Anmerkung vom Verfasser

Diese Zusammenfassung wurde von **Max Schaldach** für die Vorlesung *Analysis II* von Andreas Steiger (Frühlingssemester 2023) erstellt.

Auf meiner **Webseite** findet ihr eine Sammlung meiner Zusammenfassungen und aller Unterlagen, die mir das Leben einfacher gemacht haben: https://sites.google.com/view/materialien-max-schaldach/

Es ist jedem freigestellt, diese Zusammenfassung weiterzuentwickeln und zu veröffentlichen. Um Verwirrung zu vermeiden, sollte jedoch deutlich darauf hingewiesen werden, dass es sich nicht um die Originalfassung handelt.

Viel Erfolg, ihr packt das!

Hinweis: Richtigkeit und Vollständigkeit kann nicht garantiert werden. Korrekturen, Verbesserungsvorschläge, und anderweitige Anregungen zum Inhalt und der Gestaltung bitte an max.schaldach.de@gmail.com weiterleiten.

Änderungsprotokoll

01.02.2024	Veröffentlichung der originalen Version (DE)
22.03.2024	Korrektur Integrationsgrenzen Kugelkoordinaten (7.2.). Danke an Sean Luginbühl!
22.03.2024	Korrektur Grafik (8.2.). Danke an K. Eano!
10.04.2024	Korrektur Parameter Integral (7.4.). Danke an Steven Ly!
11.04.2024	Korrektur Ableitungen der hyperbolischen Funktionen (3.3.). Danke an Benjamin Riedi!
30.05.2024	Korrektur charakteristisches Polynom der Euler'schen Differentialgleichung (9.9.). Danke an Gianmaria Stefanini!
19.07.2024	Korrektur von Notationen (7.2. und 7.3.)- Danke an Steven Ly!
26.08.2024	Korrektur von Notationen (5.1.2., 5.3. und 7.2.). Danke an Steven Ly!
04.01.2025	Korrektur Vorzeichen (6.1.). Danke an Sebastien Herman und Julius Eckl!
27.01.2025	Korrektur Potenz (Anhang 1). Danke an Anna Coolen!
25.08.2025	Abänderung der Multiplikationszeichen.
07.02.2026	Korrektur von Aussage zu maximaler Richtungsableitung in 5.3. Danke an Stef De Zutter!

1. Folgen und Reihen

1.1. Folgen (S.51)

Ordnet man jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zu, entsteht eine **Folge** $(a_n) = a_1, a_2, \dots, a_n$

Gilt $a_{n+1} \geq a_n$, ist eine Folge **monoton wachsend**. Gilt $a_{n+1} \leq a_n$, ist eine Folge **monoton fallend**. Sind alle Glieder einer Folge in einem endlich breitem, waagerechten Parallelstreifen enthalten, ist die Folge **beschränkt**

$\Rightarrow$ Ist eine Folge sowohl monoton wachsend / fallend wie auch beschränkt, bezeichnet man sie als **konvergent**

Eine Folge wird als **Nullfolge** bezeichnet, wenn:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

woraus allerdings weder folgt, dass (a_n) monoton wachsend / fallend ist, noch dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

1.2. Reihen & Konvergenzbereich (S.51,77)

Eine **Reihe** ist die Summe der Glieder einer Folge $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Geometrische Reihe (konvergiert für $\lvert x\rvert < 1$)	**Alternierende geometrische Reihe**
$\sum x^k = \frac{1}{1-x}$	$\sum (-1)^n x^k = \frac{1}{1+x}$

Eine Reihe konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n$ konvergiert

Die Menge der Zahlen x für die eine Reihe konvergiert, wird als **Konvergenzbereich** $[-\rho + x_0, \rho + x_0]$ bezeichnet

Der **Konvergenzradius** ρ ist die grösste Zahl, für die eine Reihe konvergiert. In gewissen Fällen kann der Konvergenzradius mit einem Limes bestimmt werden:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

Beide Seiten des Intervalls müssen separat betrachtet werden

$\sum \frac{a}{n}$	konvergiert nie, da $\frac{1}{n}$ divergiert
$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{bx+c}{d}\right)^k$	konvergiert für x, wenn $\lvert(\dots)\rvert < 1$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{bx+c}{d}\right)^k}{a^k}$	konvergiert für x, wenn $-a < (\dots) < a$

1.3. Taylorreihe (S.77,78)

Eine **Taylorreihe** approximiert eine Funktion um den Punkt x_0:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

Für $(x - x_0) < 1$ konvergiert die Taylorreihe

Das Taylorpolynom einer ungeraden Funktion besitzt nur ungerade Indizes und umgekehrt

Beispiele für die Entwicklung einer Taylorreihe:

$\frac{1}{x+3}$ um $x_0 = 1$:

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x-1)+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{(x-1)}{-4}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k (x-1)^k$$

$\frac{1}{x+2}$ um $x_0 = 0$:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2-(-x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k x^k$$

2. Komplexe Zahlen (S.14,18,19)

2.1. Eigenschaften

Eine **komplexe Zahl** ist von der Form $z = a + ib$ wobei $a = Re(z)$ der **Realteil** und $b = Im(z)$ der **Imaginärteil** ist

Die **komplex konjugierte Zahl** $\bar{z} = a - ib$ ist die Spiegelung von z an der reellen Achse (meist die x-Achse)

Es gelten die folgenden Regeln:

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$	$\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$	$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert \bar{z}_2\rvert}$
$\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$	$\bar{z}_1\bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$
$\overline{z^n} = \bar{z}^n$		

Die Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ nennt man **Polarform**

Die Darstellung $z = re^{i\varphi}$ nennt man **Eulersche Form**. Es gilt:

$$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und:

$a > 0$	$a < 0,\ b \geq 0$	$a < 0,\ b < 0$
$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$	$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$

wobei φ gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird

Wichtig: $z = e^{i\pi} = -1, z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

2.2. Rechenregeln

Die Eulersche Form eignet sich für komplizierte Operationen mit komplexen Zahlen:

Multiplikation:	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division:	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Inverse:	$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$
Potenz:	$z^n = r^n e^{in\varphi}$
Wurzel:	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$

wobei $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Alle Wurzeln liegen auf Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$

2.3. Polynome (S.21,57)

Ein **Polynom** ist eine Summe von Potenzen einer Variable:

$$p(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$$

x wird als **Nullstelle** des Polynoms p bezeichnet, wenn $p(x) = 0$

Der **Grad** eines Polynoms ist dessen grösster Exponent (oben n)

Ein Polynom vom Grad n hat n Nullstellen

Ein Polynom kann reelle und komplexe Nullstellen besitzen. Diese können einfach ($p(x) = 0$), doppelt ($p(x) = 0, p'(x) = 0$), dreifach ($p(x) = 0, p'(x) = 0, p''(x) = 0$), bis n-fach vorkommen

Komplexe Nullstellen kommen immer paarweise vor $(z, \bar{z})$. Ein Polynom mit ungeradem Grad besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Eine einfach komplexe Nullstelle entspricht zwei Nullstellen. Eine doppelt komplexe Nullstelle entspricht vier Nullstellen

Es gelten folgende Regeln für den Grad eines Polynoms:

$$Grad\{p+q\} = \max(Grad\{p\}, Grad\{q\})$$
$$Grad\{pq\} = Grad\{p\} + Grad\{q\}$$

3. Funktionen

3.1. Eigenschaften (S.54)

Eine **Funktion** $f: D(f) \to Z(f)$ bildet eine Menge auf einer anderen Menge ab. Sie besitzt einen Definitionsbereich $D(f)$, Zielbereich $Z(f)$ und einen Wertebereich / ein Bild $W(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$

Gerade Funktion	**Ungerade Funktion**
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$

Eine Funktion ist **surjektiv**, wenn jeder Wert im Zielbereich angenommen wird: $Z(f) = W(f)$

Eine Funktion ist **injektiv**, wenn jede Horizontale den Graphen höchstens einmal schneidet: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ Eine Funktion ist **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Bijektive Funktionen besitzt eine **Umkehrfunktion** / **Inverse** mit $W(f^{-1}) = D(f)$ und $D(f^{-1}) = W(f)$

Eine Funktion $f(x)$ ist **stetig** im Punkt $x = \xi$, wenn:

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi^+} f(x)$$

3.2. Trigonometrische Funktionen (S.58,97,98,99)

Trigonometrische Funktionen beschreiben Zusammenhänge zwischen Winkeln und Seitenverhältnissen

$\boldsymbol{\alpha}(°)$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\pi})$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
sin $(\boldsymbol{\alpha})$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
cos $(\boldsymbol{\alpha})$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
tan $(\boldsymbol{\alpha})$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

Der Cosinus ist eine gerade Funktion, der Sinus ist ungerade

Der Tangens ist der Quotient aus Sinus und Cosinus:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

