Übung 14 – Uneigentliche Integrale

1 Uneigentliche Integrale

1.1 Uneigentliche Integrale 1. Gattung

Sei f auf dem Intervall $[a, b)$ definiert, wobei f bei b nicht definiert ist (z.B. Pollstelle oder Definitionslücke). Dann ist das uneigentliche Integral definiert durch

$$\int_a^{\text{undef}} f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\beta \to \text{undef}} \int_a^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta \to \text{undef}} [F(x)]_a^{\beta}$$

Beispiel: 1. Gattung mit Lösung

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Da $\ln(x)$ bei $x = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir den Grenzwert:

$$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta \to 0^+} \int_\beta^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Eine Stammfunktion von $\ln(x)$ ist

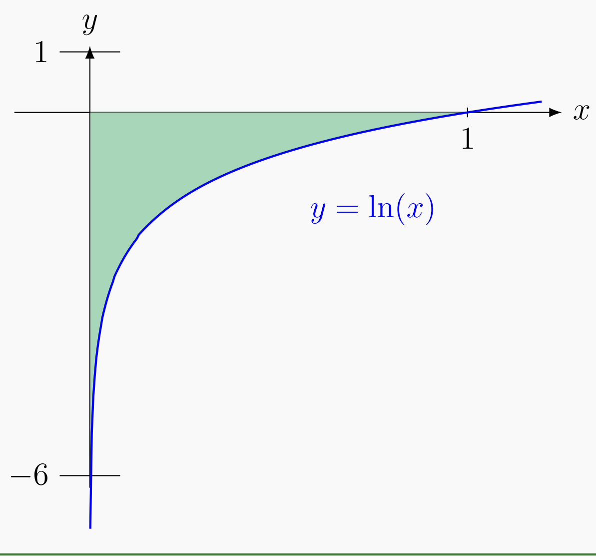
$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x(\ln(x) - 1)$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\beta \to 0^+} [x(\ln(x) - 1)]_\beta^1 = \lim_{\beta \to 0^+} \Big(\ln(1) - 1 - (\beta \ln(\beta) - \beta)\Big)$$

Da $\beta \ln(\beta) \to 0$, folgt

$$\Big(0 - 1 - 0 - 0\Big) = -1$$



Beispiel: 1 Gattung ohne Lösung

Berechne das Integral
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
Da der Integrand bei $x = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir den Grenzwert:
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 0^+} \int_\beta^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
Eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist $\ln(x)$. Somit:
$$\lim_{\beta\to 0^+} [\ln(x)]_\beta^1 = \lim_{\beta\to 0^+} \big(\ln(1) - \ln(\beta)\big)$$
$\ln(\beta) \to -\infty$ für $\beta \to 0^+ \Rightarrow \big(0 - (-\infty)\big)$ divergiert der Grenzwert.

$\Rightarrow$ Das Integral ist divergent (existiert nicht)

1.2 Uneigentliche Integrale 2. Gattung

Sei f auf $[a, \infty)$ definiert. Dann ist das uneigentliche Integral der **2. Gattung** definiert durch

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Hinweis:

Besitzt ein uneigentliches Integral der 2. Gattung zwei unendliche Integrationsgrenzen, so muss es an einer *beliebigen* endlichen Stelle c aufgeteilt werden:
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das Integral ist genau dann konvergent, wenn *beide* Teilintegrale konvergieren.

Beispiel 2: Uneigentliches Integral mit zwei unendlichen Grenzen

Überprüfe, ob das uneigentliche Integral
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
einen endlichen Wert besitzt.

Das Integral ist ein uneigentliches Integral der 2. Gattung mit zwei unendlichen Integrationsgrenzen. Es wird daher in zwei Teilintegrale zerlegt:
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Für das linke Teilintegral gilt

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to-\infty} [\arctan(x)]_{\alpha}^{0} = \frac{\pi}{2}$$

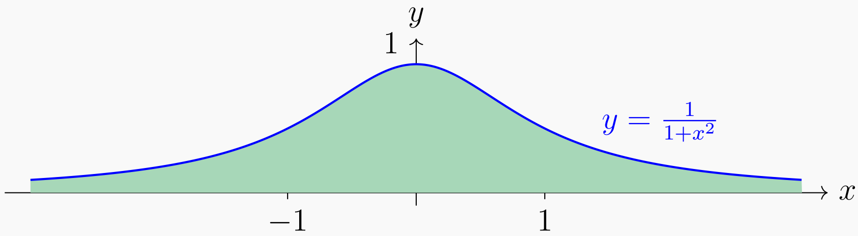
Analog erhält man für das rechte Teilintegral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2},\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty} [\arctan(x)]_{0}^{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

Durch Addition folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral ist konvergent.



Beispiel: 2. Gattung ohne Lösung

Berechne das Integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Wir schreiben das Integral als Grenzwert:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty} \int_{1}^{\beta} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Mit der Stammfunktion $\ln(x)$ folgt:

$$\lim_{\beta\to\infty} [\ln(x)]_{1}^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty} \big(\ln(\beta) - \ln(1)\big)$$

$\ln(\beta) \to \infty$ für $\beta \to \infty \Rightarrow \big(\infty - 0\big)$, divergiert das Integral.

$\Rightarrow$ Das Integral ist divergent (existiert nicht).