Analysis I – PVK

Aufgabensammlung leer

Leonard Kopp

Meine TA Website

- PVK-Material
- TA-Material vom Semester
- Weiteres Material für Analysis

Website:
https://koppleo.github.io/

Ablauf

Montag:
- Kurzes Theorie Recap und Beispielaufgaben Kapitel I (Funktionen) und Kapitel II (Differentialrechnung)
- Prüfungsaufgaben zu Kapitel I und II

Dienstag:
- Kurzes Theorie Recap und Beispielaufgaben Kapitel A (Komplexe Zahlen), Kapitel III (Intefralrechung) und Kapitel VIII (Potenzreihen)

Lernstrategie Analysis

- Nach dem PVK mit Prüfungen beginnen
- Übung ist am wichtigsten in Analysis (Theorie/Beweise eher unwichtig)

Prüfungen:
- Viele Zwischenprüfungen (gut auch fürs Verständnis!)
- Ca. 3 Prüfungen altes Format (auf Papier)
- 3 Prüfungen neues Format (auf Computer)

- Moodle-Quizzes sind auch gut (mehr Verständnis)
- So viele Prüfungen wie möglich lösen, Serie eher unwichtig, nur wenn ihr ein Thema vertiefen möchtet
- Prüfungen findet ihr auf der Moodle Seite „Alte Mathematik-Prüfungen“

- FoTaBe kaufen und mit markieren mit Leuchtstift/Post-it, (keine Notizen erlaubt)
- ZF stetig ergänzen

- Bei Fragen: Moodle-Forum oder mail an mich (kopple@student.ethz.ch)

Funktionen (Kapitel I)

BP 22/08 SC

konvergent

Frage 1 (I) Genau eine der folgenden Aussagen ist für alle Nullfolgen (a_n) richtig. Welche?

A $a_{2022} = 0$

B (a_n) ist beschränkt

C (a_n) ist monoton fallend

D $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

c) $a_n = -\frac{1}{n}$

b) konvergent $\Rightarrow$ beschränkt

d) $a_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Reihe)

ZP 2018 MC

1. (Fibonacci) Es sei $(f_n)_{n\geq 0}$ die Fibonacci Folge, gegeben durch

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ \text{wobei } n \geq 1.$$

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend. ✓

(b) Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt. ✗

(c) Falls der Grenzwert $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ existiert, dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}^2}{f_n^2}$ ebenfalls. ✓

(d) Die Folge $\left(\frac{f_{n+2}-f_{n+1}}{f_n^2}\right)_{n\geq 0}$ ist eine Nullfolge. ✓

$1 \to 1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 8 \to 13$

a) $f_{n+1} - f_n = f_n + f_{n-1} - f_n = f_{n-1} \geq 0$

b) Divergent (addieren)

c) $\lim(a_n \cdot a_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(a_n)$

d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \Rightarrow \frac{f_n}{f_n^2} = \frac{1}{f_n} = 0$

ZP 2020 MC

9. (VIII) Welche der folgenden Reihen konvergieren?

✗ (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$ $= \frac{1}{\sqrt{n}}$, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

✓ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ $\leq \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ $\frac{1}{n^a}$ ← Alles mit Potenz >1 konvergiert

✓ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2019}{2020}\right)^n$ Geom. Reihe mit $|q| < 1$

✗ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(n \cdot \pi)$ $= 1 + 1 + 1 \ldots$ divergent

ZP 2019 MC

1. (Folgen) Betrachten Sie die rekursive Folge

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{wobei } n \geq 0.$$

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

✓ (a) Die Folge (a_n) ist für jeden Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ monoton wachsend.

✗ (b) Wenn $a_0 = \frac{1}{2}$, dann ist die Folge (a_n) beschränkt.

✓ (c) Wenn $a_0 = 1$, dann ist $\lim_{n \longrightarrow \infty}(a_n) = \infty$.

(d) Es gibt einen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$, so dass die Folge (a_n) konstant ist.

a) kleinster Startwert 0: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}, \frac{9}{16} + \frac{1}{2} + \ldots$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}, \frac{9}{16} + \frac{1}{2}, \ldots$

c) divergent

d) $a_{n+1} = a_n = c$

$$c = c^2 + \frac{1}{2}$$

ETH zürich

BP 24/01 SC

SC 1 (I) Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\cosh x}{x+\ln(1+x)}, & \text{wenn } x \neq 0 \\ a, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist?

(A) $a = 0$

(B) $a = 1$

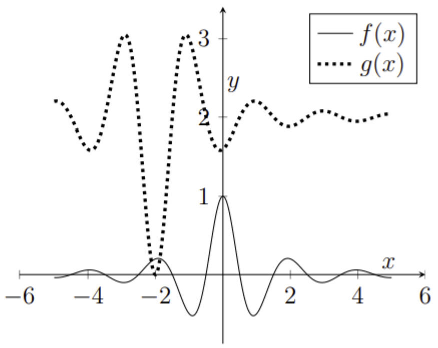
(C) So ein $a \in \mathbb{R}$ existiert nicht.

(D) $a = 1/2$

$$\frac{1}{0+0} \sim \frac{1}{0} \Rightarrow \infty$$

BP 24/8 SC

Aufgabe 4 (I) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit folgenden Graphen:



- +2 in y-Richtung
- −2 in x-Richtung
- ×2 Dehnung in y-Richtung

Es gilt

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x^2+1}.$$

Welche Funktion $g(x)$ passt zu dem obigen Graphen?

