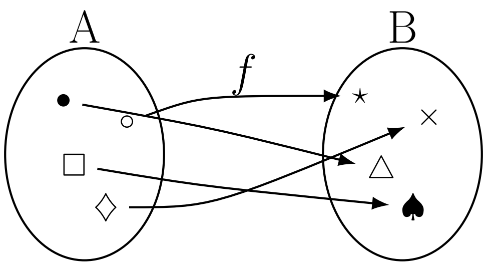
Übung 2 - Funktionen, Grenzwerte & Stetigkeit

1 Funktionen

1.1 Definition

Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen A und B. Die Funktion nimmt ein Element aus der Menge A und weist diesem *genau ein* Element der Menge B zu.

$$f : A \to B, \qquad a \mapsto f(a)$$



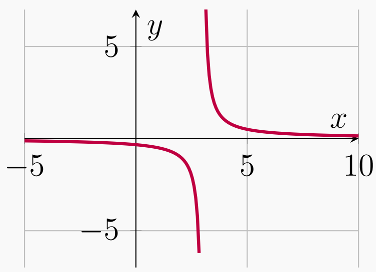
A: Definitionsbereich D
Menge aller *Argumente*, die in die Funktion eingesetzt werden dürfen.

B: Wertebereich W
Menge aller *Werte*, welche die Funktion annehmen kann.

Beispiel 1

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{Definitionsbereich: } D \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \qquad \text{Wertebereich: } W \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

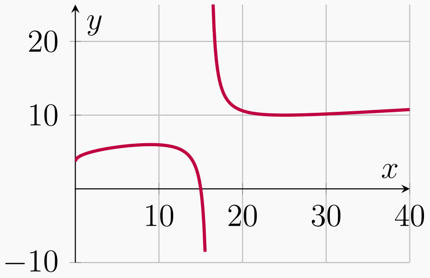


Beispiel 2

$$g(x) = \frac{x - 15}{\sqrt{x} - 4}$$

Definitionsbereich: $D \in \mathbb{R}^+ \setminus \{16\}$, Wertebereich: $W \in \mathbb{R} \setminus (6, 10)$.

Hinweis: $\sqrt{x}$ erfordert $x \geq 0$ & der Nenner darf nicht 0 sein ($\sqrt{x} \neq 4$).



1.2 Verschiedene Funktionen

Potenzfunktionen:

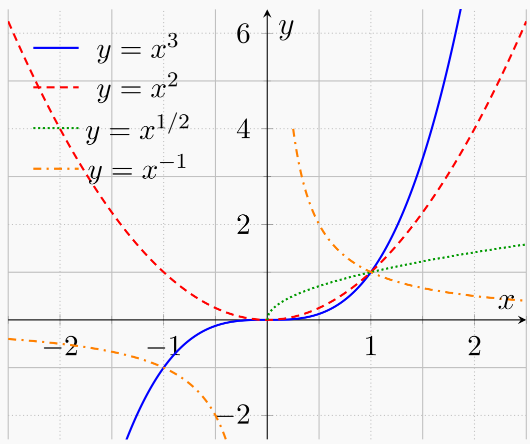
$$f(x) = a \cdot x^n, \qquad n, a \in \mathbb{R}$$

Rechenregeln: $a, b \in \mathbb{R}^+$, $m, n, k \in \mathbb{R}$

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k]{a^{k \cdot m}}$
- $\sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Beispiel: Potenzfunktionen



Polynomfunktionen:

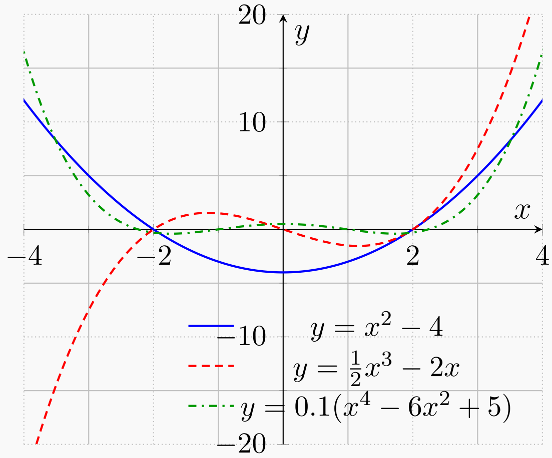
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad n \geq 0$$

a_i: Koeffizient $\quad n$: Grad des Polynoms

$$\Rightarrow f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) \cdots (x - \lambda_n)$$

λ_n: Nullstellen des Polynoms $f(x)$

Beispiel: Polynomfunktionen

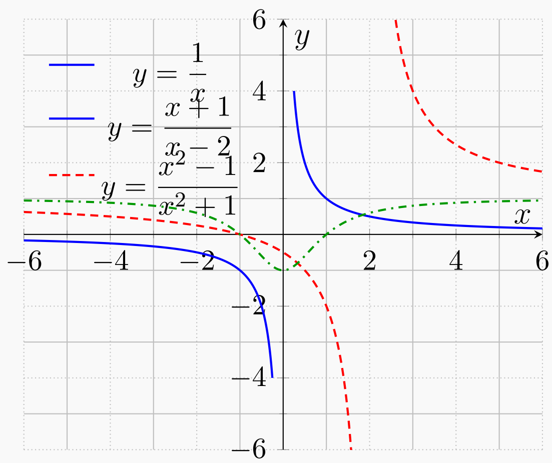


Rationale Funktionen:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind und $q(x) \neq 0$.

