Übung 10 - Taylorpolynom & Taylorreihe

1 Taylorpolynome P_n & Taylorreihe

1.1 Taylorpolynom P_n

Idee: Wird berechnet, um Funktionen in der Umgebung eines Punktes x_0 durch Polynome anzunähern.

Berechnung Taylorpolynom

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$P_n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Gut zu wissen

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- Bei ungeraden Funktionen sind alle geraden Koeffizienten $= 0$.
- Bei geraden Funktionen sind alle ungeraden Koeffizienten $= 0$ (bei $x_0 = 0$).

1.2 Zusammenhang zwischen Ableitung und Taylorpolynom

$\Rightarrow$ Damit die Approximation gut ist, muss sie gewisse Bedingungen erfüllen.

- Gleicher *Stützpunkt*:
$$P_n(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(0)$$
- Gleiche *Steigung*:
$$P_n'(0) = f'(0) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$
- Gleiche *Krümmung*:
$$P_n''(0) = f''(0) \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$
- $\vdots$
- $$P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Jeder Koeffizient beeinflusst genau eine einzige Ableitung!

1.3 Darstellungsweise der Taylorreihe

Taylorreihe $\widehat{=}$ Taylorpolynom vom „Grad ∞“

Taylorreihe / Potenzreihe von $f(x)$ um den Punkt 0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Taylorreihe / Potenzreihe von $f(x)$ um beliebigen Punkt x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Beispiel: Taylorreihe mit Hilfe bekannter Reihen 1

Berechne: Taylorreihe von $\frac{1}{2x+5}$ bei $x_0 = -1$

Wir bringen

$$\frac{1}{2x+5}$$

in die Form einer geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q}$, da wir die Taylorreihe dieser Funktion kennen: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$$\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{2(x+1)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3}(x+1)}$$

$$\text{mit } q = -\frac{2}{3}(x+1)$$

Damit:

$$\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k (x+1)^k$$

Beispiel: Taylorreihe mit Hilfe bekannter Reihen 2

Berechne: Taylorreihe von $\ln(x)$ bei $x_0 = 3$

Wir setzen:

$$x = 3 + (x-3) \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = \ln(3 + (x-3)) = \ln\left(3\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)\right)$$

$$\ln(x) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)$$

Die bekannte Reihe:

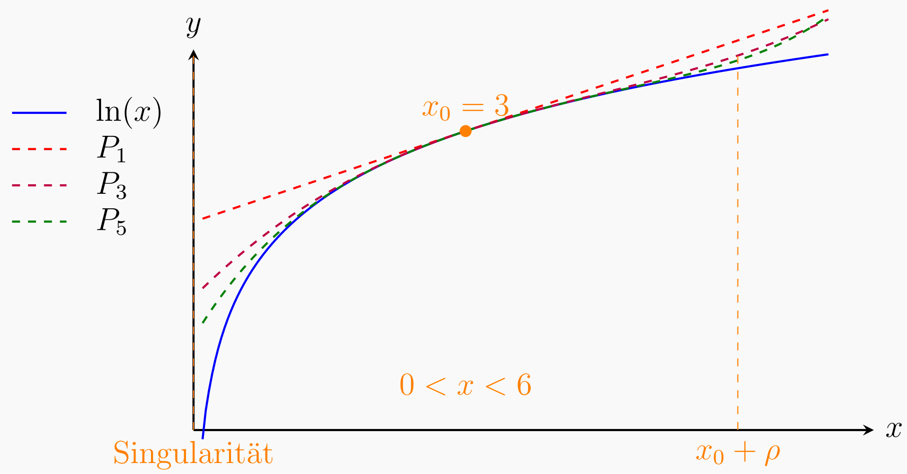
$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$$\text{mit} z = \frac{x-3}{3}$$

Einsetzen:

$$\ln(x) = \ln(3) + \frac{x-3}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-3}{3}\right)^3 - \dots$$

$$\Longrightarrow \ln(x) = \ln(3) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{x-3}{3}\right)^k \text{ um Mittelpunkt } x_0 = 3$$



Berechne: Konvergenzradius der Taylorreihe von $\ln(x)$ um $x_0 = 3$

Aus der Herleitung oben erhalten wir:

$$\ln(x) = \ln(3) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{x-3}{3}\right)^k$$

