Anmerkung vom Verfasser

Diese Zusammenfassung wurde von **Max Schaldach** für die Vorlesung *Analysis I* von Andreas Steiger (Herbstsemester 2022) erstellt. Als Orientierung wurde die Zusammenfassung von Tim Reinhart verwendet.

Auf meiner **Webseite** findet ihr eine Sammlung meiner Zusammenfassungen und aller Unterlagen, die mir das Leben einfacher gemacht haben: https://sites.google.com/view/materialien-max-schaldach/

Es ist jedem freigestellt, diese Zusammenfassung weiterzuentwickeln und zu veröffentlichen. Um Verwirrung zu vermeiden, sollte jedoch deutlich darauf hingewiesen werden, dass es sich nicht um die Originalfassung handelt.

Viel Erfolg, ihr packt das!

Hinweis: Richtigkeit und Vollständigkeit kann nicht garantiert werden. Korrekturen, Verbesserungsvorschläge, und anderweitige Anregungen zum Inhalt und der Gestaltung bitte an max.schaldach.de@gmail.com weiterleiten.

Änderungsprotokoll

28.08.2023	Veröffentlichung der originalen Version
05.11.2023	Korrektur der Formeln für den Phasenwinkel in 2.1.
10.12.2023	Löschen einer Formulierung in 5.5.
26.12.2023	Änderungen: Formeln Konvergenzradius (1.2.), Taylorreihe + Beispiele (1.3.), Phasenversetzung & Sinus-Euler (3.2.), Partielle Integration & Partialbruchzerlegung (5.3.)
05.01.2024	Korrektur von einem Integral in 5.7.
08.01.2024	Hinzufügen Vorgehen komplexe Nullstellen in 5.3.
01.02.2024	Korrektur von Zusammenhängen in 5.3. und von Reihenentwicklungen (Anhang 1)
11.04.2024	Korrektur Ableitungen der hyperbolischen Funktionen (3.3.). Danke an Benjamin Riedi!
04.01.2025	Korrektur Vorzeichen (5.1.). Danke an Sebastien Herman und Julius Eckl!
27.01.2025	Korrektur Potenz (Anhang 1). Danke an Anna Coolen!
25.08.2025	Abänderung der Multiplikationszeichen.

1. Folgen und Reihen

1.1. Folgen (S.51)

Ordnet man jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zu, entsteht eine **Folge** $(a_n) = a_1, a_2, \dots, a_n$

Gilt $a_{n+1} \geq a_n$, ist eine Folge **monoton wachsend**. Gilt $a_{n+1} \leq a_n$, ist eine Folge **monoton fallend**. Sind alle Glieder einer Folge in einem endlich breitem, waagerechten Parallelstreifen enthalten, ist die Folge **beschränkt**

$\Rightarrow$ Ist eine Folge sowohl monoton wachsend / fallend wie auch beschränkt, bezeichnet man sie als **konvergent**

Eine Folge wird als **Nullfolge** bezeichnet, wenn:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

woraus allerdings weder folgt, dass (a_n) monoton wachsend / fallend ist, noch dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

1.2. Reihen & Konvergenzbereich (S.51, 77)

Eine **Reihe** ist die Summe der Glieder einer Folge $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Geometrische Reihe (konvergiert für $\lvert x\rvert < 1$)	**Alternierende geometrische Reihe**
$\sum x^k = \frac{1}{1-x}$	$\sum (-1)^n x^k = \frac{1}{1+x}$

Eine Reihe konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n$ konvergiert

Die Menge der Zahlen x für die eine Reihe konvergiert, wird als **Konvergenzbereich** $[-\rho + x_0, \rho + x_0]$ bezeichnet

Der **Konvergenzradius** ρ ist die grösste Zahl, für die eine Reihe konvergiert. In gewissen Fällen kann der Konvergenzradius mit einem Limes bestimmt werden:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

