Analysis I – PVK

Aufgabensammlung leer

Leonard Kopp

Meine TA Website

- PVK-Material
- TA-Material vom Semester
- Weiteres Material für Analysis

Website:

https://koppleo.github.io/

Ablauf

Montag:
- Kurzes Theorie Recap und Beispielaufgaben Kapitel I (Funktionen) und Kapitel II (Differentialrechnung)
- Prüfungsaufgaben zu Kapitel I und II

Dienstag:
- Kurzes Theorie Recap und Beispielaufgaben Kapitel A (Komplexe Zahlen), Kapitel III (Intefralrechung) und Kapitel VIII (Potenzreihen)

Lernstrategie Analysis

- Nach dem PVK mit Prüfungen beginnen
- Übung ist am wichtigsten in Analysis (Theorie/Beweise eher unwichtig)

Prüfungen:

- Viele Zwischenprüfungen (gut auch fürs Verständnis!)
- Ca. 3 Prüfungen altes Format (auf Papier)
- 3 Prüfungen neues Format (auf Computer)

- Moodle-Quizzes sind auch gut (mehr Verständnis)
- So viele Prüfungen wie möglich lösen, Serie eher unwichtig, nur wenn ihr ein Thema vertiefen möchtet
- Prüfungen findet ihr auf der Moodle Seite „Alte Mathematik-Prüfungen“

- FoTaBe kaufen und mit markieren mit Leuchtstift/Post-it, (keine Notizen erlaubt)
- ZF stetig ergänzen

- Bei Fragen: Moodle-Forum oder mail an mich (kopple@student.ethz.ch)

Funktionen (Kapitel I)

BP 22/08 SC

Frage 1 (I) Genau eine der folgenden Aussagen ist für alle Nullfolgen (a_n) richtig. Welche?

A $a_{2022} = 0$

B (a_n) ist beschränkt

C (a_n) ist monoton fallend

D $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

ZP 2018 MC

1. (Fibonacci) Es sei $(f_n)_{n\geq 0}$ die Fibonacci Folge, gegeben durch

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ \text{wobei } n \geq 1.$$

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend.

(b) Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt.

(c) Falls der Grenzwert $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ existiert, dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}^2}{f_n^2}$ ebenfalls.

(d) Die Folge $\left(\frac{f_{n+2}-f_{n+1}}{f_n^2}\right)_{n\geq 0}$ ist eine Nullfolge.

ZP 2020 MC

9. (VIII) Welche der folgenden Reihen konvergieren?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2019}{2020}\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(n \cdot \pi)$

ZP 2019 MC

1. (Folgen) Betrachten Sie die rekursive Folge

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{wobei } n \geq 0.$$

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Die Folge (a_n) ist für jeden Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ monoton wachsend.

(b) Wenn $a_0 = \frac{1}{2}$, dann ist die Folge (a_n) beschränkt.

(c) Wenn $a_0 = 1$, dann ist $\lim_{n \longrightarrow \infty}(a_n) = \infty$.

(d) Es gibt einen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$, so dass die Folge (a_n) konstant ist.

BP 24/01 SC

SC 1 (I) Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\cosh x}{x + \ln(1+x)}, & \text{wenn } x \neq 0 \\ a, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist?

(A) $a = 0$

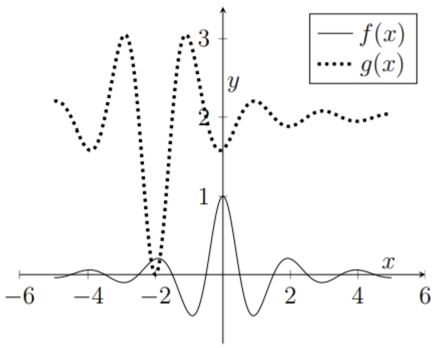
(B) $a = 1$

(C) So ein $a \in \mathbb{R}$ existiert nicht.

(D) $a = 1/2$

BP 24/8 SC

Aufgabe 4 (I) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit folgenden Graphen:



Es gilt

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x^2 + 1}.$$

Welche Funktion $g(x)$ passt zu dem obigen Graphen?

