Single Choice

SC 1 (I) Welche Eigenschaften hat die Funktion $f(x) = \frac{\cosh x}{\cos x}$, wenn $D(f)$ maximal gewählt wird?

(A) Die Funktion f ist injektiv.

(B) Die Funktion f ist beschränkt.

(C) Die Funktion f ist monoton wachsend.

(D) Die Funktion f ist gerade.

SC 2 (I) Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote der Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x - 4}$ wenn $x \longrightarrow \infty$?

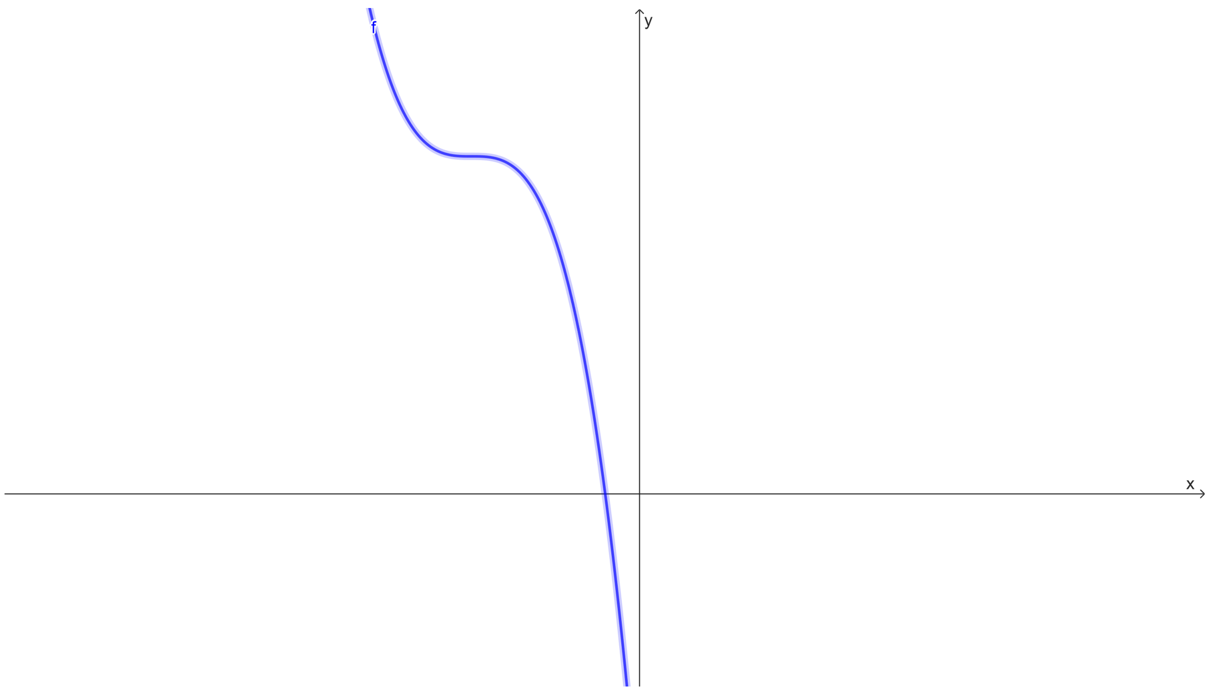
(A) $x \mapsto \frac{x}{2} - 1$

(B) $x \mapsto x^2 - 4x + 3$

(C) $x \mapsto x - 1$

(D) $x \mapsto x - 3$

SC 3 (I)



Welche Funktion $f(x)$ passt zu dem obigen Graphen?

(A) $g(x) = (-x - 2)^3 + 4$

(B) $g(x) = (x + 2)^3 + 4$

(C) $g(x) = (-x + 2)^3 + 2$

(D) $g(x) = -(x - 4)^3 - 2$

SC 4 (I) Gegeben sei die die rekursive Folge $a_{n+1} := 2a_n^2 - 1, n \geq 0$. Für welchen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ ist diese Folge beschränkt?

