Übung 3 - Koordinatentransformation, Sur-, In-, Bi-jektivität, & Asymptoten

1 Koordinatentransformation

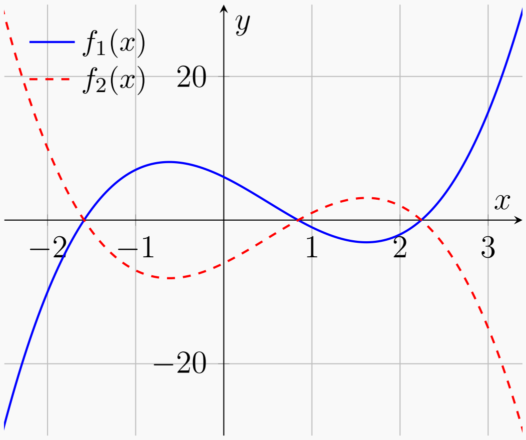
1.1 Spiegelung an der x-Achse

Spiegelung der Funktion $f_1(x)$ an der x-Achse:

$$f_2(x) = -f_1(x)$$

Beispiel

$$f_2(x) = -f_1(x)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = -2x^3 + 3x^2 + 6x - 6$$



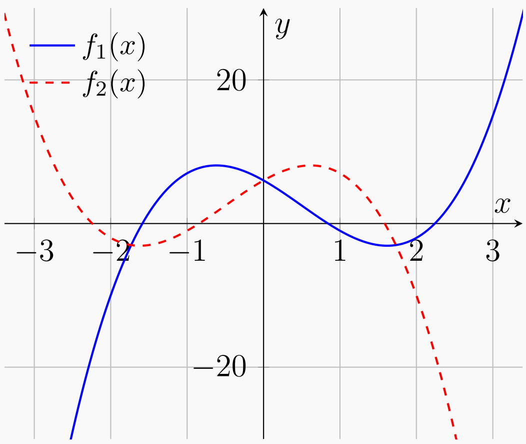
1.2 Spiegelung an der y-Achse

Spiegelung der Funktion $f_1(x)$ an der y-Achse:

$$f_2(x) = f_1(-x)$$

Beispiel

$$f_2(x) = f_1(-x)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2(-x)^3 - 3(-x)^2 - 6(-x) + 6$$
$$f_2(x) = -2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$



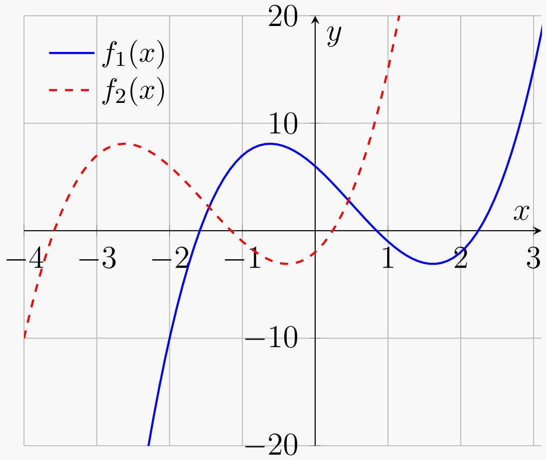
1.3 Verschiebung in x-Richtung

Gegeben: $f_1(x)$ Verschiebung der Funktion $f_1(x)$ um a Einheiten in Richtung der negativen x-Achse:

$$f_2(x) = f_1(x + a)$$

Beispiel

$$f_2(x) = f_1(x + 2)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 - 6(x+2) + 6$$



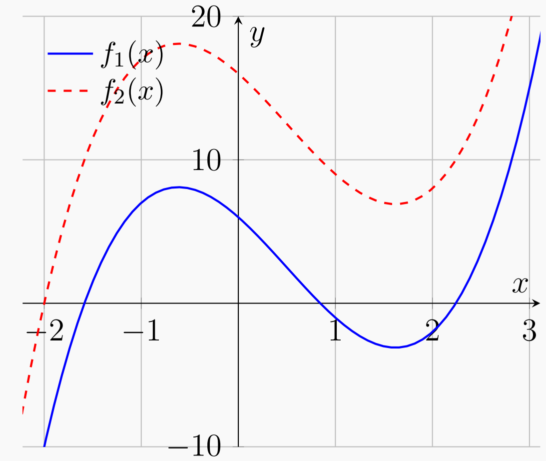
1.4 Verschiebung in y-Richtung

Verschiebung der Funktion $f_1(x)$ um b Einheiten in Richtung der positiven y-Achse:

$$f_2(x) = f_1(x) + b$$

Beispiel

$$f_2(x) = f_1(x) + 10$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 16$$