Beide Seiten des Intervalls müssen separat betrachtet werden

$\sum \frac{a}{n}$	konvergiert nie, da $\frac{1}{n}$ divergiert
$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{bx+c}{d}\right)^k$	konvergiert für x, wenn $\lvert(\dots)\rvert < 1$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{bx+c}{d}\right)^k}{a^k}$	konvergiert für x, wenn $-a < (\dots) < a$

1.3. Taylorreihe (S.77,78)

Eine **Taylorreihe** approximiert eine Funktion um den Punkt x_0:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

Für $(x - x_0) < 1$ konvergiert die Taylorreihe

Das Taylorpolynom einer ungeraden Funktion besitzt nur ungerade Indizes und umgekehrt

Beispiele für die Entwicklung einer Taylorreihe:

$\frac{1}{x+3}$ um $x_0 = 1$:

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x-1)+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{(x-1)}{-4}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k (x-1)^k$$

$\frac{1}{x+2}$ um $x_0 = 0$:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2-(-x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k x^k$$

2. Komplexe Zahlen (S.14,18,19)

2.1. Eigenschaften

Eine **komplexe Zahl** ist von der Form $z = a + ib$ wobei $a = Re(z)$ der **Realteil** und $b = Im(z)$ der **Imaginärteil** ist

Die **komplex konjugierte Zahl** $\bar{z} = a - ib$ ist die Spiegelung von z an der reellen Achse (meist die x-Achse)

Es gelten die folgenden Regeln:

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$	$\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \lvert z_2\rvert$	$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert \bar{z}_2\rvert}$
$\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$	$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$
$\overline{z^n} = \bar{z}^n$		

Die Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ nennt man **Polarform**

Die Darstellung $z = re^{i\varphi}$ nennt man **Eulersche Form**. Es gilt:

$$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und:

$a > 0$	$a < 0,\ b \geq 0$	$a < 0,\ b < 0$
$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$	$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$

wobei φ gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird

Wichtig: $z = e^{i\pi} = -1, z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

2.2. Rechenregeln

Die Eulersche Form eignet sich für komplizierte Operationen mit komplexen Zahlen:

Multiplikation:	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division:	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Inverse:	$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$
Potenz:	$z^n = r^n e^{in\varphi}$
Wurzel:	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$

wobei $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Alle Wurzeln liegen auf Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$

2.3. Polynome (S.21,57)

Ein **Polynom** ist eine Summe von Potenzen einer Variable:

$$p(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$$

x wird als **Nullstelle** des Polynoms p bezeichnet, wenn $p(x) = 0$

Der **Grad** eines Polynoms ist dessen grösster Exponent (oben n)

Ein Polynom vom Grad n hat n Nullstellen

Ein Polynom kann reelle und komplexe Nullstellen besitzen. Diese können einfach ($p(x) = 0$), doppelt ($p(x) = 0, p'(x) = 0$), dreifach ($p(x) = 0, p'(x) = 0, p''(x) = 0$), bis n-fach vorkommen

Komplexe Nullstellen kommen immer paarweise vor $(z, \bar{z})$. Ein Polynom mit ungeradem Grad besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Eine einfach komplexe Nullstelle entspricht zwei Nullstellen. Eine doppelt komplexe Nullstelle entspricht vier Nullstellen

Es gelten folgende Regeln für den Grad eines Polynoms:

$$Grad\{p+q\} = \max(Grad\{p\}, Grad\{q\})$$
$$Grad\{pq\} = Grad\{p\} + Grad\{q\}$$

3. Funktionen

3.1. Eigenschaften (S.54)

Eine **Funktion** $f: D(f) \to Z(f)$ bildet eine Menge auf einer andere Menge ab. Sie besitzt einen Definitionsbereich $D(f)$, Zielbereich $Z(f)$ und einen Wertebereich / ein Bild $W(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$

Gerade Funktion	**Ungerade Funktion**
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$

Eine Funktion ist **surjektiv**, wenn jeder Wert im Zielbereich angenommen wird: $Z(f) = W(f)$

Eine Funktion ist **injektiv**, wenn jede Horizontale den Graphen höchstens einmal schneidet: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ Eine Funktion ist **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Bijektive Funktionen besitzt eine **Umkehrfunktion** / **Inverse** mit $W(f^{-1}) = D(f)$ und $D(f^{-1}) = W(f)$