- $\cos(x)$ ist grösser als $\sin(x)$ auf $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ und $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$
- $\sin(x)$ ist grösser als $\cos(x)$ auf $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$
- $\cos(x)$ ist positiv auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
- $\sin(x)$ ist positiv auf $(0, \pi)$

Der Cosinus und Sinus sind phasenversetzt:

$$\cos(x \pm \pi/2) = \mp\sin(x), \quad \sin(x \pm \pi/2) = \pm\cos(x)$$
$$\cos(x \pm \pi) = -\cos(x), \quad \sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$$

Die Ableitungen lauten:

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Die wichtigsten Identitäten lauten:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1, \quad \cos(x)^2 = \frac{1}{1+\tan(x)^2}$$

$$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$$

$$\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$$
$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$$

$$\sin(t)\cos(s) = {}^1\!/_2\,(\sin(t+s) + \sin(t-s))$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a \pm b) = \cos(b)\sin(a) \pm \sin(b)\cos(a)$$

Transformation von trigonometrischen Funktionen:

$$a\cos(bx + c) + d$$

- Bei $a > 1$ Streckung in y-Richtung, bei $0 < a < 1$ Stauchung in y-Richtung, Spiegelung an x-Achse bei $a < 0$
- Bei $0 < b < 1$ Streckung in x-Richtung, bei $b > 1$ Stauchung in x-Richtung
- Verschiebung um c in *negative* x-Richtung
- Verschiebung um d in positive y-Richtung

3.3. Hyperbolische Funktionen (S.60)

Hyperbolische Funktionen sind trigonometrische Funktionen an der Einheitshyperbel

$\boldsymbol{x}$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\tanh(x)$
0	1	0	0

Ihre Umkehrfunktionen sind definiert als:

$$\text{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\text{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\text{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Die Ableitungen lauten:

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x), \quad \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x),$$
$$\frac{d}{dx}\text{Arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{d}{dx}\text{Arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Die wichtigsten Identitäten lauten:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

$$\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$$

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}, \quad \cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}$$

$$\sinh(\text{Arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}, \quad \cosh(\text{Arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\cosh(a \pm b) = \cosh(a)\cosh(b) \pm \sinh(a)\sinh(b)$$
$$\sinh(a \pm b) = \cosh(a)\sinh(b) \pm \sinh(a)\cosh(b)$$

3.4. Exponential & Logarithmusfunktionen (S.17,58)

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form ab^x

Die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen sind die **Logarithmusfunktionen** $\log_c(x)$

Hinweis: Bei Herrn Steiger entspricht $\log(x) = \log_e(x) = \ln(x)$

Transformation für Potenz-, Exponential-, und Logarithmusfunktionen:

Potenzfunktion:	$a(x+b)^n + c$
Exponentialfunktion:	$am^x + c$
Logarithmusfunktion:	$a\log(x+b) + c$

- Bei $a > 1$ Streckung in y-Richtung, bei $0 < a < 1$ Stauchung in y-Richtung, Spiegelung an x-Achse bei $a < 0$
- Verschiebung um b in *negative* x-Richtung
- Verschiebung um c in positive y-Richtung

3.5. Grenzwerte (S.51,52,62,66)

Der **Limes / Grenzwert** entspricht dem Funktionswert, dem sich eine Funktion an einer betrachteten Stelle annähert. Existiert ein Grenzwert, konvergiert die Funktion, andernfalls divergiert sie

Die **Grenzwertsätze** lauten:

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Vorgehen beim Berechnen von Grenzwerten:

1. Konstanten können vor den Grenzwert gezogen werden
2. Bei gewissen Termen (z.B. bei Ausdrücken im Argument eines Sinus oder Cosinus) lohnt es sich zu substituieren
3. Falls $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ (oder $\pm\infty$), darf man **Bernoulli-Hôpital** anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Eine **Asymptote** $\sim$ einer Kurve ist eine Funktion, bei der der Abstand zwischen Kurve und Funktion gegen Null strebt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0$$

Ist f eine Asymptote von g, so ist auch g eine Asymptote von f

Die **Landau-Symbole** werden verwendet, um das Wachstum von Funktionen zu beschreiben:

f wächst langsamer als g:

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ für } x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f wächst höchstens genauso schnell wie g:

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ für } x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq C \in \mathbb{R}$$

$f(x) = o\big(g(x)\big)$ und $f(x) = O\big(g(x)\big)$ können gleichzeitig zutreffen, da C den Wert 0 annehmen kann

Eine Funktion kann gegen 0 oszillieren:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^{\sin(x)+1} e^x}\right) = 0$$

Für $x \longrightarrow \infty$ gilt:

$$e^x > a^x > x^b > \sqrt[x]{x} > \log_a(x) > trig$$

Die **Eulersche Zahl** e kann mit Grenzwerten dargestellt werden:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Wichtige Grenzwerte:

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\tan(x)}{x} = \pm\infty$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a$	$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	

3.6. Inverse

Die Steigung der Inverse ist die Inverse der Steigung

Für die Inverse einer Verkettung gilt:

$$f(g(x)) = y \quad \Rightarrow \quad \big(f(g(x))\big)^{-1} = g^{-1}(f^{-1}(y))$$

4. Differentiale

4.1. Ableitungsregeln (S.63,65)

Die **Ableitung** beschreibt die Änderungsrate einer Funktion

Potenz:	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Addition:	$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$
Multiplikation:	$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Faktor:	$\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$
Division:	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Verkettung:	$\big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$
Inverse:	$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$

Die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade und umgekehrt

Sei f eine gerade Funktion, so gilt für die ungeraden Ableitungen:

$$f'(0) = f'''(0) = f'''''(0) = \cdots = 0$$

Achtung: Bei der Ableitung einer Wurzel den Faktor der Potenz sowie die innere Ableitung nicht vergessen

4.2. Linearisieren & Fehlerrechnung (S.64)

Die Linearisierung ist ein Verfahren, um eine nichtlineare Funktion an einer Stelle x_0 durch eine lineare Funktion zu approximieren. Die Formel der **linearen Ersatzfunktion** lautet:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

wobei $f(x_0)$ der Stützpunkt, $f'(x_0)$ die Steigung und $(x - x_0)$ der horizontale Abstand zu x_0 ist

Der **absolute Fehler** durch die Linearisierung beträgt:

$$\Delta f = f(x_0) - t(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Die allgemeine Formel für den **relativen Fehler** beträgt:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{f(x_0)}$$

4.3. Mittelwertsatz & Satz von Rolle (S.64)

Der **Mittelwertsatz** besagt, dass es zwischen zwei Endpunkten einer Funktion mindestens einen Punkt gibt, in dem die Tangente an die Funktion parallel zur Geraden durch die Endpunkte verläuft

Der **Satz von Rolle** besagt, dass bei einer differenzierbaren, nicht injektiven Funktion $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ ein Punkt existieren muss, dessen Ableitung 0 beträgt

4.4. Kurvendiskussion (S.65)

Die **Kurvendiskussion** dient dazu, eine Vorstellung von der Form einer Funktion zu erhalten:

Positiv	**Negativ**
$f(x) > 0\ \forall x$	$f(x) < 0\ \forall x$
Monoton wachsend	**Monoton fallend**
$f'(x) \geq 0\ \forall x$	$f'(x) \leq 0\ \forall x$
Konvex («Tal/Loch»)	**konkav** («Berg»)
$f''(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$

Lokales Minimum	**Lokales Maximum**	**Wendepunkt**
$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$

Wenn $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x) = 0$ und $f^n(x) \neq 0$

… ist x eine lokale Extremalstelle, wenn n gerade ist

… ist x ein Wendepunkt, wenn n ungerade ist

4.5. Tangenten

Die **Tangente** $t(x)$ an eine Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 ist die Gerade, die an diesem Punkt dieselbe Steigung wie die Funktion besitzt. Es gilt $t(x_0) = f(x_0)$ und $t'(x_0) = f'(x_0)$

Die Tangenten an $\cos(x)$ und $\sin(x)$ können nie eine Steigung besitzen, die im Betrag grösser ist als 1

4.6. Kurven (S.67)

Im Gegensatz zu Funktionen können **Kurven** jeden möglichen Verlauf annehmen. Sie können sich schneiden oder mehrmals denselben Wegabschnitt durchlaufen

Bei der **Parameterdarstellung** werden die Punkte einer Kurve als Funktion eines oder mehrerer Parameter durchlaufen:

$$t \to \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

Bei der **impliziten Darstellung** $F(x, y) = 0$ wird die Funktion nicht nach einer der beiden Variablen aufgelöst

Bei der **expliziten Darstellung** $f(x)$ steht eine Variable allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens

$\Rightarrow$ Bei der Umrechnung der Parameter- in die explizite Darstellung nach t auflösen und gleichsetzen

