ETH zürich

Aufgaben und Lösungsvorschlag
Single Choice Version A

SC 1 (I) Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\cosh x}{x + \ln(1+x)}, & \text{wenn } x \neq 0 \\ a, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist?

(A) $a = 0$

(B) $a = 1$

(C) **TRUE:** So ein $a \in \mathbb{R}$ existiert nicht.

(D) $a = 1/2$

SC 2 (I) Aus genau einer der folgenden Aussagen lässt sich "$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$" schliessen. Welche ist es?

(A) Für die Folge $x_n := 1 + 1/n$ für $n \geq 1$ gilt $f(x_n) = 2$.

(B) Es gibt eine Folge (x_n) mit $x_n \to 1$ und $f(x_n) \to 2$ für $n \to \infty$.

(C) **TRUE:** Es gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 2$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \to 1$ für $n \to \infty$.

(D) Für jede monoton wachsende, durch $0 < x_n < 1$ beschränkte Folge gilt $f(x_n) \to 2$ für $n \to \infty$.

SC 3 (I) Für welche Kombination von Definitions- und Zielbereich ist die Funktion $f : x \mapsto (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$ bijektiv?

(A) $f : [0, 2] \to [-1, 0]$

(B) $f : [2, 3] \to [0, 4]$

(C) **TRUE:** $f : [1, 3] \to [-1, 3]$

(D) $f : [-1, 1] \to [0, 3]$

SC 4 (I) Die Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \ln x$$

ist nicht elementar lösbar. In welchem Intervall I hat sie aber sicher eine reelle Lösung?

(A) $I = (3, 4)$

(B) $I = (2, 3)$

(C) $I = (0, 1)$

(D) **TRUE:** $I = (1, 2)$

SC 5 (I) Welche Funktion $g(x)$ ist eine Asymptote der Funktion

$$f(x) = \frac{x + 6 \cdot (1 + 1/x)}{2 + e^{-2x} \cdot \cos x}$$

wenn $x \to \infty$?

(A) Keiner der drei gegebenen Vorschläge für $g(x)$ ist eine gewünschte Asymptote.

(B) $g(x) = \frac{x}{3}$

(C) $g(x) = x + 6$

(D) **TRUE:** $g(x) = \frac{x}{2} + 3$

SC 6 (II) Welche der folgenden Aussagen über Grössenordnungen von Funktionen ist richtig, wenn $x \to 0^+$?

(A) $x^{-2} = o\left(e^{x}\right)$

(B) $e^{1/x} = o\left(x^{-2}\right)$

(C) **TRUE:** $e^{-1/x} = o\left(x^{4}\right)$

(D) $x^{-3} = o\left(e^{-1/x}\right)$

SC 7 (II) Jemand hat wie folgt gerechnet und begründet:
“Durch zweimalige Anwendung der Regel von Bernoulli-L’Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{-1/x^2}{2} = -\frac{1}{2}.\text{”}$$

Wie viele dieser 3 Gleichheitszeichen stellen (für sich betrachtet!) korrekte Umformungen dar?

(A) Keines der Gleichheitszeichen ist korrekt.

(B) Genau 2 der Gleichheitszeichen sind korrekt.

(C) **TRUE:** Genau 1 der Gleichheitszeichen ist korrekt.

(D) Alle Gleichheitszeichen sind korrekt.

SC 8 (A) Wie viele reelle, mit Vielfachheit gezählten Nullstellen hat das Polynom $P(x) = x^4 - x$?

(A) 1

(B) 3

(C) 4

(D) **TRUE:** 2

SC 9 (A) Sei $p(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Es sei bekannt, dass die komplexen Zahlen $-1 - i$, 0, $1 + i$ und $-1 + i$ Nullstellen von p sind. Was ist der kleinstmögliche Grad von p unter diesen Bedigungen?

(A) 7

(B) **TRUE:** 5

(C) 8

(D) 4

SC 10 (A) Die komplexe Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 + 2i| \leq 5\}$$

lässt sich geometrisch beschreiben als:

(A) Die Vereinigung von zwei Kreissektoren

(B) **TRUE:** Eine gefüllte Kreisscheibe, aus der eine kleinere Kreisscheibe entfernt wurde

(C) Ein Abschnitt eines Kreisbogens

(D) Die Schnittmenge von zwei gefüllten Kreisscheiben

SC 11 (II) Wir betrachten eine Kurve mit Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) := \Big(2\cos t, \sin t\Big).$$

Wodurch ist die Tangente an diese Kurve im Punkt $\vec{r}(\pi/4)$ gegeben?

