Übung 3 - Koordinatentransformation, Sur-, In-, Bi-jektivität, & Asymptoten

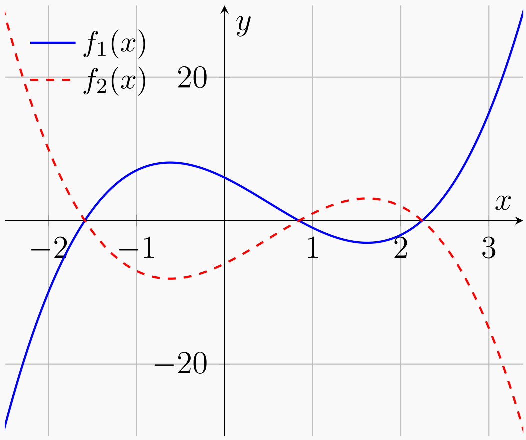
1 Koordinatentransformation

1.1 Spiegelung an der x-Achse

Spiegelung der Funktion $f_1(x)$ an der x-Achse:

Beispiel

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$



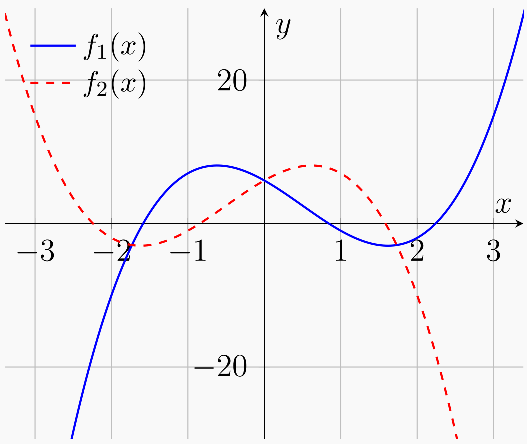
1.2 Spiegelung an der y-Achse

Spiegelung der Funktion $f_1(x)$ an der y-Achse:

$$f_2(x) = f_1(-x)$$

Beispiel

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$

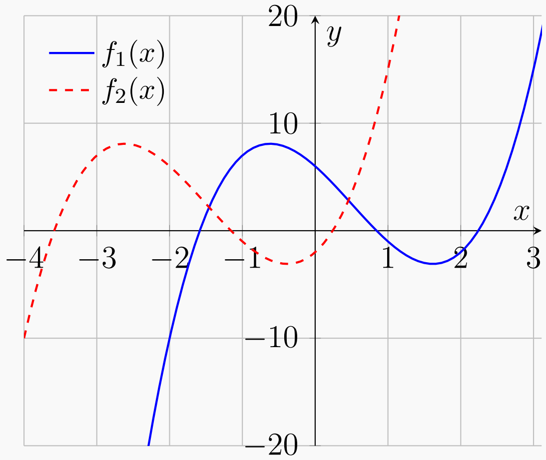


1.3 Verschiebung in x-Richtung

Gegeben: $f_1(x)$ Verschiebung der Funktion $f_1(x)$ um a Einheiten in Richtung der negativen x-Achse:

Beispiel

$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$

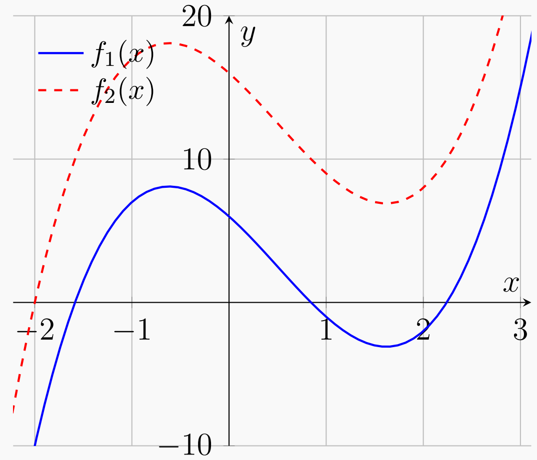


1.4 Verschiebung in y-Richtung

Verschiebung der Funktion $f_1(x)$ um b Einheiten in Richtung der positiven y-Achse:

