Übung 7 - Komplexe Zahlen III, Hyperbolische Funktionen & Grössenordnung

1 Komplexe Zahlen

1.1 Quadratische Gleichungen

Falls die Diskriminante $(b^2 - 4ac)$ einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

negativ wird, so besitzt die Gleichung zwei komplex-konjugierte Lösungen.

Beispiel

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm i \cdot 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}\, i$$

1.2 Polynome höherer Ordnung

Jedes Polynom n-ten Grades besitzt n Nullstellen. Diese Nullstellen können auch **komplex** sein.

$\Rightarrow$ Entweder sind sie reell oder treten in komplex-konjugierten Paaren auf.

D. h. ist $1 + i$ eine Nullstelle, so ist $1 - i$ ebenfalls eine Nullstelle.

Beispiel

$$x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 14x^2 + 9x - 10 = 0$$

Finde die 5 Nullstellen. Gegeben sei:

$$x_1 = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow \text{Dann ist auch } x_2 = 1 - 2i$$

Wir haben also bereits zwei Nullstellen gefunden:

$$(x - (1 + 2i)) \quad \text{und} \quad (x - (1 - 2i))$$

Nun multiplizieren wir diese beiden Faktoren aus, um danach eine Polynomdivision durchzuführen:

$$(x-(1+2i))(x-(1-2i)) = x^2 - 2x + 5$$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\big(& x^5 & -4x^4 & +10x^3 & -14x^2 & +9x & -10\big) : \big(x^2-2x+5\big) = x^3-2x^2+x-2 \\
 & -x^5 & +2x^4 & -5x^3 & & & \\
\hline
 & & -2x^4 & +5x^3 & -14x^2 & & \\
 & & 2x^4 & -4x^3 & +10x^2 & & \\
\hline
 & & & x^3 & -4x^2 & +9x & \\
 & & & -x^3 & +2x^2 & -5x & \\
\hline
 & & & & -2x^2 & +4x & -10 \\
 & & & & 2x^2 & -4x & +10 \\
\hline
 & & & & & & 0
\end{array}
$$

Wir müssen jetzt noch die Nullstellen von

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

finden.
Da es sich um ein Polynom 3. Grades handelt, versuchen wir, eine Nullstelle zu **raten**:

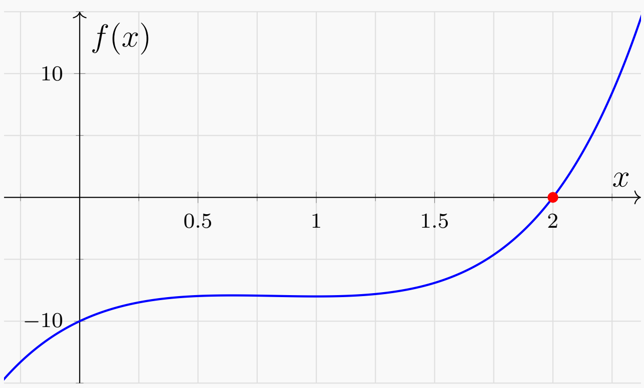
$$\text{Versucht es zuerst mit folgenden Zahlen: } x = -1,\ 1,\ i,\ -i$$

Man findet:

$$x = \pm i \Rightarrow \quad (x^2+1)(x-2) = 0$$
$$x_3 = 2, \quad x_4 = i, \quad x_5 = -i$$

Alle Nullstellen:

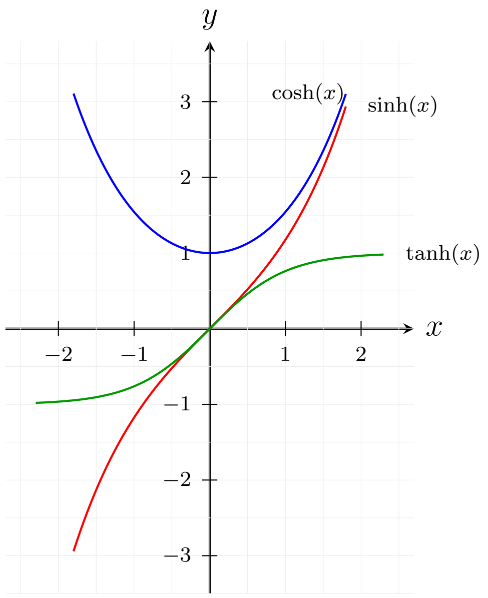
$$x_1 = 1+2i, \quad x_2 = 1-2i, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = i, \quad x_5 = -i$$



2 Hyperbolische Trigonometrie

2.1 Definitionen

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



2.2 Wichtige Identitäten

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$
- $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
- $(\sinh(x))' = \cosh(x)$
- $(\cosh(x))' = \sinh(x)$
- $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
- $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
- $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
- $\cosh(-x) = \cosh(x)$

3 Grössenordnungen von Funktionen

3.1 Definition

$f(x)$ ist von **kleinerer Grössenordnung** als $g(x)$, wenn gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Man schreibt mit (kleinem) Landau-o:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \to \infty$$

Man sagt auch: $f(x)$ wächst *langsamer* als $g(x)$.

3.2 Regeln

- $\ln(x) = o(x^a), \quad a > 0$
- $x^a = o(e^x), \quad a > 0$
- $x^a = o(x^b), \quad a, b > 0,\ a < b$
- $e^{ax} = o(e^{bx}), \quad a, b > 0,\ a < b$

Beispiel

Ordne die folgenden Funktionen nach ihrer Grösse für $x \to \infty$:

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = e^{5x+1}, \quad f_3(x) = \ln(x^3),$$
$$f_4(x) = \ln(e^{x^4} - 2), \quad f_5(x) = \ln(x^2)$$

Berechnung der Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{5x+1}} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{5x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{x^4} - 2)}{x^3} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{x^4})}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^3} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{x^4} - 2)}{e^{5x+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)}{3\ln(x)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad e^{5x+1} > \ln(e^{x^4} - 2) > x^3 > \ln(x^3) \approx \ln(x^2)$$

Bemerkung:

Wenn

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq A \quad \text{für } A \in [0, \infty),$$

so wächst $f(x)$ *höchstens so schnell wie* $g(x)$ *bis auf einen konstanten Faktor*. Oder in anderen Worten *nicht wesentlich schneller*.

$$f(x) = O(g(x))$$

Vergleich zwischen O und o

Notation	**Verhältnis** $\frac{f}{g}$	**Beispiel**
$f = O(g)$	3	$3x^2 + 5x = O(x^2)$
$f = o(g)$	$\to 0$	$x = o(x^2)$

Kurz gesagt: $$\begin{cases} f = O(g(x)) & \Leftrightarrow \exists\, C > 0 : |f(x)| \leq C\,|g(x)| \\ f = o(g(x)) & \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{cases}$$