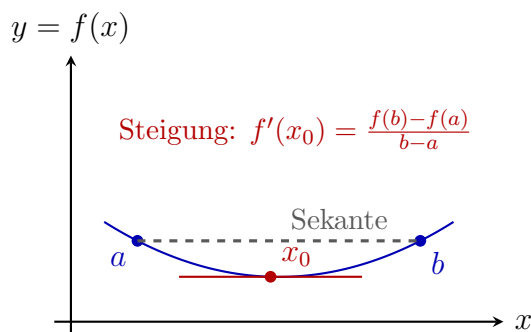


Übung 5 - Mittelwertsatz, Extremalaufgaben & Komplexe Zahlen I

1 Mittelwertsatz

Allgemein: Ist $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ eine differenzierbare Funktion, dann gibt es mindestens ein x_0 ,

$$a < x_0 < b \quad \text{mit} \quad f'(x_0)(b - a) = f(b) - f(a)$$



Folgerung: Die Funktion $f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ (streng) monoton wachsend, wenn

$$f'(x) > 0 \quad \text{für alle } a < x < b.$$

Beispiel: Mittelwertsatz

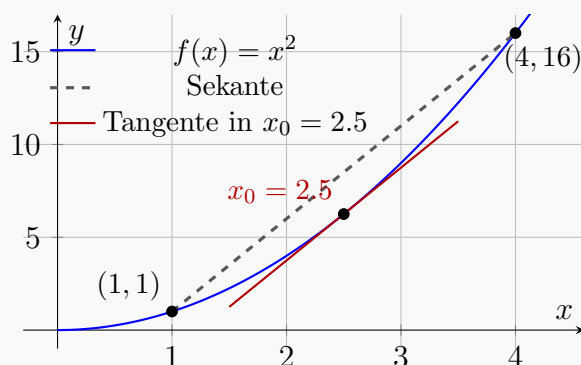
Gegeben: $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[1, 4]$.

$$\text{Gesucht: } x_0 \in (1, 4) \text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

$$f'(x) = 2x \quad \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 - 1}{3} = 5$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2.5$$

Ergebnis: Es existiert ein Punkt $x_0 = 2.5$ in $(1, 4)$, an dem die Tangente dieselbe Steigung wie die Sekante besitzt.



2 Bernoulli-Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Anwendbar, wenn:

- $f(a) = f(b) = 0$ oder $f(a) = f(b) = \pm\infty$
- $f(x)$ und $g(x)$ sind differenzierbar

Beispiel 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(x)} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\cos(x)} = 3$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \end{aligned}$$

Wieder $\frac{0}{0} \rightarrow$ nochmals Bernoulli-Hôpital anwenden:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 Kurvendiskussion

- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ negative Steigung im Punkt x_0
- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ positive Steigung im Punkt x_0
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ Extremum im Punkt x_0

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \text{Maximum} \\ f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \text{Minimum} \\ f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 & \Rightarrow \text{Sattelpunkt (z.B. } x^4) \end{cases}$$

Krümmung:

$$\begin{cases} f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt} \\ f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \text{linksgekrümmt} \\ f''(x_0) = 0 & \Rightarrow \text{Wendepunkt} \end{cases}$$

4 Extremalaufgaben

Vorgehen:

- Funktionswerte an den Intervallgrenzen bestimmen
- Funktionswerte, wo $f'(x)$ nicht definiert ist, bestimmen
- Funktionswerte, wo $f'(x) = 0$ ist, bestimmen
- Alle Funktionswerte vergleichen, um Min/Max zu bestimmen

Beispiel: Extremalaufgabe

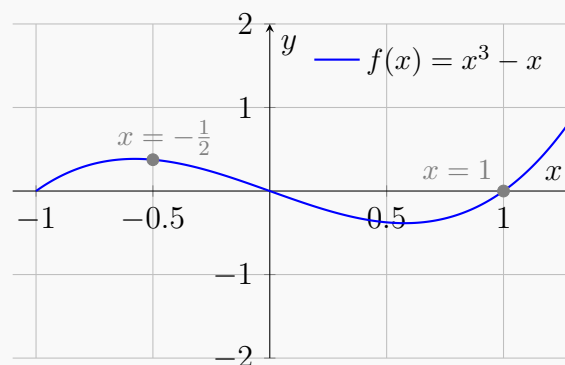
$$f(x) = x^3 - x, \quad D \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \quad \text{und} \quad f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.577$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ liegt im Definitionsbereich} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow \text{Globales Maximum: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \quad \text{Globales Minimum: } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$



