Übung 11 - Bestimmtes Integral, partielle Integration, Substitution & Partialbruchzerlegung

1 Integralrechnung

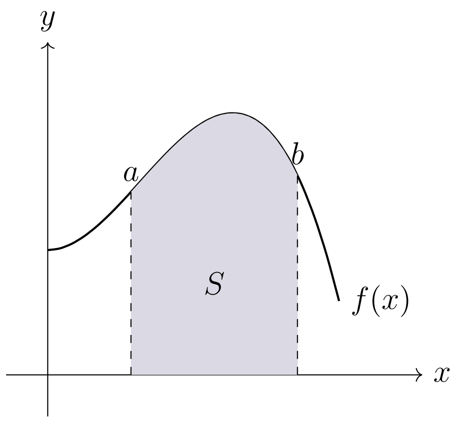
1.1 Definitionen

Bestimmtes Integral: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$

Unbestimmtes Integral: $\boxed{\int f(x)\,dx}$

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gibt den Flächeninhalt S wieder, der zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$, den Grenzen a, b und der x-Achse eingeschlossen wird.

- Fläche ist positiv, wenn der Graph oberhalb der x-Achse liegt.
- Fläche ist negativ, wenn der Graph unterhalb der x-Achse liegt.



1.2 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$$

Dies bedeutet „unmathematisch“ gesprochen, dass das Integrieren das umgekehrte Ableiten ist.

1.3 Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion, dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion.

1.4 Rechenregeln (Integral)

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Rechenregeln (Integrieren)

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Wichtige Integrale:

- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
- $\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Beispiel: $ln|x|$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1| + C$$
$$\Rightarrow |x-1| = (x-1) \text{ und } (-x+1)$$

Achtung! $\frac{d}{dx}\ln(x-1) = \frac{1}{x-1} \qquad \frac{d}{dx}\ln(1-x) = \frac{1}{1-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x-1}$

2 Partielle Integration

2.1 Defintion

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

Beispiel: Partielle Integration

$$\int x\,e^x\,dx$$

$$v = x, \quad v' = 1, \qquad u' = e^x, \quad u = e^x$$

$$\int xe^x\,dx = x\,e^x - \int 1\cdot e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

3 Substitution

Es gibt kein genaues Rezept, um immer die „richtige“ Substitution zu finden.

Generelles Vorgehen:

1. Substitutionsfunktion $u(x)$ aufstellen.
2. $u(x)$ ableiten $\rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx}$ und nach dx auflösen.
3. Alles substituieren und Integral lösen.

Beispiel: Substitution

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, e^{\cos(x)}\, dx$$

1. Substitution:

$$u(x) = \cos(x)$$

2. Ableitung:

$$u'(x) = -\sin(x) = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{du}{\sin(x)}$$

3. Grenzen anpassen:

$$x = 0 \Rightarrow u(0) = \cos(0) = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

4. Substituieren:

$$\sin(x)e^{\cos(x)}dx = \sin(x) \cdot e^u \cdot \left(-\frac{du}{\sin(x)}\right) = -e^u\, du$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{\cos(x)}dx = \int_1^0 -e^u\, du$$

$$= -\left[e^u\right]_1^0 = -(1-e) = e-1$$

$$e - 1$$

Beispiel: Substitution

$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,dx$$

1. Substitution:
$$u = x^2+1$$
$$x = \sqrt{u-1}$$
2. Ableitung:
$$du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2\sqrt{u-1}}$$
3. Neue Grenzen:
$$x=0 \Rightarrow u(0)=1, \qquad x=2 \Rightarrow u(2)=5$$
4. Integral umschreiben:
$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,dx = \int_1^5 \sqrt{u-1}\cos(u)\left(\frac{du}{2\sqrt{u-1}}\right) = \frac{1}{2}\int_1^5 \cos(u)\,du$$
5. Integrieren:
$$= \frac{1}{2}[\sin(u)]_1^5 = \frac{1}{2}(\sin 5 - \sin 1)$$
$$\frac{\sin 5 - \sin 1}{2}$$

4 Integrale von gebrochenrationalen Funktionen

- Grad des Zählerpolynoms > Grad des Nennerpolynoms $\Rightarrow$ Polynomdivision durchführen. Danach das Polynom in Partialbrüche zerlegen.
- Grad des Zählerpolynoms $\leq$ Grad des Nennerpolynoms $\Rightarrow$ Direkt in Partialbrüche zerlegen (oder direkt Substitution/bekanntes Integral).
- Durch Substitution, Ausklammern oder andere Umformung auf Standardintegrale zurückführen:
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{Artanh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\displaystyle\int x^{-s}\,dx = -\frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}} + C \qquad (s \neq 1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + C \quad \Rightarrow$ gilt für $c-b^2>0$

Einfache reelle Nullstellen

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{x-x_1}$$

Mehrfache reelle Nullstellen (hier 3-fache)

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^3(x-x_1)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3} + \frac{D}{x-x_1}$$

Einfache komplexe Nullstellen (Quadratischer Faktor)
Für einen irreduziblen quadratischen Faktor x^2+px+q:

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)(x-x_0)} = \frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{C}{x-x_0}$$

Mehrfache komplexe Nullstellen (hier 3-fache)

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)^3(x-x_0)} = \frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^3} + \frac{G}{x-x_0}$$

Beispiel: Polynomdivision & Partialbruchzerlegung

Wir betrachten das Integral

$$\int \frac{x^3-4x^2}{x^2-4}\,dx.$$

Da der Grad des Zählers größer ist als der des Nenners, führt man zunächst eine Polynomdivision durch:

$$\frac{x^3-4x^2}{x^2-4} = x-4+\frac{4x-16}{x^2-4}.$$

Schritt 1: Faktorisieren des Nenners

$$x^2-4=(x-2)(x+2).$$

Schritt 2: Ansatz der Partialbruchzerlegung
Wir zerlegen den Bruch

$$\frac{4x-16}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Auf einen gemeinsamen Nenner gebracht ergibt sich:

$$\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}.$$

Damit folgt die Gleichung der Zähler:

$$4x - 16 = A(x+2) + B(x-2).$$

Schritt 3: Bestimmen der Koeffizienten A, B

Variante 1: Koeffizientenvergleich
Ausmultiplizieren:

$$A(x+2) + B(x-2) = (A+B)x + (2A - 2B).$$

$$4x + (-16) = (A+B)x + (2A - 2B)$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} A + B = 4, \\ 2A - 2B = -16. \end{cases}$$

Lösen ergibt:

$$A = -2, \qquad B = 6.$$

Variante 2: geeignete x einsetzen
Setzt man $x = 2$, so wird der Term mit B null:

$$4 \cdot 2 - 16 = A(2+2) + B(0) \;\Rightarrow\; 8 - 16 = 4A \;\Rightarrow\; A = -2.$$

Setzt man $x = -2$, so wird der Term mit A null:

$$4(-2) - 16 = A(0) + B(-2-2) \;\Rightarrow\; -8 - 16 = -4B \;\Rightarrow\; B = 6.$$

Damit

$$A = -2, \qquad B = 6$$

Damit lautet die Partialbruchzerlegung für beide Varianten:

$$\frac{4x - 16}{x^2 - 4} = \frac{-2}{x-2} + \frac{6}{x+2}$$

Schritt 4: Gesamtausdruck

$$\frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 4} = x - 4 - \frac{2}{x-2} + \frac{6}{x+2}$$

Schritt 5: Integrieren

$$\int \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 4}\, dx = \int \left(x - 4 - \frac{2}{x-2} + \frac{6}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 4x - 2\ln|x-2| + 6\ln|x+2| + C.$$