Beispiel

$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$

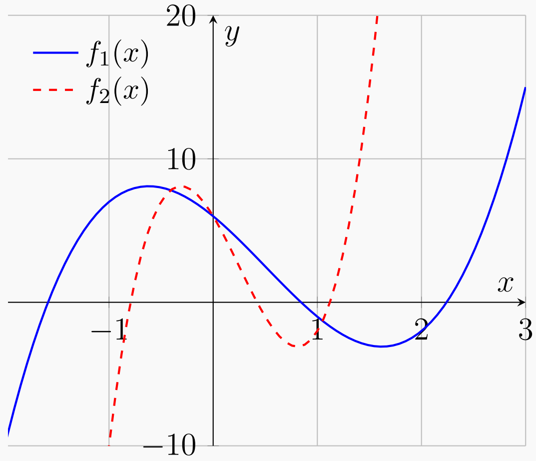


1.5 Stauchung in x-Richtung

Stauchung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor c in Richtung der x-Achse ($c > 0$):

Beispiel

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$

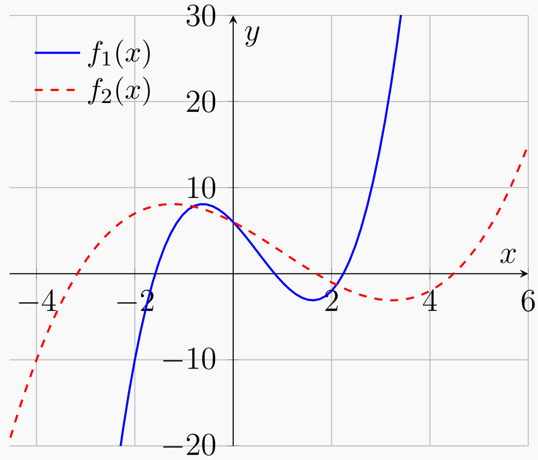


1.6 Dehnung in x-Richtung

Dehnung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor k in Richtung der x-Achse ($0 < k < 1$):

Beispiel

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$

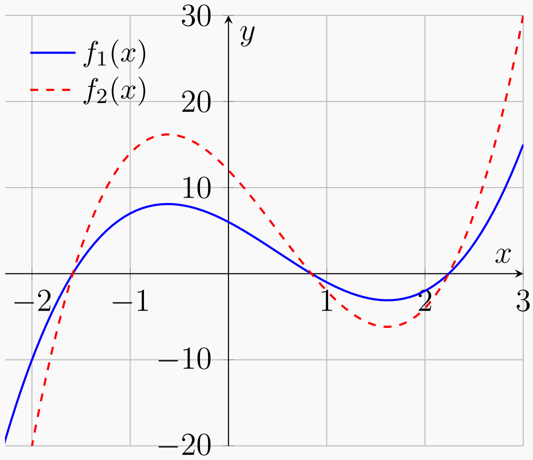


1.7 Streckung in y-Richtung

Streckung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor d in Richtung der y-Achse ($d > 0$):

Beispiel

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$



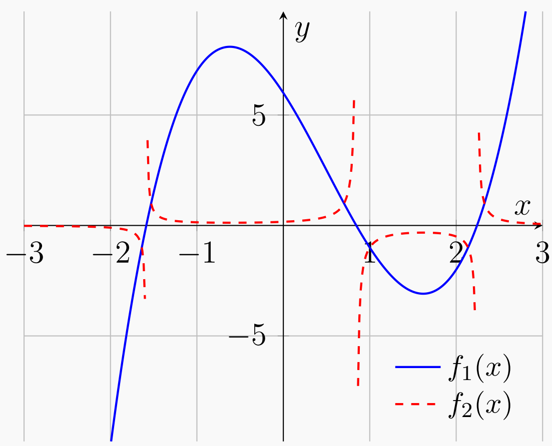
1.8 Kehrwertfunktion

Die Nullstellen der Funktion $f_1(x)$ werden zu Polen der Funktion $f_2(x)$.