(a) $g(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(\pi(x+2))}{(x+2)^2+1}$

(b) $\cancel{g(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(\pi(x-1))}{(x-1)^2+1}}$

(c) $g(x) = 2 - 2 \cdot \frac{\cos(\pi(x+2))}{(x+2)^2+1}$

(d) $\cancel{g(x) = 2 - 2 \cdot \frac{\cos(\pi(x+1))}{(x+1)^2+1}}$

BP 24/01 SC

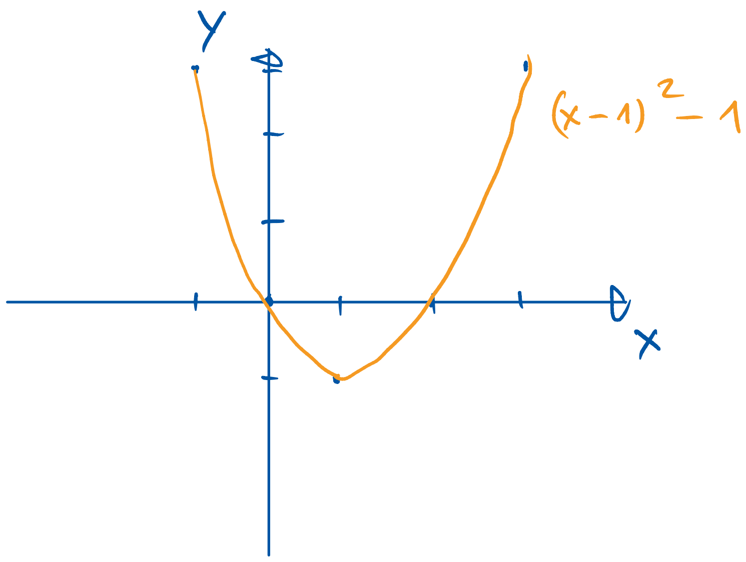
SC 3 (I) Für welche Kombination von Definitions- und Zielbereich ist die Funktion $f : x \mapsto (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$ bijektiv?

(A) $f : [0,2] \to [-1,0]$ nicht inj.

(B) $f : [2,3] \to [0,4]$ nicht surj.

(C) $f : [1,3] \to [-1,3]$ ✓

(D) $f : [-1,1] \to [0,3]$



BP 24/08 SC

Aufgabe 5 (I) Welche der untenstehenden Funktionen ist eine Asymptote von $f(x) = \cosh(2x+1)$ wenn $x \to -\infty$?

(a) $x \mapsto \dfrac{1}{2e^{2x+1}}$

(b) $x \mapsto -\dfrac{e^{2x+1}}{2}$

(c) $x \mapsto e^{-2x-1}$

(d) $x \mapsto e^{2x}$

Asymptote: $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{e^{2x+1}} + e^{-(2x+1)}}{2} = \frac{e^{-(2x+1)}}{2} = \frac{1}{2 \cdot e^{2x+1}}$$

BP 23/01 SC

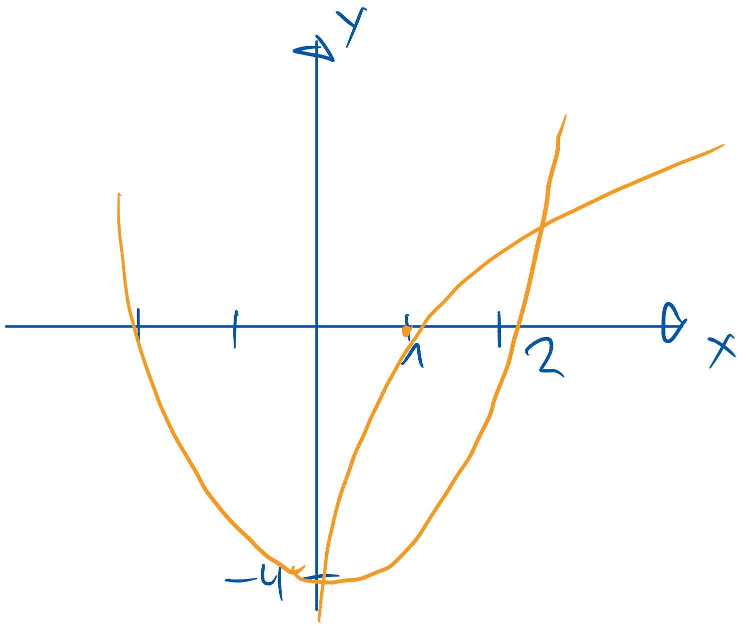
SC 2 (I) Die Graphen der Funktionen $f : x \mapsto x^2 - 4$ und $g : x \mapsto 2\ln x$ haben...

(A) genau einen Schnittpunkt, und er ist ein Berührungspunkt.

(B) keinen Schnittpunkt.

(C) genau zwei Schnittpunkte.

(D) genau einen Schnittpunkt, und er ist kein Berührungspunkt.



