Analysis I – PVK Skript

Leonard Kopp
ETH Zürich

Januar 2026

Vorwort

Dieses Skript wurde im Rahmen meines Prüfungsvorbereitungskurses (PVK) für Analysis I erstellt. Ziel dieses Skripts ist es, die zentralen Inhalte der Vorlesung kompakt, übersichtlich und möglichst verständlich zusammenzufassen. Das Skript wurde an das Vorlesungsskript (von Prof. Stammbach) angelehnt, mit den dazugehöhrigen Kapitelnummern, allerdings in einer stark komprimierten Version und mit eigenen Beispielen. Wichtige Formeln sind in **blauen Boxen** geschrieben und Beispielaufgaben in **roten Boxen**.

Die im Skript enthaltenen Beispiele und Aufgaben dienen in erster Linie dem Verständnis und der Anwendung der Konzepte. Zur Prüfungsvorbereitung wird dringend empfohlen, zusätzlich alte Prüfungen und offizielle Übungsmaterialien zu bearbeiten.

Trotz sorgfältiger Erstellung können sich Fehler oder Ungenauigkeiten eingeschlichen haben. Dieses Skript stellt kein offizielles Lehrmaterial der ETH Zürich dar, und es wird keine Verantwortung für mögliche Fehler übernommen. Bei gefundenen Fehlern oder Verbesserungsvorschlägen schreibe mir gerne eine Email an: `kopple@student.ethz.ch`.

Die jeweils aktuellste Version dieses Skripts und weiteres TA-Material vom Semester findest du auf meiner Website: koppleo.github.io/

Viel Erfolg!

`Version:`

`Version 1: Januar 2026`

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Funktionen (I)

1.1 Folgen & Reihen

1.1.1 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf die reelen Zahlen $\mathbb{R}$. Dabei bezeichnet man a_n das n-te Glied der Folge.

Eine Folge kann *explizit* oder *rekursiv* (Folgeglied hängt von einem oder mehreren vorherigen Gliedern ab) definiert werden:

Beispiel: Folgen

Explizite Definition:

$$a_n = 2n + 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Rekursive Definition:

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Beide führen zu denselben Gliedern:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 9, \ldots$$

1.1.2 Reihen

Eine Reihe ist die Summe der Glieder einer Folge. Die n-te Partialsumme s_n einer Zahlenfolge ist die Summe der Glieder von a_1 bis a_n:

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Beispiel: Reihe

Nehmen wir die Folge

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Die Reihe ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Die Partialsummen sind:

$$s_1 = \tfrac{1}{2}, \quad s_2 = \tfrac{3}{4}, \quad s_3 = \tfrac{7}{8}, \quad \dots$$

Monotonie

Monoton wachsend	$a_{n+1} \geq a_n$
Strikt monoton wachsend	$a_{n+1} > a_n$
Monoton fallend	$a_{n+1} \leq a_n$
Strikt monoton fallend	$a_{n+1} < a_n$

Beschränktheit

Eine Folge ist nach *oben* beschränkt, falls alle Glieder a_n (für alle n) unter einem bestimmten Wert liegen.

Eine Folge ist nach *unten* beschränkt, falls alle Glieder a_n (für alle n) über einem bestimmten Wert liegen.

$\Rightarrow$ Die beschränkte Folge divergiert *nicht* nach $\pm\infty$.

Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existiert, so konvergiert die Folge gegen den Grenzwert L. Man nennt die Folge dann **Konvergent**. Wenn die Folge keinen Grenzwert besitzt, heisst sie **Divergent**.

Ist der Grenzwert $L = 0$, so heißt die Folge **Nullfolge**.

Zusammenhänge

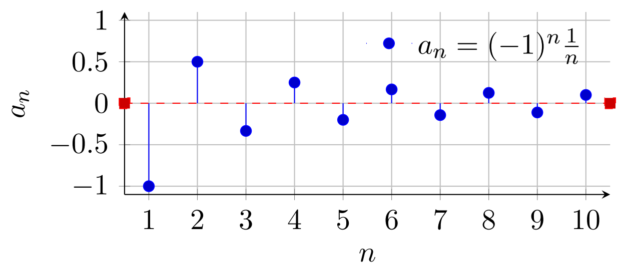
- Ist eine Folge *konvergent*, so ist sie immer auch *beschränkt*.

  Konvergent $\Rightarrow$ Beschränkt

- Ist eine Folge *beschränkt* und *monoton steigend/fallend*, so ist sie *konvergent*.

  Beschränkt & monoton steigend/fallend $\Rightarrow$ Konvergent

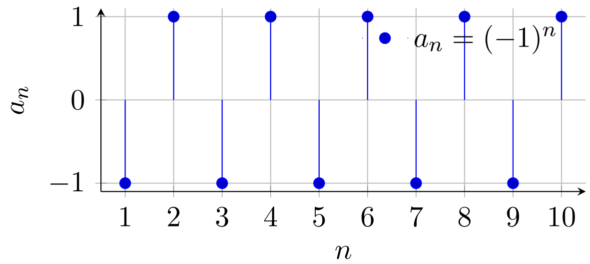
- Eine *konvergente* Folge ist *nicht* unbedingt *monoton steigend/fallend*.



- Eine nicht *beschränkte* Folge ist immer *divergent*, d.h. ihr Grenzwert ist $\pm\infty$.

  Nicht beschränkt $\Rightarrow$ **Divergent**

- Eine *divergente* Folge ist nicht unbedingt *nicht beschränkt*.



1.1.3 Grenzwerte von Folgen

Wenn die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ existieren, so gelten folgende Rechenregeln:

Summe	$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$
Konstanter Faktor	$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot A$
Produkt	$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$
Quotient ($B \neq 0$)	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$

Trick Brüche

Immer durch die **grösste Potenz des Nenners** teilen!

Beispiel: Bruch kürzen 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+5}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n^2}{n^3}+\frac{5}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{n}+\frac{5}{n^3}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

Beispiel: Bruch kürzen 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3+5}{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n^3}{n^3}+\frac{5}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7+\frac{5}{n^3}}{2} = \frac{7+0}{2} = \frac{7}{2}$$

Trick Wurzeln

Wurzel-Ausdrücke so **erweitern**, dass man die dritte binomische Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ anwenden kann.

Beispiel: Wurzeln erweitern

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1.1.4 Arithmetische Folgen & Reihen

Arithmetische Folgen:

Die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder ist konstant d.

Explizit	$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$
Rekursiv	$a_{n+1} = a_n + d$

Arithmetische Reihen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\big(a_1 + (k-1)\cdot d\big) = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

Beispiel: Umformung arithmetische Reihe

$$\sum_{k=2}^{5} 3k \;= ?$$

Schwierigkeit: Wie muss man die Summe umformen, um die Formel $s_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ anwenden zu können?

$$d = 3, \quad a_1 = 6, \quad n = 4, \quad a_4 = 15$$

$$\sum_{k=2}^{5} 3k = \sum_{k=1}^{\overbrace{4}^{n}}\Big(\underbrace{6}_{a_1} + (k-1)\cdot\underbrace{3}_{d}\Big) = \frac{6+15}{2}\cdot 4 = 42$$

Spezialfall: Arithmetische Reihe der natürlichen Zahlen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.1.5 Geometrische Folgen & Reihen

Der Multiplikationsfaktor zwischen zwei Gliedern ist konstant q.

Geometrische Folgen:

Explizit	$a_n = a_0 \cdot q^n$ bzw. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Rekursiv	$a_{n+1} = a_n \cdot q$

Geometrische Reihen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Falls $|q| < 1$, dann konvergiert auch die unendliche Reihe (weil $q^n \to 0$):

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

Beispiel: Unendlich geometrische Reihe

$$a_n = 24 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 24,\ a_2 = 12,\ a_3 = 6,\ a_4 = 3,\ \ldots,\ q = \frac{1}{2}$$

$$s_4 = 24 + 12 + 6 + 3 = 45$$

$$s_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 24 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 48$$

Weitere nützliche Summen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

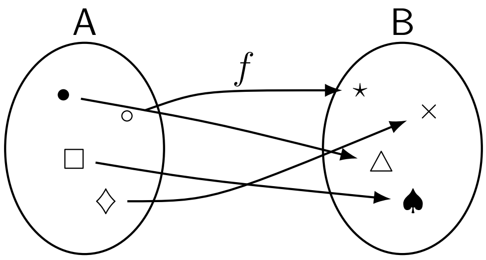
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

1.2 Funktionen

1.2.1 Definition

Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen A und B. Die Funktion nimmt ein Element aus der Menge A und weist diesem *genau ein* Element der Menge B zu.

$$f : A \to B, \qquad a \mapsto f(a)$$



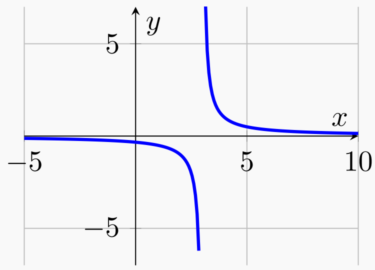
A: Definitionsbereich D
Menge aller *Argumente*, die in die Funktion eingesetzt werden dürfen.

B: Wertebereich W
Menge aller *Werte*, welche die Funktion annehmen kann.

Beispiel: D und W einer Funktion 1

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

Definitionsbereich: $D \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, Wertebereich: $W \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

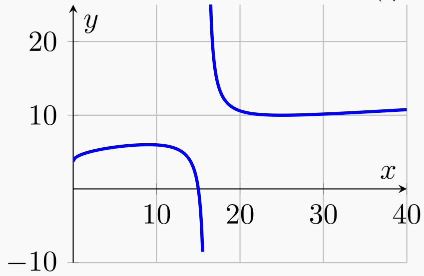


Beispiel: D und W einer Funktion 2

$$g(x) = \frac{x-15}{\sqrt{x}-4}$$

Definitionsbereich: $D \in \mathbb{R}^+ \setminus \{16\}$, Wertebereich: $W \in \mathbb{R} \setminus (6, 10)$

Hinweis: $\sqrt{x}$ erfordert $x \geq 0$ & der Nenner darf nicht 0 sein ($\sqrt{x} \neq 4$)



1.2.2 Verschiedene Funktionen

Potenzfunktionen

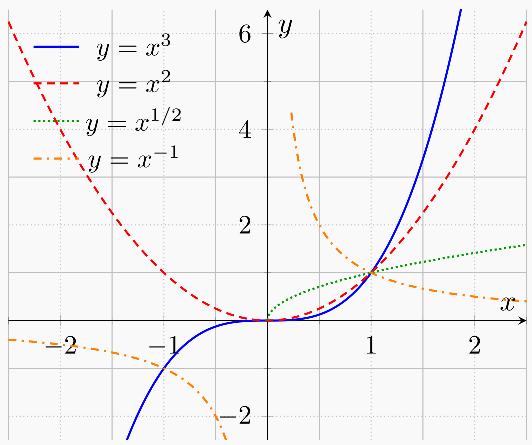
$$f(x) = a \cdot x^n, \qquad n, a \in \mathbb{R}$$

Rechenregeln:

$a, b \in \mathbb{R}^+$, $m, n, k \in \mathbb{R}$

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k]{a^{k \cdot m}}$
- $\sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Beispiel: Potenzfunktionen



Polynomfunktionen

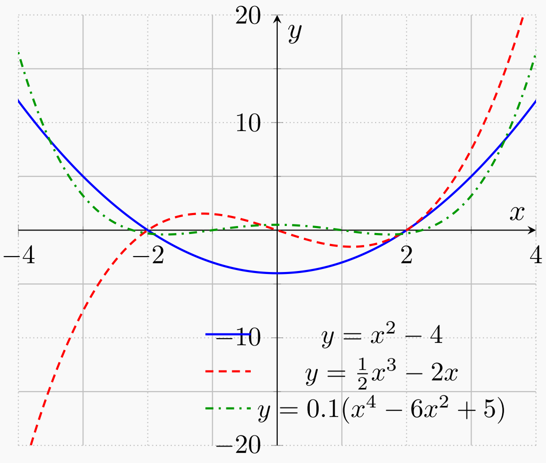
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad n \geq 0$$

a_i: Koeffizient $\quad n$: Grad des Polynoms

$$\Rightarrow f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) \cdots (x - \lambda_n)$$

λ_n: Nullstellen des Polynoms $f(x)$

Beispiel: Polynomfunktionen

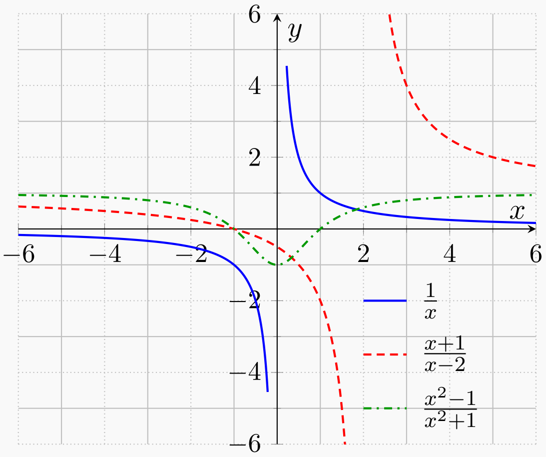


Rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind und $q(x) \neq 0$.

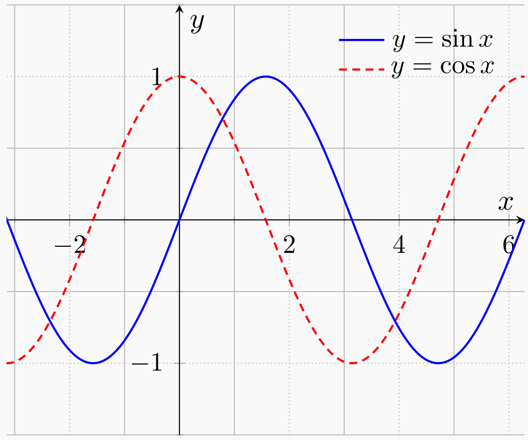
Beispiel: Rationale Funktionen

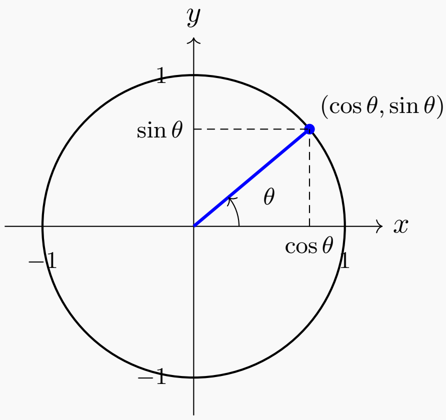


Trigonometrische Funktionen

$$\sin(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \qquad \cos(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

Beispiel: Sinus & Cosinus





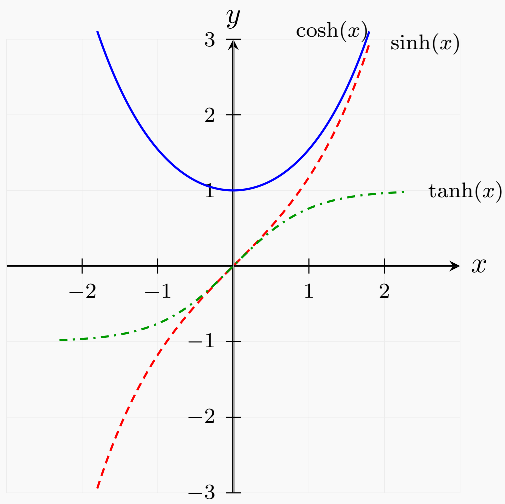
Wichtige Identitäten:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$

Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Beispiel: hyperbolische Funktionen



Wichtige Identitäten:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$
- $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
- $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
- $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
- $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
- $\cosh(-x) = \cosh(x)$

Exponential & Logarithmusfunktionen

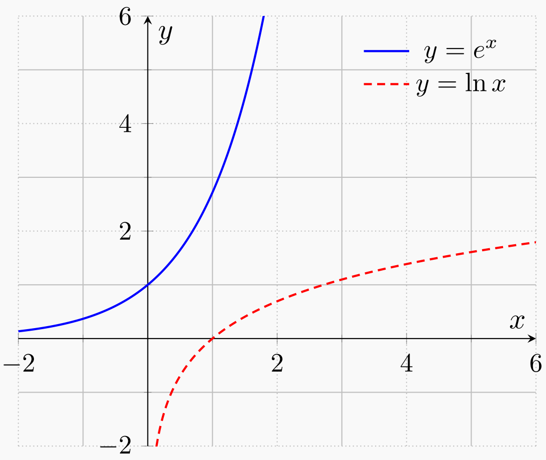
$$f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$$

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Rechenregeln:

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$

Beispiel: Exponential & Logarithmusfunktionen



1.2.3 Eigenschaften von Funktionen

Gerade/ungerade

Gerade Funktion: $\boxed{f(x) = f(-x)}$

Ungerade Funktion: $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

Beispiel: Vergleich gerade/ungerade Funktionen

$$f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$$
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Monotonie

(Strikt) monoton wachsend: $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ (strikt: $f(x_1) < f(x_2)$)

(Strikt) monoton fallend: $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ (strikt: $f(x_1) > f(x_2)$)

1.3 Grenzwerte von Funktionen

$\Rightarrow$ Gleiche Rechenregeln wie bei den Folgen!