(a) $g(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(\pi(x+2))}{(x+2)^2 + 1}$

(b) $g(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(\pi(x-1))}{(x-1)^2 + 1}$

(c) $g(x) = 2 - 2 \cdot \frac{\cos(\pi(x+2))}{(x+2)^2 + 1}$

(d) $g(x) = 2 - 2 \cdot \frac{\cos(\pi(x+1))}{(x+1)^2 + 1}$

BP 24/01 SC

SC 3 (I) Für welche Kombination von Definitions- und Zielbereich ist die Funktion $f : x \mapsto (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$ bijektiv?

(A) $f : [0,2] \to [-1,0]$

(B) $f : [2,3] \to [0,4]$

(C) $f : [1,3] \to [-1,3]$

(D) $f : [-1,1] \to [0,3]$

BP 24/08 SC

Aufgabe 5 (I) Welche der untenstehenden Funktionen ist eine Asymptote von $f(x) = \cosh(2x+1)$ wenn $x \to -\infty$?

(a) $x \mapsto \dfrac{1}{2e^{2x+1}}$

(b) $x \mapsto -\dfrac{e^{2x+1}}{2}$

(c) $x \mapsto e^{-2x-1}$

(d) $x \mapsto e^{2x}$

BP 23/01 SC

SC 2 (I) Die Graphen der Funktionen $f : x \mapsto x^2 - 4$ und $g : x \mapsto 2\ln x$ haben...

(A) genau einen Schnittpunkt, und er ist ein Berührungspunkt.

(B) keinen Schnittpunkt.

(C) genau zwei Schnittpunkte.

(D) genau einen Schnittpunkt, und er ist kein Berührungspunkt.

BP 24/01 SC

SC 4 (I) Die Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \ln x$$

ist nicht elementar lösbar. In welchem Intervall I hat sie aber sicher eine reelle Lösung?

(A) $I = (3, 4)$

(B) $I = (2, 3)$

(C) $I = (0, 1)$

(D) $I = (1, 2)$

Differentialrechnung (Kapitel II)

BP 23/01 SC

SC 15 (II) Sei f eine differenzierbare, injektive Funktion mit $f(2) = 0$ und $f'(2) = 3$ und Umkehrfunktion g. Welchen Wert hat $g'(0)$?

(A) Diese Angaben reichen nicht, um $g'(0)$ zu bestimmen.

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) -3

ZP 2018 MC

2. (Extremalwerte) Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie für *alle* nicht-konstanten Polynome fünften Grades $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten *muss*.

   (a) p hat mindestens eine reelle Nullstelle.

   (b) p hat mindestens einen Sattelpunkt.

   (c) p hat mindestens eine lokale Extremalstelle.

   (d) Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so dass $p(z) = 0$, dann gilt ebenfalls $p(\overline{z}) = 0$.

ZP 2022 MC

4. (II) Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen, ob die Gerade

$$y = x - 1$$

eine Tangente an diese Funktion ist.

(a) $g(x) = x^3$

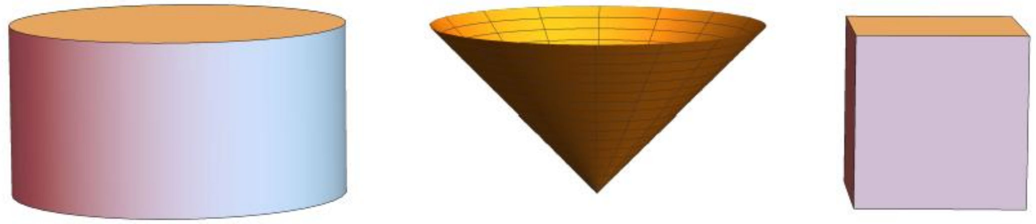
(b) $g(x) = \ln(x)$

(c) $g(x) = 2\sqrt{x}$

(d) $g(x) = e^x$

BP 23/01 SC

SC 11 (II) Man betrachtet ein Glas mit Radius bzw. Kantenlänge r und Höhe ebenso r. Wir können r bis um einen relativen Messfehler $\frac{\Delta r}{r}$ von 1% messen und wollen damit das Fassungsvolumen bestimmen. Für welches der folgenden drei Gläser wird der relative Messfehler des aus r berechneten Volumens minimal?