Die Transformation lautet:

Beispiel

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$

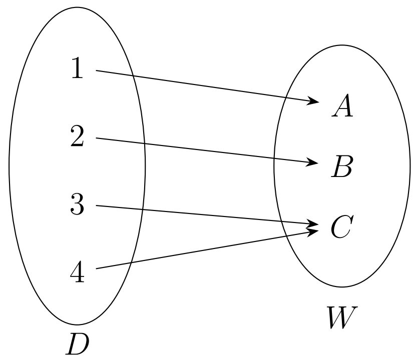


2 Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

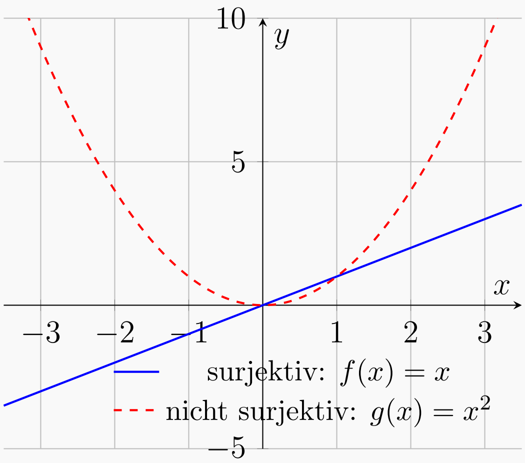
2.1 Surjektive Funktionen

Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *mindestens* einmal annimmt.

$$\forall\, y \in W\ \exists\, x \in D:\ \ f(x) = y.$$



Beispiel: Surjektivität



2.2 Injektive Funktionen

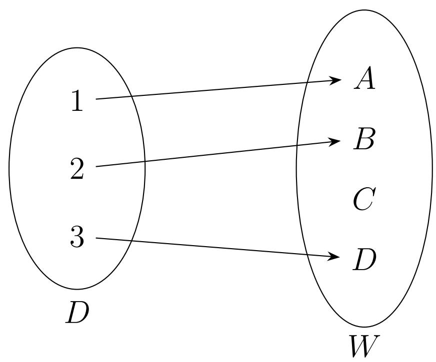
Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *höchstens* einmal annimmt.

$$\forall x_1, x_2 \in D: \quad x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

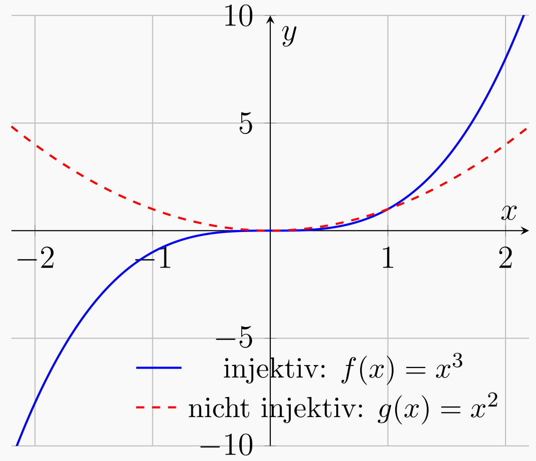
äquivalent (Kontraposition):

$$\forall x_1, x_2 \in D: \quad f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2.$$

Horizontaler-Linien-Test: Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen höchstens einmal.



