Übung 9 - Krümmung, Evolute & Potenzreihen

1 Ebene Kurven

1.1 Zykloide

Eine Zykloide ist die Bahn eines Punktes auf einem Rad, das ohne zu rutschen abrollt.

Parameterdarstellung:

$$\vec{r}(t) =$$

Typen der Zykloide:

Gewöhnlich:	$a = b$
Verkürzt:	$a > b$
Verlängert:	$a < b$

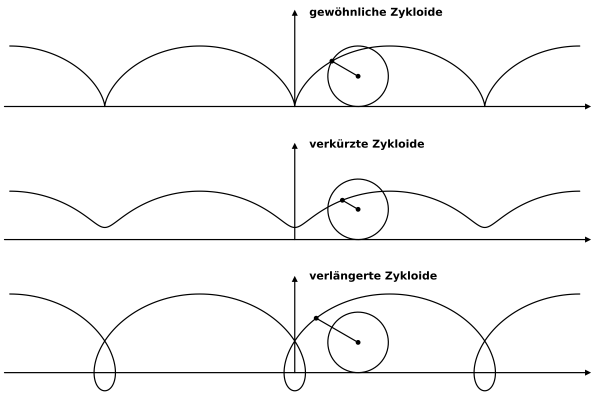


Figure 1: Darstellung der Zykloide

2 Eigenschaften einer Kurve in Parameterdarstellung

2.1 Tangente

Tangente $\vec{t}(t)$ im Punkt P einer Kurve $\vec{r}(t)$

Tangentenrichtung:

$$\dot{\vec{r}}(t) =$$

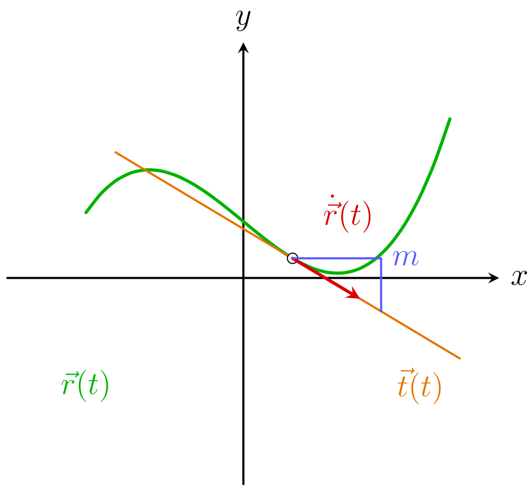
Tangenten-Gleichung:

$$\vec{t}(t) =$$

Tangenten-Steigung:

$$m =$$

Die Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ beschreiben die Geschwindigkeit der Bewegung entlang der Kurve, also die Richtung der Tangente.



2.2 Normale

Normale $\vec{n}(t)$ im Punkt P einer Kurve $\vec{r}(t)$

Normenrichtung:

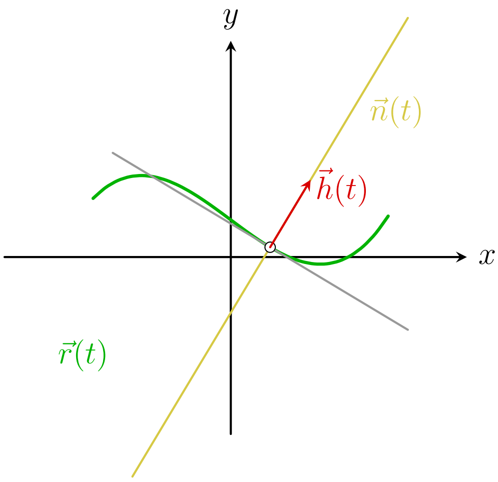
$$\vec{h}(t) =$$

Normalengleichung:

$$\vec{n}(t) =$$

Normaleneinheitsvektor:

$$\vec{\hat{n}}(t) =$$



2.3 Krümmung

Krümmung $k(t)$ einer Kurve $\vec{r}(t)$:

Rate (Schnelligkeit), mit der sich die Richtung der Tangente ändert.

$$\boxed{k(t) = \qquad\qquad}$$

$k(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Kurve nach links gekrümmt
$k(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Kurve nach rechts gekrümmt