Kurven können in **polaren Koordinaten** $\big(\cos(\varphi)\cdot\rho(\varphi),\ \sin(\varphi)\cdot\rho(\varphi)\big)$ dargestellt werden:

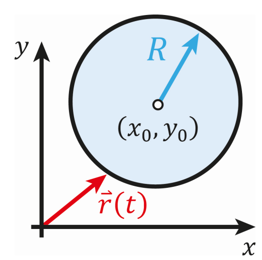
$$x(\varphi) = \rho(\varphi)\cos(\varphi), \qquad y(\varphi) = \rho(\varphi)\sin(\varphi)$$

wobei $\rho(\varphi)$ die Distanz zum Koordinatenursprung ist:

$$\rho(\varphi) = \sqrt{x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2}, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y(\varphi)}{x(\varphi)}\right)$$

4.7. Ebene Kurven (S.67,68,69)

Kreis (Radius R, Mittelpunkt (x_0, y_0))



Parametrisiert mit $t \in [0, 2\pi]$:

$$\vec{r}(t) = \big(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t)\big)$$

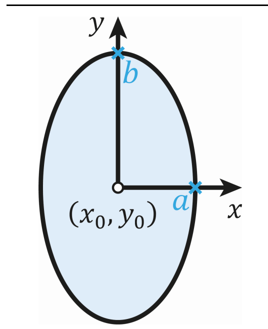
Implizit:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Explizit:

$$f(x) = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

Ellipse (Mittelpunkt (x_0, y_0) und Halbachsen a, b)



Parametrisiert mit $t \in [0, 2\pi]$:

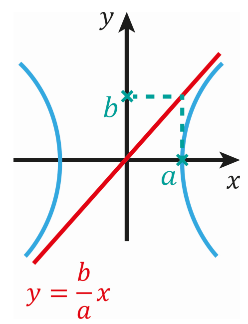
$$\vec{r}(t) = \big(x_0 + a\cos(t), y_0 + b\sin(t)\big)$$

Implizit:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Der Normalenvektor zeigt zum Mittelpunkt der Ellipse

Hyperbel (x-Achsenabschnitt a)



Parametrisiert mit $t \in [0, 2\pi]$:

$$\vec{r}(t) = \big(\pm a\cosh(t), y_0 + b\sinh(t)\big)$$

y_0 ist eine Verschiebung in y-Richtung

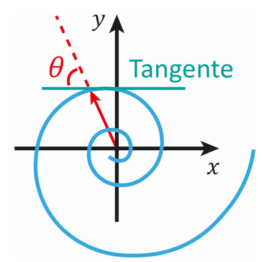
Implizit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Explizit:

$$f(x) = \pm b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$$

Bernoullispirale

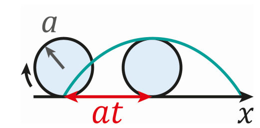


Parametrisiert mit $\varphi \in [0, \infty)$:

$$\vec{r}(\varphi) = C\big(\cos(\varphi)e^{k\varphi}, \sin(\varphi)e^{k\varphi}\big)$$
$$\rho(\varphi) = Ce^{k\varphi}$$

Der Winkel θ zwischen Ortsvektor und Tangente ist konstant. Eine Drehung von $\vec{r}$ um π ergibt parallele Tangenten

Zykloide (Kreisradius a)

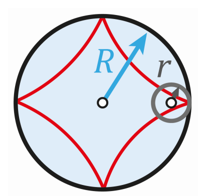


Parametrisiert mit $t \in [0, \infty)$:

$$\vec{r}(t) = \big(at - b\sin(t), a - b\cos(t)\big)$$

Verlängerte Zykloide: $b > a$, **Verkürzte Zykloide**: $b < a$

Astroide (Äusserer Kreisradius R, innerer Kreisradius r)



Parametrisiert mit $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\vec{r}(t) = \big(x_0 + R\cos^3(t), y_0 + R\sin^3(t)\big)$$

Explizit:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

4.8. Eigenschaften Ebene Kurven (S.67)

Richtungsvektor:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

Tangente:

$$\text{Tangentensteigung:} \quad \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

$$\text{Tangentialvektor:} \quad \vec{t}(t) = \dot{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

$$\text{Tangente an Kurve:} \quad \vec{t}(t_0) = \vec{r}(t_0) + \lambda\vec{t}(t_0)$$

Für eine **horizontale Tangente** gilt $\dot{y}(t) = 0$. Für eine **vertikale Tangente** gilt $\dot{x}(t) = 0$

Normale: Steht orthogonal zur Tangenten

$$\text{Normalenvektor:} \quad \vec{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$$

$$\text{nach aussen:} \quad \vec{n}(t) = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$$

$$\text{Normale an Kurve:} \quad \vec{n}(t_0) = \vec{r}(t_0) + \lambda\vec{n}(t_0)$$

$$\text{normierter Normalenvektor:} \quad \vec{m}(t) = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Bogenlänge:

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$$

Krümmung:

$$\text{Parametrisiert:} \quad k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\text{als Funktion:} \quad k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

$$\text{als Winkelfunktion:} \quad k(\varphi) = \frac{f(\varphi)^2 + 2f'(\varphi)^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{(f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2)^{3/2}}$$

- Negative Krümmung **(konkav)** bei einer Rechtskurve ↷, positive Krümmung **(konvex)** bei einer Linkskurve ↶
- Je enger die Kurve, desto grösser die Krümmung
- Positiv, wenn Kurve sich in die Richtung krümmt, in die der Normalenvektor zeigt

Krümmungskreis: Kreis, der die Krümmung einer ebenen Kurve in einem Punkt am besten nähert

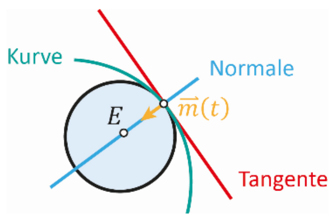
Sein Radius, der **Krümmungsradius**, ist der Kehrwert der Krümmung:

$$\rho(t) = {}^{1}/_{k(t)}$$

Die **Evolute** einer Kurve ist die Ortskurve aller **Krümmungskreismittelpunkte**:

$$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \rho(t)\vec{m}(t)$$
$$= \left(x - \frac{1}{k(t)} \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}, y + \frac{1}{k(t)} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \right)$$

- Evolute eines Kreises: Punkt
- Evolute einer Astroide: Astroide
- Evolute einer Ellipse: Astroide
- Evolute einer Parabel: Form einer Möwe (Neilsche Parabel)



5. Funktionen – Mehrere Variablen

5.1. Funktionen in zwei Variablen

5.1.1. Eigenschaften

Eine Funktion in zwei Variablen $f: (x, y) \to f(x, y)$ weist einem Punkt in $\mathbb{R}^2$ ein Skalar in $\mathbb{R}$ zu. Folgend eine lineare Funktion:

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Eine **Niveaulinie** ist eine Kurve in der xy-Ebene, deren Punkte den gleichen Funktionswert $f(x, y) = C$ (**Niveau**) besitzen. Jeder Punkt auf einer Niveaulinie befindet sich auf derselben Höhe. Niveaulinien lassen sich einfach zeichnen, indem man sie umstellt:

$$y = f(x, C)$$

5.1.2. Ableitung

$f(x, y)$ kann nach einer seiner Variablen abgeleitet werden, dies bezeichnet man als **partielle Ableitung**:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Der **Satz von Schwarz** besagt, dass die Reihenfolge der Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$ keine Rolle spielt:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Die **Integrabilitätsbedingungen** besagen, dass für zwei stetige Funktionen φ und ψ mit $\varphi_y = \psi_x$ eine Funktion $f(x, y)$ mit $f_y = \psi$ und $f_x = \varphi$ existiert. Trifft $\varphi_y = \psi_x$ zu, werden beide Terme integriert und damit die Konstanten von $f(x, y)$ bestimmt

Der **Gradient** (auch **Nabla-Operator**) einer Funktion ist ein Vektor, dessen Einträge die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ sind:

$$\text{grad}(f(x, y)) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(x, y)$$

- *Richtung*: Richtung der grössten Steigung. Steht senkrecht zur Niveaulinie und der Tangentialebene
- *Betrag*: Stärke der Steigung

Nullvektor: Wenn der Gradient an einem Punkt (x, y) der Nullvektor ist, gibt es dort keine Richtung in die f zunimmt

5.1.3. Linearisierung & Fehlerrechnung

Für eine Funktion in zwei Variablen kann eine **Ersatzfunktion** bei (x_0, y_0) aufgestellt werden:

$$t(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

wobei $f(x_0, y_0)$ der Stützpunkt ist

Der durch die Linearisierung entstehende **absolute Fehler** beträgt:

$$\Delta f = t(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$$
$$= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Für das **totale Differential** wird ein neues Koordinatensystem mit df, dx und dy eingeführt:

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

es gilt $df \approx \Delta f$ für kleine Δx und Δy

Die allgemeine Formel für den **relativen Fehler** beträgt:

$$\left|\frac{\Delta f}{f(x_0, y_0)}\right| = \left|\frac{f_x(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}(x - x_0)\right| + \left|\frac{f_y(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}(y - y_0)\right|$$

Fehler in % sind relativ und entsprechen dem Term $\Delta x / x$. Fehler in absoluten Zahlen entsprechen dagegen dem Term Δx

Achtung: Absolute Fehler von Winkeln in Bogenmass umrechnen

Die **allgemeine Dreiecksungleichung** gibt Aufschluss über den Einfluss der individuellen Fehler auf den Gesamtfehler:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Kleine relative Fehler können addiert werden. Beispiel: $V = \pi r^2 h$:

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

Um die obere Grenze des relativen Fehlers zu erhalten, können die Maxima/Minima des Definitionsbereiches der Variablen in den relativen Fehler eingesetzt werden

5.1.4. Extremalstellen

Für Extremalstellen in zwei Variablen gilt:

- **Globale Maximalstelle**: $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$
- **Globale Minimalstelle**: $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$

Der **Satz des Maximums** besagt, dass für eine beschränkte Fläche $A \subset D(f) \in \mathbb{R}^2$ mit einem **Rand** mindestens je eine globale Minimal- und Maximalstelle existiert

Das Vorgehen beim Finden von Extremalstellen lautet:

1. Definitionsgebiet zeichnen
2. *Innen*: $f_x = 0, f_y = 0$ setzen und nach x und y auflösen. Auch nach differenzierbaren Stellen untersuchen (Kandidaten: Brüche und Beträge)
3. *Rand*: Parametrisieren und in f einsetzen, dann nach t ableiten. Die Ableitung gleich 0 setzen, den Wert für t und damit den korrespondierenden Punkt (x, y) bestimmen
4. *Eckpunkte* untersuchen
5. Funktionswerte der Kandidaten berechnen und vergleichen

5.1.5. Tangentialebene

Eine **Tangentialebene** kann durch Linearisierung hergeleitet werden. Wenn eine Fläche durch $f(x, y) = z$ explizit gegeben ist, ist die Tangentialebene in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Die **Tangentensteigung** der Niveaulinien bei (x_0, y_0) beträgt:

$$\varphi' = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

5.2. Funktionen in drei Variablen

5.1. Eigenschaften

Eine Funktion in drei Variablen $f: (x, y, z) \to f(x, y, z)$ weist einem Punkt in $\mathbb{R}^3$ ein Skalar in $\mathbb{R}$ zu. Ihre lineare Funktion lautet:

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

Eine **Niveaufläche** ist eine Fläche im xyz-Raum, deren Punkte den gleichen Funktionswert C (**Niveau**) besitzen.

5.2.2. Ableitung

Die partiellen Ableitungen für $f(x, y, z)$ sind:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Der **Satz von Schwarz** für $f(x, y, z)$ besagt, dass die Reihenfolge der partiellen Ableitungen keine Rolle spielt:

$$f_{xy} = f_{yx}, \qquad f_{xz} = f_{zx}, \qquad f_{yz} = f_{zy}$$

Die Integrabilitätsbedingungen in 3D besagen, dass für drei stetige Funktionen φ, ψ und χ mit $\varphi_y = \psi_x$, $\varphi_z = \chi_x$ und $\psi_z = \chi_y$ eine Funktion $f(x, y, z)$ mit $f_x = \varphi$, $f_y = \psi$ und $f_z = \chi$ existiert

Der Gradient für $f(x, y, z)$ berechnet sich mit:

$$\text{grad}(f(x, y, z)) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(x, y, z)$$

5.2.3. Linearisierung & Fehlerrechnung

Für eine Funktion in drei Variablen kann eine **Ersatzfunktion** bei (x_0, y_0, z_0) aufgestellt werden:

$$t(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)$$
$$+ f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)$$
$$+ f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$
$$= f(\vec{r_0}) + \text{grad}(f(\vec{r_0}))(\vec{r} - \vec{r_0})$$

Die Fehlerrechnung ist analog zu der in zwei Variablen

5.2.3. Tangentialebene

Tangentialebenen können mit der **Gradientenmethode** aufgestellt werden. Die Tangentialebene der impliziten Funktion $f(x, y, z) = c$ im Punkt $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ beträgt:

$$\text{grad}(f(\vec{r_0}))(\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

Eine implizite Funktion $g(x, y, z) = K$ sollte zuerst in ihre explizite Form $f(x, y, z) = g(x, y, z) - K$ und eine Funktion $g(x, y)$ in $f(x, y, z) = g(x, y) - z$ umgeschrieben werden

Eine **Tangentialfläche** ist die Menge aller Tangenten einer Kurve im Raum. Wenn $\vec{r}(u, v)$ die Parametrisierung der Kurve ist, berechnet sich die Tangentialfläche wie folgt:

$$\vec{\varphi}(u, v) = \vec{r}(u, v) + v\vec{r}_u(u, v)$$

5.3. Richtungsableitung

Die **Richtungsableitung** $D_{\vec{e}} f(\vec{r_0})$ von f an der Stelle $\vec{r_0}$ in Richtung von $\vec{e}$ ist ein Skalar. Sie gibt an, wie sich die Funktionswerte an einer Stelle verändern, wenn man sich in Richtung von $\vec{e}$ bewegt:

$$D_{\vec{e}} f(\vec{r_0}) = grad(f(\vec{r_0})) \cdot \vec{e}$$

wobei $\vec{e}$ ein normierter Vektor ist. Die maximale Richtungsableitung tritt in Richtung des Gradienten auf.

5.4. Kettenregel

Die **verallgemeinerte Kettenregel** für $F(t) = f(\vec{r}(t))$ wird verwendet, um die Richtungsableitung einer Funktion in mehreren Variablen zum Parameter t zu berechnen:

$$F'(t) = f_x(\vec{r_t})\dot{x}(t) + f_y(\vec{r_t})\dot{y}(t) + f_z(\vec{r_t})\dot{z}(t)$$
$$= \text{grad}(f(\vec{r}(t)))\dot{\vec{r}}(t)$$

wobei $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

6. Integrale (S.70)

6.1. Integrationsregeln (S.71)

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x)\, dx\right) = b(x)' f(b(x)) - a(x)' f(a(x))$$

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

Gerade Funktionen:	Ungerade Funktionen:
$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx$	$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_0^a f(x)\, dx$

6.2. Uneigentliche Integrale (S.72)

Mit Hilfe der **uneigentlichen Integrale** ist es möglich, Funktionen zu integrieren deren Definitionsbereiche unbeschränkt sind:

1. Ordnung (Polstelle / Definitionslücke bei ζ):	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\zeta\to a^+}\int_\zeta^b f(x)\,dx$
2. Ordnung (unbeschränkter Definitionsbereich):	$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\zeta\to\infty^+}\int_a^\zeta f(x)\,dx$

6.3. Hilfsmittel (S.71)

Partielle Integration:

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Tricks, um Integral mit partieller Integration zu lösen:

- Term 2-mal partiell integrieren
- Setze $u'(x) = 1$ (respektive $v'(x) = 1$)

Partialbruchzerlegung:

Einfache Nullstelle x_0:	$\frac{A}{x-x_0}$
Zweifache Nullstelle x_0:	$\frac{A}{(x-x_0)^2}+\frac{B}{x-x_0}$
Komplexe Nullstelle:	$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

Beispiel:

$$\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

$$\begin{cases} -A-B+C=0, & x=0 \\ 4C=1, & x=1 \\ A+3B+9C=2, & x=2 \end{cases} \rightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{4}, C=\frac{1}{4}$$

Tipp: $(1+x^3) = (1+x)(1-x+x^2)$

6.4. Substitution (S.71)

Bei der Substitution ersetzt man komplizierte Terme. Im folgenden Beispiel wird $f(x)$ durch u ersetzt:

$$\int_a^b f'(x)g'(f(x))\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(u)\,du$$

6.5. Anwendungen (S.75,76)

Die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse beträgt:

Explizit:	$A = \int_a^b f(x)\,dx$
Parametrisiert:	$A = \int_a^b \dot{x}(t)y(t)\,dt$

Die Fläche zwischen einer Kurve und der y-Achse beträgt:

Parametrisiert: $A^* = \int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,dt$

Die **Sektorfläche** ist die Fläche zwischen dem Ursprung und zwei Punkten einer Kurve:

$$S = \pm\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)\,dt = \pm\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)^2\,d\varphi$$

positiv, wenn die Fläche links der Kurve ist und negativ, wenn sie rechts der Kurve ist

Die **Bogenlänge** einer Kurve oder Funktion:

Explizit:	$s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
Parametrisiert:	$s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$
Polarkoordinaten:	$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho(\varphi)^2+\dot{\rho}(\varphi)^2}\,d\varphi$

