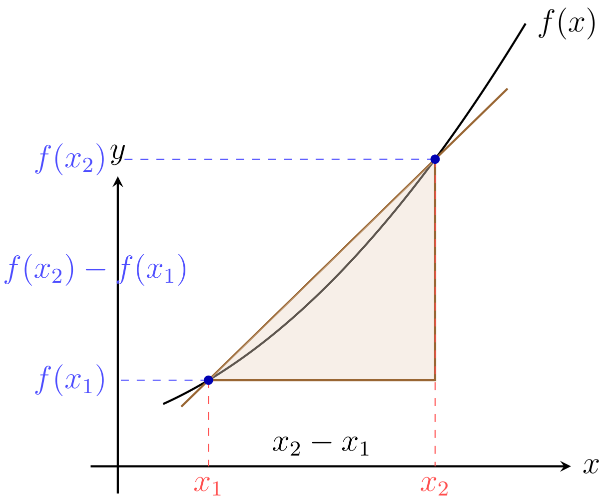
Übung 4 - Einführung Differentialrechnung und Fehlerrechnung

1 Differentialrechnung

Differenzenquotient:

Differentialquotient:



- Existiert der Differentialquotient, so ist die Funktion $f(x)$ differenzierbar in x_0.
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
- Nicht jede stetige Funktion ist aber überall differenzierbar.

Beispiel: $f(x) = |x|$ ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

1.1 Ableitungsregeln

Potenzgesetz:

$$f(x) = ax^m \quad \Rightarrow$$

Summengesetz:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow$$

Produktregel:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow$$

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow$$

Kettenregel:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow$$

Beispiel Kettenregel

$$f(x) = (3x^2 + 5)^3, \quad g(\cdot) = (\cdot)^3, \quad h(x) = 3x^2 + 5$$
$$g'(\cdot) = \qquad , \quad h'(x) =$$
$$\Rightarrow f'(x) = \qquad\qquad =$$

1.2 Inverse

Spezialfall Inverse:

Beispiel

$$f(x) = x^2 + 2, \quad f^{-1}(x) = \qquad ,$$

1.3 Trigonometrische Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) && \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\
f(x) &= \cos(x) && \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \\
f(x) &= \tan(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \\
f(x) &= \cot(x) && \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x)) \\
f(x) &= \sin^2(x) && \Rightarrow f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x) \\
f(x) &= \cos^2(x) && \Rightarrow f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) = -\sin(2x) \\
f(x) &= \arcsin(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f(x) &= \arccos(x) && \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f(x) &= \arctan(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
f(x) &= \sinh(x) && \Rightarrow f'(x) = \cosh(x) \\
f(x) &= \cosh(x) && \Rightarrow f'(x) = \sinh(x)
\end{aligned}
$$

1.4 Weitere Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x && \Rightarrow f'(x) = e^x \\
f(x) &= a^x && \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a) \\
f(x) &= \ln(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\
f(x) &= \log_a(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)} \\
f(x) &= \ln|x| && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \\
f(x) &= e^{g(x)} && \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \\
f(x) &= a^{g(x)} && \Rightarrow f'(x) = a^{g(x)} \ln(a) \cdot g'(x) \\
f(x) &= \ln(g(x)) && \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}
\end{aligned}
$$

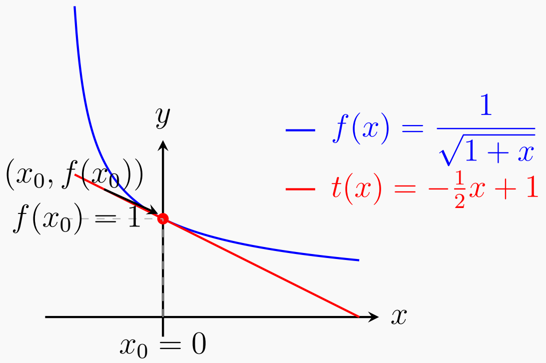
1.5 Linearisieren, Tangente an Kurve

Man nähert eine Funktion $f(x)$ durch eine lineare Funktion $t(x)$ im Punkt x_0 an.

Berechnung:

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad t(x) \text{ im Punkt } x_0 = 0$$



2 Fehlerrechnung

Absoluter Fehler:

Relativer Fehler:

Beispiel

Aufgabe: Bestimme den relativen Fehler des berechneten Zylindervolumens bei einem Messfehler des Radius von 1%. Höhe $h = 1$.