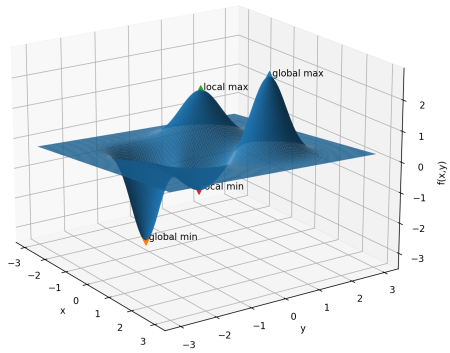
Übung 2 - Extremalprobleme & Funktionen von 3 Variablen

1 Extremalstellen von Funktionen in 2 Variablen



Funktion$f(x,y)$ und Definitionsgebiet G

1.1 Vorgehen

1. **Inneres von G untersuchen**

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. **Rand von G untersuchen**
   - Rand parametrieren (z.B. $x = x(t)$, $y = y(t)$)
   - Parametrisierung in $f(x,y)$ einsetzen
   - Ableiten nach t
   - Nullsetzen

3. **Eckpunkte untersuchen**

   Falls G Ecken besitzt (z.B. Rechteck, Dreieck), Funktionswert direkt berechnen.

4. **Alle Kandidaten vergleichen**

   f(alle kritischen Punkte)ausrechnen

   $\Rightarrow$ Minimum und Maximum ablesen

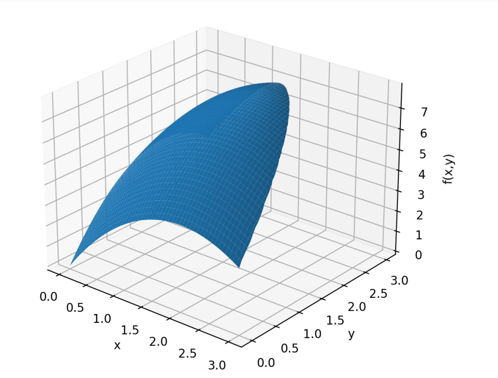
Beispiel: Extremalwerte in einer Viertelkreisscheibe

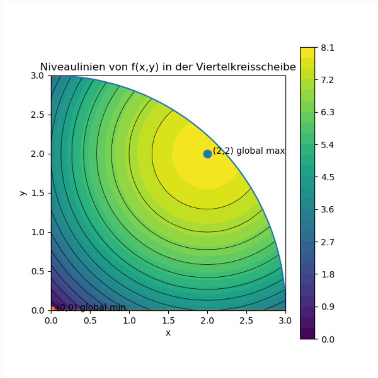
Bestimme die Extremalstellen der Funktion

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 4x + 4y$$

in der Viertelkreisscheibe

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 9\}.$$





1. Inneres untersuchen
Gradient:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4 \\ -2y+4 \end{pmatrix}$$

Nullsetzen:

$$-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$-2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Kritischer Punkt:

$$(2,2)$$

Liegt der Punkt im Gebiet?

$$2^2 + 2^2 = 8 < 9 \quad \Rightarrow \text{ ja}$$

2. Rand untersuchen

Rand a: $y = 0,\ x \in [0,3]$

$$f(x,0) = -x^2 + 4x =: g(x)$$

$$g'(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow (2,0)$$

Rand b: $x = 0,\ y \in [0,3]$

$$f(0,y) = -y^2 + 4y$$
$$f'(0,y) = -2y + 4 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow (0,2)$$

Rand c: Kreisrand $x^2 + y^2 = 9$
Parametrisierung:

$$x = 3\cos t, \qquad y = 3\sin t, \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Einsetzen:

$$f(t) = -9 + 12\cos t + 12\sin t$$

Ableiten:

$$f'(t) = -12\sin t + 12\cos t = 0$$

$$\Rightarrow \sin t = \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

3. Eckpunkte untersuchen

$$(0,0), \qquad (3,0), \qquad (0,3)$$

4. Kandidaten vergleichen

$$\begin{aligned} f(2,2) &= 8 \\ f(2,0) &= 4 \\ f(0,2) &= 4 \\ f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= -9 + 12\sqrt{2} \approx 7.97 \\ f(0,0) &= 0 \\ f(3,0) &= 3 \\ f(0,3) &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{Globales Maximum: } f(2,2) = 8$$

$$\text{Globales Minimum: } f(0,0) = 0$$

2 Verallgemeinerte Kettenregel

Sei $f(x,y)$ eine Funktion und

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = f_x(x(t),y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t),y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

Dabei gilt:

$$f_x \cdot \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}, \qquad f_y \cdot \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Beispiel: Verallgemeinerte Kettenregel

Gegeben:

$$f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$$

mit

$$x(t) = \ln(t), \qquad y(t) = e^{2t}$$

Gesucht:

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))$$

1. Partielle Ableitungen

$$f_x = 2x + y\cos(xy)$$
$$f_y = x\cos(xy)$$

2. Ableitungen der inneren Funktionen

$$\dot{x} = \frac{1}{t}$$
$$\dot{y} = 2e^{2t}$$

3. Einsetzen in die Kettenregel

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = (2x + y\cos(xy))\,\frac{1}{t} + (x\cos(xy))\,2e^{2t}$$

4. Rückeinsetzen von $x(t)$ und $y(t)$

$$= \left(2\ln(t) + e^{2t}\cos(\ln(t)\,e^{2t})\right)\frac{1}{t} + 2e^{2t}\ln(t)\cos(\ln(t)\,e^{2t})$$

3 Funktionen von 3 Variablen

3.1 Definition

$$f(x,y,z)$$

Eine Funktion von drei Variablen ordnet jedem Punkt im **3D-Raum**

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

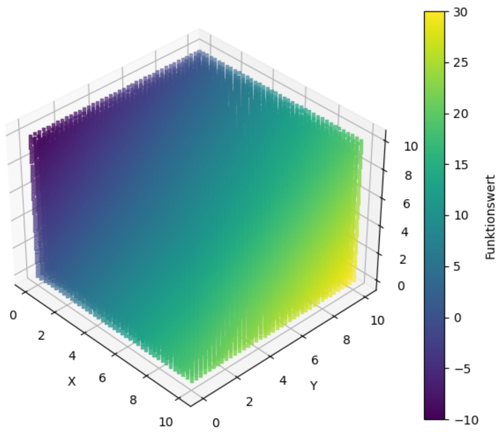
einen Funktionswert

$$f(x,y,z) \in \mathbb{R}$$

zu.

Anschaulich:

- Bei $f(x, y)$: Höhe über der Ebene (Fläche in 3D)
- Bei $f(x, y, z)$: jedem Punkt im Raum wird ein Wert zugeordnet $\Rightarrow$ Zum Beispiel eine Temperaturverteilung $T(x, y, z)$ in einem Raum



3.2 Vergleich: 2 vs. 3 Variablen

	2 Variablen	**3 Variablen**
Niveaus	$f(x, y) = C$ Niveaulinie	$f(x, y, z) = C$ Niveaufläche
Gradient	$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ Senkrecht zur Niveaulinie	$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ Senkrecht zur Niveaufläche
Integrabilitätsbedingung	$f_x, f_y \Rightarrow f(x, y)$	$f_x, f_y, f_z \Rightarrow f(x, y, z)$
Kettenregel	$\frac{d}{dt} f = f_x \dot{x} + f_y \dot{y}$	$\frac{d}{dt} f = f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_z \dot{z}$