Das **Rotationsvolumen** um die x-Achse beträgt:

Explizit:	$V_x = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$
Parametrisiert:	$V_x = \pi\left\lvert\int_{t_1}^{t_2}\dot{x}(t)y^2(t)\,dt\right\rvert$

wobei a und b zwei Punkte auf der x-Achse liegen

Das **Rotationsvolumen** um die y-Achse beträgt:

Explizit (Fläche zwischen Graphen und y-Achse):	$V_y = \pi\int_a^b f(y)^2\,dy = \pi\int_a^b x^2\cdot f'(x)\,dx$
Explizit (Fläche zwischen Graphen und x-Achse):	$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$
Parametrisiert:	$V_y = \pi\left\lvert\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\dot{y}(t)\,dt\right\rvert$

wobei a und b zwei Punkte auf der y-Achse liegen

Die **Rotationsoberfläche** um die x-Achse beträgt:

Explizit:	$O_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
Parametrisiert:	$O_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2}\lvert y(t)\rvert\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$

Der **Schwerpunkt** (x_s, y_s) ist der Kräftemittelpunkt:

x-Koordinate:	$x_s\int_a^b G(x)\,dx = x_sA = \int_a^b xG(x)\,dx$
y-Koordinate:	$y_s\int_c^d H(y)\,dy = y_s\cdot A = \int_c^d yH(y)\,dy$

wobei $G(x)$ und $H(y)$ die Ausdehnung in y- und x-Richtung sind, a und b auf der x-Achse und c und d auf der y-Achse liegen

Das **Massenträgheitsmoment** gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit während der Drehung um eine bestimmte Achse an:

$$\theta_y = \int_a^b \rho(x)x^2G(x)\,dx$$

wobei ρ die Dichte ist. Für $\rho = 1$ sei das **Flächenträgheitsmoment**:

x-Achse:	$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f(x)^3\,dx = \int_a^b y^2f(y)\,dy$
y-Achse:	$I_y = \int_a^b x^2f(x)\,dx$

Das polare Flächenträgheitsmoment einer Kreisschreibe beträgt:

$$I_0 = \frac{1}{2}\pi r^4$$

Das Trägheitsmoment eines rotierenden Graphen um die x-Achse:

$$\theta_x = \frac{\pi\rho}{2}\int_a^b f(x)^4\,dx$$

die Berechnung für die y- und z-Achse erfolgt analog

Die **kinetische Energie** der Rotation um eine Achse:

$$T = \frac{1}{2}\theta_{x,y,z}\omega^2$$

7. Integrale – Mehrere Variablen

7.1. Gebietsintegral

Beim **Gebietsintegral** integriert man über zwei Variablen. Dadurch kann man sowohl Volumen als auch Flächen berechnen

Mit Gebietsintegralen können Flächeninhalte bestimmt werden. Hier das Beispiel einer Fläche B:

$$A_B = \iint_B 1dF$$

Durch das Aufsummieren infinitesimaler Quader wird das von zwei Flächen (B und $f(x,y)$) eingeschlossene Volumen berechnet:

$$V = \iint_B f(x,y)dF$$

Die Integrationsgrenzen bei der Berechnung eines Volumens werden wie folgt gesetzt:

$$V = \int_a^{\bar{a}}\int_{b(x)}^{\bar{b}(x)} f(x,y)dydx$$

Achtung: Werden die Integrationsgrenzen in falscher Reihenfolge gesetzt, bleiben im Ergebnis Variablen übrig. Falls alle Grenzen konstant sind, ist die Reihenfolge beliebig austauschbar

Anwendungen für das Gebietsintegral:

Flächenschwerpunkte:	$x_SA = \iint_B x\,dA$
Massenschwerpunkte:	$x_S\cdot m = \iint_B x\sigma(x,y)\,dA$
Polares Flächenträgheitsmoment:	$J_0 = \iint_B x^2+y^2dA = \iint_B r^3drd\varphi$
Polares Massenträgheitsmoment:	$I_0 = \iint_B \sigma(x,y)(x^2+y^2)dA$

wobei $\sigma(x,y)$ die **Flächendichte** in $[kg/m^2]$ ist

Beim **Gebietsintegral in Polarkoordinaten** $(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi))$ mit $\varphi\in[0,2\pi]$ muss die Integrationsvariable verändert werden:

$$\iint_{\tilde{B}}\tilde{f}(\rho,\varphi)\,\rho d\varphi d\rho$$

wobei $\tilde{B}$ die Integrationsgrenzen in Polarkoordinaten sind

7.2. Volumenintegral

Bei einem **Volumenintegral** wird über ein Volumen, also 3 Variablen integriert. Das Ergebnis kann ein Volumen sein:

$$V = \iiint_B 1dV$$

oder eine abstraktere Grösse in 4 Dimensionen:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV, \qquad \int_{x_u}^{x_o}\int_{y_u}^{y_o}\int_{z_u}^{z_o} f(x,y,z)dzdydx$$

Anwendungen für das Volumenintegral:

Massenträgheitsmoment:	$\Theta_z = \iiint_K \rho(x,y,z)(x^2+y^2)dxdydz$
Schwerpunkte:	$z_S = \frac{1}{V_B}\iiint_B z\,dV$

wobei $\rho(x,y,z)$ die **Massendichte** ist

Bei einem **Volumenintegral in Zylinderkoordinaten** $(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$ mit $\varphi\in[0,2\pi]$, $r\in[0,R]$ und $z\in[0,h]$ muss die Integrationsvariable verändert werden:

$$dA = rdrd\varphi,\qquad dV = rdrd\varphi dz,\qquad dO = Rd\varphi dz$$

wobei $\tilde{B}$ die Integrationsgrenzen in Zylinderkoordinaten sind

Dasselbe gilt für ein **Volumenintegral in Kugelkoordinaten** $(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$ mit $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, und $r\in[0,R]$:

$$dA = r^2\sin(\theta)\,d\varphi d\theta,\qquad dV = r^2\sin(\theta)\,d\varphi d\theta dr,\qquad dO = R^2\sin(\theta)\,d\varphi d\theta$$

wobei $\tilde{B}$ die Integrationsgrenzen in Zylinderkoordinaten sind

7.3. Allgemeine Koordinatentransformation

Das **Flächenelement** dF bei einer Koordinatentransformation ist abhängig von der Determinante der **Jacobi-Matrix**, einem Art Verzerrungsfaktor

In 2D lautet die Jacobi-Matrix für die Transformation $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$:

$$J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

und das **Flächenelement**:

$$dF = \lvert\det(J)\rvert dudv$$

In 3D lautet die Jacobi-Matrix für die Transformation $\vec{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$:

$$J = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

und das **Volumenelement**:

$$dV = \lvert\det(J)\rvert dudvdw$$

Zudem müssen die Integrationsgrenzen angepasst werden

Die Umkehrung einer linearen Koordinatentr. ist ebenfalls linear

7.4. Integrale mit Parametern

Sei $f:(x,t)\to f(x,t)$ differenzierbar und f_x stetig, so gilt:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b f_x(x,t)\,dt$$

Befindet sich in den Intervallgrenzen ein Parameter, so gilt:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)\,dt + f(x,v(x))v'(x) - f(x,u(x))u'(x)$$

Wenn f nur von t abhängig ist, gilt:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x)$$

8. Vektoranalysis

8.1. Skalarfeld- und Vektorfeld

In einem **Skalarfeld** wird jedem Punkt ein Skalar zugewiesen:

$$f:(x,y,z) \to f(x,y,z)$$

In einem **Vektorfeld** wird jedem Punkt ein Vektor zugewiesen:

$$f:(x,y,z) \to \vec{v}(x,y,z)$$

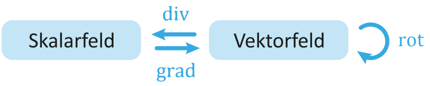
Wenn K eine Kurve ist, sodass $\vec{v}$ an jedem Punkt tangential an K anliegt, dann ist K eine **Feldlinie** des Vektorfeldes

Zeitunabhängige Vektorfelder nennt man **stationär** und solche die zeitabhängig sind **instationär**

Wenn $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{c}\ \forall \vec{r}$, dann ist $\vec{v}$ **homogen** und alle Feldlinien sind parallele Geraden

8.2. Differentialoperatoren

Operatoren wandeln Skalarfelder in Vektorfelder um und umgekehrt:



Der **Gradient** ist bereits bekannt:

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

- Für ein Skalarfeld f ist $\operatorname{grad}(f)$ das zugehörige Vektorfeld, das sogenannte **Gradientenfeld**

Die **Divergenz** eines Vektorfeld $\vec{v}$ gibt an, wie "quellenhaltig" dieses ist und berechnet sich mit:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

