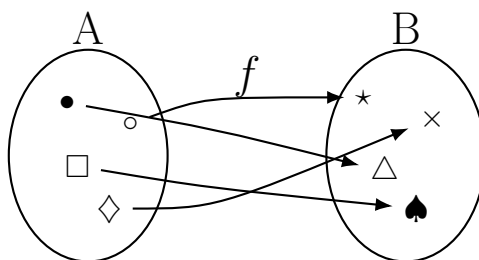
# Übung 2 - Funktionen, Grenzwerte & Stetigkeit

## 1 Funktionen

### 1.1 Definition

Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$ . Die Funktion nimmt ein Element aus der Menge  $A$  und weist diesem *genau ein* Element der Menge  $B$  zu.

$$f : A \rightarrow B, \quad a \mapsto f(a)$$



**A:**

Menge aller *Argumente*, die in die Funktion eingesetzt werden dürfen.

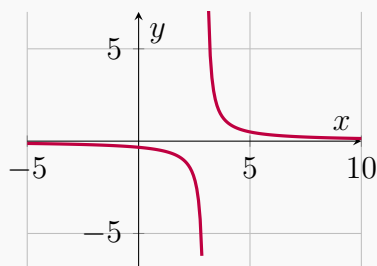
**B:**

Menge aller *Werte*, welche die Funktion annehmen kann.

#### Beispiel 1

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

Definitionsbereich: , Wertebereich: .



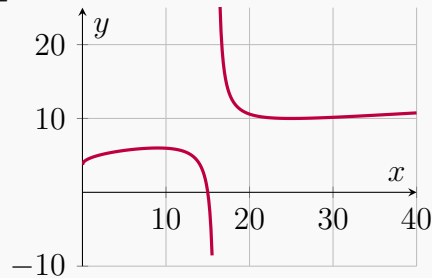
## Beispiel 2

$$g(x) = \frac{x - 15}{\sqrt{x} - 4}$$

Definitionsbereich:

Wertebereich:

*Hinweis:*  $\sqrt{x}$  erfordert  $x \geq 0$  & der Nenner darf nicht 0 sein ( $\sqrt{x} \neq 4$ ).



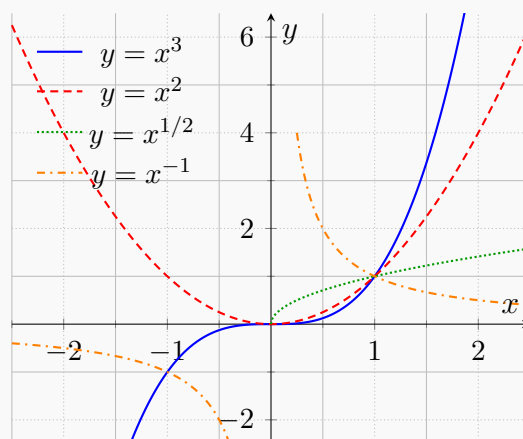
## 1.2 Verschiedene Funktionen

Potenzfunktionen:

Rechenregeln:  $a, b \in \mathbb{R}^+, m, n, k \in \mathbb{R}$ 

- |  |   |
|--|---|
| • $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$                      | • $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$                         |
| • $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$                    | • $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k]{a^{k \cdot \frac{m}{n}}}$       |
| • $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$                      | • $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$     |
| • $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$                | • $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ |
| • $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ |   |

Beispiel: Potenzfunktionen

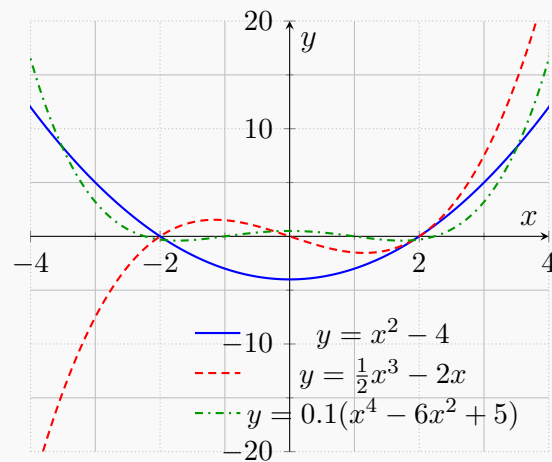


**Polynomfunktionen:**

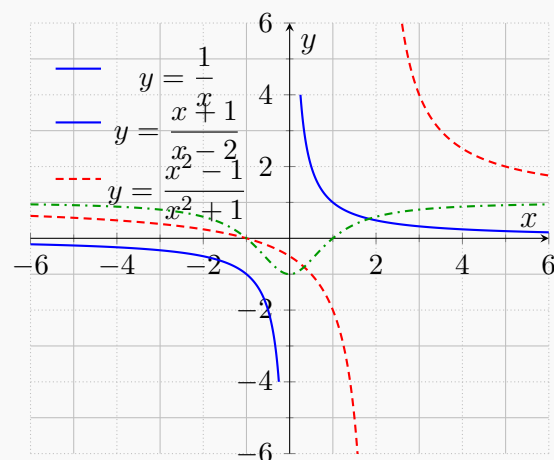
$a_i$ : Koeffizient     $n$ : Grad des Polynoms