$h(x) = f(x) - g(x)$

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

$h(1) = -3$ $\Rightarrow$ Wegen Zwischenwertsatz gibt es min. 2 Punkte wo $h(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = +\infty$

BP 24/01 SC

SC 4 (I) Die Gleichung

$$\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \ln x$$

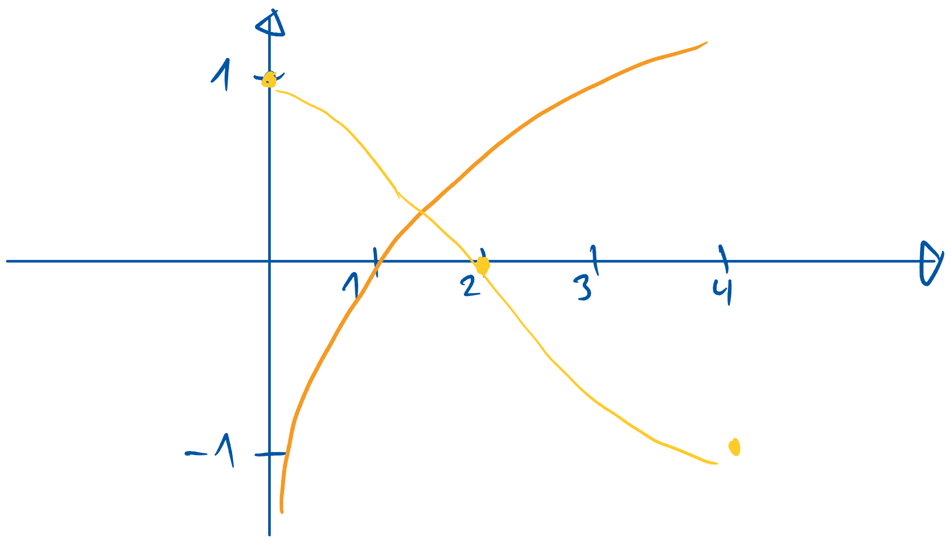
ist nicht elementar lösbar. In welchem Intervall I hat sie aber sicher eine reelle Lösung?

(A) $I = (3, 4)$

(B) $I = (2, 3)$

(C) $I = (0, 1)$

(D) $I = (1, 2)$



$h(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \ln(x)$

$h(1) = > 0$

$h(2) = < 0$

Differentialrechnung (Kapitel II)

BP 23/01 SC

SC 15 (II) Sei f eine differenzierbare, injektive Funktion mit $f(2) = 0$ und $f'(2) = 3$ und Umkehrfunktion g. Welchen Wert hat $g'(0)$?

(A) Diese Angaben reichen nicht, um $g'(0)$ zu bestimmen.

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) -3

$$f^{-1}(0) = 2$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Rightarrow \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}$$

ZP 2018 MC

2. (Extremalwerte) Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie für *alle* nicht-konstanten Polynome fünften Grades $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten *muss*.

   (a) p hat mindestens eine reelle Nullstelle.

   (b) p hat mindestens einen Sattelpunkt.

   (c) p hat mindestens eine lokale Extremalstelle.

   (d) Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so dass $p(z) = 0$, dann gilt ebenfalls $p(\overline{z}) = 0$.

a, d) Komplexe Nullstellen treten immer Paarweise auf

b) Geg. Bsp. $x^5 + x$, es müsste gelten $p' = 0$, $p'' = 0$

c) $p' = 0 \Rightarrow$ auch nicht der Fall

ZP 2022 MC

4. (II) Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen, ob die Gerade

$$y = x - 1$$

eine Tangente an diese Funktion ist.

Bedinung:

$g'(x_0) = f'(x_0)$

$g(x_0) = f(x_0)$

X (a) $g(x) = x^3$

✓ (b) $g(x) = \ln(x)$

X (c) $g(x) = 2\sqrt{x}$

X (d) $g(x) = e^x$

a) $3x^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ falsch

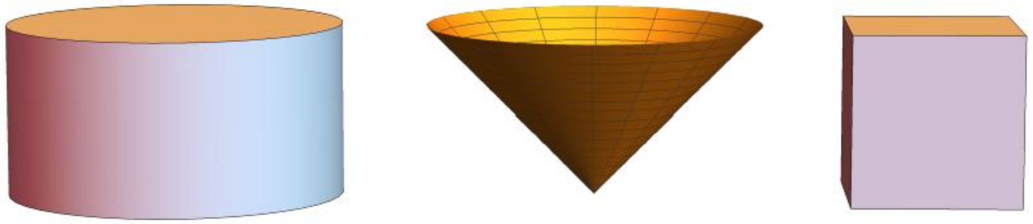
b) $\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow$ richtig

c) $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow$ falsch

d) $e^x = 1 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow$ falsch

BP 23/01 SC

SC 11 (II) Man betrachtet ein Glas mit Radius bzw. Kantenlänge r und Höhe ebenso r. Wir können r bis um einen relativen Messfehler $\frac{\Delta r}{r}$ von 1% messen und wollen damit das Fassungsvolumen bestimmen. Für welches der folgenden drei Gläser wird der relative Messfehler des aus r berechneten Volumens minimal?



(A) Der relative Messfehler in V ist für alle 3 Gläser gleich gross

(B) Würfel: $V = r^3$

(C) Zylinder: $V = \pi r^3$

(D) Kegel: $V = \frac{\pi r^3}{3}$

$$\frac{dV}{V} = \frac{V' dr}{V}$$

$$V' \qquad \frac{V' dr}{V}$$

B) $3r^2 \qquad \frac{3r^2 \cdot dr}{r^3} = \frac{3\,dr}{r} = 3 \cdot 1\% = 3\%$

C) $3\pi r^2 \qquad \frac{3\pi r^2 dr}{\pi r^3} = \frac{3dr}{r} = 3\%$

D) $\pi r^2 \qquad \frac{\pi r^2 dr}{\frac{\pi r^3}{3}} = \frac{3dr}{r} = 3\%$

BP 24/08 SC

Aufgabe 9 (II) Man bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$$

(a) 0

(b) 1/2

(c) 1

(d) ∞

Keine!