1.3.1 Wichtige Grenzwerte

Basics:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Trigonometrische Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$$

Unterschiedlich schnell wachsende Funktionen:

Für $a,m\in\mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{mx}}{x^a}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^{mx}}=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^a}=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{\ln(x)}=\infty$$

Merke: e^x wächst schneller als jede Potenz; $\ln(x)$ wächst langsamer als jede Potenz.

Eulersche Zahl:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{x}\right)^x=\tfrac{1}{e}$$

1.3.2 Grenzwerte berechnen

1. Immer versuchen, einfach Wert einzusetzen.
2. Bekommt man einen der folgenden Ausdrücke: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ dann verwendet man die Regel von L'Hospital (mehr dazu Unterabschnitt 2.1.5).
3. Wenn L'Hospital nicht erlaubt ist, gibt es Alternativen:
   - Bei **Brüchen**: durch größte Potenz teilen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+5}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}}=\frac{7+0}{2}=\frac{7}{2}$$

   - Bei **Brüchen**: Ausklammern und Kürzen

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

   - Bei **Wurzeln**: Erweitern (3. binomische Formel)

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x+2)-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{7+2}+3}=\frac{1}{6}$$

1.3.3 Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion f heißt stetig im Punkt c, wenn $f(c)$ definiert ist und

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \;=\; f(c) \;=\; \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Beispiel: Stetig

Gegeben sei $f(x) = x^2$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1, \qquad f(1) = 1^2 = 1$$

Da

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

ist $f(x) = x^2$ **stetig** im Punkt $x = 1$.

Beispiel: Nicht stetig (Sprung)

Gegeben sei

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = +1, \qquad g(0) = 1$$

Da

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g(x)$$

existiert $\lim_{x \to 0} g(x)$ nicht. $\Rightarrow$ g ist **nicht stetig** im Punkt $x = 0$.

1.4 Koordinatentransformation

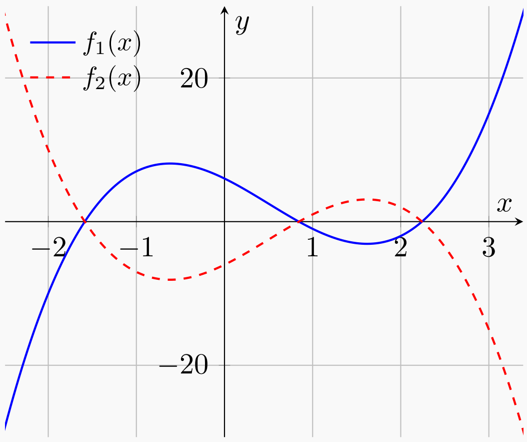
Spiegelung an der x-Achse

Spiegelung der Funktion $f_1(x)$ an der x-Achse:

$$\boxed{f_2(x) = -\, f_1(x)}$$

Beispiel: Spiegelung an x-Achse

$$f_2(x) = -\, f_1(x)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = -2x^3 + 3x^2 + 6x - 6$$



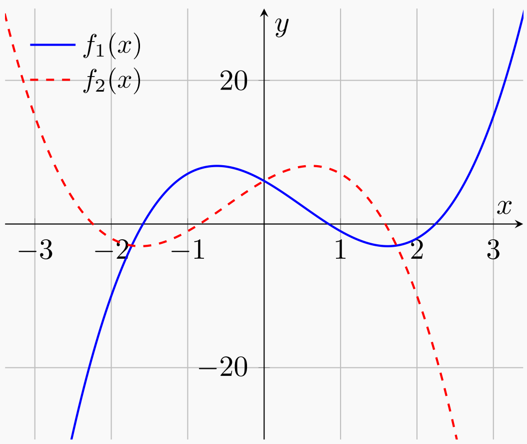
Spiegelung an der y-Achse

Spiegelung der Funktion $f_1(x)$ an der y-Achse:

$$\boxed{f_2(x) = f_1(-x)}$$

Beispiel: Spiegelung an y-Achse

$$f_2(x) = f_1(-x)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2(-x)^3 - 3(-x)^2 - 6(-x) + 6$$
$$f_2(x) = -2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$



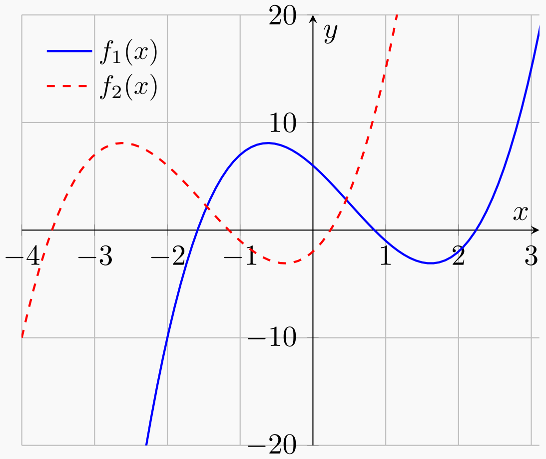
Verschiebung in x-Richtung

Gegeben: $f_1(x)$ Verschiebung der Funktion $f_1(x)$ um a Einheiten in Richtung der negativen x-Achse:

$$\boxed{f_2(x) = f_1(x + a)}$$

Beispiel: Verschiebung in x-Richtung

$$f_2(x) = f_1(x+2)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 - 6(x+2) + 6$$



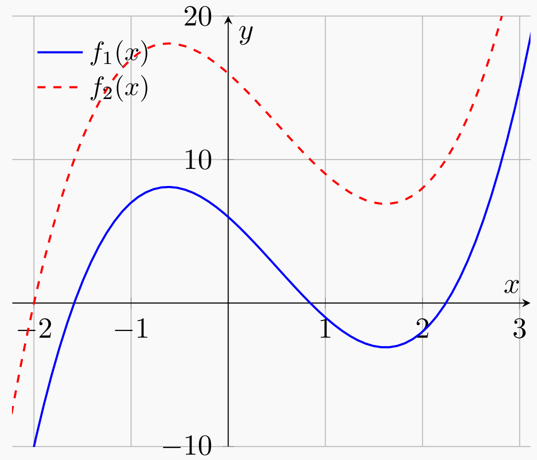
Verschiebung in y-Richtung

Verschiebung der Funktion $f_1(x)$ um b Einheiten in Richtung der positiven y-Achse:

$$\boxed{f_2(x) = f_1(x) + b}$$

Beispiel: Verschiebung in y-Richtung

$$f_2(x) = f_1(x) + 10$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 16$$



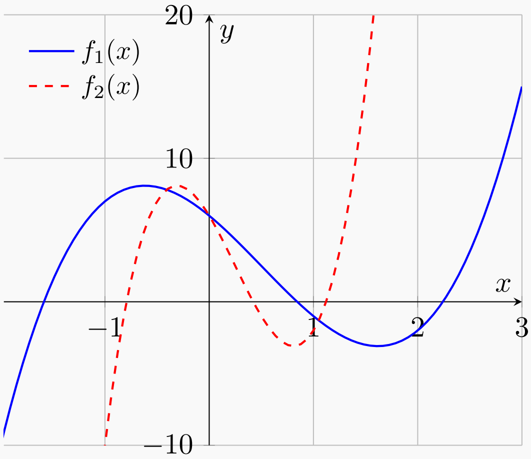
Stauchung in x-Richtung

Stauchung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor c in Richtung der x-Achse ($c > 0$):

$$\boxed{f_2(x) = f_1(cx)}$$

Beispiel: Stauchung in x-Richtung

$$f_2(x) = f_1(2x)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2(2x)^3 - 3(2x)^2 - 6(2x) + 6$$



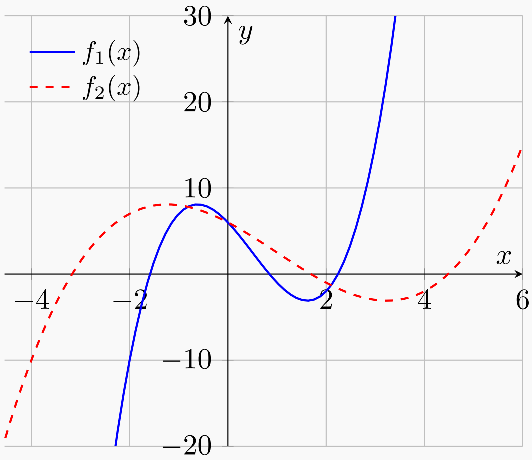
Dehnung in x-Richtung

Dehnung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor k in Richtung der x-Achse $(0 < k < 1)$:

$$\boxed{f_2(x) = f_1(kx)}$$

Beispiel: Dehnung in x-Richtung

$$f_2(x) = f_1\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2\left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 - 3\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 - 6\left(\tfrac{1}{2}x\right) + 6$$



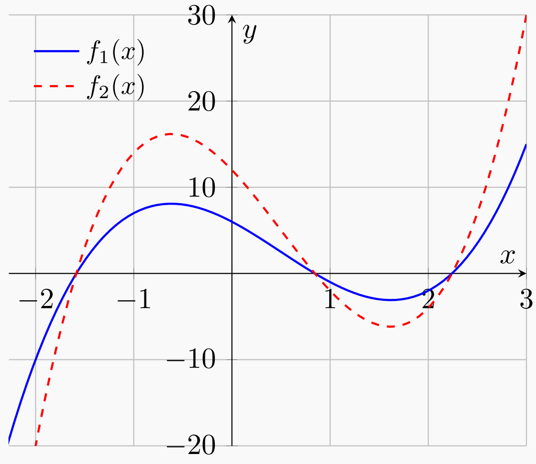
Streckung in y-Richtung

Streckung der Funktion $f_1(x)$ um den Faktor d in Richtung der y-Achse $(d > 0)$:

$$\boxed{f_2(x) = d \cdot f_1(x)}$$

Beispiel: Streckung in y-Richtung

$$f_2(x) = 2 \cdot f_1(x)$$
$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = 2 \cdot (2x^3 - 3x^2 - 6x + 6)$$
$$f_2(x) = 4x^3 - 6x^2 - 12x + 12$$



Kehrwertfunktion

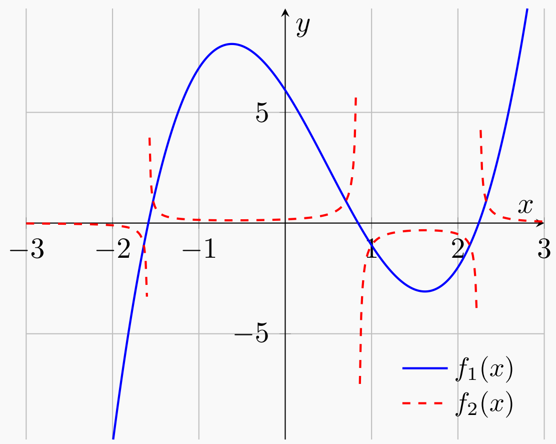
Die Nullstellen der Funktion $f_1(x)$ werden zu Polen der Funktion $f_2(x)$.

Die Transformation lautet:

$$\boxed{f_2(x) = \frac{1}{f_1(x)}}$$

Beispiel: Kehrwertfunktion

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2x^3 - 3x^2 - 6x + 6}$$

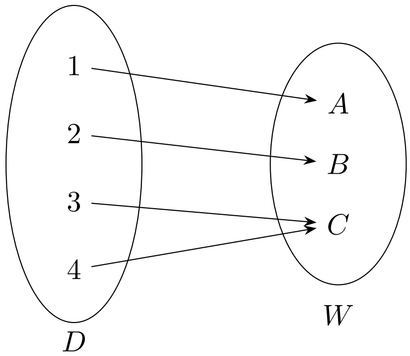


1.5 Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

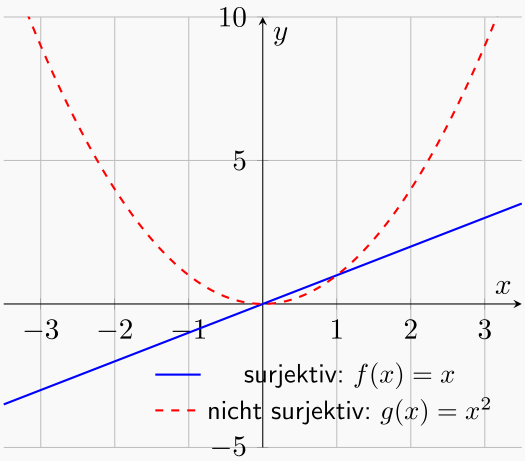
1.5.1 Surjektive Funktionen

Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *mindestens* einmal annimmt.
mathematisch:

$$\forall\, y \in W\ \exists x \in D:\ f(x) = y$$



Beispiel: Surjektivität



1.5.2 Injektive Funktionen

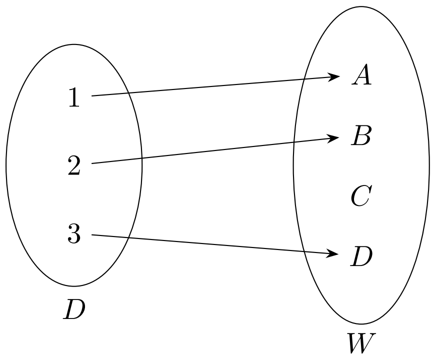
Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *höchstens* einmal annimmt.

$$\forall x_1, x_2 \in D: \quad x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

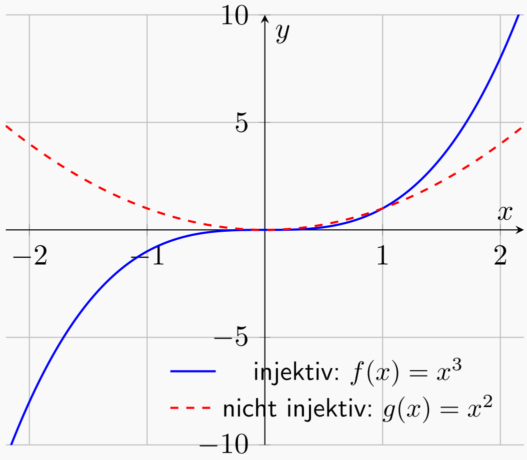
äquivalent (Kontraposition):

$$\forall x_1, x_2 \in D: \quad f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

Horizontaler-Linien-Test: Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen höchstens einmal.



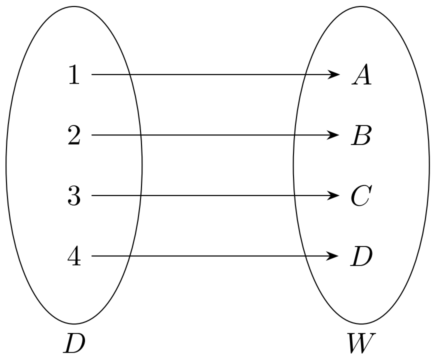
Beispiel: Injektivität



1.5.3 Bijektive Funktionen

Funktion, die jedes Element des Wertebereichs *genau* einmal annimmt.