Eine Funktion $f(x)$ ist **stetig** im Punkt $x = \xi$, wenn:

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi^+} f(x)$$

3.2. Trigonometrische Funktionen (S.58,97,98,99)

Trigonometrische Funktionen beschreiben Zusammenhänge zwischen Winkeln und Seitenverhältnissen

$\alpha(°)$	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\alpha(\pi)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
sin (α)	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
cos (α)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
tan (α)	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

Der Cosinus ist eine gerade Funktion, der Sinus ist ungerade

Der Tangens ist der Quotient aus Sinus und Cosinus:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

- $\cos(x)$ ist grösser als $\sin(x)$ auf $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ und $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$
- $\sin(x)$ ist grösser als $\cos(x)$ auf $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$
- $\cos(x)$ ist positiv auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
- $\sin(x)$ ist positiv auf $(0, \pi)$

Der Cosinus und Sinus sind phasenversetzt:

$$\cos(x \pm \pi/2) = \mp\sin(x), \quad \sin(x \pm \pi/2) = \pm\cos(x),$$
$$\cos(x \pm \pi) = -\cos(x), \quad \sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$$

Die Ableitungen lauten:

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Die wichtigsten Identitäten lauten:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1, \quad \cos(x)^2 = \frac{1}{1 + \tan(x)^2}$$

$$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2}$$

$$\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$$
$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$$

$$\sin(t)\cos(s) = {}^1\!/_2\,(\sin(t+s) + \sin(t-s))$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a \pm b) = \cos(b)\sin(a) \pm \sin(b)\cos(a)$$

Transformation von trigonometrischen Funktionen:

$$a\cos(bx + c) + d$$

- Bei $a > 1$ Streckung in y-Richtung, bei $0 < a < 1$ Stauchung in y-Richtung, Spiegelung an x-Achse bei $a < 0$
- Bei $0 < b < 1$ Streckung in x-Richtung, bei $b > 1$ Stauchung in x-Richtung
- Verschiebung um c in *negative* x-Richtung
- Verschiebung um d in positive y-Richtung

3.3. Hyperbolische Funktionen (S.60)

Hyperbolische Funktionen sind trigonometrische Funktionen an der Einheitshyperbel

x	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\tanh(x)$
0	1	0	0

Ihre Umkehrfunktionen sind definiert als:

$$\mathrm{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\mathrm{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$
$$\mathrm{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Die Ableitungen lauten:

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x), \quad \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x),$$
$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{d}{dx}\mathrm{Arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Die wichtigsten Identitäten lauten:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

$$\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$$

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x) - 1}{2}}, \quad \cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x) + 1}{2}}$$

$$\sinh(\mathrm{Arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad \cosh(\mathrm{Arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\cosh(a \pm b) = \cosh(a)\cdot\cosh(b) \pm \sinh(a)\cdot\sinh(b)$$
$$\sinh(a \pm b) = \cosh(a)\cdot\sinh(b) \pm \sinh(a)\cdot\cosh(b)$$

3.4. Exponential & Logarithmusfunktionen (S.17,58)

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form ab^x

Die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen sind die **Logarithmusfunktionen** $\log_c(x)$

Hinweis: Bei Herrn Steiger entspricht $\log(x) = \log_e(x) = \ln(x)$

Transformation für Potenz-, Exponential-, und Logarithmusfunktionen:

Potenzfunktion:	$a(x+b)^n + c$
Exponentialfunktion:	$am^x + c$
Logarithmusfunktion:	$a\log(x+b) + c$

- Bei $a > 1$ Streckung in y-Richtung, bei $0 < a < 1$ Stauchung in y-Richtung, Spiegelung an x-Achse bei $a < 0$
- Verschiebung um b in *negative* x-Richtung
- Verschiebung um c in positive y-Richtung

3.5. Grenzwerte (S.51,52,62,66)

Der **Limes** / **Grenzwert** entspricht dem Funktionswert, dem sich eine Funktion an einer betrachteten Stelle annähert. Existiert ein Grenzwert, konvergiert die Funktion, andernfalls divergiert sie