(A) Der relative Messfehler in V ist für alle 3 Gläser gleich gross

(B) Würfel: $V = r^3$

(C) Zylinder: $V = \pi r^3$

(D) Kegel: $V = \frac{\pi r^3}{3}$

BP 24/08 SC

Aufgabe 9 (II) Man bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$$

(a) 0

(b) 1/2

(c) 1

(d) ∞

BP 23/08 SC

SC 10 (II) Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat die ebene Kurve mit Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (3t-1) \\ t \cdot (3-t^2) \end{pmatrix}$ eine vertikale Tangente?

(A) $1/3$

(B) 1

(C) 0

(D) $1/6$

BP 22/08 SC

Frage 6 (II) Die Bernoullispirale ist in Polarkoordinaten durch $\rho(\varphi) = e^{\varphi}$ gegeben. Sei Steigung m der Tangente zum Punkt mit Parameterwert $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. In welchem Intervall liegt m?

- A $m \in (-\infty, -1)$
- B $m \in [-1, 0)$
- C $m \in [0, 1)$
- D $m \in [1, \infty)$

ETH zürich

ZP 2019 SC

16. (Krümmung) Welche der folgenden Ellipsen hat den grössten Krümmungsradius im Punkt $(0,2)$?

    (a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

    (b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

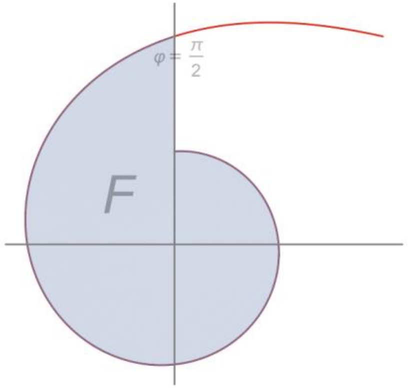
    (c) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

    (d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

BP 23/01 offen

A1 Die Lituus-Spirale zum Parameter $a > 0$ ist gegeben durch die Polardarstellung

$$\rho(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}, \quad \varphi > 0.$$



a) Man bestimme den Parameter a so, dass die in der Skizze markierte Fläche F den Inhalt 1 hat.

b) Im Bereich $\varphi \in (0, \pi/2)$ existiert genau ein Wert $\tilde{\varphi}$, für den die Tangente an die Kurve horizontal liegt. Zeigen Sie, dass gilt: $\tan(\tilde{\varphi}) = 2 \cdot \tilde{\varphi}$.
Bemerkung: $\tilde{\varphi}$ *lässt sich elementar nicht exakt bestimmen.*

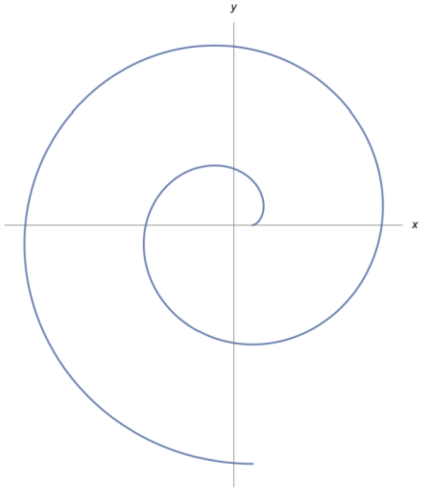
BP 24/01 Offen

Offene Aufgaben

A1 Wir betrachten die *Evolvente des Einheitskreises.* Sie entsteht, wenn man den Endpunkt eines Fadens beim Abwickeln vom Einheitskreis verfolgt. Die entstehende Kurve wird durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \qquad t > 0$$

beschrieben.



(a) (3 Punkte) Die Kurve hat beim erstmaligen Durchlaufen des dritten Quadranten einen Punkt mit vertikaler Tangente. Man bestimme die Koordinaten dieses Punkts.

(b) (4 Punkte) Man bestimme die Krümmung der Kurve $k(t)$ für ein allgemeines $t > 0$.

~~(c) (3 Punkte) Man bestimme die Bogenlänge der Kurve für t von 0 bis 2π.~~

Komplexe Zahlen (Kapitel A)

BP 23/01 SC

SC 11 (A) Was ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $\exp(\exp(i\pi/2))$?