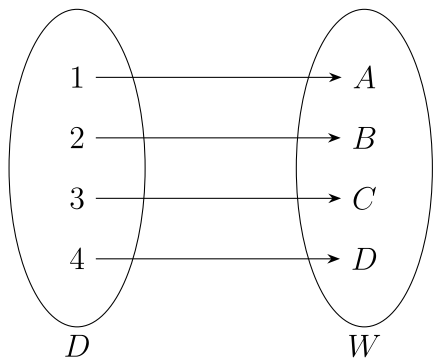
Beispiel: Injektivität



2.3 Bijektive Funktionen

Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *genau* einmal annimmt.

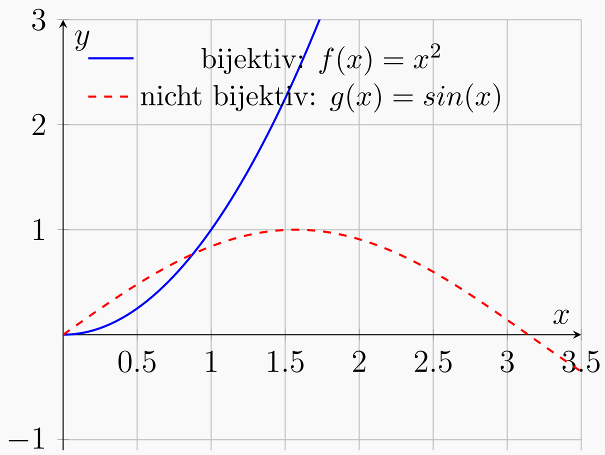
→
→
→



Beispiel: Bijektivität

Bijektiv:
$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \; f(x) = x^2$
$\Rightarrow$ Inverse: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Nicht bijektiv:
$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \; g(x) = sin(x)$
$sin(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv auf $\mathbb{R}_0^+$



2.4 Umkehrfunktionen

Eine Abbildung $f\colon D \to W$ besitzt eine *Umkehrfunktion* $f^{-1}\colon W \to D$ genau dann, wenn f **bijektiv** ist (also injektiv und surjektiv). Dann gelten

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in D), \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad (\forall y \in W).$$

Geometrisch: Der Graph von f^{-1} ist die Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $y = x$.

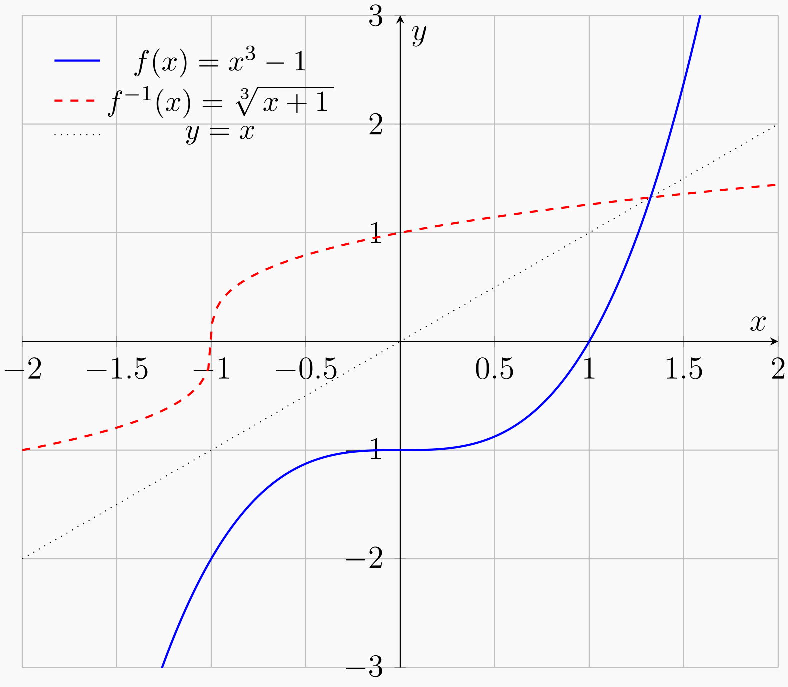
Vorgehen zum Bilden von f^{-1}:

1. **Bijektivität sicherstellen:** ggf. Definitionsbereich einschränken und Zielmenge passend wählen.
2. **Gleichung aufstellen:** $y = f(x)$.
3. **Nach x auflösen:** erhalte $x = g(y)$.
4. **Variablen tauschen:** $y = g(x)$.