Die **Grenzwertsätze** lauten:

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x) g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Vorgehen beim Berechnen von Grenzwerten:

1. Konstanten können vor den Grenzwert gezogen werden
2. Bei gewissen Termen (z.B. bei Ausdrücken im Argument eines Sinus oder Cosinus) lohnt es sich zu substituieren
3. Falls $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ (oder $\pm\infty$), darf man **Bernoulli-Hôpital** anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Eine **Asymptote** ~ einer Kurve ist eine Funktion, bei der der Abstand zwischen Kurve und Funktion gegen Null strebt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0$$

Ist f eine Asymptote von g, so ist auch g eine Asymptote von f

Die **Landau-Symbole** werden verwendet, um das Wachstum von Funktionen zu beschreiben:

f wächst langsamer als g:

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ für } x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f wächst höchstens genauso schnell wie g:

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ für } x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \le C \in \mathbb{R}$$

$f(x) = o\big(g(x)\big)$ und $f(x) = O\big(g(x)\big)$ können gleichzeitig zutreffen, da C den Wert 0 annehmen kann

Eine Funktion kann gegen 0 oszillieren:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^{\sin(x)+1} e^x}\right) = 0$$

Für $x \longrightarrow \infty$ gilt:

$$e^x > a^x > x^b > \sqrt[c]{x} > \log_a(x) > trig$$

Die **Eulersche Zahl** e kann mit Grenzwerten dargestellt werden:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Wichtige Grenzwerte:

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\tan(x)}{x} = \pm\infty$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a$	$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	

3.6. Inverse

Die Steigung der Inverse ist die Inverse der Steigung

Für die Inverse einer Verkettung gilt:

$$f(g(x)) = y \quad \Rightarrow \quad \big(f(g(x))\big)^{-1} = g^{-1}(f^{-1}(y))$$

4. Differentiale

4.1. Ableitungsregeln (S.63,65)

Die **Ableitung** beschreibt die Änderungsrate einer Funktion

Potenz:	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
Addition:	$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$
Multiplikation:	$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Faktor:	$\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$
Division:	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Verkettung:	$\big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$
Inverse:	$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$

Die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade und umgekehrt

Sei f eine gerade Funktion, so gilt für die ungeraden Ableitungen:

$$f'(0) = f'''(0) = f'''''(0) = \cdots = 0$$

Achtung: Bei der Ableitung einer Wurzel den Faktor der Potenz sowie die innere Ableitung nicht vergessen

4.2. Linearisieren & Fehlerrechnung (S.64)

Die Linearisierung ist ein Verfahren, um eine nichtlineare Funktion an einer Stelle x_0 durch eine lineare Funktion zu approximieren. Die Formel der **linearen Ersatzfunktion** lautet:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

wobei $f(x_0)$ der Stützpunkt, $f'(x_0)$ die Steigung und $(x - x_0)$ der horizontale Abstand zu x_0 ist

Der **absolute Fehler** durch die Linearisierung beträgt:

$$\Delta f = f(x_0) - t(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Die allgemeine Formel für den **relativen Fehler** beträgt:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{f(x_0)}$$

4.3. Mittelwertsatz & Satz von Rolle (S.64)

Der **Mittelwertsatz** besagt, dass es zwischen zwei Endpunkten einer Funktion mindestens einen Punkt gibt, in dem die Tangente an die Funktion parallel zur Geraden durch die Endpunkte verläuft

Der **Satz von Rolle** besagt, dass bei einer differenzierbaren, nicht injektiven Funktion $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ ein Punkt existieren muss, dessen Ableitung 0 beträgt

4.4. Kurvendiskussion (S.65)

Die **Kurvendiskussion** dient dazu, eine Vorstellung von der Form einer Funktion zu erhalten:

Positiv	**Negativ**
$f(x) > 0\ \forall x$	$f(x) < 0\ \forall x$
Monoton wachsend	**Monoton fallend**
$f'(x) \ge 0\ \forall x$	$f'(x) \le 0\ \forall x$
Konvex («Tal/Loch»)	**konkav** («Berg»)
$f''(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$