2.4 Krümmungskreis

Krümmungskreis K einer Kurve $\vec{r}(t)$

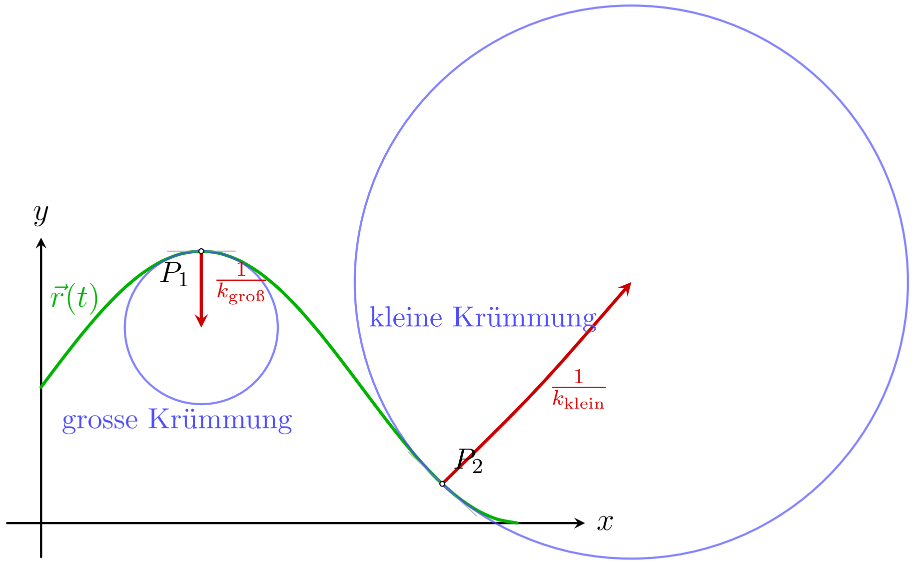
Kreis im Punkt P des Graphen $\vec{r}(t)$, der die Kurve im Punkt P am besten annähert. Er besitzt dort dieselbe Tangentensteigung und dieselbe Krümmung wie $\vec{r}(t)$.

Radius:

$$\boxed{r_M = \qquad}$$

Mittelpunkt:

$$\boxed{\vec{M} = \qquad\qquad (t)}$$

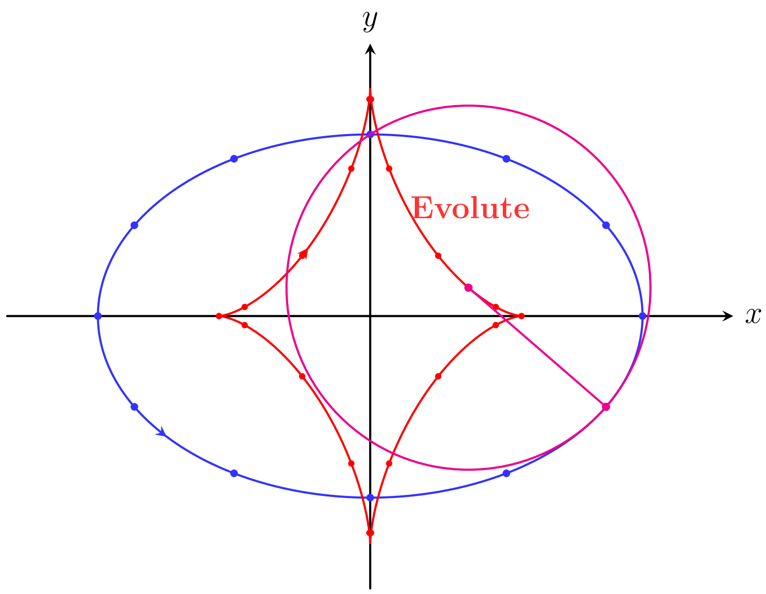


2.5 Evolute

Evolute $\vec{E}(t)$ einer Kurve $\vec{r}(t)$

Wenn die Kurve $\vec{r}(t)$ den Krümmungskreis K durchläuft, beschreibt dessen Mittelpunkt M eine neue Kurve — die Evolute $\vec{E}(t)$.

$$\vec{E}(t) =$$



3 Potenzreihen

3.1 Konvergenz

Konvergiert die Folge der Partialsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ gegen S, so heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Wichtige Sätze zur Konvergenz

- Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegen S, so gilt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

- Ist $|a_n| < |a_{n-1}|$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt *nicht*, dass die Reihe konvergiert.

$$\textit{Beispiel}: \quad a_n = \frac{1}{n}$$

- Ist die Reihe alternierend, $|a_n| < |a_{n-1}|$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so konvergiert die Reihe.

$$\textit{Beispiel}: \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

3.1.1 geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe:

3.1.2 Tricks mit bekannten Reihenentwicklungen

- $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
- $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$
- $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = (1 + x + x^2 + \dots)(1 - x + x^2 - \dots)$
- $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x-1}{3} + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 + \dots\right)$$

3.2 Potenzreihen

Definition:

x_0 ist der **Entwicklungspunkt** (oder Zentrum) der Potenzreihe. Die Reihe beschreibt also die Funktion in der Umgebung von x_0.

3.2.1 Konvergenzradius

Konvergenzradius ist also die halbe Länge des Konvergenzintervalls.

$r_K =$

Interpretation:

Divergenz $|x| > r_K$ Konvergenz $|x| < r_K$

Der Konvergenzradius gibt also an, für welche Werte von x die Potenzreihe konvergiert.

Beispiel: Bestimmung des Konvergenzradius

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^k$$

Bestimme den Konvergenzradius r_K:

Wir verwenden die Formel:

$$r_K = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Hier ist

$$a_n =$$

Damit folgt:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} =$$

Wir bilden den Grenzwert:

$$r_K =$$

$$\Longrightarrow$$

Interpretation:

Konvergent für divergent für

3.3 Idee der Potenzreihe

Idee: Approximation von komplizierten Funktionen durch Polynome.

Beispiel: $cos(x)$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

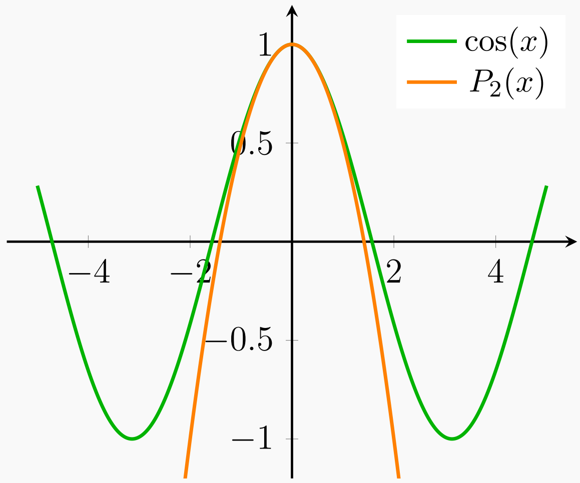
Dies ist die allgemeine Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) von $\cos(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

Das Polynom $P_2(x)$ stimmt in der Nähe von $x = 0$ sehr gut mit $\cos(x)$ überein — je höher der Grad n, desto genauer wird die Approximation.

Vergleich:

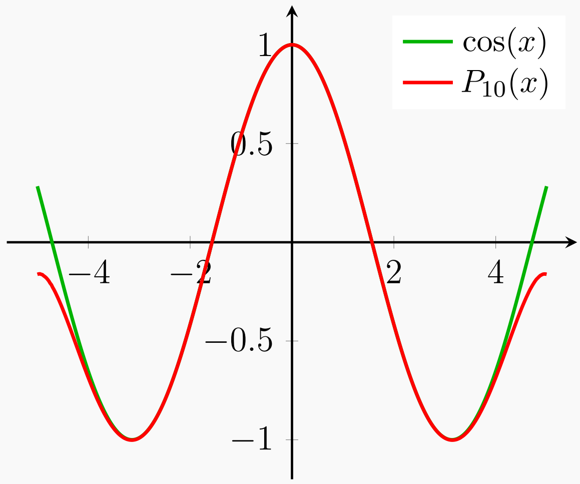
P_2

$$\cos(x) \approx P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$



P_{10}

$$P_{10}(x) \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$



Wir bestimmen den Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium für die *geraden* Indizes:

$$r_K = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{2k}}{a_{2k+2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} (2k+2)(2k+1) = \infty.$$