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{(2+x)-(2-x)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

BP 23/08 SC

SC 10 (II) Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat die ebene Kurve mit Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (3t-1) \\ t \cdot (3-t^2) \end{pmatrix}$ eine vertikale Tangente?

(A) 1/3

(B) 1

(C) 0

(D) 1/6

$m = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ vertikal: $\dot{x} = 0$

$\frac{d}{dt}\left(t \cdot (3t-1)\right) \stackrel{!}{=} 0$

$1 \cdot (3t-1) + t \cdot 3 \Rightarrow 6t - 1 \stackrel{!}{=} 0$

$t = \frac{1}{6}$

BP 22/08 SC

Frage 6 (II) Die Bernoullispirale ist in Polarkoordinaten durch $\rho(\varphi) = e^{\varphi}$ gegeben. Sei Steigung m der Tangente zum Punkt mit Parameterwert $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. In welchem Intervall liegt m?

A $m \in (-\infty, -1)$

B $m \in [-1, 0)$

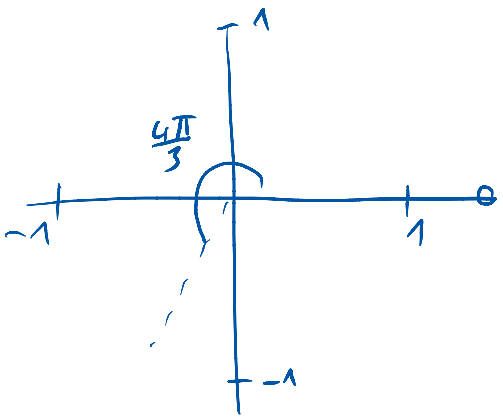
C $m \in [0, 1)$

D $m \in [1, \infty)$

≈ 1.6

$$m = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos(\varphi)\cdot \cancel{e^{\varphi}} + \sin(\varphi)\cdot \cancel{e^{\varphi}}}{-\sin(\varphi)\cdot \cancel{e^{\varphi}} + \cos(\varphi)\cdot \cancel{e^{\varphi}}} = \frac{-\frac{1}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{-2.6}{0.6} < -1$$

$$x(\varphi) = \cos(\varphi)\cdot e^{\varphi}$$
$$y(\varphi) = \sin(\varphi)\cdot e^{\varphi}$$



ZP 2019 SC

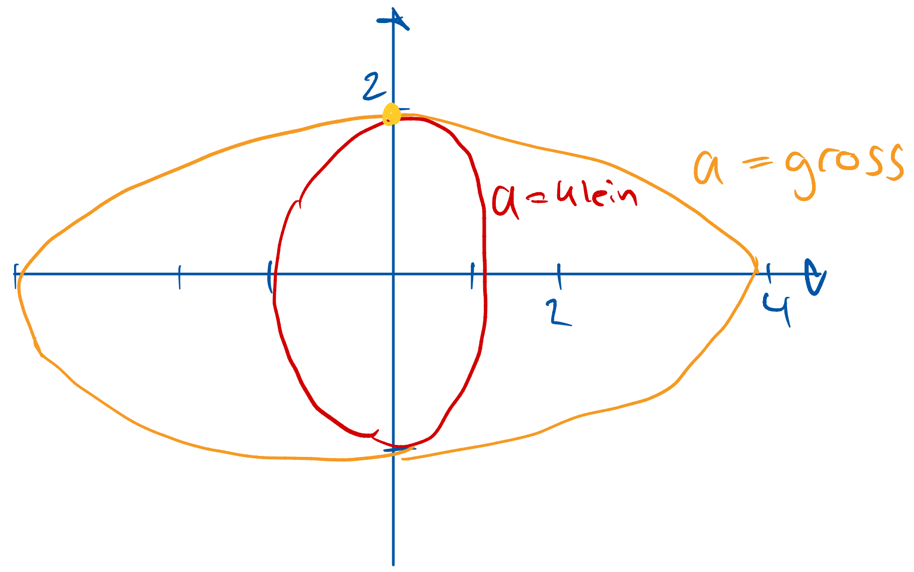
16. (Krümmung) Welche der folgenden Ellipsen hat den grössten Krümmungsradius im Punkt $(0, 2)$?

(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

(c) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

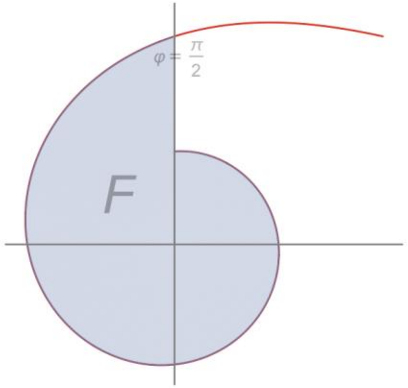
(d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$



BP 23/01 offen

A1 Die Lituus-Spirale zum Parameter $a > 0$ ist gegeben durch die Polardarstellung

$$\rho(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}, \quad \varphi > 0.$$



a) Man bestimme den Parameter a so, dass die in der Skizze markierte Fläche F den Inhalt 1 hat.

b) Im Bereich $\varphi \in (0, \pi/2)$ existiert genau ein Wert $\tilde{\varphi}$, für den die Tangente an die Kurve horizontal liegt. Zeigen Sie, dass gilt: $\tan(\tilde{\varphi}) = 2 \cdot \tilde{\varphi}$.
Bemerkung: $\tilde{\varphi}$ lässt sich elementar nicht exakt bestimmen.