- Wenn $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, dann ist das Feld **quellenfrei**
- Wenn an einem beliebigen Punkt P_0 gilt, dass $\operatorname{div} \vec{v}(P_0) > 0$, dann handelt es sich um eine **Quelle**
- Wenn an einem beliebigen Punkt P_0 gilt, dass $\operatorname{div} \vec{v}(P_0) < 0$, dann handelt es sich um eine **Senke**

Die **Rotation** eines Vektorfeld $\vec{v}$ gibt an, wie "wirbelig" dieses ist und berechnet sich mit:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix}$$

- Wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, dann ist das Feld **wirbelfrei**

Für ein beliebiges Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ändern sich bei der Berechnung vom Gradienten, der Divergenz und der Rotation lediglich die partiellen Ableitungen
Der **Laplace Operator** ist für $f:(x,y,z) \to f(x,y,z)$ und $f:(r,\varphi) \to f(r,\varphi)$ definiert durch:

$$\nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

$$\nabla \tilde{f} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \tilde{f}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{f}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{f}_{\varphi\varphi}$$

Weitere Identitäten lauten:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(f \operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$$

$$\operatorname{div}(f\vec{v}) = f \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{grad} f \cdot \vec{v}$$

8.3. Flächen in Parameterdarstellung

Sei $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ die Parametrisierung einer Fläche, dann beträgt ihr **Normaleinheitsvektor**:

$$\vec{n}(u,v) = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

je nach Parametrisierung muss das Vorzeichen geändert werden.
$\vec{r}_u$ bedeutet, dass jeder Vektoreintrag nach u abgeleitet ist
Die Gesamtfläche einer parametrisierten Fläche B lautet:

$$A_B = \iint_B 1\, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

Das von zwei Flächen B und f umschlossene Volumen beträgt:

$$V_B = \iint_B f(\vec{r}(u,v))\, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

Hält man einen der Parameter fest und variiert den anderen, so erhält man eine **Parameterlinie**
Sei K eine parametrisierte Raumkurve $\vec{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$, so ist die **Tangentialfläche** an K:

$$\vec{r}(u,v) = \vec{s}(u) + v\dot{\vec{s}}(u)$$

8.4. Fluss

Der **Fluss** Φ beschreibt, wie viel Vektorfeld $\vec{v}$ durch eine Oberfläche S fliesst:

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO$$

wobei $\vec{n}$ der Flächennormalenvektor ist
Der Fluss durch eines homogenen, ebenen Vektorfelds durch eine ebene Fläche mit Oberflächeninhalt O gilt:

$$\Phi = (\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot O$$

Ist $\vec{v}$ mit $\vec{r}(u,v)$ parametrisiert, dann gilt:

$$\Phi = \iint_B \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO = \pm \iint_{\tilde{B}} \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du dv$$

$\pm$ muss dabei so gewählt werden, dass $\pm|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$ und $\vec{n}$ in dieselbe Richtung zeigen ($\vec{n}$ ist meist in Aufgabenstellung gegeben)

Der **Divergenzsatz von Gauss** besagt, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld (Komponenten sind differenzierbar und die Ableitungen stetig) in einem beschränkten Volumen $B \subset D(\vec{v})$ mit Rand ∂B von innen nach aussen den Fluss besitzt:

$$\Phi = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v}\, dV$$

Achtung: Z.B. nicht anwendbar bei einer Kugel im Ursprung mit $D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

Für geschlossene Körper mit mehreren Oberflächenstücken (z.B. S und D) und Volumen V gilt:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \iint_{S \cup D} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO + \iint_D \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO$$

wobei $\vec{n}$ jeweils nach aussen zeigt

8.5. Arbeit

Die **Arbeit** A eines ebenen homogenen Vektorfelds $\vec{v}$ entlang eines Weges γ der Länge L beträgt:

$$W = |\vec{v}| L \cos(\alpha)$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{v}$ und γ ist
In Integralform lässt sich dies wie folgt darstellen:

$$W = \int_\gamma \vec{v}\, d\vec{r}$$

Ist der Weg nicht geschlossen, so kann man mit $\vec{r}(t)$ und $t \in [t_2, t_1]$ parametrisieren:

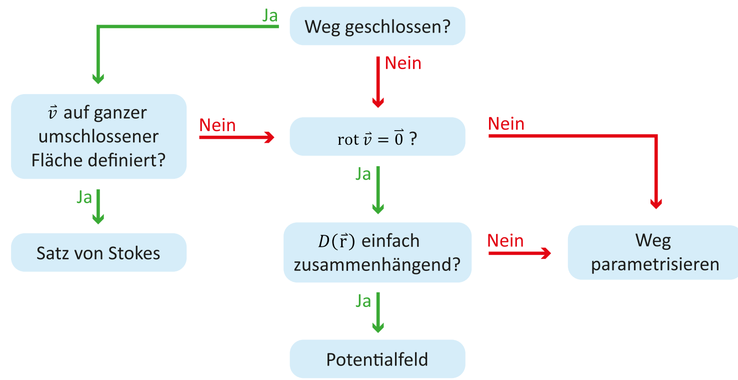
$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt$$

Der **Satz von Stokes** besagt, dass für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v}$ und eine beschränkte Fläche S mit Rand ∂S gilt:

$$W = \int_{\partial S} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO$$

$\vec{n}$ ist normiert und so orientiert, dass ∂S bezüglich $\vec{n}$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird (rechte Hand Regel)
Ist $\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}$ konstant und O der Oberflächeninhalt von S, so gilt:

$$W = (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}) O$$



8.6. Konservative Vektorfelder

Ein Vektorfeld ist **konservativ**, wenn die Arbeit aller möglichen Wege zwischen zwei Punkten gleich ist, unabhängig des gewählten Weges. Dies trifft zu, wenn entweder:

1. Die Arbeit entlang aller geschlossenen Wege ist $\oint \vec{v}\, d\vec{r} = 0$
2. Oder das Vektorfeld ein **Potentialfeld** ist

Ein **Potentialfeld** ist ein Vektorfeld der Form $\vec{v} = \operatorname{grad}(f)$ mit Potential f. Bei Potentialfeldern gilt:

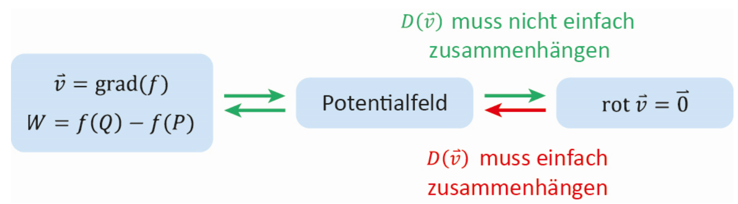
1. Seien P und Q zwei Punkte, dann $W = f(Q) - f(P)$
2. Potentialfelder sind wirbelfrei: $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$

Achtung: Wirbelfreie Vektorfelder sind umgekehrt nur dann Potentialfelder, wenn $D(\vec{v})$ **einfach zusammenhängend** ist

Eine Menge M ist **einfach zusammenhängend**, wenn sich alle Wege in M auf einen Punkt zusammenziehen lassen, ohne dass M verlassen werden muss:

✓	$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ \{Punkt}, Kugeloberfläche, $\mathbb{R}^3$ \{gefüllte Kugel}, Konvexer gefüllter Körper
✗	$\mathbb{R}^3$ \{Gerade}, Torus, $\mathbb{R}^2$ \{Punkt}

Achtung: rot $\vec{v}$ eines Potentialfelds $\vec{v}$ ist auch ein Potentialfeld



9. Differentialgleichungen (S.81,82,142)

9.1. Eigenschaften

Eine **Differentialgleichung** enthält Funktionen und deren Ableitungen. Eine **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL)** hängt nur von einer Variablen (z.B. x) ab und ist von der Form:

$$F\left(C, x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

wobei C eine Konstante und y eine Funktion in x ist. Die höchste Ableitung gibt die **Ordnung** der DGL an

Die Menge der Lösungen einer solchen Gleichung wird als die **allgemeine Lösung** der DGL bezeichnet. Sie bildet eine **Schar** von Funktionen mit einem **Scharparameter** C

Bei einer bekannten Bedingung $y(x_0) = y_0$, man spricht von einem **Anfangswertproblem (AWP)**, kann der Scharparameter C bestimmt werden. Die zugehörige Lösung der DGL wird als **spezielle Lösung** bezeichnet

9.2. Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sei $f(x,y)$ eine stetige und nach y partiell stetig differenzierbaren Funktion. Der **Existenzsatz** besagt, dass für jeden Punkt (x_0, y_0) genau eine Funktion $y(x)$ mit $y' = f(x,y)$ und $y(x_0) = y_0$ existiert. Graphisch bedeutet dies, dass die Graphen verschiedener Anfangswertprobleme entweder identisch sind oder sich nicht kreuzen

Achtung: Ist $f(x,y)$ *nicht* nach y partiell stetig differenzierbar, können zwei Funktionen $y(x)$ existieren, die $y' = f(x,y)$ erfüllen

