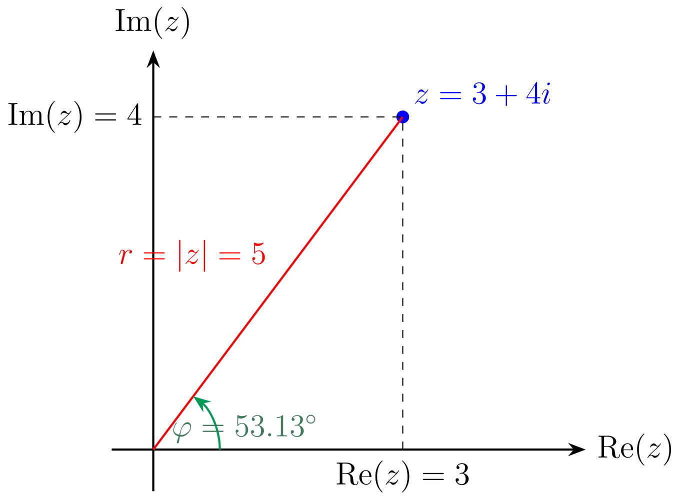
Übung 6 - Komplexe Zahlen II

1 Darstellungsformen

1.1 Vergleich

Kartesische Form	$\boxed{x + y\,i}$	$3 + 4i$
Polarform	$\boxed{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$	$5(\cos(53.13°)+i\sin(53.13°))$
Exponentialform	$\boxed{r\,e^{i\varphi}}$	$5\,e^{i\cdot 0.93}$ (φ in Rad)



$\varphi = arg(z)$ φ heisst *Argument* von z

1.2 Umrechnungen

Radius: $\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

Argument:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{für } x > 0 \text{ (rechte Halbebene)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{für } x < 0,\ y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & \text{für } x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Wegen der Periodizität des Tangens muss man bei der Berechnung von φ etwas aufpassen

x/y Werte: $\boxed{x = r \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\varphi}$

1.3 Konjugiert komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} z &= x + y\,i & \Rightarrow \quad \bar{z} &= x - y\,i \\ z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) & \Rightarrow \quad \bar{z} &= r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ z &= r\,e^{i\varphi} & \Rightarrow \quad \bar{z} &= r\,e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

2 Multiplikation

Multiplikation mit kartesischer Darstellung kann schnell mühsam werden.

Einfacher geht es in Polar- oder Exponentialform:

Multiplikation in Polarform

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= (r_1 \cdot r_2)\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \end{aligned}$$

Multiplikation in Exponentialform

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 r_2)\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beispiel in Polarform

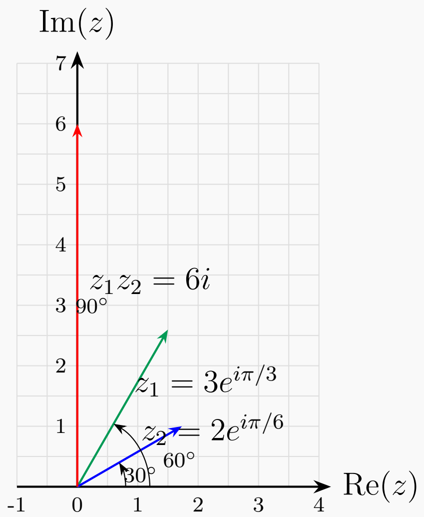
$$z_1 = 3(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}), \quad z_2 = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad z_1 \cdot z_2 &= (3 \cdot 2)\left[\cos(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6})\right] \\ &= 6\left[\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})\right] = 6i \end{aligned}$$

Beispiel in Exponentialform

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \quad z_1 \cdot z_2 = (3 \cdot 2)\, e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$$



3 Division

Auch Division ist in kartesischer Form mühsam.

Einfacher in Polar- oder Exponentialform:

Division in Polarform

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Division in Exponentialform

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Beispiel in Polarform

$$z_1 = 4(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}), \quad z_2 = 2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{\pi}{3})\right]$$

$$= 2\left[\cos(-\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{6})\right] = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} - i\sin\tfrac{\pi}{6})$$

Beispiel in Exponentialform

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\, e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

4 Potenzieren

Potenzieren geht auch einfacher in Polar- oder Eulerform.