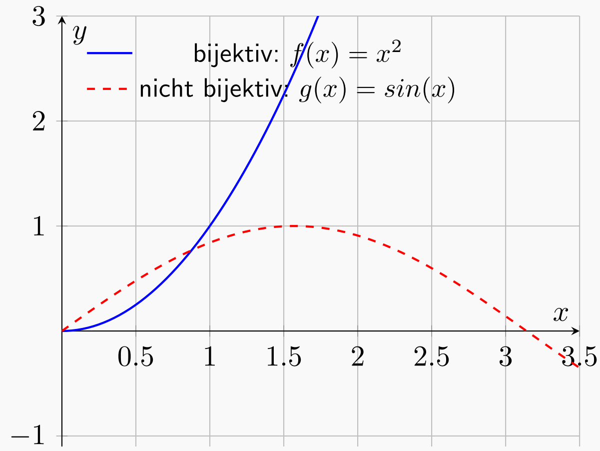
→ bijektiv $\iff$ surjektiv & injektiv
→ Bijektive Funktionen sind invertierbar.
→ Durch Einschränken des D und/oder W kann jede Funktion bijektiv gemacht werden.



Beispiel: Bijektivität

Bijektiv:
$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = x^2$
$\Rightarrow$ Inverse: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Nicht bijektiv:
$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ g(x) = sin(x)$
$sin(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv auf $\mathbb{R}_0^+$



1.5.4 Umkehrfunktionen

Eine Abbildung $f\colon D \to W$ besitzt eine *Umkehrfunktion* $f^{-1}\colon W \to D$ genau dann, wenn f **bijektiv** ist (also injektiv und surjektiv). Dann gelten

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in D), \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad (\forall y \in W)$$

Geometrisch: Der Graph von f^{-1} ist die Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Vorgehen zum Bilden von f^{-1}:

1. **Bijektivität sicherstellen:** ggf. Definitionsbereich einschränken und Zielmenge passend wählen
2. **Gleichung aufstellen:** $y = f(x)$
3. **Nach x auflösen:** erhalte $x = g(y)$
4. **Variablen tauschen:** $y = g(x)$

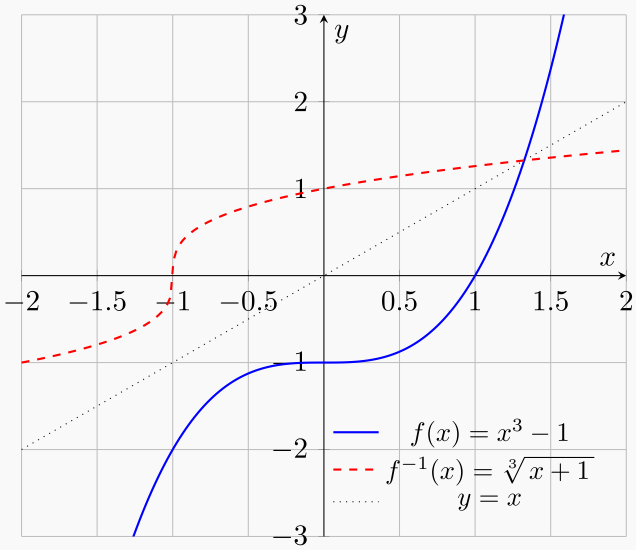
Beispiel: Ganzrationale Funktion

Gegeben: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 1.$
Bijektiv? Surjektiv? Ja. Injektiv? Ja $\Rightarrow$ Also auch bijektiv.
Umkehrfunktion bilden:

$$y = x^3 - 1 \iff y + 1 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y+1}$$

Variablen tauschen:

$$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x+1}$$



Beispiel: Sinus

Problem: $f(x) = \sin x$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* injektiv (periodisch). **Lösung:** Beschränke den Definitionsbereich auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann ist

$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin x$$

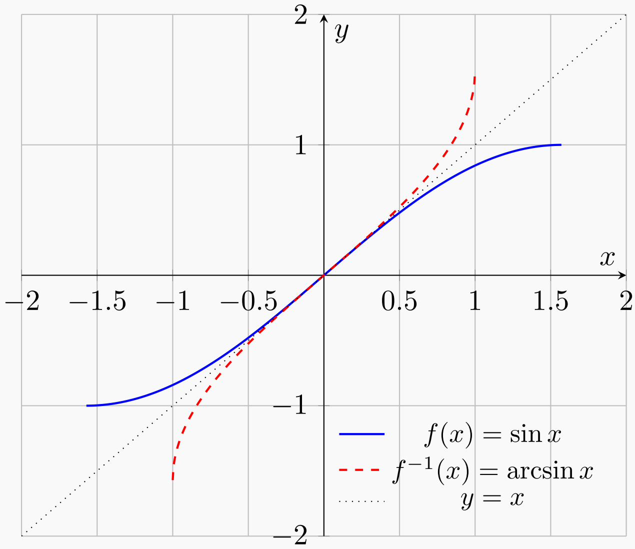
bijektiv.
Umkehrfunktion bilden:

$$y = \sin x \iff x = \arcsin(y) \quad \text{(auf } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}])$$

Variablen tauschen:

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x) \quad \text{mit} \quad f^{-1}\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Notationen: $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ (nicht $1/\sin x$)



1.6 Asymptoten

Eine Funktion $g(x)$ ist Asymptote von $f(x)$, wenn gilt: $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0}$

1.6.1 Tipps zur Berechnung

1) Definitionslücken / Pole (vertikale Asymptoten): Treten Nullen im Nenner auf, so liegen dort i. d. R. *vertikale Asymptoten*.

Beispiel: vertikale Asymptote

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
Vertikal: $x = 1$ und Horizontal: $g(x) = 0$ (denn $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$).

2) Brüche mit Nenner $\geq$ Zähler: Es genügt den Limes zu bilden:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_n x^n + \dots} = \frac{a_n}{b_n} \quad (b_n \neq 0)$$

Beispiel: Nenner $\geq$ Zähler

$f(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x^2-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x^2+3}{2x^2-1} - g(x) \right) = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{4}{2} = 2$$

3) Brüche mit höhergradigem Zähler: Ist Zähler $>$ Nenner, zuerst Polynomdivision:

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{p(x)}$$

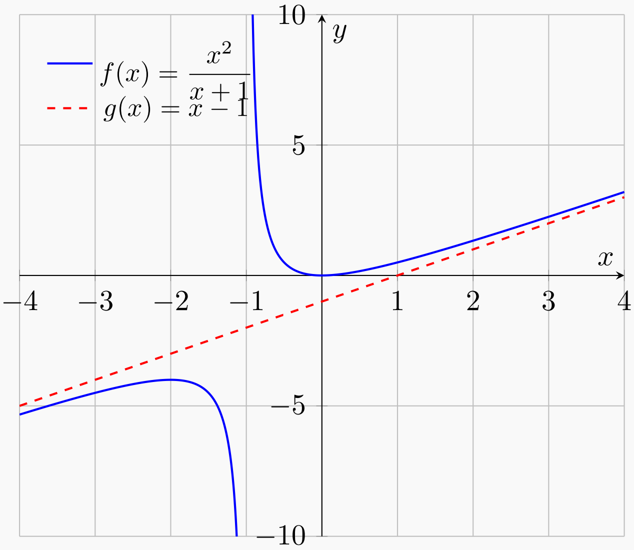
Dann ist $g(x) = Q(x)$ die Asymptote (schräg, falls $\deg(Q) = 1$; parabolisch, falls $\deg(Q) = 2$; usw.).

Beispiel: Nenner $<$ Zähler

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Polynomdivision: $x^2 : (x+1) \; = \; x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(x - 1 + \tfrac{1}{x+1} - g(x) \right) = 0 \implies g(x) = x - 1$$



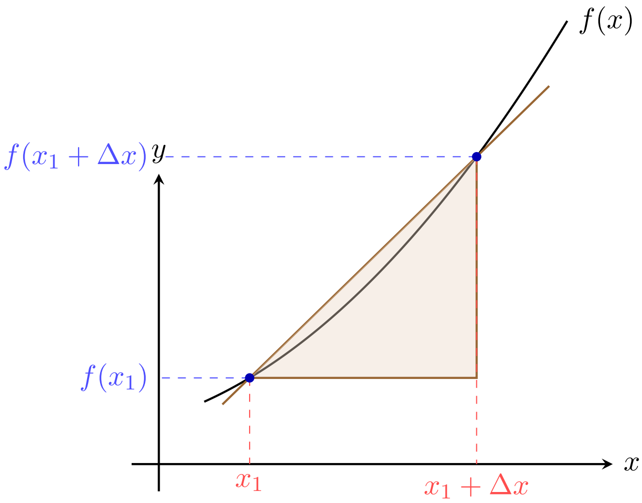
Kapitel 2

Differentialrechnung (II)

2.1 Differentialrechnung

Differenzenquotient: $$\boxed{\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Differentialquotient: $$\boxed{\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$



- Existiert der Differentialquotient, so ist $f(x)$ in x_0 differenzierbar.
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
- Nicht jede stetige Funktion ist überall differenzierbar. Bsp.: $f(x) = |x|$ ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

2.1.1 Ableitungsregeln

Potenzgesetz:

$$f(x) = ax^m \Rightarrow f'(x) = a \cdot mx^{m-1}$$

Summengesetz:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Produktregel:

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

Kettenregel:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Beispiel: Kettenregel

$$f(x) = (3x^2+5)^3, \quad g(\cdot) = (\cdot)^3, \quad h(x) = 3x^2+5$$

$$g'(\cdot) = 3(\cdot)^2, \qquad h'(x) = 6x$$

$$f'(x) = 18x(3x^2+5)^2$$

Inverse

Gesetz für Inverse:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Beispiel: Inverse

$$f(x) = x^2+2, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}, \quad f'(x) = 2x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Ableitungen trigonometrischer Funktionen

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(\sin^2 x)' = \sin(2x) \qquad (\cos^2 x)' = -\sin(2x)$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\sinh x)' = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \sinh x$$

Ableitungen weiterer Funktionen

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln(a)$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln(a)}$$
$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad (e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x)$$
$$(a^{g(x)})' = a^{g(x)} \ln(a) g'(x) \qquad (\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

2.1.2 Linearisieren / Tangente

Linearisierung in x_0:

$$\boxed{t(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$$

Beispiel: Linearisierung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \qquad x_0 = 0$$

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}, \quad f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$t(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

2.1.3 Fehlerrechnung

Absoluter Fehler: $\boxed{df = f'(x)\,dx}$

Relativer Fehler: $\boxed{\frac{df}{f} = \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}}$

Beispiel: Fehlerrechnung

Berechne den relativen Fehler des Zylindervolumens $V = \pi r^2$ bei 1% Messfehler von r, Höhe $h = 1$:

$$V'(r) = 2\pi r$$

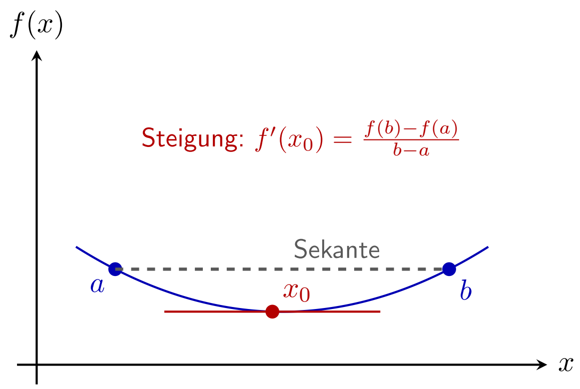
$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi r\, dr}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = 1\% \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = 2\%$$

2.1.4 Mittelwertsatz

Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, so existiert mindestens ein x_0

mit $\boxed{f'(x_0)(b - a) = f(b) - f(a)}$ $\quad (a < x_0 < b)$



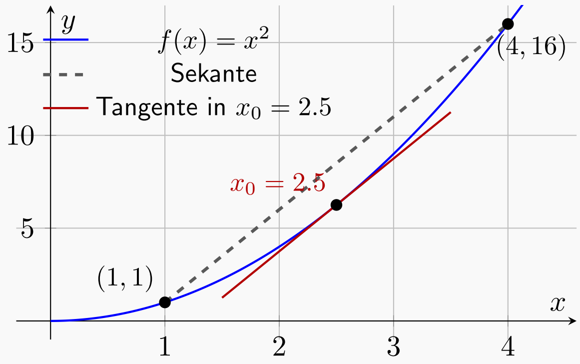
Beispiel: Mittelwertsatz

Gegeben: $f(x) = x^2$ auf $[1, 4]$.

$$f'(x) = 2x, \qquad \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 - 1}{3} = 5$$

$$2x_0 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2.5$$

Interpretation: Die Steigung der Tangente im Punkt $x_0 = 2.5$ stimmt mit der Steigung der Sekante über $[1, 4]$ überein.



2.1.5 Bernoulli–Hôpital

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Voraussetzungen:

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ liefert die Form $0/0$ oder $\pm\infty / \pm\infty$
- f und g sind in einer Umgebung von a differenzierbar

Beispiel: B.H. 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3}{\cos x} = 3$$

Beispiel: B.H. 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Nochmals Bernoulli–Hôpital:

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

2.2 Kurvendiskussion

2.2.1 Extremalaufgaben

Vorgehen:

- Randwerte prüfen
- Stellen mit $f'(x) = 0$
- Stellen, an denen $f'(x)$ nicht definiert ist
- Werte vergleichen $\to$ Minimum/Maximum

Beispiel: Extremalaufgabe

$$f(x) = x^3 - x, \qquad D = [-\tfrac{1}{2}, 1]$$

Randwerte:

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{8}, \qquad f(1) = 0$$

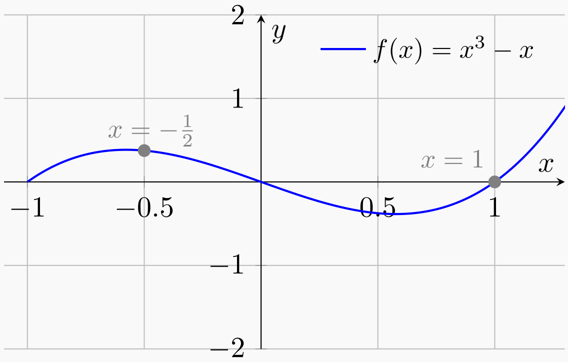
Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nur $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \in D$:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$\Rightarrow$ Globales Maximum: $f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{3}{8}$ Globales Minimum: $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$



2.2.2 Kurvendiskussion

- $f'(\varepsilon) < 0$ negative Steigung im Punkt ε
- $f'(\varepsilon) > 0$ positive Steigung im Punkt ε
- $f'(\varepsilon) = 0$ Extremum im Punkt ε

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(\varepsilon) < 0 & \Rightarrow \text{Maximum im Punkt } \varepsilon \\ f''(\varepsilon) > 0 & \Rightarrow \text{Minimum im Punkt } \varepsilon \\ f''(\varepsilon) = 0 \text{ und } f'''(\varepsilon) \neq 0 & \Rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

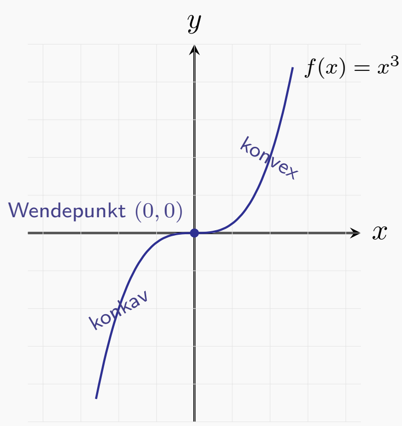
- $f''(\varepsilon) < 0$ Kurve rechts gekrümmt (konkav) im Punkt ε
- $f''(\varepsilon) > 0$ Kurve links gekrümmt (konvex) im Punkt ε
- $f''(\varepsilon) = 0$ Wendepunkt im Punkt ε

$$\Rightarrow \begin{cases} f'''(\varepsilon) < 0 & \Rightarrow \text{links-rechts Wendepunkt im Punkt } \varepsilon \\ f'''(\varepsilon) > 0 & \Rightarrow \text{rechts-links Wendepunkt im Punkt } \varepsilon \end{cases}$$

Beispiel: Kurvendiskussion 1

$$f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 & \text{für } x < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt (konkav)} \\ f''(x) > 0 & \text{für } x > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt (konvex)} \\ f''(0) = 0 & \Rightarrow \text{Wendepunkt im Ursprung (hier sogar Sattelpunkt)} \end{cases}$$



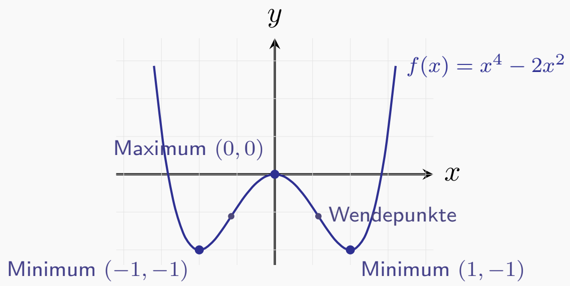
Beispiel: Kurvendiskussion 2

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \quad \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x, \quad f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -4 < 0 & \text{Maximum bei } x = 0 \\ f''(\pm 1) = 8 > 0 & \text{Minima bei } x = \pm 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow f\left(\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\tfrac{5}{9}$$

Wendepunkte bei $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$



2.3 Grössenordnungen von Funktionen

Definition

$f(x)$ ist von **kleinerer Grössenordnung** als $g(x)$, wenn gilt:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Man schreibt mit (kleinem) Landau-o:

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \to \infty}$$

Man sagt auch: $f(x)$ wächst *langsamer* als $g(x)$.