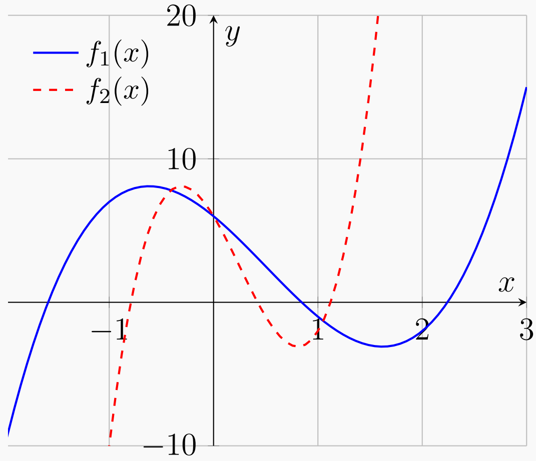
1.5 Stauchung in x-Richtung

Stauchung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor c in Richtung der x-Achse ($c > 0$):

$$f_2(x) = f_1(cx)$$

Beispiel

$$f_2(x) = f_1(2x)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2(2x)^3 - 3(2x)^2 - 6(2x) + 6$$



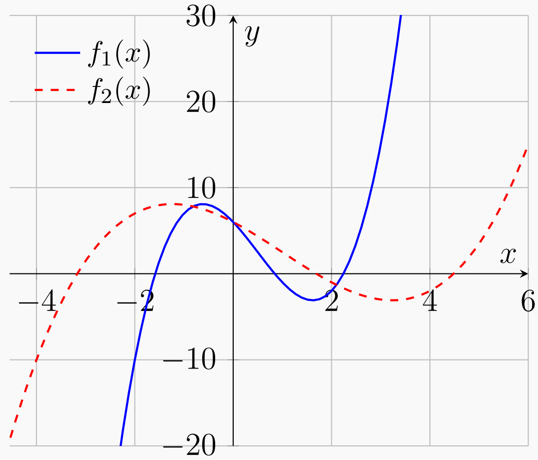
1.6 Dehnung in x-Richtung

Dehnung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor k in Richtung der x-Achse ($0 < k < 1$):

$$f_2(x) = f_1(kx)$$

Beispiel

$$f_2(x) = f_1\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2\left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 - 3\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 - 6\left(\tfrac{1}{2}x\right) + 6$$



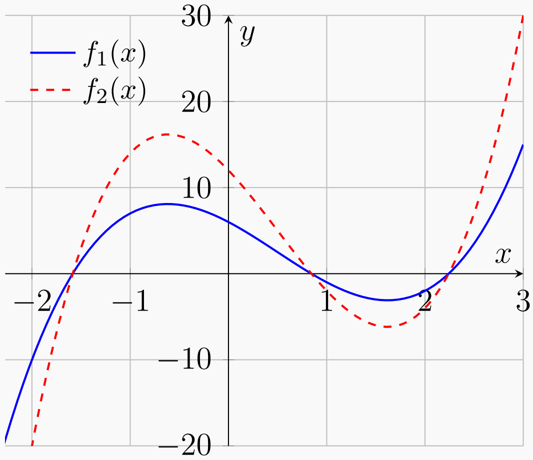
1.7 Streckung in y-Richtung

Streckung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor d in Richtung der y-Achse ($d > 0$):

$$f_2(x) = d \cdot f_1(x)$$

Beispiel

$$f_2(x) = 2 \cdot f_1(x)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2 \cdot (2x^3 - 3x^2 - 6x + 6)$$
$$f_2(x) = 4x^3 - 6x^2 - 12x + 12$$