$x = \cos(\varphi) \cdot \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$

$y = \sin(\varphi) \cdot \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$

Horizontal $\dot{y} = 0$

$\dot{y} = \cos(\varphi) \cdot \frac{a}{\sqrt{\varphi}} + \sin(\varphi) \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\varphi^{3/2}} \overset{!}{=} 0$

$a\left(\frac{2 \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{2 \cdot \varphi^{3/2}}\right) \overset{!}{=} 0$

$2 \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \overset{!}{=} 0$

$2 \cdot \varphi = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$

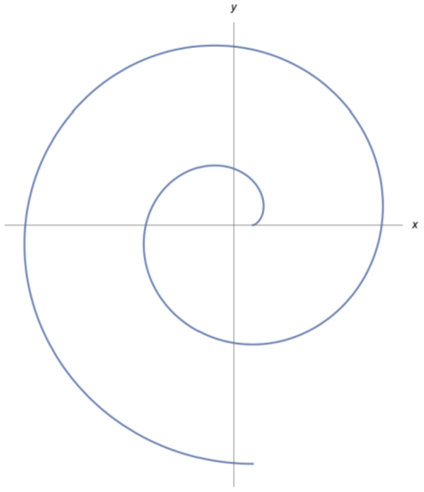
BP 24/01 Offen

Offene Aufgaben

A1 Wir betrachten die *Evolvente des Einheitskreises*. Sie entsteht, wenn man den Endpunkt eines Fadens beim Abwickeln vom Einheitskreis verfolgt. Die entstehende Kurve wird durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \qquad t > 0$$

beschrieben.



(a) (3 Punkte) Die Kurve hat beim erstmaligen Durchlaufen des dritten Quadranten einen Punkt mit vertikaler Tangente. Man bestimme die Koordinaten dieses Punkts.

(b) (4 Punkte) Man bestimme die Krümmung der Kurve $k(t)$ für ein allgemeines $t > 0$.

~~(c) (3 Punkte) Man bestimme die Bogenlänge der Kurve für t von 0 bis 2π.~~

a) vertikal: $\dot{x}(t) \overset{!}{=} 0$

$$\dot{x}(t) = -\sin t + (\sin t + t \cdot \cos t) = t \cdot \cos t$$

$$t \cdot \cos t \overset{!}{=} 0$$

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$t = \frac{3\pi}{2}$ ist im 3. Quadranten

$$\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3\pi}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3\pi/2 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Komplexe Zahlen (Kapitel A)

BP 23/01 SC

SC 11 (A) Was ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $\exp(\exp(i\pi/2))$?

(A) $\cos(1)$

(B) e

(C) 0

(D) $\sin(1)$

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \cdot \sin(\pi/2)$$

$$= 0 + i$$

$$e^{1 \cdot i} = \cos(1) + i \cdot \underline{\sin(1)}$$

BP 23/01 SC

SC 12 (A) Es sei die komplexe Zahl $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ gegeben. Dann gilt

(A) $z^3 = 3\sqrt{3}i$

(B) $z^3 = -3\sqrt{3}i$

(C) ~~$z^3 = -9i$~~

(D) ~~$z^3 = 9i$~~

$$r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{3/2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$z = \sqrt{3}\, e^{-i\pi/6}$$

$$z^3 = 3\sqrt{3}\, \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{6}\cdot 3}}$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2)$$

$$= 0 + i(\cdot -1) = -i$$

ETH zürich

BP 24/01 SC

SC 10 (A) Die komplexe Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 + 2i| \leq 5\}$$

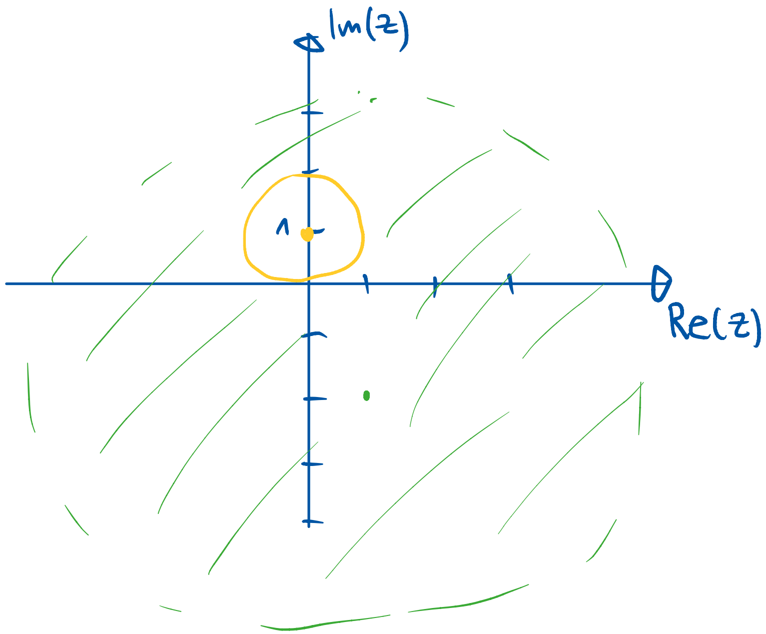
lässt sich geometrisch beschreiben als:

(A) Die Vereinigung von zwei Kreissektoren

(B) Eine gefüllte Kreisscheibe, aus der eine kleinere Kreisscheibe entfernt wurde

(C) Ein Abschnitt eines Kreisbogens

(D) Die Schnittmenge von zwei gefüllten Kreisscheiben



$$\underbrace{|(x+yi) - (0+yi)|}_{\text{Radius}} \geq 1$$

$$\underbrace{|(x+yi) - (1-2i)|}_{\text{Radius}} \leq 5$$

ZP 2019 MC

7. (Komplexe Zahlen) Welche der folgenden Aussagen gelten für alle komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$?