Beispiel: Ganzrationale Funktion

Gegeben: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 1.$
Bijektiv? Surjektiv? Ja. Injektiv? Ja $\Rightarrow$ Also auch bijektiv.
Umkehrfunktion bilden:

Variablen tauschen:



Beispiel: Sinus

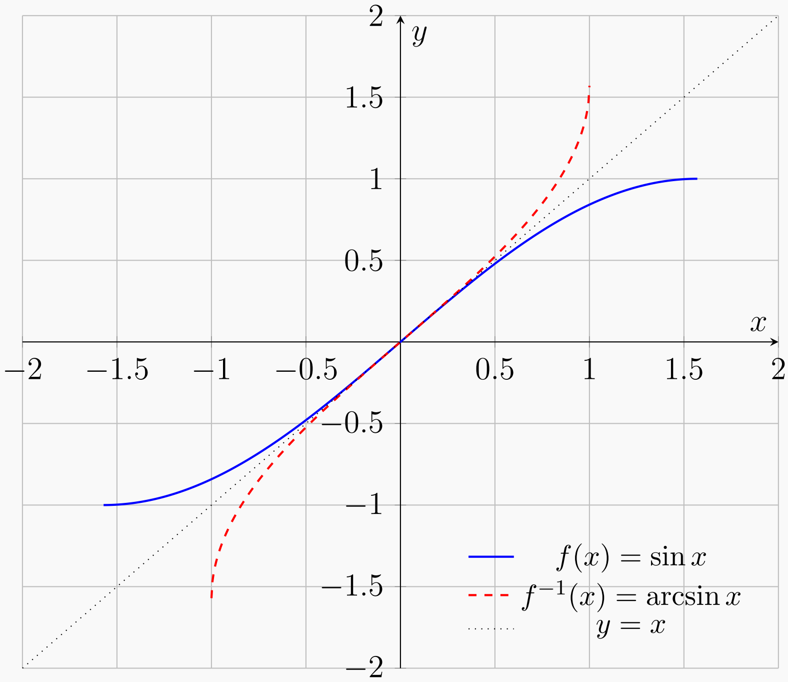
Problem: $f(x) = \sin x$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* injektiv (periodisch). **Lösung:** Beschränke den Definitionsbereich auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann ist

$$f\colon \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin x$$

bijektiv.
Umkehrfunktion bilden:

Variablen tauschen:

Notationen: $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ (nicht $1/\sin x$).



3 Asymptoten

Eine Funktion $g(x)$ ist Asymptote von $f(x)$, wenn gilt:

3.1 Tipps zur Berechnung

1) Definitionslücken / Pole (vertikale Asymptoten): Treten Nullen im Nenner auf, so liegen dort i. d. R. *vertikale Asymptoten*.

Beispiel

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
Vertikal: und Horizontal:

2) Brüche mit Nenner $\geq$ Zähler: Es genpgt den Limes zu bilden:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_n x^n + \dots} = \frac{a_n}{b_n} \quad (b_n \neq 0).$$

Beispiel

$f(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x^2-1}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Big(\qquad\qquad \Big) = 0 \Rightarrow$$

3) Brüche mit höhergradigem Zähler: Ist Zähler > Nenner, zuerst Polynomdivision:

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{p(x)}$$

Dann ist $g(x) = Q(x)$ die Asymptote (schräg, falls $\deg(Q) = 1$; parabolisch, falls $\deg(Q) = 2$; usw.).

Beispiel

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Polynomdivision: $x^2 : (x+1) \ =$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) = 0 \implies$$