(A) $a_0 = -1$
(B) $a_0 = 4$
(C) $a_0 = -2$
(D) $a_0 = 2$

SC 5 (II) Welche Funktion $g(x)$ ist die lineare Ersatzfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$?

(A) $g(x) = -x + e$
(B) $g(x) = -ex - 1$
(C) $g(x) = -3x + 1$
(D) $g(x) = 2x + 1$

SC 6 (II) In welcher Menge liegt folgender Grenzwert?

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin^2(x) - \cos^2(x)}$$

(A) $\{\infty, -\infty\}$
(B) $(-\infty, -1]$
(C) $(-1, 1)$
(D) $[1, \infty)$

SC 7 (II) Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = x^{\sqrt{\ln(x)}}$ und $g(x) = e^{\sqrt{x}}$, definiert auf $[1, \infty)$. Welche Aussage ist richtig?

(A) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ konvergiert, aber nicht gegen 0 oder 1.
(B) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
(C) $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$
(D) $g(x) = o(f(x))$ für $x \to \infty$

SC 8 (II) Es sei $\vec{r}(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung einer Kurve in der Ebene. Es bezeichne $k(t)$ die Krümmung von $\vec{r}(t)$ und $\vec{E}(t)$ die Parametrisierung der Evolute von $\vec{r}(t)$. Die Distanz zwischen der Kurve und der Evolute, also $|\vec{r}(t) - \vec{E}(t)|$, sei monoton steigend in t. Was lässt sich dann über $|k(t)|$ aussagen?

(A) $|k(t)|$ ist monoton steigend in t.
(B) $|k(t)|$ ist monoton fallend in t.
(C) $|k(t)|$ kann monoton steigend in t, monoton fallend in t, oder keines von beiden sein.
(D) $|k(t)|$ ist konstant.

SC 9 (II) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(a) = 1$. Nur eine der folgenden Aussagen lässt sich daraus schliessen – Welche?

(A) f *muss eine* globale Extremalstelle bei $x = a$ haben.
(B) f *kann keine* lokale Minimalstelle bei $x = a$ haben.
(C) f *muss eine* lokale Extremalstelle bei $x = a$ haben.
(D) f *kann eine* lokale Maximalstelle bei $x = a$ haben.

SC 10 (II) Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat die ebene Kurve mit Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (3t-1) \\ t \cdot (3-t^2) \end{pmatrix}$ eine vertikale Tangente?

(A) $1/3$
(B) 1
(C) 0
(D) $1/6$

SC 11 (A) Was ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $\exp(\exp(i\pi/2))$?

(A) $\cos(1)$
(B) e
(C) 0
(D) $\sin(1)$

SC 12 (A) Es sei die komplexe Zahl $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ gegeben. Dann gilt

(A) $z^3 = 3\sqrt{3}i$
(B) $z^3 = -3\sqrt{3}i$
(C) $z^3 = -9i$
(D) $z^3 = 9i$

SC 13 (A) Wir betrachten nicht-konstante Polynome P mit reellen Koeffizienten und Grad 6. Genau eine der folgenden Aussagen über derartige Polynome ist richtig – Welche?

(A) Wenn ein solches Polynom P genau vier verschiedene reelle Nullstellen hat, dann hat es keine nicht-reelle Nullstelle.
(B) Jedes solche Polynom P hat mindestens eine reelle Nullstelle.
(C) Jedes solche Polynom P hat mindestens eine nicht-reelle Nullstelle.
(D) Wenn ein solches Polynom P genau fünf verschiedene reelle Nullstellen hat, dann hat es keine nicht-reelle Nullstelle.