Regeln

- $\ln(x) = o(x^a), \quad a > 0$
- $x^a = o(e^x), \quad a > 0$
- $x^a = o(x^b), \quad a, b > 0, \ a < b$
- $e^{ax} = o(e^{bx}), \quad a, b > 0, \ a < b$

Beispiel: Grössenordnungen

Ordne die folgenden Funktionen nach ihrer Grösse für $x \to \infty$:

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = e^{5x+1}, \quad f_3(x) = \ln(x^3),$$
$$f_4(x) = \ln(e^{x^4} - 2), \quad f_5(x) = \ln(x^2)$$

Berechnung der Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{5x+1}} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{5x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{x^4} - 2)}{x^3} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{x^4})}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^3} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{x^4} - 2)}{e^{5x+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)}{3\ln(x)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad e^{5x+1} > \ln(e^{x^4} - 2) > x^3 > \ln(x^3) \approx \ln(x^2)$$

Obere Schranke

Wenn
$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq A \quad \text{für } A \in [0, \infty),$$
so wächst $f(x)$ *höchstens so schnell wie* $g(x)$ *bis auf einen konstanten Faktor*. Oder in anderen Worten *nicht wesentlich schneller*.

$$\boxed{f(x) = O(g(x))}$$

Beispiel: Vergleich zwischen O und o

Notation	Beispiel	Verhältnis $\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g}$
$f = O(g)$	$3x^2 + 5x = O(x^2)$	$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{x^2} = 3$
$f = o(g)$	$x = o(x^2)$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2} = 0$

mathematisch:
$$\begin{cases} f = O(g(x)) & \Leftrightarrow \exists C > 0 : |f(x)| \leq C\,|g(x)| \\ f = o(g(x)) & \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{cases}$$

2.4 Ebene Kurven

2.4.1 Darstellungsformen

Explizite Darstellung

$$\boxed{y = f(x)}$$

Kurve K ist als Graph einer Funktion gegeben. Nachteil: für jeden x-Wert gibt es nur einen y-Wert!

Implizite Darstellung

$$\boxed{F(x, y) = 0}$$

Kurve K ist als Menge der Punkte (x, y) beschrieben, welche die Gleichung $F(x, y) = 0$ erfüllen.

Parameterdarstellung

$$\boxed{\vec{P}(t) = (x(t),\, y(t))}$$

Kurve K wird durch Koordinaten (x, y) beschrieben, die sich mit der Hilfsvariable t verändern.

Beispiel: Vergleich Darstellungsformen

Wir betrachen die Funktion:

$$y = x^2 - 1$$

Explizite Darstellung:

$$y = f(x) = x^2 - 1$$

Implizite Darstellung:

$$F(x, y) = y - x^2 + 1 = 0$$

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Umwandeln der Darstellung

Explizit $\iff$ Implizit:

Graph nach 0 bzw. nach y auflösen.

Beispiel: Explizit $\iff$ Implizit

$$f(x) = x^3 + 2 = y \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = y - x^3 - 2 = 0$$

$$F(x, y) = 5x + 4y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = y = \tfrac{1}{4}(2 - 5x)$$

Explizit $\Longrightarrow$ Parameterdarstellung:

$x(t) = t,\ y(t) = f(t)$ setzen.

Beispiel: Explizit $\Longrightarrow$ Parameterdarstellung

$$f(x) = x^3 + 2 = y \quad \Rightarrow \quad \vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 + 2 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung $\Longrightarrow$ Explizit:

Mit $x(t)$ und $y(t)$ die Variable t eliminieren.

Beispiel: Parameterdarstellung $\Longrightarrow$ Explizit 1

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t-3 \\ t^3 - t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = t - 3 \Rightarrow t = x + 3$$

$$y = t^3 - t = (x+3)^3 - x - 3$$

Beispiel: Parameterdarstellung $\Longrightarrow$ Explizit 2

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$$

Trick: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$ (implizite Gleichung)

2.4.3 Wichtige Kurven

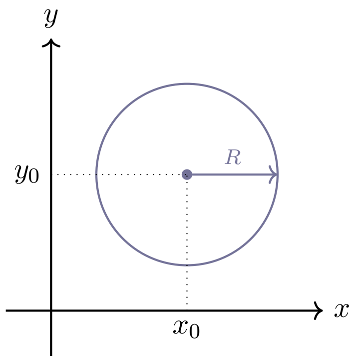
Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius R

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos t \\ y_0 + R\sin t \end{pmatrix}$$

Implizite Darstellung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



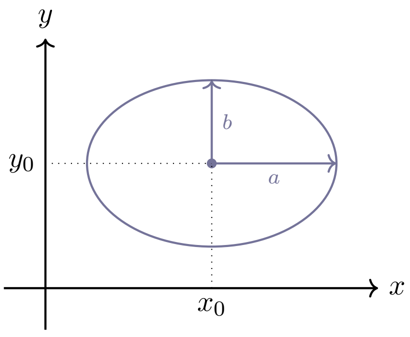
Ellipse mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Halbachsen a und b

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a\cos t \\ y_0 + b\sin t \end{pmatrix}$$

Implizite Darstellung:

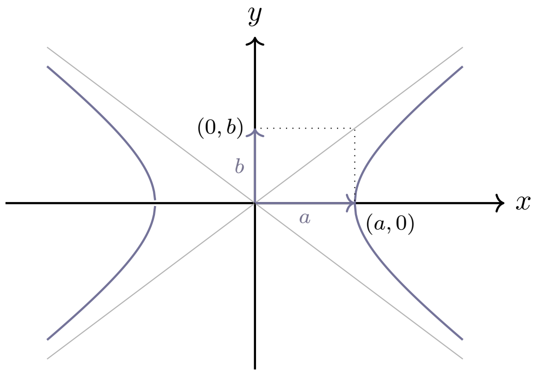
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



Hyperbel mit Achsenparametern a und b

Parameterdarstellung:

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}$$



Implizite Darstellung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

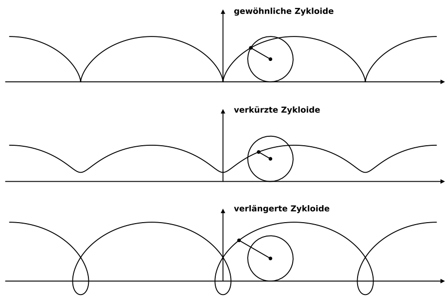
Die Asymptoten haben die Steigungen $y = \pm\frac{b}{a}x$

Zykloide

Eine Zykloide ist die Bahn eines Punktes auf einem Rad, das ohne zu rutschen abrollt.

Parameterdarstellung:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - b \sin t \\ a - b \cos t \end{pmatrix}$$



Typen der Zykloide:

Gewöhnlich: $a = b$

Verkürzt: $a > b$

Verlängert: $a < b$

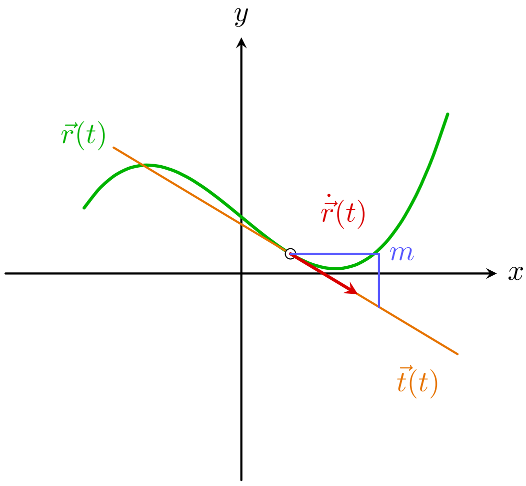
2.4.4 Eigenschaften einer Kurve in Parameterdarstellung

Tangente

Tangente $\vec{t}(s)$ im Punkt P einer parametrierten Kurve $\vec{r}(t)$.

Tangentenrichtung:

$$\boxed{\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}}$$



Tangenten-Gleichung:

$$\boxed{\vec{t}(s) = \vec{r}(t) + s \cdot \dot{\vec{r}}(t)}$$

Tangenten-Steigung:

$$\boxed{m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}}$$

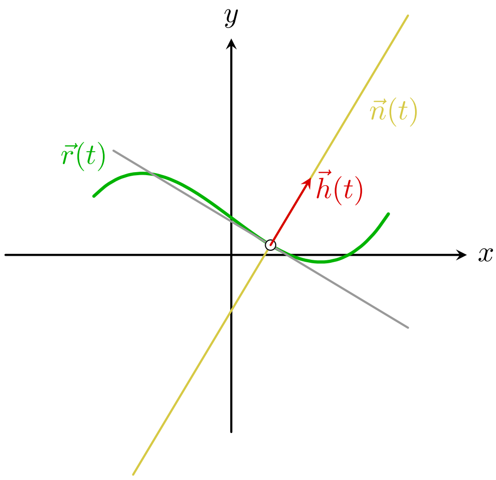
Die Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ geben die Bewegungsrichtung der Kurve an und bestimmen die Richtung der Tangente im Punkt P.

Normale

Normale $\vec{n}(s)$ im Punkt P einer parametrierten Kurve $\vec{r}(t)$.

Normalenrichtung:

$$\boxed{\vec{h}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}}$$



Normalengleichung:

$$\boxed{\vec{n}(s) = \vec{r}(t) + s \cdot \vec{h}(t)}$$

Normaleneinheitsvektor:

$$\boxed{\vec{\hat{n}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}}$$

Krümmung

Krümmung $k(t)$ einer Kurve $\vec{r}(t)$.

Mass dafür, wie schnell sich die Richtung der Tangente ändert.

$$\boxed{k(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}}}$$

$$k(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{linksgekrümmt}$$

$$k(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rechtsgekrümmt}$$

Krümmungskreis

Krümmungskreis K einer Kurve $\vec{r}(t)$.

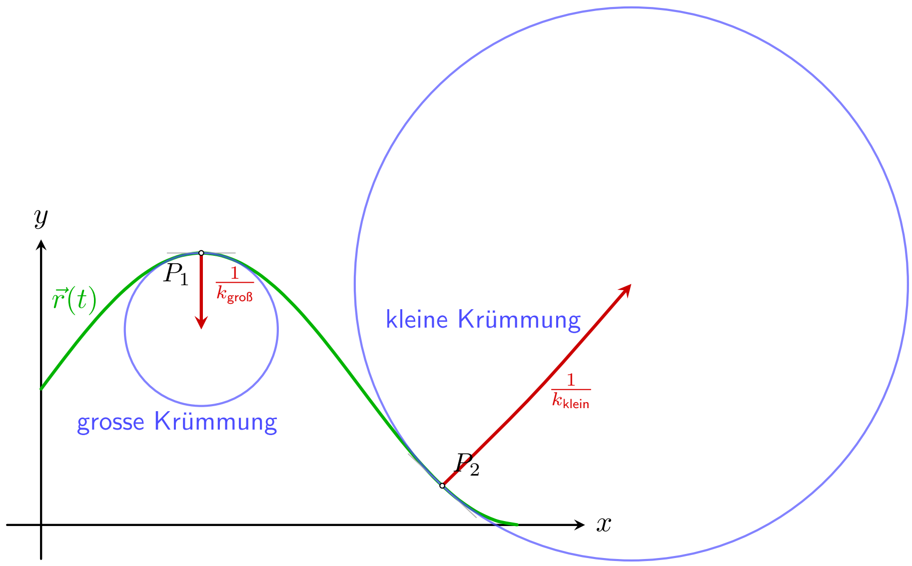
Kreis, der die Kurve im Punkt P lokal am besten annähert (gleiche Tangente und gleiche Krümmung).

Radius:

$$\boxed{r_M = \frac{1}{k(t)}}$$

Mittelpunkt:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)}\,\vec{n}(t)}$$

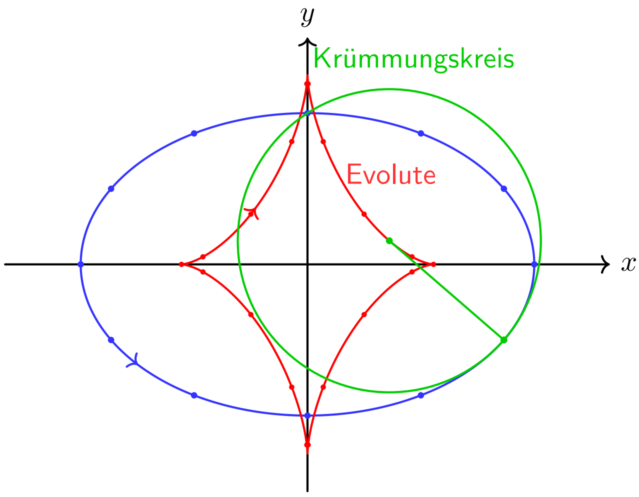


Evolute

Evolute $\vec{E}(t)$ einer Kurve $\vec{r}(t)$.
Ortskurve der Mittelpunkte aller Krümmungskreise der Kurve.

$$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)}\,\vec{\hat{n}}(t)$$

$$\vec{E}(t) = \begin{pmatrix} x - \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}\,\dot{y} \\ y + \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}\,\dot{x} \end{pmatrix}$$



Kapitel 3

Komplexe Zahlen (A)

3.1 Komplexe Zahlen

Definition:

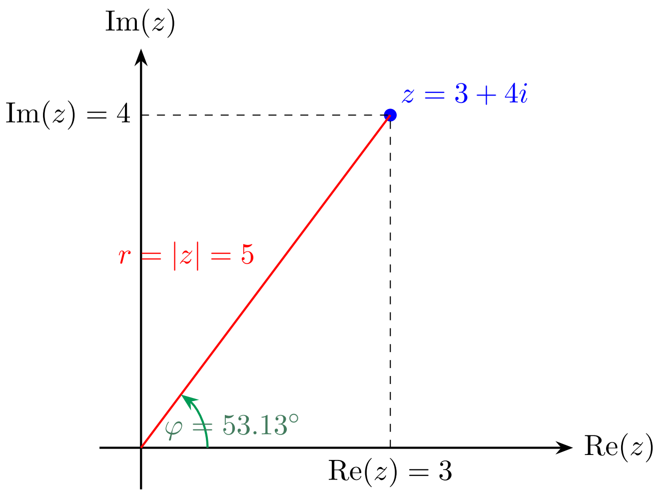
$$\boxed{z = x + yi, \qquad i^2 = -1}$$

- Realteil: $\Re(z) = x$
- Imaginärteil: $\Im(z) = y$

3.1.1 Darstellungsformen

Vergleich

Kartesische Form	$\boxed{x + y\,i}$	$3 + 4i$
Polarform	$\boxed{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$	$5(\cos 53.13^\circ + i\sin 53.13^\circ)$
Exponentialform	$\boxed{r\,e^{i\varphi}}$	$5\,e^{i\cdot 0.93}$



$$\varphi = \arg(z) \qquad \text{(Argument von } z\text{)}$$

3.1.2 Umrechnungen

Radius:

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Argument:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & x < 0,\ y > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi, & x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Wegen der Mehrdeutigkeit des Tangens ist auf das richtige Quadrant zu achten.

