Übung 9 - Krümmung, Evolute & Potenzreihen

1 Ebene Kurven

1.1 Zykloide

Eine Zykloide ist die Bahn eines Punktes auf einem Rad, das ohne zu rutschen abrollt.

Parameterdarstellung:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - b\sin(t) \\ a - b\cos(t) \end{pmatrix}}$$

Typen der Zykloide:

Gewöhnlich: $a = b$
Verkürzt: $a > b$
Verlängert: $a < b$

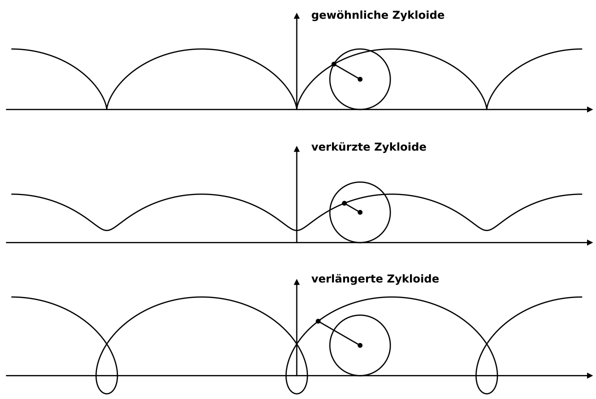


Figure 1: Darstellung der Zykloide

2 Eigenschaften einer Kurve in Parameterdarstellung

2.1 Tangente

Tangente $\vec{t}(t)$ im Punkt P einer Kurve $\vec{r}(t)$

Tangentenrichtung:

$$\boxed{\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}}$$

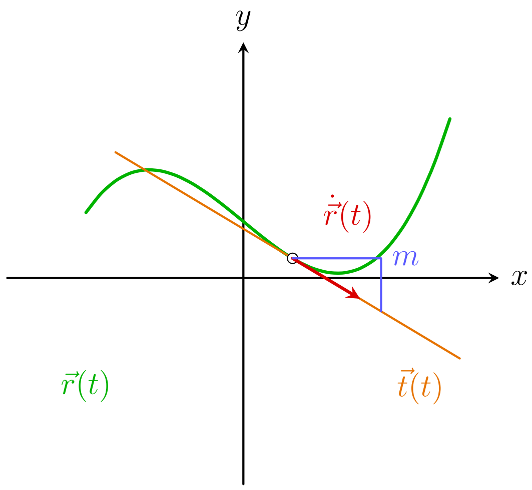
Tangenten-Gleichung:

$$\boxed{\vec{t}(t) = \vec{r}(t) + s \cdot \dot{\vec{r}}(t)}$$

Tangenten-Steigung:

$$\boxed{m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}}$$

Die Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ beschreiben die Geschwindigkeit der Bewegung entlang der Kurve, also die Richtung der Tangente.



2.2 Normale

Normale $\vec{n}(t)$ im Punkt P einer Kurve $\vec{r}(t)$

Normenrichtung:

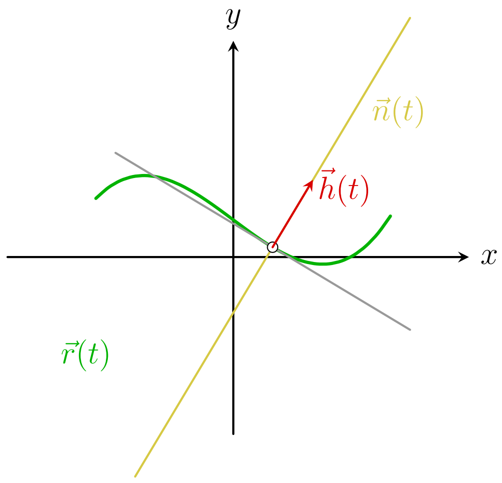
$$\boxed{\vec{h}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}}$$

Normalengleichung:

$$\boxed{\vec{n}(t) = \vec{r}(t) + s \cdot \vec{h}(t)}$$

Normaleneinheitsvektor:

$$\boxed{\hat{\vec{n}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}}$$



2.3 Krümmung

Krümmung $k(t)$ einer Kurve $\vec{r}(t)$:

Rate (Schnelligkeit), mit der sich die Richtung der Tangente ändert.

$$\boxed{k(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}}}$$

$k(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Kurve nach links gekrümmt

$k(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Kurve nach rechts gekrümmt