5 Komplexe Zahlen

Definition: $z = x + y \cdot i \quad z \in \mathbb{C}$

- Realteil: $\operatorname{Re}(z) = x$
- Imaginärteil: $\operatorname{Im}(z) = y$

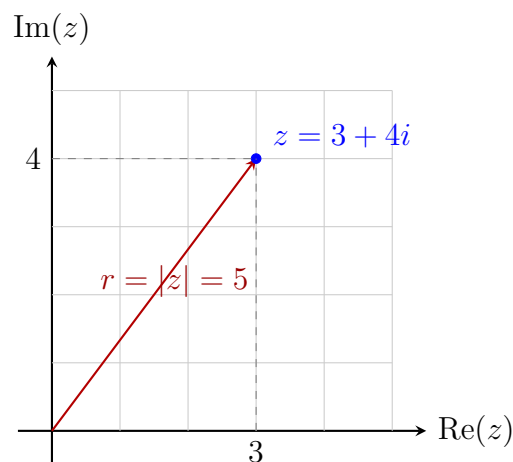
$$i^2 = -1 \quad \text{und} \quad i = \sqrt{-1}$$

5.1 Kartesische Form:

$$z = x + yi$$

Darstellung im Koordinatensystem:

zum Beispiel: $3 + 4i \rightarrow r = |z| = 5$



5.2 Konjugiert Komplexe Zahlen

Die zu einer komplexen Zahl z konjugiert komplexe Zahl \bar{z} ist die Zahl z mit negativem Imaginärteil:

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Sätze:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$\overline{\bar{z}} = z$$

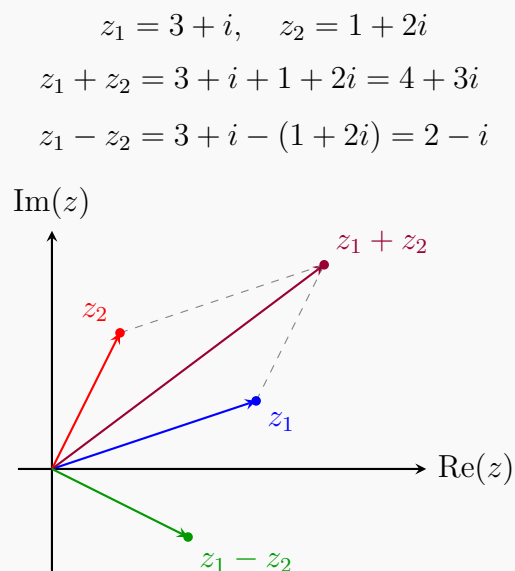
5.3 Rechenarten von Komplexen Zahlen

5.3.1 Addition & Subtraktion

Am einfachsten in der kartesischen Darstellung:

⇒ Addiert/Subtrahiert werden jeweils der Realteil und der Imaginärteil.

Beispiel: Addition/Subtraktion



5.3.2 Multiplikation

Multiplikation in kartesischer Darstellung kann schnell mühsam werden, da viele Terme entstehen. (In Polarform wird die Multiplikation viel einfacher)

Beispiel: Multiplikation in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 + i)(1 + 2i) \\ &= 3 + 3 \cdot 2i + i \cdot 1 + i \cdot 2i = 3 + 7i - 2 \\ z_1 \cdot z_2 &= 1 + 7i \end{aligned}$$

5.3.3 Division

Auch Division ist in kartesischer Form aufwändig. Man schreibt die zwei Zahlen als Bruch und erweitert dann mit dem konjugiert Komplexen des Nenners.

Beispiel: Division in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{1+2i} &= \frac{3+i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} \\ &= \frac{(3+i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{3-6i+i-2i^2}{5} = \frac{5-5i}{5} = 1-i\end{aligned}$$