Rückrechnung:

$$\boxed{x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi}$$

3.1.3 Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$

$$\begin{aligned} z &= x + yi & &\Rightarrow & \bar{z} &= x - yi \\ z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) & &\Rightarrow & \bar{z} &= r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ z &= re^{i\varphi} & &\Rightarrow & \bar{z} &= re^{-i\varphi} \end{aligned}$$

Eigenschaften:

- $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

- $\overline{z \cdot w} = \bar{z}\,\bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- $\bar{\bar{z}} = z$

3.2 Rechenarten

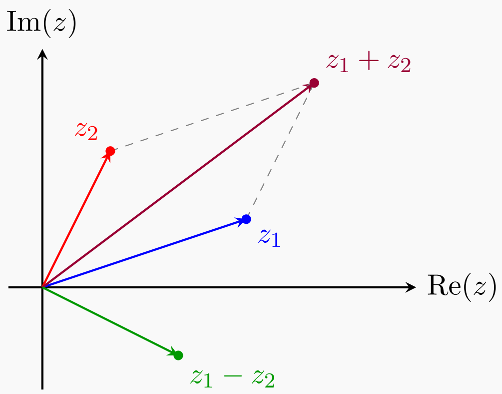
Addition & Subtraktion

$$(z_1 + z_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Beispiel: Addition in Kartesischer Form

$$z_1 = 3 + i, \quad z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 + z_2 = 4 + 3i, \qquad z_1 - z_2 = 2 - i$$



Multiplikation

In kartesischer Darstellung entsteht schnell viel Rechenaufwand. In Polar- oder Exponentialform ist die Multiplikation (und auch Division, Potenzieren und Wurzel ziehen) deutlich einfacher:

Polarform:

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2)\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

Exponentialform:

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beispiel: Kartesische Form

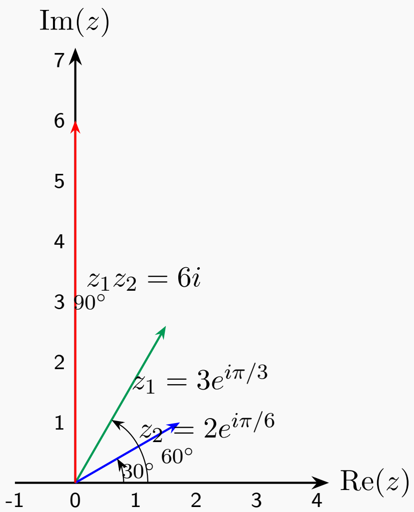
$$(3+i)(1+2i) = 3+7i-2 = 1+7i$$

Beispiel: Polarform

$$z_1 = 3(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}), \quad z_2 = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})$$
$$z_1 z_2 = 6\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = 6i$$

Beispiel: Exponentialform

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_1 z_2 = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$$



Division

Polarform:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Exponentialform:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Beispiel: Kartesische Form

$$\frac{3+i}{1+2i} = \frac{3+i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{5} = 1-i$$

Beispiel: Polarform

$$z_1 = 4(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}), \quad z_2 = 2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} - i\sin\tfrac{\pi}{6})$$

Beispiel: Exponentialform

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Potenzieren

Polarform:

$$z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

Exponentialform:

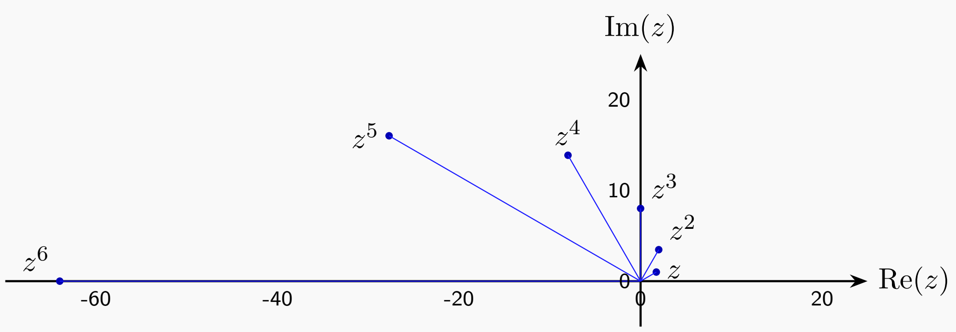
$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Beispiel: Polarform

$$z = \sqrt{3} + i = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})$$
$$z^6 = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$$

Beispiel: Exponentialform

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z^6 = 2^6 e^{i\pi} = -64$$



Wurzelziehen

Es gibt immer genau n Lösungen, die regelmässig auf einem n-Eck mit Radius $\sqrt[n]{|z|}$ liegen. ($\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$)

Um die Wurzel einer komplexen Zahl zu bilden, eignet sich vorallem die eulerische Form:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k)}, \qquad k = 0, \dots, n-1$$

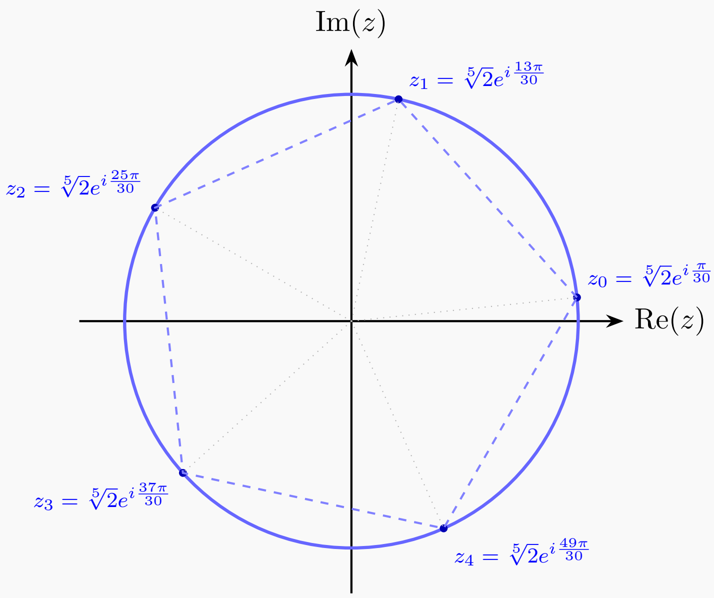
Beispiel: 5. Wurzel von $\sqrt{3} + i$

Betrag und Argument:

$$r = 2, \qquad \varphi = \tfrac{\pi}{6}$$

$$z_k = \sqrt[5]{2}\; e^{i\frac{1}{5}(\frac{\pi}{6} + 2\pi k)}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{\pi}{30}} \\ z_1 &= \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{30}} \\ z_2 &= \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{25\pi}{30}} \\ z_3 &= \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{37\pi}{30}} \\ z_4 &= \sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{49\pi}{30}} \end{aligned}$$



3.3 Quadratische Gleichungen

3.3.1 Imaginäre Nullstellen

Falls die Diskriminante $(b^2 - 4ac)$ einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

negativ wird, so besitzt die Gleichung zwei komplex-konjugierte Lösungen.

Beispiel: Quadratische Gleichungen

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm i \cdot 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}\, i$$

3.3.2 Polynome höherer Ordnung

Jedes Polynom n-ten Grades besitzt n Nullstellen. Diese Nullstellen können auch **komplex** sein.

$\Rightarrow$ Entweder sind sie reell oder treten in komplex-konjugierten Paaren auf!

D. h. ist $1 + i$ eine Nullstelle, so ist $1 - i$ ebenfalls eine Nullstelle.

Beispiel: Polynom mit komplexen Nullstellen

$$x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 14x^2 + 9x - 10 = 0$$

Finde die 5 Nullstellen. Gegeben sei eine Nullstelle:

$$x_1 = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow \text{Dann ist auch } x_2 = 1 - 2i$$

Wir haben also bereits zwei Nullstellen gefunden:

$$(x - (1 + 2i)) \quad \text{und} \quad (x - (1 - 2i))$$

Nun multiplizieren wir diese beiden Faktoren aus, um danach eine Polynomdivision durchzuführen:

$$(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i)) = x^2 - 2x + 5$$

Polynomdivision:

$$(x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 14x^2 + 9x - 10) : (x^2 - 2x + 5) = (x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

Wir müssen jetzt noch die Nullstellen von

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

finden.
Da es sich um ein Polynom 3. Grades handelt, versuchen wir, eine Nullstelle zu **raten**:

Versucht es zuerst mit folgenden Zahlen: $x = -1,\, 1,\, i,\, -i$

Man findet:

$$i^3 - 2i^2 + i - 2 = 0 \Rightarrow -i + 2 + i - 2 = 0$$
$$(-i)^3 - 2(-i)^2 - i - 2 = 0 \Rightarrow i + 2 - i - 2 = 0$$
$$x = \pm i$$

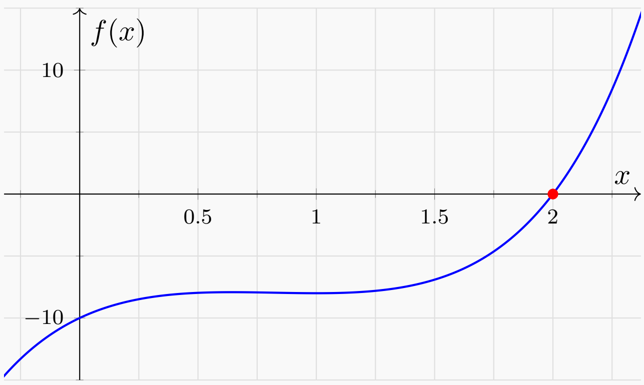
Durch ausklammern der Nullstellen $\pm i$ findet man die letzte Nullstelle:

$$(x^2 + 1)(x - 2) = 0$$

$$x_3 = 2, \quad x_4 = i, \quad x_5 = -i$$

Alle Nullstellen:

$$x_1 = 1 + 2i, \quad x_2 = 1 - 2i, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = i, \quad x_5 = -i$$



Kapitel 4

Integralrechnung (III)

4.1 Integralrechnung

4.1.1 Definitionen

Bestimmtes Integral:

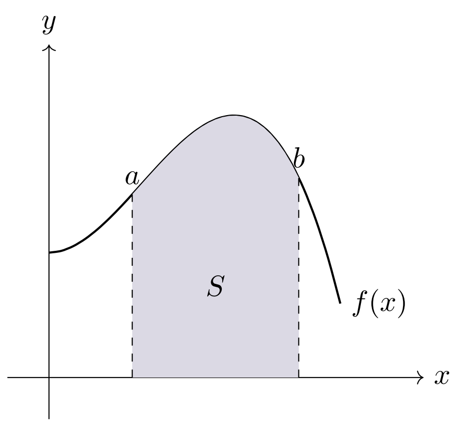
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Unbestimmtes Integral:

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gibt den Flächeninhalt S wieder, der zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$, den Grenzen a, b und der x-Achse eingeschlossen wird.

- Fläche ist positiv, wenn der Graph oberhalb der x-Achse liegt.
- Fläche ist negativ, wenn der Graph unterhalb der x-Achse liegt.



Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Dies bedeutet „unmathematisch“ gesprochen, dass das Integrieren das umgekehrte Ableiten ist.

Beispiel: Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = 3t^2$$

Wir betrachten die Funktion mit $a = 1$

$$G(x) := \int_1^x 3t^2\,dt$$

Integral berechnen:

$$\int 3t^2\,dt = t^3$$

Damit ergibt sich

$$G(x) = \left[t^3\right]_1^x = x^3 - 1$$

Ableiten:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 1) = 3x^2$$

Dies bestätigt den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x 3t^2\,dt\right) = 3x^2 = f(x)$$

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion, dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion.

4.1.2 Rechenregeln

Integrale:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Integrieren:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Wichtige Integrale:

- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
- $\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Beispiel: $ln|x|$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1| + C$$

$$\Rightarrow |x-1| = (x-1) \text{ und } (-x+1)$$

Achtung! $\frac{d}{dx}\ln(x-1) = \frac{1}{x-1}$ $\quad \frac{d}{dx}\ln(1-x) = \frac{1}{1-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x-1}$

4.2 Methoden zur Integralberechnung

4.2.1 Partielle Integration

Definition:

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$$

Beispiel: Partielle Integration

$$\int x\,e^x\,dx$$

$$v = x, \quad v' = 1, \qquad u' = e^x, \quad u = e^x$$

$$\int xe^x\,dx = x\,e^x - \int 1\cdot e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

4.2.2 Substitution

Es gibt kein genaues Rezept, um immer die „richtige“ Substitution zu finden.

Generelles Vorgehen:

1. Substitutionsfunktion $u(x)$ aufstellen.
2. $u(x)$ ableiten $\to u'(x) = \frac{du}{dx}$ und nach dx auflösen.
3. Grenzen anpassen, Grenze x in $u(x)$ einsetzen.
4. Alles substituieren und Integral lösen.

Beispiel: Substitution 1

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, e^{\cos(x)}\, dx$$

1. Substitution:

$$u(x) = \cos(x)$$

2. Ableitung:

$$u'(x) = -\sin(x) = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{du}{\sin(x)}$$

3. Grenzen anpassen:

$$x = 0 \Rightarrow u(0) = \cos(0) = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

4. Substituieren:

$$\sin(x)e^{\cos(x)}dx = \sin(x) \cdot e^u \cdot \left(-\frac{du}{\sin(x)}\right) = -e^u\, du$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{\cos(x)}dx = \int_1^0 -e^u\, du$$

$$= -\left[e^u\right]_1^0 = -(1-e) = e - 1$$

$$e - 1$$

Beispiel: Substitution 2

$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,dx$$

1. Substitution:

$$u = x^2 + 1$$
$$x = \sqrt{u-1}$$

2. Ableitung:

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{du}{2\sqrt{u-1}}$$

3. Neue Grenzen:

$$x = 0 \Rightarrow u(0) = 1, \qquad x = 2 \Rightarrow u(2) = 5$$

4. Substituieren:

$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,dx = \int_1^5 \sqrt{u-1}\cos(u)\left(\frac{du}{2\sqrt{u-1}}\right) = \frac{1}{2}\int_1^5 \cos(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(u)]_1^5 = \frac{1}{2}(\sin 5 - \sin 1)$$

$$\underline{\underline{\frac{\sin 5 - \sin 1}{2}}}$$

4.2.3 Integrale von gebrochenrationalen Funktionen

- Grad des Zählerpolynoms $>$ Grad des Nennerpolynoms $\Rightarrow$ Polynomdivision durchführen. Danach das Polynom in Partialbrüche zerlegen.
- Grad des Zählerpolynoms $\leq$ Grad des Nennerpolynoms $\Rightarrow$ Direkt in Partialbrüche zerlegen (oder direkt Substitution/bekanntes Integral).
- Durch Substitution, Ausklammern oder andere Umformung auf Standardintegrale zurückführen:
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{Artanh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\displaystyle\int x^{-s}\,dx = -\frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}} + C \qquad (s \neq 1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + C$ $\Rightarrow$ gilt für $c - b^2 > 0$

Einfache reelle Nullstellen:

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{x-x_1}$$

Mehrfache reelle Nullstellen (hier 3-fache):

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^3(x-x_1)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3} + \frac{D}{x-x_1}$$

Einfache komplexe Nullstellen (Quadratischer Faktor):
Für einen irreduziblen quadratischen Faktor x^2+px+q

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)(x-x_0)} = \frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{C}{x-x_0}$$

Mehrfache komplexe Nullstellen (hier 3-fache):

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)^3(x-x_0)} = \frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^3} + \frac{G}{x-x_0}$$

Beispiel: Polynomdivision & Partialbruchzerlegung

Wir betrachten das Integral

$$\int \frac{x^3-4x^2}{x^2-4}\,dx$$

Da der Grad des Zählers größer ist als der des Nenners, führt man zunächst eine Polynomdivision durch:

$$\frac{x^3-4x^2}{x^2-4} = x-4+\frac{4x-16}{x^2-4}$$

1. Faktorisieren des Nenners:

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

2. Ansatz der Partialbruchzerlegung:
Wir zerlegen den Bruch

$$\frac{4x-16}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Auf einen gemeinsamen Nenner gebracht ergibt sich:

$$\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

Damit folgt die Gleichung der Zähler:

$$4x-16 = A(x+2)+B(x-2)$$

3. Bestimmen der Koeffizienten A, B:

Variante 1: Koeffizientenvergleich
Ausmultiplizieren:

$$A(x+2)+B(x-2)=(A+B)x+(2A-2B)$$

$$4x+(-16)=(A+B)x+(2A-2B)$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} A+B=4, \\ 2A-2B=-16 \end{cases}$$