(a) $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(\bar{z}^2)$. ✓

(b) $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$. ✓

(c) $\mathrm{Re}(\exp(z)) = \exp(\mathrm{Re(z)})$. ✗

(d) $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \mathrm{Re}(z)$. ✗

a) $z^2 = (x+yi)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}} + 2xyi$; $\bar{z}^2 = (x-yi)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}} - 2xyi$

b) $|e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x| \cdot \underbrace{|\cos(y) + i \cdot \sin(y)|}_{= 1 = \sqrt{\cos^2(y) + \sin^2(y)}} = |e^x| = e^x \stackrel{!}{=} e^x$

c) $\mathrm{Re}(e^{x+iy}) = \mathrm{Re}(e^x \cdot e^{iy}) = e^x \cdot \cos(y) \neq e^x$

d) $\frac{x+yi-(x-yi)}{2i} = y \neq \mathrm{Re}(z)$

ETH zürich

BP 23/08 SC

SC 13 (A) Wir betrachten nicht-konstante Polynome P mit reellen Koeffizienten und Grad 6. Genau eine der folgenden Aussagen über derartige Polynome ist richtig – Welche?

(A) Wenn ein solches Polynom P genau vier verschiedene reelle Nullstellen hat, dann hat es keine nicht-reelle Nullstelle.

(B) Jedes solche Polynom P hat mindestens eine reelle Nullstelle.

(C) Jedes solche Polynom P hat mindestens eine nicht-reelle Nullstelle.

(D) Wenn ein solches Polynom P genau fünf verschiedene reelle Nullstellen hat, dann hat es keine nicht-reelle Nullstelle. Wenn 5 $\to$ 6 reele Nullstellen

A,B,C) Komplexe Nullstellen kommen immer Paarweise vor, also entweder 0, 2, 4 oder 6

ZP 2018 SC

21. (Komplexe Zahlen II) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $z^5 = ia$, wobei $a > 1$. Welche der folgenden komplexen Zahlen ist ebenfalls eine Lösung der Gleichung $z^5 = ia$?

    (a) $\overline{z_0}$.

    (b) $-\overline{z_0}$.

    (c) $z_0 \exp\left(i\frac{\pi}{5}\right)$.

    (d) $\sqrt[5]{a} z_0$.

erste Lösung: $z_0^5 = ia$

a) $\overline{z_0}^5 = \overline{z_0^5} = \overline{ia} = -ia$

b) $-\overline{z_0}^5 = -\overline{z_0^5} = -\overline{ia} = ia$

c) $z_0^5 \cdot \exp(i \cdot \pi) = z_0^5 \cdot (-1) = -ia$

d) $(\sqrt[5]{a}\, z_0)^5 = a \cdot z_0^5 = a \cdot (ia) = ia^2$

Integralrechnung (Kapitel III)

ZP 2019 SC

25. (Trägheitsmoment) Sei A die Fläche, die durch die x-Achse, die Gerade $x = 2$ und die Funktion $y = x^3$ berandet wird. Betrachten Sie den Körper, der aus Rotation der Fläche A um die y-Achse entsteht. Wie gross ist seiner Träghheitsmoment Θ_y bezüglich der y-Achse?

(a) $\Theta_y = \frac{2^8\pi}{7}$

(b) $\Theta_y = \frac{2^{12}\pi}{13}$

(c) $\Theta_y = \frac{2^6}{6}$

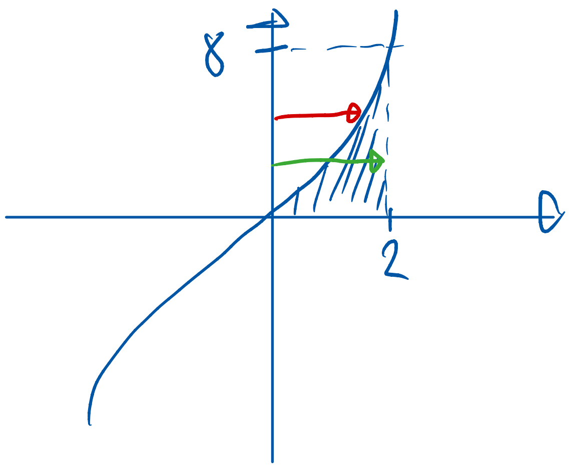
(d) $\Theta_y = \frac{3}{7}\pi 2^6$

$$\Theta_y = \frac{\pi}{2}\int_a^b f^4(y)\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^8 (2)^4 dy - \frac{\pi}{2}\int_0^8 (y^{1/3})^4\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\, 8\cdot 2^4 - \frac{\pi}{2}\,\frac{3}{7}\cdot\left[y^{7/3}\right]_0^8$$

$$= \pi\left(2^6 - \frac{3}{7}\cdot 2^6\right) = \frac{4}{7}\cdot\pi\cdot 2^6 = \frac{2^8\cdot\pi}{7}$$



BP 19/01 SC

17. (Stammfunktionen berechnen SC) Zur Berechnung der Stammfunktion von $\cos^2(x)$ werde im ersten Schritt partielle Integration verwendet:

$$\int \cos^2(x)\mathrm{d}x = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)\mathrm{d}x.$$

Was ist der nächste Schritt, um möglichst schnell zu einer Lösung zu gelangen?

