Übung 13 – Volumen von Körpern, Oberflächenberechnung, Schwerpunkt & Trägheitsmoment

1 Volumen

1.1 Rotationskörper

Das Volumen eines Rotationskörpers entsteht durch Rotation einer ebenen Kurve um die x-Achse. Für eine parametrisierte Kurve

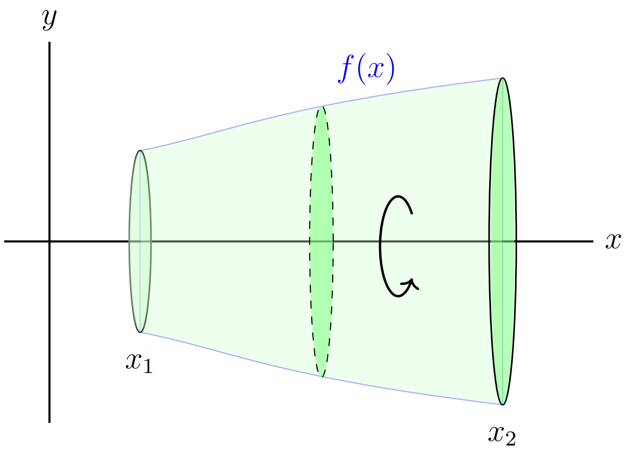
$$\gamma(t) = (x(t),\, y(t)), \qquad t \in [t_1, t_2]$$

gilt dabei:

$$dx = \dot{x}(t)\, dt; \qquad dy = \dot{y}(t)\, dt = f'(x)\, dx$$

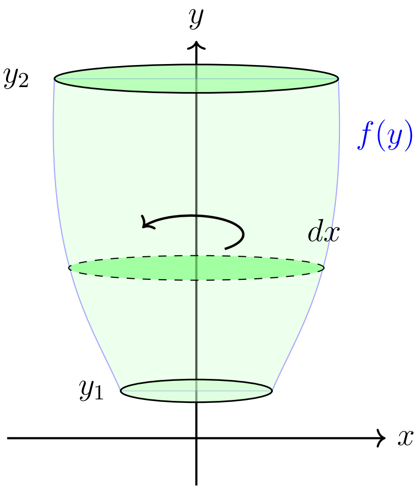
Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2\, \dot{x}(t)\, dt = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2\, dx.$$



Volumen eines Rotationskörpers um die y-Achse:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2\, \dot{y}(t)\, dt = \pi \int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(y))^2\, dy = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 f'(x)\, dx.$$

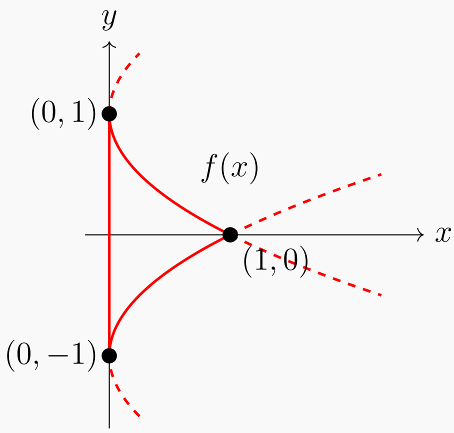


Beispiel: Rotationsvolumen

Die untenstehende Fläche wird begrenzt durch:

- das Geradenstück von $(0, -1)$ nach $(0, 1)$,
- die beiden nach rechts geöffneten Parabelbögen, die in $(0, \pm 1)$ tangential zur y-Achse liegen und sich im Punkt $(1, 0)$ schneiden.

Diese Fläche wird um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers!



Funktion $f(x)$ herausfinden:

$$\text{Parabel: } f(y) = ay^2 + by + c \quad \Rightarrow f(y) = (y-1)^2$$

Nach y auflösen:

$$x = (y-1)^2 \quad \Rightarrow f(x) = y = 1 - \sqrt{x} \quad \text{(Vorzeichen sinnvoll wählen)}$$

