

Übung 10 - Taylorpolynom & Taylorreihe

1 Taylorpolynome P_n & Taylorreihe

1.1 Taylorpolynom P_n

Idee: Wird berechnet, um Funktionen in der Umgebung eines Punktes x_0 durch Polynome anzunähern.

Berechnung Taylorpolynom

$$P_n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Gut zu wissen

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- Bei ungeraden Funktionen sind alle geraden Koeffizienten = 0.
- Bei geraden Funktionen sind alle ungeraden Koeffizienten = 0 (bei $x_0 = 0$).

1.2 Zusammenhang zwischen Ableitung und Taylorpolynom

⇒ Damit die Approximation gut ist, muss sie gewisse Bedingungen erfüllen.

- Gleicher *Stützpunkt*:

$$P_n(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = f(0)$$

- Gleiche *Steigung*:

$$P'_n(0) = f'(0) \Rightarrow a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$

- Gleiche *Krümmung*:

$$P''_n(0) = f''(0) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

- :

-

$$P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Jeder Koeffizient beeinflusst genau eine einzige Ableitung!

1.3 Darstellungsweise der Taylorreihe

Taylorreihe $\hat{=}$ Taylorpolynom vom „Grad ∞ “

Taylorreihe / Potenzreihe von $f(x)$ um den Punkt 0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Taylorreihe / Potenzreihe von $f(x)$ um beliebigen Punkt x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Beispiel: Taylorreihe mit Hilfe bekannter Reihen 1

Berechne: Taylorreihe von $\frac{1}{2x+5}$ bei $x_0 = -1$
Wir bringen

$$\frac{1}{2x+5}$$

in die Form einer geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q}$, da wir die Taylorreihe dieser Funktion kennen: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$$\frac{1}{2x+5} =$$

$$\text{mit } q =$$

Damit:

$$\frac{1}{2x+5} =$$

Beispiel: Taylorreihe mit Hilfe bekannter Reihen 2

Berechne: Taylorreihe von $\ln(x)$ bei $x_0 = 3$

Wir setzen:

$$x = 3 + (x - 3) \Rightarrow \ln(x) =$$

$$\ln(x) =$$

Die bekannte Reihe:

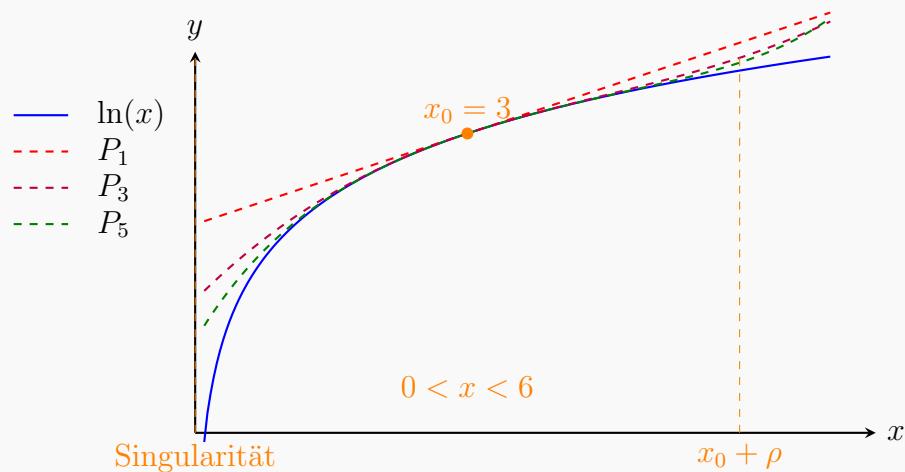
$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$$\text{mit } z =$$

Einsetzen:

$$\ln(x) =$$

$$\Rightarrow \ln(x) = \quad \text{um Mittelpunkt } x_0 = 3$$



Berechne: Konvergenzradius der Taylorreihe von $\ln(x)$ um $x_0 = 3$

Aus der Herleitung oben erhalten wir:

$$\ln(x) = \ln(3) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\frac{x-3}{3} \right)^k$$

Dies ist eine Potenzreihe in $(x - 3)$ der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - 3)^k \quad \text{mit} \quad c_k =$$

Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum c_k(x - 3)^k$ gilt

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

$$\left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| =$$

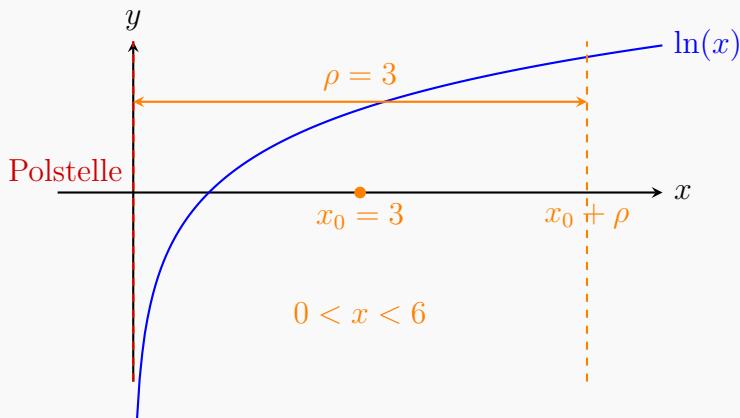
=

Nun bilden wir den Grenzwert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| =$$

Damit ist der Konvergenzradius

Die Taylorreihe konvergiert also für



In 99% der Fälle ist der Konvergenzradius genau der Abstand vom Entwicklungspunkt x_0 zur nächsten Definitionslücke/Polstelle.

Schneller Weg:

Die Funktion $\ln(x)$ besitzt im Reellen eine Singularität bei

$$x = 0.$$

Die Taylorentwicklung erfolgt um den Punkt

$$x_0 = 3.$$

Der Konvergenzradius ist der Abstand zwischen x_0 und der nächsten Singularität:

$$\rho = |x_0 - 0| = 3.$$

$$\rho = 3$$

Beispiel: Koeffizientenvergleich

Berechne: Taylorreihe von $\tan(x)$ im Punkt $x_0 = 0$

Wir setzen an:

$$\tan(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Da

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \Rightarrow$$

Einsetzen der Reihen:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Koeffizientenvergleich

- $a_0 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow$
- $a_1x \cdot 1 = x \quad \Rightarrow$
- $a_2x^2 \cdot 1 + a_0\left(-\frac{x^2}{2!}\right) = 0 \quad \Rightarrow$
- $a_3x^3 \cdot 1 + a_1\left(-\frac{x^2}{2!}\right) = -\frac{x^3}{3!}$

- $a_4x^4 \cdot 1 + a_2x^2\left(-\frac{x^2}{2!}\right) + a_0\left(\frac{x^4}{4!}\right) = 0 \quad \Rightarrow$
- $a_5x^5 \cdot 1 + a_3x^3\left(-\frac{x^2}{2!}\right) + a_1x\left(\frac{x^4}{4!}\right) = \frac{x^5}{5!}$

Einsetzen von $a_3 = \frac{1}{3}$ und $a_1 = 1$:

Wir fassen zusammen:

Also:

$$\tan(x) =$$