Übung 11 - Bestimmtes Integral, partielle Integration, Substitution & Partialbruchzerlegung

1 Integralrechnung

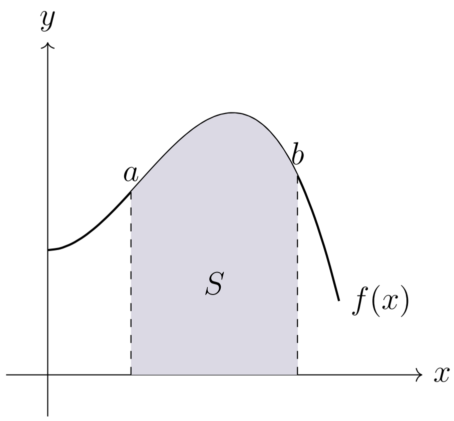
1.1 Definitionen

Bestimmtes Integral: $\boxed{}$

Unbestimmtes Integral: $\boxed{}$

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gibt den Flächeninhalt S wieder, der zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$, den Grenzen a, b und der x-Achse eingeschlossen wird.

- Fläche ist positiv, wenn der Graph oberhalb der x-Achse liegt.
- Fläche ist negativ, wenn der Graph unterhalb der x-Achse liegt.



1.2 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$\boxed{}$

Dies bedeutet „unmathematisch" gesprochen, dass das Integrieren das umgekehrte Ableiten ist.

1.3 Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion, dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion.

1.4 Rechenregeln (Integral)

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Rechenregeln (Integrieren)

Wichtige Integrale:

- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
- $\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Beispiel: $ln|x|$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$\Rightarrow$$

Achtung! $\frac{d}{dx}\ln(x-1) =$ $\frac{d}{dx}\ln(1-x) =$

2 Partielle Integration

2.1 Defintion

Beispiel: Partielle Integration

$$\int {\color{red}x}\,{\color{blue}e^x}\,dx$$

$$\int {\color{red}x}{\color{blue}e^x}\,dx =$$

3 Substitution

Es gibt kein genaues Rezept, um immer die „richtige“ Substitution zu finden.

Generelles Vorgehen:

1. Substitutionsfunktion $u(x)$ aufstellen.
2. $u(x)$ ableiten $\rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx}$ und nach dx auflösen.
3. Alles substituieren und Integral lösen.

Beispiel: Substitution

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, e^{\cos(x)}\, dx$$

1. Substitution:

$$u(x) = \cos(x)$$

2. Ableitung:

$$u'(x) =$$

3. Grenzen anpassen:

$$x = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

4. Substituieren:

$$\sin(x)e^{\cos(x)}dx =$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{\cos(x)}dx =$$

$$=$$

Beispiel: Substitution

$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,dx$$

1. Substitution:

2. Ableitung:

$$\Rightarrow$$

3. Neue Grenzen:

$$x = 0 \Rightarrow \qquad\qquad x = 2$$

4. Integral umschreiben:

$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,dx =$$

5. Integrieren:

4 Integrale von gebrochenrationalen Funktionen

- Grad des Zählerpolynoms > Grad des Nennerpolynoms ⇒ Polynomdivision durchführen. Danach das Polynom in Partialbrüche zerlegen.
- Grad des Zählerpolynoms ≤ Grad des Nennerpolynoms ⇒ Direkt in Partialbrüche zerlegen (oder direkt Substitution/bekanntes Integral).
- Durch Substitution, Ausklammern oder andere Umformung auf Standardintegrale zurückführen:
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{Artanh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\displaystyle\int x^{-s}\,dx = -\frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}} + C \qquad (s \neq 1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + C \qquad \Rightarrow \text{gilt für } c-b^2>0$

Einfache reelle Nullstellen

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)} =$$

Mehrfache reelle Nullstellen (hier 3-fache)

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^3(x-x_1)} =$$

Einfache komplexe Nullstellen (Quadratischer Faktor)
Für einen irreduziblen quadratischen Faktor x^2+px+q:

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)(x-x_0)} =$$

Mehrfache komplexe Nullstellen (hier 3-fache)

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)^3(x-x_0)} =$$

Beispiel: Polynomdivision & Partialbruchzerlegung

Wir betrachten das Integral

$$\int \frac{x^3-4x^2}{x^2-4}\,dx.$$

Da der Grad des Zählers größer ist als der des Nenners, führt man zunächst eine Polynomdivision durch:

$$\frac{x^3-4x^2}{x^2-4} = x-4+\frac{4x-16}{x^2-4}.$$

Schritt 1: Faktorisieren des Nenners

Schritt 2: Ansatz der Partialbruchzerlegung
Wir zerlegen den Bruch

Auf einen gemeinsamen Nenner gebracht ergibt sich:

Damit folgt die Gleichung der Zähler:

Schritt 3: Bestimmen der Koeffizienten A, B

Variante 1: Koeffizientenvergleich
Ausmultiplizieren:

$$A(x+2) + B(x-2) =$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \\ \end{cases}$$

Lösen ergibt:

Variante 2: geeignete x ***einsetzen***
Setzt man $x = 2$, so wird der Term mit B null:

Setzt man $x = -2$, so wird der Term mit A null:

Damit

Damit lautet die Partialbruchzerlegung für beide Varianten:

$$\frac{4x-16}{x^2-4} =$$

Schritt 4: Gesamtausdruck

$$\frac{x^3-4x^2}{x^2-4} =$$

Schritt 5: Integrieren

$$\int \frac{x^3-4x^2}{x^2-4}\,dx =$$

$$=$$