$$f(x) = 1 - \sqrt{x}$$

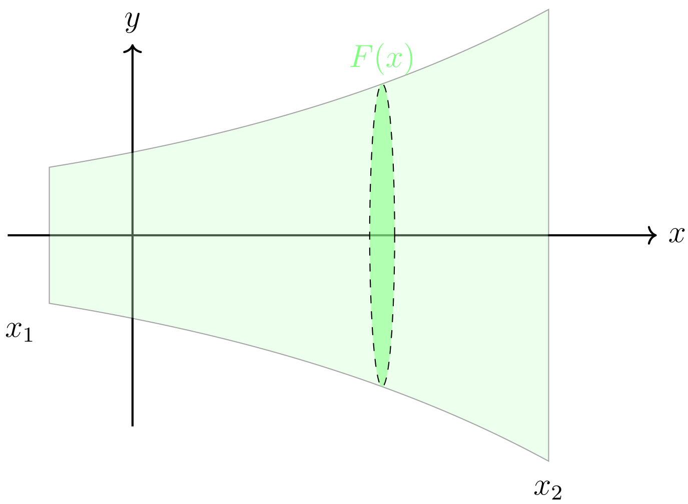
$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2 \, dx = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(1 - 2\sqrt{x} + x\right) dx = \pi \left[x - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$
$$= \pi \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

1.2 Volumen durch Querschnittsfläche $F(x)$

Das Volumen eines Körpers, dessen Querschnitt senkrecht zur x-Achse an jeder Stelle x die Fläche $F(x)$ besitzt, lässt sich durch folgende Formel berechnen:

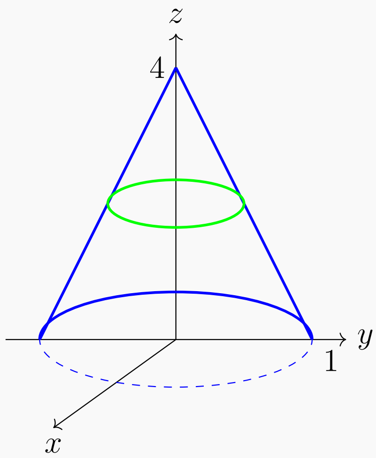
$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$



Beispiel: Volumen durch Querschnittsfläche

Die Querschnittsfläche $F(z)$ eines Kegels ist ein Kreis. Der Radius hängt linear von der Höhe z ab.

$$F(r) = \pi r^2$$
$$V = \int_{z_1}^{z_2} F(z)\, dz$$



Aus der Skizze lesen wir die Mantellinie ab:

$$z(y) = -4y + 4$$

Wir lösen dies nach y auf, denn der Radius des Kreises ist $r = y(z)$:

$$y = r(z) = \frac{1}{4}(4 - z)$$

Damit wird die Querschnittsfläche zu

$$F(z) = \pi \left(\frac{1}{4}(4 - z) \right)^2 .$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Höhe des Kegels:

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 4.$$

Volumenberechnung:

$$V = \int_0^4 \pi \left(\frac{1}{4}(4 - z) \right)^2 dz.$$

Zunächst ausklammern:

$$\left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16},$$

also

$$V = \frac{\pi}{16} \int_0^4 (4 - z)^2 \, dz.$$

Damit:

$$V = \frac{\pi}{16} \int_0^4 (16 - 8z + z^2) \, dz.$$

Integrieren und einsetzen der Grenzen:

$$V = \frac{\pi}{16} \left[16z - 4z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right]_0^4$$

$$= \frac{\pi}{16} \left(64 - 64 + \frac{64}{3} \right)$$

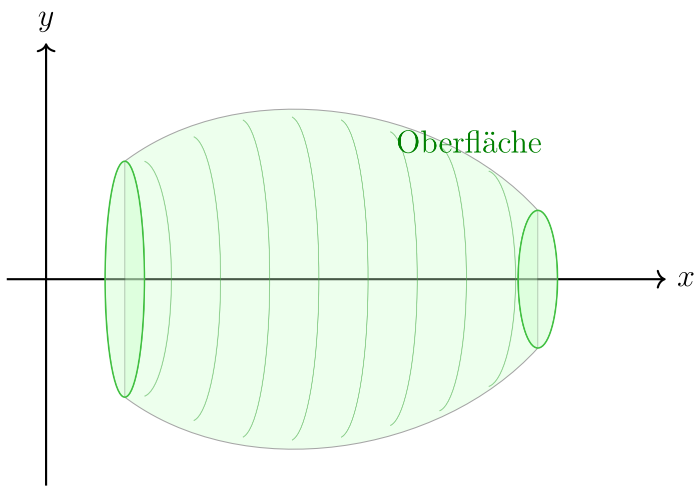
$$V = \frac{4\pi}{3}$$

2 Oberflächen

Oberfläche eines Rotationskörpers um die x-Achse:

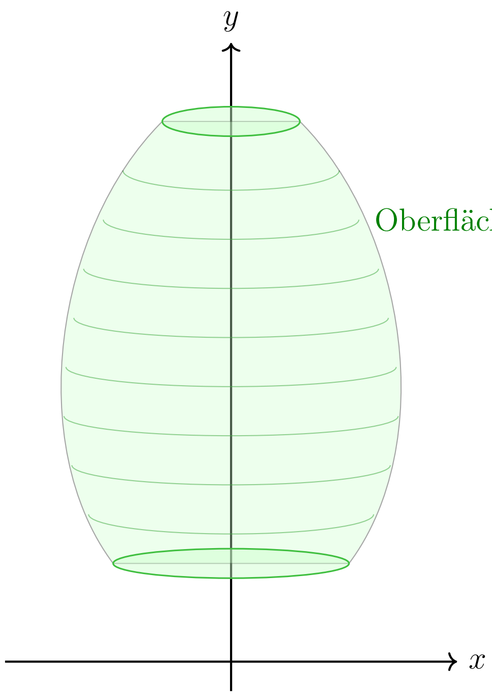
Ist eine Kurve durch $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ gegeben, so hat der Rotationskörper um die x-Achse die Oberfläche

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$



Oberfläche eines Rotationskörpers um die y-Achse:

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x(y)\sqrt{1 + f'(y)^2}\,dy.$$



Beispiel: Volumenkörper

Gegeben sei die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \sinh t \cosh t - t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1].$$

Wie lautet tue Oberfläche des Körpers, wenn man sie um die x-Achse rotiert?

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

Wir bestimmen die Ableitungen:

$$\dot{x}(t) = 2,$$

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}(\sinh t \cosh t - t) = \sinh^2 t + \cosh^2 t - 1 = 2\sinh t.$$

Damit lautet die Oberfläche:

$$A = 2\pi \int_0^1 2t\, \sqrt{4 + 4\sinh^2 t}\, dt.$$

Wir kürzen in der Wurzel:

$$A = 4\pi \int_0^1 t\, \sqrt{4(\cosh^2 t)}\, dt = 4\pi \int_0^1 t \cdot 2\cosh t\, dt = 8\pi \int_0^1 t\cosh t\, dt.$$

Nun integrieren wir partiell:

$$\int t\cosh t\, dt = t\sinh t - \int \sinh t\, dt = t\sinh t - \cosh t.$$

Einsetzen der Grenzen:

$$A = 8\pi\, [t\sinh t - \cosh t]_0^1$$

$$A = 8\pi\, (\sinh 1 - \cosh 1 + \cosh 0)$$

$$A = 8\pi\big(\sinh 1 - \cosh 1 + 1\big).$$

3 Flächenschwerpunkt

Der Schwerpunkt (x_s, y_s) eines ebenen Körpers mit Fläche A und Randfunktion wird durch die Integrale über infinitesimale Flächenelemente beschrieben.

Die Fläche lässt sich sowohl über x als auch über y aufintegrieren:

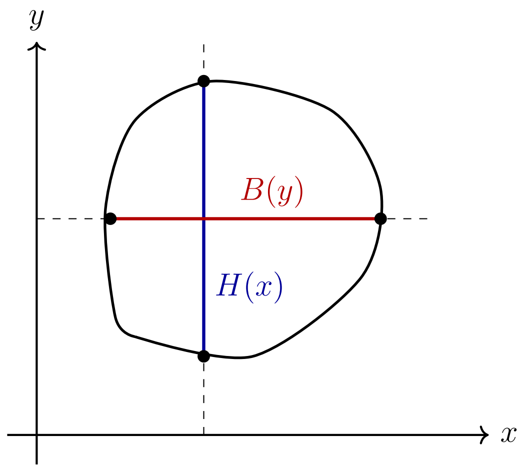
$$A = \int_{x_1}^{x_2} H(x)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} B(y)\, dy.$$

$$x_s = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x\, H(x)\, dx, \qquad y_s = \frac{1}{A} \int_{y_1}^{y_2} y\, B(y)\, dy.$$

Hierbei ist $H(x)$ die *Höhe* der Fläche im Abstand x zur y-Achse, und $B(y)$ die *Breite* der Fläche im Abstand y zur x-Achse.

$$H(x)\, dx \quad \text{und} \quad B(y)\, dy$$

sind die zugehörigen infinitesimalen Flächenelemente.