(A) $\cos(1)$

(B) e

(C) 0

(D) $\sin(1)$

BP 23/01 SC

SC 12 (A) Es sei die komplexe Zahl $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ gegeben. Dann gilt

(A) $z^3 = 3\sqrt{3}i$

(B) $z^3 = -3\sqrt{3}i$

(C) $z^3 = -9i$

(D) $z^3 = 9i$

BP 24/01 SC

SC 10 (A) Die komplexe Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 + 2i| \leq 5\}$$

lässt sich geometrisch beschreiben als:

(A) Die Vereinigung von zwei Kreissektoren

(B) Eine gefüllte Kreisscheibe, aus der eine kleinere Kreisscheibe entfernt wurde

(C) Ein Abschnitt eines Kreisbogens

(D) Die Schnittmenge von zwei gefüllten Kreisscheiben

ZP 2019 MC

7. (Komplexe Zahlen) Welche der folgenden Aussagen gelten für alle komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$?

   (a) $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(\bar{z}^2)$.

   (b) $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$.

   (c) $\mathrm{Re}(\exp(z)) = \exp(\mathrm{Re}(\mathrm{z}))$.

   (d) $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \mathrm{Re}(z)$.

BP 23/08 SC

SC 13 (A) Wir betrachten nicht-konstante Polynome P mit reellen Koeffizienten und Grad 6. Genau eine der folgenden Aussagen über derartige Polynome ist richtig – Welche?

(A) Wenn ein solches Polynom P genau vier verschiedene reelle Nullstellen hat, dann hat es keine nicht-reelle Nullstelle.

(B) Jedes solche Polynom P hat mindestens eine reelle Nullstelle.

(C) Jedes solche Polynom P hat mindestens eine nicht-reelle Nullstelle.

(D) Wenn ein solches Polynom P genau fünf verschiedene reelle Nullstellen hat, dann hat es keine nicht-reelle Nullstelle.

ZP 2018 SC

21. (Komplexe Zahlen II) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $z^5 = ia$, wobei $a > 1$. Welche der folgenden komplexen Zahlen ist ebenfalls eine Lösung der Gleichung $z^5 = ia$?

    (a) $\overline{z_0}$.

    (b) $-\overline{z_0}$.

    (c) $z_0 \exp\left(i\frac{\pi}{5}\right)$.

    (d) $\sqrt[5]{a} z_0$.

Integralrechnung (Kapitel III)

ZP 2019 SC

25. (Trägheitsmoment) Sei A die Fläche, die durch die x-Achse, die Gerade $x = 2$ und die Funktion $y = x^3$ berandet wird. Betrachten Sie den Körper, der aus Rotation der Fläche A um die y-Achse entsteht. Wie gross ist seiner Träghheitsmoment Θ_y bezüglich der y-Achse?

   (a) $\Theta_y = \frac{2^8\pi}{7}$

   (b) $\Theta_y = \frac{2^{12}\pi}{13}$

   (c) $\Theta_y = \frac{2^6}{6}$

   (d) $\Theta_y = \frac{3}{7}\pi 2^6$

ETH zürich

BP 19/01 SC

17. (Stammfunktionen berechnen SC) Zur Berechnung der Stammfunktion von $\cos^2(x)$ werde im ersten Schritt partielle Integration verwendet:

$$\int \cos^2(x)\mathrm{d}x = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)\mathrm{d}x.$$

Was ist der nächste Schritt, um möglichst schnell zu einer Lösung zu gelangen?

(a) $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ partiell integrieren.

(b) $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ per Substitution integrieren.

(c) Dieser erste Schritt bringt nichts, denn $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ ist nicht elementar integrierbar.

(d) Trigonometrische Identität anwenden.

BP 20/08 SC

13. (III) Was ist die Ableitung der folgenden Funktion?

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

(a) $F'(x) = e^{-x^4} - e^{-x^2}$

(b) $F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$

(c) $F'(x) = -2xe^{-x^4} + e^{-x^2}$

(d) Dieser Integrand hat keine elementare Stammfunktion, darum kann die Ableitung auch nicht elementar beschrieben werden.

BP 23/08 SC

SC 16 (III) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Schwerpunkts der Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $x \in [0, 1]$ eingeschlossen ist. Hinweis: Diese Fläche hat den Flächeninhalt 2/3.