(A) $\left\{\left(\sqrt{2}-a, \frac{1}{\sqrt{2}}+a\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

(B) $\left\{\left(\sqrt{2}(1+a), \frac{1}{\sqrt{2}}+a\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

(C) **TRUE:** $\left\{\left(\sqrt{2}(1-a), \frac{1+a}{\sqrt{2}}\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

(D) $\left\{\left(\sqrt{2}+a, \frac{1+a}{\sqrt{2}}\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

SC 12 (III) Wir definieren $f(x) := \int_{-1}^{x} e^{2y}\, \mathrm{d}y$. Wodurch ist $f'(0)$ gegeben?

(A) 2

(B) $2(1-e^{-2})$

(C) $1-e^{-2}$

(D) **TRUE:** 1

SC 13 (III) In welches Integral geht das Integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x$ durch die Substitution $u = \cos x$ über?

(A) **TRUE:** $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{u^2-1}\, \mathrm{d}u$

(B) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, \mathrm{d}u$

(C) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, \mathrm{d}u$

(D) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2-1}\, \mathrm{d}u$

SC 14 (III) Was ist die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\frac{3x+1}{x^2(x+1)-(x+1)}$?

(A) $-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$

(B) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}$

(C) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$

(D) **TRUE:** $-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}$

SC 15 (III) Wir rotieren die Kurve, die durch

$$\vec{r} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{r}(t) := \big(2\cos t, 2\sin t + 4\big)$$

parametrisiert ist, um die x-Achse. Wie gross ist der Flächeninhalt F der Fläche im Raum, die dadurch entsteht?

(A) $F = 2\pi \int_0^{2\pi} (2\sin t + 4) \cdot \sqrt{2}\ \mathrm{d}t$

(B) $F = 2\pi \int_0^{2\pi} (2\sin t + 4) \cdot 4\ \mathrm{d}t$

(C) $F = 2\pi \int_0^{2\pi} (2\sin t + 4)\ \mathrm{d}t$

(D) **TRUE:** $F = 2\pi \int_0^{2\pi} (2\sin t + 4) \cdot 2\ \mathrm{d}t$

SC 16 (III) Wo liegt der Schwerpunkt des homogenen Körpers mit Dichte 1, der die Vereinigungsmenge einer Vollkugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(-1, 0, 0)$ und einer Vollkugel mit Radius 2 und Mittelpunkt $(3, 0, 0)$ ist?

(A) $\left(\frac{5}{3}, 0, 0\right)$

(B) $\left(\frac{11}{5}, 0, 0\right)$

(C) **TRUE:** $\left(\frac{23}{9}, 0, 0\right)$

(D) $\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$

SC 17 (VIII) Für $x \in \mathbb{R}$ ist e^{-2x} gleich

(A) $-2x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^k$

(B) $-2x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

(C) $-1 - 2x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

(D) **TRUE:** $1 - 2x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^k$

SC 18 Der Konvergenradius ρ der Potenzreihe mit $a_k = k$ und $x_0 = 0$ (das entspricht $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$), ist

(A) $\frac{1}{e}$

(B) ∞

(C) 0

(D) **TRUE:** 1

SC 19 (III) Das Integral $\int xe^{2x}\ \mathrm{d}x$ ist gleich

(A) **TRUE:** $x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\ \mathrm{d}x$

(B) $x\frac{e^{2x}}{2} - \int e^{2x}\ \mathrm{d}x$

(C) $xe^{2x} - \int e^{2x}\ \mathrm{d}x$

(D) $xe^{2x} - \int \frac{e^{2x}}{2}\ \mathrm{d}x$

SC 20 (II) Eine Kurve sei durch die Gleichung $2y^4 - x^3 = 0$ gegeben. Man kann diese Kurve parametrisieren durch $\vec{r}(t)$ gegeben durch

