

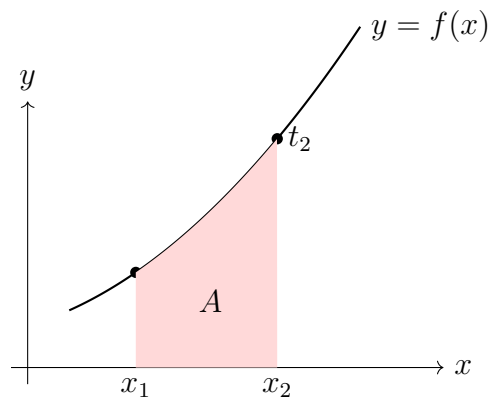
Übung 12 – Flächenberechnung bei ebenen Kurven & Bogenlänge

1 Flächen

1.1 Fläche zwischen Kurve und x-Achse

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt$$

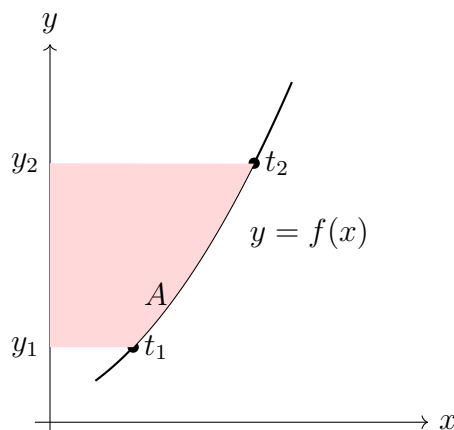
$$dx = \frac{dx}{dt} dt = \dot{x}(t) dt$$



1.2 Fläche zwischen Kurve und y-Achse

$$A = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y) dy = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \dot{y}(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f'(x) dx$$

$$dy = \frac{dy}{dt} dt = \dot{y}(t) dt = \frac{dy}{dt} dt \cdot \frac{dx}{dx} = f'(x) dx$$



Beispiel: Ellipse und y-Achse

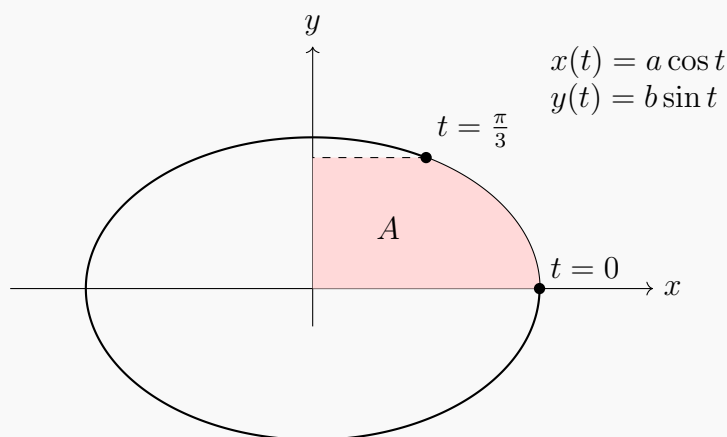
Wir betrachten die Ellipse mit Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$, parametrisiert durch

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t$$

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Ellipsenbogen für

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

und der y-Achse.



Allgemein gilt für die Fläche zwischen Kurve und y-Achse:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \dot{y}(t) dt$$

Für die Ellipse:

$$x(t) = a \cos t, \quad \dot{y}(t) = b \cos t \quad \Rightarrow \quad x(t) \dot{y}(t) = ab \cos^2 t$$

Damit lautet das Flächenintegral

$$A = ab \int_0^{\pi/3} \cos^2 t dt$$

Mit der Identität

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

erhalten wir

$$A = ab \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos(2t)) dt$$

Stammfunktion:

$$\int (1 + \cos(2t)) dt = t + \frac{\sin(2t)}{2}$$

Also

$$A = \frac{ab}{2} \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/3} = \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} - 0 \right)$$

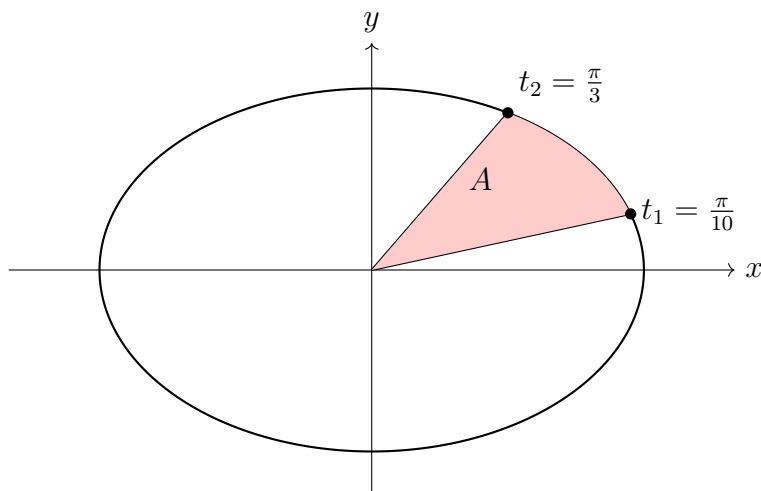
Da $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, folgt

$$A = \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = ab \left(\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{24} \right)$$

1.3 Sektorfläche einer ebenen Kurve

$$A = \left| \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) \dot{y}(t) - \dot{x}(t) y(t)) dt \right|$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho(\varphi))^2 d\varphi$$

