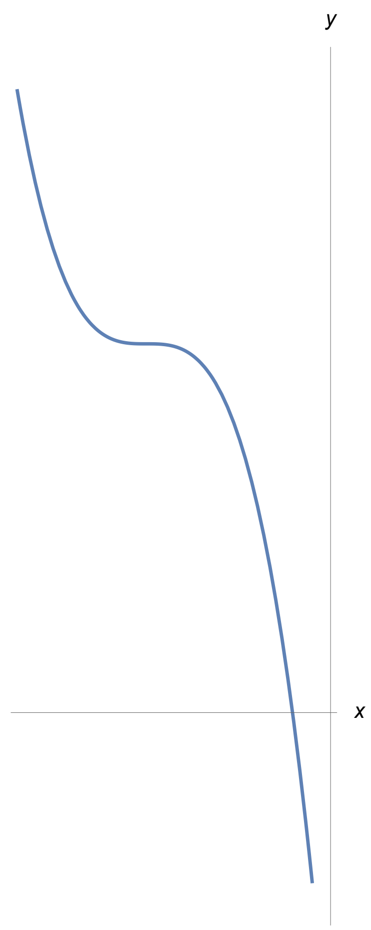
Analysis I, Sommer 2023

Single Choice

1. (I) Welche Eigenschaften hat die Funktion $f(x) = \frac{\cosh x}{\cos x}$, wenn $D(f)$ maximal gewählt wird?
   (a) (Richtig) Die Funktion f ist gerade.
   (b) Die Funktion f ist beschränkt.
   (c) Die Funktion f ist injektiv.
   (d) Die Funktion f ist monoton wachsend.

2. (I) Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote der Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x - 4}$ wenn $x \longrightarrow \infty$?
   (a) (Richtig) $x \mapsto \frac{x}{2} - 1$
   (b) $x \mapsto x - 1$
   (c) $x \mapsto x - 3$
   (d) $x \mapsto x^2 - 4x + 3$

3. (I)



   Welche Funktion $f(x)$ passt zu dem obigen Graphen?
   (a) (Richtig) $g(x) = (-x - 2)^3 + 4$

(b) $g(x) = (x+2)^3 + 4$

(c) $g(x) = (-x+2)^3 + 2$

(d) $g(x) = -(x-4)^3 - 2$

4. (I) Gegeben sei die die rekursive Folge $a_{n+1} := 2a_n^2 - 1$. Für welchen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ ist diese Folge beschränkt?

   (a) (Richtig) $a_0 = -1$

   (b) $a_0 = -2$

   (c) $a_0 = 2$

   (d) $a_0 = 4$

5. (II) Welche Funktion $g(x)$ ist die lineare Ersatzfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$?

   (a) (Richtig) $g(x) = -3x + 1$

   (b) $g(x) = -x + e$

   (c) $g(x) = -ex - 1$

   (d) $g(x) = 2x + 1$

6. (II) In welcher Menge liegt folgender Grenzwert?

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin^2(x) - \cos^2(x)}$$

   (a) (Richtig) $(-1, 1)$

   (b) $(-\infty, -1]$

   (c) $[1, \infty)$

   (d) $\{\infty, -\infty\}$

7. (II) Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = x^{\sqrt{\ln(x)}}$ und $g(x) = e^{\sqrt{x}}$, definiert auf $[1, \infty)$. Welche Aussage ist richtig?

   (a) (Richtig) $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$

   (b) $g(x) = o(f(x))$ für $x \to \infty$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

   (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ konvergiert, aber nicht gegen 0 oder 1.

8. (II) Es sei $\vec{r}(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung einer Kurve in der Ebene. Es bezeichne $k(t)$ die Krümmung von $\vec{r}(t)$ und $\vec{E}(t)$ die Parametrisierung der Evolute von $\vec{r}(t)$. Die Distanz zwischen der Kurve und der Evolute, also $|\vec{r}(t) - \vec{E}(t)|$, sei monoton steigend in t. Was lässt sich dann über $|k(t)|$ aussagen?