Potenz in Polarform

$$z^n = [\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,]^n = r^n[\,\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\,]$$

Potenz in Exponentialform

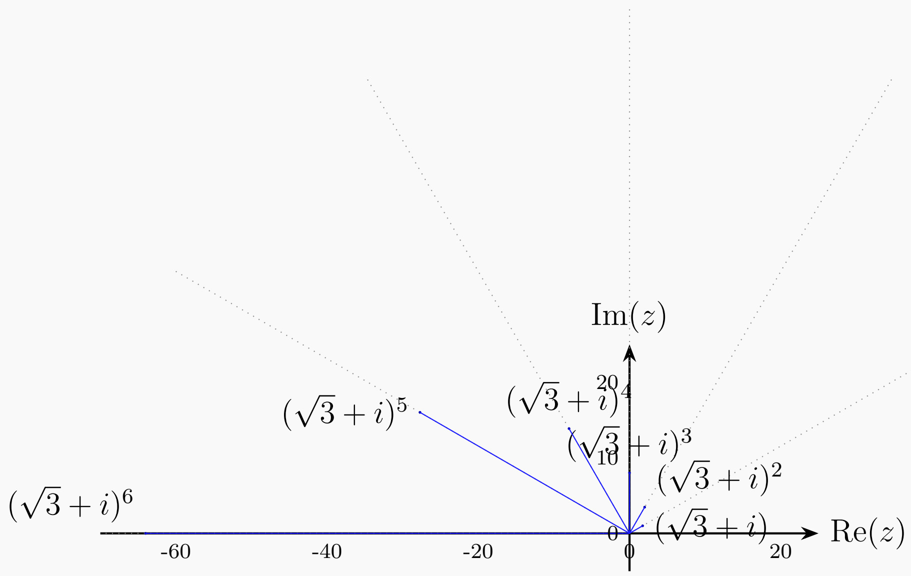
$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

Beispiel in Polarform

$$z = \sqrt{3} + i = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})$$
$$\Rightarrow \quad z^6 = [\,2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})\,]^6 = 2^6[\,\cos(6\cdot\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(6\cdot\tfrac{\pi}{6})\,]$$
$$= 64[\,\cos(\pi) + i\sin(\pi)\,] = 64(-1 + 0i) = -64$$

Beispiel in Exponentialform

$$z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$\Rightarrow \quad z^6 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^6 = 2^6 e^{i\frac{6\pi}{6}} = 64e^{i\pi} = -64$$



5 Wurzelziehen

Es gilt:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}}$$

Es gibt immer genau n voneinander verschiedene Lösungen.

$\Rightarrow$ Diese liegen regelmäßig auf einem n-Eck mit Radius $\sqrt[n]{|z|}$.

$$\boxed{z = r\,e^{i\varphi} = r\,e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad r = \sqrt[n]{|z|}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung der n-ten Wurzel

1. Komplexe Zahl in Exponentialform bringen

$$\boxed{z = r\,e^{i\varphi}}$$

2. Exponentialform mit $k \cdot 2\pi$-Term schreiben

$$\boxed{z = r\,e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)}}$$

3. Wurzeldefinition anwenden

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{1}{n}(\varphi + k\cdot 2\pi)}}$$

4. Die n Lösungen

Die n Lösungen erhält man, wenn man $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ einsetzt.

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{1}{n}(\varphi + k\cdot 2\pi)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1}$$

Beispiel: 5. Wurzel von $\sqrt{3}+i$

1. Betrag und Argument berechnen:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad z = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2. Exponentialform mit $k \cdot 2\pi$-Term schreiben:

$$z = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi\right)}$$

3. Wurzeldefinition anwenden:

$$\sqrt[5]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)} = \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{\pi + k\cdot 12\pi}{30}}$$

4. Die fünf Lösungen:

$$z_0 = \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{\pi}{30}}$$
$$z_1 = \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{30}}$$
$$z_2 = \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{25\pi}{30}}$$
$$z_3 = \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{37\pi}{30}}$$
$$z_4 = \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{49\pi}{30}}$$