Übung 8 - Höhere Ableitungen & Darstellungsformen für ebene Kurven

1 Höhere Ableitungen

1.1 Kurvendiskussion

- $f'(\varepsilon) < 0$ negative Steigung im Punkt ε
- $f'(\varepsilon) > 0$ positive Steigung im Punkt ε
- $f'(\varepsilon) = 0$ Extremum im Punkt ε

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(\varepsilon) < 0 & \Rightarrow \text{Maximum im Punkt } \varepsilon \\ f''(\varepsilon) > 0 & \Rightarrow \text{Minimum im Punkt } \varepsilon \\ f''(\varepsilon) = 0 \text{ und } f'''(\varepsilon) \neq 0 & \Rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

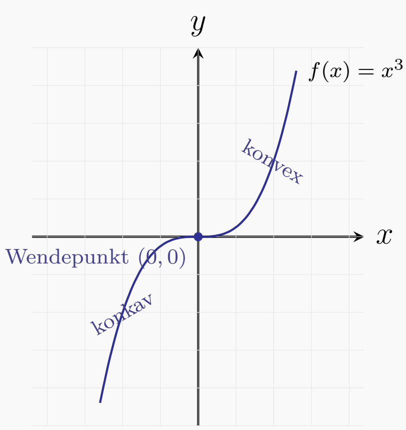
- $f''(\varepsilon) < 0$ Kurve rechts gekrümmt (konkav) im Punkt ε
- $f''(\varepsilon) > 0$ Kurve links gekrümmt (konvex) im Punkt ε
- $f''(\varepsilon) = 0$ Wendepunkt im Punkt ε

$$\Rightarrow \begin{cases} f'''(\varepsilon) < 0 & \Rightarrow \text{links-rechts Wendepunkt im Punkt } \varepsilon \\ f'''(\varepsilon) > 0 & \Rightarrow \text{rechts-links Wendepunkt im Punkt } \varepsilon \end{cases}$$

Beispiel 1

$$f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$$



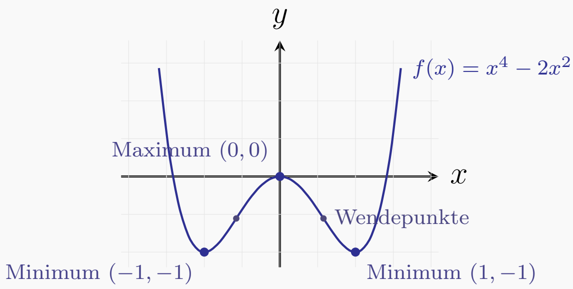
Beispiel 2

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \quad \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -4 < 0 \\ f''(\pm 1) = 8 > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow$$

Wendepunkte bei



2 Ebene Kurven

2.1 Darstellungsformen

Explizite Darstellung

Kurve K ist als Graph einer Funktion gegeben. Nachteil: für jeden x-Wert gibt es nur einen y-Wert!

Implizite Darstellung

Kurve K ist als Menge der Punkte (x, y) beschrieben, welche die Gleichung $F(x, y) = 0$ erfüllen.

Parameterdarstellung

Kurve K wird durch Koordinaten (x, y) beschrieben, die sich mit der Hilfsvariable t verändern.

Beispiel: Vergleich Darstellungsformen

Wir betrachen die Funktion:

$$y = x^2 - 1$$

Explizite Darstellung:

Implizite Darstellung:

Parameterdarstellung:

2.2 Umwandeln der Darstellung

Explizit $\Longleftrightarrow$ Implizit:

Graph nach 0 bzw. nach y auflösen.

Beispiel

$$f(x) = x^3 + 2 = y \quad \Rightarrow$$

$$F(x, y) = 5x + 4y - 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

Explizit $\Longrightarrow$ Parameterdarstellung:

$x(t) = t, \; y(t) = f(t)$ setzen.

Beispiel

$$f(x) = x^3 + 2 = y \quad \Rightarrow$$

Parameterdarstellung $\Longrightarrow$ Explizit:

Mit $x(t)$ und $y(t)$ die Variable t eliminieren.

Beispiel 1

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t-3 \\ t^3 - t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Beispiel 2

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Trick:

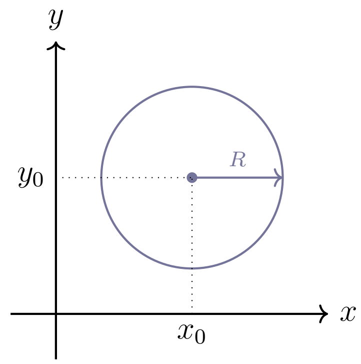
2.3 Wichtige Kurven

2.3.1 Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius R

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$

Implizite Darstellung:

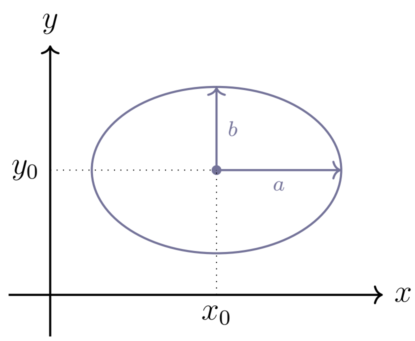


2.3.2 Ellipse mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Halbachsen a und b

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$

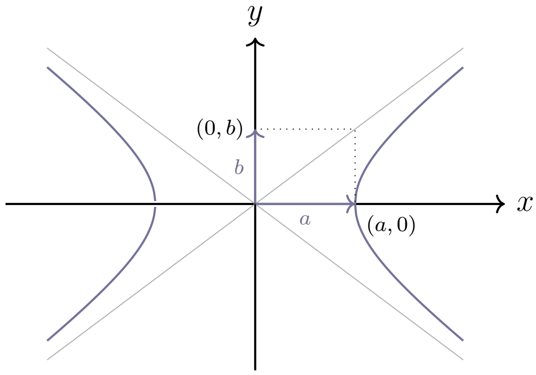
Implizite Darstellung:



2.3.3 Hyperbel mit Achsenparametern a und b

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$



Implizite Darstellung:

Die Asymptoten haben die Steigungen $y = \pm\frac{b}{a}x$