Übung 1 - Funktionen mehrerer Variablen & partielle Ableitungen

1 Funktionen von zwei Variablen

1.1 Von $f(x)$ zu $f(x, y)$:

- Bisher: Eine Funktion $f(x)$ ordnet jedem x genau einen Funktionswert $f(x)$ zu. Graphisch ist das eine **Kurve in 2D**.
- Jetzt: Eine Funktion $f(x, y)$ ordnet jedem Punkt (x, y) genau einen Funktionswert $f(x, y)$ zu. Graphisch ist das eine **Fläche in 3D**. $\Rightarrow$ Jedem Punkt (x_0, y_0) wird eine **Höhe** $f(x_0, y_0)$ zugeordnet.

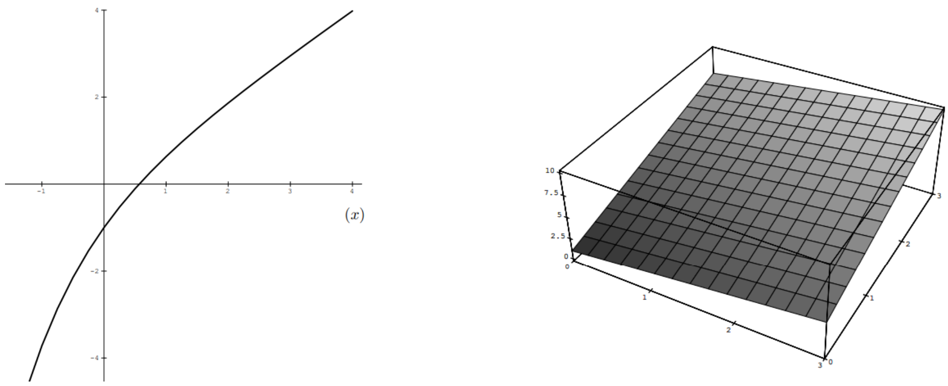

Figure 1: links $f(x)$ und rechts $f(x, y)$

1.2 Niveaulinien

Eine **Niveaulinie** zum Niveau $C \in \mathbb{R}$ ist die Menge aller Punkte (x, y), für die die Funktion den konstanten Wert C annimmt:

$$f(x, y) = C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Anschaulich: Man *schneidet* die 3D-Fläche $z = f(x, y)$ mit der Horizontalebene $z = C$.

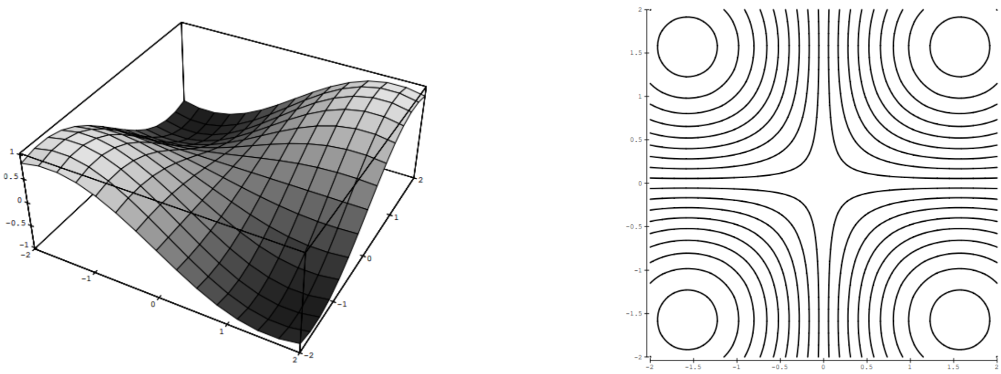

Figure 2: links Graph der Funktion $f(x, y) = \sin x \sin y$ und rechts die dazugehörigen Niveaulinien

Beispiel: Niveaulinien

Gegeben sei

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y-1}}{x}$$

Gesucht: Niveaulinien zu den Niveaus $C = -1, 0, 1$

$$\frac{\sqrt[3]{y-1}}{x} = C \implies \sqrt[3]{y-1} = Cx \implies y - 1 = (Cx)^3 = C^3x^3$$

$$\Rightarrow \quad y = C^3x^3 + 1$$

Für die gefragten Niveaus:

$$C = 0: \quad y = 1$$

$$C = 1: \quad y = x^3 + 1$$

$$C = -1: \quad y = -x^3 + 1$$

Achtung (Definitionslücke): Die Funktion ist bei $x = 0$ nicht definiert. Darum gehören Punkte mit $x = 0$ *nicht* zur Definitionsmenge und können auch *nicht* auf einer Niveaulinie liegen.

2 Partielle Ableitungen

2.1 Definition

Für $f(x, y)$ heisst

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad \text{die partielle Ableitung nach } x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y \quad \text{die partielle Ableitung nach } y$$

Dabei wird jeweils die andere Variable als konstant betrachtet.

Beispiel: Partielle Ableitung

Gegeben:

$$f(x, y) = x^3 \cdot e^{2y}$$

Ableitung nach x: e^{2y} ist konstant.

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 e^{2y}) = e^{2y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = e^{2y} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{2y}$$

Ableitung nach y: x^3 ist konstant.

