Übung 14 – Uneigentliche Integrale

1 Uneigentliche Integrale

1.1 Uneigentliche Integrale 1. Gattung

Sei f auf dem Intervall $[a, b)$ definiert, wobei f bei b nicht definiert ist (z.B. Pollstelle oder Definitionslücke). Dann ist das uneigentliche Integral definiert durch

Beispiel: 1. Gattung mit Lösung

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Da $\ln(x)$ bei $x = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir den Grenzwert:

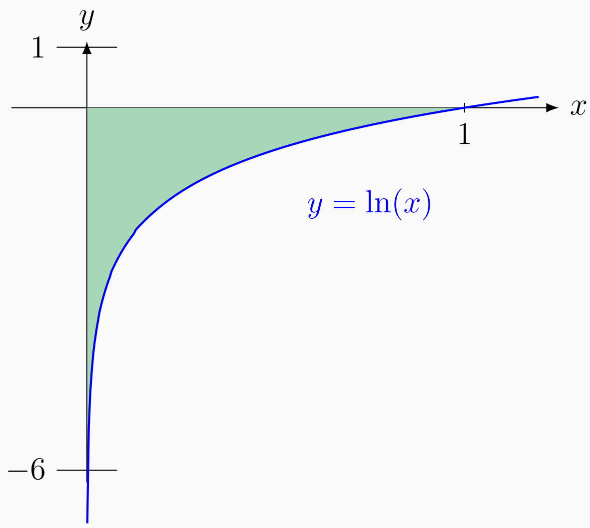
$$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 0^+} \int_\beta^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Eine Stammfunktion von $\ln(x)$ ist

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x =$$

Damit ergibt sich

Da $\beta\ln(\beta) \to 0$, folgt



Beispiel: 1 Gattung ohne Lösung

Berechne das Integral
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
Da der Integrand bei $x = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir den Grenzwert:
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
Eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist $\ln(x)$. Somit:

$\ln(\beta) \to -\infty$ für $\beta \to 0^+ \Rightarrow$

1.2 Uneigentliche Integrale 2. Gattung

Sei f auf $[a, \infty)$ definiert. Dann ist das uneigentliche Integral der **2. Gattung** definiert durch

Hinweis:

Besitzt ein uneigentliches Integral der 2. Gattung zwei unendliche Integrationsgrenzen, so muss es an einer *beliebigen* endlichen Stelle c aufgeteilt werden:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Das Integral ist genau dann konvergent, wenn *beide* Teilintegrale konvergieren.

Beispiel 2: Uneigentliches Integral mit zwei unendlichen Grenzen

Überprüfe, ob das uneigentliche Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
einen endlichen Wert besitzt.

Das Integral ist ein uneigentliches Integral der 2. Gattung mit zwei unendlichen Integrationsgrenzen. Es wird daher in zwei Teilintegrale zerlegt:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Für das linke Teilintegral gilt

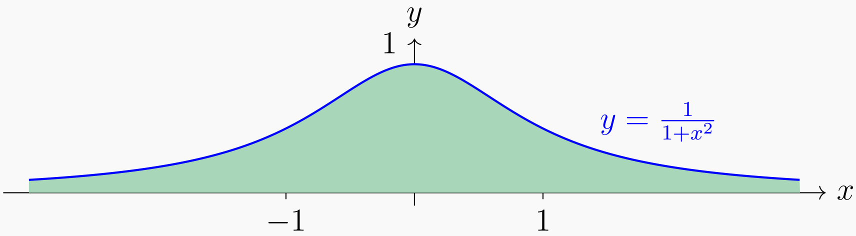
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

Analog erhält man für das rechte Teilintegral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2},\mathrm{d}x =$$

Durch Addition folgt

$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral ist konvergent.



Beispiel: 2. Gattung ohne Lösung

Berechne das Integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Wir schreiben das Integral als Grenzwert:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

Mit der Stammfunktion $\ln(x)$ folgt:

$\ln(\beta) \to \infty$ für $\beta \to \infty \Rightarrow$,