2.4 Krümmungskreis

Krümmungskreis K einer Kurve $\vec{r}(t)$

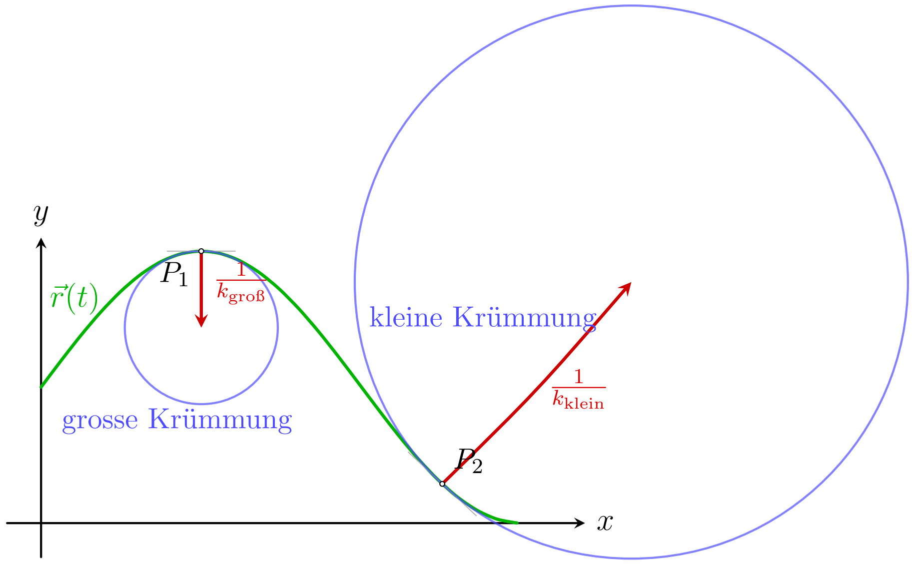
Kreis im Punkt P des Graphen $\vec{r}(t)$, der die Kurve im Punkt P am besten annähert. Er besitzt dort dieselbe Tangentensteigung und dieselbe Krümmung wie $\vec{r}(t)$.

Radius:

$$\boxed{r_M = \frac{1}{k(t)}}$$

Mittelpunkt:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)}\,\vec{n}(t)}$$

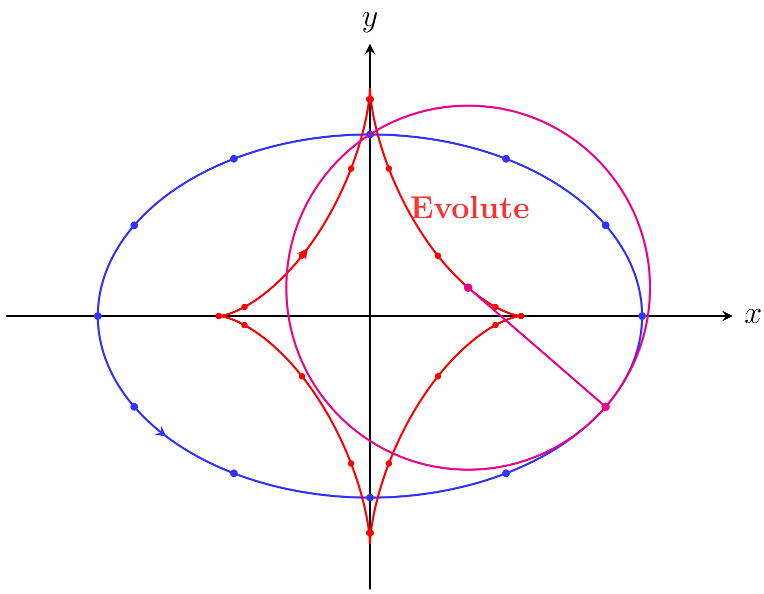


2.5 Evolute

Evolute $\vec{E}(t)$ einer Kurve $\vec{r}(t)$

Wenn die Kurve $\vec{r}(t)$ den Krümmungskreis K durchläuft, beschreibt dessen Mittelpunkt M eine neue Kurve — die Evolute $\vec{E}(t)$.

$$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)}\,\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} x - \dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}\,\dot{y} \\ y + \dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}\,\dot{x} \end{pmatrix}$$



3 Potenzreihen

3.1 Konvergenz

Konvergiert die Folge der Partialsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ gegen S, so heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S}$$

Wichtige Sätze zur Konvergenz

- Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegen S, so gilt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

- Ist $|a_n| < |a_{n-1}|$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt *nicht*, dass die Reihe konvergiert.