Lösen ergibt:

$$A=-2, \qquad B=6$$

Variante 2: geeignete x einsetzen
Setzt man $x=2$, so wird der Term mit B null:

$$4\cdot 2-16=A(2+2)+B(0) \;\Rightarrow\; 8-16=4A \;\Rightarrow\; A=-2$$

Setzt man $x=-2$, so wird der Term mit A null:

$$4(-2)-16=A(0)+B(-2-2) \;\Rightarrow\; -8-16=-4B \;\Rightarrow\; B=6$$

Damit

$$A=-2, \qquad B=6$$

Damit lautet die Partialbruchzerlegung für beide Varianten:

$$\frac{4x-16}{x^2-4}=\frac{-2}{x-2}+\frac{6}{x+2}$$

4. Gesamtausdruck:

$$\frac{x^3-4x^2}{x^2-4}=x-4-\frac{2}{x-2}+\frac{6}{x+2}$$

5. Integrieren:

$$\int \frac{x^3-4x^2}{x^2-4}\,dx=\int\left(x-4-\frac{2}{x-2}+\frac{6}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-4x-2\ln|x-2|+6\ln|x+2|+C$$

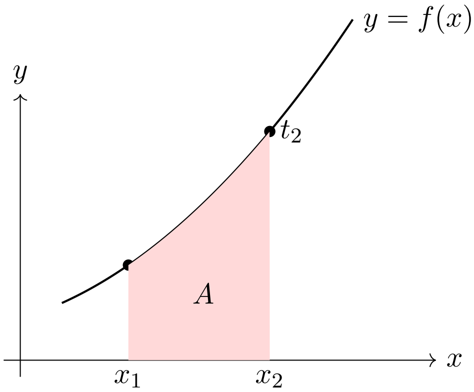
4.3 Anwendungen der Integralrechnung

4.3.1 Flächen

Fläche zwischen Kurve und x-Achse

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$$

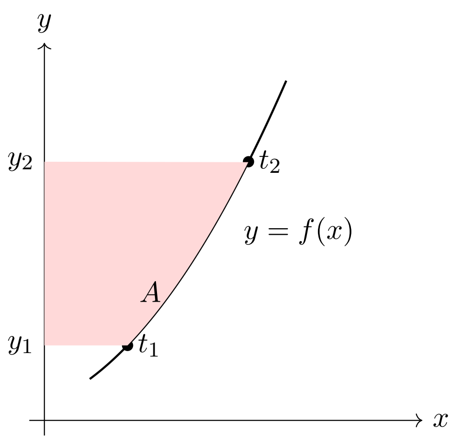
$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \dot{x}(t)\,dt$$



Fläche zwischen Kurve und y-Achse

$$A = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\dot{y}(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f'(x)\,dx$$

$$dy = \frac{dy}{dt}dt = \dot{y}(t)\,dt = \frac{dy}{dt}dt \cdot \frac{dx}{dx} = f'(x)\,dx$$



Beispiel: Ellipse und y-Achse

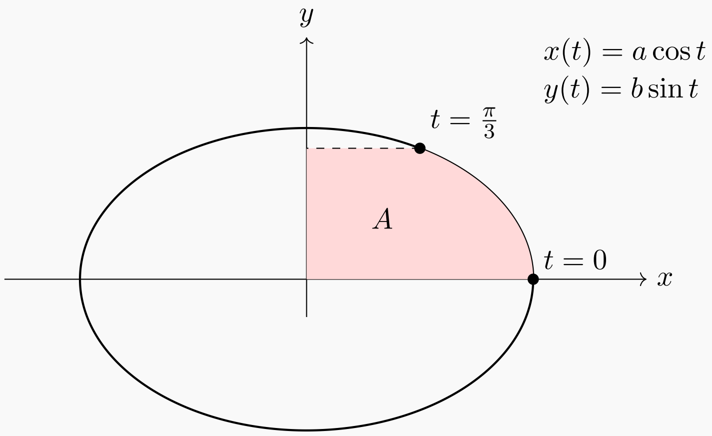
Wir betrachten die Ellipse mit Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$, parametrisiert durch

$$x(t) = a\cos t, \qquad y(t) = b\sin t$$

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Ellipsenbogen für

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

und der y-Achse.



Allgemein gilt für die Fläche zwischen Kurve und y-Achse:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\dot{y}(t)\,dt$$

Für die Ellipse:

$$x(t) = a\cos t, \qquad \dot{y}(t) = b\cos t \quad \Rightarrow \quad x(t)\,\dot{y}(t) = ab\cos^2 t$$

Damit lautet das Flächenintegral

$$A = ab\int_0^{\pi/3} \cos^2 t\,dt$$

Mit der Identität

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

erhalten wir

$$A = ab\int_0^{\pi/3} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/3} (1+\cos(2t))\,dt$$

Stammfunktion:

$$\int (1+\cos(2t))\,dt = t + \frac{\sin(2t)}{2}$$

Also

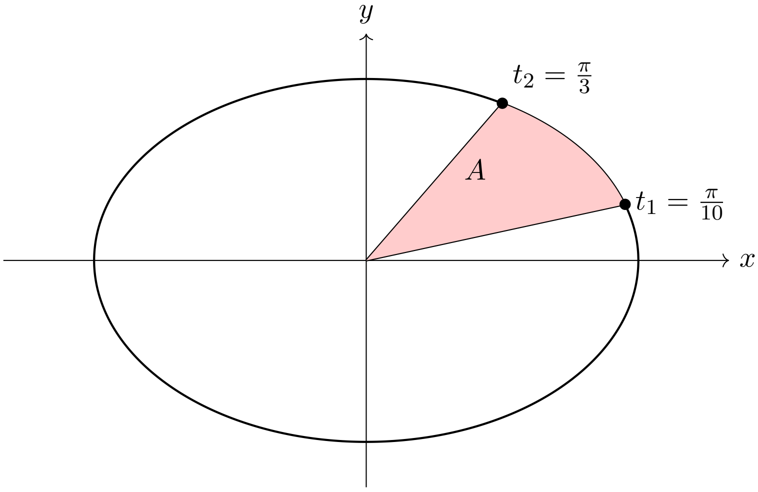
$$A = \frac{ab}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/3} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} - 0\right)$$

Da $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, folgt

$$A = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = ab\left(\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{24}\right)$$

Sektorfläche einer ebenen Kurve

$$A = \left| \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t)\,\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\,y(t)\big)\,dt \right|$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \big(\rho(\varphi)\big)^2\,d\varphi$$

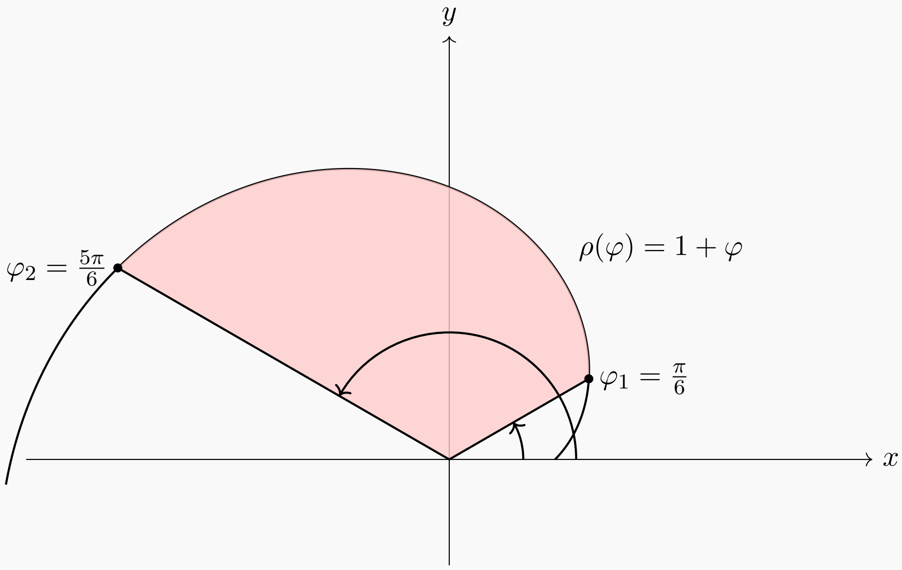


Beispiel: Sektorfläche einer Archimedischen Spirale

Wir betrachten die Archimedische Spirale

$$\rho(\varphi) = 1 + \varphi, \qquad \text{mit } \varphi \geq 0$$

Gesucht ist die Fläche des Sektors zwischen den Winkeln $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ und $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$



Sektorflächenformel in Polarkoordinaten:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \big(\rho(\varphi)\big)^2\,d\varphi$$

Hier also:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1+\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\varphi^2 + 2\varphi + 1\right) d\varphi$$

Stammfunktion bestimmen:

$$\int (\varphi^2 + 2\varphi + 1) \, d\varphi = \frac{\varphi^3}{3} + \varphi^2 + \varphi$$

Also

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi^3}{3} + \varphi^2 + \varphi\right]_{\varphi=\pi/6}^{\varphi=5\pi/6}$$

Grenzen einsetzen:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{125\pi^3 - \pi^3}{3 \cdot 216} + \frac{25\pi^2 - \pi^2}{36} + \frac{5\pi - \pi}{6}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{31\pi^3}{162} + \frac{2\pi^2}{3} + \frac{2\pi}{3}\right]$$

Damit folgt

$$A = \frac{31\pi^3}{324} + \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{3}$$

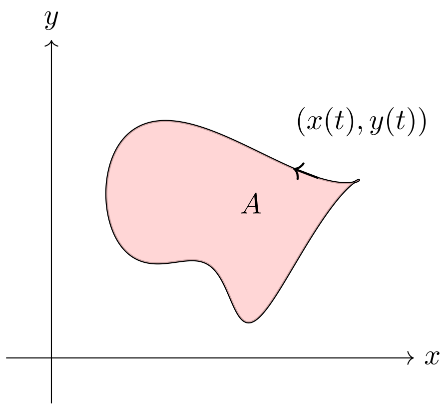
Fläche einer geschlossenen Kurve

Wenn

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2)$$

gilt:

$$A = \left|\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\dot{y}(t)\,dt\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt\right|$$



4.3.2 Bogenlänge

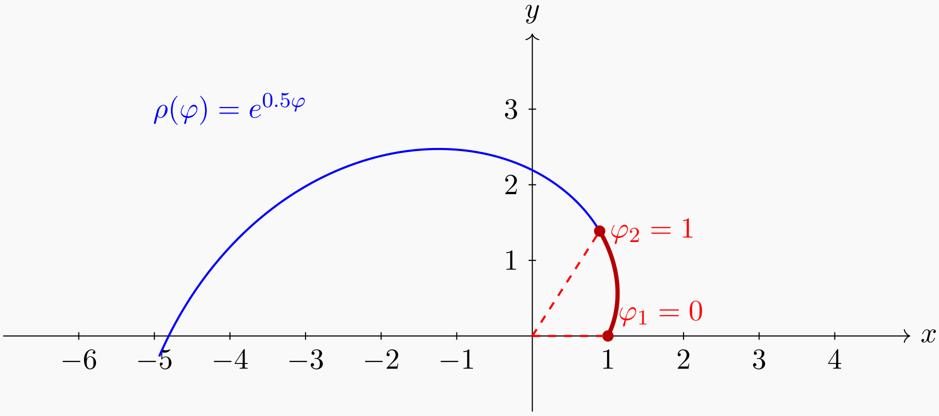
$$L = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}\,d\varphi$$

Beispiel: Bogenlänge einer logarithmischen Spirale

Wir betrachten die logarithmische Spirale in Polarkoordinaten

$$\rho(\varphi) = e^{0.5\varphi}, \qquad \varphi \in [0,1]$$

Gesucht ist die Bogenlänge des Spiralbogens von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_2 = 1$



Bogenlängenformel in Polarkoordinaten

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}\,d\varphi$$

Ableitung von $\rho(\varphi)$:

$$\rho(\varphi) = e^{0.5\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho}(\varphi) = 0.5\,e^{0.5\varphi}$$

Ausdruck unter der Wurzel:

$$\rho^2(\varphi) = e^{\varphi}, \qquad \dot{\rho}^2(\varphi) = 0.25\,e^{\varphi}$$

Damit

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)} = \sqrt{1.25\,e^{\varphi}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,e^{\varphi/2}$$

Integral berechnen:

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^1 e^{\varphi/2}\,d\varphi$$

Also

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} \left[2e^{\varphi/2}\right]_0^1 = \sqrt{5}\left(e^{1/2} - 1\right)$$

4.3.3 Volumen

Rotationskörper

Das Volumen eines Rotationskörpers entsteht durch Rotation einer ebenen Kurve um die x-Achse. Für eine parametrisierte Kurve

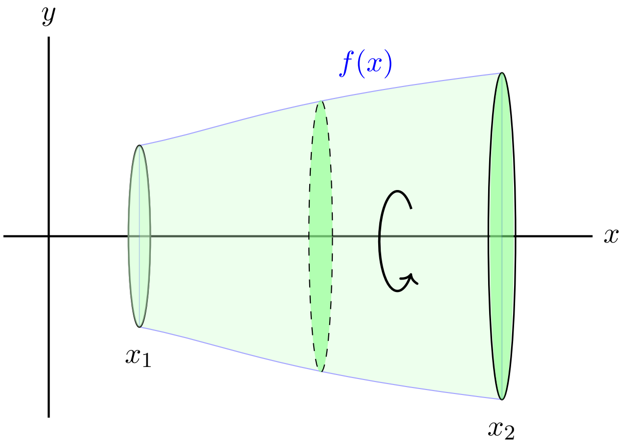
$$\gamma(t) = (x(t),\, y(t)), \qquad t \in [t_1, t_2]$$

gilt dabei:

$$dx = \dot{x}(t)\, dt; \qquad dy = \dot{y}(t)\, dt = f'(x)\, dx$$

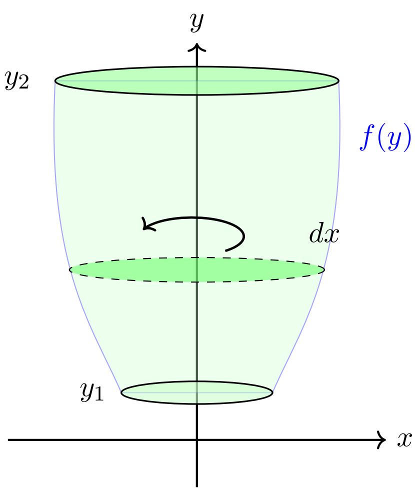
Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2\, \dot{x}(t)\, dt = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2\, dx$$



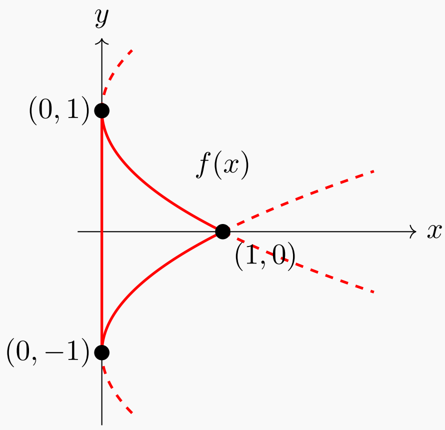
Volumen eines Rotationskörpers um die y-Achse:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2\, \dot{y}(t)\, dt = \pi \int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(y))^2\, dy = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 f'(x)\, dx$$



Beispiel: Rotationsvolumen

Die untenstehende Fläche wird begrenzt durch das Geradenstück von $(0, -1)$ nach $(0, 1)$ und die beiden nach rechts geöffneten Parabelbögen, die in $(0, \pm 1)$ tangential zur y-Achse liegen und sich im Punkt $(1, 0)$ schneiden.
Diese Fläche wird um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers!



