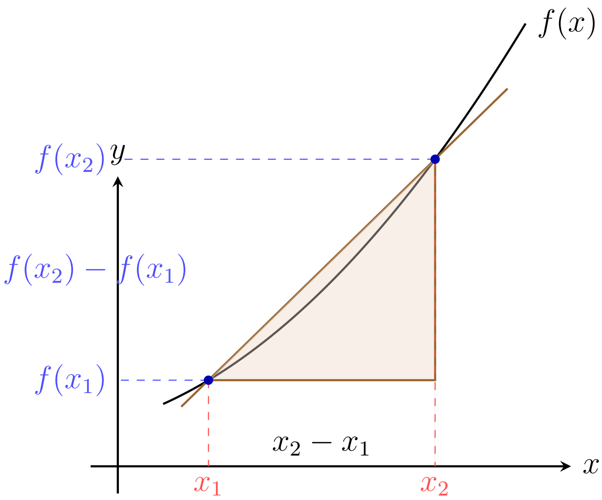
Übung 4 - Einführung Differentialrechnung und Fehlerrechnung

1 Differentialrechnung

Differenzenquotient: $$\boxed{\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Differentialquotient: $$\boxed{\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$



- Existiert der Differentialquotient, so ist die Funktion $f(x)$ differenzierbar in x_0.
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
- Nicht jede stetige Funktion ist aber überall differenzierbar.

  Beispiel: $f(x) = |x|$ ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

1.1 Ableitungsregeln

Potenzgesetz:

$$f(x) = ax^m \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot mx^{m-1}$$

Summengesetz:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Produktregel:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

Kettenregel:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Beispiel Kettenregel

$$f(x) = (3x^2+5)^3, \quad g(\cdot) = (\cdot)^3, \quad h(x) = 3x^2+5$$

$$g'(\cdot) = 3(\cdot)^2, \quad h'(x) = 6x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot (3x^2+5)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2+5)^2$$

1.2 Inverse

Spezialfall Inverse: $\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$

Beispiel

$$f(x) = x^2 + 2, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}, \quad f'(x) = 2x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-2}}$$

1.3 Trigonometrische Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) && \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\
f(x) &= \cos(x) && \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \\
f(x) &= \tan(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \\
f(x) &= \cot(x) && \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x)) \\
f(x) &= \sin^2(x) && \Rightarrow f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x) \\
f(x) &= \cos^2(x) && \Rightarrow f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) = -\sin(2x) \\
f(x) &= \arcsin(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f(x) &= \arccos(x) && \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f(x) &= \arctan(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
f(x) &= \sinh(x) && \Rightarrow f'(x) = \cosh(x) \\
f(x) &= \cosh(x) && \Rightarrow f'(x) = \sinh(x)
\end{aligned}
$$

1.4 Weitere Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x && \Rightarrow f'(x) = e^x \\
f(x) &= a^x && \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a) \\
f(x) &= \ln(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\
f(x) &= \log_a(x) && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)} \\
f(x) &= \ln|x| && \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \\
f(x) &= e^{g(x)} && \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \\
f(x) &= a^{g(x)} && \Rightarrow f'(x) = a^{g(x)} \ln(a) \cdot g'(x) \\
f(x) &= \ln(g(x)) && \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}
\end{aligned}
$$

1.5 Linearisieren, Tangente an Kurve

Man nähert eine Funktion $f(x)$ durch eine lineare Funktion $t(x)$ im Punkt x_0 an.

Berechnung: $\boxed{t(x) = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)}$

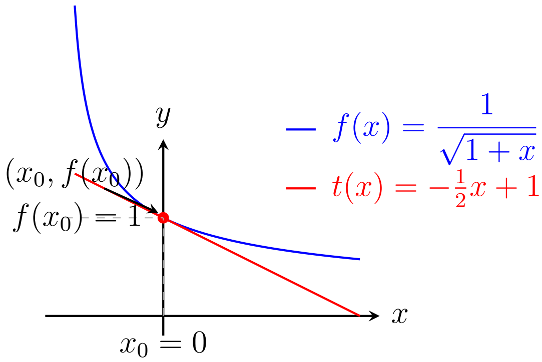
Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad t(x) \text{ im Punkt } x_0 = 0$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t(x) = -\frac{1}{2}(x-0) + 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$



2 Fehlerrechnung

Absoluter Fehler: $\boxed{df = f(x) - f(x_{\text{wahr}}) \approx f'(x) \cdot dx}$

Relativer Fehler: $\boxed{\frac{df}{f} = \frac{f'(x) \cdot dx}{f(x)}}$

Beispiel

Aufgabe: Bestimme den relativen Fehler des berechneten Zylindervolumens bei einem Messfehler des Radius von 1%. Höhe $h = 1$.

$$V(r) = h \cdot \pi r^2 = \pi r^2, \quad V'(r) = 2\pi r$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{V'(r)\,dr}{V(r)} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2} = 2\,\frac{dr}{r}$$

$$\text{relativer Messfehler } \frac{dr}{r} = 1\% \quad \Rightarrow \frac{dV}{V} = 2 \cdot 1\% = 2\%$$