$$\textit{Beispiel}: \quad a_n = \frac{1}{n}$$

- Ist die Reihe alternierend, $|a_n| < |a_{n-1}|$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so konvergiert die Reihe.

$$\textit{Beispiel}: \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

3.1.1 geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

3.1.2 Tricks mit bekannten Reihenentwicklungen

- $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

- $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

- $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} = (1 + x + x^2 + \dots)(1 - x + x^2 - \dots)$

- $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{3+(x-1)} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x-1}{3} + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 + \dots\right)$$

3.2 Potenzreihen

Definition:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots}$$

x_0 ist der **Entwicklungspunkt** (oder Zentrum) der Potenzreihe. Die Reihe beschreibt also die Funktion in der Umgebung von x_0.

3.2.1 Konvergenzradius

Konvergenzradius ist also die halbe Länge des Konvergenzintervalls.

$$\boxed{r_K = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

Interpretation:

Divergenz $|x| > r_K$ Konvergenz $|x| < r_K$

Der Konvergenzradius gibt also an, für welche Werte von x die Potenzreihe konvergiert.

Beispiel: Bestimmung des Konvergenzradius

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^k$$

Bestimme den Konvergenzradius r_K:

Wir verwenden die Formel:

$$r_K = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Hier ist

$$a_n = \frac{3^n}{n+1}.$$

Damit folgt:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{3^n}{n+1}}{\frac{3^{n+1}}{n+2}} = \frac{3^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{3^{n+1}} = \frac{n+2}{3(n+1)}.$$

Wir bilden den Grenzwert:

$$r_K = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{1}{3}.$$

$$\Longrightarrow r_K = \frac{1}{3}$$

Interpretation:

$$\text{Konvergent für } |x| < \frac{1}{3}, \qquad \text{divergent für } |x| > \frac{1}{3}.$$

3.3 Idee der Potenzreihe

Idee: Approximation von komplizierten Funktionen durch Polynome.

Beispiel: $cos(x)$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

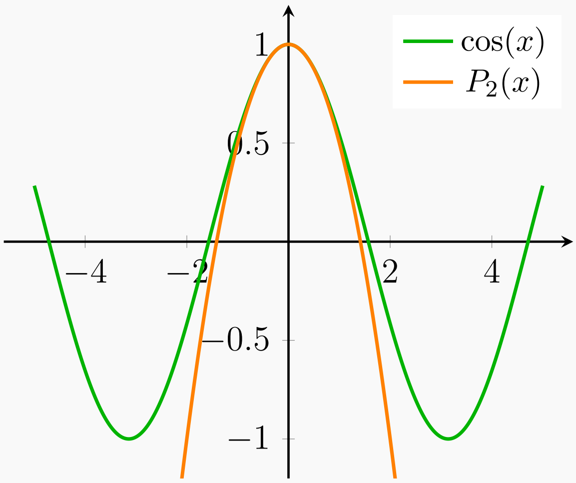
Dies ist die allgemeine Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) von $\cos(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

Das Polynom $P_2(x)$ stimmt in der Nähe von $x = 0$ sehr gut mit $\cos(x)$ überein — je höher der Grad n, desto genauer wird die Approximation.

Vergleich:

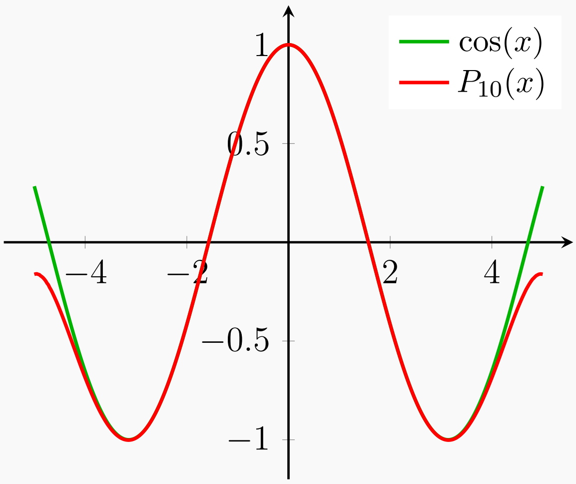
P_2

$$\cos(x) \approx P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$



P_{10}

$$P_{10}(x) \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$



Wir bestimmen den Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium für die *geraden* Indizes:

$$r_K = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{2k}}{a_{2k+2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} (2k+2)(2k+1) = \infty.$$