   (a) (Richtig) $|k(t)|$ ist monoton fallend in t.

   (b) $|k(t)|$ ist monoton steigend in t.

   (c) $|k(t)|$ ist konstant.

   (d) $|k(t)|$ kann monoton steigend in t, monoton fallend in t, oder keines von beiden sein.

9. (II) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(a) = 1$. Nur eine der folgenden Aussagen lässt sich daraus schliessen – Welche?

(a) (Richtig) f *muss eine* lokale Extremalstelle bei $x = a$ haben.

(b) f *muss eine* globale Extremalstelle bei $x = a$ haben.

(c) f *kann keine* lokale Minimalstelle bei $x = a$ haben.

(d) f *kann eine* lokale Maximalstelle bei $x = a$ haben.

10. (II) Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat die ebene Kurve mit Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (3t-1) \\ t \cdot (3-t^2) \end{pmatrix}$ eine vertikale Tangente?

    (a) (Richtig) 1/6

    (b) 0

    (c) 1

    (d) 1/3

11. (A) Was ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $\exp(\exp(i\pi/2))$?

    (a) (Richtig) $\sin(1)$

    (b) 0

    (c) e

    (d) $\cos(1)$

12. (A) Es sei die komplexe Zahl $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ gegeben. Dann gilt

    (a) (Richtig) $z^3 = -3\sqrt{3}i$

    (b) $z^3 = 3\sqrt{3}i$

    (c) $z^3 = 9i$

    (d) $z^3 = -9i$

13. (A) Wir betrachten nicht-konstante Polynome P mit reellen Koeffizienten und Grad 6. Genau eine der folgenden Aussagen über derartige Polynome ist richtig – Welche?

    (a) (Richtig) Wenn ein solches Polynom P genau fünf verschiedene reelle Nullstellen hat, dann hat es keine nicht-reelle Nullstelle.

    (b) Jedes solche Polynom P hat mindestens eine reelle Nullstelle.

    (c) Jedes solche Polynom P hat mindestens eine nicht-reelle Nullstelle.

    (d) Wenn ein solches Polynom P genau vier verschiedene reelle Nullstellen hat, dann hat es keine nicht-reelle Nullstelle.

14. (III) Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \sin(t)^{2023} \, dt.$$

    (a) (Richtig) $f'(x) = \sin(x)^{2023}$.

    (b) $f'(x) = \cos(x)^{2023}$.

    (c) $f'(x) = 2023 \sin(x)^{2022} \cos(x)$.

    (d) $f'(x) = -2023 \cos(x)^{2022} \sin(x)$.

15. (III) Betrachten Sie die Funktion $f(x) := \int_0^x e^t \cos(t) \, dt$. Auf welchem Intervall ist f monoton fallend?

(a) (Richtig) $[\pi/2, \pi]$
(b) $[-\pi/2, -\pi/4]$
(c) $[0, \pi/2]$
(d) $[-\pi/4, \pi/4]$

16. (III) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Schwerpunkts der Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $x \in [0, 1]$ eingeschlossen ist. Hinweis: Diese Fläche hat den Flächeninhalt $2/3$.

(a) (Richtig) $3/5$
(b) $5/3$
(c) $2/3$
(d) $3/4$

17. (III) Sei $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die das Integral $\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ konvergiert. Genau eine der folgenden Aussagen ist sicher richtig – Welche?

(a) (Richtig) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
(c) Es gibt sicher ein $x \in (0, \infty)$ mit $f(x) = 0$
(d) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = 0$

18. (III) Es sei die geschlossene Kurve γ in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\rho(\varphi) = 1 + 2\sin(\varphi), \quad \varphi \in \left[\frac{-\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right].$$

Welche der folgenden Formeln bestimmt den Flächeninhalt I der von γ berandeten Fläche?