SC 14 (III) Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \sin(t)^{2023} \, \mathrm{d}t.$$

(A) $f'(x) = -2023 \cos(x)^{2022} \sin(x)$.
(B) $f'(x) = \sin(x)^{2023}$.
(C) $f'(x) = 2023 \sin(x)^{2022} \cos(x)$.
(D) $f'(x) = \cos(x)^{2023}$.

SC 15 (III) Betrachten Sie die Funktion $f(x) := \int_0^x e^t \cos(t) \, \mathrm{d}t$. Auf welchem Intervall ist f monoton fallend?

(A) $[\pi/2, \pi]$
(B) $[0, \pi/2]$
(C) $[-\pi/4, \pi/4]$
(D) $[-\pi/2, -\pi/4]$

SC 16 (III) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Schwerpunkts der Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $x \in [0, 1]$ eingeschlossen ist. Hinweis: Diese Fläche hat den Flächeninhalt 2/3.

(A) 5/3
(B) 3/5
(C) 2/3
(D) 3/4

SC 17 (III) Sei $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die das Integral $\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ konvergiert. Genau eine der folgenden Aussagen ist sicher richtig – Welche?

(A) $\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = 0$
(B) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
(C) Es gibt sicher ein $x \in (0, \infty)$ mit $f(x) = 0$
(D) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

SC 18 (III) Es sei die geschlossene Kurve γ in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\rho(\varphi) = 1 + 2\sin(\varphi), \quad \varphi \in \left[\frac{-\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right].$$

Welche der folgenden Formeln bestimmt den Flächeninhalt I der von γ berandeten Fläche?

(A) $I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} 5 + 4\sin(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$
(B) $I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \sqrt{5 + 4\sin(\varphi)}\ \mathrm{d}\varphi$
(C) $I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} 1 + 4\sin(\varphi) + 4\sin^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$
(D) $I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} 1 + 2\sin(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$

SC 19 (VIII) Welche Funktion stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k! \cdot 2^k}$ in ihrem Konververgenzbereich dar?

(A) $-e^{-x/2}$
(B) $-e^{-2x}$
(C) $-\sinh(x)$
(D) $\ln(-2x)$

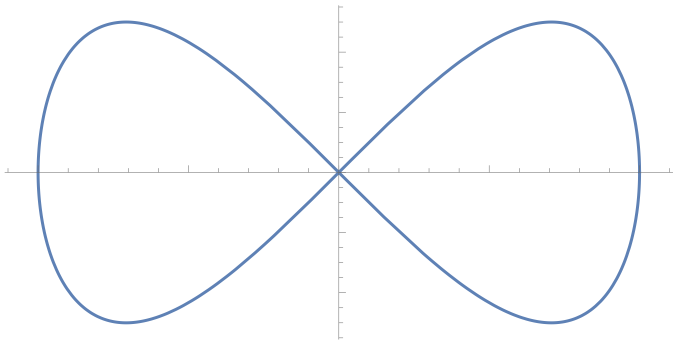
SC 20 (VIII) Was ist die dritte Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(\cos(x))$ bei $x_0 = 0$?

(A) $-1/3$
(B) -1
(C) -2
(D) 0

Aufgabe 21

Gegeben sei die Parametrisierung einer ebenen Kurve K:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \cdot \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sin(2t)}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$



a) (3 Punkte) Man bestimme die Tangente an K beim ersten Durchgang durch den Ursprung (also denjenigem, mit dem kleinsten positiven t.)

b) (4 Punkte) Man bestimme die Krümmung der Kurve im Punkt mit Parameter $t = \dfrac{\pi}{4}$.

c) (3 Punkte) Man bestimme eine implizite Gleichung, die diese Kurve darstellt.
(Hinweis: Suchen Sie ein Polynom $P(x, y)$.)

Aufgabe 22

Man bestimme die ersten 4 nicht-verschwindenden Koeffizienten der Potenzreihe zur Funktion

$$\int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

entwickelt um $x_0 = 0$.
(Hinweis: Der Integrand $\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ hat keine elementare Stammfunktion.)