1.8 Kehrwertfunktion

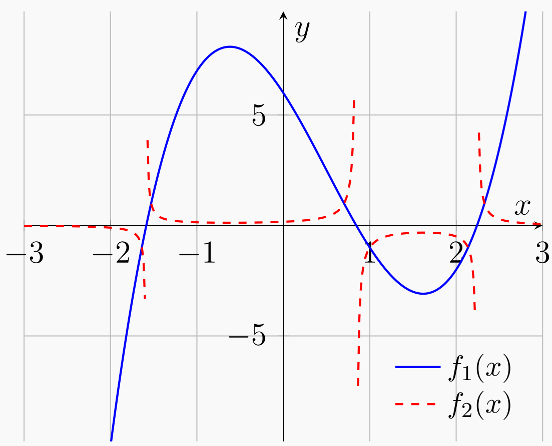
Die Nullstellen der Funktion $f_1(x)$ werden zu Polen der Funktion $f_2(x)$.

Die Transformation lautet:

$$f_2(x) = \frac{1}{f_1(x)}$$

Beispiel

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2x^3 - 3x^2 - 6x + 6}$$

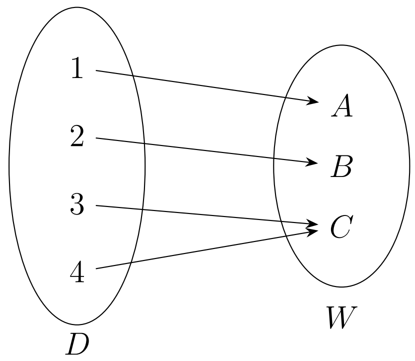


2 Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

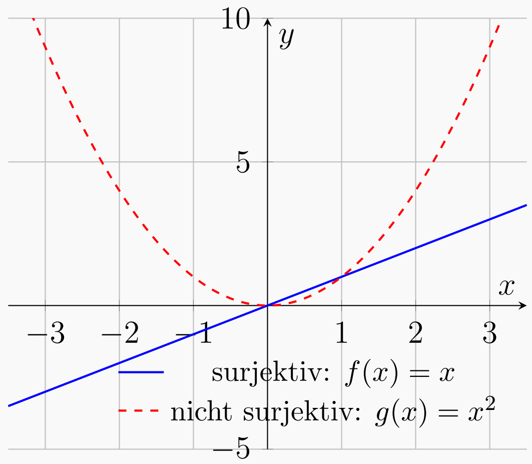
2.1 Surjektive Funktionen

Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *mindestens* einmal annimmt.

$$\forall\, y \in W\ \exists\, x \in D: \ \ f(x) = y.$$



Beispiel: Surjektivität



2.2 Injektive Funktionen

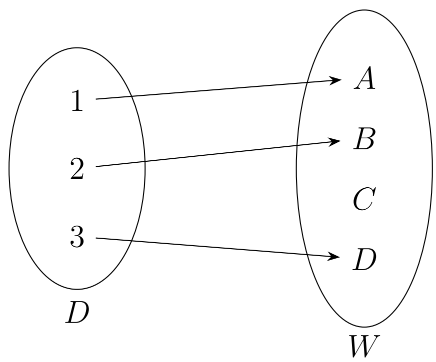
Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *höchstens* einmal annimmt.

$$\forall x_1, x_2 \in D: \quad x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

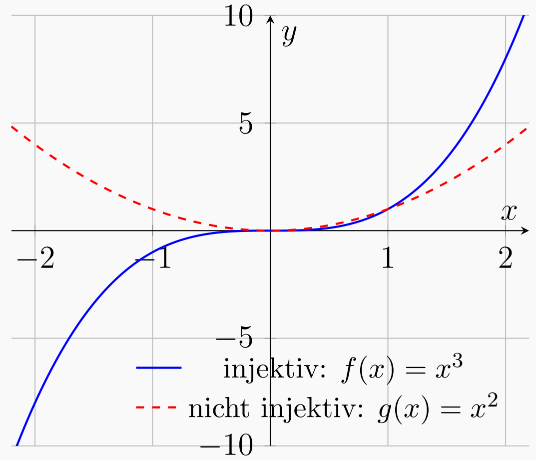
äquivalent (Kontraposition):

$$\forall x_1, x_2 \in D: \quad f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2.$$

Horizontaler-Linien-Test: Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen höchstens einmal.