Lokales Minimum	**Lokales Maximum**	**Wendepunkt**
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$

Wenn $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x) = 0$ und $f^n(x) \neq 0$

... ist x eine lokale Extremalstelle, wenn n gerade ist

... ist x ein Wendepunkt, wenn n ungerade ist

4.5. Tangenten

Die **Tangente** $t(x)$ an eine Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 ist die Gerade, die an diesem Punkt dieselbe Steigung wie die Funktion besitzt. Es gilt $t(x_0) = f(x_0)$ und $t'(x_0) = f'(x_0)$

Die Tangenten an $\cos(x)$ und $\sin(x)$ können nie eine Steigung besitzen, die im Betrag grösser ist als 1

4.6. Kurven (S.67)

Im Gegensatz zu Funktionen können **Kurven** jeden möglichen Verlauf annehmen. Sie können sich schneiden oder mehrmals denselben Wegabschnitt durchlaufen

Bei der **Parameterdarstellung** werden die Punkte einer Kurve als Funktion eines oder mehrerer Parameter durchlaufen:

$$t \to \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

Bei der **impliziten Darstellung** $F(x,y) = 0$ wird die Funktion nicht nach einer der beiden Variablen aufgelöst

Bei der **expliziten Darstellung** $f(x)$ steht eine Variable allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens

$\Rightarrow$ Bei der Umrechnung von der Parameter- in die explizite Darstellung nach t auflösen und gleichsetzen

Kurven können in **polaren Koordinaten** $\big(\cos(\varphi)\cdot\rho(\varphi),\ \sin(\varphi)\cdot\rho(\varphi)\big)$ dargestellt werden:

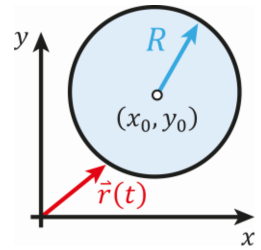
$$x(\varphi) = \rho(\varphi)\cos(\varphi), \qquad y(\varphi) = \rho(\varphi)\sin(\varphi)$$

wobei $\rho(\varphi)$ die Distanz zum Koordinatenursprung ist:

$$\rho(\varphi) = \sqrt{x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2}, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y(\varphi)}{x(\varphi)}\right)$$

4.7. Ebene Kurven (S.67,68,69)

Kreis (Radius R, Mittelpunkt (x_0, y_0))



Parametrisiert mit $t \in [0, 2\pi]$:

$$\vec{r}(t) = \big(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t)\big)$$

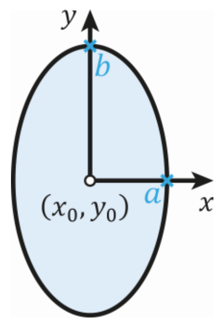
Implizit:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Explizit:

$$f(x) = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

Ellipse (Mittelpunkt (x_0, y_0) und Halbachsen a, b)



Parametrisiert mit $t \in [0, 2\pi]$:

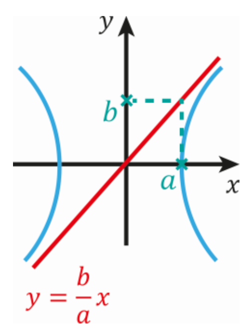
$$\vec{r}(t) = \big(x_0 + a\cos(t), y_0 + b\sin(t)\big)$$

Implizit:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Der Normalenvektor zeigt zum Mittelpunkt der Ellipse

Hyperbel (x-Achsenabschnitt a)



