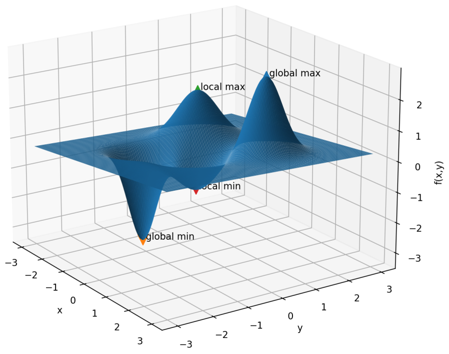
Übung 2 - Extremalprobleme & Funktionen von 3 Variablen

1 Extremalstellen von Funktionen in 2 Variablen



Funktion $f(x, y)$ und Definitionsgebiet G

1.1 Vorgehen

1. **Inneres von G untersuchen**

2. **Rand von G untersuchen**
   - Rand parametrieren (z.B. $x = x(t)$, $y = y(t)$)
   - Parametrisierung in $f(x, y)$ einsetzen
   - Ableiten nach t
   - Nullsetzen

3. **Eckpunkte untersuchen**

   Falls G Ecken besitzt (z.B. Rechteck, Dreieck), Funktionswert direkt berechnen.

4. **Alle Kandidaten vergleichen**

   f(alle kritischen Punkte)ausrechnen

   $\Rightarrow$ Minimum und Maximum ablesen

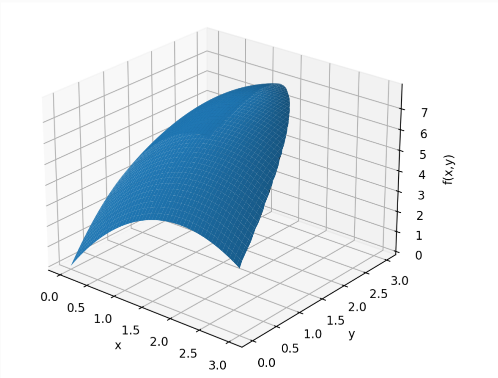
Beispiel: Extremalwerte in einer Viertelkreisscheibe

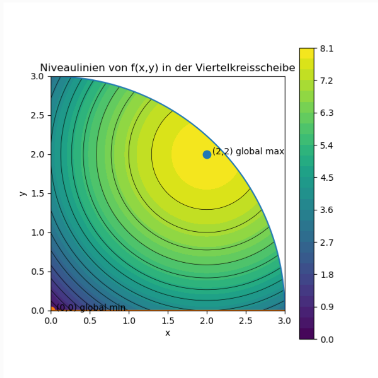
Bestimme die Extremalstellen der Funktion

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 4x + 4y$$

in der Viertelkreisscheibe

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 9\}.$$





1. Inneres untersuchen

Gradient:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} =$$

Nullsetzen:

Kritischer Punkt:

Liegt der Punkt im Gebiet?

2. Rand untersuchen

Rand a: $y = 0,\ x \in [0,3]$

Rand b: $x = 0,\ y \in [0,3]$

Rand c: Kreisrand $x^2 + y^2 = 9$
Parametrisierung:

Einsetzen:

Ableiten:

$$\Rightarrow$$

3. Eckpunkte untersuchen

$$(0,0), \qquad (3,0), \qquad (0,3)$$

4. Kandidaten vergleichen

$$f(2,2) =$$
$$f(2,0) =$$
$$f(0,2) =$$
$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$f(0,0) =$$
$$f(3,0) =$$
$$f(0,3) =$$

Globales Maximum:

Globales Minimum:

2 Verallgemeinerte Kettenregel

Sei $f(x, y)$ eine Funktion und

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

Dann gilt:

Dabei gilt:

$$f_x \cdot \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}, \qquad f_y \cdot \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Beispiel: Verallgemeinerte Kettenregel

Gegeben:

$$f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$$

mit

$$x(t) = \ln(t), \qquad y(t) = e^{2t}$$

Gesucht:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))$$

1. Partielle Ableitungen

$$f_x =$$

$$f_y =$$

2. Ableitungen der inneren Funktionen

$$\dot{x} =$$

$$\dot{y} =$$

3. Einsetzen in die Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) =$$

4. Rückeinsetzen von $x(t)$ und $y(t)$

$$=$$

3 Funktionen von 3 Variablen

3.1 Definition

$$f(x, y, z)$$

Eine Funktion von drei Variablen ordnet jedem Punkt im **3D-Raum**

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

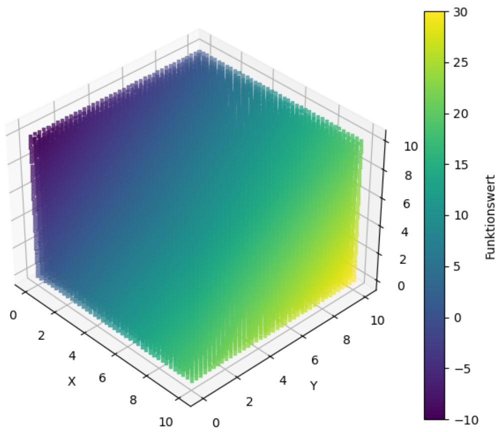
einen Funktionswert

$$f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

zu.

Anschaulich:

- Bei $f(x, y)$: Höhe über der Ebene (Fläche in 3D)
- Bei $f(x, y, z)$: jedem Punkt im Raum wird ein Wert zugeordnet $\Rightarrow$ Zum Beispiel eine Temperaturverteilung $T(x, y, z)$ in einem Raum



3.2 Vergleich: 2 vs. 3 Variablen

	2 Variablen	**3 Variablen**
Niveaus	$f(x, y) = C$ Niveaulinie	$f(x, y, z) = C$ Niveaufläche
Gradient	$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ Senkrecht zur Niveaulinie	$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ Senkrecht zur Niveaufläche
Integrabilitätsbedingung	$f_x, f_y \Rightarrow f(x, y)$	$f_x, f_y, f_z \Rightarrow f(x, y, z)$
Kettenregel	$\frac{d}{dt} f = f_x \dot{x} + f_y \dot{y}$	$\frac{d}{dt} f = f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_z \dot{z}$