Übung 8 - Höhere Ableitungen & Darstellungsformen für ebene Kurven

1 Höhere Ableitungen

1.1 Kurvendiskussion

- $f'(\varepsilon) < 0$ negative Steigung im Punkt ε
- $f'(\varepsilon) > 0$ positive Steigung im Punkt ε
- $f'(\varepsilon) = 0$ Extremum im Punkt ε

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(\varepsilon) < 0 & \Rightarrow \text{Maximum im Punkt } \varepsilon \\ f''(\varepsilon) > 0 & \Rightarrow \text{Minimum im Punkt } \varepsilon \\ f''(\varepsilon) = 0 \text{ und } f'''(\varepsilon) \neq 0 & \Rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

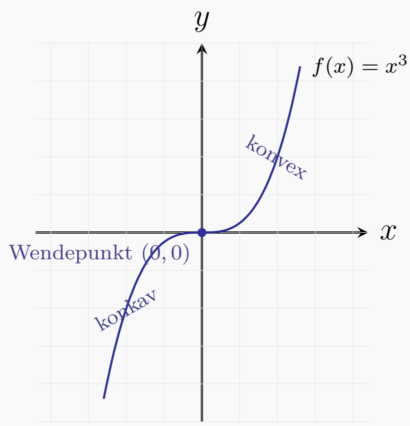
- $f''(\varepsilon) < 0$ Kurve rechts gekrümmt (konkav) im Punkt ε
- $f''(\varepsilon) > 0$ Kurve links gekrümmt (konvex) im Punkt ε
- $f''(\varepsilon) = 0$ Wendepunkt im Punkt ε

$$\Rightarrow \begin{cases} f'''(\varepsilon) < 0 & \Rightarrow \text{links-rechts Wendepunkt im Punkt } \varepsilon \\ f'''(\varepsilon) > 0 & \Rightarrow \text{rechts-links Wendepunkt im Punkt } \varepsilon \end{cases}$$

Beispiel 1

$$f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 & \text{für } x < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt (konkav)} \\ f''(x) > 0 & \text{für } x > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt (konvex)} \\ f''(0) = 0 & \Rightarrow \text{Wendepunkt im Ursprung (hier sogar Sattelpunkt)} \end{cases}$$



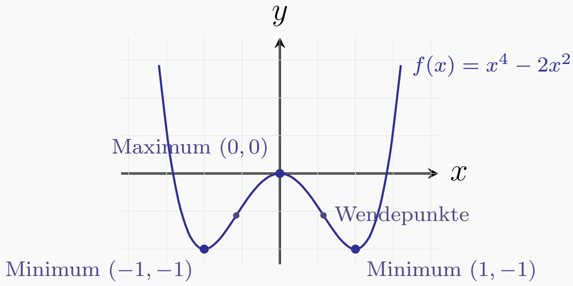
Beispiel 2

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \quad \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x, \quad f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -4 < 0 & \text{Maximum bei } x = 0 \\ f''(\pm 1) = 8 > 0 & \text{Minima bei } x = \pm 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow f\left(\pm \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\tfrac{5}{9}$$

$$\text{Wendepunkte bei } \left(\pm \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{5}{9}\right)$$



2 Ebene Kurven

2.1 Darstellungsformen

Explizite Darstellung

$$\boxed{y = f(x)}$$

Kurve K ist als Graph einer Funktion gegeben. Nachteil: für jeden x-Wert gibt es nur einen y-Wert!

Implizite Darstellung

$$\boxed{F(x, y) = 0}$$

Kurve K ist als Menge der Punkte (x, y) beschrieben, welche die Gleichung $F(x, y) = 0$ erfüllen.

Parameterdarstellung

$$\boxed{\vec{P}(t) = (x(t),\, y(t))}$$

Kurve K wird durch Koordinaten (x, y) beschrieben, die sich mit der Hilfsvariable t verändern.

Beispiel: Vergleich Darstellungsformen

Wir betrachen die Funktion:

$$y = x^2 - 1$$

Explizite Darstellung:

$$y = f(x) = x^2 - 1$$

Implizite Darstellung:

$$F(x, y) = y - x^2 + 1 = 0$$

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Umwandeln der Darstellung

Explizit $\Longleftrightarrow$ Implizit:

Graph nach 0 bzw. nach y auflösen.

Beispiel

$$f(x) = x^3 + 2 = y \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = y - x^3 - 2 = 0$$

$$F(x, y) = 5x + 4y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = y = \tfrac{1}{4}(2 - 5x)$$

Explizit $\Longrightarrow$ Parameterdarstellung:

$x(t) = t, \; y(t) = f(t)$ setzen.

Beispiel

$$f(x) = x^3 + 2 = y \quad \Rightarrow \quad \vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 + 2 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung $\Longrightarrow$ Explizit:

Mit $x(t)$ und $y(t)$ die Variable t eliminieren.

Beispiel 1

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t-3 \\ t^3 - t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = t-3 \Rightarrow t = x+3$$

$$y = t^3 - t = (x+3)^3 - x - 3$$

Beispiel 2

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$$

Trick: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad$ (implizite Gleichung)

2.3 Wichtige Kurven

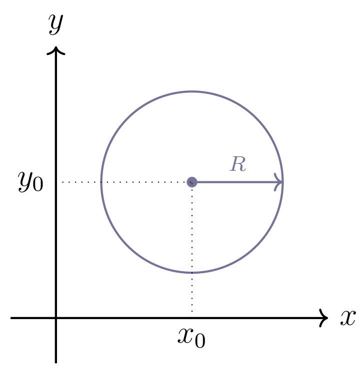
2.3.1 Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius R

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos t \\ y_0 + R\sin t \end{pmatrix}$$

Implizite Darstellung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



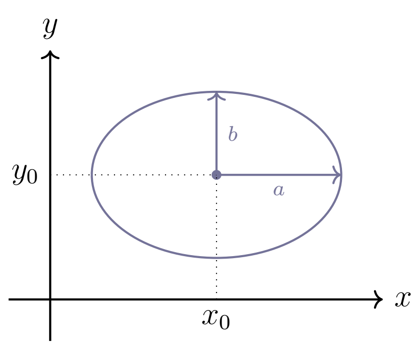
2.3.2 Ellipse mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Halbachsen a und b

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a\cos t \\ y_0 + b\sin t \end{pmatrix}$$

Implizite Darstellung:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



2.3.3 Hyperbel mit Achsenparametern a und b

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}$$

Implizite Darstellung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Asymptoten haben die Steigungen
$y = \pm\frac{b}{a}x$