(A) 5/3

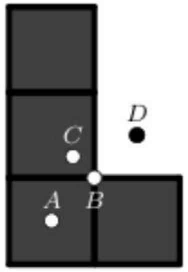
(B) 3/5

(C) 2/3

(D) 3/4

BP 18/08 SC

19. (Schwerpunkt SC) Gegeben sei der folgende Tetrisstein (*outverse J*):



An welcher Position liegt der Schwerpunkt?

(a) Position A

(b) Position B.

(c) Position C.

(d) Position D.

BP 18/08 MC

5. (Uneigentliche Integrale MC) Es sei $\alpha \in [0, +\infty)$ ein Parameter und es sei

$$I_\alpha := \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^{2\alpha}} \, dx.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Falls $\alpha = \frac{3}{2}$, dann konvergiert das uneigentliche Integral I_α.

(b) Die Funktion $f : \alpha \mapsto I_\alpha$ ist auf ihrem Definitionsbereich monoton steigend.

(c) Falls $\alpha = \frac{2}{3}$, dann konvergiert das uneigentliche Integral I_α.

(d) Falls $\alpha = \frac{1}{2}$, dann konvergiert das uneigentliche Integral I_α.

BP 24/01

SC 13 (III) In welches Integral geht das Integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x$ durch die Substitution $u = \cos x$ über?

(A) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{u^2 - 1}\, \mathrm{d}u$

(C) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\, \mathrm{d}u$

(B) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\, \mathrm{d}u$

(D) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2 - 1}\, \mathrm{d}u$

BP 24/01 SC

SC 14 (III) Was ist die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\dfrac{3x+1}{x^2(x+1)-(x+1)}$?

(A) $-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$

(B) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-1}$

(C) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$

(D) $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-1}$

BP 23/01 Offen

A2 Der Hyperboloidstumpf H sei gegeben durch die Rotation des Hyperbelstücks

$$2x^2 - (z-3)^2 = -1, \quad z \in [0,2]\,, x \geq 0$$

um die z-Achse. Die Dichte sei homogen $\rho = 1$. Man bestimme den Volumeninhalt und den Schwerpunkt von H.

BP 24/08 Offen

Aufgabe 21 (Volumen, Massenträgheitsmoment und Schwerpunkt, 10 Punkte) Wir rotieren die Fläche zwischen der z-Achse und dem Hyperbelstück

$$z^2 = x^2 + 1, \qquad z \in [1, 2],\ x \geq 0$$

um die z-Achse. Dadurch entsteht ein Hyperboloidstumpf K.

(i) (3 Punkte) Berechnen Sie das Volumen V von K.

Wir nehmen jetzt an, dass K die homogene Massendichte $\rho = \frac{15}{19}$ besitzt.

(ii) (3 Punkte) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment Θ_z von K bezüglich der z-Achse. Vereinfachen Sie Ihr Resultat.

(iii) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von K.

Bemerkung: Sie dürfen mit Symmetrie argumentieren.

Potenzreihen (Kapitel VIII)

BP 23/01 SC

SC 19 (VIII) Welches der folgenden Intervalle ist das grösste, in dem die Potenzreihe konvergiert?

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$$

(A) $(-2, 2)$

(B) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(C) $(-\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$

(D) $(0, 2)$

BP 21/01 SC

25. (VIII) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(3x - \frac{1}{2}\right)^k .$$

(a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$

(b) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(c) $\mathbb{R}$

(d) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

BP 23/01 SC

SC 18 (VIII) Was ist die dritte Ableitung der Funktion $f(x) = \ln\left((1+x)^3\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$?

(A) $f^{(3)}(0) = 0$

(B) $f^{(3)}(0) = 3$

(C) $f^{(3)}(0) = 1$

(D) $f^{(3)}(0) = 6$

BP 23/01 SC

SC 20 (VIII) Das Polynom $P(x) = 3 - \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{8}$ sei das Taylorpolynom vom Grad n einer Funktion f, entwickelt um x_0. Welche der folgenden Aussagen stimmt sicher?

(A) $x_0 = -1$

(B) $n = 3$

(C) $P''(1) = 0$

(D) $f'''(1) = \frac{1}{8}$

BP 24/01 Offen

A2 (a) (7 Punkte) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{2x+1}$$

um den Punkt $x_0 = -1$.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Taylorreihe.