Funktion $f(x)$ herausfinden:

$$\text{Parabel: } f(y) = ay^2 + by + c \quad \Rightarrow f(y) = (y-1)^2$$

Nach y auflösen:

$$x = (y-1)^2 \quad \Rightarrow f(x) = y = 1 - \sqrt{x} \quad \text{(Vorzeichen sinnvoll wählen)}$$

$$f(x) = 1 - \sqrt{x}$$

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2 \, dx = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 \, dx$$

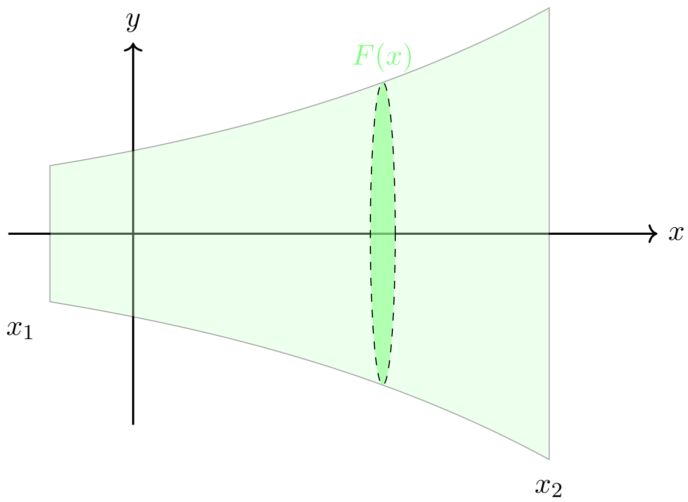
$$= \pi \int_0^1 \left(1 - 2\sqrt{x} + x\right) dx = \pi \left[x - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \pi \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Volumen durch Querschnittsfläche $F(x)$

Das Volumen eines Körpers, dessen Querschnitt senkrecht zur x-Achse an jeder Stelle x die Fläche $F(x)$ besitzt, lässt sich durch folgende Formel berechnen:

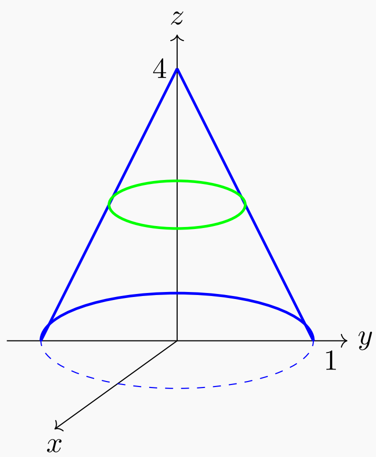
$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \, dx$$



Beispiel: Volumen durch Querschnittsfläche

Die Querschnittsfläche $F(z)$ eines Kegels ist ein Kreis. Der Radius hängt linear von der Höhe z ab.

$$F(r) = \pi r^2$$
$$V = \int_{z_1}^{z_2} F(z)\,dz$$



Aus der Skizze lesen wir die Mantellinie ab:

$$z(y) = -4y + 4$$

Wir lösen dies nach y auf, denn der Radius des Kreises ist $r = y(z)$:

$$y = r(z) = \frac{1}{4}(4 - z)$$

Damit wird die Querschnittsfläche zu

$$F(z) = \pi \left(\frac{1}{4}(4 - z)\right)^2$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Höhe des Kegels:

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 4$$

Volumenberechnung:

$$V = \int_0^4 \pi \left(\frac{1}{4}(4-z)\right)^2 dz$$

Zunächst ausklammern:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

also

$$V = \frac{\pi}{16}\int_0^4 (4-z)^2\, dz = \frac{\pi}{16}\int_0^4 (16 - 8z + z^2)\, dz$$

Integrieren und einsetzen der Grenzen:

$$V = \frac{\pi}{16}\left[16z - 4z^2 + \frac{1}{3}z^3\right]_0^4$$

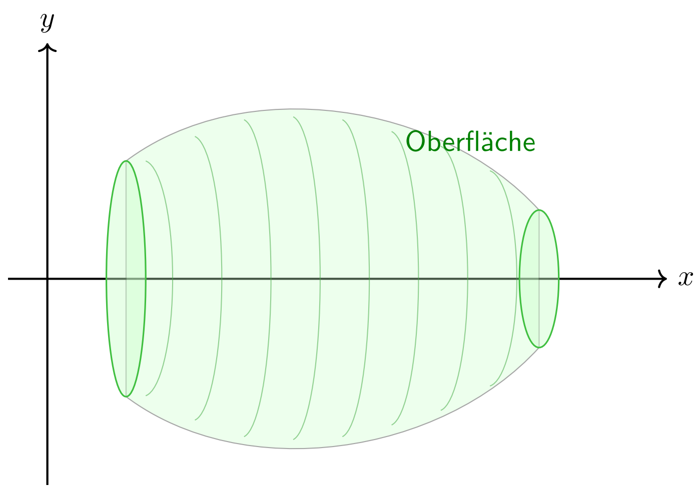
$$V = \frac{\pi}{16}\left(64 - 64 + \frac{64}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

4.3.4 Oberflächen

Oberfläche eines Rotationskörpers um die x-Achse:

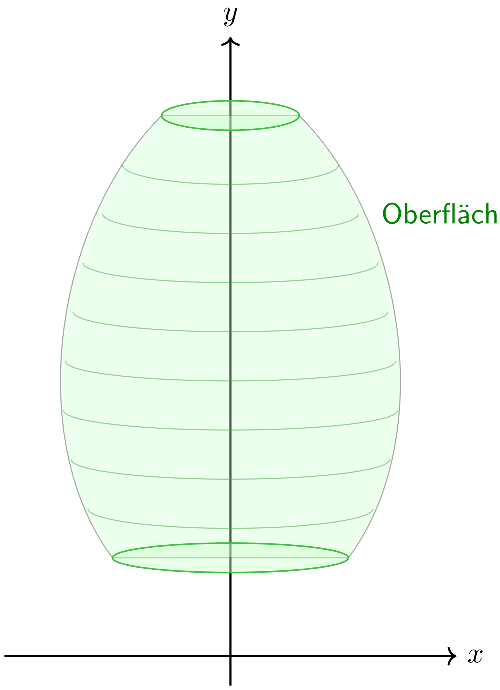
Ist eine Kurve durch $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ gegeben, so hat der Rotationskörper um die x-Achse die Oberfläche

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$



Oberfläche eines Rotationskörpers um die y-Achse:

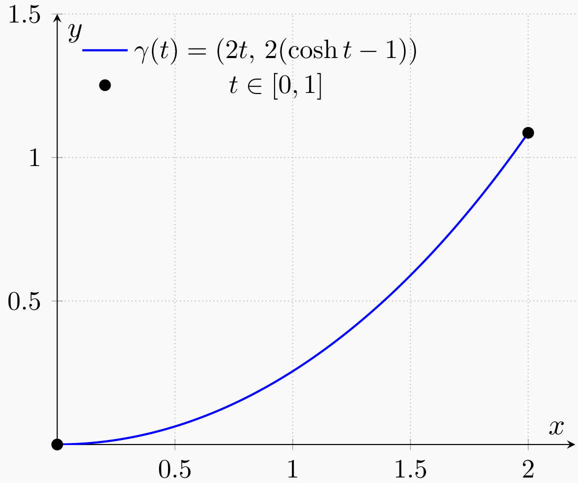
$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x(y)\sqrt{1 + f'(y)^2}\,dy$$



Beispiel: Volumenkörper

Gegeben sei die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2(\cosh t - 1) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$



Wie lautet die Oberfläche des Körpers, wenn man sie um die x-Achse rotiert?

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$$

Wir bestimmen die Ableitungen:

$$\dot{x}(t) = 2, \qquad \dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\big(2(\cosh t - 1)\big) = 2\sinh t$$

Damit lautet die Oberfläche:

$$A = 2\pi \int_0^1 2(\cosh t - 1)\,\sqrt{4 + 4\sinh^2 t}\,dt$$

Wir kürzen in der Wurzel:

$$\sqrt{4 + 4\sinh^2 t} = 2\sqrt{1 + \sinh^2 t} = 2\cosh t$$

Also:

$$A = 2\pi \int_0^1 2(\cosh t - 1) \cdot 2\cosh t\,dt = 8\pi \int_0^1 \big(\cosh^2 t - \cosh t\big)\,dt$$

Wir integrieren:

$$\int \cosh^2 t\,dt = \int \frac{\cosh(2t) + 1}{2}\,dt = \frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{t}{2}, \qquad \int \cosh t\,dt = \sinh t$$

Einsetzen der Grenzen:

$$A = 8\pi \left[\frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{t}{2} - \sinh t\right]_0^1 = 8\pi \left(\frac{1}{4}\sinh 2 + \frac{1}{2} - \sinh 1\right)$$

4.3.5 Flächenschwerpunkt

Der Schwerpunkt (x_s, y_s) eines ebenen Körpers mit Fläche A und Randfunktion wird durch die Integrale über infinitesimale Flächenelemente beschrieben.

Die Fläche lässt sich sowohl über x als auch über y aufintegrieren:

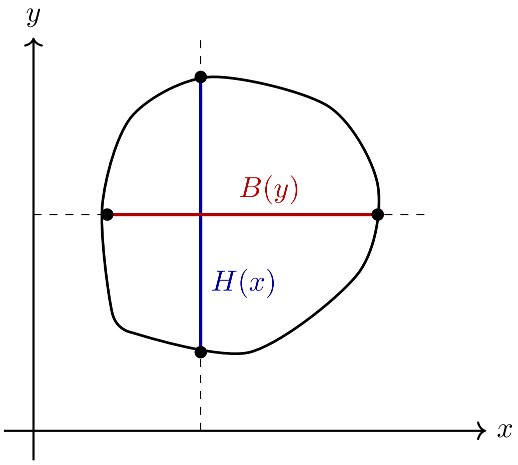
$$A = \int_{x_1}^{x_2} H(x)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} B(y)\,dy$$

$$x_s = \frac{1}{A}\int_{x_1}^{x_2} x\,H(x)\,dx, \qquad y_s = \frac{1}{A}\int_{y_1}^{y_2} y\,B(y)\,dy$$

Hierbei ist $H(x)$ die *Höhe* der Fläche im Abstand x zur y-Achse, und $B(y)$ die *Breite* der Fläche im Abstand y zur x-Achse.

$$H(x)\,dx \quad \text{und} \quad B(y)\,dy$$

sind die zugehörigen infinitesimalen Flächenelemente.



4.3.6 Trägheitsmoment

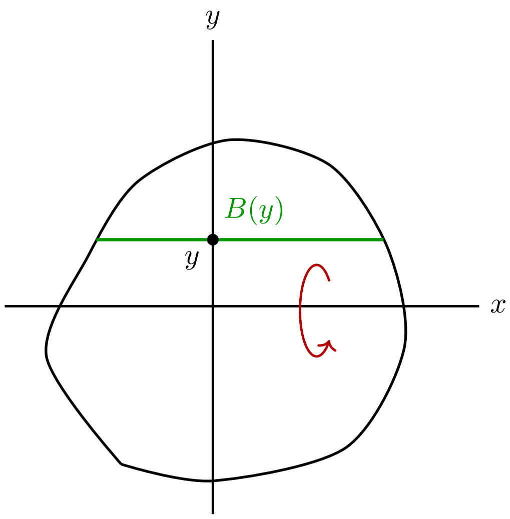
Flächenträgheitsmomente

Für eine ebene Fläche gilt:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} H(x)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} B(y)\,dy$$

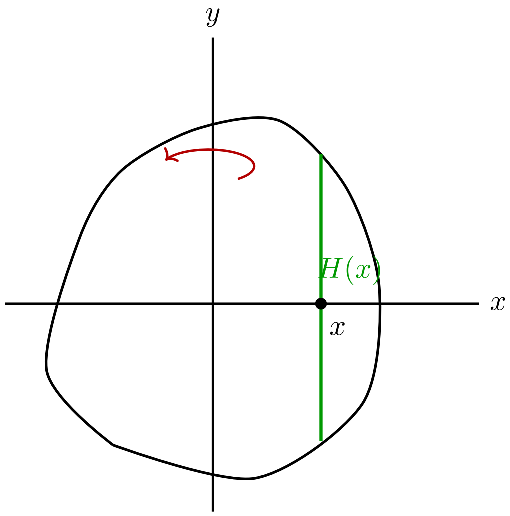
Bezüglich der x-Achse:

$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} y^2\,B(y)\,dy$$



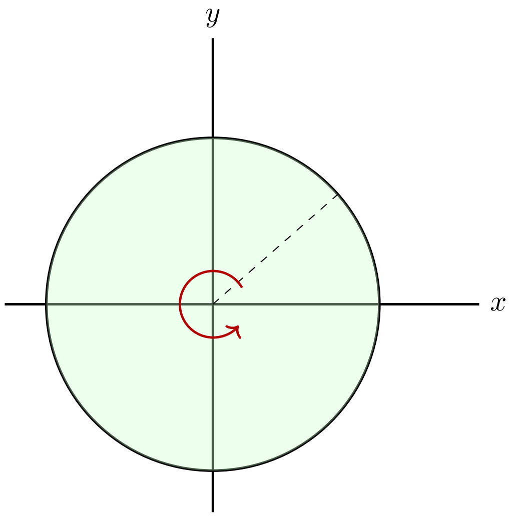
Bezüglich der y-Achse:

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2\,H(x)\,dx$$



Polares Trägheitsmoment:

$$I_p = I_x + I_y$$



Massenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment misst, wie *träge* eine Fläche gegenüber einer Rotation um eine bestimmte Achse ist. Es hängt davon ab, wie weit die Flächenelemente vom Drehzentrum entfernt liegen. Hier ist aber im gegensatz zum Flächenträghetismoment die Diche ρ nicht zwingend einheitlich oder $= 1$

Trägheitsmoment eines rotierenden Graphen mit einheitlicher Dichte ($\neq 1$)bezüglich der x-Achse:

$$\theta_x = \frac{\pi\rho}{2}\int_a^b f(x)^4\,dx$$

Massenträgheitsmoment eines Körpers mit uneinheitlicher Dichte bezüglich der y-Achse:

$$\theta_y = \int_a^b \rho(x)\, x^2\, G(x)\, dx$$

Hierbei bezeichnet - $\rho(x)$ die Linien- oder Flächendichte, - $G(x)$ die Breite des Querschnitts senkrecht zur x-Achse, - $f(x)$ den Radius der rotierenden Figur bei Rotation um die x-Achse.

Kinetische Rotationsenergie:

$$T = \frac{1}{2}\,\theta_{x,y,z}\,\omega^2$$

Dabei ist $\theta_{x,y,z}$ das Trägheitsmoment bezüglich der jeweiligen Rotationsachse und ω die Winkelgeschwindigkeit.

4.4 Uneigentliche Integrale

4.4.1 Uneigentliche Integrale 1. Gattung

Sei f auf dem Intervall $[a, b)$ definiert, wobei f bei b nicht definiert ist (z.B. Pollstelle oder Definitionslücke). Dann ist das uneigentliche Integral definiert durch:

$$\int_a^{\text{undef}} f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\beta\to\text{undef}} \int_a^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\text{undef}} [F(x)]_a^{\beta}$$

Beispiel: 1. Gattung mit Lösung

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Da $\ln(x)$ bei $x = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir den Grenzwert:

$$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 0^+} \int_\beta^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Eine Stammfunktion von $\ln(x)$ ist

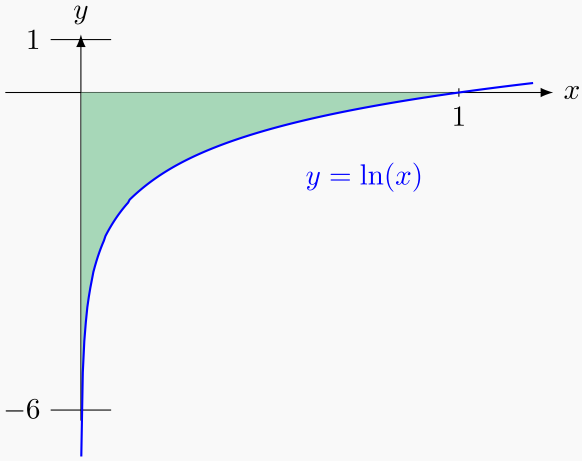
$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x(\ln(x) - 1)$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\beta\to 0^+} [x(\ln(x) - 1)]_\beta^1 = \lim_{\beta\to 0^+} \Big(\ln(1) - 1 - (\beta\ln(\beta) - \beta)\Big)$$

Da $\beta\ln(\beta) \to 0$, folgt

$$\Big(0 - 1 - 0 - 0\Big) = -1$$



Beispiel: 1 Gattung ohne Lösung

Berechne das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Da der Integrand bei $x = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir den Grenzwert:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 0^+} \int_\beta^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist $\ln(x)$. Somit:

$$\lim_{\beta\to 0^+} [\ln(x)]_\beta^1 = \lim_{\beta\to 0^+} \big(\ln(1) - \ln(\beta)\big)$$

$\ln(\beta) \to -\infty$ für $\beta \to 0^+ \Rightarrow \big(0 - (-\infty)\big) \Rightarrow$ Das Integral ist divergent (existiert nicht)

4.4.2 Uneigentliche Integrale 2. Gattung

Sei f auf $[a, \infty)$ definiert. Dann ist das uneigentliche Integral der 2. Gattung definiert durch

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty} [F(x)]_a^\beta$$

Hinweis:

Besitzt ein uneigentliches Integral der 2. Gattung zwei unendliche Integrationsgrenzen, so muss es an einer *beliebigen* endlichen Stelle c aufgeteilt werden:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das Integral ist genau dann konvergent, wenn *beide* Teilintegrale konvergieren.

