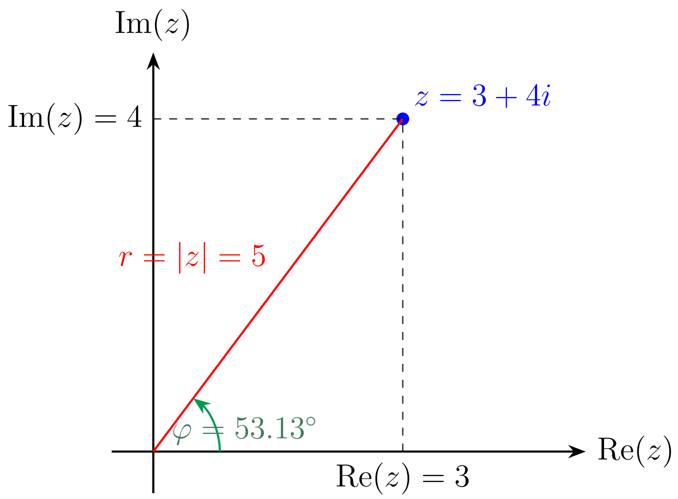
Übung 6 - Komplexe Zahlen II

1 Darstellungsformen

1.1 Vergleich

Kartesische Form		$3+4i$
Polarform		$5(\cos(53.13°)+i\sin(53.13°))$
Exponentialform		$5\,e^{i\cdot 0.93}$ (φ in Rad)



$\varphi = arg(z)$ φ heisst *Argument* von z

1.2 Umrechnungen

Radius:

Argument:

Wegen der Periodizität des Tangens muss man bei der Berechnung von φ etwas aufpassen

x/y Werte:

1.3 Konjugiert komplexe Zahlen

$$
\begin{aligned}
z &= x + y\,i && \Rightarrow \\
z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) && \Rightarrow \\
z &= r\,e^{i\varphi} && \Rightarrow
\end{aligned}
$$

2 Multiplikation

Multiplikation mit kartesischer Darstellung kann schnell mühsam werden.

Einfacher geht es in Polar- oder Exponentialform:

Multiplikation in Polarform

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\
&=
\end{aligned}
$$

Multiplikation in Exponentialform

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} =$$

Beispiel in Polarform

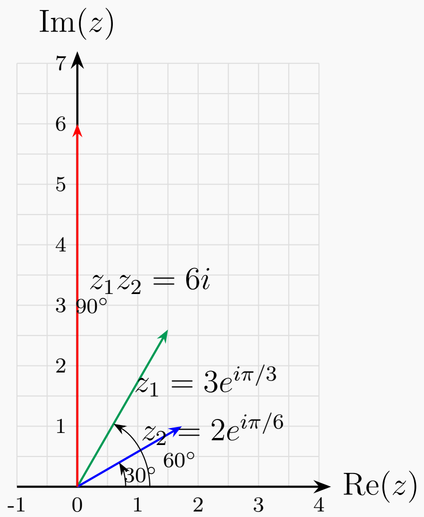
$$z_1 = 3(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}), \quad z_2 = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow$$

Beispiel in Exponentialform

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$\Rightarrow$



3 Division

Auch Division ist in kartesischer Form mühsam.

Einfacher in Polar- oder Exponentialform:

Division in Polarform

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

Division in Exponentialform

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} =$$

Beispiel in Polarform

$$z_1 = 4(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}), \quad z_2 = 2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})$$

$\Rightarrow$

Beispiel in Exponentialform

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow$$

4 Potenzieren

Potenzieren geht auch einfacher in Polar- oder Eulerform.

Potenz in Polarform

$$z^n = [\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,]^n =$$

Potenz in Exponentialform

$$z^n = (re^{i\varphi})^n =$$

Beispiel in Polarform

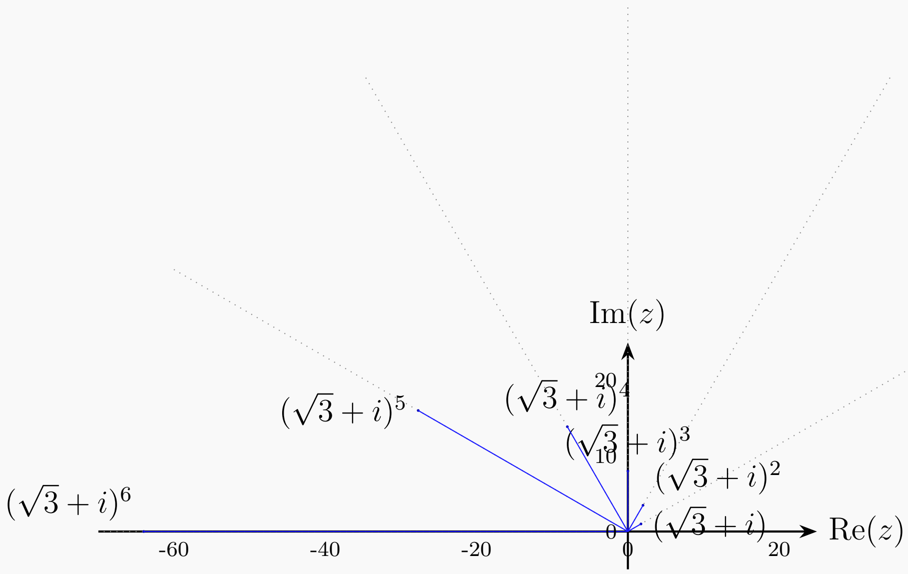
$$z = \sqrt{3} + i = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow$$

Beispiel in Exponentialform

$$z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow$$



5 Wurzelziehen

Es gilt:

Es gibt immer genau n voneinander verschiedene Lösungen.

$\Rightarrow$ Diese liegen regelmäßig auf einem n-Eck mit Radius $\sqrt[n]{|z|}$.

Vorgehensweise zur Berechnung der n-ten Wurzel

1. Komplexe Zahl in Exponentialform bringen

2. Exponentialform mit $k \cdot 2\pi$-Term schreiben

3. Wurzeldefinition anwenden

4. Die n Lösungen

Die n Lösungen erhält man, wenn man $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ einsetzt.

Beispiel: 5. Wurzel von $\sqrt{3} + i$

1. Betrag und Argument berechnen:

2. Exponentialform mit $k \cdot 2\pi$-Term schreiben:

3. Wurzeldefinition anwenden:

4. Die fünf Lösungen: