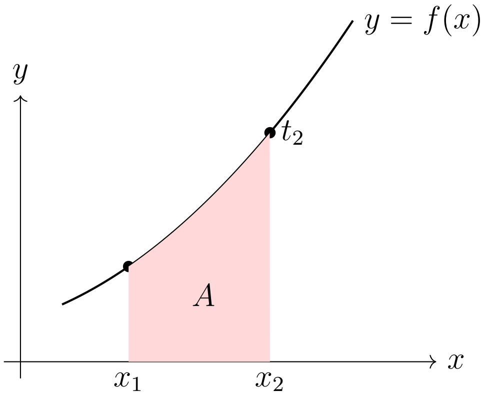
# Übung 12 – Flächenberechnung bei ebenen Kurven & Bogenlänge

## 1 Flächen

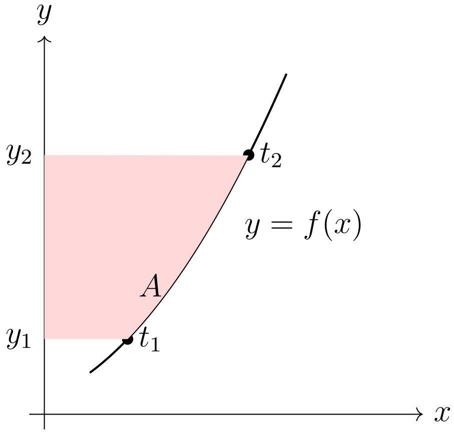
### 1.1 Fläche zwischen Kurve und x-Achse

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \dot{x}(t)\,dt$$




### 1.2 Fläche zwischen Kurve und y-Achse

$$dy = \frac{dy}{dt}dt = \dot{y}(t)\,dt = \frac{dy}{dt}dt \cdot \frac{dy}{dx} = f'(x)\,dx$$



**Beispiel: Ellipse und y-Achse**

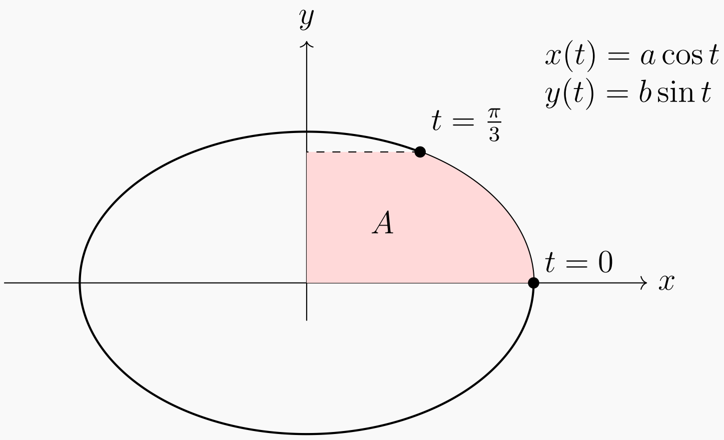
Wir betrachten die Ellipse mit Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$, parametrisiert durch

$$x(t) = a\cos t, \qquad y(t) = b\sin t$$

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Ellipsenbogen für

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

und der y-Achse.




Allgemein gilt für die Fläche zwischen Kurve und y-Achse:

Für die Ellipse:

$$x(t) = \qquad , \qquad \dot{y}(t) = \qquad \Rightarrow \quad x(t)\,\dot{y}(t) =$$

Damit lautet das Flächenintegral

$$A =$$

Mit der Identität

erhalten wir

$$A =$$

Stammfunktion:

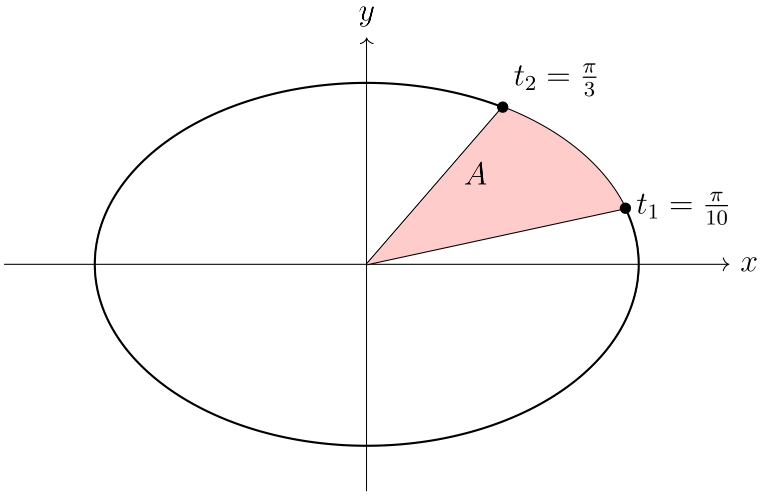
Also

$$A =$$

Da $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, folgt

$$A =$$

## 1.3 Sektorfläche einer ebenen Kurve

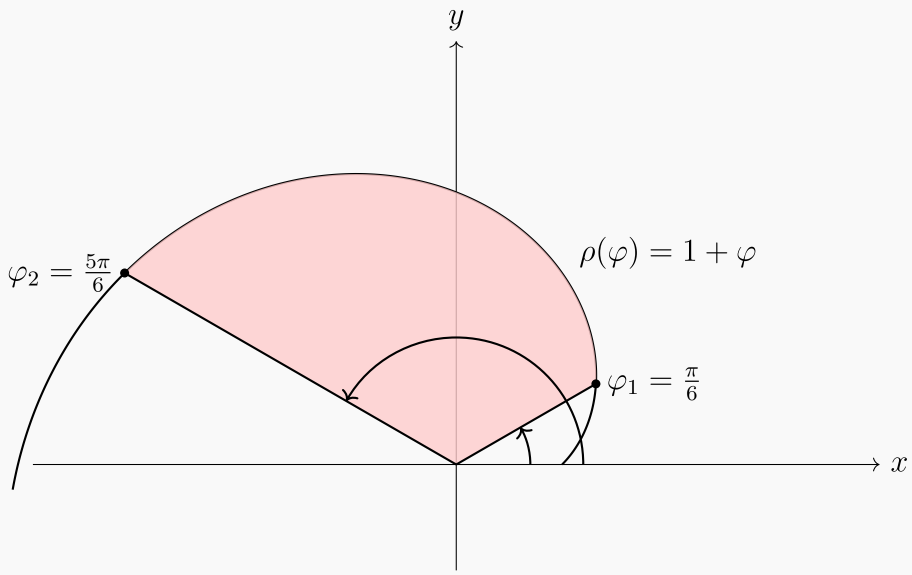



**Beispiel: Sektorfläche einer Archimedischen Spirale**

Wir betrachten die Archimedische Spirale

$$\rho(\varphi) = 1 + \varphi, \qquad \text{mit } \varphi \geq 0$$

Gesucht ist die Fläche des Sektors zwischen den Winkeln $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ und $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$




Sektorflächenformel in Polarkoordinaten:

$$A =$$

Hier also:

$$A =$$

Stammfunktion bestimmen:

Also

$$A =$$

Grenzen einsetzen:

Damit folgt

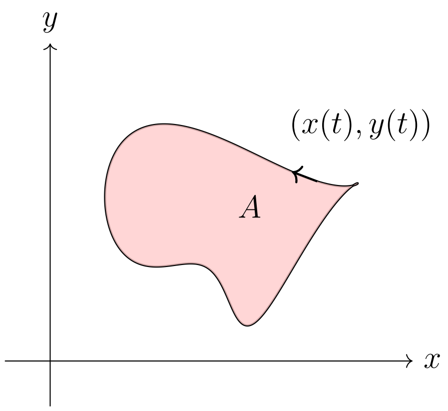
$$A$$

## 1.4 Fläche einer geschlossenen Kurve

Wenn

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2)$$

gilt:



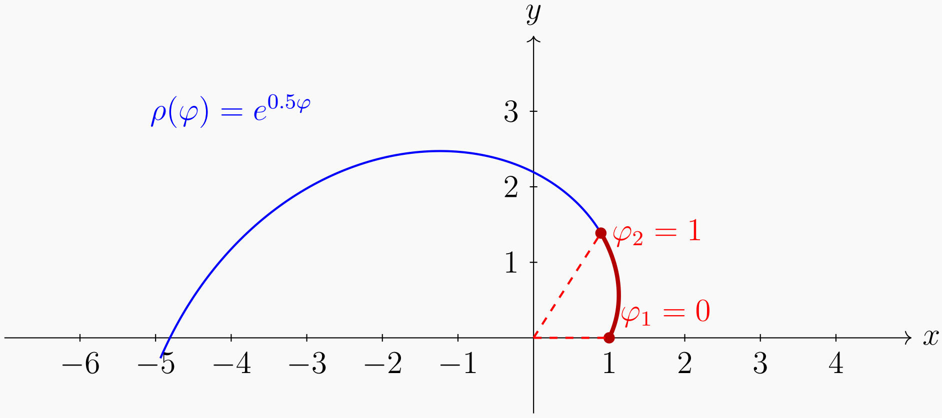
# 2 Bogenlänge

**Beispiel: Bogenlänge einer logarithmischen Spirale**

Wir betrachten die logarithmische Spirale in Polarkoordinaten

$$\rho(\varphi) = e^{0.5\varphi}, \qquad \varphi \in [0,1]$$

Gesucht ist die Bogenlänge des Spiralbogens von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_2 = 1$.




Bogenlängenformel in Polarkoordinaten

$$L =$$

Ableitung von $\rho(\varphi)$:

$$\rho(\varphi) = e^{0.5\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho}(\varphi) =$$

Ausdruck unter der Wurzel:

$$\rho^2(\varphi) = \quad , \qquad \dot{\rho}^2(\varphi) =$$

Damit

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)} =$$

Integral berechnen:

$$L =$$

Also

$$L =$$