Parametrisiert mit $t \in [0, 2\pi]$:

$$\vec{r}(t) = \big(\pm a\cosh(t), y_0 + b\sinh(t)\big)$$

y_0 ist eine Verschiebung in y-Richtung

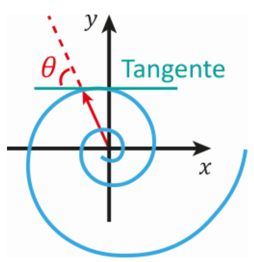
Implizit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Explizit:

$$f(x) = \pm b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$$

Bernoullispirale

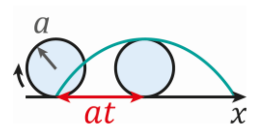


Parametrisiert mit $\varphi \in [0, \infty)$:

$$\vec{r}(\varphi) = C\big(\cos(\varphi)e^{k\varphi}, \sin(\varphi)e^{k\varphi}\big)$$
$$\rho(\varphi) = Ce^{k\varphi}$$

Der Winkel θ zwischen Ortsvektor und Tangente ist konstant. Eine Drehung von $\vec{r}$ um π ergibt parallele Tangenten

Zykloide (Kreisradius a)

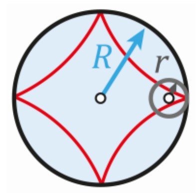


Parametrisiert mit $t \in [0, \infty)$:

$$\vec{r}(t) = \big(at - b\sin(t), a - b\cos(t)\big)$$

Verlängerte Zykloide: $b > a$, **Verkürzte Zykloide**: $b < a$

Astroide (Äusserer Kreisradius R, innerer Kreisradius r)



Parametrisiert mit $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\vec{r}(t) = \big(x_0 + R\cos^3(t), y_0 + R\sin^3(t)\big)$$

Explizit:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

4.8. Eigenschaften Ebene Kurven (S.67)

Richtungsvektor:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

Tangente:

Tangentensteigung: $\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

Tangentialvektor: $\vec{t}(t) = \dot{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$

Tangente an Kurve: $\vec{t}(t_0) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{t}(t_0)$

Für eine **horizontale Tangente** gilt $\dot{y}(t) = 0$. Für eine **vertikale Tangente** gilt $\dot{x}(t) = 0$

Normale: Steht orthogonal zur Tangenten

Normalenvektor: $\vec{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$

nach aussen: $\vec{n}(t) = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$

Normale an Kurve: $\vec{n}(t_0) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{n}(t_0)$

normierter Normalenvektor: $\vec{m}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$

Bogenlänge:

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$$

Krümmung:

Parametrisiert: $k(t) = \dfrac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$

als Funktion: $k(x) = \dfrac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$

als Winkelfunktion: $k(\varphi) = \dfrac{f(\varphi)^2 + 2f'(\varphi)^2 - f(\varphi) \cdot f''(\varphi)}{(f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2)^{3/2}}$

- Negative Krümmung **(konkav)** bei einer Rechtskurve ↷, positive Krümmung **(konvex)** bei einer Linkskurve ↶
- Je enger die Kurve, desto grösser die Krümmung
- Positiv, wenn Kurve sich in die Richtung krümmt, in die der Normalenvektor zeigt

Krümmungskreis: Kreis, der die Krümmung einer ebenen Kurve in einem Punkt am besten nähert

Sein Radius, der **Krümmungsradius**, ist der Kehrwert der Krümmung:

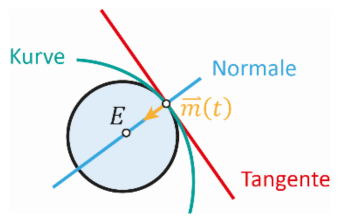
$$\rho(t) = {}^{1}/_{k(t)}$$

Die **Evolute** einer Kurve ist die Ortskurve aller **Krümmungskreismittelpunkte**:

$$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \rho(t)\vec{m}(t)$$

$$= \left(x - \frac{1}{k(t)} \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}, y + \frac{1}{k(t)} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \right)$$

- Evolute eines Kreises: Punkt
- Evolute einer Astroide: Astroide
- Evolute einer Ellipse: Astroide
- Evolute einer Parabel: Form einer Möwe (Neilsche Parabel)



5. Integrale (S.70)

5.1. Integrationsregeln (S.71)

Mit **Integralen** können Flächen und Volumen berechnet werden

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x)\,dx\right) = b(x)' f(b(x)) - a(x)' f(a(x))$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int f'(x) \cdot g'(f(x))\,dx = g(f(x)) + C$$