(a) $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ partiell integrieren. Würde nochmals gleich aussehen

(b) $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ per Substitution integrieren. Gibt keine einfache Subst.

(c) Dieser erste Schritt bringt nichts, denn $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ ist nicht elementar integrierbar. falsch

(d) Trigonometrische Identität anwenden.

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\underbrace{\int \cos^2(x)\,dx}_{I} = \sin(x)\cdot\cos(x) + \int 1\,dx - \underbrace{\int \cos^2(x)\,dx}_{I}$$

$$2I = \sin(x)\cdot\cos(x) + x + C$$

$$I = \frac{\sin(x)\cdot\cos(x) + x + C}{2}$$

BP 20/08 SC

13. (III) Was ist die Ableitung der folgenden Funktion?

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

(a) $F'(x) = e^{-x^4} - e^{-x^2}$

(b) $F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$

(c) $F'(x) = -2xe^{-x^4} + e^{-x^2}$

(d) Dieser Integrand hat keine elementare Stammfunktion, darum kann die Ableitung auch nicht elementar beschrieben werden.

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x)$$

$b' = 2x$

$a' = 1$

$$e^{-(x^2)^2}\cdot 2x - e^{-(x)^2}\cdot 1$$

$$2x\cdot e^{-x^4} - e^{-x^2}$$

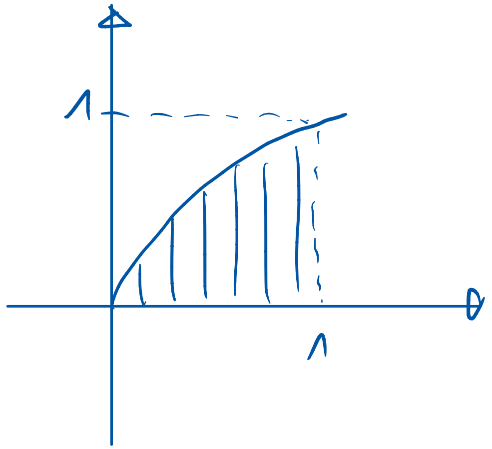
BP 23/08 SC

SC 16 (III) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Schwerpunkts der Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $x \in [0, 1]$ eingeschlossen ist. Hinweis: Diese Fläche hat den Flächeninhalt $2/3$.

~~(A) 5/3~~ (C) 2/3

(B) 3/5 (D) 3/4

$$x_s = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot H(x) \, dx$$

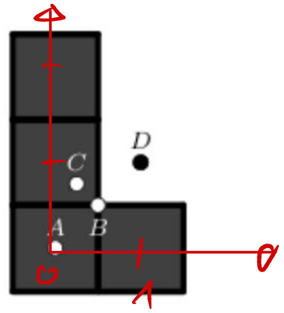


$$x_s = \frac{1}{2/3} \int_0^1 \underbrace{x \cdot x^{1/2}}_{x^{3/2}} \, dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

BP 18/08 SC

19. (Schwerpunkt SC) Gegeben sei der folgende Tetrisstein (*outverse J*):



$$x_s = \frac{1}{A_{tot}} \cdot \sum x_i \cdot A_i$$

$$A_{tot} = 4$$

$$x_s = \frac{1}{4} \cdot (0 \cdot 3 + 1 \cdot 1) = \frac{1}{4}$$

$$y_s = \frac{1}{4} (0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = \frac{3}{4}$$

An welcher Position liegt der Schwerpunkt?

(a) Position A

(b) Position B.

(c) Position C.

(d) Position D.

BP 18/08 MC

alles für $\frac{1}{x^p}$ $p>1$ konvergiert:

5. (Uneigentliche Integrale MC) Es sei $\alpha \in [0, +\infty)$ ein Parameter und es sei

$$I_\alpha := \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^{2\alpha}}\, dx.$$

$\alpha > \frac{1}{2}$ konvergiert

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Falls $\alpha = \frac{3}{2}$, dann konvergiert das uneigentliche Integral I_α. ✓

(b) Die Funktion $f : \alpha \mapsto I_\alpha$ ist auf ihrem Definitionsbereich monoton steigend. ✗ fallend

(c) Falls $\alpha = \frac{2}{3}$, dann konvergiert das uneigentliche Integral I_α. ✓

(d) Falls $\alpha = \frac{1}{2}$, dann konvergiert das uneigentliche Integral I_α. ✗

a) $\frac{1}{x^{3/2} + x^3} \leq \frac{1}{x^3}$ ⇒ konvergiert

BP 24/01

SC 13 (III) In welches Integral geht das Integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx$ durch die Substitution $u = \cos x$ über?

(A) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{u^2-1}\, du$

(B) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$

(C) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$

(D) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2-1}\, du$

$\cos(\pi/2) = 0$

$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{du}{dx} = -\sin(x)$

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{0} \frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{du}{-\sin(x)} = \int_{1/\sqrt{2}}^{0} -\frac{1}{1-u^2}\, du = \int_{1/\sqrt{2}}^{0} \frac{1}{u^2-1}\, du$$

$\sin^2 = 1 - \cos^2 = 1 - u^2$

BP 24/01 SC

SC 14 (III) Was ist die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\dfrac{3x+1}{x^2(x+1)-(x+1)}$?