4 Trägheitsmoment

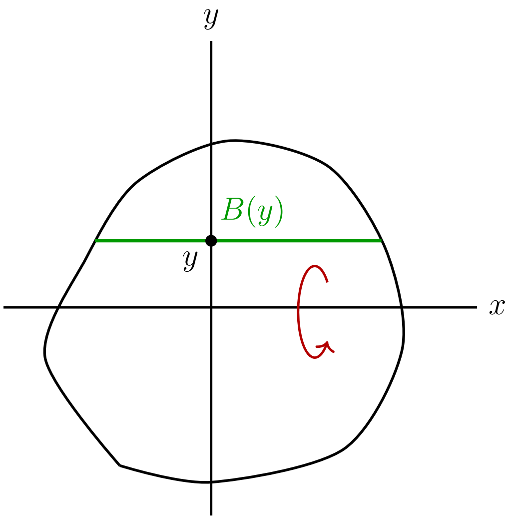
4.1 Flächenträgheitsmomente

Für eine ebene Fläche gilt:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} H(x)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} B(y)\, dy.$$

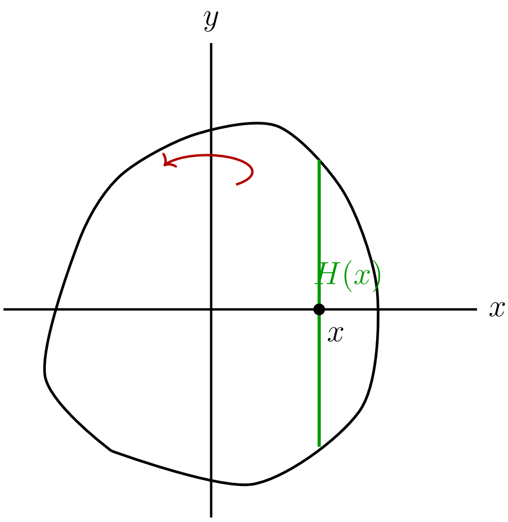
Bezüglich der x-Achse:

$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} y^2\, B(y)\, dy.$$



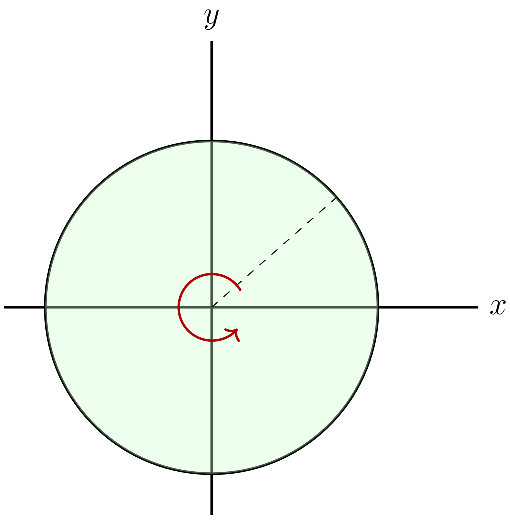
Bezüglich der y-Achse:

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2\, H(x)\, dx.$$



Polares Trägheitsmoment:

$$I_p = I_x + I_y.$$



4.2 Massenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment misst, wie *träge* eine Fläche gegenüber einer Rotation um eine bestimmte Achse ist. Es hängt davon ab, wie weit die Flächenelemente vom Drehzentrum entfernt liegen. Hier ist aber im gegensatz zum Flächenträghetismoment die Diche ρ nicht zwingend einheitlich oder $= 1$

Flächenträgheitsmomente bezüglich der x-Achse:

$$\theta_x = \frac{\pi \rho}{2} \int_a^b f(x)^4 \, dx$$

Flächenträgheitsmomente bezüglich der y-Achse:

$$\theta_y = \int_a^b \rho(x) \, x^2 \, G(x) \, dx$$

Hierbei bezeichnet - $\rho(x)$ die Linien- oder Flächendichte, - $G(x)$ die Breite des Querschnitts senkrecht zur x-Achse, - $f(x)$ den Radius der rotierenden Figur bei Rotation um die x-Achse.

Kinetische Rotationsenergie:

$$T = \frac{1}{2} \, \theta_{x,y,z} \, \omega^2$$

Dabei ist $\theta_{x,y,z}$ das Trägheitsmoment bezüglich der jeweiligen Rotationsachse und ω die Winkelgeschwindigkeit.