Eine DGL 1. Ordnung ist **separierbar**, wenn sie in die folgende Form überführt werden kann:

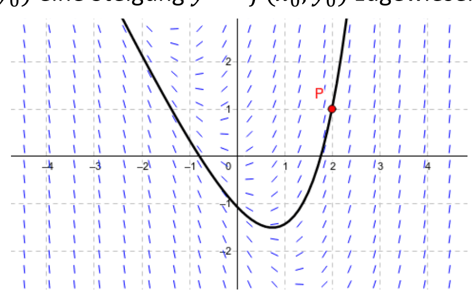
$$y' = f(x,y) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Einige DGLs lassen sich nur durch Substitution separieren:

1. Wähle eine Substitution $u(x,y)$ und stelle nach y um
2. Leite den umgestellten Term nach x ab (kann zu u' Term führen) und setze y' mit dem ursprünglichen Term gleich
3. Die entstandene DGL 1. Ordnung enthält u' und u, die mittels Integration nach $u(x)$ aufgelöst werden kann
4. Nun den ursprünglichen Term $u(x,y)$ mit $u(x)$ gleichsetzen und dann nach y auflösen

9.3. Vektorfeld

In einem **Richtungsfeld** (z.B. einem Vektorfeld $\vec{v}$) wird jedem Punkt (x_0, y_0) eine Steigung $y' = f(x_0, y_0)$ zugewiesen:



Fixiert man eine der Variablen (z.B. x_0) und variiert die andere (z.B. $y \in \mathbb{R}$), so erhält man eine **Kurvenschar**, eine Menge von Kurven. Solch eine **einparametrige** Kurvenschar nennt man **regulär**, wenn sie keine Kreuzungspunkte aufweist

Die Steigung im Richtungsfeld berechnet sich mit:

$$y' = \frac{v_2(x, y(x))}{v_1(x, y(x))}$$

9.4. Lineare Differentialgleichungen

In einer **lineare DGL 1. Ordnung (*I*)** dürfen y und y' nur als lineare Terme vorkommen:

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$$

wobei die Funktion $q(x)$ der **inhomogene Teil** und $y'(x) = p(x) \cdot y(x)$ die zugehörige **homogene DGL (*H*)** ist.

Achtung: Nicht erlaubt sind Terme wie $\cos(y')$, $y'y$ oder y^2.
Erlaubt sind hingegen solche wie $\sin(x) \cdot y$

Die allgemeine Lösung von I ist die Summe einer speziellen Lösung von I – der **partikulären Lösung** y_p – und einer allgemeinen Lösung y_h von H

Ein erstes Lösungsverfahren lautet:

1. Bestimme y_h und wähle ein y_p mit folgendem Ansatz:

Störglied $q(x)$	Ansatz für y_p
Konstante	C
Lineare Funktion	$C_1 x + C_2$
Polynom mit Grad n	$C_1 \cdot x^n + C_2 \cdot x^{n-1} + \cdots$
$C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$	$C_3 \cdot \sin(\omega x) + C_4 \cdot \cos(\omega x)$
$C_1 \cdot e^{bx}$	$C_2 \cdot e^{bx}$

2. Setze die Ableitungen von y_p in I ein
3. Bestimmte die Konstanten durch Gaußsche Eliminierung
4. Die allgemeine Lösung beträgt $y(x) = y_p + y_h$

Ein zweites Lösungsverfahren ist das nach **Lagrange**:

1. Bestimme y_h
2. Führe $\gamma(x)$ in $y_p = \gamma(x) \cdot y_h(x)$ ein
3. Leite y_p ab und setze es mit I gleich
4. Bestimme $\gamma(x)$
5. Die allgemeine Lösung beträgt $y(x) = y_p + y_h$

9.5. Niveaulinien, Orth.trajektorien, Enveloppen

Sei $g(x, y) = C$ eine Schar von **Niveaulinien**, so gilt:

$$y'(x) = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)}$$

Eine solche DGL nennt man **exakt** und kann umgeformt werden:

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y)y' = 0 \text{ mit } \varphi_y = \psi_x$$

die Lösung ist die Schar von Niveaulinien $g(x, y) = C$

Die Niveaulinien von $g(x, y)$ stehen senkrecht auf den Feldlinien von grad $g(x, y)$, den sogenannten **Orthogonaltrajektorien**

Sei $y'(x) = f(x, y)$ eine Kurvenschar, dann ist die Kurvenschar von **Orthogonaltrajektorien** gegeben durch die Gleichung:

$$y_{OT}'(x) = -\frac{1}{y'(x)}$$

Ein Lösungsverfahren für Orthogonaltrajektorien lautet:

1. Schar nach C umformen
2. Ursprüngliche Schar nach x ableiten und nach y' auflösen: $y' = f(x, y, C)$
3. C in abgeleiteter Schar durch Umformung aus (1) ersetzen
4. $y' = f(x, y)$ in Formel für $y_{OT}'(x)$ einsetzen und neu entstandene DGL lösen

Die **Enveloppe** einer Kurvenschar ist diejenige Kurve, die an jedem ihrer Punkte tangential zur Kurvenschar steht. Die zur Enveloppe gehörende Lösung der DGL wird als **singuläre Lösung** bezeichnet

Ein Lösungsverfahren für Enveloppen lautet:

1. Sei die allgemeine Lösung einer DGL $y = f(x, C)$ gegeben
2. Nach $F(x, y, C) = 0$ umstellen
3. Mittels $F_C(x, y, C) = 0$ den Scharparameter C bestimmen
4. Ausdruck für C aus (3) in $F(x, y, C) = 0$ einsetzen

9.6. Clairaut'sche Differentialgleichung

Clairaut'sche Differentialgleichungen sind von der Form:

$$y = y'x + g(y')$$

Lösungen: Geraden, singuläre Lösung und Kombinationen davon

Ein Lösungsverfahren für Clairaut'sche DGL lautet:

1. Setze $y' = C$ und erhalte allgemeine Lösung $y = Cx + g(C)$
2. Leite nach C ab und löse nach C auf
3. Setze Ausdruck für C aus (2) in die allgemeine Lösung $y = Cx + g(C)$ ein

9.7. Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eine **Differentialgleichung höherer Ordnung** ist von der Form:

$$F\left(K, x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

Der Existenzsatz besagt, dass ein stetig differenzierbare DGL zu vorgegebenem Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt, durch jeden Punkt geht also genau eine Kurve (= **regulär**)

Achtung: Ist $f(x, y)$ *nicht* nach $y^{(i)}$ partiell stetig differenzierbar, hat die Funktion für ein AWP keine eindeutige Lösung

Eine **lineare DGL höherer Ordnung** ist von der Form:

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = q(x)$$

wobei $p_i(x)$ und $q(x)$ Funktionen sind

1. Die lineare DGL ist **homogen** (H), wenn $q(x) = 0$
2. Linearkombinationen der Lösungen von H sind ebenfalls Lösungen von H
3. Die allgemeine Lösung von I ist eine Linearkombination aller linear unabhängigen Lösungen von H

9.8. Homogene lineare DGL mit konst. Koeffizienten

Eine **homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten** ist von der Form:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0$$

wobei a_i Konstanten sind

Das **charakteristische Polynom** einer solchen DGL lautet:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

durch $P(\lambda) = 0$ ergeben sich die Nullstellen. Folgendes gilt:

Nullstelle α	Lösung
Einfach reell	$y(x) = e^{\lambda x}$
Einfach komplex ($\alpha = a \pm bi$)	$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$ $y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$
k-fach reell	$y_1(x) = e^{\lambda x}$ $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ $y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$
k-fach komplex ($\alpha = a \pm ib$)	$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$ $y_2(x) = xe^{ax}\cos(bx)$ $y_k(x) = x^{k-1}e^{ax}\cos(bx)$ $y_{k+1}(x) = e^{ax}\sin(bx)$ $y_{k+2}(x) = xe^{ax}\sin(bx)$ $y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$

Die allgemeine Lösung y der homogenen DGL ist eine Linearkombination der einzelnen Lösungen y_i:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_i y_i$$

9.9. Euler'sche Differentialgleichung

Eine **Euler'sche Differentialgleichung** ist von der Form:

$$a_n y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)}(x) + \cdots + \frac{a_0}{x^n} y(x) = q(x)$$

wobei a_i Konstanten sind

Das **charakteristische Polynom** einer solchen DGL lautet:

$$P(\lambda) = a_n\lambda(\lambda - 1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - n + 1) + a_{n-1}\lambda(\lambda - 1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - n + 2) + \cdots + a_2\lambda(\lambda - 1) + a_1\lambda + a_0$$

durch $P(\lambda) = 0$ ergeben sich die Nullstellen.

