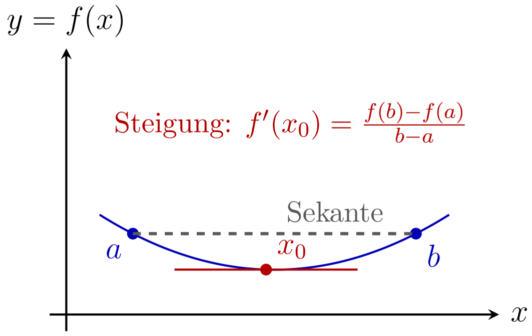
Übung 5 - Mittelwertsatz, Extremalaufgaben & Komplexe Zahlen I

1 Mittelwertsatz

Allgemein: Ist $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ eine differenzierbare Funktion, dann gibt es mindestens ein x_0,

$$a < x_0 < b \quad \text{mit} \quad f'(x_0)(b-a) = f(b) - f(a)$$



Folgerung: Die Funktion $f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ (streng) monoton wachsend, wenn

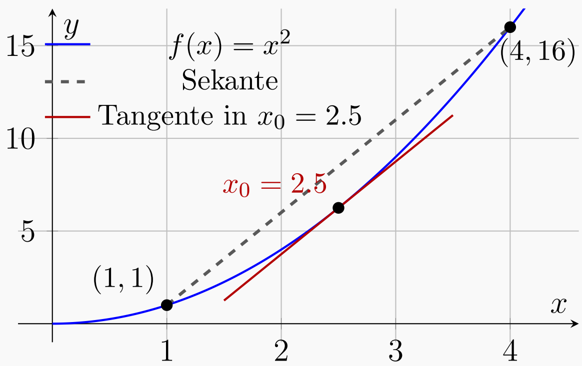
$$f'(x) > 0 \quad \text{für alle } a < x < b.$$

Beispiel: Mittelwertsatz

Gegeben: $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[1, 4]$.

$$\text{Gesucht: } x_0 \in (1, 4) \text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

Ergebnis: Es existiert ein Punkt , an dem die Tangente dieselbe Steigung wie die Sekante besitzt.



2 Bernoulli-Hôpital

Anwendbar, wenn:

- $f(a) = f(b) = 0 \quad$ oder $\quad f(a) = f(b) = \pm\infty$
- $f(x)$ und $g(x)$ sind differenzierbar

Beispiel: B-H 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(x)}$$

Beispiel: B-H 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Wieder $\frac{0}{0}$ $\to$ nochmals Bernoulli-Hôpital anwenden:

3 Kurvendiskussion

- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ negative Steigung im Punkt x_0
- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ positive Steigung im Punkt x_0
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \\ f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \\ f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 & \Rightarrow \end{cases}$$

Krümmung:

$$\begin{cases} f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \\ f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \\ f''(x_0) = 0 & \Rightarrow \end{cases}$$

4 Extremalaufgaben

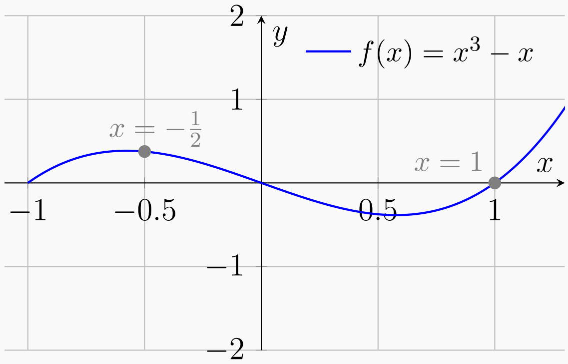
Vorgehen:

- Funktionswerte an den Intervallgrenzen bestimmen
- Funktionswerte, wo $f'(x)$ nicht definiert ist, bestimmen
- Funktionswerte, wo $f'(x) = 0$ ist, bestimmen
- Alle Funktionswerte vergleichen, um Min/Max zu bestimmen

Beispiel: Extremalaufgabe

$$f(x) = x^3 - x, \quad D \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$f'(x) =$$



5 Komplexe Zahlen

Definition: $z \in \mathbb{C}$

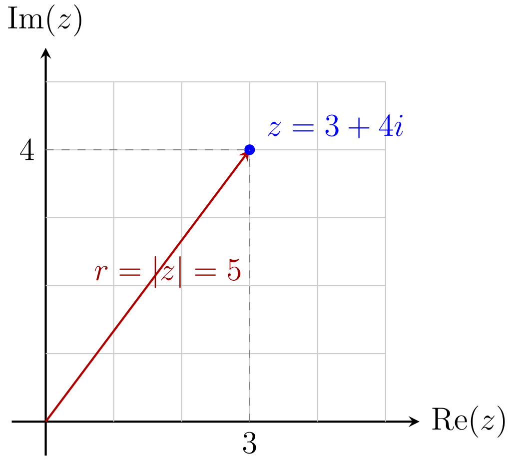
- Realteil: $\mathrm{Re}(z) = x$
- Imaginärteil: $\mathrm{Im}(z) = y$

5.1 Kartesische Form:

$z = x + yi$

Darstellung im Koordinatensystem:

zum Beispiel: $3 + 4i \quad \rightarrow r = |z| =$



5.2 Konjugiert Komplexe Zahlen

Die zu einer komplexen Zahl z konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ ist die Zahl z mit negativem Imaginärteil:

Sätze:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

5.3 Rechenarten von Komplexen Zahlen

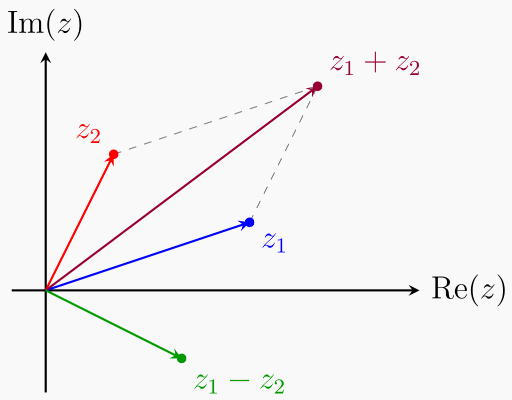
5.3.1 Addition & Subtraktion

Am einfachsten in der kartesischen Darstellung:

$\Rightarrow$ Addiert/Subtrahiert werden jeweils der Realteil und der Imaginärteil.

Beispiel: Addition/Subtraktion

$$z_1 = 3 + i, \quad z_2 = 1 + 2i$$



5.3.2 Multiplikation

Multiplikation in kartesischer Darstellung kann schnell mühsam werden, da viele Terme entstehen. (In Polarform wird die Multiplikation viel einfacher)

Beispiel: Multiplikation in kartesischen Koordinaten

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + i)(1 + 2i)$$

5.3.3 Division

Auch Division ist in kartesischer Form aufwändig. Man schreibt die zwei Zahlen als Bruch und erweitert dann mit dem konjugiert Komplexen des Nenners.

Beispiel: Division in kartesischen Koordinaten

$$\frac{3+i}{1+2i} =$$