Für gerade Funktionen gilt:

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

Für ungerade Funktionen gilt:

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx$$

5.2. Uneigentliche Integrale (S.72)

Mit Hilfe der **uneigentlichen Integrale** ist es möglich, Funktionen zu integrieren deren Definitionsbereiche unbeschränkt sind:

1. Ordnung (Polstelle / Definitionslücke bei ζ): $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\zeta \to a^+} \int_\zeta^b f(x)\,dx$

2. Ordnung (unbeschränkter Definitionsbereich): $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\zeta \to \infty^+} \int_a^\zeta f(x)\,dx$

5.3. Hilfsmittel (S.71)

Partielle Integration:

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Tricks, um Integral mit partieller Integration zu lösen:

- Term 2-mal partiell integrieren
- Setze $u'(x) = 1$ (respektive $v'(x) = 1$)

Partialbruchzerlegung:

Einfache Nullstelle x_0:	$\dfrac{A}{x - x_0}$
Zweifache Nullstelle x_0:	$\dfrac{A}{(x - x_0)^2} + \dfrac{B}{x - x_0}$
Komplexe Nullstelle:	$\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$

Beispiel:

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{A(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\begin{cases} -A - B + C = 0, & x = 0 \\ 4C = 1, & x = 1 \\ A + 3B + 9C = 2, & x = 2 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}$$

Tipp: $(1 + x^3) = (1 + x)(1 - x + x^2)$

5.4. Substitution (S.71)

Bei der Substitution ersetzt man komplizierte Terme. Im folgenden Beispiel wird $f(x)$ durch u ersetzt:

$$\int_a^b f'(x) g'(f(x))\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(u)\,du$$

5.5. Anwendungen (S.75,76)

Die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse beträgt:

Explizit: $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Parametrisiert: $A = \displaystyle\int_a^b \dot{x}(t) y(t)\,dt$

Die Fläche zwischen einer Kurve und der y-Achse beträgt:

Parametrisiert: $A^* = \displaystyle\int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,dt$

Die **Sektorfläche** ist die Fläche zwischen dem Ursprung und zwei Punkten einer Kurve:

$$S = \pm\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\,dt = \pm\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)^2\,d\varphi$$

positiv, wenn die Fläche links der Kurve ist und negativ, wenn sie rechts der Kurve ist

Die **Bogenlänge** einer Kurve oder Funktion:

Explizit: $s = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

Parametrisiert: $s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$

Polarkoordinaten: $s = \displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \dot{\rho}(\varphi)^2}\,d\varphi$

Das **Rotationsvolumen** um die x-Achse beträgt:

Explizit: $V_x = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx$

Parametrisiert: $V_x = \pi \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t) y^2(t)\,dt \right|$

wobei a und b zwei Punkte auf der x-Achse liegen

Das **Rotationsvolumen** um die y-Achse beträgt:

Explizit (Fläche zwischen Graphen und y-Achse): $V_y = \pi \displaystyle\int_a^b f(y)^2\,dy = \pi \int_a^b x^2 f'(x)\,dx$

Explizit (Fläche zwischen Graphen und x-Achse): $V_y = 2\pi \displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx$

Parametrisiert: $V_y = \pi \left| \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\dot{y}(t)\,dt \right|$

wobei a und b zwei Punkte auf der y-Achse liegen

Die **Rotationsoberfläche** um die x-Achse beträgt:

Explizit: $O_x = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

Parametrisiert: $O_x = 2\pi \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$

Der **Schwerpunkt** (x_s, y_s) ist der Kräftemittelpunkt:

x-Koordinate: $x_s \displaystyle\int_a^b G(x)\,dx = x_s A = \int_a^b x G(x)\,dx$

y-Koordinate: $y_s \displaystyle\int_c^d H(y)\,dy = y_s A = \int_c^d y H(y)\,dy$

wobei $G(x)$ und $H(y)$ die Ausdehnung in y- und x-Richtung sind, a und b auf der x-Achse und c und d auf der y-Achse liegen