(a) (Richtig) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} 1 + 4\sin(\varphi) + 4\sin^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$

(b) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} 1 + 2\sin(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$

(c) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \sqrt{5 + 4\sin(\varphi)}\ \mathrm{d}\varphi$

(d) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} 5 + 4\sin(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$

19. (VIII) Welche Funktion stellt die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k! \cdot 2^k}$ in ihrem Konververgenzbereich dar?

(a) (Richtig) $-e^{-x/2}$
(b) $-\sinh(x)$
(c) $-e^{-2x}$
(d) $\ln(-2x)$

20. (VIII) Was ist die dritte Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(\cos(x))$ bei $x_0 = 0$?

(a) (Richtig) 0

(b) -1

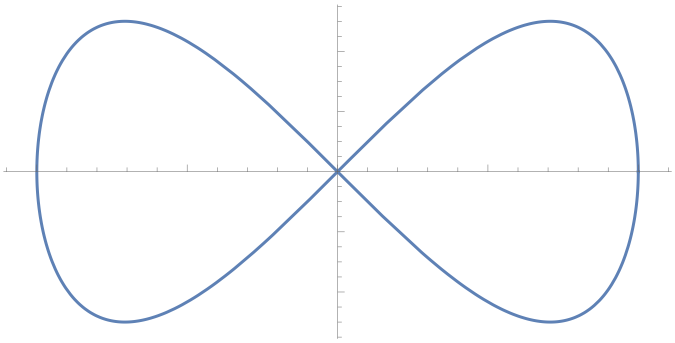
(c) -2

(d) $-1/3$

Aufgabe 21

Gegeben sei die Parametrisierung einer ebenen Kurve K:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \cdot \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sin(2t)}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$



(a) (3 Punkte) Man bestimme die Tangente an K beim ersten Durchgang durch den Ursprung (also denjenigem, mit dem kleinsten positiven t.)

(b) (4 Punkte) Man bestimme die Krümmung der Kurve im Punkt mit Parameter $t = \frac{\pi}{4}$.

(c) (3 Punkte) Man bestimme eine implizite Gleichung, die diese Kurve darstellt. (Hinweis: Suchen Sie ein Polynom $P(x, y)$.)

Lösungen & Grading scheme: (Die Punktzahl wird am Ende abgerundet, Vorzeichenfehler geben einen halben Punkt Abzug). Allgemein gilt (1B, korrekte Bestimmung von $\dot{\vec{r}}(t)$, zählt zu Aufgabe (a); 1D, korrekte Bestimmung von $\ddot{\vec{r}}(t)$, zählt zu Aufgabe (b), Falls $\dot{\vec{r}}(t)$ in Aufgabe (b) bestummen wurde, dann kann man 1A bei der Aufgabe (a) anrechnen, Bei beiden Fehlern gibt ein Vorzeichenfehler nur einen halben Punkt Abzug)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

(a) Der erste Durchgang durch den Nullpunkt passiert bei $t_0 = \pi/2$ (1A, korrekte Bestimmung von t_0). Es gilt (1C, korrektes Einsetzen von $\pi/2$ in die bestimmte Ableitung und Bestimmung der Tangente, fehlende oder falsche Bestimmung der Tangente ist 0.5C; falsches Ausrechnen einer der Ableitungen ist 0C, Tangente darf als $x_0 + tv$ geschrieben werden, falls $t_0 + 0$; dann werden keine Punkte abgezogen falls die richtige Tangentengleichung, falls in diesem Fall die Tangentengleichung nicht durch 0 geht, dann 0.5C)

$$\dot{x}(\pi/2) = -1, \quad \dot{y}(\pi/2) = -1.$$

Die Steigung der Tangente ist also $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1$ und wir erhalten die Tangentengleichung