Beispiel 2: Uneigentliches Integral mit zwei unendlichen Grenzen

Überprüfe, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

einen endlichen Wert besitzt.

Das Integral ist ein uneigentliches Integral der 2. Gattung mit zwei unendlichen Integrationsgrenzen. Es wird daher in zwei Teilintegrale zerlegt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

Für das linke Teilintegral gilt

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to -\infty} \left[\arctan(x)\right]_{\alpha}^{0} = \frac{\pi}{2}$$

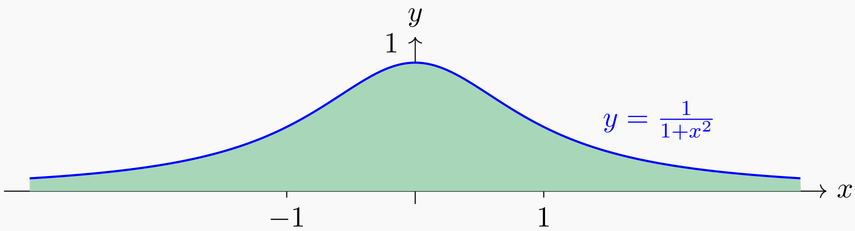
Analog erhält man für das rechte Teilintegral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} , \mathrm{d}x = \lim_{\beta \to \infty} \left[\arctan(x)\right]_{0}^{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

Durch Addition folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral ist konvergent.



Beispiel: 2. Gattung ohne Lösung

Berechne das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Wir schreiben das Integral als Grenzwert:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Mit der Stammfunktion $\ln(x)$ folgt:

$$\lim_{\beta\to\infty}\left[\ln(x)\right]_1^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\big(\ln(\beta) - \ln(1)\big)$$

$\ln(\beta) \to \infty$ für $\beta \to \infty \Rightarrow \big(\infty - 0\big) \Rightarrow$ Das Integral ist divergent (existiert nicht).

Kapitel 5

Potenzreihen (VIII)

5.1 Potenzreihen

5.1.1 Konvergenz von Reihen

Recap Kapitel 1: Konvergiert die Folge der Partialsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ gegen S, so heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Des weiteren gilt dann $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S}$$

5.1.2 Geometrische Reihe

Wir kennen folgende reihe bereits aus Kapitel 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

Wir sehen hier, dass wir die folgende Funktion $\frac{1}{1-x}$ auch als **Potenzreihe** schreiben können. Dies führt zur Frage, ob auch allgemeine Funktionen lokal durch Potenzreihen beschrieben werden können.

Die Antwort liefert die Taylorreihe: Sie ist eine spezielle Potenzreihe, deren Koeffizienten so gewählt sind, dass die Potenzreihe im Entwicklungspunkt dieselben Ableitungen wie die Funktion besitzt.

5.1.3 Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Reihe, die aus der Summe von Potenzen besteht. Die Potenzen werden jeweils noch mit den Vorfaktoren a_n multipliziert.

Definition:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

x_0 ist der Entwicklungspunkt (oder Zentrum) der Potenzreihe. Die Reihe beschreibt also die Funktion in der Umgebung von x_0.

Idee der Potenzreihe

Die Idee hinter Potenzreihen ist es, komplizierte Funktionen durch Polynome zu approximieren. Wie wir sehen werden ist die Approximation mit zunehmenden Grad der Polynome, also die höchste Potenz, genauer.

Beispiel: $\cos(x)$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

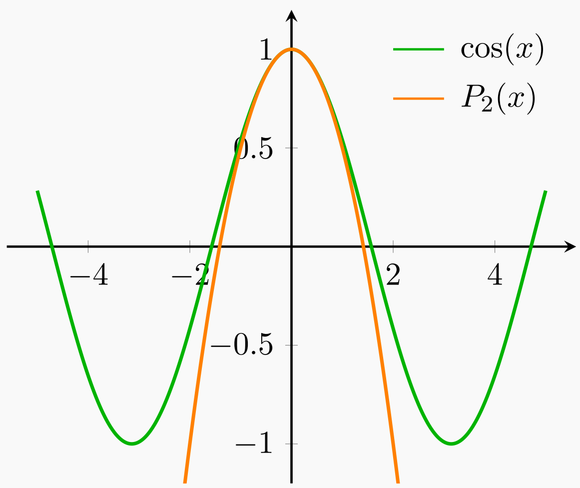
Dies ist die allgemeine Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) von $\cos(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

Das Polynom $P_2(x)$ stimmt in der Nähe von $x = 0$ sehr gut mit $\cos(x)$ überein — je höher der Grad n, desto genauer wird die Approximation.

Vergleich:

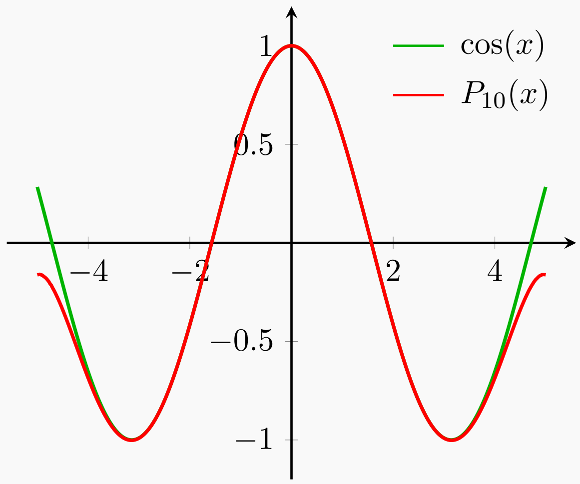
P_2

$$\cos(x) \approx P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$



P_{10}

$$P_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$



5.1.4 Konvergenzradius

Das Konvergenzintervall beschreibt den Bereich einer Funktion $f(x)$, in dem sie als Potenzreihe dargestellt werden kann.

Der Konvergenzradius ist die halbe Länge des Konvergenzintervalls.

Der Konvergenzradius lässt sich über das **Quotientenkriterium** berechnen:

$$\boxed{r_K = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

Interpretation:

Divergenz $|x| > r_K$ Konvergenz $|x| < r_K$

Der Konvergenzradius gibt also an, für welche Werte von x die Potenzreihe konvergiert.

Beispiel: Bestimmung des Konvergenzradius

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^k$$

Bestimme den Konvergenzradius r_K:

Wir verwenden die Formel:

$$r_K = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Hier ist

$$a_n = \frac{3^n}{n+1}$$

Damit folgt:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{3^n}{n+1}}{\frac{3^{n+1}}{n+2}} = \frac{3^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{3^{n+1}} = \frac{n+2}{3(n+1)}$$

Wir bilden den Grenzwert:

$$r_K = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\implies r_K = \frac{1}{3}$$

Interpretation:

$$\text{Konvergent für } |x| < \frac{1}{3}, \qquad \text{divergent für } |x| > \frac{1}{3}$$

5.2 Taylorpolynome & Taylorreihe

5.2.1 Zusammenhang zwischen Ableitung und Taylorpolynom

$\Rightarrow$ Damit die Approximation gut ist, muss sie gewisse Bedingungen erfüllen.

- Gleicher *Stützpunkt*: $P_n(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(0)$
- Gleiche *Steigung*: $P_n'(0) = f'(0) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$
- Gleiche *Krümmung*: $P_n''(0) = f''(0) \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$

  $\vdots$
- $\cdots$ $P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Jeder Koeffizient beeinflusst genau eine einzige Ableitung

5.2.2 Taylorpolynom P_n

Wird berechnet, um Funktionen in der Umgebung eines Punktes x_0 durch Polynome anzunähern. Taylorpolynome sind spezielle Potenzreihen, bei denen a_k von den Ableitungen abhängen.

Berechnung Taylorpolynom

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$P_n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

5.2.3 Taylorreihe

Taylorreihe $\widehat{=}$ Taylorpolynom vom „Grad ∞“

Taylorreihe von $f(x)$ um beliebigen Punkt x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Die wichtigsten Taylorreihen

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ (im Punkt $x_0 = 0$)
- $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ (im Punkt $x_0 = 0$, $|x| < 1$)
- Bei ungeraden Funktionen sind alle geraden Koeffizienten $= 0$
- Bei geraden Funktionen sind alle ungeraden Koeffizienten $= 0$ (bei $x_0 = 0$)

Beispiel: Taylorreihe mit Hilfe bekannter Reihen 1

Berechne: Taylorreihe von $\frac{1}{2x+5}$ bei $x_0 = -1$

Wir bringen

$$\frac{1}{2x+5}$$

in die Form einer geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q}$, da wir die Taylorreihe dieser Funktion kennen: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$$\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{2(x+1)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}(x+1)}$$

$$\text{mit } q = -\frac{2}{3}(x+1)$$

Damit:

$$\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k (x+1)^k$$

Beispiel: Taylorreihe mit Hilfe bekannter Reihen 2

Berechne: Taylorreihe von $\ln(x)$ bei $x_0 = 3$

Wir kennen die Taylorreihe von $\ln(1 + (x - x_0))$, also formen wir unsere gegebene Funktion danach um:

$$x = 3 + (x-3) \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = \ln(3 + (x-3)) = \ln\left(3\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)\right)$$

$$\ln(x) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)$$

Die bekannte Reihe:

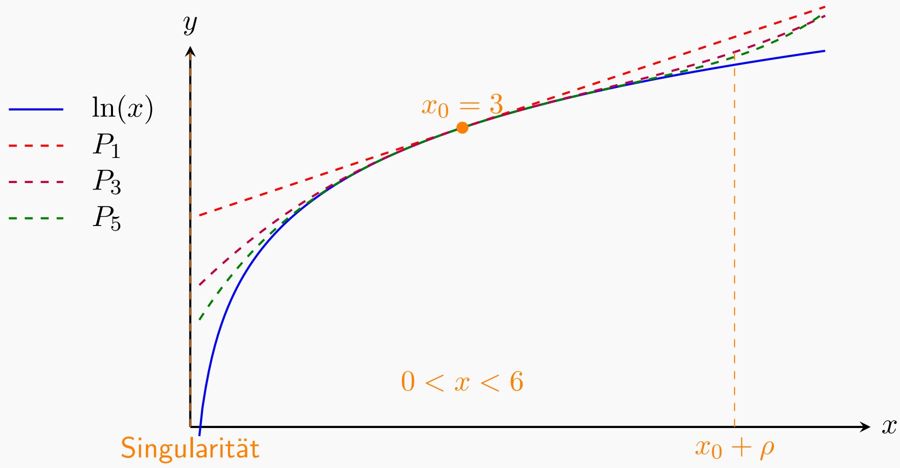
$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$$\text{mit } z = \frac{x-3}{3}$$

Einsetzen:

$$\ln(x) = \ln(3) + \frac{x-3}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-3}{3}\right)^3 - \dots$$

$$\Longrightarrow \ln(x) = \ln(3) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{x-3}{3}\right)^k \text{ um Mittelpunkt } x_0 = 3$$



Berechne: Konvergenzradius der Taylorreihe von $\ln(x)$ um $x_0 = 3$

Aus der Herleitung oben erhalten wir:

$$\ln(x) = \ln(3) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\frac{x-3}{3} \right)^k$$

Dies ist eine Potenzreihe in $(x-3)$ der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-3)^k \quad \text{mit} \quad a_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k\,3^k}$$

Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum a_k (x-3)^k$ gilt

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{k+1} \frac{1}{k\,3^k}}{(-1)^{k+2} \frac{1}{(k+1)\,3^{k+1}}} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k3^k} \cdot \frac{(k+1)\,3^{k+1}}{(-1)^{(k+2)}} \right| = \left| -1 \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{3}{1} \right|$$

Nun bilden wir den Grenzwert:

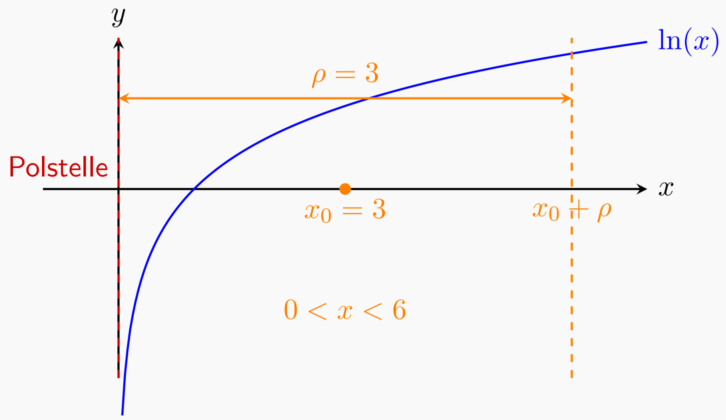
$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} 3 \cdot \frac{k+1}{k} = 3 \cdot 1 = 3$$

Damit ist der Konvergenzradius

$$\rho = 3$$

Die Taylorreihe konvergiert also für

$$|x-3| < 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 6$$



In 99% der Fälle ist der Konvergenzradius genau der Abstand vom Entwicklungspunkt x_0 zur nächsten Definitionslücke/Polstelle.

Schneller Weg:

Die Funktion $\ln(x)$ besitzt im Reellen eine Singularität bei

$$x = 0$$

Die Taylorentwicklung erfolgt um den Punkt

$$x_0 = 3$$

Der Konvergenzradius ist der Abstand zwischen x_0 und der nächsten Singularität:

$$\rho = |x_0 - 0| = 3$$

$$\rho = 3$$

Beispiel: Koeffizientenvergleich

Berechne: Taylorreihe von $\tan(x)$ im Punkt $x_0 = 0$
Wir setzen an:

$$\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Da

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \Rightarrow \qquad \tan(x)\cos(x) = \sin(x)$$

Wir kennen die Taylorreihen vom $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Koeffizientenvergleich

- $a_0 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$
- $a_1 x \cdot 1 = x \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1$
- $a_2 x^2 \cdot 1 + a_0\left(-\frac{x^2}{2!}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$

- $a_3x^3 \cdot 1 + a_1\left(-\frac{x^2}{2!}\right) = -\frac{x^3}{3!}$

$$a_3x^3 - \frac{1}{2}x^3 = -\frac{1}{6}x^3$$

$$a_3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3}$$

- $a_4x^4 \cdot 1 + a_2x^2\left(-\frac{x^2}{2!}\right) + a_0\left(\frac{x^4}{4!}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 0$
- $a_5x^5 \cdot 1 + a_3x^3\left(-\frac{x^2}{2!}\right) + a_1x\left(\frac{x^4}{4!}\right) = \frac{x^5}{5!}$

$$a_5x^5 - \frac{a_3}{2}x^5 + \frac{a_1}{24}x^5 = \frac{1}{120}x^5$$

Einsetzen von $a_3 = \frac{1}{3}$ und $a_1 = 1$:

$$a_5 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120}$$

Wir fassen zusammen:

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = -\frac{4}{24} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{8}$$

Also:

$$a_5 - \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{1}{120} + \frac{1}{8} = \frac{1}{120} + \frac{15}{120} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \quad a_5 = \frac{2}{15}$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$