Das **Massenträgheitsmoment** gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit während der Drehung um eine bestimmte Achse an:

$$\theta_y = \int_a^b \rho(x) x^2 G(x)\,dx$$

wobei ρ die Dichte ist. Für $\rho = 1$ sei das **Flächenträgheitsmoment**:

x-Achse: $I_x = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_a^b f(x)^3\,dx = \int_a^b y^2 f(y)\,dy$

y-Achse: $I_y = \displaystyle\int_a^b x^2 f(x)\,dx$

Das polare Flächenträgheitsmoment einer Kreisscheibe beträgt:

$$I_0 = \frac{1}{2}\pi r^4$$

Das Trägheitsmoment eines rotierenden Graphen um die x-Achse:

$$\theta_x = \frac{\pi\rho}{2}\int_a^b f(x)^4\,dx$$

die Berechnung für die y- und z-Achse erfolgt analog

Die **kinetische Energie** der Rotation um eine Achse:

$$T = \frac{1}{2}\theta_{x,y,z}\omega^2$$

5.6. Integraltabelle

	$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$
$\sin$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0
$\cos$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	0	2
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
$\sin\cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\sin^2\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
$\sin\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
$\sin^2\cos^2$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$

5.7. Integrale (S.72)

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + C$$

$$\int g'(ax+b)dx = \frac{1}{a}g(ax+b) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(|ax+b|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\ln\left(\left|\frac{x-a}{x-b}\right|\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}\ln(|ax^2+b|) + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(|x^2+1|) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{x}{x^4+3}dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^3+x}dx = \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+x}dx = \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \operatorname{Artanh}(x) + C$$

Wurzeln:

$$\int \sqrt{x \pm a}\, dx = \frac{2}{3}(x \pm a)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C$$

$$\int 2x\sqrt{a+x^2}dx = \frac{2}{3}(a+x^2)^{3/2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arsinh}(x) + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh}(x) + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \operatorname{Arsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \ln\left(\left|x + \sqrt{x^2-4}\right|\right) + C$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^x\, dx = (x-1)e^x + C$$

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\int e^x + xe^x\, dx = xe^x + C$$

$$\int (x+1)e^x dx = xe^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) + C$$

$$\int \ln(x)\, dx = x(\ln(|x|) - 1) + C$$

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2\ln(|x|)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int \frac{(\ln(x))^n}{x}dx = \frac{(\ln(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \ln(\ln(|x|)) + C$$

Trigonometrische Funktionen:

$$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$

$$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

$$\int \tan(x)\, dx = -\ln(\cos(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \ln\left(\left|\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right|\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)}dx = \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) + C$$

$$\int \cos^2(ax)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\right) + C$$

$$\int \sin^2(ax)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\right) + C$$

$$\int \sin(x)\cos^n(x)\, dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(x) + C$$

$$\int \sin^n(x)\cos(x)\, dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + C$$

$$\int \frac{x}{\sin^2(x)}dx = -\frac{x\cos(x)}{\sin(x)} + \ln(|\sin(x)|) + C$$

$$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int x\sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

$$\int x^2\sin(x)\, dx = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\cos(x) + C$$

Hyperbolische Funktionen:

$$\int \cosh^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sinh(x)\cosh(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh(x)}dx = 2\arctan(e^x) + C$$

Anhang 1: Reihen für $-1 < x < 1$ (S.79)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(1+(-1)^k)x^k = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1+(-1)^k)x^k = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \cdots$$

$$\frac{1}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x^3}{\alpha^3} + \cdots\right)$$

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} \pm \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$$

$$\frac{x}{9+x^2} = \frac{x}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^k$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Anhang 2: Tricks Grenzwerte

$$\lim_{x\to\cdots} f^g = \lim_{x\to\cdots} e^{g\ln(f)}$$

$$\lim_{x\to\cdots}\sqrt{f} - g = \lim_{x\to\cdots}(\sqrt{f} - g)\left(\frac{\sqrt{f}+g}{\sqrt{f}+g}\right)$$