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 e^{2y}) = x^3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^{2y}) = x^3 \cdot 2e^{2y} = 2x^3 e^{2y}$$

2.2 Gradient

Der **Gradient** einer Funktion $f(x, y)$ ist der Vektor der partiellen Ableitungen:

$$\operatorname{grad}(f(x, y)) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

- Die Richtung des Gradienten ist die Richtung der grössten Steigung
- Der Betrag des Gradienten beschreibt die Stärke dieser Steigung

Der Gradient steht immer senkrecht auf der Niveaulinie durch den Punkt (x, y)

2.3 Satz von Schwarz

Falls die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, spielt die Reihenfolge der Ableitungen keine Rolle:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

Beispiel: Satz von Schwarz

Gegeben sei

$$f(x, y) = x^3 e^{2y}$$

$$f_x = 3x^2 e^{2y} \Rightarrow f_{xy} = 6x^2 e^{2y}$$

$$f_y = 2x^3 e^{2y} \Rightarrow f_{yx} = 6x^2 e^{2y}$$

2.4 Integrabilitätsbedingung

2.4.1 Idee

Gesucht: $f(x, y)$ Gegeben: f_x und f_y

Es gibt genau dann eine Lösung, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist

$$f_{xy}(x,y) \stackrel{!}{=} f_{yx}(x,y)$$

Beispiel: Integrabilitätsbedingung

Gegeben sei

$$f_x = 2x\sin(y), \qquad f_y = x^2\cos(y) + e^y$$

1. Integrabilitätsbedingung überprüfen:

$$f_{xy} = 2x\cos(y), \qquad f_{yx} = 2x\cos(y), \qquad f_{xy} = f_{yx}$$

2. Integrieren:
Integration nach x:

$$f(x,y) = \int 2x\sin(y)\,dx = x^2\sin(y) + C_1(y)$$

Integration nach y:

$$f(x,y) = \int \left(x^2\cos(y) + e^y\right) dy = x^2\sin(y) + e^y + C_2(x)$$

3. Koeffizienten vergleichen:

$$x^2\sin(y) + C_1(y) = x^2\sin(y) + e^y + C_2(x)$$

$$C_1(y) = e^y, \qquad C_2(x) = 0$$

$$f(x,y) = x^2\sin(y) + e^y + C$$

3 Linearisieren

3.1 Tangentialebene

Idee: Approximation einer Funktion $f(x,y)$ am Punkt (x_0,y_0)

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Interpretation:

- $f(x_0,y_0)$ ist der Stützpunkt
- $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)$ beschreibt die Veränderung in x-Richtung
- $f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ beschreibt die Veränderung in y-Richtung

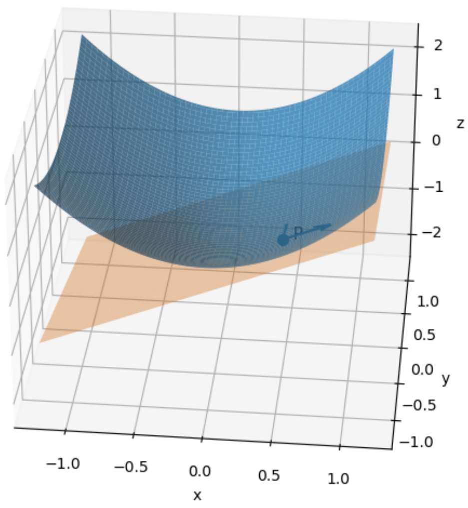

Figure 3: Tangentialebene im Raum

Beispiel: Tangentialebene

Finde die Tangentialebene $t(x, y)$ der Funktion

$$f(x, y) = 3(x^2 + 2xy)$$

im Punkt $(1, 2)$

$$f(1, 2) = 3(1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2) = 15$$

$$f_x = 3(2x + 2y) \quad \Rightarrow \quad f_x(1, 2) = 18$$

$$f_y = 6x \quad \Rightarrow \quad f_y(1, 2) = 6$$

Einsetzen in die Linearisierungsformel:

$$t(x, y) = 15 + 18(x - 1) + 6(y - 2)$$

$$t(x, y) = 18x + 6y + 9$$

3.2 Fehlerrechnung

Messbare Grössen x_0, y_0

Berechnete Grösse $f = f(x_0, y_0)$

Grössen x_0, y_0 sind mit Messfehlern dx, dy behaftet

- dx, dy absolute Messfehler
- $\frac{dx}{x_0}, \frac{dy}{y_0}$ relative Messfehler

Wie wirken sich die Messfehler auf den Fehler von f aus?
Absoluter Fehler (totales Differential):

$$df = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$$

Relativer Fehler:

$$\left|\frac{df}{f}\right| = \left|\frac{f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy}{f(x_0, y_0)}\right|$$

Dreiecksungleichung:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Beispiel: Fehlerrechnung eines Volumenkegel

Gesucht:

$$\frac{dV}{V}$$

Gegeben:

$$R = 10\,\text{cm} \quad \text{mit} \quad dR = 1\,\text{mm Ungenauigkeit (absolut)} \qquad \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{1\,\text{mm}}{10\,\text{cm}} = 1\%$$

$$H = 20\,\text{cm} \quad \text{mit} \quad \frac{dH}{H} = 1\%\ \text{Ungenauigkeit (relativ)}$$

Volumen des Kegels:

$$V(R, H) = \frac{\pi}{3} R^2 H$$

Totales Differential:

$$dV = V_R\, dR + V_H\, dH$$

$$V_R = \frac{2\pi}{3} RH \qquad V_H = \frac{\pi}{3} R^2$$

Relativer Fehler:

$$\left|\frac{dV}{V}\right| = \left|\frac{V_R dR + V_H dH}{V}\right| = \left|\frac{\frac{2\pi}{3} RH\, dR + \frac{\pi}{3} R^2\, dH}{\frac{\pi}{3} R^2 H}\right|$$

$$= 2\left|\frac{dR}{R}\right| + \left|\frac{dH}{H}\right| = 2 \cdot 1\% + 1\% = 3\%$$