Übung 1 – Folgen & Reihen

1 Nomenklaturen und Symbole

Symbol	**Bedeutung**	**Beispiel**
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen	
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen inkl. 0	
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen	
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen	
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen	
$\forall$	„für alle“	
$\exists$	„es existiert“	
$\iff$	„genau dann, wenn“	
$\Rightarrow$	„folgt daraus“	
$\in$	Element von	
$\notin$	nicht Element von	
$\{\cdot\}$	Mengenklammer	
(a, b)	offenes Intervall	
$[a, b]$	geschlossenes Intervall	
$A \setminus B$	Menge A ohne B	
$\subseteq$	Teilmenge	
$\lvert x\rvert$	Betrag	

2 Folgen & Reihen

2.1 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf die reelen Zahlen $\mathbb{R}$. Dabei bezeichnet man a_n das n-te Glied der Folge.

Eine Folge kann *explizit* oder *rekursiv* (Folgeglied hängt von einem oder mehreren vorherigen Gliedern ab) definiert werden:

Beispiel: Folgen

Explizite Definition:

Rekursive Definition:

Beide führen zu denselben Gliedern:

2.2 Reihen

Eine Reihe ist die Summe der Glieder einer Folge. Die n-te Partialsumme s_n einer Zahlenfolge ist die Summe der Glieder von a_1 bis a_n:

$$s_n =$$

Beispiel: Reihen

Nehmen wir die Folge

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Die Reihe ist:

Die Partialsummen sind:

2.3 Monotonie

Monoton wachsend	$a_{n+1} \geq a_n$
Strikt monoton wachsend	$a_{n+1} > a_n$
Monoton fallend	$a_{n+1} \leq a_n$
Strikt monoton fallend	$a_{n+1} < a_n$

2.4 Beschränktheit

Eine Folge ist nach *oben* beschränkt, falls alle Glieder a_n (für alle n) unter einem bestimmten Wert liegen.

Eine Folge ist nach *unten* beschränkt, falls alle Glieder a_n (für alle n) über einem bestimmten Wert liegen.

$\Rightarrow$ Die beschränkte Folge divergiert *nicht* nach $\pm\infty$.

Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existiert, so konvergiert die Folge gegen den Grenzwert L. Man nennt die Folge dann **Konvergent**. Wenn die Folge keinen Grenzwert besitzt, heisst sie **Divergent**.

Ist der Grenzwert $L = 0$, so heißt die Folge **Nullfolge**.

2.5 Zusammenhänge

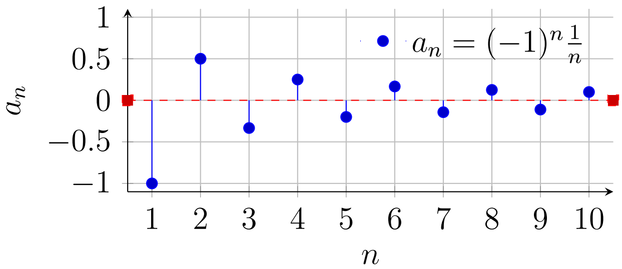
- Ist eine Folge *konvergent*, so ist sie immer auch *beschränkt*.

  Konvergent $\Rightarrow$ **Beschränkt**

- Ist eine Folge *beschränkt* und *monoton steigend/fallend*, so ist sie *konvergent*.

  Beschränkt & monoton steigend/fallend $\Rightarrow$ **Konvergent**

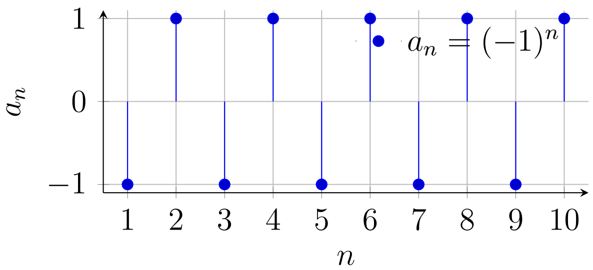
- Eine *konvergente* Folge ist *nicht* unbedingt *monoton steigend/fallend*.



- Eine nicht *beschränkte* Folge ist immer *divergent*, d.h. ihr Grenzwert ist $\pm\infty$.

  Nicht beschränkt $\Rightarrow$ **Divergent**

- Eine *divergente* Folge ist nicht unbedingt *nicht beschränkt*.



2.6 Grenzwerte von Folgen

Wenn die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ existieren, so gelten folgende Rechenregeln:

Summe	$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) =$
Konstanter Faktor	$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) =$
Produkt	$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) =$
Quotient $(B \neq 0)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$

2.6.1 Trick Brüche

Immer durch die **grösste Potenz des Nenners** teilen!

Beispiel: Bruch kürzen 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+5}{2n^3} =$$

Beispiel: Bruch kürzen 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3+5}{2n^3} =$$

2.6.2 Trick Wurzeln

Wurzel-Ausdrücke so **erweitern**, dass man die dritte binomische Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ anwenden kann.

Beispiel: Wurzeln erweitern

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) =$$

$$=$$

$$=$$

2.7 Arithmetische Folgen & Reihen

Arithmetische Folge:

Die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder ist konstant d.

explizit

rekursiv

Arithmetische Reihe:

$$s_n =$$

Beispiel: Umformung arithmetische Reihe

$$\sum_{k=2}^{5} 3k \quad = ?$$

Schwierigkeit: Wie muss man die Summe umformen, um die Formel $s_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ anwenden zu können?

$$\sum_{k=2}^{5} 3k =$$

Spezialfall: Arithmetische Reihe der natürlichen Zahlen:

$$s_n =$$

2.8 Geometrische Folgen & Reihen

Der Multiplikationsfaktor zwischen zwei Gliedern ist konstant q.

Geometrische Folgen:

explizit	$a_n = a_0 \cdot q^n$ bzw. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
rekursiv	$a_{n+1} = a_n \cdot q$

2.9 Geometrische Reihen

$$s_n =$$

Falls $|q| < 1$, dann konvergiert auch die unendliche Reihe (weil $q^n \to 0$):

$$s_\infty =$$

Beispiel: Unendliche geometrische Reihe

$$a_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = \quad , \; a_2 = \quad , \; a_3 = \quad , \; a_4 = \quad , \; \ldots , \; q =$$

$$s_4 =$$

$$s_\infty =$$

Weitere nützliche Summen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 =$$