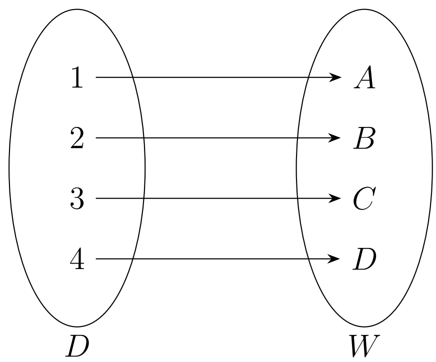
Beispiel: Injektivität



2.3 Bijektive Funktionen

Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *genau* einmal annimmt.

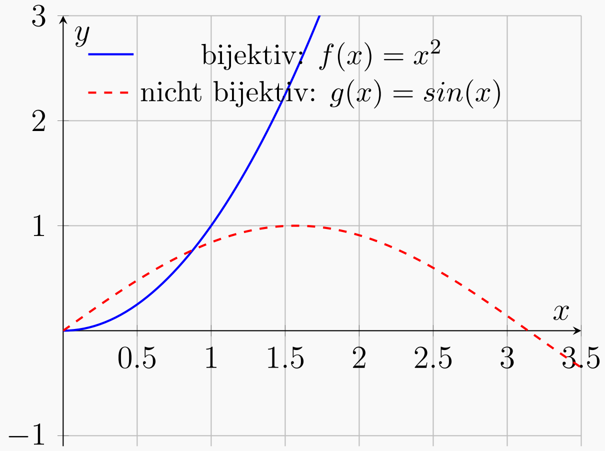
→ bijektiv $\iff$ surjektiv & injektiv
→ Bijektive Funktionen sind invertierbar.
→ Durch Einschränken des D und/oder W kann jede Funktion bijektiv gemacht werden.



Beispiel: Bijektivität

Bijektiv:
$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = x^2$
$\Rightarrow$ Inverse: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Nicht bijektiv:
$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ g(x) = sin(x)$
$sin(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv auf $\mathbb{R}_0^+$



2.4 Umkehrfunktionen

Eine Abbildung $f\colon D \to W$ besitzt eine *Umkehrfunktion* $f^{-1}\colon W \to D$ genau dann, wenn f **bijektiv** ist (also injektiv und surjektiv). Dann gelten

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in D), \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad (\forall y \in W).$$

Geometrisch: Der Graph von f^{-1} ist die Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Vorgehen zum Bilden von f^{-1}:

1. **Bijektivität sicherstellen:** ggf. Definitionsbereich einschränken und Zielmenge passend wählen.
2. **Gleichung aufstellen:** $y = f(x)$.
3. **Nach x auflösen:** erhalte $x = g(y)$.
4. **Variablen tauschen:** $y = g(x)$.

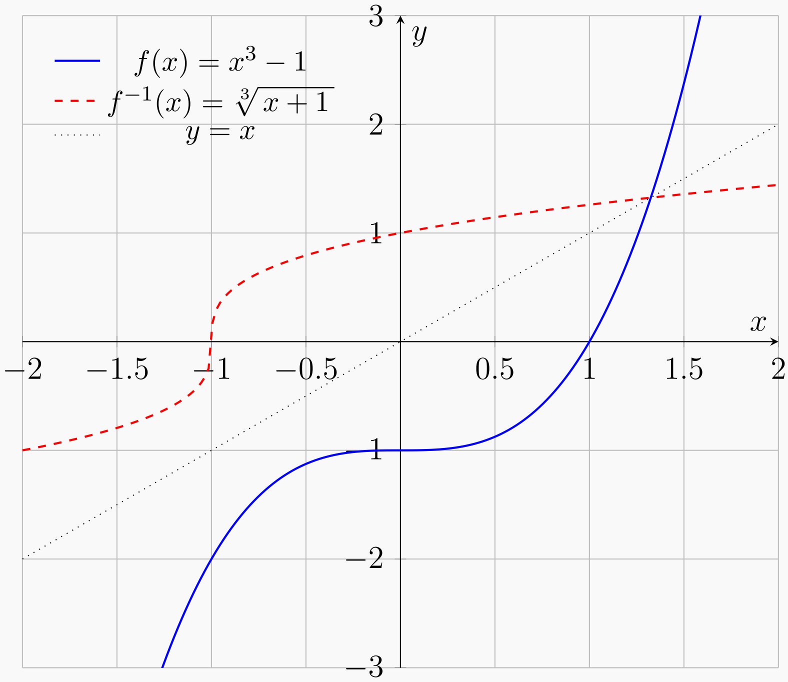
Beispiel: Ganzrationale Funktion

Gegeben: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 1$.
Bijektiv? Surjektiv? Ja. Injektiv? Ja $\Rightarrow$ Also auch bijektiv.
Umkehrfunktion bilden:

$$y = x^3 - 1 \iff y + 1 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y+1}\,.$$