$\Rightarrow$

$\lambda_n$ : Nullstellen des Polynoms  $f(x)$

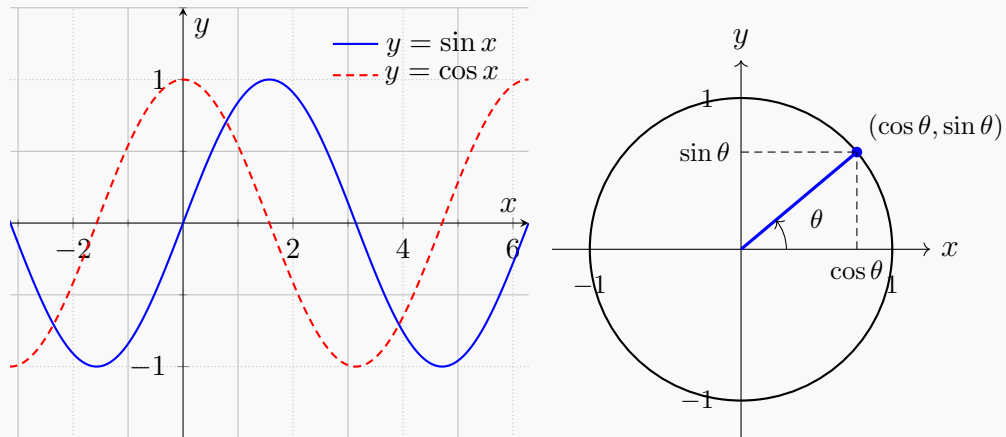
**Beispiel: Polynomfunktionen****Rationale Funktionen:**

wobei  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynome sind und  $q(x) \neq 0$ .

**Beispiel: Rationale Funktionen**

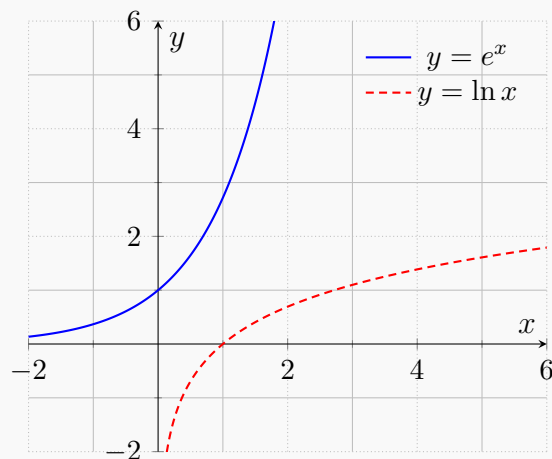
**Trigonometrische Funktionen:**

⇒ wichtige Beziehungen:

**Beispiel: Sinus & Cosinus****Exponential & Logarithmusfunktionen:****Rechenregeln:**

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$

## Beispiel: Exponential &amp; Logarithmusfunktionen



## 1.3 Eigenschaften von Funktionen

## 1.3.1 Gerade/zngerade

Gerade Funktion: Ungerade Funktion: 

## Beispiel: Vergleich gerade/ungerade Funktionen

$$f(x)$$

$$f(-x)$$

## 1.3.2 Monotonie

(Strikt) monoton wachsend:  (strikt: )(Strikt) monoton fallend:  (strikt: )

## 2 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

 $\Rightarrow$  Gleiche Rechenregeln wie bei den Folgen!

## 2.1 Bernoulli–De L'Hospital Regel

Falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \quad,$$

dann gilt:

⇒ Die Regel darf *mehrfach* angewendet werden, jeweils unter erneuter Prüfung der Voraussetzungen.

## 2.2 Wichtige Grenzwerte

**Basics:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} =$$

**Trigonometrische Grenzwerte:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} =$$

**Unterschiedlich schnell wachsende Funktionen:**

Für  $a, m \in \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{mx}}{x^a} &= \quad , & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{mx}} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} &= \quad , & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{\ln(x)} &= \end{aligned}$$

*Merke:*  $e^x$  wächst schneller als jede Potenz;  $\ln(x)$  wächst langsamer als jede Potenz.

**Eulersche Zahl:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x =$$

## 2.3 Grenzwerte berechnen

1. Immer versuchen, einfach Wert einzusetzen.
2. Bekommt man einen der folgenden Ausdrücke:

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

dann verwendet man die Regel von L'Hospital.

3. Wenn L'Hospital nicht erlaubt ist, gibt es Alternativen:

- **Bei Brüchen: durch größte Potenz teilen**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 5}{2x^3} =$$

- Bei Brüchen: Ausklammern und Kürzen

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} =$$

- Bei Wurzeln: Erweitern (3. binomische Formel)

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7} =$$

## 2.4 Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion  $f$  heißt stetig im Punkt  $c$ , wenn  $f(c)$  definiert ist und

### Beispiel: Stetig

Gegeben sei  $f(x) = x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = \quad, \quad f(1) = 1^2 = \quad.$$

Da

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1),$$

ist  $f(x) = x^2$  **stetig** im Punkt  $x = 1$ .

### Beispiel: Nicht stetig (Sprung)

Gegeben sei

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \quad, \quad g(0) = \quad.$$

Da

existiert nicht.  $\Rightarrow g$  ist im Punkt  $x = 0$ .