Dies ist eine Potenzreihe in $(x-3)$ der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x-3)^k \quad \text{mit} \quad c_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k\,3^k}$$

Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum c_k(x-3)^k$ gilt

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$$

$$\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}\,\frac{1}{k\,3^k}}{(-1)^{k+2}\,\frac{1}{(k+1)\,3^{k+1}}}\right|$$

$$= \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k3^k}\cdot\frac{(k+1)\,3^{k+1}}{(-1)^{(k+2)}}\right| = \left|-1\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\frac{3}{1}\right|$$

Nun bilden wir den Grenzwert:

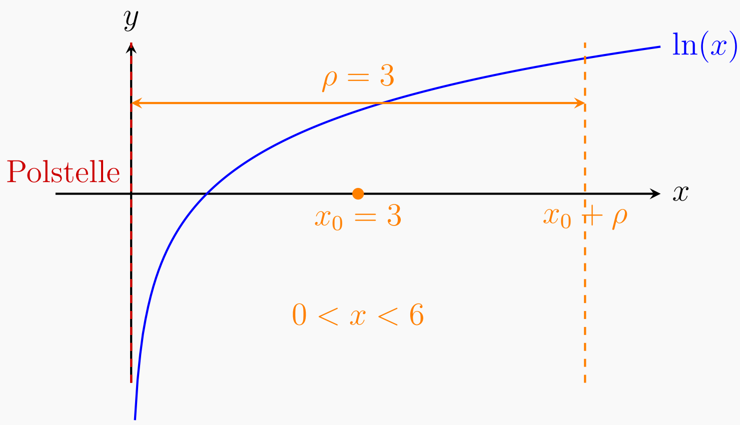
$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} 3\cdot\frac{k+1}{k} = 3\cdot 1 = 3$$

Damit ist der Konvergenzradius

$$\rho = 3$$

Die Taylorreihe konvergiert also für

$$|x-3| < 3 \quad\Longleftrightarrow\quad 0 < x < 6$$



In 99% der Fälle ist der Konvergenzradius genau der Abstand vom Entwicklungspunkt x_0 zur nächsten Definitionslücke/Polstelle.

Schneller Weg:

Die Funktion $\ln(x)$ besitzt im Reellen eine Singularität bei

$$x = 0$$

Die Taylorentwicklung erfolgt um den Punkt

$$x_0 = 3$$

Der Konvergenzradius ist der Abstand zwischen x_0 und der nächsten Singularität:

$$\rho = |x_0 - 0| = 3$$

$$\rho = 3$$

Beispiel: Koeffizientenvergleich

Berechne: Taylorreihe von $\tan(x)$ im Punkt $x_0 = 0$
Wir setzen an:

$$\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Da

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \Rightarrow \qquad \tan(x)\cos(x) = \sin(x).$$

Einsetzen der Reihen:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Koeffizientenvergleich

- $a_0 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$
- $a_1 x \cdot 1 = x \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1$
- $a_2 x^2 \cdot 1 + a_0\left(-\frac{x^2}{2!}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$
- $a_3 x^3 \cdot 1 + a_1\left(-\frac{x^2}{2!}\right) = -\frac{x^3}{3!}$

$$a_3 x^3 - \frac{1}{2}x^3 = -\frac{1}{6}x^3$$

$$a_3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3}$$

- $a_4 x^4 \cdot 1 + a_2 x^2\left(-\frac{x^2}{2!}\right) + a_0\left(\frac{x^4}{4!}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 0$
- $a_5 x^5 \cdot 1 + a_3 x^3\left(-\frac{x^2}{2!}\right) + a_1 x\left(\frac{x^4}{4!}\right) = \frac{x^5}{5!}$

$$a_5 x^5 - \frac{a_3}{2}x^5 + \frac{a_1}{24}x^5 = \frac{1}{120}x^5$$

Einsetzen von $a_3 = \frac{1}{3}$ und $a_1 = 1$:

$$a_5 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120}$$

Wir fassen zusammen:

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = -\frac{4}{24} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{8}$$

Also:

$$a_5 - \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{1}{120} + \frac{1}{8} = \frac{1}{120} + \frac{15}{120} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \quad a_5 = \frac{2}{15}$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$