(A) $\vec{r}(t) = \left(t^3, \sqrt[3]{2}t^4\right)$

(B) $\vec{r}(t) = \left(t^4, \sqrt[3]{2}t^3\right)$

(C) **TRUE:** $\vec{r}(t) = \left(\sqrt[3]{2}t^4, t^3\right)$

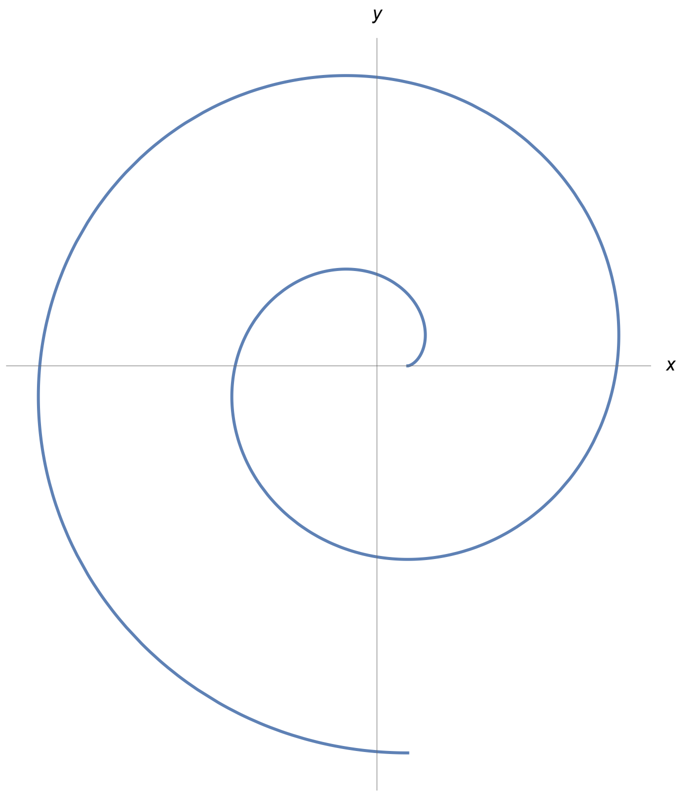
(D) $\vec{r}(t) = \left(\sqrt[3]{2}t^3, t^4\right)$

Offene Aufgaben

A1 Wir betrachten die *Evolvente des Einheitskreises*. Sie entsteht, wenn man den Endpunkt eines Fadens beim Abwickeln vom Einheitskreis verfolgt. Die entstehende Kurve wird durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \qquad t > 0$$

beschrieben.



(a) (3 Punkte) Die Kurve hat beim erstmaligen Durchlaufen des dritten Quadranten einen Punkt mit vertikaler Tangente. Man bestimme die Koordinaten dieses Punkts.
Lösung:

Die Tangente ist vertikal wenn die x-Koordinate von $\dot{\vec{r}}(t)$ gleich 0 ist. Es gilt

$$\dot{\vec{r}}(t) = t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Also ist die Tangent vertikal wenn $t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$. Die Kurve befindet sich für das erste Mal im 3ten Quadrant wenn $t = \frac{3\pi}{2}$ und die Koordinaten sind $\vec{r}(\frac{3\pi}{2}) = (-\frac{3\pi}{2}, -1)$.

(b) (4 Punkte) Man bestimme die Krümmung der Kurve $k(t)$ für ein allgemeines $t > 0$.
Lösung:

Die Krümmung ist durch

$$k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t + t \sin t, \quad \dot{x}(t) = t \cos t, \quad \ddot{x}(t) = \cos t - t \sin t \\ y(t) &= \sin t - t \cos t, \quad \dot{y}(t) = t \sin t, \quad \ddot{y}(t) = \sin t + t \cos t. \end{aligned}$$

Einsetzen und die Identität $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ liefert

$$k(t) = 1/t.$$

(c) (3 Punkte) Man bestimme die Bogenlänge der Kurve für t von 0 bis 2π.
Lösung:

Die Bogenlänge von 0 bis T ist allgemein

$$\int_0^T \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Somit erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{t^2} dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

A2 (a) (7 Punkte) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{2x+1}$$

um den Punkt $x_0 = -1$.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Taylorreihe.

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x+1}, \\ f''(x) &= 2^2 e^{2x+1}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= 2^k e^{2x+1}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} \\ &= \frac{2^k}{k!e}. \end{aligned}$$

Also ist die Taylorreihe von f um $x_0 = -1$ gegeben durch

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!e} (x+1)^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Alternativ kann diese Taylorreihe geschrieben werden als

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!e} (x+1)^k.$$

(b) Gemäss dem Quotientenkriterium aus der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{2^k (k+1)!e}{2^{k+1} k!e} \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{2} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

(Dieser Limes ist ein uneigentlicher Grenzwert.)