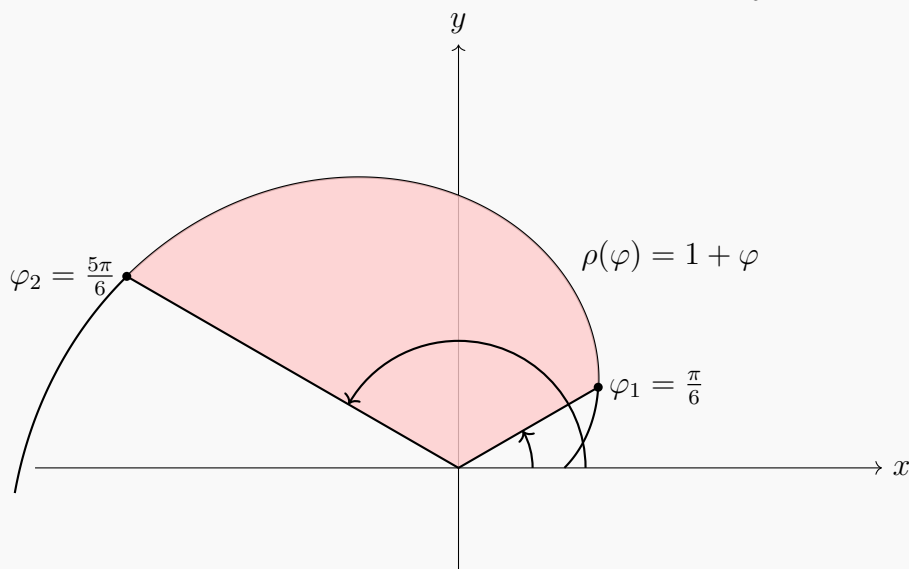


Beispiel: Sektorfläche einer Archimedischen Spirale

Wir betrachten die Archimedische Spirale

$$\rho(\varphi) = 1 + \varphi, \quad \text{mit } \varphi \geq 0$$

Gesucht ist die Fläche des Sektors zwischen den Winkeln $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ und $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$



Sektorflächenformel in Polarkoordinaten:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho(\varphi))^2 d\varphi$$

Hier also:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\varphi^2 + 2\varphi + 1) d\varphi$$

Stammfunktion bestimmen:

$$\int (\varphi^2 + 2\varphi + 1) d\varphi = \frac{\varphi^3}{3} + \varphi^2 + \varphi$$

Also

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi^3}{3} + \varphi^2 + \varphi \right]_{\varphi=\pi/6}^{\varphi=5\pi/6}$$

Grenzen einsetzen:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{125\pi^3 - \pi^3}{3 \cdot 216} + \frac{25\pi^2 - \pi^2}{36} + \frac{5\pi - \pi}{6} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{31\pi^3}{162} + \frac{2\pi^2}{3} + \frac{2\pi}{3} \right]$$

Damit folgt

$$A = \frac{31\pi^3}{324} + \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{3}$$

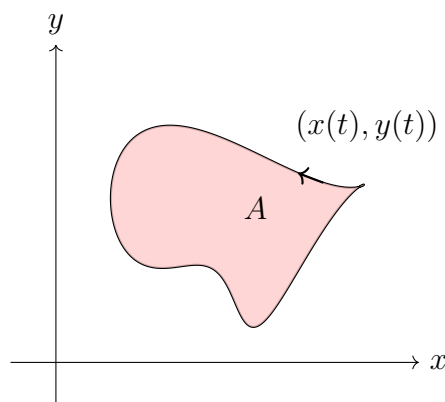
1.4 Fläche einer geschlossenen Kurve

Wenn

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2)$$

gilt:

$$A = \left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) \dot{y}(t) dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt \right|$$



2 Bogenlänge

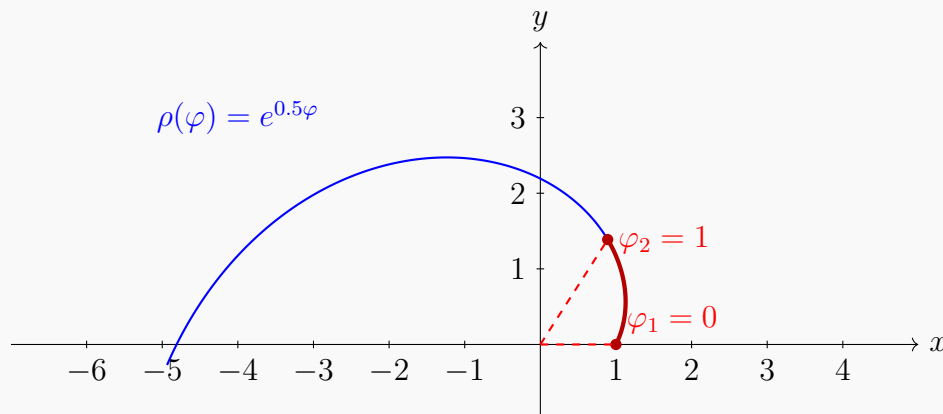
$$L = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)} d\varphi$$

Beispiel: Bogenlänge einer logarithmischen Spirale

Wir betrachten die logarithmische Spirale in Polarkoordinaten

$$\rho(\varphi) = e^{0.5\varphi}, \quad \varphi \in [0, 1]$$

Gesucht ist die Bogenlänge des Spiralbogens von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_2 = 1$.



Bogenlängenformel in Polarkoordinaten

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)} d\varphi$$

Ableitung von $\rho(\varphi)$:

$$\rho(\varphi) = e^{0.5\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho}(\varphi) = 0.5 e^{0.5\varphi}$$

Ausdruck unter der Wurzel:

$$\rho^2(\varphi) = e^\varphi, \quad \dot{\rho}^2(\varphi) = 0.25 e^\varphi$$

Damit

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)} = \sqrt{1.25 e^\varphi} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{\varphi/2}$$

Integral berechnen:

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^1 e^{\varphi/2} d\varphi$$

Also

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} [2e^{\varphi/2}]_0^1 = \sqrt{5} (e^{1/2} - 1)$$