Folgendes gilt:

Nullstelle α	Lösung
Einfach reell	$y(x) = x^\lambda$
Einfach komplex ($\alpha = a \pm bi$)	$y_1(x) = x^a\cos(b\ln(x))$ $y_2(x) = x^a\sin(b\ln(x))$
k-fach reell	$y_1(x) = x^\lambda$ $y_2(x) = \ln(x)x^\lambda$ $y_k(x) = \ln(x)^{k-1}x^\lambda$
k-fach komplex ($\alpha = a \pm bi$)	$y_1(x) = x^a\cos(b\ln(x))$ $y_2(x) = \ln(x)x^a\cos(b\ln(x))$ $y_k(x) = \ln(x)^{k-1}x^a\cos(b\ln(x))$ $y_{k+1}(x) = x^a\sin(b\ln(x))$ $y_{k+2}(x) = \ln(x)x^a\sin(b\ln(x))$ $y_{2k}(x) = \ln(x)^{k-1}x^a\sin(b\ln(x))$

Die allgemeine Lösung y der homogenen Euler'schen DGL ist die Summe aus y_h und y_p. Die homogene Lösung ist eine Linearkombination der oben berechneten Terme y_i:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_i y_i$$

Ein Ansatz für die partikuläre Lösung einer DGL der obigen Form ist:

$$y_p{}^{(n)} = Aq(x)$$

Für die alternative Schreibweise $a_n \cdot x^n \cdot y^{(n)}(x) + \cdots + a_0 \cdot y(x) = q(x)$ kann man auch den folgenden Ansatz probieren:

$$y_p = Aq(x) + B$$

A und B werden durch Einsetzen von y_p in die DGL und einen anschliessenden Koeffizientenvergleich gefunden

9.10. Taylorreihen für DGLs

Sei $y(x)$ eine Funktion mit Potenzreihe:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

so liefert ein Koeffizientenvergleich die Lösung zugehöriger DGLs

Sei die folgende DGL 2. Ordnung:

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

wenn p_1 und p_0 eine konvergierende Potenzreihenentwicklung um x_0 haben, dann gilt dies auch für $y(x)$

10. Systeme von Differentialgleichungen

10.1. Eigenschaften

Treten zwei Differentialgleichungen gekoppelt auf, so spricht man von einem **System von Differentialgleichungen 1. Ordnung**:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, b_1) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, b_2) \end{cases}$$

wobei y_1 und y_2 Funktionen in x sind

Wenn f_1 und f_2 in x stetig und nach y_1 und y_2 stetig differenzierbar sind, dann hat das AWP $y_1(x_0) = y_{1,0}, y_2(x_0) = y_{2,0}$ eine Lösung

Ein **autonomes** System ist von der Form:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, b_1) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, b_2) \end{cases}$$

wo die einzige Abhängigkeit von der Variablen x indirekt über $y_1(x)$ und $y_2(x)$ besteht

Eine **Trajektorie** ist die durch (x_0, y_0) gehende Feldlinie. Die Schar aller Trajektorien ist das **Phasenportrait**, ein Vektorfeld:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

10.2. Linear-autonome DGL mit konst. Koeffizienten

Ein System der folgenden Form ist ein **linear autonomes DGL-System mit konstanten Koeffizienten** der Ordnung 1:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{cases}$$

Ein Lösungsverfahren für homogene DGLS lautet:

1. Matrix A und Vektoren $\dot{\vec{x}}$, $\vec{x}$ und $\vec{b}$ aufstellen: $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$
2. Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\vec{v}_i$
3. $\vec{x}_h = \sum_i C_i \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \vec{v}_i$ liefert die homogene Lösung des DGLS

Bei einem imaginären Eigenwertepaar $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ mit $\vec{v}_1 = (c \pm di, e \pm fi, g \pm hi)$ gilt:

$$\vec{x} = C_1 \cdot e^{at} \begin{pmatrix} c\cos(bt) \mp d\sin(bt) \\ e\cos(bt) \mp f\sin(bt) \\ g\cos(bt) \mp h\sin(bt) \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{at} \begin{pmatrix} c\sin(bt) \pm d\cos(bt) \\ e\sin(bt) \pm f\cos(bt) \\ g\sin(bt) \pm h\cos(bt) \end{pmatrix}$$

Wenn die Matrix A nicht diagonalisierbar ist oder das DGLS inhomogen ist, eignet sich das **Eliminationsverfahren**:

1. x_1' oder x_2' zu x_1'' / x_2'' ableiten
2. x_1' / x_2' im soeben abgeleiteten Term durch ursprüngliche Gleichung von x_1' / x_2' ersetzen
3. x_1 / x_2 mit Hilfe ursprünglicher Gleichung eliminieren
4. Zu bekannter DGL umformen und Nullstellen bestimmen
5. Aus x_1 / x_2 die zweite Funktion x_2 / x_1 bestimmen

10.3. Gleichgewichtspunkte

Wenn die beiden konstanten Funktionen $x_1(t) = c_1$ und $x_2(t) = c_2$ das autonome System lösen:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

dann ist (c_1, c_2) ein **Gleichgewichtspunkt** des DGL-Systems.

Um einen Gleichgewichtspunkt zu finden, setze $x_1' = x_2' = 0$ und löse nach x_1 und x_2 auf

Das gleiche gilt für eine gewöhnliche Differentialgleichung $y' = f(y(t))$, wenn $f(y_g) = 0$. Das AWP $y(t_0) = y_g$ hat dann die konstante Lösung $y(t) = y_g$ und ist ein Gleichgewichtspunkt

Das Gleichungssystem kann sich umschreiben lassen zu $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Die Eigenwerte λ_i von A geben Aufschluss über die Art des Gleichgewichtspunkts:

Asymptotisch stabil:	Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil
Stabil:	Die Eigenwerte von A haben Realteil $\mathcal{R}(\lambda_i) \leq 0$
Instabil:	Der Realteil von mindestens einem Eigenwert ist positiv

Anhang 1 – Integraltabelle

	$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	0	2
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
sin cos	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\sin^2\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
$\sin\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
$\sin^2\cos^2$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$

Anhang 2 – Integrale (S. 72)

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + C$$

$$\int g'(ax+b)dx = \frac{1}{a}g(ax+b) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln(|ax+b|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{a-b}\ln\left(\left|\frac{x-a}{x-b}\right|\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{x}{ax^2+b} dx = \frac{1}{2a}\ln(|ax^2+b|) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{x}{x^4+3} dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^3+x} dx = \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+x} dx = \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{Artanh}(x) + C$$

Wurzeln:

$$\int \sqrt{x \pm a}\, dx = \frac{2}{3}(x \pm a)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C$$

$$\int 2x\sqrt{a+x^2} dx = \frac{2}{3}(a+x^2)^{3/2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arsinh}(x) + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh}(x) + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{Arsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx = \ln\left(\left|x + \sqrt{x^2-4}\right|\right) + C$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^x\, dx = (x-1)e^x + C$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\int (x+1)e^x dx = xe^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) + C$$

$$\int \ln(x)\, dx = x(\ln(|x|) - 1) + C$$

$$\int x\ln(x) dx = \frac{x^2\ln(|x|)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int \frac{(\ln(x))^n}{x} dx = \frac{(\ln(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)} dx = \ln(\ln(|x|)) + C$$

Trigonometrische Funktionen:

$$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$

$$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

$$\int \tan(x)\, dx = -\ln(\cos(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln\left(\left|\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right|\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) + C$$

$$\int \cos^2(ax)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\right) + C$$

$$\int \sin^2(ax)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(ax)\cos(ax)}{a}\right) + C$$

$$\int \sin(x)\cos^n(x)\, dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(x) + C$$

$$\int \sin^n(x)\cos(x)\, dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + C$$

$$\int \frac{x}{\sin^2(x)} dx = -\frac{x\cdot\cos(x)}{\sin(x)} + \ln(|\sin(x)|) + C$$

$$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int x\cdot\sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

$$\int x^2\cdot\sin(x)\, dx = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\cos(x) + C$$

Hyperbolische Funktionen:

$$\int \cosh^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sinh(x)\cosh(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh(x)} dx = 2\arctan(e^x) + C$$

Anhang 3: Reihen für $-1 < x < 1$ (S.79)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(1+(-1)^k)x^k = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1+(-1)^k)x^k = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \cdots$$

$$\frac{1}{\alpha-x} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x^3}{\alpha^3} + \cdots\right)$$

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} \pm \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$$

$$\frac{x}{9+x^2} = \frac{x}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^k$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Anhang 4: Tricks Grenzwerte

$$\lim_{x\to\cdots} f^g = \lim_{x\to\cdots} e^{g\ln(f)}$$

$$\lim_{x\to\cdots}\sqrt{f} - g = \lim_{x\to\cdots}\left(\sqrt{f} - g\right)\left(\frac{\sqrt{f}+g}{\sqrt{f}+g}\right)$$