Beispiel: Rationale Funktionen



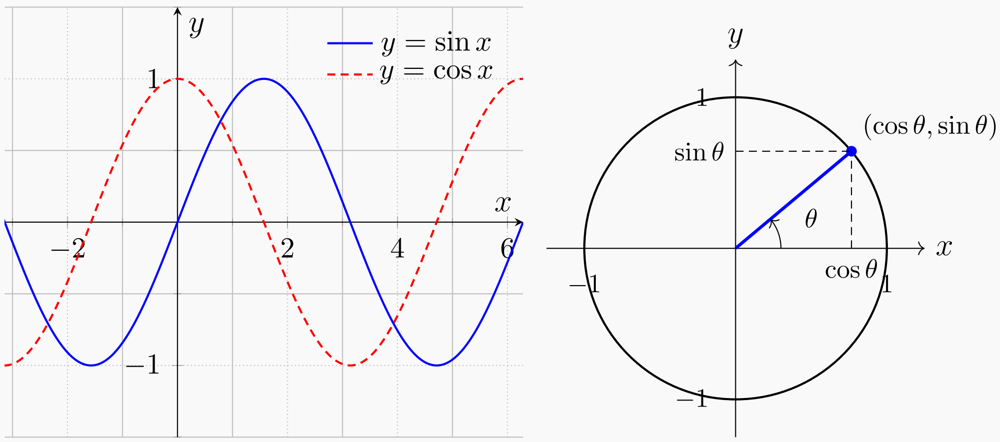
Trigonometrische Funktionen:

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$\Rightarrow$ wichtige Beziehungen:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

Beispiel: Sinus & Cosinus



Exponential & Logarithmusfunktionen:

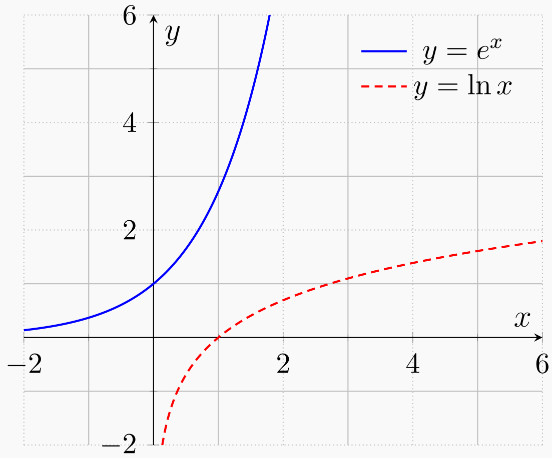
$$f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$$

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Rechenregeln:

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$

Beispiel: Exponential & Logarithmusfunktionen



1.3 Eigenschaften von Funktionen

1.3.1 Gerade/zngerade

Gerade Funktion: $\boxed{f(x) = f(-x)}$

Ungerade Funktion: $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

Beispiel: Vergleich gerade/ungerade Funktionen

$$f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$$
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

1.3.2 Monotonie

(Strikt) monoton wachsend: $\boxed{f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{für alle } x_1 < x_2}$ (strikt: $\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$)

(Strikt) monoton fallend: $\boxed{f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{für alle } x_1 < x_2}$ (strikt: $\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$)

2 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

$\Rightarrow$ Gleiche Rechenregeln wie bei den Folgen!

2.1 Bernoulli–De L'Hospital Regel

Falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

dann gilt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\Rightarrow$ Die Regel darf *mehrfach* angewendet werden, jeweils unter erneuter Prüfung der Voraussetzungen.

2.2 Wichtige Grenzwerte

Basics:

$$\lim_{x\to\infty} x=\infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to 0^+}\tfrac{1}{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-}\tfrac{1}{x}=-\infty$$

Trigonometrische Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$$

Unterschiedlich schnell wachsende Funktionen:

Für $a, m \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{mx}}{x^a}=\infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^{mx}}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^a}=0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{\ln(x)}=\infty$$

Merke: e^x wächst schneller als jede Potenz; $\ln(x)$ wächst langsamer als jede Potenz.

Eulersche Zahl:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x=e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{x}\right)^x=\tfrac{1}{e}$$

2.3 Grenzwerte berechnen

1. Immer versuchen, einfach Wert einzusetzen.
2. Bekommt man einen der folgenden Ausdrücke:

   $$0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad \tfrac{0}{0}, \quad \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

   dann verwendet man die Regel von L'Hospital.
3. Wenn L'Hospital nicht erlaubt ist, gibt es Alternativen:
   - **Bei Brüchen: durch größte Potenz teilen**

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+5}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}}=\frac{7+0}{2}=\frac{7}{2}$$

- **Bei Brüchen: Ausklammern und Kürzen**

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

- **Bei Wurzeln: Erweitern (3. binomische Formel)**

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x+2)-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{7+2}+3}=\frac{1}{6}$$

2.4 Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion f heißt stetig im Punkt c, wenn $f(c)$ definiert ist und

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \;=\; f(c) \;=\; \lim_{x\to c^+} f(x).$$

Beispiel: Stetig

Gegeben sei $f(x)=x^2$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2=1, \qquad f(1)=1^2=1.$$

Da

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1),$$

ist $f(x)=x^2$ **stetig** im Punkt $x=1$.

Beispiel: Nicht stetig (Sprung)

Gegeben sei

$$g(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\ge 0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=-1, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x)=+1, \qquad g(0)=1.$$

Da

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)\neq \lim_{x\to 0^+} g(x),$$

existiert $\lim_{x\to 0} g(x)$ nicht. $\Rightarrow$ g ist **nicht stetig** im Punkt $x=0$.