(A) $\cancel{-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}}+\dfrac{1}{x+1}$

(B) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-1}$

(C) $\cancel{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}}+\dfrac{1}{x+1}$

(D) $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-1}$

$(x+1)(x^2-1)$

$(x+1)(x+1)(x-1)$

$$\frac{3x+1}{\ldots} = \frac{A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2}{\ldots}$$

$B=C=1$

$$3x+1 = A(x^2-1)+(x-1)+(x^2+2x+1)$$

$$3x+1 = Ax^2-A+x^2+3x$$

$A=-1$

BP 23/01 Offen

A2 Der Hyperboloidstumpf H sei gegeben durch die Rotation des Hyperbelstücks

$$2x^2 - (z-3)^2 = -1, \quad z \in [0,2]\,, x \geq 0$$

um die z-Achse. Die Dichte sei homogen $\rho = 1$. Man bestimme den Volumeninhalt und den Schwerpunkt von H.

$$V = \pi \int f(z)^2 \, dz \qquad \text{mit} \quad f(z)^2 = x^2 = \frac{-1+(z-3)^2}{2}$$

$$V = \pi \frac{1}{2} \int_0^2 -1 + z^2 - 6z + 9 \quad dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{z^3}{3} - 3z^2 + 8z\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{8}{3} - 12 + 16\right]$$

$$= \frac{10\pi}{3}$$

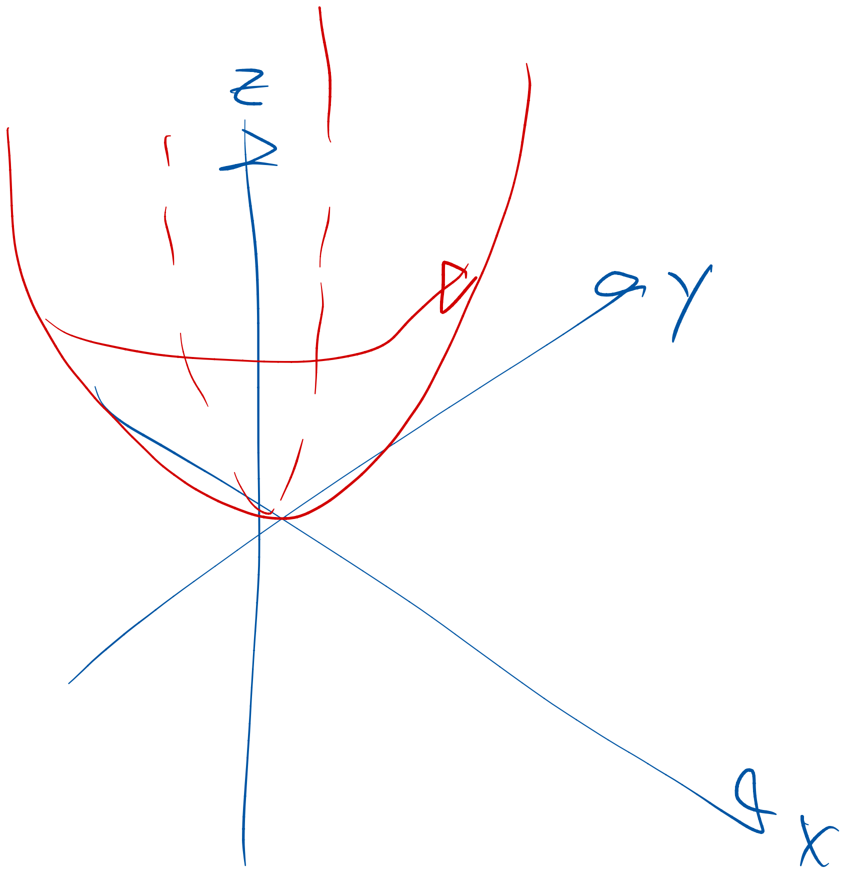
$x_s = y_s = 0$

$$z_s = \frac{1}{V}\pi \int_0^2 z \cdot f(z)^2 \, dz$$

$$= \frac{3}{10 \cdot 2} \int_0^2 z \cdot \left(-1 + (z-3)^2\right) dz$$

$\vdots$

$$= 3/5$$



$(0, 0, 3/5)$

Potenzreihen (Kapitel VIII)

BP 23/01 SC

SC 19 (VIII) Welches der folgenden Intervalle ist das grösste, in dem die Potenzreihe konvergiert?

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$$

(A) $\cancel{(-2,2)}$
(B) $\cancel{(-\sqrt{2},\sqrt{2})}$
(C) $(-\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+1)$
(D) $(0,2)$

$x_0 = 1$

$$\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)^n$$

$|z| < r_k$

$\frac{1}{2} \to r_k$

$|(x)^2| < r_k$

$|x| < \sqrt{r_k}$

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$

$|x-1| < 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}$

$|q| = \frac{(x-1)^2}{2} < 1$

$(x-1)^2 < 2$

$|x-1| < \sqrt{2}$

BP 21/01 SC

25. (VIII) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(3x - \frac{1}{2}\right)^k .$$

(a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$

(b) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(c) $\mathbb{R}$

(d) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^k} \cdot 3^k}_{a_k} \underbrace{\left(x - \frac{1}{6}\right)}_{x_0 = +\frac{1}{6}}^k$$

Radius: $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{(3/2)^k}{(3/2)^{k+1}} \right| = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$

Grenzen: $\frac{1}{6} \pm \frac{2}{3} = \frac{5}{6}, -\frac{1}{2}$