$$T : y = x.$$

(b) Wir berechnen die Ableitungen der Koordinatenfunktionen bei $t = \pi/4$ (1E, korrekte Bestimmung der Ableitungen, Bei 0 - 1 richtigen Ableitungen: 0E, 2 - 3 richtigen Ableitungen: 0.5 E, falls nur Werte in die Formel für die Krümmung eingesetzt wurden, dann wird E für das Einsetzen der richtigen Werte für Sinus und Kosinus eingesetzt wurden, hier gibt jeglicher Fehler 0E):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist (1F, Aufschreiben der Gleichung $\kappa = (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}$; 1G, Korrekte Bestimmung von $\kappa(\pi/4)$)

$$k(\pi/4) = \frac{\sqrt{2} - 0}{(1/2)^{3/2}} = 4.$$

(c) Durch einen Vergleich der beiden Koordinatenfunktionen gilt (1H, Aufschreiben dieser Gleichung)

$$y = x \cdot \sin t.$$

Nun muss man nur noch den Sinus eliminieren: Es gilt (1J, Aufschreiben dieser Gleichung oder $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$) $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$. Eingesetzt ergibt sich: (1K, Aufschreiben einer wohlgeformten, impliziten Gleichung)

$$y = x \cdot \sqrt{1 - x^2} \quad \iff \quad x^4 - x^2 + y^2 = 0.$$

Alternative Lösungswege mit arccos: 2K, die Gleichung ist korrekt, 1L, die korrekten Restriktionen an x und y (z. Bsp. $x \in [-1, 1]$) werden erwähnt.

Aufgabe 22

Man bestimme die ersten 4 nicht-verschwindenden Koeffizienten der Potenzreihe zur Funktion

$$\int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} \, \mathrm{d}u$$

entwickelt um $x_0 = 0$.

(Hinweis: Der Integrand $\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ hat keine elementare Stammfunktion.)

Lösung: Da der Integrand keine elementare Stammfunktion besitzt, entwickeln wir erst den Integrand als Potenzreihe und integrieren erst danach, gliedweise.

Die Potenzreihe für $\ln(1+u)$ um $u_0 = 0$ ist bekannt aus der Vorlesung oder dem Formelbuch: Es gilt

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$$

Damit ist

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} - \frac{u^3}{4} + \cdots$$

Nun integrieren wir gliedweise:

$$\int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} \, \mathrm{d}u = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots$$

Einen konstanten Term gibt es nicht, da beide Seiten für $x = 0$ auch 0 ergeben müssen. In der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} \, \mathrm{d}u$$

gilt also

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{9}, \quad a_4 = -\frac{1}{16}.$$

Grading Scheme:

First solution

1D$_1$ For the correct computation of the first derivative

$$\frac{\log(1+x)}{x}.$$

2D$_2$ For the correct computation of the second derivative

$$\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}.$$

1D$_3$ For the correct computation of the third derivative

$$-\frac{1}{x(x+1)^2} - \frac{2}{x^2(x+1)} + \frac{2\log(1+x)}{x^3}.$$

1D$_4$ For the correct computation of the fourth derivative

$$\frac{2}{x(x+1)^3} + \frac{3}{x^2(x+1)^2} + \frac{6}{x^3(x+1)} - \frac{6\log(1+x)}{x^4}.$$

1K$_0$ For the correct computation of the coefficient a_0.

1K$_1$ For the correct computation of the coefficient a_1.

1K$_2$ For the correct computation of the coefficient a_2.

1K$_3$ For the correct computation of the coefficient a_3.

1K$_4$ For the correct computation of the coefficient a_4.

Second solution

2A For the Taylor's expansion around 0 of $\log(1+x)$.

1B For the Taylor's expansion around 0 of $\log(1+x)/x$.

2C For the term by term integration

$$\int_0^x \frac{\log(1+u)}{u} du = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k^2}.$$

1K$_0$ For the correct computation of the coefficient a_0.

1K$_1$ For the correct computation of the coefficient a_1.

1K$_2$ For the correct computation of the coefficient a_2.

1K$_3$ For the correct computation of the coefficient a_3.

1K$_4$ For the correct computation of the coefficient a_4.

Note: if the student attempts to use both the solutions, the points are awarded according to the one giving the maximum.