Variablen tauschen:

$$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x+1}$$



Beispiel: Sinus

Problem: $f(x) = \sin x$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* injektiv (periodisch). **Lösung:** Beschränke den Definitionsbereich auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann ist

$$f\colon \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin x$$

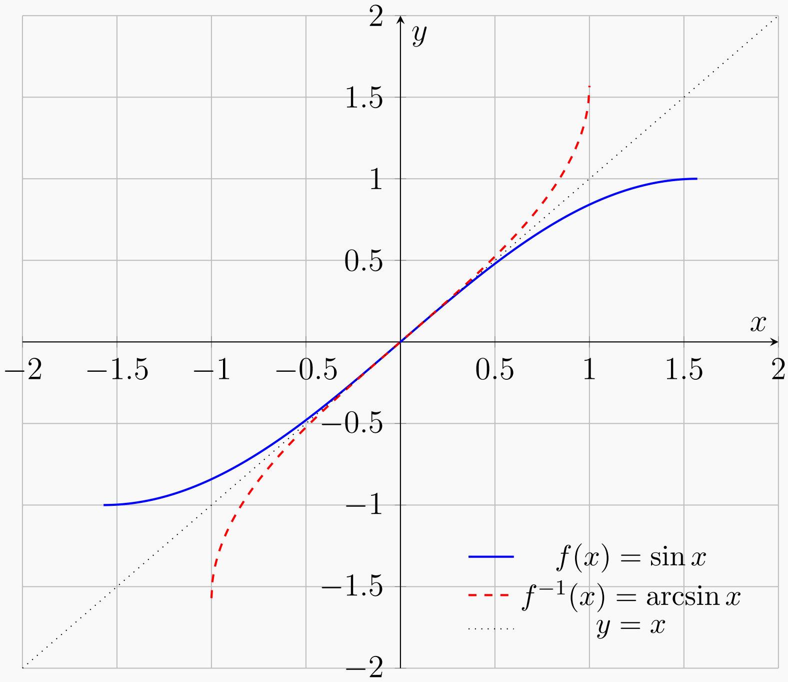
bijektiv.
Umkehrfunktion bilden:

$$y = \sin x \iff x = \arcsin(y) \quad (\text{auf } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]).$$

Variablen tauschen:

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x) \quad \text{mit} \quad f^{-1}\colon [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Notationen: $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ (nicht $1/\sin x$).



3 Asymptoten

Eine Funktion $g(x)$ ist Asymptote von $f(x)$, wenn gilt: $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0}$

3.1 Tipps zur Berechnung

1) Definitionslücken / Pole (vertikale Asymptoten): Treten Nullen im Nenner auf, so liegen dort i. d. R. *vertikale Asymptoten*.

Beispiel

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
Vertikal: $x = 1$ und Horizontal: $g(x) = 0$ (denn $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$).

2) Brüche mit Nenner $\geq$ Zähler: Es genpgt den Limes zu bilden:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_n x^n + \dots} = \frac{a_n}{b_n} \quad (b_n \neq 0).$$

Beispiel

$f(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x^2-1}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x^2+3}{2x^2-1} - g(x) \right) = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{4}{2} = 2$$

3) Brüche mit höhergradigem Zähler: Ist Zähler > Nenner, zuerst Polynomdivision:

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{p(x)}$$

Dann ist $g(x) = Q(x)$ die Asymptote (schräg, falls $\deg(Q) = 1$; parabolisch, falls $\deg(Q) = 2$; usw.).

Beispiel

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$$\text{Polynomdivision:} \qquad x^2 : (x+1) \;=\; x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\Big(x - 1 + \tfrac{1}{x+1} - g(x)\Big) = 0 \implies g(x) = x - 1$$